



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

**Refracción de una onda plana por
una superficie paraboloidal: rayos de
luz, frentes de onda y cáustica**

Tesis Presentada al
Colegio de Física

como requisito para la obtención del grado de

Licenciado en Física

por

Alberto Zecua Temoltzin

asesorado por

M.C. Israel Julián Macías
Dr. Gilberto Silva Ortigoza

Puebla, Pue.
octubre, 2019

Título: Refracción de una onda plana por una superficie paraboloidal: rayos de luz, frentes de onda y cáustica.

Estudiante: Alberto Zecua Temoltzin

COMITÉ

Dr. Gerardo F. Torres del Castillo
Presidente

Dr. Luis M. Arroyo Carrasco
Secretario

Dr. Carlos I. Robledo Sánchez
Vocal

Dra. M. del Rosario Pastrana Sánchez
Suplente

M.C. Israel Julián Macías
Asesor

Dr. Gilberto Silva Ortigoza
Asesor

*Dedicado a mis padres Luz María y Alberto
a mi gran amor Nay
y a mis hermanos,
por ser las personas más importantes en mi vida.*

Índice general

Resumen

Utilizando el enfoque de la óptica geométrica estudiamos la refracción de un frente de onda plano por una interface paraboloidal. La región del espacio donde se localiza el frente de onda incidente tiene un índice de refracción $n_1 \geq 1$, mientras que el frente de onda refractado se localiza en el vacío ($n_2 = 1$). Obtenemos las trayectorias de los rayos de luz y frentes de onda refractados, así como la cáustica asociada, que mostramos, tiene dos ramas y están relacionadas con las dos curvaturas de la interface. Como primer caso, consideramos que los rayos de luz inciden sobre la superficie paralelos al eje z (eje óptico) y damos diferentes valores para el índice de refracción n_1 . Como segundo caso, damos diferentes valores para una de las curvaturas de la interface, con $n_1 = 1.5$. Como tercer caso, consideramos que los rayos de luz incidentes forman un ángulo de α con respecto del eje óptico. Los resultados muestran que, cuando $n_1 = 1$ no existe cáustica debido a que sin importar qué superficie refractante consideremos, los rayos de luz no cambian de dirección cuando la atraviesan. En los demás casos encontramos dos ramas de la cáustica, una que corresponde a un segmento de línea recta y otra que es una superficie en forma de trompeta. Finalmente, comparamos la forma de los frentes de onda y cáustica cuando $\alpha = 0$ y $\alpha = \frac{\pi}{60}$ rad y observamos que cuando $\alpha = 0$, una de las ramas de la cáustica es un segmento de línea recta, mientras que cuando $\alpha = \frac{\pi}{60}$ rad, este segmento de línea recta se transforma en una superficie cuya forma parece una hoja lanceolada.

Palabras clave: óptica geométrica, refracción de una onda plana, cáustica

Objetivo General

Obtener los rayos de luz y frentes de onda refractados, así como la cáustica asociada a la refracción de una onda plana por una interface paraboloidal, la cual divide dos medios ópticos caracterizados con índices de refracción ($n_1 \geq n_2$) constantes.

Objetivos particulares

1. Revisión de los conceptos de óptica geométrica.
2. Deducción de la ecuación eikonal y su relación con la óptica geométrica.
3. Obtención de las expresiones analíticas de los rayos de luz, frentes de onda y cáustica, así como de las gráficas correspondientes asociadas con la refracción de una onda plana sobre una superficie paraboloidal.

Capítulo 1

Introducción

A lo largo de la historia, la luz ha sido considerada como onda y como partícula. Los antiguos filósofos griegos, formularon diferentes teorías para conocer más sobre la naturaleza de la luz. Pensaban que los ojos y los objetos emitían efluvios de fuego. Empédocles enuncia la primera teoría basada en dicha concepción.

Son Demócrito y Platón quienes posteriormente formulan las primeras teorías granulares sobre la luz. Describían a los efluvios como conjuntos de partículas que viajaban a una velocidad finita al mismo tiempo que el ojo las percibía como un flujo continuo. Posteriormente Aristóteles formula la primera teoría dinámica. Para él, la visión era producida porque los efluvios alteraban las propiedades del medio. Estas dos concepciones han llegado hasta la actualidad a través de diferentes interpretaciones, ejemplos de ello son, las teorías corpusculares de Newton y Einstein y las teorías ondulatorias de Huygens, Fresnel y Maxwell.

Las leyes de la óptica geométrica que destacarían en el siglo XVIII fueron perfiladas por los tratados de Euclides, quien enuncia la ley de reflexión e introduce el concepto de perspectiva y Ptolomeo, quien es la primera referencia al principio de tiempo mínimo que formalmente enunciaría Fermat en 1662 y que constituye su forma moderna.

Grandes avances en el conocimiento de la luz se deben también a personajes como Alhazen quien, entre otras cosas, realiza numerosos trabajos sobre reflexión y refracción, y sienta las bases de lo que más tarde se conocería como la ley de Snell. Por otro lado, Al-Farisi, realiza estudios sobre la refracción

CAPÍTULO 1 INTRODUCCIÓN

de la luz, observa que la velocidad de la luz es inversamente proporcional a la densidad del medio por el cual viaja, es quizá el precursor de lo que hoy conocemos como índice de refracción. Descartes publica en 1637 por primera vez, la ley de la refracción de la luz que Snell había establecido tiempo atrás.

Hooke y Huygens fueron dos grandes exponentes de la teoría ondulatoria. Hooke es el primer científico en adoptar un punto de vista ondulatorio mediante el cual la luz consistía en vibraciones propagándose a una gran velocidad. Huygens hacia finales del siglo XVII describe el principio de propagación a través de la envolvente de los frentes de onda. Con este principio explica perfectamente las leyes de reflexión y refracción de la luz, elimina el error conceptual sobre la propagación instantánea de las antiguas teorías dinámicas.

Por otro lado, Newton, un gran defensor de la teoría corpuscular, apoyaba la idea de que la luz estaba compuesta por pequeñas partículas sin masa, que eran emitidas a una gran velocidad y se propagaban de manera rectilínea. En el año 1666 explica el fenómeno de dispersión de la luz al hacer incidir un rayo de luz blanca sobre un prisma, observó que la luz blanca se separaba en diferentes colores y a su vez cada color tomaba una dirección diferente. Explica detalladamente el fenómeno de reflexión. Durante muchos años dominaron las ideas de Newton sobre la naturaleza de la luz y su teoría corpuscular.

En el siglo XIX la teoría ondulatoria es retomada con mayor interés por los científicos Young, Francois Arago y Fresnel, quienes se dedican a explicar los fenómenos de interferencia, difracción y polarización de la luz. Young, mediante su experimento de la doble rendija, mostraba la naturaleza ondulatoria de la luz. Fresnel realiza una síntesis de la envolvente de Huygens y el trabajo de Young para entender el fenómeno de la difracción. La teoría ondulatoria explicaba entonces los fenómenos de reflexión, refracción, interferencia y difracción.

Un problema que surge al ser admitida la característica ondulatoria de la luz es el medio por el cual viajaban las ondas, los científicos pensaban que debía existir una sustancia a través de la cual viajaba la luz. A dicha sustancia le llamaron éter y aunque varios personajes se dedican a estudiarla durante gran parte del siglo XIX, los problemas entonces resueltos no fueron satisfactorios.

Muchas de las respuestas llegan desde otro punto de la física. Ya en los ini-

CAPÍTULO 1 INTRODUCCIÓN

cios del siglo XX, la luz era aceptada como una perturbación electromagnética con características ondulatorias. Los trabajos en esta área son resumidos por James Clerk Maxwell en un conjunto de ecuaciones que cambiarían la ciencia, y con las cuales se tenía la posibilidad de obtener ondas electromagnéticas propagándose en el vacío a una velocidad que depende de las propiedades eléctricas y magnéticas del medio. Se podían entender los fenómenos de la reflexión y refracción de la luz, los fenómenos de interferencia, difracción y polarización. La teoría electromagnética de Maxwell formó un gran marco teórico de la física.

La óptica es una rama de la física que se ocupa del estudio del comportamiento de la luz, a nivel clásico se divide en dos partes principales: óptica física (u ondulatoria) y óptica geométrica (de rayos). La óptica geométrica utiliza la noción de rayo de luz, es una aproximación del comportamiento que corresponde a las ondas electromagnéticas cuando las dimensiones de los objetos involucrados son mucho mayores comparadas con la longitud de onda de la luz.

En el presente trabajo, nos basamos en la óptica geométrica para obtener las trayectorias de los rayos de luz, frentes de onda y la cáustica asociadas a la refracción de una onda plana sobre una interface que separa dos medios con índices de refracción constantes n_1 y n_2 .

En el segundo capítulo resumimos los conceptos básicos de óptica geométrica así como los principios de Fermat y Huygens utilizados en este trabajo para describir la propagación de la luz. Utilizamos un enfoque vectorial para la obtención de los rayos de luz y frentes de onda refractados sobre una superficie arbitraria, además describimos brevemente el cálculo analítico de la región cáustica. A partir de las ecuaciones de Maxwell sin fuentes en un medio lineal inhomogéneo se muestra que la propagación de la luz se puede describir resolviendo una ecuación en derivadas parciales no lineal denominada *ecuación eikonal*. Finalmente mostramos la relación que existe entre la ecuación eikonal y la óptica geométrica.

En el tercer capítulo aplicamos el enfoque vectorial visto en el capítulo anterior considerando que la superficie refractante tiene forma paraboloidal. Obtenemos las expresiones analíticas de los rayos de luz, frentes de onda y cáustica; a partir de estas expresiones presentamos las gráficas correspondientes, como primer caso, para diferentes valores del índice de refracción n_1 , manteniendo la curvatura del paraboloido constante (a constante) y suponiendo que los rayos de luz inciden sobre la interface paralelos al eje z , como

CAPÍTULO 1 INTRODUCCIÓN

segundo caso para diferentes valores de a , con n_1 constante y los rayos de luz incidentes paralelos al eje z . Finalmente, en el tercer caso, considerando n_1 y a constantes cuando los rayos de luz inciden paralelos al eje z y cuando forman un ángulo $\alpha = \frac{\pi}{60}$ *rad* con el eje z .

Capítulo 2

Descripción de la propagación de la luz usando óptica geométrica

En este capítulo resumimos algunos conceptos para el estudio de la propagación de la luz usando óptica geométrica. Posteriormente, mencionamos los principios de Fermat y Huygens, con los cuales se obtienen las leyes de reflexión y refracción. En la naturaleza observamos que cuando la luz se refleja o se refracta, se forman regiones de máximo enfocamiento de luz, denominadas *cáusticas*, que son la observable a nivel de óptica geométrica. Posteriormente, deducimos las expresiones que describen las trayectorias de los rayos de luz y de los frentes de onda refractados, con las cuales es posible obtener la expresión analítica de la región cáustica. Finalmente, deducimos la *ecuación eikonal* a partir de las ecuaciones de Maxwell sin fuentes, en un medio caracterizado con un índice de refracción que depende de la posición, y mostramos la relación que existe entre la óptica geométrica y la *ecuación eikonal*.

2.1. Conceptos de óptica geométrica

En óptica geométrica, el concepto con el que se describe la propagación de la luz es el de rayo luminoso, definido como la línea imaginaria que describe la dirección de propagación de la luz, sin tomar en cuenta su naturaleza [?]. Cada medio material (homogéneo e isotrópico) por el que se propaga la luz,

CAPÍTULO 2 DESCRIPCIÓN DE LA PROPAGACIÓN DE LA LUZ USANDO ÓPTICA GEOMÉTRICA

2.1. CONCEPTOS DE ÓPTICA GEOMÉTRICA

está caracterizado con un valor mayor o igual que uno, el cual es denominado índice de refracción y está definido como

$$n = \frac{c}{v}, \quad (2.1)$$

donde c es la velocidad de la luz en el vacío y v es la velocidad de la luz en el medio material. Existen casos en los que el índice de refracción depende de otras variables como: la posición, la temperatura, la intensidad de la luz con la cual se ilumina el material o bien, la longitud de onda de la luz, por mencionar algunas.

Otro concepto utilizado en óptica geométrica es el de longitud de camino óptico, denotada por LCO . Considere una fuente puntual luminosa localizada en un medio óptico caracterizado por un índice de refracción constante que emite rayos de luz en todas direcciones (ver figura ??); la longitud de camino óptico se define como la distancia que ha recorrido un rayo de luz desde la posición de la fuente hasta un punto arbitrario multiplicada por el índice de refracción del material. Cuando el índice de refracción depende de la posición (ver figura ??), la longitud de camino óptico está dada por

$$LCO = \int_A^B n(\mathbf{r}) ds \quad (2.2)$$

donde ds es el elemento diferencial de arco a lo largo de la trayectoria que va del punto A al punto B.

Un concepto más, definido en óptica geométrica es el de frente de onda geométrico, el cual está dado por todos los puntos en el medio material tales que la LCO es constante (ver figura ??a), en este caso se observa que los frentes de onda son esferas, con la fuente puntual luminosa ubicada en el centro de dichas esferas. Si consideramos una fuente luminosa lineal (ver figura ??b), vemos que los frentes de onda son cilindros concéntricos, de tal manera que la fuente lineal luminosa se localiza sobre el eje de los cilindros.

Cuando los rayos de luz emitidos por una fuente puntual o una fuente lineal, están muy alejados de la fuente y tomamos una región pequeña alrededor de un rayo, observamos que los frentes de onda localmente son planos (ver Fig.??).

CAPÍTULO 2 DESCRIPCIÓN DE LA PROPAGACIÓN DE LA LUZ USANDO ÓPTICA GEOMÉTRICA
2.1. CONCEPTOS DE ÓPTICA GEOMÉTRICA

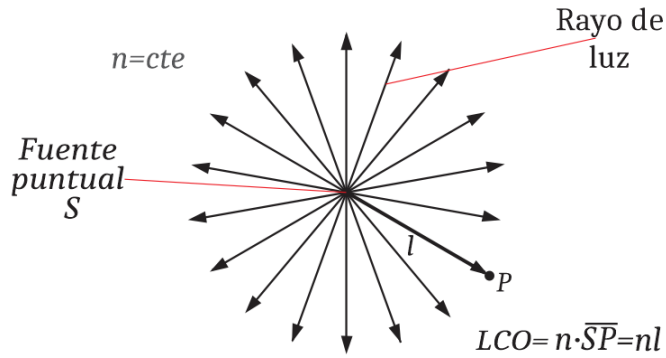


Figura 2.1: Una fuente puntual emitiendo rayos de luz en todas direcciones. La longitud de camino óptico LCO del punto S al punto P es igual a nl .

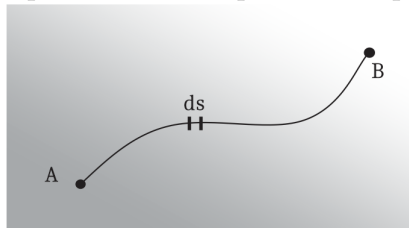


Figura 2.2: Elemento diferencial de la trayectoria de luz que va del punto A al B en un medio con índice que depende de la posición.

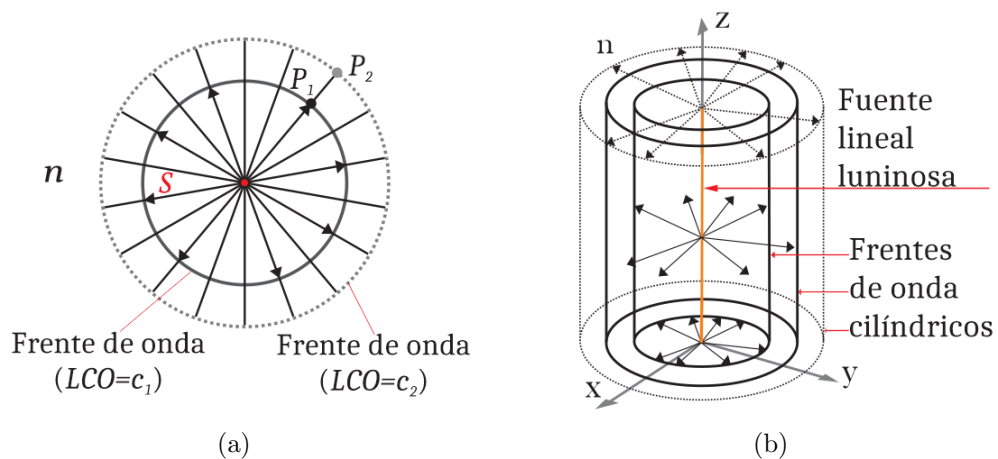


Figura 2.3: (a) Frentes de onda esféricas para una fuente puntual y diferentes valores de la LCO . (b) Frentes de onda cilíndricas para una fuente lineal.



Figura 2.4: Sección transversal de los frentes de onda generados por una fuente puntual. Conforme el frente de onda se aleja de la fuente, localmente es un frente de onda plano

2.2. Principios de Fermat y Huygens

Dos principios que son equivalentes y se utilizan en óptica geométrica son: el principio de Fermat y el principio de Huygens [?], los cuales establecen lo siguiente:

- Principio de Fermat: La trayectoria seguida por la luz al propagarse en un medio de un punto a otro es tal que la longitud de camino óptico es estacionaria, es decir,

$$\delta \int_A^B n(\mathbf{r}) ds = 0 \quad (2.3)$$

- Principio de Huygens: Cada punto en un frente de onda Σ_1 se comporta como una fuente de ondas esféricas *secundarias*, de tal manera que el frente de onda Σ_2 en un instante posterior, es la envolvente de estas ondas esféricas secundarias (ver Fig. ??). Para obtener la expresión analítica del siguiente frente de onda Σ_2 , procedemos de la siguiente manera. Consideremos una fuente de puntual luminosa colocada en el origen $\mathbf{s} = (0, 0, 0)$ del sistema de referencia, que emite rayos de luz en todas direcciones y que se encuentra en un medio con índice de refracción constante n_0 (ver Fig. ??). La longitud de camino óptico que va de la fuente puntual \mathbf{s} a un punto arbitrario $\mathbf{r}_0 = (x, y, z)$ está dada por

$$\Phi_1(x, y, z) = n_0 |\mathbf{r}_0|, \quad (2.4)$$

por lo que los frentes de onda asociados con $\Phi_1(x, y, z)$ están dados por todos los puntos $\mathbf{r}_0 = (x, y, x)$ tales que

$$n_0 |\mathbf{r}_0| = C_1 \quad (2.5)$$

**CAPÍTULO 2 DESCRIPCIÓN DE LA PROPAGACIÓN DE LA
LUZ USANDO ÓPTICA GEOMÉTRICA
2.2. PRINCIPIOS DE FERMAT Y HUYGENS**

donde C_1 es una constante.

Por otro lado, la longitud de camino óptico que va de una fuente puntual luminosa secundaria a un punto arbitrario $\mathbf{V} = (X, Y, Z)$ es

$$\Phi_2(\mathbf{V}, x, y, z) = n_0 |\mathbf{V} - \mathbf{r}_0| \quad (2.6)$$

por lo que los frentes de onda asociados con $\Phi_2(\mathbf{V}, x, y, z)$ son todos los puntos $\mathbf{V} = (X, Y, Z)$ tales que

$$n_0 |\mathbf{V} - \mathbf{r}_0| = C_2 \quad (2.7)$$

donde C_2 es una constante, esta ecuación representa una familia de esferas de radio C_2/n_0 y cuyo centro es un punto sobre el frente de onda Σ_1 . Como el siguiente frente de onda es la envolvente de los frentes de onda secundarios, esta envolvente [?] está dada por todos los puntos $\mathbf{V} = (X, Y, Z)$ tales que

$$\Phi_2(\mathbf{V}, x, y, z) = C_2, \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial x} = 0, \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial y} = 0, \quad (2.10)$$

por lo que al resolver este sistema de ecuaciones para X, Y y Z obtenemos la representación paramétrica del frente de onda Σ_2 .

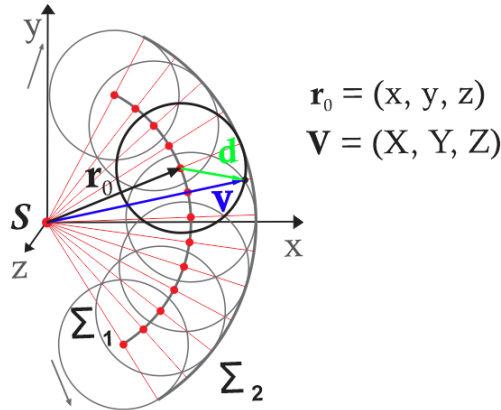


Figura 2.5: Principio de Huygens. Σ_2 es la envolvente de los frentes de onda dados por las fuentes secundarias en Σ_1 .

2.3. Leyes de reflexión y refracción

Es importante señalar que a partir de cualquiera de los dos principios vistos en la sección anterior, se pueden deducir las leyes de reflexión y refracción [?]. Cuando un rayo de luz viaja con cierta dirección por un medio homogéneo y transparente, lo hace con una velocidad constante que depende de ese medio. Si un rayo de luz llega a la superficie de separación de un medio con otro, puede sufrir simultáneamente dos fenómenos: una parte del rayo, al incidir sobre la superficie de separación, es devuelta al mismo medio por el que viaja pero cambiando su dirección, es el rayo reflejado; otra parte del rayo es transmitida por el segundo medio, cambiando su velocidad y dirección tras atravesar la superficie de separación, es el rayo refractado.

La ley de reflexión establece que el ángulo que forman el rayo incidente y el rayo reflejado con la normal (\mathbf{N}) a la superficie de separación, es el mismo, es decir,

$$\theta_i = \theta_r, \quad (2.11)$$

además establece que el rayo incidente, la normal y el rayo reflejado se encuentran sobre un mismo plano, ver (Fig. ??).

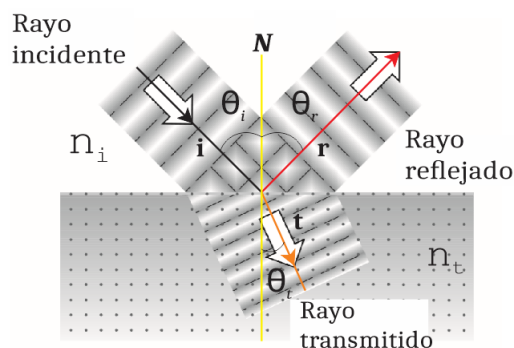


Figura 2.6: Dos medios con índices de refracción n_1 y n_2 . \mathbf{N} es el vector normal a la superficie de separación entre los dos medios. \mathbf{i} , \mathbf{r} y \mathbf{t} son los rayos incidente, reflejado y transmitido respectivamente. θ_i es el ángulo generado por \mathbf{i} y \mathbf{N} , θ_r es el ángulo generado por \mathbf{r} y \mathbf{N} y, θ_t es el ángulo generado por \mathbf{t} y $-\mathbf{N}$.

La ley de refracción establece la siguiente relación,

$$n_i \sin \theta_i = n_t \sin \theta_t \quad (2.12)$$

**CAPÍTULO 2 DESCRIPCIÓN DE LA PROPAGACIÓN DE LA
LUZ USANDO ÓPTICA GEOMÉTRICA**
2.4. CÁUSTICAS

donde n_i es el índice de refracción del medio en el cual la fuente emite rayos de luz, n_t es el índice de refracción del medio en el cual los rayos de luz se han refractado, θ_i y θ_t son los ángulos que forman respectivamente el rayo incidente y el rayo transmitido con la normal. Además, la ley de refracción establece que el rayo de luz incidente, la normal a la superficie de separación y el rayo refractado están en un mismo plano, ver (Fig. ??).

2.4. Cáusticas

Se puede observar que cuando la luz se refleja o refracta, se forman regiones de máximo enfocamiento de luz, estas regiones se llaman cáusticas. En la figura (??) observamos la formación de cáusticas por reflexión y refracción en diferentes situaciones. En la figura (??e) se muestra la región cáustica generada por la refracción de la luz (emitida por una fuente luminosa) a través de medios con diferentes formas, observamos que la región cáustica depende de la forma y características del objeto por el cual se refracta la luz. Con el paso del tiempo los matemáticos empezaron a tener interés por obtener las expresiones de las regiones cáusticas; encontraron que estas regiones de máximo enfocamiento de luz estaban dadas como la envolvente de los rayos de luz reflejados o refractados, o equivalentemente por el conjunto de singularidades del frente de onda reflejado o refractado, dependiendo el caso. Es importante mencionar que las cáusticas son las observables en el enfoque de óptica geométrica y que no aparecen cuando los fenómenos de reflexión y refracción se estudian con los enfoques de óptica física y óptica electromagnética.

2.5. Ley de refracción en forma vectorial

Consideremos al espacio libre, lleno con dos medios ópticos con diferentes índices de refracción n_1 y n_2 (ver figura ??). Dichos medios están separados por una superficie arbitraria dada por

$$\mathbf{r}(x, y) = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + f(x, y)\hat{\mathbf{z}}. \quad (2.13)$$

En la región donde está el medio óptico con índice de refracción n_1 , se localiza una fuente puntual luminosa, cuya posición está dada por

$$\mathbf{s} = s_x\hat{\mathbf{x}} + s_y\hat{\mathbf{y}} + s_z\hat{\mathbf{z}}. \quad (2.14)$$

**CAPÍTULO 2 DESCRIPCIÓN DE LA PROPAGACIÓN DE LA
LUZ USANDO ÓPTICA GEOMÉTRICA**
2.5. LEY DE REFRACCIÓN EN FORMA VECTORIAL

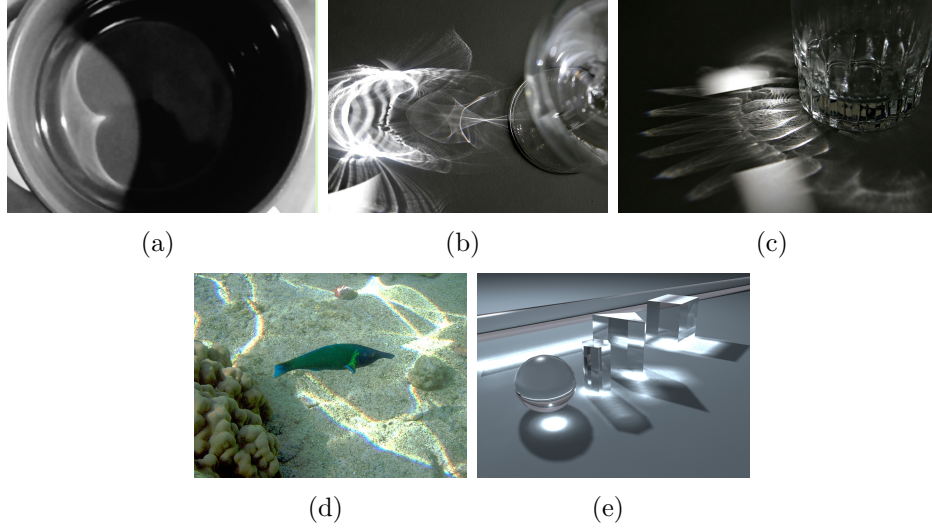


Figura 2.7: Cáusticas. (a) Cáustica formada en la superficie de una taza de café, (b) y (c) Cáusticas producidas por la refracción de luz que incide lateralmente en una copa y en un vaso de vidrio, (d) Cáusticas en el agua formadas por la refracción de la luz del sol, (e) Cáusticas producidas por la refracción de la luz que incide en superficies de cristal con diferentes formas.

La longitud de camino óptico (LCO) = Φ , que va desde la fuente puntual \mathbf{s} hasta un punto arbitrario dado por

$$\mathbf{V} = X\hat{\mathbf{x}} + Y\hat{\mathbf{y}} + Z\hat{\mathbf{z}} \quad (2.15)$$

en el medio óptico con índice de refracción n_2 es igual a

$$\Phi(\mathbf{V}, x, y) = n_1|\mathbf{r}(x, y) - \mathbf{s}| + n_2|\mathbf{V} - \mathbf{r}(x, y)|. \quad (2.16)$$

Los frentes de onda asociados con Φ están dados por todos los puntos \mathbf{V} que satisfacen $\Phi(\mathbf{V}, x, y) = C$, es decir

$$|\mathbf{V} - \mathbf{r}(x, y)| = \frac{C}{n_2} - \gamma|\mathbf{r}(x, y) - \mathbf{s}|, \quad (2.17)$$

con $C = \text{constante}$ y $\gamma \equiv n_1/n_2$. Para valores dados de x, y y C , éstos frentes de onda son esferas con centro en un punto sobre la superficie y tienen radio $C/n_2 - \gamma|\mathbf{r}(x, y) - \mathbf{s}|$, esto significa que, una vez que un rayo de luz emitido llega a la superficie refractante, se transforma en una fuente puntual de luz en la que sus frentes de onda son esferas, por lo que, el rayo refractado

**CAPÍTULO 2 DESCRIPCIÓN DE LA PROPAGACIÓN DE LA
LUZ USANDO ÓPTICA GEOMÉTRICA**
2.5. LEY DE REFRACCIÓN EN FORMA VECTORIAL

en principio tiene la posibilidad de tomar cualquier dirección (ver figura ??). Para hallar los frentes de onda refractados consideramos el principio de Huygens, por lo que, el frente de onda está dado por todos los puntos \mathbf{V} que satisfacen la Ec. (??) y las siguientes dos condiciones sobre Φ :

$$\Phi_x = 0, \quad (2.18)$$

$$\Phi_y = 0, \quad (2.19)$$

donde Φ_x, Φ_y , denotan las derivadas parciales de Φ con respecto de x y y .

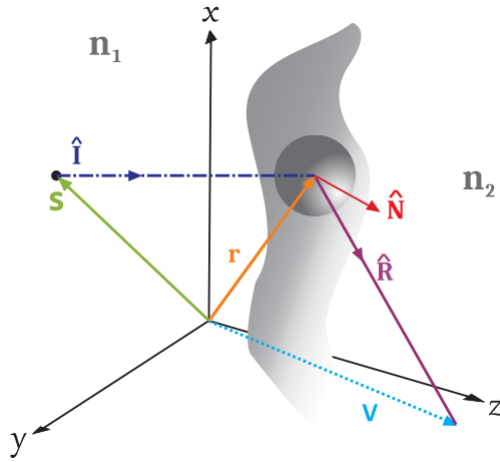


Figura 2.8: Dos medios ópticos con índices de refracción n_1 y n_2 separados por una interfaz arbitraria dada por $z = f(x, y)$. En el medio con índice de refracción n_1 colocamos una fuente puntual de luz en la posición arbitraria \mathbf{s} . \mathbf{r} denota la posición de un punto sobre la interfaz, $\hat{\mathbf{N}}$ denota el vector normal a la superficie de refracción, $\hat{\mathbf{I}}$ y $\hat{\mathbf{R}}$ nos dan la dirección de los rayos de luz incidente y refractado respectivamente. Se asocia una nueva fuente puntual de luz con cada rayo de luz que llega a la superficie refractante. Los frentes de onda asociados con cada nueva fuente puntual de luz están dados por la Ec. (??) y son esferas.

Sustituyendo la Ec. (??) en las Ecs. (??) y (??) se encuentra que

$$-n_2(\hat{\mathbf{R}} - \gamma\hat{\mathbf{I}}) \cdot \mathbf{r}_x = 0, \quad (2.20)$$

$$-n_2(\hat{\mathbf{R}} - \gamma\hat{\mathbf{I}}) \cdot \mathbf{r}_y = 0, \quad (2.21)$$

donde \mathbf{r}_x y \mathbf{r}_y denotan las derivadas parciales de \mathbf{r} con respecto de x y y , además

$$\hat{\mathbf{I}} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{s}}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|}, \quad (2.22)$$

**CAPÍTULO 2 DESCRIPCIÓN DE LA PROPAGACIÓN DE LA
LUZ USANDO ÓPTICA GEOMÉTRICA**
2.5. LEY DE REFRACCIÓN EN FORMA VECTORIAL

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{\mathbf{V} - \mathbf{r}}{|\mathbf{V} - \mathbf{r}|}, \quad (2.23)$$

son los vectores unitarios de incidencia y de refracción, respectivamente.

Dada la representación paramétrica de la superficie por la Ec. (??), que separa los dos medios ópticos, el vector normal a dicha superficie está dado por

$$\hat{\mathbf{N}} = \frac{\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y}{|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y|}, \quad (2.24)$$

con la propiedad de que

$$\hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{r}_x = 0, \quad (2.25)$$

$$\hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{r}_y = 0. \quad (2.26)$$

Observemos que, de las Ecs. (??)-(??) tenemos que $\{\mathbf{r}_x, \mathbf{r}_y, \hat{\mathbf{N}}\}$ generan cualquier vector en \mathbb{R}^3 siempre y cuando el ángulo formado por \mathbf{r}_x y \mathbf{r}_y sea diferente de 0, por lo que

$$\hat{\mathbf{R}} - \gamma \hat{\mathbf{I}} = \Omega_x \mathbf{r}_x + \Omega_y \mathbf{r}_y + \Omega \hat{\mathbf{N}}, \quad (2.27)$$

donde Ω_x , Ω_y y Ω son las incógnitas. Al sustituir la combinación lineal de la Ec. (??) en las Ecs. (??) y (??) es posible mostrar que, cuando

$$(\mathbf{r}_x)^2(\mathbf{r}_y)^2 - (\mathbf{r}_x \cdot \mathbf{r}_y)^2 \neq 0 \quad (2.28)$$

Ω_x y Ω_y son cero. Por lo tanto,

$$\hat{\mathbf{R}} = \Omega \hat{\mathbf{N}} + \gamma \hat{\mathbf{I}}, \quad (2.29)$$

donde Ω se determina pidiendo que $\hat{\mathbf{R}} \cdot \hat{\mathbf{R}} = 1$, es decir,

$$\Omega^2 + \Omega \left[2\gamma \left(\hat{\mathbf{I}} \cdot \hat{\mathbf{N}} \right) \right] + \gamma^2 - 1 = 0 \quad (2.30)$$

cuyas soluciones están dadas por

$$\Omega_{\pm} = -\gamma \left(\hat{\mathbf{I}} \cdot \hat{\mathbf{N}} \right) \pm \sqrt{1 - \gamma^2 \left[1 - \left(\hat{\mathbf{I}} \cdot \hat{\mathbf{N}} \right)^2 \right]}. \quad (2.31)$$

Como puede observarse de esta ecuación, Ω es una función que depende de la ubicación de la fuente puntual luminosa \mathbf{s} , la superficie refractante dada

**CAPÍTULO 2 DESCRIPCIÓN DE LA PROPAGACIÓN DE LA
LUZ USANDO ÓPTICA GEOMÉTRICA**
2.5. LEY DE REFRACCIÓN EN FORMA VECTORIAL

por \mathbf{r} y de los índices de refracción n_1 y n_2 . Ahora bien, para comprender el significado físico de las raíces de la Ec. (??), consideremos que $\gamma = 1$. Sustituyendo las soluciones de la Ec. (??) en la Ec. (??) obtenemos

$$\hat{\mathbf{R}}_+ = \hat{\mathbf{I}}, \quad (2.32)$$

$$\hat{\mathbf{R}}_- = \hat{\mathbf{I}} - 2(\hat{\mathbf{I}} \cdot \hat{\mathbf{N}})\hat{\mathbf{N}}. \quad (2.33)$$

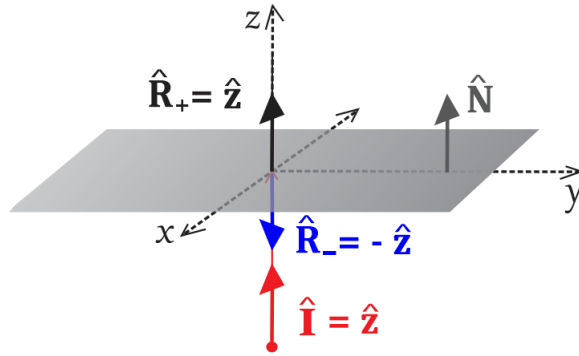


Figura 2.9: Interface plana parametrizada por $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, 0)$, el vector unitario $\hat{\mathbf{I}}$ y la normal a la superficie $\hat{\mathbf{N}}$ tienen la dirección positiva del eje z . Se observa que $\hat{\mathbf{R}}_+ = \hat{\mathbf{z}}$, mientras que $\hat{\mathbf{R}}_- = -\hat{\mathbf{z}}$.

Observamos de la Fig. (??) que, cuando consideramos Ω_+ , el rayo incidente que llega a la superficie, mantiene la misma dirección después de atravesarla ($\hat{\mathbf{R}}_+ = \hat{\mathbf{z}}$), mientras que, cuando tomamos la expresión de Ω_- , el rayo incidente que llega a la superficie refractante, cambia de dirección pero no la atraviesa ($\hat{\mathbf{R}}_- = -\hat{\mathbf{z}}$).

La Ec. (??) con Ω_- corresponde a ley de reflexión en forma vectorial, mientras que la ley de refracción en forma vectorial está dada por la Ec. (??) con Ω dada por la ecuación (??) con el signo +, es decir,

$$\hat{\mathbf{R}}_+ = \left(-\gamma(\hat{\mathbf{I}} \cdot \hat{\mathbf{N}}) + \sqrt{1 - \gamma^2[1 - (\hat{\mathbf{I}} \cdot \hat{\mathbf{N}})^2]} \right) \hat{\mathbf{N}} + \gamma\hat{\mathbf{I}} \quad (2.34)$$

Notemos de la Fig. (??) que, un rayo de luz refractado se puede escribir como

$$\mathbf{V} = \mathbf{r} + \tau\hat{\mathbf{R}}_+, \quad (2.35)$$

donde consideramos a x y y como constantes y τ como un parámetro con el que se describen las trayectorias de los rayos de luz. Por otro lado, usando

**CAPÍTULO 2 DESCRIPCIÓN DE LA PROPAGACIÓN DE LA
LUZ USANDO ÓPTICA GEOMÉTRICA
2.6. CÁLCULO ANALÍTICO DE LA CÁUSTICA**

las Ecs. (??), (??) y (??) los frentes de onda refractados están dados por

$$\tilde{\mathbf{V}} = \mathbf{r} + \left[\frac{C}{n_2} - \gamma|\mathbf{r} - \mathbf{s}| \right] \hat{\mathbf{R}}_+, \quad (2.36)$$

donde C permanece constante, mientras que x y y son variables.

2.6. Cálculo analítico de la cáustica

En algunos casos hay una región en el medio óptico con índice de refracción n_2 donde más de dos rayos de luz refractados se enfocan; esta región se conoce como la cáustica asociada, y es la envolvente de los rayos de luz o las singularidades del frente de onda (donde el frente tiene picos o se autointersecta). A continuación obtenemos la cáustica como la envolvente de los rayos de luz refractados.

De la Ec. (??) observamos que, las trayectorias de los rayos de luz refractados están descritas mediante un mapeo entre dos subconjuntos de \mathbb{R}^3 , donde los puntos del espacio dominio se encuentran etiquetados por las coordenadas (x, y, τ) y los puntos del espacio codominio se encuentran etiquetados por las coordenadas (X, Y, Z) (ver Fig. ??). En general, hay una región en el medio óptico con índice de refracción n_2 donde los rayos de luz refractados se enfocarán. Esta región se conoce como la cáustica asociada con los rayos de luz refractados.

El subconjunto del espacio dominio en el que el mapeo dado por la Ec.(??) localmente no es uno a uno se denomina conjunto crítico, y la imagen de este conjunto bajo dicho mapeo se llama conjunto cáustico. El conjunto crítico se determina encontrando los puntos en el espacio dominio en los cuales el jacobiano del mapeo se anula, esto es,

$$J = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \tau} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} \right) = 0, \quad (2.37)$$

ahora de las Ecs. (??) y (??) se encuentra que

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \tau} = \hat{\mathbf{R}} \quad (2.38)$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} + \tau \frac{\partial \hat{\mathbf{R}}}{\partial x} \quad (2.39)$$

**CAPÍTULO 2 DESCRIPCIÓN DE LA PROPAGACIÓN DE LA
LUZ USANDO ÓPTICA GEOMÉTRICA**
2.6. CÁLCULO ANALÍTICO DE LA CÁUSTICA

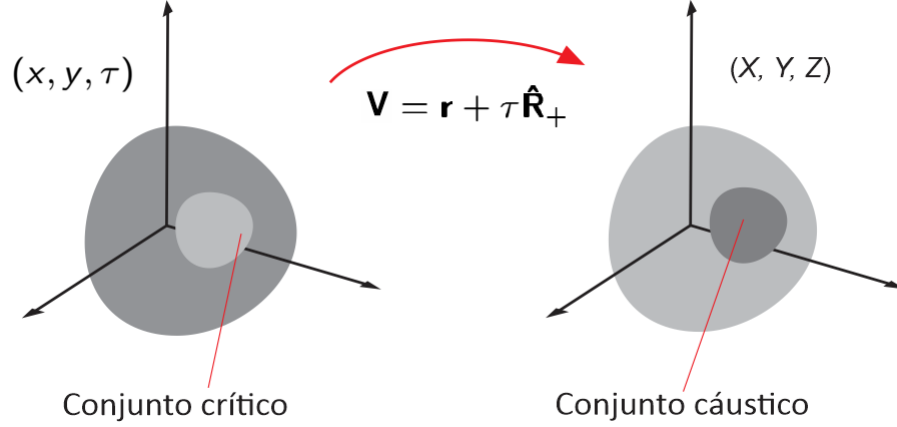


Figura 2.10: Mapeo entre dos subconjuntos de \mathbb{R}^3 . Conjunto crítico y conjunto cáustico.

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} + \tau \frac{\partial \hat{\mathbf{R}}}{\partial y} \quad (2.40)$$

por lo que

$$J = \tau^2 \left[\hat{\mathbf{R}} \cdot \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{R}}}{\partial x} \times \frac{\partial \hat{\mathbf{R}}}{\partial y} \right) \right] + \tau \left[\hat{\mathbf{R}} \cdot \left[\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \hat{\mathbf{R}}}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{R}}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \right) \right] \right] \left[\hat{\mathbf{R}} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \right) \right] \quad (2.41)$$

por lo tanto, el conjunto crítico se determina resolviendo la ecuación

$$\tau^2 H_2 + \tau H_1 + H_0 = 0 \quad (2.42)$$

donde

$$H_2 = \hat{\mathbf{R}} \cdot \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{R}}}{\partial x} \times \frac{\partial \hat{\mathbf{R}}}{\partial y} \right), \quad (2.43)$$

$$H_1 = \hat{\mathbf{R}} \cdot \left[\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \hat{\mathbf{R}}}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{R}}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \right) \right], \quad (2.44)$$

$$H_0 = \hat{\mathbf{R}} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \right). \quad (2.45)$$

**CAPÍTULO 2 DESCRIPCIÓN DE LA PROPAGACIÓN DE LA
LUZ USANDO ÓPTICA GEOMÉTRICA**
2.7. DEDUCCIÓN DE LA ECUACIÓN EIKONAL

Se puede ver claramente que la Ec. (??) es una ecuación de segundo grado para τ que se resuelve fácilmente, así

$$\tau_{\pm} = \frac{-H_1 \pm \sqrt{H_1^2 - 4H_2H_0}}{2H_2} \quad (2.46)$$

nos da el conjunto crítico. Observemos que de la ecuación anterior se pueden tener los siguientes casos:

- Si $H_1 = 0$ y $H_2 \neq 0$ se obtienen dos ramas del conjunto crítico.
- Si $H_1 \neq 0$ y $H_2 = 0$ se obtiene sólo una rama del conjunto crítico.
- Si $H_1 \neq 0$ y $H_2 \neq 0$ se obtienen dos ramas del conjunto crítico
- Si $H_1 = 0$ y $H_2 = 0$, con $H_0 \neq 0$ no existe conjunto crítico

Por otra parte, el conjunto cáustico es la imagen del conjunto crítico bajo el mapeo dado por la Ec. (??), es decir

$$\mathbf{V}_C = \mathbf{r} + \left[\frac{-H_1 \pm \sqrt{H_1^2 - 4H_2H_0}}{2H_2} \right] \hat{\mathbf{R}} \quad (2.47)$$

2.7. Dedución de la ecuación eikonal

Las ecuaciones de Maxwell son un conjunto de cuatro ecuaciones que describen el comportamiento del campo electromagnético en medios materiales. En su forma más general, las ecuaciones de Maxwell [?] están dadas por

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{1}{c} \dot{\mathbf{D}} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (2.48)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \dot{\mathbf{B}} = 0, \quad (2.49)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho, \quad (2.50)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.51)$$

Existe un tipo de materiales en los cuales se tiene que, \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{B} y \mathbf{H} están relacionados por

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad (2.52)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}. \quad (2.53)$$

**CAPÍTULO 2 DESCRIPCIÓN DE LA PROPAGACIÓN DE LA
LUZ USANDO ÓPTICA GEOMÉTRICA**
2.7. DEDUCCIÓN DE LA ECUACIÓN EIKONAL

donde ϵ es la permitividad eléctrica y μ la permeabilidad magnética del medio material en el cual se propaga el campo electromagnético.

A partir de las ecuaciones de Maxwell sin fuentes y considerando un medio homogéneo (ϵ y μ constantes), isótropo y no conductor, se encuentra que \mathbf{E} y \mathbf{H} satisfacen la ecuación vectorial de onda

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{\mu\epsilon}{c^2} \ddot{\mathbf{E}} = \mathbf{0}, \quad (2.54)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \frac{\mu\epsilon}{c^2} \ddot{\mathbf{H}} = \mathbf{0}. \quad (2.55)$$

Cada componente de \mathbf{E} y \mathbf{H} satisface la ecuación escalar de onda, es decir,

$$\nabla^2 \{E_j, H_j\} - \frac{\mu\epsilon}{c^2} \{\ddot{E}_j, \ddot{H}_j\} = 0, \quad j = 1, 2, 3. \quad (2.56)$$

Por otro lado, sabemos que la ecuación que describe la propagación de una onda en un medio homogéneo e isótropo, en tres dimensiones, es [?]

$$\nabla^2 \psi(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{v^2} \ddot{\psi}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2.57)$$

donde v es la velocidad con la cual se propaga la onda. Una solución a la ecuación escalar de onda en coordenadas cartesianas está dada por

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \psi_0 e^{i(k_0 \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad (2.58)$$

donde ψ_0 es una constante. Esta solución describe ondas planas. Proponemos ahora, que las soluciones de \mathbf{E} y \mathbf{H} (ver Ecs. ?? y ??), sean de la forma

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i[k_0 \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r} - \omega t]}, \quad (2.59)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}_0 e^{i[k_0 \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r} - \omega t]}, \quad (2.60)$$

donde \mathbf{E}_0 y \mathbf{H}_0 son vectores constantes. Ahora, una vez que sustituimos estas expresiones en las ecuaciones de Maxwell sin fuentes con ϵ y μ constantes, encontramos que

$$\mathbf{E}_0 = -\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{H}_0, \quad (2.61)$$

$$\mathbf{H}_0 = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}_0, \quad (2.62)$$

$$\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{E}_0 = 0, \quad (2.63)$$

$$\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{H}_0 = 0, \quad (2.64)$$

**CAPÍTULO 2 DESCRIPCIÓN DE LA PROPAGACIÓN DE LA
LUZ USANDO ÓPTICA GEOMÉTRICA**
2.7. DEDUCCIÓN DE LA ECUACIÓN EIKONAL

Estas relaciones muestran que los vectores de campo eléctrico y magnético se encuentran en planos normales a la dirección de propagación. También podemos ver que \mathbf{E}_0 , \mathbf{H}_0 y $\hat{\mathbf{k}}$ forman una triada ortogonal de vectores a derechas.

Ahora consideremos un campo electromagnético que se propaga en un medio inhomogéneo e isotrópico [?] de la forma

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{e}(\mathbf{r})e^{i[k_0 S(\mathbf{r}) - \omega t]}, \quad (2.65)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{h}(\mathbf{r})e^{i[k_0 S(\mathbf{r}) - \omega t]}, \quad (2.66)$$

donde $S(\mathbf{r})$ es una función escalar real dependiente de la posición, y $\mathbf{e}(\mathbf{r})$ y $\mathbf{h}(\mathbf{r})$ son funciones vectoriales que dependen de la posición. Si ahora sustituimos las ecuaciones (??) y (??) en las ecuaciones de Maxwell y considerando que ϵ y μ son funciones reales que dependen de la posición, encontramos que

$$\{\nabla \cdot (\epsilon \mathbf{e})\} + ik_0[\epsilon \mathbf{e} \cdot \nabla S]e^{i(k_0 S - \omega t)} = 0, \quad (2.67)$$

$$[(\nabla \times \mathbf{e}) - ik_0(\mathbf{e} \times \nabla S) - ik_0(\mu \mathbf{h})]e^{i(k_0 S - \omega t)} = 0, \quad (2.68)$$

$$\{\nabla \cdot (\mu \mathbf{h})\} + ik_0[\mu \mathbf{h} \cdot \nabla S]e^{i(k_0 S - \omega t)} = 0, \quad (2.69)$$

$$[(\nabla \times \mathbf{h}) - ik_0(\mathbf{h} \times \nabla S) + ik_0(\epsilon \mathbf{e})]e^{i(k_0 S - \omega t)} = 0, \quad (2.70)$$

usando que $c = \omega/k$ y $k = nk_0$, y las conocidas identidades vectoriales,

$$\nabla \times (f \mathbf{A}) = f(\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \times (\nabla f), \quad (2.71)$$

$$\nabla \cdot (f \mathbf{A}) = f(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{A} \cdot (\nabla f), \quad (2.72)$$

donde f es una función escalar y \mathbf{A} una función vectorial. Observamos que el factor $e^{i(k_0 S - \omega t)}$ nunca se hace cero, por lo tanto debe ocurrir que

$$\frac{\nabla \cdot (\epsilon \mathbf{e})}{ik_0 \epsilon} + [\mathbf{e} \cdot \nabla S] = 0, \quad (2.73)$$

$$\frac{\nabla \times \mathbf{e}}{ik_0} - (\mathbf{e} \times \nabla S) - (\mu \mathbf{h}) = 0, \quad (2.74)$$

$$\frac{\nabla \cdot (\mu \mathbf{h})}{ik_0 \mu} + [\mathbf{h} \cdot \nabla S] = 0, \quad (2.75)$$

$$\frac{\nabla \times \mathbf{h}}{ik_0} - (\mathbf{h} \times \nabla S) + (\epsilon \mathbf{e}) = 0. \quad (2.76)$$

Notemos que, en las cuatro ecuaciones anteriores está presente el fenómeno ondulatorio de la luz pues aparece la longitud de onda $\lambda_0 = \frac{2\pi}{k_0}$. En óptica

**CAPÍTULO 2 DESCRIPCIÓN DE LA PROPAGACIÓN DE LA
LUZ USANDO ÓPTICA GEOMÉTRICA**
2.7. DEDUCCIÓN DE LA ECUACIÓN EIKONAL

geométrica suponemos que λ_0 tiende a 0, por lo que si consideramos que el valor de $1/k_0$ sea mucho más pequeño que el valor absoluto del factor que lo multiplica, las ecuaciones (??) a (??) se reducen a

$$\mathbf{e} \cdot \nabla S = 0, \quad (2.77)$$

$$-(\mathbf{e} \times \nabla S) - \mu \mathbf{h} = 0, \quad (2.78)$$

$$\mathbf{h} \cdot \nabla S = 0, \quad (2.79)$$

$$-(\mathbf{h} \times \nabla S) + \epsilon \mathbf{e} = 0. \quad (2.80)$$

Ahora, despejando \mathbf{h} de (??), sustituyendo en (??) y multiplicando por μ se tiene que

$$[\nabla S \times (\mathbf{e} \times \nabla S)] - (\mu \epsilon \mathbf{e}) = 0, \quad (2.81)$$

y haciendo uso de la identidad $\mathbf{a} \times [\mathbf{b} \times \mathbf{c}] = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$ obtenemos

$$(\nabla S \cdot \nabla S)\mathbf{e} - (\nabla S \cdot \mathbf{e})\nabla S - (\mu \epsilon \mathbf{e}) = 0, \quad (2.82)$$

pero vemos que el segundo término se elimina por la Ec. (??), además, si $n = \sqrt{\mu \epsilon}$ denota el índice de refracción y como \mathbf{e} no siempre es $\mathbf{0}$, es decir, existen puntos en los cuales $\mathbf{e} = \mathbf{0}$ pero no en todo el espacio entonces la Ec. (??) queda reducida a

$$\|\nabla S\|^2 = n^2, \quad (2.83)$$

esta es una ecuación básica de la óptica geométrica y se conoce como la ecuación eikonal; establece una relación entre la teoría electromagnética y la óptica geométrica. Las superficies $S(\mathbf{r}) = \text{constante}$ son llamadas frentes de onda geométricos y ∇S nos proporciona la dirección de propagación de la luz. Por otro lado, hemos visto que, cuando la luz pasa de un medio óptico a otro, dada la longitud del camino óptico $LCO = \Phi$, los frentes de onda geométricos refractados se definen como la envolvente de Φ . A continuación veamos que la longitud de camino óptico LCO satisface la ecuación eikonal en el medio óptico en el cual la luz se refracta.

Tomemos la longitud de camino óptico Ec. (??) y calculemos

$$\|\nabla \Phi(\mathbf{X}, x, y)\|^2 = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial Y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial Z}\right)^2 \quad (2.84)$$

con lo que obtenemos, para cada término en el lado derecho de la Ec. (??)

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial X}\right)^2 = n_2^2 \frac{(X-x)^2}{(X-x)^2 + (Y-y)^2 + (Z-f(x,y))^2} \quad (2.85)$$

**CAPÍTULO 2 DESCRIPCIÓN DE LA PROPAGACIÓN DE LA
LUZ USANDO ÓPTICA GEOMÉTRICA**
2.7. DEDUCCIÓN DE LA ECUACIÓN EIKONAL

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial Y}\right)^2 = n_2^2 \frac{(Y-y)^2}{(X-x)^2 + (Y-y)^2 + (Z-f(x,y))^2} \quad (2.86)$$

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial Z}\right)^2 = n_2^2 \frac{(Z-f(x,y))^2}{(X-x)^2 + (Y-y)^2 + (Z-f(x,y))^2} \quad (2.87)$$

podemos ver que, el denominador es el mismo en cada derivada parcial, por lo que realizando la suma correspondiente obtenemos

$$\|\nabla\Phi(\mathbf{X}, x, y)\|^2 = n_2^2 \quad (2.88)$$

por lo tanto, Φ es solución a la ecuación eikonal. Se pueden tener dos campos electromagnéticos con diferente estado de polarización que a nivel de óptica geométrica sean caracterizados por los mismos frentes de onda geométricos, esto es así debido a que a nivel de óptica geométrica la polarización de la luz no se toma en consideración.

Capítulo 3

Caracterización geométrica de la refracción de una onda plana sobre una superficie paraboloidal

En este tercer capítulo estudiamos como caso particular, la caracterización geométrica de la refracción de la luz proveniente de una fuente puntual luminosa muy alejada de la superficie paraboloidal que divide dos medios materiales con diferente índice de refracción $n_1 > 1$ y $n_2 = 1$. También presentamos las gráficas de los rayos de luz, frentes de onda y cáustica, así como la descripción de éstas. La representación paramétrica de la superficie paraboloidal en coordenadas cartesianas es

$$\mathbf{r}(x, y) = \left(x, y, b - \frac{x^2 + y^2}{2a}\right), \quad (3.1)$$

donde a representa el valor de una de las dos curvaturas de la superficie. En coordenadas polares (ρ, ϕ) , la representación paramétrica de la superficie paraboloidal está dada por

$$\mathbf{r}(\rho, \phi) = \left(\rho \cos \phi, \rho \sin \phi, b - \frac{\rho^2}{2a}\right). \quad (3.2)$$

En el medio óptico con índice de refracción n_1 colocamos una fuente puntual luminosa cuyo vector de posición es \mathbf{s} , lo suficientemente alejada de la superficie paraboloidal, esto es $a/|\mathbf{s}| \rightarrow 0$ y fuera del eje z o eje óptico (ver Fig.

CAPÍTULO 3 CARACTERIZACIÓN GEMÉTRICA DE LA REFRACCIÓN DE UNA ONDA PLANA SOBRE UNA SUPERFICIE PARABOLOIDAL

??a) de tal forma que en una región cercana a la superficie de refracción, los frentes de onda incidentes sean planos o bien los rayos de luz incidentes sean paralelos entre sí (ver Fig. ??b). Note que hemos colocado la fuente luminosa fuera del eje z , por lo que los rayos de luz inciden sobre la superficie con un ángulo α respecto del eje óptico. Tomaremos un frente de onda plano cercano a la superficie de refracción, el cual nos servirá para definir la longitud de camino óptico.

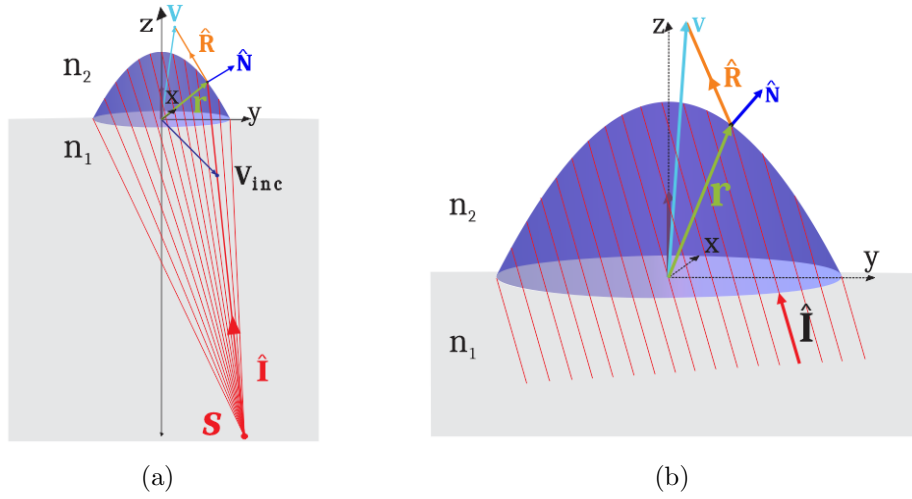


Figura 3.1: (a) Una fuente puntual localizada fuera del eje óptico y muy alejada de la superficie refractante. (b) Se realiza un zoom de la figura (a).

De la Fig. (??) observamos que el vector incidente unitario $\hat{\mathbf{I}}$ está descrito por

$$\hat{\mathbf{I}} = (\sin \alpha \cos \beta, \sin \alpha \sin \beta, \cos \alpha), \quad (3.3)$$

donde α es el ángulo formado por el vector $\hat{\mathbf{I}}$ con el eje z , mientras que β es el ángulo generado por la proyección del vector $\hat{\mathbf{I}}$ sobre el plano $x - y$ y el eje x , por lo tanto, el plano que pasa por el punto $\mathbf{r}_0 = (0, 0, -d)$ y es perpendicular al vector unitario $\hat{\mathbf{n}}_p$, el cual es justamente el vector de incidencia $\hat{\mathbf{I}}$, está dado por todos los puntos $\mathbf{r}_p = (x_p, y_p, z_p)$ tales que

$$(\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_0) \cdot \hat{\mathbf{n}}_p = x_p \sin \alpha \cos \beta + y_p \sin \alpha \sin \beta + (z_p + d) \cos \alpha = 0. \quad (3.4)$$

Si despejamos a z_p de esta ecuación, entonces la representación paramétrica del frente de onda plano \mathbf{r}_p está dada por

$$\mathbf{r}_p = (x_p, y_p, -\tan \alpha (x_p \cos \beta + y_p \sin \beta) - d). \quad (3.5)$$

**CAPÍTULO 3 CARACTERIZACIÓN GEMÉTRICA DE LA
REFRACCIÓN DE UNA ONDA PLANA SOBRE UNA
SUPERFICIE PARABOLOIDAL**

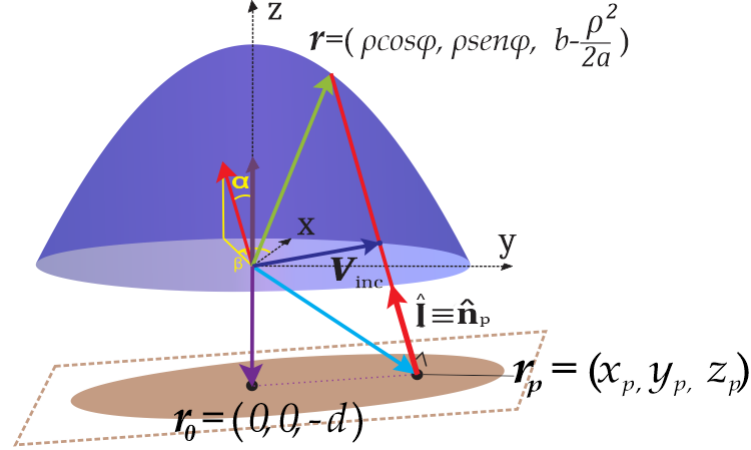


Figura 3.2: Relación entre las coordenadas de un punto sobre la superficie y el plano.

Note de la Fig. (??) que, un rayo de luz incidente que parte de un punto \mathbf{r}_p en el plano de referencia, está dado por la siguiente expresión

$$\mathbf{V}_{inc} = \mathbf{r}_p + l\hat{\mathbf{n}}_p \quad (3.6)$$

siendo l un valor que depende de cada punto sobre el plano de referencia \mathbf{r}_p . Además para cada punto sobre el plano \mathbf{r}_p tenemos un valor de $l = \tilde{l}$ tal que

$$\mathbf{r}_p + \tilde{l}\hat{\mathbf{n}}_p = \mathbf{r}(\rho, \phi). \quad (3.7)$$

donde \mathbf{r} dado por la ecuación (??) es el vector que etiqueta un punto sobre la superficie en donde incide el rayo de luz.

Sustituyendo la Ec. (??) en la Ec. (??), encontramos que

$$x_p + \tilde{l} \sin \alpha \cos \beta = \rho \cos \phi \quad (3.8)$$

$$y_p + \tilde{l} \sin \alpha \sin \beta = \rho \sin \phi \quad (3.9)$$

$$-\tan \alpha (x_p \cos \beta + y_p \sin \beta) - d + \tilde{l} \cos \alpha = b - \frac{\rho^2}{2a} \quad (3.10)$$

despejando \tilde{l} de la ecuación (??) y sustituyendo en las ecuaciones (??) y (??) obtenemos:

$$\tilde{l} = \frac{b - \frac{\rho^2}{2a} + \tan \alpha (x_p \cos \beta + y_p \sin \beta) + d}{\cos \alpha} \quad (3.11)$$

CAPÍTULO 3 CARACTERIZACIÓN GEMÉTRICA DE LA REFRACCIÓN DE UNA ONDA PLANA SOBRE UNA SUPERFICIE PARABOLOIDAL

$$x_p + \left[b - \frac{\rho^2}{2a} + \tan \alpha (x_p \cos \beta + y_p \sin \beta) + d \right] \tan \alpha \cos \beta = \rho \cos \phi \quad (3.12)$$

$$y_p + \left[b - \frac{\rho^2}{2a} + \tan \alpha (x_p \cos \beta + y_p \sin \beta) + d \right] \tan \alpha \sin \beta = \rho \sin \phi \quad (3.13)$$

realizando algunas operaciones, podemos escribir las ecuaciones (??) y (??) de la siguiente manera

$$x_p A_1 + y_p B = \rho \cos \phi - C \tan \alpha \cos \beta \quad (3.14)$$

$$y_p A_2 + x_p B = \rho \sin \phi - C \tan \alpha \sin \beta, \quad (3.15)$$

donde

$$A_1 = 1 + \tan^2 \alpha \cos^2 \beta \quad (3.16)$$

$$A_2 = 1 + \tan^2 \alpha \sin^2 \beta \quad (3.17)$$

$$B = \tan^2 \alpha \sin \beta \cos \beta \quad (3.18)$$

$$C = b + d - \frac{\rho^2}{2a}, \quad (3.19)$$

resolviendo el sistema dado por las ecuaciones (??) y (??), obtenemos x_p y y_p , así

$$y_p = \frac{\rho(A_1 \sin \phi - B \cos \phi) + C \tan \alpha (B \cos \beta - A_1 \sin \beta)}{A_1 A_2 - B^2} \quad (3.20)$$

$$x_p = \frac{\rho(B \sin \phi - A_2 \cos \phi) + C \tan \alpha (A_2 \cos \beta - B \sin \beta)}{B^2 - A_1 A_2}, \quad (3.21)$$

una vez que hemos expresado a x_p y y_p en términos de (ρ, ϕ) , la representación paramétrica del frente de onda de referencia queda como

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_p &= (x_p, y_p, z_p) \\ &= \frac{2a\rho \cos[\alpha]^2 \cos \phi + (-2a(b+d) + \rho^2) \cos \alpha \cos \beta \sin \alpha + 2a\rho \sin[\alpha]^2 \sin \beta \sin[\beta - \phi]}{2a} \hat{x} \\ &\quad + \frac{(-2a(b+d) + \rho^2) \cos \alpha \sin \alpha \sin \beta - 2a\rho \cos \beta \sin[\alpha]^2 \sin[\beta - \phi] + 2a\rho \cos[\alpha]^2 \sin \phi}{2a} \hat{y} \\ &\quad - \frac{-2ab + 2ad + \rho^2 + (2a(b+d) - \rho^2) \cos[2\alpha] + 2a\rho \cos[\beta - \phi] \sin[2\alpha]}{4a} \hat{z} \end{aligned} \quad (3.22)$$

por lo que, de todos los rayos de luz que pasan por el frente de onda plano, los rayos que llegan a la superficie paraboloidal quedan descritos por

$$\mathbf{V}_{inc} = \mathbf{r}_p + \sigma(\mathbf{r} - \mathbf{r}_p) \quad \sigma \in [0, 1] \quad (3.23)$$

CAPÍTULO 3 CARACTERIZACIÓN GEMÉTRICA DE LA REFRACCIÓN DE UNA ONDA PLANA SOBRE UNA SUPERFICIE PARABOLOIDAL

Observe de la ecuación (??) que, cuando σ toma el valor de 0, el rayo de luz se encuentra en un punto sobre el plano de referencia, y cuando σ toma el valor de 1, el rayo de luz incidente se encuentra en un punto sobre la superficie refractante.

Para obtener los rayos de luz refractados, así como los frentes de onda refractados, en nuestro caso particular, son necesarias las expresiones de $\hat{\mathbf{N}}$, $(\hat{\mathbf{I}} \cdot \hat{\mathbf{N}})$, Ω_+ y $\hat{\mathbf{R}}_+$, por lo que sustituyendo las Ecs. (??)-(??) en (??), (??) y (??), obtenemos

$$\hat{\mathbf{N}} = \frac{\rho \cos \phi}{\sqrt{a^2 + \rho^2}} \hat{x} + \frac{\rho \sin \phi}{\sqrt{a^2 + \rho^2}} \hat{y} + \frac{a}{\sqrt{a^2 + \rho^2}} \hat{z} \quad (3.24)$$

$$\hat{\mathbf{I}} \cdot \hat{\mathbf{N}} = \frac{a \cos \alpha + \rho \cos(\beta - \phi) \sin \alpha}{\sqrt{a^2 + \rho^2}} \quad (3.25)$$

$$\Omega = \frac{-\gamma(a \cos \alpha + \rho \cos(\beta - \phi) \sin \alpha)}{\sqrt{a^2 + \rho^2}} \quad (3.26)$$

$$+ \frac{\sqrt{-(-1 + \gamma^2)(a^2 + \rho^2) + \gamma^2(a \cos \alpha + \rho \cos(\beta - \phi) \sin \alpha)^2}}{\sqrt{a^2 + \rho^2}}$$

$$\hat{\mathbf{R}}_+ = \frac{-a\gamma\rho \cos \alpha \cos \phi}{a^2 + \rho^2} \hat{x}$$

$$+ \frac{\rho \cos \phi \sqrt{-(-1 + \gamma^2)(a^2 + \rho^2) + \gamma^2(a \cos \alpha + \rho \cos(\beta - \phi) \sin \alpha)^2}}{a^2 + \rho^2} \hat{y}$$

$$+ \frac{\gamma \sin \alpha (a^2 \cos \beta - \rho^2 \sin(\beta - \phi) \sin \phi)}{a^2 + \rho^2} \hat{z} \quad (3.27)$$

Finalmente, sustituyendo las Ecs. (??) y (??) en la Ec. (??), la representación paramétrica de los rayos de luz refractados es

$$\mathbf{V}_{ref} = \left(\rho \cos \phi, \rho \sin \phi, b - \frac{\rho^2}{2a} \right) + \tau \hat{\mathbf{R}}_+, \quad (3.28)$$

mientras que, usando las Ecs. (??), (??) y (??) en la Ec. (??), los frentes de onda refractados quedan descritos por

$$\tilde{\mathbf{V}}_{ref} = \left(\rho \cos \phi, \rho \sin \phi, b - \frac{\rho^2}{2a} \right) \quad (3.29)$$

$$+ \left[\frac{C}{n_2} - \gamma \sqrt{\frac{[2a(b + d) - \rho^2] \cos \alpha + 2a\rho \cos(\beta - \phi) \sin \alpha}{4a^2}} \right] \hat{\mathbf{R}}_+,$$

**CAPÍTULO 3 CARACTERIZACIÓN GEMÉTRICA DE LA
REFRACCIÓN DE UNA ONDA PLANA SOBRE UNA
SUPERFICIE PARABOLOIDAL**

3.1. DIFERENTES VALORES DE γ ; A Y α CONSTANTES

donde \mathbf{r}_p toma el papel de \mathbf{s} . Para obtener el conjunto crítico en nuestro caso de estudio, son necesarias las expresiones de H_2 , H_1 y H_0 de las ecuaciones (??, ?? y ??), mismas que están dadas por

$$H_2 = \frac{a\rho(a^2(1 + \gamma^2) - (-1 + \gamma^2)\rho^2 - 2a\gamma\sqrt{a^2 + \rho^2 - \gamma^2\rho^2})}{(a^2 + \rho^2)^2\sqrt{a^2 - (-1 + \gamma^2)\rho^2}} \quad (3.30)$$

$$H_1 = \frac{\rho(2a^2 - (-1 + \gamma^2)\rho^2)(-a\gamma + \sqrt{a^2 + \rho^2 - \gamma^2\rho^2})}{a(a^2 + \rho^2)\sqrt{a^2 - (-1 + \gamma^2)\rho^2}} \quad (3.31)$$

$$H_0 = \frac{\rho\sqrt{a^2 - (-1 + \gamma^2)\rho^2}}{a}, \quad (3.32)$$

entonces el conjunto crítico (ver Ec. ??) está dado por las dos soluciones de τ

$$\tau_+ = \frac{a\gamma + \sqrt{a^2 + \rho^2 - \gamma^2\rho^2}}{-1 + \gamma^2} \quad (3.33)$$

$$\tau_- = \frac{(a^2 - (-1 + \gamma^2)\rho^2)(a\gamma + \sqrt{a^2 + \rho^2 - \gamma^2\rho^2})}{a^2(-1 + \gamma^2)}. \quad (3.34)$$

Por lo tanto, usando la Ec. (??) y las Ecs. (??), (??) y (??), el conjunto cáustico tiene dos ramas y están dadas por

$$\mathbf{V}_{c1} = \mathbf{r} + \tau_+ \hat{\mathbf{R}}_+ \quad (3.35)$$

$$\mathbf{V}_{c2} = \mathbf{r} + \tau_- \hat{\mathbf{R}}_+. \quad (3.36)$$

Cada rama de la cáustica está relacionada con una curvatura de la superficie (ver Fig. ??). La rama de la Ec. (??) corresponde a un segmento de línea recta y está relacionada con la curva color rojo, mientras que la rama de la Ec. (??) tiene forma de trompeta y está relacionada con la curva en color negro.

A continuación presentamos las gráficas de los rayos de luz, frentes de onda y cáustica asociada, correspondientes a diferentes casos.

3.1. Diferentes valores de γ ; a y α constantes

En el primer caso consideramos diferentes valores del índice de refracción n_1 con el fin de entender cómo se modifican las trayectorias de los rayos de luz, la forma del frente de onda refractado y la cáustica asociada.

**CAPÍTULO 3 CARACTERIZACIÓN GEMÉTRICA DE LA
REFRACCIÓN DE UNA ONDA PLANA SOBRE UNA
SUPERFICIE PARABOLOIDAL**

3.2. DIFERENTES VALORES DE A ; γ Y α CONSTANTES

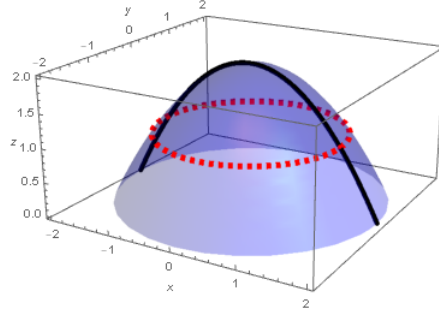


Figura 3.3: La superficie paraboloidal presenta dos curvaturas, las cuales están relacionadas con la formación de las dos ramas de la cáustica; la curvatura de color rojo genera la rama de la cáustica que es un segmento de línea recta, mientras que la curvatura en color negro genera la rama de la cáustica que tiene forma de trompeta.

En la Fig. (??) observamos los rayos de luz y frentes de onda incidentes y refractados para diferentes valores de γ . Consideramos los valores de $a = 1$, $b = 2$ y los ángulos $\alpha = 0$ y $\beta = 0$. Observamos del inciso (a) $\gamma = 1$ que los rayos refractados no se intersectan; los frentes de onda refractados son planos tal como los frentes de onda incidentes. En este caso no existe cáustica asociada debido a que los rayos de luz no se interesectan. Conforme aumentamos el valor de $\gamma = 1.5$ y $\gamma = 2$ (ver Fig. ??b y c), los rayos de luz refractados se intersectan sobre el eje z cada vez más cerca de la superficie, mientras que los frentes de onda refractados presentan dobleces y autointersecciones que forman la cáustica asociada, ver Fig. ??a y b), en 3 dimensiones. Podemos ver más claramente de la Fig. ??a y b), en 2 dimensiones que los puntos en los dobleces contribuyen a la rama de la cáustica en forma de trompeta, mientras que las autointersecciones contribuyen a la rama de la cáustica que es un segmento de línea recta. Mostramos que cuando $\gamma = 1$ y $\gamma = 2$ tenemos dos ramas de la cáustica.

3.2. Diferentes valores de a ; γ y α constantes

En el segundo caso, variamos el valor de la curvatura a de la superficie de refracción para observar el cambio de las trayectorias de los rayos y la forma del frente de onda refractado además de la cáustica asociada. En la Fig. (??) tenemos los rayos de luz y frentes de onda incidentes y refractados, ahora

CAPÍTULO 3 CARACTERIZACIÓN GEMÉTRICA DE LA REFRACCIÓN DE UNA ONDA PLANA SOBRE UNA SUPERFICIE PARABOLOIDAL

3.3. DIFERENTES VALORES DE α ; γ Y A CONSTANTES

para diferentes valores de a manteniendo $\gamma = 1,5$. En este caso, también consideramos $b = 2$ y los ángulos $\alpha = 0$ y $\beta = 0$. Observamos que, conforme el valor de a aumenta, la superficie va perdiendo curvatura (tiende a ser plana). En el inciso (a) se tienen las mismas condiciones de la Fig. (??b). Mostramos que conforme el valor de a aumenta, $a = 2$ y $a = 3$ (ver Fig. ?? b y c), las intersecciones de los rayos refractados se alejan cada vez más de la superficie sobre el eje z y los frentes de onda refractados tienen menos curvatura, tendiendo a ser planos. Observamos que los frentes de onda refractados presentan dobleces y autointersecciones que forman la cáustica asociada. De la Fig. (??) podemos ver las cáusticas asociadas cuando (a) $a = 1$, (b) $a = 2$, y (c) $a = 3$. Mostramos que los tres casos presentan dos ramas de la cáustica asociada, una en forma de trompeta y otra que corresponde al segmento de línea recta.

3.3. Diferentes valores de α ; γ y a constantes

Finalmente, mantenemos γ y a constantes y comparamos los casos cuando $\alpha = 0$ y $\alpha = \frac{\pi}{60}$ rad. Como veremos en las imágenes, al cambiar el valor del ángulo α , los frentes de onda refractados rotan y cambian su forma, en tanto que la rama de la cáustica asociada con τ_- se convierte en una superficie. En los dos casos aquí presentados, tenemos que las dos ramas de la cáustica cambian en tamaño y distancia de separación con la superficie refractante.

Observemos de la Fig.(??), los rayos de luz y frentes de onda refractados cuando consideramos los valores de (a) $\alpha = 0$ y (b) $\alpha = \frac{\pi}{60}$ rad. Consideramos los valores de $a = 1$, $b = 2$ y $\gamma = 1,5$. Podemos ver que en el caso (b) $\alpha = \frac{\pi}{60}$ rad los rayos de luz cambian de dirección, la región de intersección se separa del eje z en comparación con (a), en donde la región de intersección de los rayos de luz se encuentra sobre el eje z . Observamos de la Fig. (??b) la evolución del frente de onda refractado que conforme avanza, cambia de forma y dirección. Mostramos que la cáustica en los dos casos (ver Fig.??a y b) está formada por la envolvente e intersecciones de los rayos de luz.

En la Fig.(??) vemos los frentes de onda refractados y cáusticas asociadas cuando (a) $\alpha = 0$ y (b) $\alpha = \frac{\pi}{60}$ rad. Del inciso (b) notamos con mayor claridad el cambio de dirección de los frentes de onda refractados, y el desplazamiento que sufre la cáustica. Podemos ver dos ramas de la cáustica, una en forma de campana formada por los dobleces de los frentes de onda, y la

**CAPÍTULO 3 CARACTERIZACIÓN GEMÉTRICA DE LA
REFRACCIÓN DE UNA ONDA PLANA SOBRE UNA
SUPERFICIE PARABOLOIDAL**

3.3. DIFERENTES VALORES DE α ; γ Y A CONSTANTES

segunda en forma de una hoja alargada (ver Fig. ??b) que se forma por las autointersecciones de los frentes de onda. Para comparar las cáusticas con $\alpha = 0$ y $\alpha = \frac{\pi}{60}$ rad, veamos Fig. ?. Mostramos que cuando $\alpha = \frac{\pi}{60}$ rad, la cáustica se encuentra desplazada, alejándose del eje z .

**CAPÍTULO 3 CARACTERIZACIÓN GEMÉTRICA DE LA
REFRACCIÓN DE UNA ONDA PLANA SOBRE UNA
SUPERFICIE PARABOLOIDAL**

3.3. DIFERENTES VALORES DE α ; γ Y A CONSTANTES

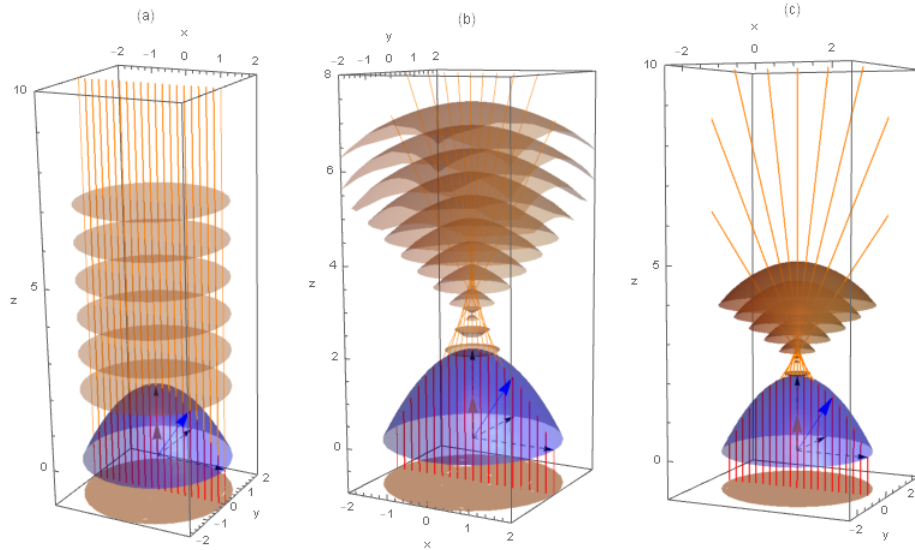


Figura 3.4: Rayos y frentes de onda incidentes y refractados, para diferentes valores de γ . (a) $\gamma = 1$, (b) $\gamma = 1.5$, (c) $\gamma = 2$.

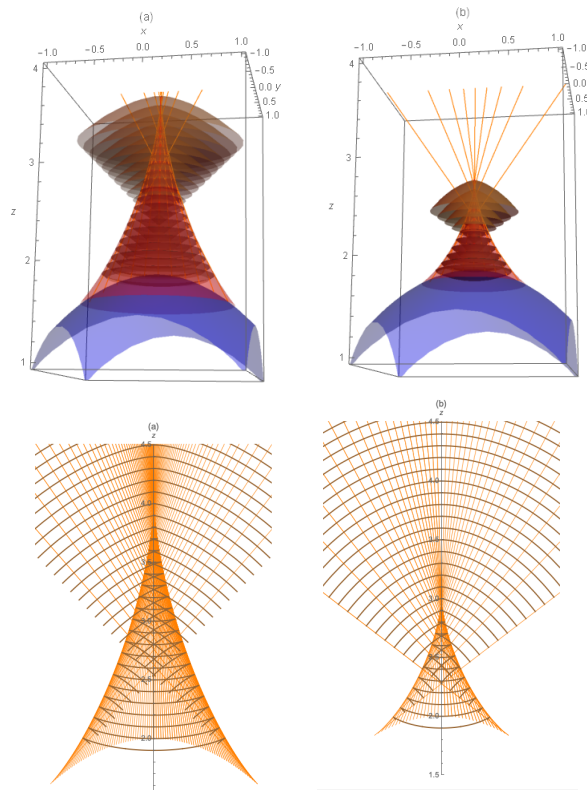


Figura 3.5: Cáusticas por refracción considerando diferentes valores de γ . (a) $\gamma = 1.5$, (b) $\gamma = 2$. Se observan las cáusticas en 3 dimensiones y en 2 dimensiones.

**CAPÍTULO 3 CARACTERIZACIÓN GEMÉTRICA DE LA
REFRACCIÓN DE UNA ONDA PLANA SOBRE UNA
SUPERFICIE PARABOLOIDAL**

3.3. DIFERENTES VALORES DE α ; γ Y A CONSTANTES

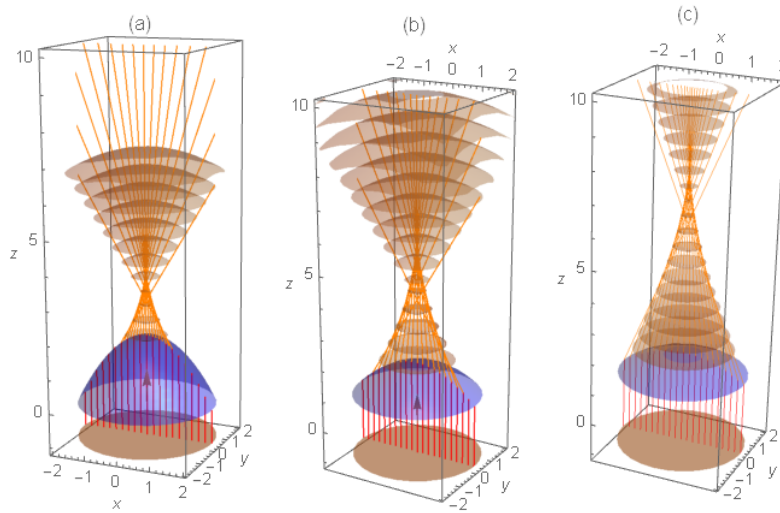


Figura 3.6: Rayos y frentes de onda incidentes y refractados, para diferentes valores de a . a) $a = 1$, b) $a = 2$, c) $a = 3$.

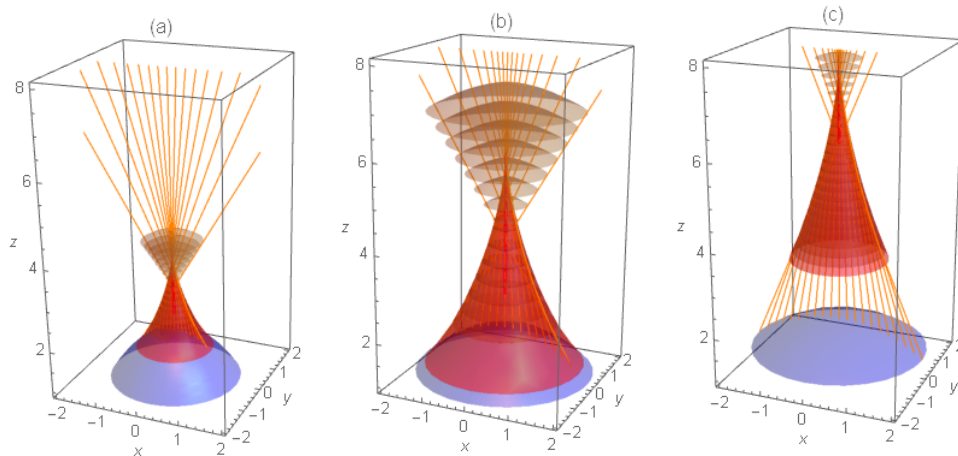


Figura 3.7: Cáusticas por refracción, considerando diferentes valores de a . a) $a = 1$, b) $a = 2$, c) $a = 3$.

**CAPÍTULO 3 CARACTERIZACIÓN GEMÉTRICA DE LA
REFRACCIÓN DE UNA ONDA PLANA SOBRE UNA
SUPERFICIE PARABOLOIDAL**

3.3. DIFERENTES VALORES DE α ; γ Y A CONSTANTES

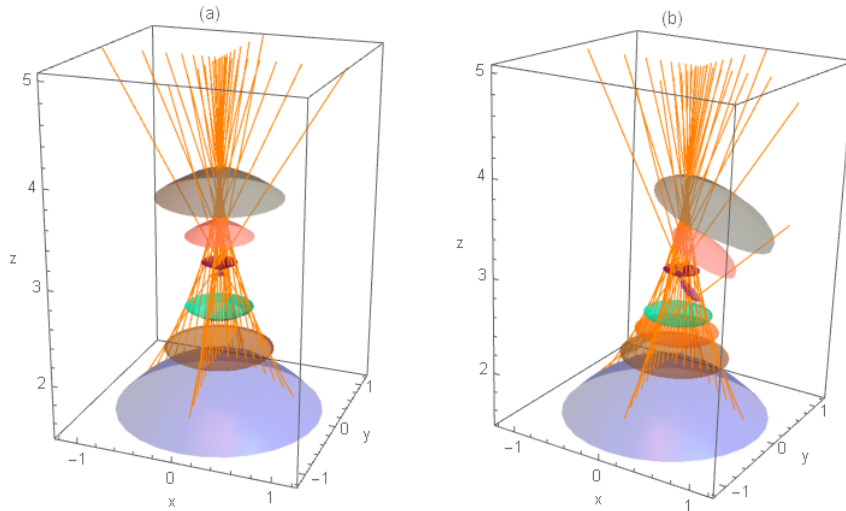


Figura 3.8: Rayos de luz refractados y frentes de onda refractados para diferentes valores de α . (a) $\alpha = 0$, (b) $\alpha = \frac{\pi}{60}$ rad.

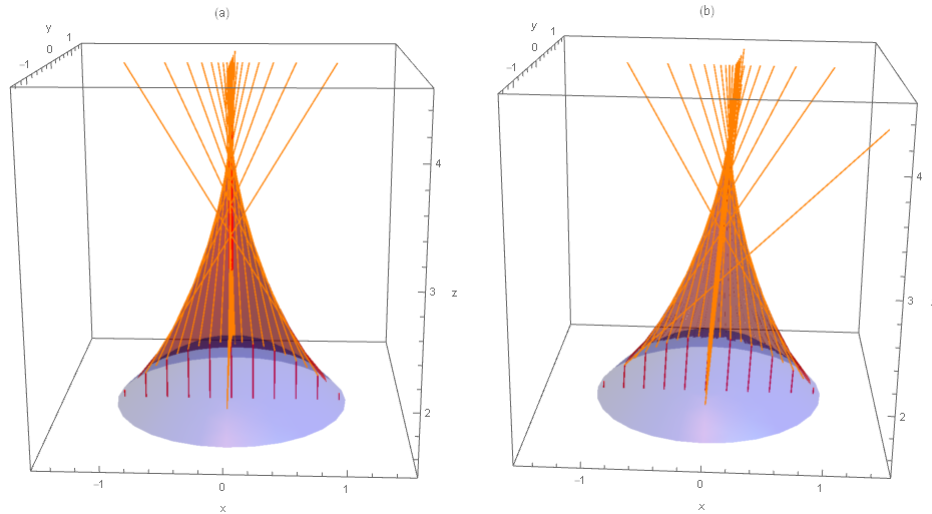


Figura 3.9: Rayos de luz refractados y cáustica asociada para diferentes valores de α . (a) $\alpha = 0$, (b) $\alpha = \frac{\pi}{60}$ rad.

**CAPÍTULO 3 CARACTERIZACIÓN GEMÉTRICA DE LA
REFRACCIÓN DE UNA ONDA PLANA SOBRE UNA
SUPERFICIE PARABOLOIDAL**

3.3. DIFERENTES VALORES DE α ; γ Y A CONSTANTES

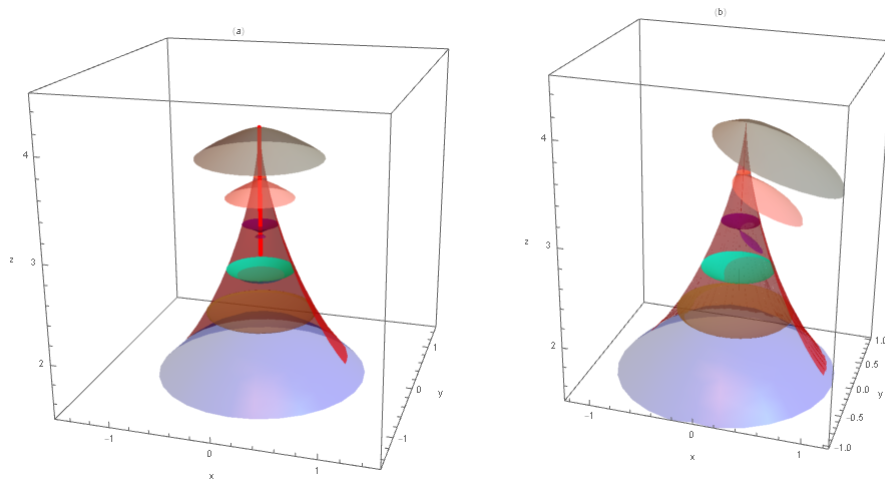


Figura 3.10: Frentes de onda refractados y cáustica asociada para diferentes valores de α . (a) $\alpha = 0$, (b) $\alpha = \frac{\pi}{60} \text{ rad}$.

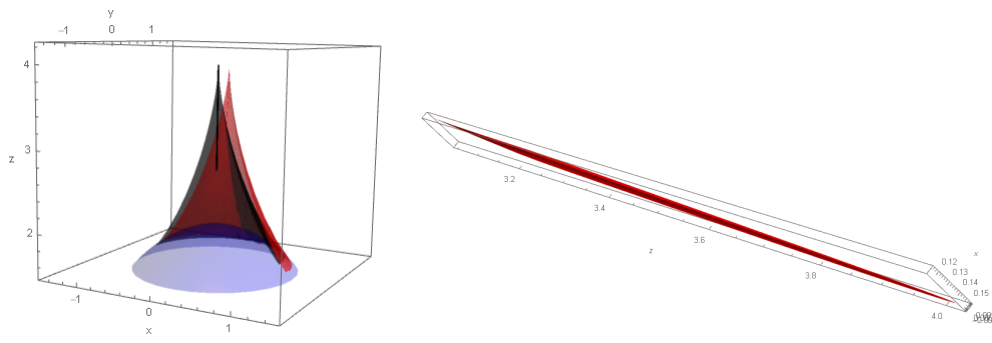


Figura 3.11: (a) Superposición de las cáusticas cuando $\alpha = 0$ y $\alpha = \frac{\pi}{60} \text{ rad}$. (b) Cáustica relacionada con las intersecciones de los frentes de onda refractados cuando $\alpha = \frac{\pi}{60} \text{ rad}$. Observamos que la rama de la cáustica tiene forma de una hoja alargada.

Capítulo 4

Conclusiones

En este trabajo, se presentó el estudio de la refracción de los rayos de luz emitidos por una fuente puntual luminosa separada de una superficie refractante, lo suficiente como para que los rayos de luz sean paralelos entre sí al llegar a la superficie refractante. Como la forma de la cáustica asociada a la refracción de los rayos de luz depende de la ubicación de la fuente luminosa y de la forma de la superficie refractante, presentamos un estudio detallado considerando tres casos. En el primero consideramos tres diferentes valores de γ , es decir, distintos valores de n_1 puesto que $n_2 = 1$, manteniendo un mismo valor de a , así como el valor del ángulo α que forman los rayos de luz con el eje z igual a 0, observando en las imágenes presentadas que conforme se incrementa el valor de n_1 , las ramas de la cáustica cambian en tamaño pero no en forma. En el segundo caso consideramos tres diferentes valores de la curvatura a de la superficie paraboloidal, es decir, con cada uno de los valores de a , la forma de la superficie fue diferente y en cada variación de a se mantuvo el valor de $\gamma = 1.5$, así como el ángulo $\alpha = 0$; de las gráficas presentadas se muestra que, conforme se incrementa el valor de a , las ramas de la cáustica cambian en tamaño pero no en forma, algo similar que en el primer caso. Finalmente, en el tercer caso comparamos la forma de los frentes de onda y cáustica cuando $\alpha = 0$ y $\alpha = \frac{\pi}{60} \text{ rad}$, mantuvimos $\gamma = 1.5$ y $a = 1$. Observamos que cuando $\alpha = 0$, una de las ramas de la cáustica es un segmento de línea recta, mientras que cuando $\alpha = \frac{\pi}{60} \text{ rad}$ este segmento de línea recta se transforma en una superficie cuya forma parece una hoja lanceolada. Es importante mencionar que debido a la simetría que tiene la superficie refractante, en los dos primeros casos, la cáustica asociada

CAPÍTULO 4 CONCLUSIONES

conserva la misma forma aunque no su tamaño, mientras que cuando se cambia la ubicación de la fuente puntual luminosa, como en el tercer caso, se rompe con esta simetría, dando como resultado, que las dos ramas de la cáustica sean superficies; una en forma de trompeta y otra en forma de hoja lanceolada.

Bibliografía

- [1] BORN, MAX and EMIL WOLF. *Principles of optics: Electromagnetic theory of propagation*. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.
- [2] GURUMOORTHY, KARTHIK S. and ANAND RANGARAJAN. *A fast eikonal equation solver using the Schrödinger wave equation*. arXiv. 1403.1937v2, 2015.
- [3] HECHT, EUGENE. *Optics*. England: Pearson, 2017.
- [4] J.CASTRO-RAMOS, S. A. JUÁREZ-REYES, M. MARCELINO-ARANDA, P. ORTEGA VIDALS, G. SILVA-ORTIGOZA, R. SILVA-ORTIGOZA and R. SUÁREZ-XIQUE. *The refraction and reflection laws from a complete integral of the eikonal equation and Huygens principle*. J. Opt. 17 015601, 2015.
- [5] JULIÁN MACÍAS, ISRAEL. *Ronchigramas generados por la refracción de una onda plana a través de un axicón y un prisma triangular*". Tesis. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2015.
- [6] PALAFOX SÁNCHEZ, KAREN S. *Rayos de luz, frentes de onda y cóustica asociados a la refracción de una onda esférica*". Tesis. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2018.
- [7] RUBINSTEIN, JACOB and GERSHON WOLANSKY. *A variational principle in optics*. J. Opt. Soc. 21-11, 2014.
- [8] SUÁREZ XIQUE, ROMÁN. *"Difracción asociada con frentes de onda singulares"*. Tesis. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2011.