



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Teoría de juegos y su aplicación en la guerra entre
Coca-Cola y Pepsi

Tesis presentada al

Colegio de Matemáticas

como requisito parcial para la obtención del grado de

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

por

Adriana González Quiroz

Asesorada por

Dr. Rei Israel Ortega Gutiérrez y Dr. Hugo Adán Cruz Suárez

Puebla Pue.
9 de mayo de 2023



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Teoría de juegos y su aplicación en la guerra entre
Coca-Cola y Pepsi

Tesis presentada al

Colegio de Matemáticas

como requisito parcial para la obtención del grado de

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

por

Adriana González Quiroz

Asesorada por

Dr. Rei Israel Ortega Gutiérrez y Dr. Hugo Adán Cruz Suárez

Puebla Pue.
9 de mayo de 2023

Título: Teoría de juegos y su aplicación en la guerra entre Coca-Cola y Pepsi

Estudiante: ADRIANA GONZÁLEZ QUIROZ

COMITÉ

Víctor Hugo Vázquez Guevara
Presidente

Rubén Blancas Rivera
Secretario

José Juan Castro Alva
Vocal

Dr. Rei Israel Ortega Gutiérrez
Asesor

Dr. Hugo Adán Cruz Suárez
Asesor

Agradecimientos

A mis padres Lolis y Carlos. A mi mamá por apoyarme a lo largo de toda mi vida, siempre poniendo el bienestar de sus hijos antes que a ella, gracias por nunca dejarnos a pesar de lo difícil que fue. A mi papá por formar mi carácter, por ti nunca viví con miedo y siempre solo por mí.

A mi hermano Carlos. Gracias por compartir tu vida conmigo, se que no fue tu decisión pero eres el mejor hermano que pude tener, disfruté pasar mi tiempo contigo, las peleas y las risas. Eres el modelo de persona que siempre quise ser, te quiero mucho adoptado.

A mis asesores Rei y Hugo. Rei, gracias por aceptar trabajar conmigo y perdón por todas las molestias que le cause, usted es el mejor profesor que he tenido y es un honor que sea mi asesor, este trabajo no hubiera sido nada sin usted. Hugo, gracias por todo su apoyo y por brindar su conocimiento a este trabajo.

A Monse, alias bebé. La mejor decisión que tome en estos 5 años fue llegar tarde el primer día de clases, gracias a ello te conocí, mi mejor amiga. Esta aventura fue increíble contigo a mi lado, sufriendo y creciendo juntas, tu le diste color a mi vida, por ti soy mejor persona, gracias.

A Nahum. Cuando estaba perdida y no sabía que hacer, apareciste tú, para darme una mano y seguir adelante, gracias, sin ti me hubiera rendido.

A los ASKA. El grupo que formamos para sobrevivir. Andy, gracias por acompañarme desde el primer semestre, me divertí mucho en todas las clases que tomé contigo, eres una gran amiga. Saúl, en ti encontré un amigo para hablar de las cosas difíciles de la vida, en quien apoyarme cuando hace falta, gracias. Karlita, me alegro de que seamos amigas, disfrute mucho tu compañía y gracias por ayudarme cuando no me lo merecía. Gracias a los tres por todo, sin ustedes no hubiera acabado esta difícil carrera.

A David y a Fer. Cuando más lo necesitaba llegaron ustedes, metiéndose a mi vida poco a poco con sus chistes y sus tonterías. Gracias por aceptarme, los quiero mucho.

A mi jurado. Por el interés, apoyo y critica necesaria para la realización de este trabajo.

A mis preciados amigos. Gracias por su apoyo, comprensión y animo durante la realización de esta tesis. Disfrute mucho todas las aventuras que vivimos, cada clase que sufrimos juntos y cada charla alegre, triste o graciosa. Agradezco cada momento que pase a su lado, fuera breve o extenso les aseguro que fui muy feliz con ustedes. Los quiero demasiado.

Índice general

Introducción	1
1. Teoría de Juegos	3
1.1. Juegos estáticos	3
1.1.1. Equilibrio de Nash	5
1.2. Juegos Dinámicos Finitos	11
1.2.1. Inducción hacia atrás	12
2. Dilema del Prisionero Iterado	17
2.1. Dilema del Prisionero	17
2.2. Juego Dinámico	18
2.3. Juego Iterado	20
2.3.1. Caso Finito	20
2.3.2. Caso Infinito	22
3. Aplicaciones, Coca-Cola VS Pepsi	27
3.1. Guerra de gaseosas en el pasado	27
3.2. Guerra de gaseosas en la actualidad	30
3.2.1. Juegos de publicidad en los trimestres de 2022	30
3.3. Guerra de gaseosas en el Futuro	32
3.3.1. Juego estático con el dilema del prisionero	32
3.3.2. Juego dinámico con el dilema del prisionero	33
3.3.3. Juego dinámico con el dilema del prisionero iterado.	33
4. Modelo de Bass	35
4.1. Ideas principales	35
4.2. La ecuación de Bass	35
4.2.1. Juego aplicando el modelo de Bass	39
Conclusión	41
Bibliografía	43

Introducción

Este trabajo tiene como objetivo analizar el funcionamiento del pensamiento humano en los problemas de toma de decisiones utilizando el equilibrio de Nash como herramienta principal y estudiando el comportamiento de las empresas Coca-Cola y PepsiCo (llamada Pepsi de ahora en adelante) para ejemplificarlo.

La teoría de juegos es un área de la matemática que utiliza modelos para estudiar interacciones en estructuras formalizadas de incentivos donde interactúan N jugadores para tomar una decisión (nosotros nos enfocamos a dos jugadores). Esta se ha convertido en una herramienta sumamente importante para la teoría económica y ha contribuido a comprender más adecuadamente la conducta humana frente a la toma de decisiones. Sus investigadores estudian las estrategias óptimas debido a que proporciona el mejor beneficio para un jugador.

La formulación de la teoría de los juegos se produjo en el año 1944, cuando el matemático John Von Neumann y el economista Oskar Morgenstern publicaron el libro *Theory of Games and Economic Behavior* [14], el cual fue enseguida proclamado como uno de los logros científicos más importantes del siglo y comenzó a propagarse desde la economía a muchas ciencias; constituyéndose según sus propios creadores en un instrumento apropiado para desarrollar una teoría del comportamiento económico, y en una aproximación al análisis de situaciones sociales. Surgiendo así la década prodigiosa de esta teoría iniciando en 1950, donde John Forbes Nash presenta su tesis doctoral titulada *Noncooperative games* [19] en la que se establecen las bases generales de este tipo de juegos y resultados esenciales para la teoría de juegos [18, 20]. En dicha memoria se introducía el concepto de punto de equilibrio (o equilibrio de Nash como es conocido actualmente) y se prueba su existencia, además debido al trabajo de oligopolios de Augustin Cournot [11], Nash demostró que el equilibrio de Nash generalizaba el equilibrio clásico en un duopolio de Cournot [13].

El interés en la aplicación relacionada con las empresas Coca-Cola y Pepsi se debe a la rivalidad que han tenido durante décadas en la conocida guerra de gaseosas [1, 3, 27]), la cual ha involucrado numerosas campañas de publicidad y disputas con base al dilema del prisionero [22], además a lo largo de la teoría de juegos se han hecho investigaciones en los oligopolios más relevantes, como Samsung vs Apple en su pelea de teléfonos inteligentes [24, 17], sin embargo, sobre las dos refresqueras más famosas y relevantes del mundo no se encuentra en la literatura un estudio en ese sentido.

Durante las aplicaciones analizamos con árboles de decisión e inducción hacia atrás las mejores estrategias que tomaron Coca-Cola y Pepsi para el lanzamiento de una nueva Coca-Cola y una campaña de publicidad para obtener una mejor cuota de mercado que su rival, respectivamente. También estudiamos juegos de publicidad basados en las ventas en México de los primeros tres trimestres del 2022, en estos se presentan dos estrategias para cada jugador, hacer publicidad o no, obteniendo que hacer publicidad nos otorga el mejor resultado para ambas empresas. Después utilizamos el dilema del prisionero para analizar si las empresas estarían dispuestas a cooperar o no, a pesar de que era más conveniente para ambas cooperar, optan por no hacerlo por el temor a que su

rival no lo haga, esto en el caso estático, dinámico e iterado. Por último explicamos en que consiste el Modelo de Bass [6] y utilizamos la ecuación de Bass para estimar las ventas del 2022 para ambas empresas, además usamos las ventas del 2021 para realizar un juego donde las estrategias para ambos jugadores son hacer publicidad o esperar a la estimación del modelo de Bass, donde gana para ambos el hacer publicidad explicando así porque siempre vemos publicidad de ambas gaseosas.

Esta tesis se divide en cuatro capítulos. En el Capítulo 1 damos una introducción a la teoría de juegos presentando además de las ideas principales de la teoría, los juegos estáticos y los juegos dinámicos. Además, introducimos la matriz de juego y el árbol de decisión para dar solución a juegos con ayuda del Equilibrio de Nash y la inducción hacia atrás respectivamente [5, 25].

Para el Capítulo 2 explicamos en qué consiste el dilema del prisionero y como se generaliza a problemas donde dos jugadores tienen que decidir si es más conveniente cooperar o no hacerlo, presentado como juego dinámico o juego iterado [7, 22].

Durante el Capítulo 3 analizaremos la guerra de gaseosas que ha existido y que existirá entre Coca-Cola y Pepsi utilizando la información de los capítulos anteriores. También explicamos la importancia de la publicidad en esta guerra [15].

Por último en el Capítulo 4 presentaremos el modelo de Bass [12], esto para estimar las ventas de Coca-Cola y Pepsi en el 2022 y analizar un juego creado a base de los datos obtenidos con el modelo.

Capítulo 1

Teoría de Juegos

En este capítulo se divide en dos secciones, la primera es para introducir a los juegos estáticos y las ideas principales de la teoría de juegos, además de presentar el famoso equilibrio de Nash que nos ayudará durante los capítulos subsecuentes para dar soluciones a diferentes problemáticas.

En la segunda sección se presentan los juegos dinámicos junto con los árboles de decisión y el método de inducción hacia atrás el cual utilizaremos para hallar el equilibrio de Nash para ese tipo de juegos.

1.1. Juegos estáticos

Un juego es la interacción entre dos o más partes, conocidos habitualmente como jugadores, ellos estarán en situaciones donde tendrán que tomar una serie de decisiones también llamadas estrategias donde al final recibirán un incentivo o pago por dichas decisiones, lo que los jugadores buscan en un juego es utilizar las mejores estrategias para que su pago sea el máximo o significativo para ellos.

Definición 1.1.1. Un *juego* es cualquier situación de decisión caracterizada por involucrar N jugadores, un conjunto de estrategias y un pago para cada jugador.

Definición 1.1.2. Una *estrategia* es una regla para elegir una acción en cada punto donde una decisión puede ser tomada.

Definición 1.1.3. Un *pago* o *ganancia* describe cuantitativamente el resultado de cada jugador en términos de la cantidad que gana o pierde, este depende no solo de la estrategia que se elige, sino también de las estrategias que eligen los competidores guiados por sus propios intereses.

Definición 1.1.4. Un *juego estático* es aquél en el que cada jugador toma solo una decisión, ningún jugador tiene conocimiento de la decisión tomada por los otros jugadores antes de tomar su propia decisión.

De ahora en adelante denotaremos al i -ésimo jugador como J_i donde $i = 1, \dots, N$. Además fijaremos a $N = 2$.

En un juego estático, una *estrategia pura* es cada una de las posibles decisiones del jugador. Denotaremos al conjunto (no vacío) de todas las estrategias puras como S y como $S_i \subset S$ al conjunto de estrategias puras para J_i donde $i = 1, 2$.

La solución de un juego debería indicar a cada jugador qué resultado esperar y cómo alcanzarlo. Los jugadores o participantes de cada juego intentan obtener el mejor resultado para

sus intereses, además para poder llevar a cabo un juego son necesarios al menos dos jugadores, un conjunto de estrategias para cada jugador y una relación sobre posibles resultados o ganancias.

Digamos que tenemos un juego de dos jugadores, J_1 y J_2 , supongamos que J_1 tiene n estrategias posibles, es decir, $S_1 = \{\text{Estrategia 1, Estrategia 2, } \dots, \text{Estrategia } n\}$ y J_2 tiene m estrategias posibles, $S_2 = \{\text{Estrategia 1, Estrategia 2, } \dots, \text{Estrategia } m\}$. Si J_1 elige la Estrategia i donde $i = 1, \dots, n$ y J_2 elige la Estrategia j donde $j = 1, \dots, m$, entonces el juego se lleva a cabo y el pago de cada jugador es registrado. Ahora, consideremos una colección de números $\{a_{ij}\} \subseteq \mathbb{R}$ con $i = 1, \dots, n$ y $j = 1, \dots, m$, la cual podemos acomodar en una matriz. Estos números se llaman **pagos** para J_1 y la matriz se llama **matriz de juego** o **matriz de pago** (véase Tabla 1.1). En un *juego de suma cero*, cualquier cosa que un jugador gane, el otro lo pierde, así si a_{ij} es la cantidad que recibe J_1 , entonces J_2 obtiene como pago $-a_{ij}$.

		J_2			
		Estrategia 1	Estrategia 2	$\dots$	Estrategia m
J_1	Estrategia 1	a_{11}	a_{12}	$\dots$	a_{1m}
	Estrategia 2	a_{21}	a_{22}	$\dots$	a_{2m}
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
	Estrategia n	a_{n1}	a_{n2}	$\dots$	a_{nm}

Tabla 1.1: Matriz de juego de suma cero de dos jugadores.

Ejemplo 1. Pares e Impares. En este juego dos jugadores deciden mostrar uno, dos o tres dedos al mismo tiempo. Si la suma de dedos levantados por ambos jugadores es un número par entonces J_2 le paga 5 pesos a J_1 . En cambio, si la suma de dedos levantados es un número impar entonces J_1 le paga 5 pesos a J_2 . Podemos representar la matriz de juego de la siguiente manera:

		J_2		
		1	2	3
J_1	1	5	-5	5
	2	-5	5	-5
	3	5	-5	5

Tabla 1.2: Matriz de juego Pares e Impares.

Ahora, si tenemos un *juego de suma no cero*, todos los jugadores tendrán su propia matriz de juego individual y el objetivo seguirá siendo maximizar su propio pago individual, a pesar de esto se pueden agrupar las matrices de pago individual en una sola matriz. Por ejemplo, en un juego de dos jugadores con matrices de pago individual A y B donde J_1 utiliza la estrategia $i = 1, \dots, n$ y J_2 utiliza $j = 1, \dots, m$ si a_{ij} es la cantidad que recibe J_1 y b_{ij} es la cantidad que recibe J_2 entonces tendríamos como **matriz de juego**:

		J_2			
		Estrategia 1	Estrategia 2	$\dots$	Estrategia m
J_1	Estrategia 1	(a_{11}, b_{11})	(a_{12}, b_{12})	$\dots$	(a_{1m}, b_{1m})
	Estrategia 2	(a_{21}, b_{21})	(a_{22}, b_{22})	$\dots$	(a_{2m}, b_{2m})
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
	Estrategia n	(a_{n1}, b_{n1})	(a_{n2}, b_{n2})	$\dots$	(a_{nm}, b_{nm})

Tabla 1.3: Matriz de juego de suma NO cero de dos jugadores.

Ejemplo 2. Dos chicos, J_1 y J_2 del equipo de atletismo tienen competencia mañana, en base a ella su entrenador les pondrá una calificación del 1 al 10 según su desempeño para ver si son aptos de seguir en el equipo. Hoy tienen planeado ir a cenar, ambos tienen dos opciones, cenar ensalada o hamburguesa. Si ambos cenan ensalada se podrán ver mañana y entrenar antes de la competencia obteniendo un 9 de calificación cada uno, en cambio, si los dos deciden cenar hamburguesa, al siguiente día se sentirán mal del estómago y recibirán 6 cada uno. Si J_1 elige la hamburguesa y J_2 la ensalada, J_1 se sentirá mal mañana y obtendrá un 3, en cambio ya que J_2 se preocupará por su amigo, obtendrá un 7, de manera similar ocurre si ahora J_2 come la hamburguesa y J_1 la ensalada. La matriz de juego de este juego vendría dada por la Tabla 1.4.

	J_2	
	Ensalada	Hamburguesa
J_1	Ensalada	(9, 9)
	Hamburguesa	(3, 7)

Tabla 1.4: Matriz de juego del Ejemplo 2.

Definición 1.1.5. Una *estrategia mixta* para J_i es un vector $X = (x_1, \dots, x_k)$ en donde $S_i = \{s_1, \dots, s_k\}$ y x_r es la probabilidad con la que J_i elige s_r con $r = 1, \dots, k$, donde k es el número de estrategias puras del jugador. Además, $1 \geq x_r \geq 0$, $\sum_{r=1}^k x_r = 1$.

Cabe resaltar que podemos denotar a x_r de la Definición 1.1.5 como $x_r = P(J_i \text{ use } r)$ donde P está definida en el espacio de probabilidad (S, S_i, P) y $P : S_i \rightarrow [0, 1]$.

Observación 1.1.1. Una estrategia mixta se denotará por X para J_1 y Y para J_2 , además, el conjunto de todas las posibles estrategias mixtas se denotará por Σ_i con $i = 1, 2$. Notemos que una estrategia pura de J_i , digamos $s_r \in S_i = \{s_1, \dots, s_k\}$ es una estrategia mixta con vector de probabilidad $(x_1, \dots, x_{r-1}, x_r, x_{r+1}, \dots, x_k) = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$.

Sea un juego de dos jugadores de suma no cero, con matrices de pago A y B respectivamente. Para representar el pago de cada jugador usaremos la función $E_i : \Sigma_1 \times \Sigma_2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$\begin{aligned}
 E_1(X, Y) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} P(J_1 \text{ use } i \text{ y } J_2 \text{ use } j) \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} P(J_1 \text{ use } i) P(J_2 \text{ use } j) \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} x_i y_j \\
 &= XAY^T
 \end{aligned}$$

para el primer jugador donde Y^T es la transpuesta de Y , de manera similar $E_2(X, Y) = XBY^T$ para el segundo jugador. Para un juego de dos jugadores de suma cero el pago de cada jugador se representará de manera similar con la función $E : \Sigma_1 \times \Sigma_2 \rightarrow \mathbb{R}$ con $E(X, Y) = XAY^T$.

1.1.1. Equilibrio de Nash

Dado el concepto de juego, se nos presenta la siguiente pregunta ¿Es posible escoger una estrategia para obtener el pago más grande posible?, efectivamente, la teoría de juegos nos ayuda a encontrar la mejor solución a un juego como veremos a continuación.

Definición 1.1.6. Una pareja de estrategias mixtas $(X^* \in \Sigma_1, Y^* \in \Sigma_2)$ es un *equilibrio de Nash*, si $E_1(X, Y^*) \leq E_1(X^*, Y^*)$ para cada $X \in \Sigma_1$ y $E_2(X^*, Y) \leq E_2(X^*, Y^*)$ para cada $Y \in \Sigma_2$. En forma matricial, (X^*, Y^*) es un equilibrio de Nash si

$$E_1(X^*, Y^*) = X^* A Y^{*T} \geq X A Y^{*T} = E_1(X, Y^*), \text{ para cada } X \in \Sigma_1, \quad (1.1)$$

$$E_2(X^*, Y^*) = X^* B Y^{*T} \geq X^* B Y^T = E_2(X^*, Y), \text{ para cada } Y \in \Sigma_2. \quad (1.2)$$

Definición 1.1.7. Una estrategia $\hat{X} \in \Sigma_1$ para J_1 es la *mejor respuesta* para una estrategia $\hat{Y} \in \Sigma_2$ del J_2 , si

$$E_1(\hat{X}, \hat{Y}) = \max_{X \in \Sigma_1} E_1(X, \hat{Y}). \quad (1.3)$$

Similarmente una estrategia $\hat{Y} \in \Sigma_2$ para J_2 es la *mejor respuesta* para una estrategia $\hat{X} \in \Sigma_1$ del J_1 , si

$$E_2(\hat{X}, \hat{Y}) = \max_{Y \in \Sigma_2} E_2(\hat{X}, Y). \quad (1.4)$$

Para el caso de las estrategias puras una fila i^* y una columna j^* pueden ser un equilibrio de Nash si satisfacen que

$$a_{ij^*} \leq a_{i^*j^*} \text{ y } b_{i^*j} \leq b_{i^*j^*}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m. \quad (1.5)$$

Así, $a_{i^*j^*}$ es el número más grande en la columna j^* y $b_{i^*j^*}$ es el número más grande en la fila i^* .

Observación 1.1.2. La forma sistemática de encontrar un equilibrio de Nash en estrategias puras es poner una barra sobre el primer número que es el más grande en cada columna y colocar otra barra al segundo número que es el más grande en cada fila. Cualquier par de números que ambos componentes tengan barra serán un equilibrio de Nash en estrategias puras.

Consideremos que cada jugador tiene dos estrategias, es decir, $n = m = 2$ y sean $X = (x, 1-x)$, $Y = (y, 1-y)$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ estrategias mixtas para cada jugador 1 y 2, respectivamente. El pago esperado para cada jugador es:

$$E_1(X, Y) = X A Y^T = (x, 1-x) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ 1-y \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

$$E_2(X, Y) = X B Y^T = (x, 1-x) \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ 1-y \end{bmatrix}. \quad (1.7)$$

Notación 1. Si tenemos un juego de dos jugadores con $n = m = 2$:

$$E_1(1, Y) = (1, 0) A Y^T = (1, 0) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ 1-y \end{bmatrix} = a_{11}y + a_{12}(1-y) \quad (1.8)$$

$$E_1(2, Y) = (0, 1) A Y^T = (0, 1) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ 1-y \end{bmatrix} = a_{21}y + a_{22}(1-y) \quad (1.9)$$

$$E_2(X, 1) = X B (1, 0)^T = (x, 1-x) \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = b_{11}x + b_{21}(1-x) \quad (1.10)$$

$$E_2(X, 2) = X B (0, 1)^T = (x, 1-x) \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = b_{12}x + b_{22}(1-x). \quad (1.11)$$

Proposición 1.1.1. Una condición necesaria y suficiente para que $X^* = (x^*, 1-x^*)$ y $Y^* = (y^*, 1-y^*)$ sea un equilibrio de Nash para el juego con matrices de pago A y B respectivamente es

$$E_1(1, Y^*) \leq E_1(X^*, Y^*) \quad (1.12)$$

$$E_1(2, Y^*) \leq E_1(X^*, Y^*) \quad (1.13)$$

$$E_2(X^*, 1) \leq E_2(X^*, Y^*) \quad (1.14)$$

$$E_2(X^*, 2) \leq E_2(X^*, Y^*). \quad (1.15)$$

Demostración. Para ver que esto es cierto, primero note que si (X^*, Y^*) es un equilibrio de Nash entonces las desigualdades se cumplen por definición. Sólo resta probar que las desigualdades son suficientes. Suponga que las desigualdades son válidas para (X^*, Y^*) . Sean $X = (x, 1 - x)$, $Y = (y, 1 - y)$ cualesquiera estrategias mixtas. Multiplicando la ecuación (1.12) por $x \geq 0$ y la ecuación (1.13) por $(1 - x) \geq 0$ tenemos que

$$xE_1(1, Y^*) = x(a_{11}y^* + a_{12}(1 - y^*)) \leq xE_1(X^*, Y^*)$$

y

$$(1 - x)E_1(2, Y^*) = (1 - x)(a_{21}y^* + a_{22}(1 - y^*)) \leq (1 - x)E_1(X^*, Y^*).$$

Sumando ambos resultados

$$\begin{aligned} xE_1(1, Y^*) + (1 - x)E_1(2, Y^*) &= x(a_{11}y^* + a_{12}(1 - y^*)) + (1 - x)(a_{21}y^* + a_{22}(1 - y^*)) \\ &= xE_1(X^*, Y^*) + (1 - x)E_1(X^*, Y^*) \\ &= E_1(X^*, Y^*) \end{aligned}$$

pero

$$x(a_{11}y^* + a_{12}(1 - y^*)) + (1 - x)(a_{21}y^* + a_{22}(1 - y^*)) = XAY^{*T},$$

entonces

$$\begin{aligned} (x, 1 - x)AY^{*T} &= XAY^{*T} \\ &= E_1(X, Y^*) \\ &\leq E_1(X^*, Y^*). \end{aligned}$$

Como $X \in \Sigma_1$ es fija pero arbitraria para J_1 , se tiene que X satisface la ecuación (1.1) de la Definición 1.1.6, ahora solo falta comprobar que se cumple la ecuación (1.2) para ver que (X^*, Y^*) es un equilibrio de Nash. Entonces multiplicando las ecuaciones (1.14) y (1.15) por $y \geq 0$ y $(1 - y) \geq 0$, respectivamente

$$yE_2(X^*, 1) = y(b_{11}x^* + b_{21}(1 - x^*)) \leq yE_2(X^*, Y^*)$$

y

$$(1 - y)E_2(X^*, 2) = (1 - y)(b_{12}y^* + b_{22}(1 - y^*)) \leq (1 - y)E_2(X^*, Y^*)$$

así,

$$\begin{aligned} yE_2(X^*, 1) + (1 - y)E_2(X^*, 2) &= y(b_{11}x^* + b_{21}(1 - x^*)) + (1 - y)(b_{12}y^* + b_{22}(1 - y^*)) \\ &= X^*BY^T \\ &= E_2(X^*, Y) \\ &\leq yE_2(X^*, Y^*) + (1 - y)E_2(X^*, Y^*) \\ &= E_2(X^*, Y^*). \end{aligned}$$

De lo cual se deduce que

$$E_2(X^*, Y) \leq E_2(X^*, Y^*)$$

y como Y fue fija pero arbitraria tenemos que (X^*, Y^*) es un equilibrio de Nash. ■

Ejemplo 3. Comprobemos que (Ensalada, Ensalada) es un equilibrio de Nash en estrategias puras del juego del Ejemplo 2 cuya matriz de juego esta dada por la Tabla 1.5

Utilicemos la ecuación (1.5) para ver que efectivamente (Ensalada, Ensalada) es dicho equilibrio. En este caso $i^* = 1$ y $j^* = 1$, así

	J_2	
J_1		Ensalada Hamburguesa
	Ensalada	(9, 9) (7, 3)
	Hamburguesa	(3, 7) (6, 6)

Tabla 1.5: Matriz de juego del Ejemplo 2.

- $a_{ij^*} \leq a_{i^*j^*}$ es verdadero ya que
 $a_{11} = 9 \leq 9 = a_{11}$
 $a_{21} = 3 \leq 9 = a_{11}$
- $b_{i^*j} \leq b_{i^*j^*}$ también es verdadero ya que
 $b_{11} = 9 \leq 9 = b_{11}$
 $b_{12} = 3 \leq 9 = b_{11}$.

Ejemplo 4. Dos amigos han planeado comprarse una motocicleta cada uno desde hace muchos años, pero actualmente tienen familia y les convendría más comprarse un automóvil, si ambos al tomar la decisión coinciden con el vehículo se sentirán muy felices y satisfechos. En cambio, si no eligen el mismo vehículo, el que escogió la motocicleta se sentirá decepcionado y su familia le reprochará que su amigo tomó la mejor decisión por lo que tendríamos la siguiente matriz de juego:

	J_2		
J_1		Automóvil	Motocicleta
	Automóvil	(5, 5)	(6, -2)
	Motocicleta	(-3, 7)	(5, 5)

Tabla 1.6: Matriz de juego del Ejemplo 4.

Utilicemos la Observación 1.1.2 para encontrar un equilibrio de Nash en estrategias puras. Primero colocaremos una barra sobre el primer número que es más grande en cada columna, es decir, en el 5 y en el 6 pertenecientes al pago del primer jugador, luego colocaremos una barra sobre el segundo número que es el más grande en cada fila, es decir, en el 5 y en el 7 pertenecientes al pago del segundo jugador.

	J_2	
	Automóvil	Motocicleta
J_1	Automóvil	$(\bar{5}, \bar{5})$
	Motocicleta	$(\bar{6}, -2)$
		$(-3, \bar{7})$
		$(5, 5)$

Tabla 1.7: Matriz de juego del Ejemplo 4, equilibrio de Nash.

Así podemos observar que (Automóvil, Automóvil) es un equilibrio de Nash para este juego. Además podemos observar que a pesar de que (Motocicleta, Motocicleta) tiene el mismo pago que (Automóvil, Automóvil), no es un equilibrio de Nash porque cada jugador puede mejorar su propio pago.

Ejemplo 5. Alguien dice que el juego dado por la Tabla 1.8 tiene un equilibrio de Nash en $X^* = (\frac{3}{5}, \frac{2}{5})$, $Y^* = (\frac{2}{5}, \frac{3}{5})$ comprobemos dicha afirmación utilizando la Proposición 1.1.1.

	J_2	
	A	B
	C	D
J_1	(2, 1)	(-1, -1)
	(-1, -1)	(1, 2)

Tabla 1.8: Matriz de juego del Ejemplo 5

Tenemos que

$$\begin{aligned}
 E_1(X^*, Y^*) &= \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}^T \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}^T \\
 &= \frac{8}{25} - \frac{3}{25} \\
 &= \frac{1}{5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_2(X^*, Y^*) &= \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}^T \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}^T \\
 &= \frac{2}{25} + \frac{3}{25} \\
 &= \frac{1}{5}
 \end{aligned}$$

$$E_1(1, Y^*) = a_{11}y^* + a_{12}(1 - y^*) = (2) \left(\frac{2}{5}\right) + (-1) \left(\frac{3}{5}\right) = \frac{4}{5} - \frac{3}{5} = \frac{1}{5}$$

$$E_1(2, Y^*) = a_{21}y^* + a_{22}(1 - y^*) = (-1) \left(\frac{2}{5}\right) + (1) \left(\frac{3}{5}\right) = -\frac{2}{5} + \frac{3}{5} = \frac{1}{5}$$

$$E_2(X^*, 1) = b_{11}x^* + b_{21}(1 - x^*) = (1) \left(\frac{3}{5}\right) + (-1) \left(\frac{2}{5}\right) = \frac{3}{5} - \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$$

$$E_2(X^*, 2) = b_{12}x^* + b_{22}(1 - x^*) = (-1) \left(\frac{3}{5}\right) + (2) \left(\frac{2}{5}\right) = -\frac{3}{5} + \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$$

Con lo anterior podemos ver que

$$E_1(1, Y^*) = \frac{1}{5} \leq E_1(X^*, Y^*) = \frac{1}{5}$$

$$E_1(2, Y^*) = \frac{1}{5} \leq E_1(X^*, Y^*) = \frac{1}{5}$$

$$E_2(X^*, 1) = \frac{1}{5} \leq E_2(X^*, Y^*) = \frac{1}{5}$$

$$E_2(X^*, 2) = \frac{1}{5} \leq E_2(X^*, Y^*) = \frac{1}{5}$$

por lo tanto (X^*, Y^*) es un equilibrio de Nash en estrategias mixtas.

Método de Cálculo para encontrar el equilibrio de Nash.

Sean un juego de dos jugadores con dos estrategias puras cada uno, $X = (x, 1 - x)$ y $Y = (y, 1 - y)$ estrategias mixtas respectivamente. Si existe solución al sistema de ecuaciones de derivadas parciales

$$\begin{cases} \frac{\partial E_1(X, Y)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial E_2(X, Y)}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

tal que $0 \leq x \leq 1$ y $0 \leq y \leq 1$ entonces (X, Y) es un equilibrio de Nash.

Ejemplo 6. Supongamos que tenemos el juego de la Tabla 1.8 del Ejemplo 5, pero en lugar de comprobar un equilibrio de Nash en estrategias mixtas nos pide encontrarlo, por lo cual utilizaremos el método de cálculo para ello. Sean $X = (x, 1 - x)$ y $Y = (y, 1 - y)$ entonces

$$E_1(X, Y) = XAY^T = [x \quad 1 - x] \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ 1 - y \end{bmatrix} = 5xy - 2y - 2x + 1$$

$$E_2(X, Y) = XBY^T = [x \quad 1 - x] \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ 1 - y \end{bmatrix} = 5xy - 3y - 3x + 2$$

Así,

$$\frac{\partial E_1(X, Y)}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow 5y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{2}{5}$$

$$\frac{\partial E_2(X, Y)}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow 5x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{5}.$$

Por lo tanto $X^* = (\frac{3}{5}, \frac{2}{5})$ y $Y^* = (\frac{2}{5}, \frac{3}{5})$ es un equilibrio de Nash, justo como habíamos probado en el ejercicio 5.

Ejemplo 7. Dada la matriz de juego de la Tabla 1.9 utilizando el método de cálculo obtengamos un equilibrio de Nash en estrategias mixtas y comprobemos el resultado con la Proposición 1.1.1.

		J_2	
		A	B
J_1	C	(1, 2)	(0, 0)
	D	(0, 0)	(2, 1)

Tabla 1.9: Matriz de juego del Ejemplo 7

Sean $X = (x, 1 - x)$ y $Y = (y, 1 - y)$ entonces

$$E_1(X, Y) = XAY^T = [x \quad 1 - x] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ 1 - y \end{bmatrix} = 3xy - 2x - 2y + 2$$

$$E_2(X, Y) = XBY^T = [x \quad 1 - x] \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ 1 - y \end{bmatrix} = 3xy - x - y + 1.$$

Así,

$$\frac{\partial E_1(X, Y)}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow 3y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{2}{3}$$

$$\frac{\partial E_2(X, Y)}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$$

Por lo tanto $X^* = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ y $Y^* = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ es un equilibrio de Nash. Además tenemos que

$$\begin{aligned} E_1(X^*, Y^*) &= [\frac{1}{3} \quad \frac{2}{3}] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} [\frac{2}{3} \quad \frac{1}{3}]^T \\ &= [\frac{1}{3} \quad \frac{4}{3}] [\frac{2}{3} \quad \frac{1}{3}]^T \\ &= \frac{2}{9} + \frac{4}{9} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_2(X^*, Y^*) &= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}^T \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}^T \\
 &= \frac{4}{9} + \frac{2}{9} \\
 &= \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_1(1, Y^*) &= a_{11}y^* + a_{12}(1 - y^*) = (1) \left(\frac{2}{3}\right) + (0) \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} \\
 E_1(2, Y^*) &= a_{21}y^* + a_{22}(1 - y^*) = (0) \left(\frac{2}{3}\right) + (2) \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} \\
 E_2(X^*, 1) &= b_{11}x^* + b_{21}(1 - x^*) = (2) \left(\frac{1}{3}\right) + (0) \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} \\
 E_2(X^*, 2) &= b_{12}x^* + b_{22}(1 - x^*) = (0) \left(\frac{1}{3}\right) + (1) \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}.
 \end{aligned}$$

Con lo anterior podemos ver que

$$\begin{aligned}
 E_1(1, Y^*) &= \frac{2}{3} \leq E_1(X^*, Y^*) = \frac{2}{3} \\
 E_1(2, Y^*) &= \frac{2}{3} \leq E_1(X^*, Y^*) = \frac{2}{3} \\
 E_2(X^*, 1) &= \frac{2}{3} \leq E_2(X^*, Y^*) = \frac{2}{3} \\
 E_2(X^*, 2) &= \frac{2}{3} \leq E_2(X^*, Y^*) = \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

por lo que efectivamente por la Proposición 1.1.1, (X^*, Y^*) es un equilibrio de Nash en estrategias mixtas.

1.2. Juegos Dinámicos Finitos

Definición 1.2.1. Un juego es *dinámico* cuando los jugadores actúan en determinado orden y las decisiones se toman de forma consecutiva.

Definición 1.2.2. La *información perfecta* de un juego dinámico indica que en cada etapa del juego el jugador a quien le corresponde decidir conoce la historia completa de todas las decisiones tomadas hasta ese momento. Y un juego es de *información completa* cuando las funciones de pago o ganancias de los jugadores son del dominio público.

Los juegos dinámicos pueden ser representados mediante un árbol, al cual llamaremos *árbol de decisión*.

Es importante mencionar que en los juegos dinámicos la palabra *estrategia* se reserva para designar a todo un plan de acciones de respuesta de un jugador frente a las acciones del otro.

Ejemplo 8. Considere el árbol de decisión de la Figura 1.1.

En este juego J_1 decide dos veces y J_2 elige una vez, en la primera etapa J_1 puede decidir entre las estrategias A y B , si elige A entonces el juego termina y obtiene una ganancia de 1, mientras que J_2 obtiene una ganancia de 2. Si J_1 elige B , el juego continúa con la decisión de J_2 , este puede elegir entre las estrategias C y D , si elige C el juego termina y obtiene una ganancia de 5, mientras que J_1 obtiene una ganancia de 3, pero si J_2 elige D el juego continúa y nuevamente es el turno de J_1 . Para esta última etapa, J_1 puede elegir entre las estrategias E y F . Si elige E , éste obtiene una ganancia 7 dejando a J_2 con ganancia 6 y si elige F , obtiene ganancia 5 pero J_2 obtiene una ganancia de 8, con lo cual finaliza el juego.

Notemos que este juego es de información perfecta y completa.

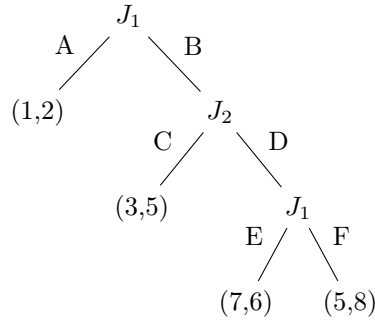


Figura 1.1: Árbol de decisión del Ejemplo 8.

1.2.1. Inducción hacia atrás

El principio de inducción hacia atrás consiste en predecir el resultado en cada etapa futura del juego, es decir razonar hacia atrás en la etapa presente. Se inicia en la última etapa del juego y se retrocede progresivamente hacia la primera.

La inducción hacia atrás es una forma natural de obtener un equilibrio de Nash en un juego dinámico, pues siempre se intenta hallar la mejor respuesta ante cualquier acción del contrario.

Ejemplo 9. Dada la Figura 1.2 hallemos su(s) equilibrio(s) de Nash (si es que existe(n)) con inducción hacia atrás.

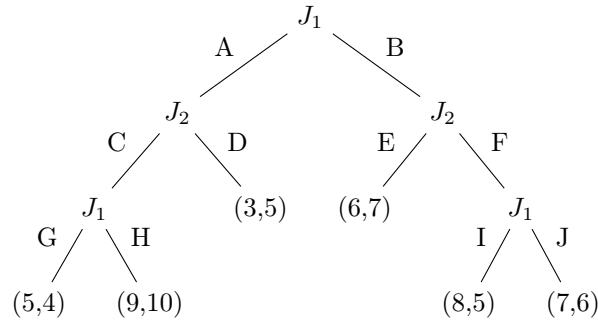


Figura 1.2: Árbol de decisión del Ejemplo 9.

Primero notemos que en este juego J_1 decide dos veces y J_2 una vez, teniendo así 3 etapas. Como lo explica el método de inducción hacia atrás empezaremos analizando desde la última hasta la primera etapa.

En la última etapa podemos ver qué J_1 puede decidir entre las estrategias G y H siempre y cuando J_2 haya elegido la estrategia C , en este caso tendría que decidir entre recibir los pagos 5 o 9, claramente le convendrá más recibir el pago 9, por lo que en ese caso la estrategia que elegirá J_1 es H , esta no es la única decisión que puede tomar ya que si J_2 decide utilizar la estrategia F entonces J_1 tendrá que decidir entre las estrategias I y J con pagos 8 y 7 respectivamente, por lo que en este nodo J_1 optará por elegir la estrategia I , esto se puede representar como se muestra en la Figura 1.3.

En la segunda etapa si J_1 elige la estrategia A el J_2 deberá elegir entre las estrategias C y D , sabemos que el pago que recibirá J_2 de la estrategia D es 5 y dado el análisis previo de la

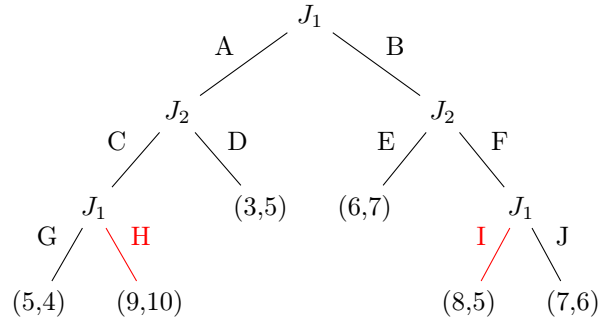


Figura 1.3: Inducción hacia atrás del Ejemplo 9 (a).

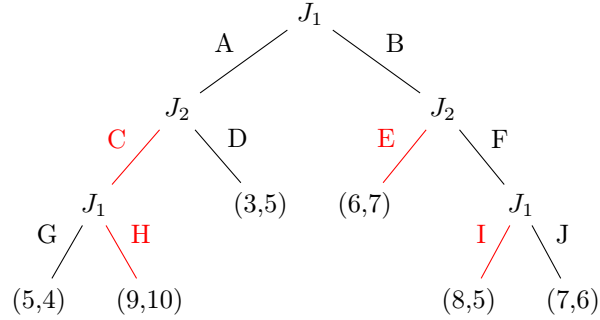


Figura 1.4: Inducción hacia atrás del Ejemplo 9 (b).

última etapa si J_2 elige C , J_1 elegiría H y obtendría J_2 un pago de 10, por lo que en este caso J_2 elegirá la estrategia C . De manera similar si J_1 elige B , J_2 tendrá que elegir entre las estrategias E y F con pagos 7 y 5 respectivamente, por lo cual elegirá E , esto se representa en la Figura 1.4.

Por último, la primera etapa, en esta J_1 solo puede escoger entre las estrategias A y B que gracias a las etapas pasadas sabemos que si elige A , J_2 elegirá C y él H por lo que tendrá un pago de 9, si J_1 elige B entonces J_2 elegirá E y obtendrá un pago de 6, por lo que la estrategia que elegirá J_1 es A , esto se representa en la Figura 1.5.

Por lo tanto (AH, C) es un equilibrio de Nash para este juego, es decir, primero J_1 debe elegir A , luego J_2 elegirá C y por ultimo J_1 terminará con H .

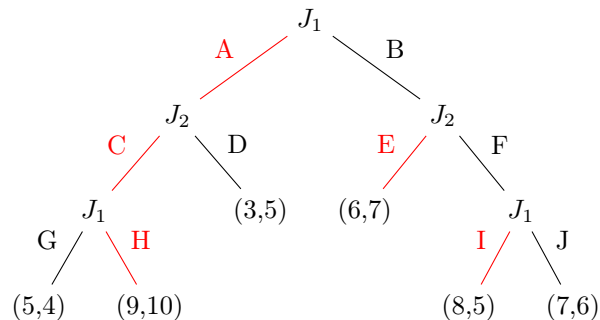


Figura 1.5: Inducción hacia atrás del Ejemplo 9 (c).

Ejemplo 10. Dada la Figura 1.1 utilizando inducción hacia atrás podemos ver que (BE, D) es un equilibrio de Nash como se muestra en la Figura 1.6.

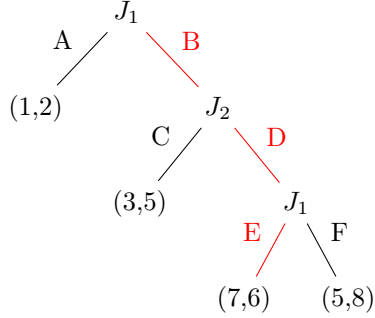


Figura 1.6: Inducción hacia atrás del Ejemplo 10.

Ejemplo 11. La batalla de los sexos [5]. El siguiente juego describe una pareja que dispone de dos escenarios alternativos para pasar una velada juntos, ver videos de YouTube o ver streams en Twitch. Aunque ambos prefieren pasar juntos la velada, la mujer, que será J_1 , prefiere YouTube, mientras que el hombre, que será J_2 , prefiere Twitch. La matriz del juego está dada por la Tabla 1.10.

		J_2	
		YouTube	Twitch
J_1	YouTube	(6, 3)	(-10, -10)
	Twitch	(-10, -10)	(3, 6)

Tabla 1.10: Matriz de juego del Ejemplo 10.

Primero resolvamos el juego en su forma estática para estrategias puras, para esto con ayuda de la Observación 1.1.2 podemos obtener que (YouTube, YouTube) y (Twitch, Twitch) son equilibrios de Nash en estrategias puras (véase Tabla 1.11).

		J_2	
		YouTube	Twitch
J_1	YouTube	($\bar{6}$, $\bar{3}$)	(-10, -10)
	Twitch	(-10, -10)	($\bar{3}$, $\bar{6}$)

Tabla 1.11: Equilibrios de Nash puros del Ejemplo 10.

Ahora representemos este juego estático como un juego dinámico, para ello hay que suponer que alguno de los dos jugadores elige primero. Si J_1 elige primero, entonces el árbol de decisión está dado por la Figura 1.7. Usando inducción hacia atrás obtenemos la Figura 1.8, por lo tanto el equilibrio de Nash es (Y, Y) .

En el caso donde J_2 elige primero tendremos el árbol de decisión de la Figura 1.9 y usando inducción hacia atrás obtendremos la Figura 1.10, por lo que en este caso el equilibrio de Nash es (T, T) .

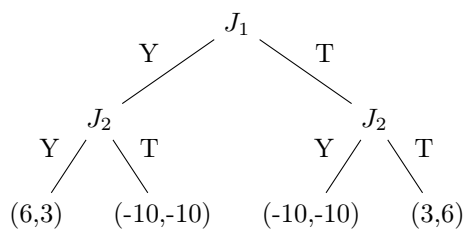


Figura 1.7: Árbol de decisión del Ejemplo 10 cuando J_1 elige primero (a).

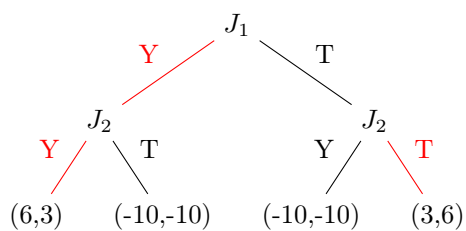


Figura 1.8: Árbol de decisión del Ejemplo 10 cuando J_1 elige primero (b).

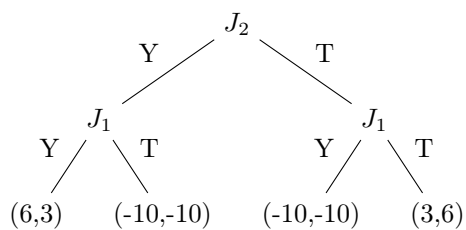


Figura 1.9: Árbol de decisión del Ejemplo 10 cuando J_2 elige primero (a).

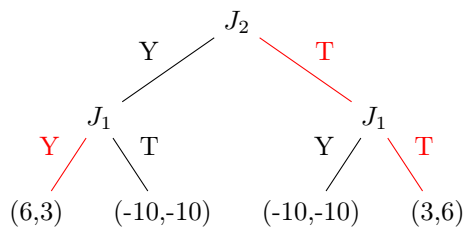


Figura 1.10: Árbol de decisión del Ejemplo 10 cuando J_2 elige primero (b).

Capítulo 2

Dilema del Prisionero Iterado

En este Capítulo se hace una explicación del Dilema del Prisionero en base a “Un análisis del Dilema del Prisionero Iterado” [7], este se verá presentado en su forma estática y dinámica así como en su forma iterada finita e infinita.

2.1. Dilema del Prisionero

El análisis de este juego se plantea de la siguiente manera: dos ladrones están siendo interrogados por la policía en relación con un delito grave. Están reclusos en celdas separadas y no pueden hablar entre sí. Sin una confesión, la policía sólo tiene evidencia suficiente para condenar a los dos ladrones por un cargo menor. La policía hace la siguiente oferta a ambos presos: si solo uno confiesa que ambos cometieron el delito grave, entonces el confesor será puesto en libertad y el otro pasará 5 años en prisión; si ambos confiesan, entonces van a tener una sentencia de 4 años cada uno; si ninguno confiesa, entonces su sentencia será de 2 años por el delito menor.

La matriz de juego se representa en la Tabla 2.1.

	J_2	
	No Confesar	Confesar
J_1	No Confesar	$(-2, -2)$
	Confesar	$(0, -5)$

Tabla 2.1: Matriz de juego Dilema del Prisionero.

Notemos que este es un juego estático, ya que cada jugador toma solo una decisión. Para hallar una solución en estrategias puras podemos hacer uso de la Observación 1.1.2 colocando una barra en el primer número que es el más grande en cada columna, en este caso en 0 y -4 y en el segundo número que es más grande en cada fila, es decir, 0 y 4 obteniendo como resultado a (Confesar, Confesar) como el equilibrio de Nash en estrategias puras para el juego del Dilema del Prisionero como se muestra en la Tabla 2.2.

	J_2	
	No Confesar	Confesar
J_1	No Confesar	$(-2, -2)$
	Confesar	$(\overline{0}, -5)$

Tabla 2.2: Matriz de juego Dilema del Prisionero.

Veamos si existe un equilibrio de Nash en estrategias mixtas con el método de cálculo. Para ello supongamos que existe y es $X = (x, 1 - x)$, $Y = (y, 1 - y)$ por lo cual:

$$E_1(X, Y) = XAY^T = [x \quad 1 - x] \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ 1 - y \end{bmatrix} = -xy - x + 4y - 4.$$

Así,

$$\frac{\partial E_1(X, Y)}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow -y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = -1.$$

Pero $y = -1$ es una contradicción pues $0 \leq y \leq 1$, por lo tanto no existe equilibrio de Nash en estrategias mixtas.

2.2. Juego Dinámico

En esta sección se representa el juego del dilema del prisionero dinámico en un árbol de decisión, para ello debemos de suponer que uno de los jugadores elige primero, en este caso J_1 y que el segundo, J_2 , conocerá la decisión que tome el primero para tomar su propia decisión.

El árbol del juego se muestra en la Figura 2.1 donde N representa la estrategia No Confesar y C representa Confesar.

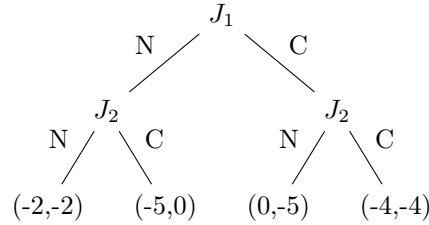


Figura 2.1: Árbol del juego Dilema del Prisionero.

Halleemos la solución a este juego usando inducción hacia atrás. Primero notemos que en la última etapa J_2 tiene dos nodos donde puede tomar una decisión, en el primer nodo si J_2 elige No Confesar recibe un pago de -2 y si elige Confesar recibe un pago de 0 , claramente le conviene Confesar en el primer nodo, en el segundo nodo pasa algo similar con pagos -5 y -4 por lo cual en este nodo también le conviene Confesar, de donde obtendríamos la Figura 2.2.

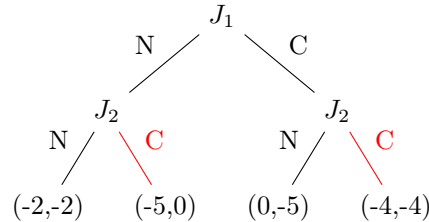


Figura 2.2: Árbol del juego Dilema del Prisionero, inducción hacia atrás(a).

Ahora, veamos qué le conviene a J_1 en la primera etapa, si elige N entonces J_2 elegirá C y J_1 tendrá un pago de -5 , por otro lado, si J_1 elige C entonces J_2 elegirá C y J_1 tendrá un pago de -4 . Entonces a J_1 le conviene confesar (véase Figura 2.3).

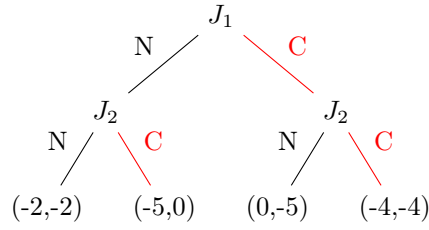


Figura 2.3: Árbol del juego Dilema del Prisionero, inducción hacia atrás(b).

Por lo tanto el equilibrio de Nash del Dilema del Prisionero en el juego dinámico es (C,C).

Después de observar el último resultado parece que el jugador que elige primero tiene cierta desventaja sobre el otro jugador. Para ver que en este caso no importa qué jugador inicie consideremos el árbol de decisión de la figura 2.4 donde J_2 elige primero.

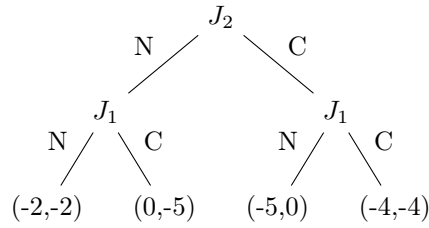


Figura 2.4: Árbol del juego Dilema del Prisionero si J_2 elige primero.

Así, obtendríamos en la última etapa la Figura 2.5 y en la primera etapa la Figura 2.6.

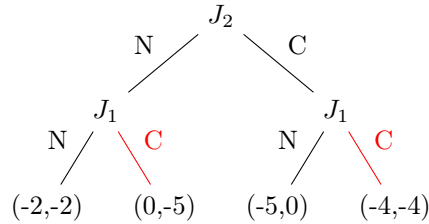


Figura 2.5: Árbol del juego Dilema del Prisionero si J_2 elige primero, inducción hacia atrás(a).

Por lo tanto el equilibrio de Nash es (C,C) siendo el mismo obtenido antes por lo cual no importa quien elija primero en este caso, cabe resaltar que existen juegos donde sí importa quien toma la primera decisión.

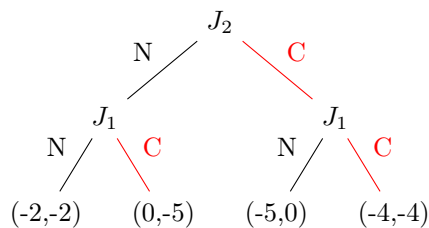


Figura 2.6: Árbol del juego Dilema del Prisionero si J_2 elige primero, inducción hacia atrás(b).

2.3. Juego Iterado

Notemos que el equilibrio de Nash es el mismo para los casos estático y dinámico, pero solo se toma una decisión en ambos casos, por lo que nos preguntamos ¿qué sucede cuando el juego itera? Es decir, repetimos el juego al menos una vez.

Para comenzar este análisis, consideremos las ganancias y estrategias que se muestran en la Tabla 2.3

	J_2		
J_1		Cooperar	No Cooperar
	Cooperar	(3, 3)	(0, 5)
	No cooperar	(5, 0)	(1, 1)

Tabla 2.3: Matriz de juego Dilema del Prisionero.

En esta matriz de juego se le ha sumado 5 a cada pago con el fin de trabajar con números positivos, además se cambió No Confesar por Cooperar y Confesar por No Cooperar puesto que el dilema del prisionero se suele expresar hablando de Cooperación o no. Para este juego C denotará Cooperar y N , No Cooperar. Además debido a que estamos hablando de iteración tenemos que considerar dos casos, cuando la iteración ocurre un numero finito de veces y cuando ocurre una infinidad.

2.3.1. Caso Finito

Considerando una etapa a la vez, se pensaría que la única estrategia general para un jugador es usar su estrategia de Equilibrio de Nash para el juego en cada etapa. Pese a ello, si el juego se ve completo, el conjunto estrategias se convierte en uno mucho más interesante, pues los jugadores pueden condicionar su comportamiento en las últimas acciones de sus oponentes o cambiar su estrategia si el transcurso del juego no sigue una trayectoria satisfactoria.

Considere el dilema del prisionero con dos etapas. El conjunto de estrategias para cada jugador es:

$$\{CC, CN, NC, NN\}$$

CC denota cooperar en la primera y segunda etapa,

CN denota cooperar en la primera etapa y en la segunda no cooperar,

NC denota no cooperar en la primera etapa y en la segunda cooperar,

NN denota no cooperar en ninguna etapa.

La matriz del juego está dada en la Tabla 2.4.

		J_2			
J_1		CC	CN	NC	NN
	CC	(6, 6)	(3, 8)	(3, 8)	(0, 10)
	CN	(8, 3)	(4, 4)	(5, 5)	(1, 6)
	NC	(8, 3)	(5, 5)	(4, 4)	(1, 6)
	NN	(10, 0)	(6, 1)	(6, 1)	(2, 2)

Tabla 2.4: Matriz de juego del Dilema del Prisionero con una iteración.

Usando la Observación 1.1.2 podemos encontrar que (NN, NN) es un equilibrio de Nash como se muestra en la Tabla 2.5.

		J_2			
J_1		CC	CN	NC	NN
	CC	(6, 6)	(3, 8)	(3, 8)	(0, $\overline{10}$)
	CN	(8, 3)	(4, 4)	(5, 5)	(1, $\overline{6}$)
	NC	(8, 3)	(5, 5)	(4, 4)	(1, $\overline{6}$)
	NN	($\overline{10}$, 0)	($\overline{6}$, 1)	($\overline{6}$, 1)	($\overline{2}$, $\overline{2}$)

Tabla 2.5: Matriz de juego del Dilema del Prisionero con una iteración, equilibrio de Nash.

Además, trabajando con el árbol del juego Figura 2.7 y usando inducción hacia atrás Figura 2.8 obtenemos que (NN, NN) es un equilibrio de Nash para el Dilema del Prisionero iterado una vez.

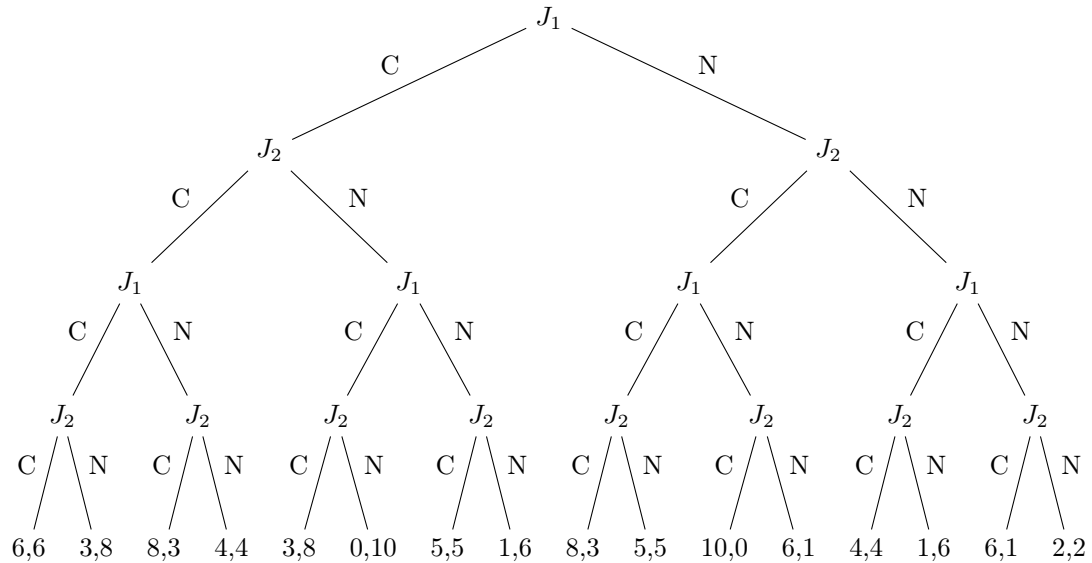


Figura 2.7: Árbol del juego Dilema del Prisionero iterado una vez.

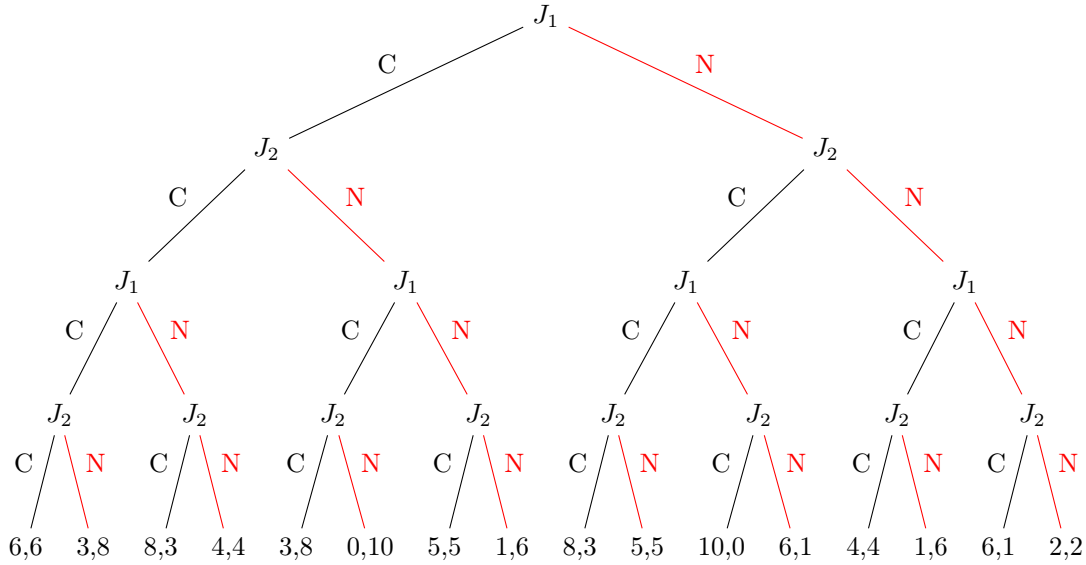


Figura 2.8: Árbol del juego Dilema del Prisionero iterado una vez, inducción hacia atrás.

Como hemos mencionado, ahora los jugadores pueden condicionar su comportamiento dependiendo de las acciones de su oponente o simplemente cambiar de estrategia, es por eso que definimos las siguientes estrategias:

- S_C jugar siempre C ,
- S_N jugar siempre D ,
- S_T llamada Tit-For-Tat, “Inicia cooperando; a continuación hace lo que el otro jugador hizo en la etapa anterior”,
- S_A que es una versión de Tit-For-Tat, “Inicia no cooperando (deserta) y luego hace lo que el otro jugador hizo en la etapa anterior”,
- S_G llamada a veces Grim, “Inicia cooperando y sigue cooperando hasta que el otro no lo haga, y luego no coopera (deserta) para siempre”
- S_X “Coopera con probabilidad x y no coopera con probabilidad $1 - x$ ”,
- S_Y “Coopera con probabilidad y y no coopera con probabilidad $1 - y$ ”.

2.3.2. Caso Infinito

Consideremos ahora un número infinito de repeticiones; en esta situación, no se puede utilizar la inducción hacia atrás porque no hay una etapa final. Además, tendríamos problemas con algunas de las estrategias enumeradas a continuación.

Definición 2.3.1. Una *estrategia estacionaria* es aquella en la que la regla para elegir una acción es la misma en todas las etapas (esto no significa que la acción elegida en cada etapa será la misma).

La ganancia para una estrategia estacionaria es la suma infinita de ganancias obtenidas en cada etapa. Desafortunadamente, este enfoque conduce a un problema. Supongamos que ambos

jugadores utilizan la estrategia S_C , la ganancia total para cualquiera de los jugadores es

$$\begin{aligned} E_i(S_C, S_C) &= \sum_{t=0}^{\infty} 3 \\ &= \infty \end{aligned}$$

mientras que, si un jugador usa la estrategia S_N , la ganancia total para el que no coopera es

$$\begin{aligned} E_1(S_N, S_C) &= E_2(S_C, S_N) \\ &= \sum_{t=0}^{\infty} 5 \\ &= \infty \end{aligned}$$

además si ambos jugadores eligen no cooperar, la ganancia para cualquiera de los jugadores es

$$\begin{aligned} E_i(S_N, S_N) &= \sum_{t=0}^{\infty} 1 \\ &= \infty. \end{aligned}$$

De esta manera, nos es imposible decidir cuál es la mejor estrategia. Una solución es introducir un factor de descuento δ con $0 < \delta < 1$, así la ganancia total de un jugador está dada por

$$\sum_{t=0}^{\infty} \delta^t r_i(t),$$

donde $r_i(t)$ es la ganancia del jugador i en la etapa t .

Así, la ganancia total de ambos jugadores usando la estrategia (S_N, S_N) es

$$\begin{aligned} E_i(S_N, S_N) &= \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t r_i(t) \\ &= \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t (1) \\ &= \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \\ &= 1 + \delta + \delta^2 + \delta^3 + \dots \\ &= \frac{1}{1 - \delta}. \end{aligned}$$

De manera similar la ganancia si alguno de los dos jugadores decide no cooperar vendría dada por

$$\begin{aligned} E_1(S_N, S_C) &= E_2(S_C, S_N) \\ &= \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t r_i(t) \\ &= \sum_{t=0}^{\infty} 5\delta^t \\ &= 5 + 5\delta + 5\delta^2 + 5\delta^3 + \dots \\ &= \frac{5}{1 - \delta}. \end{aligned}$$

Ahora, hallemos las ganancias usando el conjunto de estrategias $S = \{S_N, S_C, S_G, S_T, S_A\}$ para ambos jugadores.

Ya hemos calculado las ganancias de J_1 y J_2 usando el par de estrategias (S_N, S_N) , la ganancia de J_1 usando (S_N, S_C) y la ganancia de J_2 usando (S_C, S_N) . Calculemos las que restan:

- $E_1(S_N, S_G) = 5 + \delta + \delta^2 + \delta^3 + \dots = 5 + \frac{\delta}{1-\delta} = \frac{5-4\delta}{1-\delta}$
- $E_1(S_N, S_T) = 5 + \delta + \delta^2 + \delta^3 + \dots = 5 + \frac{\delta}{1-\delta} = \frac{5-4\delta}{1-\delta}$
- $E_1(S_N, S_A) = 1 + \delta + \delta^2 + \delta^3 + \dots = \frac{1}{1-\delta}$
- $E_1(S_C, S_N) = 0$
- $E_1(S_C, S_C) = 3 + 3\delta + 3\delta^2 + 3\delta^3 + \dots = \frac{3}{1-\delta}$
- $E_1(S_C, S_G) = 3 + 3\delta + 3\delta^2 + 3\delta^3 + \dots = \frac{3}{1-\delta}$
- $E_1(S_C, S_T) = 3 + 3\delta + 3\delta^2 + 3\delta^3 + \dots = \frac{3}{1-\delta}$
- $E_1(S_C, S_A) = 0 + 3\delta + 3\delta^2 + 3\delta^3 + \dots = \frac{3\delta}{1-\delta}$
- $E_1(S_G, S_N) = 0 + \delta + \delta^2 + \delta^3 + \dots = \frac{\delta}{1-\delta}$
- $E_1(S_G, S_C) = 3 + 3\delta + 3\delta^2 + 3\delta^3 + \dots = \frac{3}{1-\delta}$
- $E_1(S_G, S_G) = 3 + 3\delta + 3\delta^2 + 3\delta^3 + \dots = \frac{3}{1-\delta}$
- $E_1(S_G, S_T) = 3 + 3\delta + 3\delta^2 + 3\delta^3 + \dots = \frac{3}{1-\delta}$
- $E_1(S_G, S_A) = 0 + 5\delta + \delta^2 + \delta^3 + \dots = 5\delta + \frac{\delta^2}{1-\delta} = \frac{5\delta-4\delta^2}{1-\delta}$
- $E_1(S_T, S_N) = 0 + \delta + \delta^2 + \delta^3 + \dots = \frac{\delta}{1-\delta}$
- $E_1(S_T, S_C) = 3 + 3\delta + 3\delta^2 + 3\delta^3 + \dots = \frac{3}{1-\delta}$
- $E_1(S_T, S_G) = 3 + 3\delta + 3\delta^2 + 3\delta^3 + \dots = \frac{3}{1-\delta}$
- $E_1(S_T, S_T) = 3 + 3\delta + 3\delta^2 + 3\delta^3 + \dots = \frac{3}{1-\delta}$
- $E_1(S_T, S_A) = 0 + 5\delta + 0\delta^2 + 5\delta^3 + \dots = \frac{5\delta}{1-\delta^2}$
- $E_1(S_A, S_N) = 1 + \delta + \delta^2 + \delta^3 + \dots = \frac{1}{1-\delta}$
- $E_1(S_A, S_C) = 5 + 3\delta + 3\delta^2 + 3\delta^3 + \dots = 5 + \frac{3\delta}{1-\delta} = \frac{5-2\delta}{1-\delta}$
- $E_1(S_A, S_G) = 5 + 0\delta + \delta^2 + \delta^3 + \dots = 5 + \frac{\delta^2}{1-\delta} = \frac{5-5\delta+\delta^2}{1-\delta}$
- $E_1(S_A, S_T) = 5 + 0\delta + 5\delta^2 + 0\delta^3 + \dots = \frac{5}{1-\delta^2}$
- $E_1(S_A, S_A) = 1 + \delta + \delta^2 + \delta^3 + \dots = \frac{1}{1-\delta}$
- $E_2(S_N, S_C) = 0$
- $E_2(S_N, S_G) = 0 + \delta + \delta^2 + \delta^3 + \dots = \frac{\delta}{1-\delta}$
- $E_2(S_N, S_T) = 0 + \delta + \delta^2 + \delta^3 + \dots = \frac{\delta}{1-\delta}$

- $E_2(S_N, S_A) = 1 + \delta + \delta^2 + \delta^3 + \dots = \frac{1}{1-\delta}$
- $E_2(S_C, S_C) = 3 + 3\delta + 3\delta^2 + 3\delta^3 + \dots = \frac{3}{1-\delta}$
- $E_2(S_C, S_G) = 3 + 3\delta + 3\delta^2 + 3\delta^3 + \dots = \frac{3}{1-\delta}$
- $E_2(S_C, S_T) = 3 + 3\delta + 3\delta^2 + 3\delta^3 + \dots = \frac{3}{1-\delta}$
- $E_2(S_C, S_A) = 5 + 3\delta + 3\delta^2 + 3\delta^3 + \dots = 5 + \frac{3\delta}{1-\delta} = \frac{5-2\delta}{1-\delta}$
- $E_2(S_G, S_N) = 5 + \delta + \delta^2 + \delta^3 + \dots = 5 + \frac{\delta}{1-\delta} = \frac{5-4\delta}{1-\delta}$
- $E_2(S_G, S_C) = 3 + 3\delta + 3\delta^2 + 3\delta^3 + \dots = \frac{3}{1-\delta}$
- $E_2(S_G, S_G) = 3 + 3\delta + 3\delta^2 + 3\delta^3 + \dots = \frac{3}{1-\delta}$
- $E_2(S_G, S_T) = 3 + 3\delta + 3\delta^2 + 3\delta^3 + \dots = \frac{3}{1-\delta}$
- $E_2(S_G, S_A) = 5 + 0\delta + \delta^2 + \delta^3 + \dots = 5 + \frac{\delta^2}{1-\delta} = \frac{5-5\delta+\delta^2}{1-\delta}$
- $E_2(S_T, S_N) = 5 + \delta + \delta^2 + \delta^3 + \dots = 5 + \frac{\delta}{1-\delta} = \frac{5-4\delta}{1-\delta}$
- $E_2(S_T, S_C) = 3 + 3\delta + 3\delta^2 + 3\delta^3 + \dots = \frac{3}{1-\delta}$
- $E_2(S_T, S_G) = 3 + 3\delta + 3\delta^2 + 3\delta^3 + \dots = \frac{3}{1-\delta}$
- $E_2(S_T, S_T) = 3 + 3\delta + 3\delta^2 + 3\delta^3 + \dots = \frac{3}{1-\delta}$
- $E_2(S_T, S_A) = 5 + 0\delta + 5\delta^2 + 0\delta^3 + \dots = \frac{5}{1-\delta^2}$
- $E_2(S_A, S_N) = 1 + \delta + \delta^2 + \delta^3 + \dots = \frac{1}{1-\delta}$
- $E_2(S_A, S_C) = 0 + 3\delta + 3\delta^2 + 3\delta^3 + \dots = \frac{3\delta}{1-\delta}$
- $E_2(S_A, S_G) = 0 + 5\delta + \delta^2 + \delta^3 + \dots = 5\delta + \frac{\delta^2}{1-\delta} = \frac{5\delta-4\delta^2}{1-\delta}$
- $E_2(S_A, S_T) = 0 + 5\delta + 0\delta^2 + 5\delta^3 + \dots = \frac{5\delta}{1-\delta^2}$
- $E_2(S_A, S_A) = 1 + \delta + \delta^2 + \delta^3 + \dots = \frac{1}{1-\delta}$.

La matriz de juego aparece en la Tabla 2.6.

		J_2				
J_1		S_N	S_C	S_G	S_T	S_A
	S_N	(1, 1)	(5, 0)	(5 - 4\delta, \delta)	(5 - 4\delta, \delta)	(1, 1)
	S_C	(0, 5)	(3, 3)	(3, 3)	(3, 3)	(3\delta, 5 - 2\delta)
	S_G	(\delta, 5 - 4\delta)	(3, 3)	(3, 3)	(3, 3)	(5\delta - 4\delta^2, 5 - 5\delta + \delta^2)
	S_T	(\delta, 5 - 4\delta)	(3, 3)	(3, 3)	(3, 3)	(\frac{5\delta}{1+\delta}, \frac{5}{1+\delta})
	S_A	(1, 1)	(5 - 2\delta, 3\delta)	(5 - 5\delta + \delta^2, 5\delta - 4\delta^2)	(\frac{5}{1+\delta}, \frac{5\delta}{1+\delta})	(1, 1)

Tabla 2.6: Matriz de juego del Dilema del Prisionero iterado infinitamente teniendo como factor común a $\frac{1}{1-\delta}$.

Capítulo 3

Aplicaciones, Coca-Cola VS Pepsi

En las primeras dos secciones se presentarán los antecedentes de la guerra que existió entre Coca-Cola y Pepsi con ayuda de la teoría de juegos utilizando los datos de [3] y en la tercera sección plantearemos una situación que puede ocurrir en el futuro de esta guerra.

3.1. Guerra de gaseosas en el pasado

Debido a su deseo de ganar cuota de mercado, Coca-Cola y Pepsi se vieron envueltas en una variedad de situaciones de guerra o rivalidad durante muchos años.

Ambos negocios estaban envueltos en una intensa competencia, al punto que utilizaron varias formas de publicidad, particularmente la televisión, para enfrentar una bebida contra la otra mediante comerciales. Incluso se dedicaron a algún negocio “sucio”; en la década de 1980, Pepsi tenía informantes dentro de Coca-Cola; por el contrario, Coca-Cola una vez vendió información falsa a algunos ejecutivos de Pepsi.

El juego principal de esta guerra fue ocasionado en 1974, donde el departamento de marketing de Pepsi estaba presentando dos propuestas muy importantes a los directivos de la empresa en ese momento. La primera sugerencia fue hacer un nuevo comercial de radio y televisión llamado “Generación Pepsi”, que presentara a artistas famosos del momento y tenía un costo de campaña de \$1,000,000. La segunda sugerencia fue llevar a cabo un “Pepsi Challenge”, que consistía en pedir a los participantes que eligieran entre Coca-Cola o Pepsi en una prueba de sabor a ciegas, ejecutar esta actividad costaría \$500,000 y tenía la intención de hacer algo diferente a los comerciales. Para ambas propuestas se tenía pensando hacerlas; Gran escala, Baja escala o no realizarlas si no se creían viables en última instancia. Si los resultados son favorables, podría ganar \$2,250,000 con una campaña a gran escala y \$1,500,000 con una campaña a pequeña escala. Por el contrario, si los resultados no son favorables podría perder $-\$1,100,000$ con una campaña a gran escala y $-\$750,000$ con la campaña a Baja Escala.

En la Figura 3.1 podemos apreciar el árbol de decisión de esta situación expresada en millones de dólares, donde P simboliza el nodo donde Pepsi tiene que tomar una decisión, N, B y A son las estrategias No hacer nada, Baja escala y Alta escala respectivamente, así como D y F simbolizan Desfavorable y Favorable. Además haciendo inducción hacia atrás podemos ver que el mejor pago que puede obtener Pepsi es al utilizar la estrategia de marketing Pepsi Challenge con producción en alta escala y esperando resultados favorables.

Como resultado al Pepsi Challenge se obtuvo que en la mayoría de veces la gente prefería Pepsi

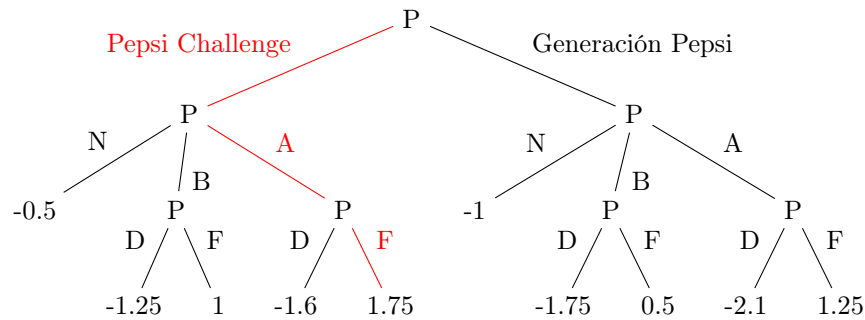


Figura 3.1: Árbol de decisión de Pepsi (Pepsi Challenge).

por encima de Coca-Cola, ya que el sabor más dulce y suave captaba más su atención. Coca-Cola en un principio no creía nada de ese reto, pero realizaron pruebas internas y los resultados obtenidos eran los mismos, por lo tanto en ese momento se comenzaron a preocupar.

Debido a esos resultados y a que Pepsi se encontraba agregando cada vez más gente a su cartera, los directivos de Coca-Cola y el CEO se reunieron para plantear qué acción tomar en respuesta a esa situación. Sobre la mesa de trabajo se tienen dos planes, Campañas extensas de marketing con un costo de \$2,000,000 y la propuesta por el CEO, lanzar al mercado New COKE (una nueva Coca-Cola, con sabor más dulce) esta acción con un costo de \$2,000,000. Cada uno de estos planes puede ser emprendido en todo el País, Estados seleccionados o no realizar nada. Para las Campañas extensas de Marketing se espera que los resultados favorables en todo el país reciban \$2,500,000, en cambio si los resultados son favorables en los estados seleccionados \$1,500,000. Si la situación es desfavorable se esperarían pérdidas de -\$1,000,000 para el plan en todo el país y pérdidas en los estados seleccionados de -\$800,000. En el caso de la introducción de New Coke, se espera que el resultado favorable a recibir lanzando en todo el país el producto sea de \$3,500,000, si es lanzado solamente en algunos estados, se esperan resultados de \$2,000,000. De lo contrario, si se reciben resultados desfavorables, lanzando el producto en todo el país tendría una pérdida de -\$1,000,000 y solo en determinados estados -\$1,000,000.

En la Figura 3.2 podemos apreciar el árbol de decisión de esta situación, expresada en millones de dólares, donde C simboliza el nodo donde Coca-Cola tiene que tomar una decisión, N, E y T son las estrategias No hacer nada, Estados seleccionados y Todo el país respectivamente, así como D y F simbolizan Desfavorable y Favorable. Haciendo inducción hacia atrás podemos ver que el mejor pago que puede obtener Coca-Cola es al crear la New COKE y emprenderla en todo el país esperando resultados favorables.

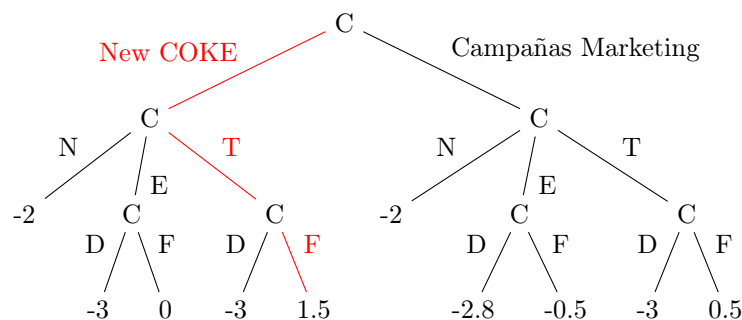


Figura 3.2: Árbol de decisión de Coca-Cola (New COKE).

Aplicaciones, Coca-Cola VS Pepsi

3.1 Guerra de gaseosas en el pasado

Luego de diversas pruebas con la nueva bebida (New COKE), Coca-Cola no está seguro todavía de lanzarla al mercado, debido a que Pepsi puede bombardear la salida del nuevo producto con extensas campañas de marketing en contra de él. De esta situación surgió la matriz de juego de la Tabla 3.1 expresada en millones de dólares.

		Pepsi	
		Lanzar campaña	No lanzar campaña
Coca-Cola	Lanzar New COKE	$(2, 2)$	$(1.5, 1)$
	No Lanzar New COKE	$(1.5, 1.5)$	$(1, 2)$

Tabla 3.1: Matriz de juego New COKE vs Campaña publicitaria.

Y como observamos en la Tabla 3.2 tenemos un equilibrio de Nash en (Lanzar New COKE, Lanzar campaña).

		Pepsi	
		Lanzar campaña	No lanzar campaña
Coca-Cola	Lanzar New COKE	$(\bar{2}, \bar{2})$	$(\bar{1.5}, 1)$
	No Lanzar New COKE	$(1.5, 1.5)$	$(1, \bar{2})$

Tabla 3.2: Matriz de juego New COKE vs Campaña publicitaria equilibrio de Nash.

Por lo tanto Coca-Cola decidió lanzar al mercado su nueva receta New COKE, acompañada de fuertes inversiones en campañas publicitarias como era de costumbre para Coca-Cola.

Los primeros meses de su lanzamiento fue un completo éxito, debido a que era un producto nuevo creó una gran expectativa. Luego de eso Coca-Cola descendió del mercado como nunca antes lo había experimentado de un 60 % a 23 % de cuota de mercado, incluso Pepsi se proclamó como el ganador de la guerra de las gaseosas. La empresa recibió un sinnúmero de llamadas y cartas de mucha gente molesta y proclamando el sabor que era vendido antes.

Por lo tanto, los directivos y el CEO de Coca-Cola deberán de tomar una de dos decisiones planteadas. Los dos planes que tienen a disposición son; 1. Apostar y continuar con New COKE por más tiempo lo cual costaría seguir produciendo $-\$10,000,000$; 2. Dado que muchos admitieron preferir la fórmula clásica, reanudar esta producción, lo cual costaría $-\$13,000,000$. Si se acepta la New COKE, se anticipan utilidades inmediatas de $\$10,000,000$, de lo contrario, se anticipan pérdidas de $-\$7,500,000$ si es rechazada. Si la Coca-Cola Classic es aceptada tal y como lo indican los hallazgos de los estudios, se obtendrían utilidades de $\$20,000,000$, de lo contrario, si es rechazada, se prevén pérdidas de $-\$5,000,000$.

De esta manera tendríamos el árbol de juego de la Figura 3.3, expresado en millones de dólares, donde C son los nodos donde Coca-Cola debe tomar una decisión, R y A son las estrategias Rechazar y Aceptar respectivamente.

Así, la New COKE solo duró tres meses en el mercado, luego de ello se empezó a vender de nuevo la fórmula tradicional, llamándose Coca-Cola Classic. A partir de dicho momento la empresa volvió a sobrepasar a toda competencia, esto hasta el día de hoy.

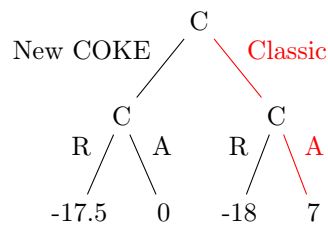


Figura 3.3: Árbol del juego de Coca-Cola (Classic).

3.2. Guerra de gaseosas en la actualidad

Cuando el COVID-19 azotó el mundo en el año 2020, la economía global experimentó la mayor recesión desde la Gran Depresión.

El confinamiento cerró bares, restaurantes, tiendas, cines y más lugares de ocio donde Coca-Cola y Pepsi sufrieron las consecuencias y vieron cómo se desplomaban sus ventas.

En el año 2020, Coca-Cola ganó la partida de la valoración de la marca al obtener el puesto número 6, frente al 36 de Pepsi, en el ranking de las marcas más valiosas de Forbes [23]. En cambio, en el 2022, Coca-Cola bajó al número 44 del top 100, y Pepsi desapareció [2].

3.2.1. Juegos de publicidad en los trimestres de 2022

La competencia entre estas dos grandes empresas continúa hasta el día de hoy, por lo que podemos plantear juegos en base a las utilidades totales de los tres primeros trimestres del año 2022 utilizando los datos de [10, 16] respectivamente, esto pensando que ambas empresas en cada trimestre tienen la opción de hacer publicidad o no.

Numerosas investigaciones confirman la verdadera influencia de la publicidad en las ventas [15], según el especialista Michael Ritter [8], las empresas que realizan publicidad tienen mayores ganancias, provocando un incremento de porcentaje en la utilidad total esperada. Estos porcentajes oscilan entre un 33 % y un 58 %, se tomará la parte entera por abajo del promedio de estas dos cantidades para realizar el juego, tomando así el 45 % para calcular la matriz de juego para cada trimestre.

Primer trimestre

Las utilidades totales en el primer trimestre de 2022 fueron

- \$28,935 millones para Coca-Cola
- \$16,200 millones para Pepsi.

Como se mencionó anteriormente, las empresas tendrán dos estrategias cada una, “Publicidad” o “No publicidad”, si deciden no hacer publicidad recibirán su utilidad total respectiva, en cambio si deciden hacer publicidad su utilidad total incrementará en un 45 %. Entonces si Coca-Cola decide hacer publicidad obtendrá \$13,020.75 millones más, es decir que sus ingresos totales serán \$41,955.75 millones. Mientras que Pepsi por hacer publicidad puede ganar \$7,290 millones más, es decir que sus ingresos totales serán \$23,490 millones. De esta manera tendremos la matriz de juego de la Tabla 3.3.

	Pepsi	
	Publicidad	No publicidad
Coca-Cola	Publicidad	(41,955.75 , 23,490) (41,955.75 , 23,16,200)
	No Publicidad	(28,935 , 23,490) (28,935 , 16,200)

Tabla 3.3: Matriz de juego primer trimestre.

Como podemos observar en la Tabla 3.4 en las estrategias (Publicidad, Publicidad) encontramos un equilibrio de Nash por lo cual, la mejor decisión que pueden tomar ambas empresas es hacer publicidad para su mercancía.

	Pepsi	
	Publicidad	No publicidad
Coca-Cola	Publicidad	(41,955.75 , 23,490) (41,955.75 , 23,16,200)
	No Publicidad	(28,935 , 23,490) (28,935 , 16,200)

Tabla 3.4: Matriz de juego primer trimestre, equilibrio de Nash.

Segundo trimestre

Las utilidades totales en el segundo trimestre de 2022 fueron

- \$57,311 millones para Coca-Cola
- \$20,225 millones para Pepsi.

Tenemos las estrategias “Publicidad” o “No publicidad”, sabemos que si deciden no hacer publicidad recibirán su utilidad total respectiva, es decir, Coca-Cola \$57,311 millones y Pepsi \$20,225 millones. Si deciden hacer publicidad su utilidad total incrementará en un 45 % entonces Coca-Cola obtendría \$25,789.95 millones más y sus ingresos totales serán \$83,100.95 millones, de la misma manera Pepsi ganaría \$9,101.25 millones más y sus ingresos totales serán \$29,326.25 millones. De esta manera tendremos la matriz de juego de la Tabla 3.5.

	Pepsi	
	Publicidad	No publicidad
Coca-Cola	Publicidad	(83,100.95 , 29,326.25) (83,100.95 , 20,225)
	No Publicidad	(57,311 , 29,326.25) (57,311 , 20,225)

Tabla 3.5: Matriz de juego segundo trimestre.

Como podemos observar en la Tabla 3.6 en las estrategias (Publicidad, Publicidad) encontramos un equilibrio de Nash por lo cual, la mejor decisión nuevamente es que ambas empresas obtén por hacer publicidad para su mercancía.

Tercer trimestre

Las utilidades totales en el tercer trimestre de 2022 fueron

- \$57,093 millones para Coca-Cola
- \$21,971 millones para Pepsi.

Similar a los dos trimestres pasados tenemos las estrategias “Publicidad” o “No publicidad”, si eligen no hacen publicidad recibirán su utilidad total respectiva obteniendo Coca-Cola \$57,093

Aplicaciones, Coca-Cola VS Pepsi
3.3 Guerra de gaseosas en el Futuro

	Pepsi	
	Publicidad	No publicidad
Coca-Cola	Publicidad (83,100.95 , 29,326.25)	No publicidad (83,100.95 , 20,225)
	No Publicidad (57,311 , 29,326.25)	(57,311 , 20,225)

Tabla 3.6: Matriz de juego segundo trimestre, equilibrio de Nash.

millones y Pepsi \$21,971 millones, sin embargo, si deciden hacer publicidad su utilidad incrementará en un 45 % entonces Coca-Cola obtendrá \$82,784.85 millones y Pepsi \$31,857.95 millones. De esta manera tendremos la matriz de juego de la Tabla 3.7.

	Pepsi	
	Publicidad	No publicidad
Coca-Cola	Publicidad (82,784.85 , 31,857.95)	No publicidad (82,784.85 , 21,971)
	No Publicidad (57,093 , 31,857.95)	(57,093 , 21,971)

Tabla 3.7: Matriz de juego tercer trimestre.

Como podemos observar en la Tabla 3.8 el equilibrio de Nash se encuentra en (Publicidad, Publicidad) por lo que ambas empresas deben hacer publicidad para su producto.

	Pepsi	
	Publicidad	No publicidad
Coca-Cola	Publicidad (82,784.85 , 31,857.95)	No publicidad (82,784.85 , 21,971)
	No Publicidad (57,093 , 31,857.95)	(57,093 , 21,971)

Tabla 3.8: Matriz de juego tercer trimestre, equilibrio de Nash.

3.3. Guerra de gaseosas en el Futuro

La guerra que ha existido entre Coca-Cola y Pepsi no va a terminar hasta que alguna de las dos empresas caiga, aun así, esto no evita que ambas empresas pueden llegar a cooperar en algún momento, pensando en esto se plantean los siguientes juegos.

3.3.1. Juego estático con el dilema del prisionero

Coca-Cola y Pepsi están pensando en subir los precios de sus productos, ambos tienen dos estrategias, “Cooperar” y “No cooperar”, si ambas deciden cooperar pueden ponerse de acuerdo al aumentar los precios de sus productos y tener una ganancia más grande con respecto a si no cooperan. Además, si se da el caso en el que una de las empresas decide cooperar y la otra no cooperar, la que no cooperó tendría una ganancia mucho más significativa que la que quiso cooperar, por lo cual tendríamos la matriz de juego de la Tabla 3.9, la cual está representada por una aproximación de las ventas en México en miles de millones en un periodo trimestral.

Como observamos en la Tabla 3.10 tenemos un equilibrio de Nash en (No cooperar, No cooperar).

	Pepsi	
	Cooperar	No cooperar
Coca-Cola	Cooperar	(6, 5)
	No cooperar	(8, 2)

Tabla 3.9: Matriz de juego, juego estático.

	Pepsi	
	Cooperar	No Cooperar
Coca-Cola	Cooperar	(6, 5)
	No cooperar	(8, 2)

Tabla 3.10: Matriz de juego, juego estático, equilibrio de Nash.

3.3.2. Juego dinámico con el dilema del prisionero

Sean J_1 Coca-Cola y J_2 Pepsi. Siguiendo la misma idea del juego estático representado en la Tabla 3.9 suponemos que la Coca-Cola es la empresa que elegirá primero su estrategia y en base a ella Pepsi tomará su decisión, entonces tendríamos la Figura 3.4 qué mediante inducción hacia atrás nos daría el equilibrio de Nash (No cooperar, No cooperar).

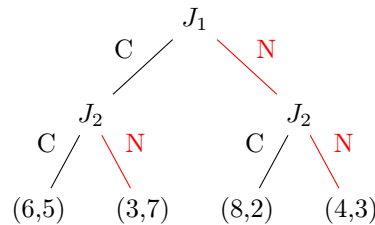


Figura 3.4: Árbol del juego dinámico, inducción hacia atrás.

3.3.3. Juego dinámico con el dilema del prisionero iterado.

Coca-Cola y Pepsi quieren saber que estrategia seguir si el juego representado en la Figura 3.4 es iterado una vez, esto para hacer un análisis sobre si cooperar o no en un periodo de 6 meses.

Por lo que tendríamos el juego representado por la Figura 3.5 en la cual podemos observar que el equilibrio de Nash se encuentra en (NN,NN).

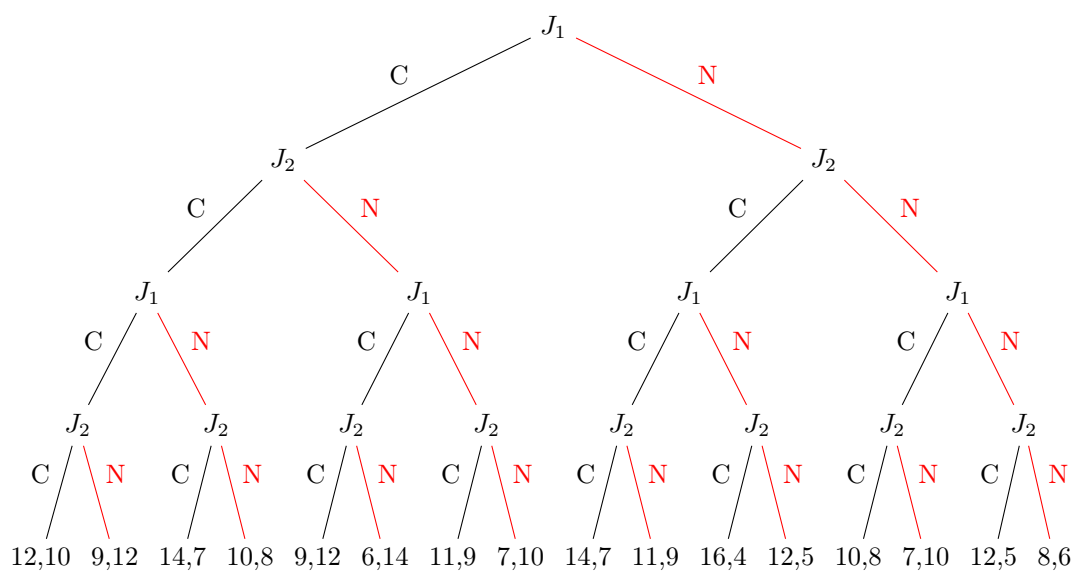


Figura 3.5: Árbol del juego Dilema del Prisionero iterado una vez con inducción hacia atrás.

Capítulo 4

Modelo de Bass

En este capítulo daremos una breve explicación al modelo de Bass [12], además lo utilizaremos para estimar las ventas que tendrán las empresas Coca-Cola y Pepsi en 2022, esto para presentar un juego donde analizaremos las mejores estrategias para cada empresa.

4.1. Ideas principales

Después de lanzar un nuevo producto en el mercado, la predicción de ventas siempre ha sido una tarea difícil debido a la falta de datos históricos. Sin embargo, tener una predicción precisa es extremadamente importante no solo desde el punto de vista del marketing, sino también para administrar el ciclo de vida general del producto. Ayuda a hacer una estrategia general para el producto, como determinar el tiempo de rebaja, promoción e introducción de una versión actualizada del producto en el mercado.

El modelo de Bass[6] es un modelo clásico para este propósito y se ha utilizado con éxito para la predicción de ventas de muchos de estos nuevos productos con mucha precisión.

El modelo hace dos suposiciones básicas sobre los compradores potenciales:

- Cuando se introduce un producto en el mercado, hay algunos clientes que compran el producto solo en base a la comunicación externa, como los anuncios en los medios masivos y sin la influencia de ninguna persona. Son los primeros en adoptar el producto y se denominan innovadores.
- El otro grupo de clientes primero es influenciado por los Innovadores, obtiene la revisión de ellos y solo luego compra el producto. Este conjunto de clientes se denomina Imitadores.

El modelo de Bass muestra cómo se puede utilizar la información de los primeros períodos de datos de ventas para desarrollar un pronóstico bastante bueno de las ventas futuras.

4.2. La ecuación de Bass

Según lo expuesto en Bass [6], definamos la probabilidad acumulada de que un cliente compre el producto desde el tiempo cero hasta el tiempo t como $F(t)$. Entonces, la probabilidad de compra en el tiempo t es la función de densidad $f(t) = F'(t)$.

La tasa de compra en el tiempo t , dado que no hay compra hasta el momento es:

$$\frac{f(t)}{1 - F(t)}$$

Modelar esto es como modelar la tasa de adopción del producto en un momento dado.

Bass sugirió que esta tasa de adopción se definiera como:

$$\frac{f(t)}{1 - F(t)} = p + qF(t) \quad (4.1)$$

donde p es la tasa de adopción innovadora y q es la tasa de imitación con $0 \leq p \leq 1$ y $0 \leq q \leq 1$. Además, q se multiplica por $F(t)$ ya que la imitación solo puede ocurrir en función de la adopción innovadora actual. Entonces, la ecuación anterior da la probabilidad de adopción total por parte de un cliente en el momento t . Cabe resaltar que el modelo de Bass se obtiene asumiendo que la tasa de riesgo para la aceptación de un producto o servicio puede definirse como la ecuación (4.1).

Por lo tanto, si logramos obtener p y q para un producto, podemos pronosticar su adopción a lo largo del tiempo.

Llamaremos a p como el **coeficiente de innovación** y a q como el **coeficiente de imitación**.

Ahora, resolvamos la ecuación (4.1) para encontrar a $F(t)$ y a $f(t)$, tomando en cuenta que la condición inicial es $F(0) = 0$ ya que en los clientes iniciales son nulos.

Primero obtengamos a F , para ello en la ecuación (4.1) escribimos a f en términos de F

$$\frac{\frac{dF}{dt}}{1 - F} = p + qF$$

despejando se consigue

$$\frac{dF}{(p + qF)(1 - F)} = dt.$$

Como necesitamos a F procedemos a integrar en ambos lados

$$\int \frac{1}{(p + qF)(1 - F)} dF = \int dt. \quad (4.2)$$

Descomponiendo el integrando del lado izquierdo en fracciones parciales, se obtiene que

$$\begin{aligned} \frac{1}{(p + qF)(1 - F)} &= \frac{A}{p + qF} + \frac{B}{1 - F} \\ &= \frac{A(1 - F) + B(p + qF)}{(p + qF)(1 - F)} \\ &= \frac{A - AF + Bp + BqF}{(p + qF)(1 - F)} \\ &= \frac{A + Bp + (Bq - A)F}{(p + qF)(1 - F)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto tendríamos que

$$A + Bp = 1 \quad y \quad Bq - A = 0.$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se concluye que $A = \frac{q}{p+q}$ y $B = \frac{1}{p+q}$.

Entonces, utilizando A y B obtenidos previamente resolvamos la integral del lado izquierdo de la ecuación (4.2)

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{(p+qF)(1-F)} dF &= \int \left(\frac{\frac{q}{p+q}}{p+qF} + \frac{\frac{1}{p+q}}{1-F} \right) dF \\
 &= \frac{q}{p+q} \int \frac{1}{p+qF} dF + \frac{1}{p+q} \int \frac{1}{1-F} dF \\
 &\quad (\text{sean } u = p+qF \Rightarrow du = qdF \text{ y } w = 1-F \Rightarrow dw = -dF) \\
 &= \frac{q}{p+q} \int \frac{1}{uq} du + \frac{1}{p+q} \int -\frac{1}{w} dw \\
 &= \frac{1}{p+q} \int \frac{1}{u} du - \frac{1}{p+q} \int \frac{1}{w} dw \\
 &= \frac{1}{p+q} \ln(u) - \frac{1}{p+q} \ln(w) + c_1 \\
 &= \frac{\ln(p+qF) - \ln(1-F)}{p+q} + c_1.
 \end{aligned}$$

Además, ya que $\int dt = t + c_2$ podemos escribir la ecuación (4.2) como

$$\frac{\ln(p+qF) - \ln(1-F)}{p+q} = t + c. \quad (4.3)$$

Para encontrar la constante c , notemos que si $t = 0$ entonces $F(0) = 0$ y obtenemos:

$$c = \frac{\ln(p+qF) - \ln(1-F)}{p+q} - t = \frac{\ln(p) - \ln(1)}{p+q} = \frac{\ln(p)}{p+q}.$$

Ahora solo sustituimos a c en la ecuación (4.3)

$$\frac{\ln(p+qF) - \ln(1-F)}{p+q} = t + \frac{\ln(p)}{p+q}$$

multiplicando $(p+q)$ en ambos lados de la ecuación tenemos

$$\ln(p+qF) - \ln(1-F) = (p+q)t + \ln(p)$$

ya que $\ln(\frac{a}{b}) = \ln a - \ln b$ conseguimos

$$\ln\left(\frac{p+qF}{1-F}\right) = (p+q)t + \ln(p)$$

para retirar a $\ln$ de la ecuación utilizamos la función exponencial

$$\begin{aligned}
 \frac{p+qF}{1-F} &= e^{(p+q)t + \ln(p)} \\
 &= e^{(p+q)t} e^{\ln(p)} \\
 &= e^{(p+q)t} p
 \end{aligned}$$

multiplicando ambos lados de la ecuación por $(1-F)$ obtenemos

$$p+qF = e^{(p+q)t} p - e^{(p+q)t} pF$$

agrupando del lado izquierdo de la ecuación los términos que tengan a F , del lado derecho los que no y factorizando a F y a p tenemos

$$F(pe^{(p+q)t} + q) = p(e^{(p+q)t} - 1)$$

por último, despejando a F conseguimos

$$F(t) = \frac{p(e^{(p+q)t} - 1)}{pe^{(p+q)t} + q}.$$

Solo nos queda encontrar a $f(t)$ derivando $F(t)$:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{(pe^{(p+q)t} + q) \frac{d}{dt}(p(e^{(p+q)t} - 1)) - (p(e^{(p+q)t} - 1)) \frac{d}{dt}(pe^{(p+q)t} + q)}{(pe^{(p+q)t} + q)^2} \\ &= \frac{(pe^{(p+q)t} + q)(e^{(p+q)t}p(p+q)) - (p(e^{(p+q)t} - 1))(e^{(p+q)t}p(p+q))}{(pe^{(p+q)t} + q)^2} \\ &= \frac{(pe^{(p+q)t} + q - pe^{(p+q)t} + p)(e^{(p+q)t}p(p+q))}{(pe^{(p+q)t} + q)^2} \\ &= \frac{(p+q)(e^{(p+q)t}p(p+q))}{(pe^{(p+q)t} + q)^2} \\ &= \frac{pe^{(p+q)t}(p+q)^2}{(pe^{(p+q)t} + q)^2}. \end{aligned}$$

Si definimos m como el **tamaño del mercado objetivo** que puede adoptar el producto, entonces en cada tiempo t , las adopciones están dadas por $m \times f(t)$.

Ahora, si tenemos el historial de ventas actual de un producto en t tiempos podemos usarlo para adaptarse a la curva de adopción y para ello definamos:

- **Ventas** en cualquier periodo t , $s(t) = mf(t)$.
- **Ventas acumuladas** hasta el periodo t , $S(t) = mF(t)$.

Sustituyendo $F(t)$ y $f(t)$ en la ecuación de Bass (4.1):

$$\frac{\frac{s(t)}{m}}{1 - \frac{S(t)}{m}} = p + q \frac{S(t)}{m}.$$

Podemos reescribir esto como

$$\hat{s}(t) = \left(p + q \frac{S(t)}{m} \right) (m - S(t)) \quad (4.4)$$

$$\Leftrightarrow \hat{s}(t) = p(m - S(t)) + q \frac{S(t)}{m} (m - S(t)) \quad (4.5)$$

donde $\hat{s}(t)$ es la estimación del modelo para $s(t)$ y $S(t) = \sum_{k=1}^{t-1} s(k) = s(1) + s(2) + \dots + s(t-1)$.

A partir de la ecuación (4.5), podemos ver que al ser m el número total de clientes, $m - S(t)$ es el número de clientes que aún no han adoptado el producto en el momento t . Además, los adoptadores en el tiempo t se dividen en dos componentes:

- $p(m - S(t))$, p es el coeficiente de innovación porque su contribución a los nuevos adoptadores en el tiempo t no dependen del número de adoptadores anteriores $S(t)$. Por lo tanto, estas adopciones deben deberse a alguna influencia externa.
- $q \frac{S(t)}{m}(m - S(t))$, el efecto de q está ligado a $\frac{S(t)}{m}$, la proporción de adopciones anteriores al tiempo t , lo que implica que el número de adopciones en el tiempo t es proporcional al número de adoptantes previos. A esto le llamamos imitación o influencia interna porque mientras más personas hablen de un producto, más personas lo adoptaran.

4.2.1. Juego aplicando el modelo de Bass

Gracias a las ventas de Coca-Cola dadas por la tabla 4.1 de los años 2009 a 2021 utilizando el modelo de Bass, particularmente la ecuación (4.5), podemos predecir las ventas del 2022. Para ello buscamos estimar $s(14)$, tomando en cuenta que $m = 562,256.64$, $p = 0.03$ y $q = 1$. Además sabemos que $S(14) = s(1) + s(2) + \dots + s(13) = 519,124$, por lo cual

$$\hat{s}(14) = p(m - S(14)) + q \frac{S(14)}{m}(m - S(14)) = 41,117.766$$

Tiempo t	Año	ventas $s(t)$
0	2008	0
1	2009	30,990
2	2010	35,119
3	2011	46,542
4	2012	48,017
5	2013	46,854
6	2014	45,998
7	2015	44,294
8	2016	41,863
9	2017	36,212
10	2018	34,300
11	2019	37,266
12	2020	33,014
13	2021	38,655

Tabla 4.1: Ventas de Coca-Cola del 2009 al 2021 en millones de dólares [4].

De manera similar para Pepsi tenemos las ventas dadas en la Tabla 4.2 y obtendremos las ventas del 2022 para ello buscamos estimar $s(12)$, tomando en cuenta que $m = 408,913.92$, $p = 0.03$ y $q = 1$. Además, sabemos que $S(12) = s(1) + s(2) + \dots + s(11) = 353,927.1$, por lo cual

$$\hat{s}(12) = p(m - S(12)) + q \frac{S(12)}{m}(m - S(12)) = 49,242.324$$

Cabe resaltar que para obtener las ventas del 2022 para Coca-Cola y Pepsi consideramos que cuando el tiempo esta dado en años los coeficientes de innovación e imitación suelen ser aproximadamente 0.03 y 1 respectivamente [26], aun así, recalamos que existen métodos para estimar dichos coeficientes. Además para escoger m se tuvo en cuenta que los consumidores de refrescos son aproximadamente el 60% de la población mundial, es decir, 4,732.8 millones de personas, además cada persona suele consumir 108 litros de refresco al año y el precio del litro de Coca-Cola es 1.1 dólares, teniendo así para Coca-Cola $m = (4732.8)(108)(1.1) = 562,256.64$ y lo único que cambia para Pepsi es el precio del litro, que ronda los 0.8 dólares obteniendo $m = (4732.8)(108)(0.8) = 408,913.92$.

Tiempo t	Año	ventas $s(t)$
0	2010	0
1	2011	34,582.1
2	2012	39,091.1
3	2013	31,879.2
4	2014	31,341.0
5	2015	29,636.3
6	2016	30,143.5
7	2017	29,856.6
8	2018	29,744.1
9	2019	30,222.5
10	2020	31,667.4
11	2021	35,763.3

Tabla 4.2: Ventas de Pepsi del 2011 al 2021 en millones de dólares [21]

Podemos notar que el resultado obtenido para las ventas de Coca-Cola es más realista que el de Pepsi y esto se debe al número de datos utilizados, entre más datos el modelo de Bass es más preciso.

Ahora consideremos el siguiente juego:

Supongamos que Coca Cola y Pepsi están pensando en hacer Publicidad o confiar en el modelo de Bass y ahorrar el gasto en publicidad, por lo cual utilizan las ventas del 2021 para estimar sus ganancias suponiendo que hacen publicidad como en la Sección 3.2.1. Obteniendo así la matriz de juego de la Tabla 4.3

	Pepsi	
	Modelo de Bass	Publicidad
Coca-Cola	Modelo de Bass	(41,117.766 , 49,242.324)
	Publicidad	(56,049.75 , 49,242.324)

Tabla 4.3: Matriz de juego Modelo de Bass vs Publicidad.

Así, podemos comprobar que el equilibrio de Nash está en (Publicidad, Publicidad) como se muestra en la Tabla 4.4. Por lo que podemos entender porque a pesar de las ventas aseguradas que tienen ambas empresas siempre vemos anuncios de sus bebidas.

	Pepsi	
	Modelo de Bass	Publicidad
Coca-Cola	Modelo de Bass	(41,117.766 , 49,242.324)
	Publicidad	(56,049.75 , 49,242.324)

Tabla 4.4: Matriz de juego Modelo de Bass vs Publicidad equilibrio de Nash.

Conclusión

La teoría de juegos tiene numerosas aplicaciones en la vida cotidiana, en el análisis económico de estructuras de mercado y en la elaboración de estrategias empresariales.

Además, analiza los comportamientos estratégicos entre los jugadores. En el mundo real, son muy frecuentes las situaciones en las que, al igual que en los juegos, su resultado depende de la toma de decisiones de los jugadores.

Durante el trabajo nos dedicamos a analizar el comportamiento a lo largo del tiempo que han tenido y que podrían tener las empresas Coca-Cola y Pepsi, esto para ejemplificar el funcionamiento del pensamiento humano al dar soluciones a problemáticas de decisión. Por lo cual se obtuvieron los siguientes resultados:

Siempre que alguna de las dos empresas esté planteando en si hacer publicidad o esperar el mismo resultado de ventas que han tenido en el último periodo, lo mejor es hacer publicidad puesto que sus ganancias aumentan significativamente.

Coca-Cola y Pepsi han tenido muchas situaciones de juego del dilema del prisionero, aunque ambos tengan mejores ganancias al cooperar no se pueden arriesgar y la respuesta que nos otorga la teoría de juegos es que la mejor estrategia a seguir es no cooperar porque existe mucho riesgo al cooperar.

Por último, nos enfrentamos a un juego que analiza si es mejor esperar que las ganancias aumenten al año, como lo estima el modelo de Bass o arriesgarse y hacer publicidad, este juego se ve muy reñido pero lo mejor que pueden hacer ambas empresas es realizar publicidad para tener más ganancias.

Como trabajo a futuro se realizará la estimación de las ventas de ambas empresas con ayuda del modelo de Bass, pero en lugar de dar a los coeficientes de innovación e imitación fijos los obtendremos con estimadores. También se le dará seguimiento a nuestra aplicación del dilema del prisionero en el caso infinito.

Bibliografía

- [1] I. Alcon. *La Guerra de Las Sodas de Los 80*. Scribd, 2015.
- [2] C. Ang. *The Top 100 Most Valuable Brands in 2022*. Visual Capitalist, 2022. <https://n9.cl/5525bv>.
- [3] Anónimo. *Guerra de Colas*. Universidad Mariano Gálvez de Guatemala, Campus Universitario Jutiapa, 2018.
- [4] Anónimo. *CocaCola Revenue 2010-2022*. Macrotrends, 2022. <https://n9.cl/nr96m>.
- [5] E. Barron. *Game Theory An Introduction*. Wiley, second edition, 2013.
- [6] F. Bass. *A new product growth model for consumer durables*. Management Science, Vol. 15, No. 5, Theory Series, 1969.
- [7] C. Briones. *Un análisis del Dilema del Prisionero Iterado*. Tesis de Maestría. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, 2016.
- [8] R. Cassella. *Los efectos de la publicidad sobre las ventas*. Economía y Empleo, 2010.
- [9] M. Chávez. *Estudio sobre un Problema de Reemplazamiento de Máquinas vía Procesos de Decisión de Markov y Teoría de Juegos*. Tesis de Licenciatura. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, 2010.
- [10] J. Collazo. *REPORTES Y RESULTADOS*. Coca-Cola FEMSA, 2022. <https://n9.cl/s0mjp>.
- [11] A. Cournot. *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses*. Librairie de L. Hachette, 1838.
- [12] S. Das. *Data Science: Theories, Models, Algorithms, and Analytics*. MLBook, 2018.
- [13] J. Nash J. Mayberry and M. Shubik. *A Comparison of Treatments of a Duopoly Situation*. Econometrica, Vol. 21, No. 1, 1953.
- [14] O. Morgenstern J. Neumann. *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press, Princeton, 1944.
- [15] J.Vargas. *Business Strategy in Mexican Beer Industry: A Case Applying Game Theory*. Universidad de Guadalajara, University Center for Economic and Managerial Sciences, 2012.
- [16] F. Media. *PepsiCo Inc (PEP)*. Investing, 2022. <https://n9.cl/ti8jo>.
- [17] L. Mucelli. *The Apple-Samsung rivalry analyzed with Game theory*. Cornell University, 2017.
- [18] J. Nash. *Equilibrium points in n-person games*. National Academy of Science, Vol. 36, No. 1, 1950.

- [19] J. Nash. *Non-cooperative games*. Department of Mathematics, Princeton University, 1950.
- [20] J. Nash. *Two-person cooperative games*. Santa Mónica: RAND Corporation, 1950.
- [21] A. Orús. *Ingresos netos generados por el segmento de bebidas de PepsiCo a nivel mundial entre 2007 y 2021*. Statista, 2022. <https://n9.cl/1yimc>.
- [22] W. Poundstone. *El dilema del prisionero: John Von Neumann, la teoría de juegos y la bomba*. Alianza Editorial, 1995.
- [23] M. Swant. *The 2020 World's Most Valuable Brands*. Forbes, 2020. <https://n9.cl/5525bv>.
- [24] A. Tamzisa and S. Yuan. *Applying A Game Theory - Apple Vs Samsung*. University of Adelaide, 2015.
- [25] J. Webb. *Game Theory Decisions, Interaction and Evolution*. Springer, 2007.
- [26] W. Winston. *The Bass Model for Sales of a Product*. Bass Diffusion Model, 2014. <https://n9.cl/n1gbo>.
- [27] D. Yoffie. *La guerra de los refrescos de cola continúa: Coke y Pepsi en 2006*. Harvard Business School, 2006.