

**BENEMÉRITA UNIVERSIDAD
AUTÓNOMA DE PUEBLA**

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS



UNIVERSALIDAD DEL CUBO DE HILBERT Y ENCAJAMIENTOS

TESIS

**PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS**

PRESENTA

Juan Carlos López Díez

DIRECTORES DE TESIS

Dr. Fernando Macías Romero

Dr. David Herrera Carrasco

Puebla, Pue. 4 de marzo de 2026





BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

Universalidad del cubo de Hilbert y encajamientos

TESIS

PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

PRESENTA

Juan Carlos López Díez

DIRECTORES DE TESIS

Dr. Fernando Macías Romero

Dr. David Herrera Carrasco

PUEBLA, PUE.

4 de marzo de 2026.

Dedicatoria

A mis padres.

Juan Adolfo López Galicia
María Guadalupe Díez Ramírez

A mis hermanos.

Juan Eduardo López Díez
Alejandro López Díez

Agradecimientos

A mis padres, por su amor, su paciencia y por enseñarme que el esfuerzo constante abre caminos aún en los momentos más inciertos.

A mis hermanos, por las risas, el apoyo silencioso y la certeza de que jamás avanzo solo.

A mis amigos, que hicieron más amenos los días difíciles y estuvieron conmigo en cada pequeño avance.

A mis maestros, por compartir su tiempo, su rigor y su pasión por el conocimiento; este trabajo también lleva su huella.

A todas las personas que, incluso en el tramo final, dejaron una huella y provocaron un cambio en mí.

A todos ustedes, gracias por sostenerme mientras aprendía a sostener mis ideas.

Introducción

La topología moderna se ha consolidado como una herramienta fundamental para el estudio riguroso de estructuras geométricas y analíticas. Su potencia radica en la capacidad de formular problemas en términos generales, trascendiendo la dependencia de coordenadas, métricas particulares o dimensiones específicas. Dentro de este vasto marco, la teoría de los espacios métricos ofrece un entorno privilegiado: es lo suficientemente accesible para permitir una interpretación geométrica intuitiva mediante la noción explícita de distancia y, simultáneamente, lo bastante robusta para sustentar conceptos abstractos como la continuidad, la convergencia y la compacidad.

Una clase de objetos que destaca por su riqueza estructural dentro de estos espacios son los continuos: espacios métricos compactos, conexos y no vacíos. Los continuos no son meras abstracciones; emergen de manera natural en el análisis de curvas, superficies, fractales y diversos sistemas dinámicos. El estudio sistemático de estos objetos, conocido como la Teoría de Continuos, ha evolucionado desde principios del siglo XX gracias a las contribuciones fundamentales de matemáticos como Hausdorff, Brouwer, Mazurkiewicz y Knaster. Una característica fascinante de los continuos es que, a pesar de que pueden presentar topologías internas de una complejidad extraordinaria —como el círculo de Varsovia o la curva seno del topólogo—, conservan propiedades globales que permiten su análisis mediante técnicas de aproximación y encajamiento.

El núcleo de esta tesis reside en la exploración de la universalidad del cubo de Hilbert ($\mathbf{Q}$). Al ser un espacio compacto, metrizable y de dimensión infinita, $\mathbf{Q}$ funciona como un receptáculo universal para todos los objetos compactos métricos. El objetivo principal es demostrar que todo continuo puede ser encajado en el cubo de Hilbert. Este resultado establece que cualquier continuo, sin importar cuán intrincada sea su estructura, puede representarse fielmente como un subespacio de $\mathbf{Q}$ mediante un encaje (una aplicación continua e inyectiva que resulta ser un homeomorfismo sobre su imagen). Esto permite unificar el estudio de los continuos bajo un entorno geométrico conocido y compartido.

Para presentar de forma clara y sistemática las herramientas necesarias para esta demostración, el trabajo se organiza de la siguiente manera:

En el Capítulo 1, fijamos el contexto teórico describiendo la estructura de los espacios métricos. Se introducen los conceptos de conjuntos abiertos, cerrados, cerradura y frontera, analizando las propiedades que rigen la topología de un conjunto. Asimismo, estudiamos nociones esenciales como la conexidad local, la arco-conexidad

y la compacidad, las cuales son piedras angulares para la caracterización de los continuos. Este capítulo establece el lenguaje formal indispensable para el desarrollo posterior de la tesis.

La primera parte del Capítulo 2 se dedica al estudio de los homeomorfismos y encajes. Exponemos cómo estas aplicaciones permiten identificar espacios que, aunque geométricamente distintos, son topológicamente indistinguibles. Se profundiza en la noción de encajamiento como una herramienta de representación: la capacidad de insertar un espacio dentro de otro sin alterar su estructura intrínseca. Aquí se sientan las bases para comprender por qué la búsqueda de un “espacio universal” es un problema central en la topología.

También introducimos formalmente la definición de continuo y exploramos sus manifestaciones. Analizamos ejemplos fundamentales como los arcos, las gráficas finitas y las dendritas, así como estructuras más complejas obtenidas mediante procesos de compactación y límites inversos. Este último concepto es crucial porque permite visualizar a los continuos como aproximaciones sucesivas de espacios más sencillos (gráficas o poliedros).

Finalmente, presentamos el cubo de Hilbert, analizando su construcción y su importancia como espacio métrico de dimensión infinita, y culminamos con la demostración del resultado principal: el teorema de encajamiento en el cubo de Hilbert. Discutimos las implicaciones de este hallazgo, el cual permite estudiar de manera uniforme cualquier continuo como un subespacio de Q , abriendo la puerta a técnicas de análisis unificado. De esta manera, la tesis no solo da cuenta de una propiedad estructural profunda de los continuos, sino que también resalta la potencia del cubo de Hilbert como el escenario definitivo para la topología compacta métrica.

Índice general

Introducción

1. Propiedades topológicas	1
1.1. Abierto, cerrado, cerradura, frontera	3
1.2. Compacidad	7
1.3. Conexidad	11
1.4. Continuidad	15
1.5. Homeomorfismos	17
2. Encajes	19
2.1. Encajes entre continuos	20
3. Continuos universales	31
3.1. Cubo de Hilbert	40
Referencias	45

Capítulo 1

Propiedades topológicas

La noción de espacio métrico fue desarrollada por primera vez por el matemático alemán Felix Hausdorff (1868-1942) a principios del siglo XX. En su libro “Grundzüge der Mengenlehre” (Fundamentos de la teoría de conjuntos), publicado en 1914, Hausdorff formalizó y definió la noción de espacio métrico, estableciendo los conceptos fundamentales de distancia, convergencia, límites y continuidad en este contexto (véase [4] y [14]). Esta teoría ha sido fundamental en el estudio del análisis matemático y la topología.

En este capítulo, comenzamos definiendo los conceptos de métrica y espacio métrico.

Definición 1.1. Sean X un conjunto no vacío y $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$. Se dice que d es una **métrica** para X si se satisface lo siguiente:

- (i) $\forall x, y \in X : d(x, y) \geq 0$.
- (ii) $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$.
- (iii) $\forall x, y, z \in X : d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.
- (iv) $\forall x, y \in X : d(x, y) = d(y, x)$.

Definición 1.2. El par (X, d) es un **espacio métrico** si X es no vacío y d es una métrica para X . A veces prescindiremos de especificar la métrica y diremos únicamente que X es un espacio métrico.

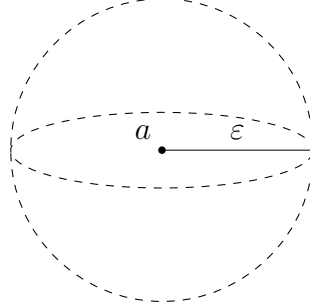
Definición 1.3. Sea $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definida para cada $x = (x_1, \dots, x_n)$ y $y = (y_1, \dots, y_n)$ como $\|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$. La función $\|\cdot\|$ es la **métrica euclidiana**.

Definición 1.4. Sean (X, d) un espacio métrico, $a \in X$ y $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. La **bola abierta** de X con centro en a y radio ε es

$$B_X(a, \varepsilon) = \{x \in X : d(a, x) < \varepsilon\}.$$

Si no hay confusión sobre el espacio métrico del que se habla, diremos simplemente que la bola abierta con centro en a y radio ε está definida como:

$$B(a, \varepsilon) = \{x \in X : d(a, x) < \varepsilon\}.$$

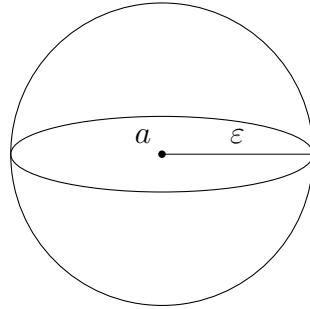


Definición 1.5. Sean (X, d) un espacio métrico, $a \in X$ y $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. La **bola cerrada** de X con centro en a y radio ε es

$$C_X(a, \varepsilon) = \{x \in X : d(a, x) \leq \varepsilon\}.$$

En caso de que no haya confusión sobre el espacio métrico del que se habla, diremos simplemente que la bola cerrada con centro en a y radio ε está definida como:

$$C(a, \varepsilon) = \{x \in X : d(a, x) \leq \varepsilon\}.$$



Definición 1.6. Sean X un espacio métrico y $A \subseteq X$. Se dice que A es un **conjunto abierto** de X si para cada $a \in A$ existe $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tal que $B_X(a, \varepsilon) \subseteq A$.

Lema 1.7. Toda bola abierta de un espacio métrico (X, d) es un conjunto abierto de X .

Demostración. Sean $B(x, \varepsilon)$ una bola abierta de X y $y \in B(x, \varepsilon)$. Tomemos $\delta = \min\{d(x, y), \varepsilon - d(x, y)\}$ para definir $B(y, \delta)$. Veamos que $B(y, \delta) \subseteq B(x, \varepsilon)$. Sea $z \in B(y, \delta)$, si $\delta = d(x, y)$ tenemos que $d(y, z) < d(x, y) \leq \varepsilon - d(x, y)$, luego $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < \varepsilon$, así $y \in B(x, \varepsilon)$. Por otra parte, si $\delta = \varepsilon - d(x, y)$, entonces $d(y, z) < \varepsilon - d(x, y)$ luego $d(x, y) \leq d(y, z) + d(y, z) < \varepsilon$, así $z \in B(x, \varepsilon)$. Por lo tanto, cualquier bola abierta es un conjunto abierto. $\square$

Definición 1.8. Sean X un espacio métrico y $A \subseteq X$. Se dice que A es un **conjunto cerrado** de X si $X \setminus A$ es un conjunto abierto de X .

Lema 1.9. Toda bola cerrada de un espacio métrico (X, d) es un conjunto cerrado de X .

Demostración. Sean $x \in X$ y $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Veamos que $C(x, \varepsilon)$ es un conjunto cerrado de X . Para esto demostraremos que $X \setminus C(x, \varepsilon)$ es un abierto de X . Sea $y \in X \setminus C(x, \varepsilon)$, entonces $d(x, y) > \varepsilon$ por definición. Tomemos $\delta = d(x, y) - \varepsilon$. Afirmamos que $B(y, \delta) \subseteq X \setminus C(x, \varepsilon)$. Con la finalidad de llegar a una contradicción supondremos que $z \in B(y, \delta)$ y $d(z, x) \leq \varepsilon$. De este modo, tendríamos que $d(z, x) \leq \varepsilon < d(x, y)$, luego $0 < d(x, y) - \varepsilon \leq d(x, y) - d(z, x)$. Sustituyendo δ y usando la desigualdad del triángulo, nos queda $0 < \delta \leq d(x, z)$, lo cual es una contradicción, porque $d(z, y) < \delta$. Por lo tanto, $C(x, \varepsilon)$ es un conjunto cerrado de X . $\square$

1.1. Abierto, cerrado, cerradura, frontera

Teorema 1.10. Sea X un espacio métrico y $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una familia de subconjuntos abiertos de X indizado con J . Entonces:

$$\mathcal{U} = \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha \text{ es un abierto de } X.$$

Demostración. Sea $x \in \mathcal{U}$, entonces $x \in U_\alpha$ para algún $\alpha \in J$. Como U_α es abierto de X , existe un $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tal que $B(x, \varepsilon) \subseteq U_\alpha$. Luego $B(x, \varepsilon) \subseteq \mathcal{U}$. Por lo tanto, $\mathcal{U}$ es un abierto de X . $\square$

Teorema 1.11. Sea X un espacio métrico y $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia de subconjuntos abiertos de X indizado con I finito. Entonces:

$$\mathcal{V} = \bigcap_{\alpha \in I} U_\alpha \text{ es un abierto de } X.$$

Demostración. Sea $x \in \mathcal{V}$, entonces $x \in U_\alpha$ para cada $\alpha \in I$. Como U_α es abierto de X , entonces para cada $\alpha \in I$ existe un $\varepsilon_\alpha \in \mathbb{R}^+$ tal que $B(x, \varepsilon_\alpha) \subseteq U_\alpha$. Tomemos $\varepsilon = \min\{\varepsilon_\alpha : \alpha \in I\}$. Así, para cada $\alpha \in I$, $B(x, \varepsilon) \subseteq U_\alpha$. Luego $B(x, \varepsilon) \subseteq \mathcal{V}$. Por lo tanto, $\mathcal{V}$ es un abierto de X . $\square$

Teorema 1.12. Sea X un espacio métrico y $\{E_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una familia de subconjuntos cerrados de X indizado con J . Entonces:

$$E = \bigcap_{\alpha \in J} E_\alpha \text{ es un cerrado de } X.$$

Demostración. Demostraremos que $X \setminus E$ es un abierto de X . Como cada E_α es cerrado de X , entonces para cada $\alpha \in J$ sucede que $X \setminus E_\alpha$ es abierto de X y, por el teorema 1.10, concluimos que E es cerrado de X . $\square$

Teorema 1.13. Sea X un espacio métrico y $\{E_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una familia de subconjuntos cerrados de X indizado con I finito. Entonces:

$$\mathcal{F} = \bigcup_{\alpha \in I} E_\alpha \text{ es un cerrado de } X.$$

Demostración. Demostraremos que $X \setminus \mathcal{F}$ es un abierto de X . Como cada E_α cerrado de X , entonces para cada $\alpha \in I$ sucede que $X \setminus E_\alpha$ es abierto de X y, por el teorema 1.11, concluimos que $\mathcal{F}$ es cerrado de X . $\square$

Definición 1.14. Sean X un espacio métrico y $A \subseteq X$. El **interior** del conjunto A en X es:

$$\text{int}_X(A) = \{x \in X : \text{existe } \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \text{ tal que } B_X(x, \varepsilon) \subseteq A\}.$$

Definición 1.15. Sean X un espacio métrico y $A \subseteq X$. La **cerradura** del conjunto A en X es:

$$\text{cl}_X(A) = \{x \in X : \text{para cada } \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \text{ sucede que } B_X(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset\}.$$

Definición 1.16. Sean X un espacio métrico y $A \subseteq X$. La **frontera** del conjunto A en X es:

$$\text{fr}_X(A) = \{x \in X : \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, B_X(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset \text{ y } B_X(x, \varepsilon) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset\}.$$

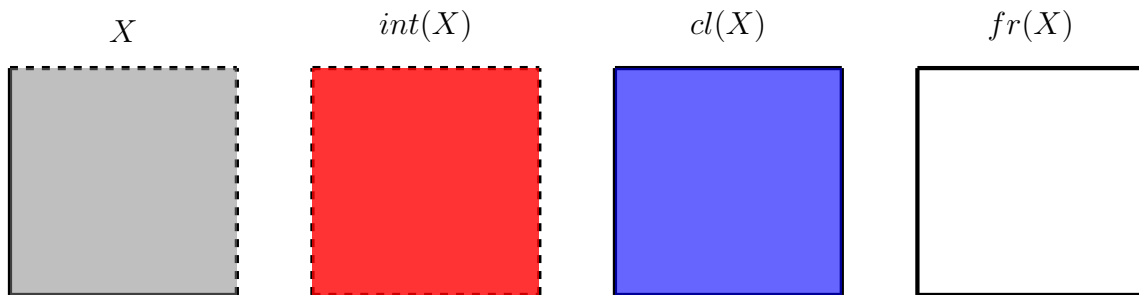


Figura 1.1: Ilustración del interior, la cerradura y frontera de un conjunto.

Teorema 1.17. Sean A, B subconjuntos de un espacio métrico X . Entonces:

- (a) $\text{int}_X(A) \subseteq A$.
- (b) $\text{int}_X(A)$ es abierto de X .

(c) A es abierto de X si y sólo si $A = \text{int}_X(A)$.

(d) Si $A \subseteq B$, entonces $\text{int}_X(A) \subseteq \text{int}_X(B)$.

Demostración. Para (a) y (b), se deduce directamente de la definición 1.14.

Para (c)($\Rightarrow$), supongamos que A es abierto de X ; por (a), sabemos que $\text{int}_X(A) \subseteq A$. Veamos que $A \subseteq \text{int}_X(A)$. Sea $a \in A$; como A es abierto, existe $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tal que $B_X(a, \varepsilon) \subseteq A$. Por lo tanto, $A = \text{int}_X(A)$. ($\Leftarrow$) Ahora supongamos que $A = \text{int}_X(A)$. Por (b) deducimos que A es abierto de X .

(d) Sea $x \in \text{int}_X(A)$; entonces existe $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tal que $x \in B_X(x, \varepsilon) \subseteq A \subseteq B$. Por lo tanto, $\text{int}_X(A) \subseteq \text{int}_X(B)$. $\square$

Definición 1.18. Sea S un subconjunto del espacio métrico X . Se dice que el conjunto S es **denso** si y sólo si $\text{cl}_X(S) = X$.

Teorema 1.19. Si X es un espacio métrico y $A \subseteq X$, entonces:

(a) $X \setminus \text{int}_X(A) = \text{cl}_X(X \setminus A)$.

(b) $X \setminus \text{cl}_X(A) = \text{int}_X(X \setminus A)$.

Demostración. Para (a)($\subseteq$). Sea $x \in X \setminus \text{int}_X(A)$, entonces para cada $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, $B(x, \varepsilon) \not\subseteq A$, es decir, $B(x, \varepsilon) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$. De modo que $x \in \text{cl}_X(X \setminus A)$, así $X \setminus \text{int}_X(A) \subseteq \text{cl}_X(X \setminus A)$. Por otra parte ($\supseteq$), tomando los argumentos recíprocos llegamos a que $\text{cl}_X(X \setminus A) \subseteq X \setminus \text{int}_X(A)$.

Para (b). Sea $B = X \setminus A$, por (a) sabemos que $X \setminus \text{int}_X(B) = \text{cl}_X(X \setminus B)$. Luego, tomando sus complementos, $\text{int}_X(B) = X \setminus \text{cl}_X(X \setminus B)$, entonces $\text{int}_X(X \setminus A) = X \setminus \text{cl}_X(A)$. $\square$

Teorema 1.20. Sean F, G subconjuntos de un espacio métrico X . Entonces:

(a) $F \subseteq \text{cl}_X(F)$

(b) $\text{cl}_X(F)$ es cerrado de X

(c) F es cerrado de X si y sólo si $F = \text{cl}_X(F)$

(d) $F \subseteq G$ implica $\text{cl}_X(F) \subseteq \text{cl}_X(G)$

Demostración. Para (a). Se deduce directamente de la definición 1.15.

Para (b). Por el teorema 1.17(b), sabemos que $\text{int}_X(X \setminus F)$ es abierto de X . Luego, por el teorema 1.19, (b) tenemos que $\text{int}_X(X \setminus F) = X \setminus \text{cl}_X(F)$ es abierto de X . Por lo tanto, $\text{cl}_X(F)$ es cerrado de X .

Para (c). Supongamos que F es cerrado de X . Entonces $X \setminus F$ es abierto de X . Por el teorema 1.17, (c) sabemos que $X \setminus F = \text{int}_X(X \setminus F)$. Luego, usando el teorema 1.19, (b), $X \setminus F = X \setminus \text{cl}_X(F)$ es abierto de X . Por lo tanto, $F = \text{cl}_X(F)$.

Para (d). $F \subseteq G$ implica que $X \setminus G \subseteq X \setminus F$. Por el teorema 1.17, (d) sabemos que $\text{int}_X(X \setminus G) \subseteq \text{int}_X(X \setminus F)$. Usando el teorema 1.19, (b) tenemos que $X \setminus \text{cl}_X(G) \subseteq X \setminus \text{cl}_X(F)$. Luego, $\text{cl}_X(F) \subseteq \text{cl}_X(G)$ $\square$

Definición 1.21. Sean $a, b \in \mathbb{R}^+$ con $a \leq b$ y $p \in \mathbb{R}^2$. El conjunto

$$R = \{(r \cos \theta, r \sin \theta) + p \in \mathbb{R}^2 : r \in [a, b], \theta \in [0, 2\pi]\}$$

es el **anillo bidimensional**.

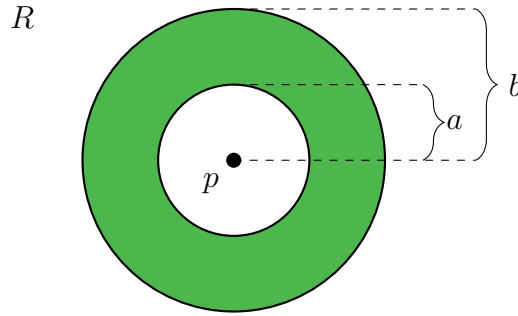


Figura 1.2: Ilustración del anillo bidimensional.

Lema 1.22. El anillo bidimensional es un conjunto cerrado de $\mathbb{R}^2$.

Demostración. Sea R el anillo bidimensional con las mismas características que en la definición 1.21. Veamos que $\mathbb{R}^2 \setminus R$ es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^2$.

Note que $\mathbb{R}^2 \setminus R = B(x, a) \cup (\mathbb{R}^2 \setminus C(x, b))$, es decir, puede escribirse como la unión de dos abiertos ajenos. Por el teorema 1.10, concluimos que R es un conjunto cerrado de $\mathbb{R}^2$. $\square$

Otro concepto topológico relacionado con los espacios métricos es el de compacidad. Su origen está vinculado con un teorema demostrado en 1895 por Émile Borel (1871-1956), el cual establece que toda cubierta abierta numerable de un intervalo cerrado y acotado tiene una subcubierta finita. En 1903, Borel generalizó este resultado para todo subconjunto cerrado y acotado de un espacio euclidiano. La definición actual se debe esencialmente a P. S. Aleksandrov (1896-1982) y a P. S. Urysohn (1898-1924).

Definición 1.23. Sean X un espacio métrico y $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una familia de subconjuntos de X . Se dice que $\mathcal{U}$ es una **cubierta** de X si $X = \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha$. Además, si cada U_α es un conjunto abierto de X , se dice que $\mathcal{U}$ es una **cubierta abierta** de X . Si $\mathcal{V}$ es un subconjunto de $\mathcal{U}$ tal que $\mathcal{V}$ es una cubierta de X , se dice que $\mathcal{V}$ es una **subcubierta** de X .

Definición 1.24. Sea X un espacio métrico. Se dice que el espacio X es **compacto** si cualquier cubierta abierta de X tiene una subcubierta finita.

Definición 1.25. Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subseteq X$. Se dice que A es **acotado** si existe algún $r \in \mathbb{R}^+$ tal que para cualesquiera $x, y \in A$ sucede que $d(x, y) \leq r$.

Lema 1.26 (Propiedad de Hausdorff). Si (X, d) es un espacio métrico y $x, y \in X$ con $x \neq y$, entonces existen dos abiertos ajenos de X que contienen a cada punto.

Demostración. Como $x \neq y$ entonces $d(x, y) > 0$. Tomemos $B(x, \frac{d(x, y)}{2})$ y $B(y, \frac{d(x, y)}{2})$. Es inmediato que $x \in B(x, \frac{d(x, y)}{2})$ y $y \in B(y, \frac{d(x, y)}{2})$. Además

$$B(x, \frac{d(x, y)}{2}) \cap B(y, \frac{d(x, y)}{2}) = \emptyset.$$

Por el lema 1.7, tenemos dos abiertos de X , ajenos que contienen cada punto. $\square$

Teorema 1.27. Sean X un espacio métrico compacto y $F \subseteq X$. Si F es cerrado, entonces F es compacto.

Demostración. Sean X un espacio topológico compacto, F un conjunto cerrado de X y $\mathcal{U}$ una cubierta abierta en X de F . Como F es cerrado, $X \setminus F$ es abierto de X . Luego $X \subseteq (X \setminus F) \cup \bigcup \mathcal{U}$. Como X es compacto, existen $U_1, U_2, \dots, U_n \in \mathcal{U}$ tales que $X = (X \setminus F) \cup \bigcup_{i=1}^n U_i$. Así, $F \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_i$. Por lo tanto, F es compacto. $\square$

Proposición 1.28. Sean X un espacio métrico compacto y $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos cerrados de X no vacíos tales que $A_1 \supset A_2 \supset \dots$. Muestre que $A = A_1 \cap A_2 \cap \dots$ es no vacío.

Demostración. Con la finalidad de llegar a una contradicción, supondremos que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset$, de modo que $X \setminus \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (X \setminus A_n) = X$, donde cada $X \setminus A_n$ es un abierto de X .

Notemos que $\{X \setminus A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ es una cubierta de X , y por definición, esta admite una subcubierta, digamos $\{X \setminus A_j \mid j \in J \text{ donde } J \text{ es finito}\}$. Entonces $\bigcup_{j \in J} (X \setminus A_j) = X \setminus \bigcap_{j \in J} A_j = X$, lo cual implica que $\bigcap_{j \in J} A_j = \emptyset$.

Como $A_{n+1} \subseteq A_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $\bigcap_{j \in J} A_j = A_{\max\{i \in J\}} = \emptyset$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$. $\square$

1.2. Compacidad

Teorema 1.29. Si A es un subconjunto compacto del espacio métrico X , entonces A es cerrado.

Demostración. Veamos que $X \setminus A$ es abierto de X . Por el lema 1.26, al fijar un $x \in X \setminus A$ y tomando cualquier $a \in A$, existen U_a, V_a abiertos ajenos tales que $x \in U_a$ y $a \in V_a$ para cada $a \in A$. Notemos que $\{V_a\}_{a \in A}$ es una cubierta abierta de A . Por ser A compacto y $\{V_a\}_{a \in A}$ una cubierta abierta de A , el conjunto tiene una subcubierta abierta finita de A con elementos V_{a_i} ; esto es, existen $a_i \in A$ con $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ tales que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n V_{a_i}$ para algún $n \in \mathbb{N}$.

Definamos $W = \bigcap_{i=1}^n U_{a_i}$ y notemos que $W \neq \emptyset$ ya que $x \in W$. Por propiedades de conjuntos, $A \cap W \subseteq \left(\bigcup_{i=1}^n V_{a_i} \right) \cap W = \bigcup_{i=1}^n (V_{a_i} \cap W) = \emptyset$. De modo que $W \subseteq X \setminus A$. Por el teorema 1.11, W es abierto de X . Esto implica que existe $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tal que $B(x, \varepsilon) \subseteq W \subseteq X \setminus A$ para cada $x \in X \setminus A$ que fijemos. Por lo tanto, $X \setminus A$ es abierto de X . $\square$

Teorema 1.30. Sean A, B subconjuntos de un espacio métrico X . Entonces se satisface lo siguiente:

- (a) Si B es acotado y $A \subseteq B$, entonces A es acotado.
- (b) A es acotado si y sólo si existe $\sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$.
- (c) Si A y B son acotados, entonces $A \cup B$ es acotado.
- (d) La unión finita de conjuntos acotados es acotada.

Demostración. (a). Como B es acotado, existe $r \in \mathbb{R}$ tal que para cualesquiera $u, v \in B$ sucede que $d(u, v) \leq r$. Sean $x, y \in A$, entonces $x, y \in B$. Esto implica que $d(x, y) \leq r$. Por lo tanto, A es acotado.

(b) ($\Rightarrow$) Sea A acotado, entonces existe $r \in \mathbb{R}$ tal que para cualesquiera $x, y \in A$ sucede que $d(x, y) \leq r$, es decir, el conjunto $\{d(x, y) : x, y \in A\}$ está acotado superiormente. Por lo tanto, tiene supremo.

($\Leftarrow$) Supongamos que existe $\alpha = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$, entonces para cualesquiera $x, y \in A$ sucede que $d(x, y) \leq \alpha$. Por lo tanto, A es acotado.

(c) Por (b) definamos $\alpha = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$ y $\beta = \sup\{d(x, y) : x, y \in B\}$. Sean $a \in A, b \in B$ y definamos $\gamma = \alpha + \beta + d(a, b)$. Afirmamos que para cualesquiera $x, y \in A \cup B$ sucede que $d(x, y) \leq \gamma$. En efecto, $d(x, y) \leq d(x, a) + d(y, b) + d(a, b) \leq \alpha + \beta + d(a, b)$. Por lo tanto, $A \cup B$ está acotado.

(d) Por inducción matemática. Sea $\{A_i \mid i \in \{1, 2, \dots, n\}\}$ una familia de subconjuntos de X acotados con $n \in \mathbb{N}$. Por (c) es inmediato que $A_1 \cup A_2$ es acotado. Bajo la hipótesis de que $\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i$ es acotado, por (c) concluimos que $\bigcup_{i=1}^n A_i$ es acotado, ya que $\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \right) \cup A_n = \bigcup_{i=1}^n A_i$. $\square$

Teorema 1.31. Sea A un subconjunto de un espacio métrico X . A es acotado si y sólo si existen $x \in X$ y $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tales que $A \subseteq B(x, \varepsilon)$.

Demostración. $(\Rightarrow)$ Sea $x \in A$ y $\varepsilon = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\} + 1$. Notemos que para cualquier $a \in A$ sucede que $d(a, x) \leq \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$. Luego, $d(a, x) < \varepsilon$, esto es $a \in B(x, \varepsilon)$. Por lo tanto, $A \subseteq B(x, \varepsilon)$.

$(\Leftarrow)$ Como $B(x, \varepsilon)$ es acotado, entonces, por el teorema 1.30 (a), tenemos que A es acotado. $\square$

Definición 1.32. Sea A subconjunto de un espacio métrico X . Se dice que A es **precompacto** si para cada $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, existe $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subseteq A$ con $n \in \mathbb{N}$ tal que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n B(a_i, \varepsilon)$.

Teorema 1.33. Sea A un subconjunto no vacío de un espacio métrico X . Si A es compacto, entonces es precompacto.

Demostración. Sea $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Como $A \subseteq \bigcup_{a \in A} B(a, \varepsilon)$, y A es compacto, entonces existe $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subseteq A$ con $n \in \mathbb{N}$ tal que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n B(a_i, \varepsilon)$. Por lo tanto, A es precompacto. $\square$

Teorema 1.34. Sea A subconjunto de un espacio métrico X . Si A es precompacto, entonces es acotado.

Demostración. Como A es precompacto, existe $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subseteq A$ con $n \in \mathbb{N}$ tal que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n B(a_i, \varepsilon)$ para cualquier $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Sabemos que cada $B(a_i, \varepsilon)$ es acotado. Luego, por el teorema 1.30 (a) y (d), A es acotado. $\square$

Definición 1.35. Sea $n \in \mathbb{N}$. Una **n -celda** es el producto cartesiano de n intervalos cerrados de $\mathbb{R}$.

Lema 1.36. Sea $I = \{I_m \mid m \in \mathbb{N}\}$ una familia de n -celdas. Si para cada $m \in \mathbb{N}$ se tiene que $I_{m+1} \subseteq I_m$, entonces $\bigcap_{m=1}^{\infty} I_m \neq \emptyset$.

Demostración. Como cada I_m es una n -celda, para cada $m \in \mathbb{N}$ podemos definir a $I_m = \prod_{i=1}^n [a_i^{(m)}, b_i^{(m)}]$ y para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ definimos los conjuntos $A_i = \{a_i^{(m)} \mid m \in \mathbb{N}\}$. Como I es una sucesión anidada de n -celdas, sabemos que para cada $m \in \mathbb{N}$ sucede que $a_i^{(m)} \leq a_i^{(m+1)} \leq b_i^{(m+1)} \leq b_i^{(m)}$. Es decir, si $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, A_i está acotada superiormente. Para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ tomemos $x_i = \sup(A_i)$. De modo que $x_i \in [a_i^{(m)}, b_i^{(m)}]$ para cuales quiera $m \in \mathbb{N}$ y $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Sea $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Entonces para cada $m \in \mathbb{N}$ sucede que $x \in \prod_{i=1}^n [a_i^{(m)}, b_i^{(m)}]$, es decir, $x \in \bigcap_{m=1}^{\infty} I_m$. $\square$

Teorema 1.37. Sea $n \in \mathbb{N}$. Toda n -celda es un compacto.

Demostración. Con el fin de llegar a una contradicción supongamos que las n -celdas no son compactas. Sea $I_1 = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$ una n -celda para la cual supondremos que $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta que no admite subcubiertas finitas. Definamos $\delta = \text{diám}(I_1)$. y para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, tomemos $c_i = \frac{a_i + b_i}{2}$. Así, los intervalos de la forma $[a_i, c_i]$ y $[c_i, b_i]$ determinan 2^n n -celdas cuya unión resulta en I_1 .

Tomemos una de estas n -celdas y denotémosla por I_2 la cual no puede ser cubierta por una subcolección finita de $\mathcal{U}$ (pues por hipótesis, las n -celdas no son compactas). Además, $\text{diám}(I_2) = \frac{\delta}{2}$. Realizando este proceso de forma recursiva tenemos $\{I_m \mid m \in \mathbb{N}\}$ una familia de n -celdas anidadas por contención de forma decreciente, donde cada I_m no puede ser cubierta por una subcolección finita de $\mathcal{U}$ y $\text{diám}(I_m) = \frac{\delta}{2^{m-1}}$.

Por el lema 1.36, existe $x \in \bigcap_{m=1}^{\infty} I_m$, en particular $x \in I_1$. Entonces existe $U_x \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U_x$, donde $B(x, \varepsilon) \subseteq U_x$ para algún $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Como $\{\text{diám}(I_m)\}_{m \in \mathbb{N}}$ converge a cero, entonces existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{\delta}{2^{M-1}} < \varepsilon$.

Como $x \in I_M$ y $\text{diám}(I_M) = \frac{\delta}{2^{M-1}}$ tenemos que $I_M \subseteq B(x, \varepsilon) \subseteq U_x$. Es decir, I_M puede ser cubierto por $\{U_x\} \subseteq \mathcal{U}$. Por lo tanto, toda n -celda es un compacto. $\square$

Teorema 1.38 (Heine-Borel). Sea A un subconjunto no vacío del espacio métrico $\mathbb{R}^n$ con la métrica euclidiana. A es compacto si y sólo si A es cerrado y acotado.

Demostración. ($\Rightarrow$) Sea A un compacto en $\mathbb{R}^n$, por el teorema 1.29, 1.33 y 1.34 tenemos que A es cerrado y acotado en $\mathbb{R}^n$.

($\Leftarrow$) Sea A cerrado y acotado de $\mathbb{R}^n$. Por el teorema 1.31 existe $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ y $x \in \mathbb{R}^n$ tales que $A \subseteq B(x, \varepsilon)$. Consideremos x de la forma $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ para definir $I = \prod_{i=1}^n [x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon]$ el producto cartesiano de intervalos cerrados centrados en x_i y de radio ε . Notemos que $B(x, \varepsilon) \subseteq I$ y por consiguiente $A \subseteq I$. Por el teorema 1.37, A es un cerrado y acotado del compacto I . $\square$

Proposición 1.39. La bola cerrada es un conjunto compacto en $\mathbb{R}^n$.

Demostración. Sea $C(x, \varepsilon)$ una bola cerrada en $\mathbb{R}^n$. Por el lema 1.9, $C(x, \varepsilon)$ es un conjunto cerrado de $\mathbb{R}^n$. Luego $C(x, \varepsilon) \subseteq B(x, 2\varepsilon)$, es decir, está acotado. Así, por el teorema de Heine-Borel, concluimos que es compacto. $\square$

Proposición 1.40. El anillo bidimensional es un conjunto compacto en $\mathbb{R}^2$.

Demostración. Sea R el anillo bidimensional. Por el lema 1.22, R es cerrado. Por otra parte, note que $R \subseteq C(p, b)$, por el teorema 1.30, R es acotado. Así, por Heine Borel concluimos que R es compacto en $\mathbb{R}^2$. $\square$

Definición 1.41. Un espacio métrico X es **localmente compacto** si y sólo si para cada $x \in X$ y cualquier abierto U que contenga a x , existe un abierto V tal que $x \in V \subseteq \text{cl}_X(V) \subseteq U$ y $\text{cl}_X(V)$ es compacto.

Lema 1.42. $\mathbb{R}^n$ es localmente compacto.

Demostración. Sean $x \in \mathbb{R}^n$ y U un abierto de $\mathbb{R}^n$ que contiene a x . Por definición existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subseteq U$. Note que $B(x, \frac{\varepsilon}{2})$ es un abierto tal que $x \in B(x, \frac{\varepsilon}{2}) \subseteq C(x, \frac{\varepsilon}{2}) \subseteq B(x, \varepsilon) \subseteq U$ y $C(x, \frac{\varepsilon}{2})$ es compacto por la proposición 1.39. Por lo tanto, $\mathbb{R}^n$ es localmente compacto. $\square$

1.3. Conexidad

La conexidad constituye una de las nociones básicas e indispensables dentro del ámbito de la topología. La definición moderna de este concepto tiene sus orígenes en 1883, cuando Camille Jordan (1838-1922) la introdujo inicialmente para los subconjuntos compactos del plano. No obstante, la aproximación sistemática al estudio de la conexidad fue impulsada posteriormente: Felix Hausdorff lo inició formalmente en 1914 y fue consolidada a partir de 1921 por las contribuciones significativas de Bronisław Knaster (1893-1980) y Kazimierz Kuratowski (1896-1980).

Definición 1.43. Sea X un espacio métrico. Si existen S, T dos abiertos ajenos no vacíos de X tales que $S \cup T = X$ entonces se dice que el par (S, T) es una **separación** de X .

Proposición 1.44. Si S, T son dos cerrados de un espacio métrico X , ajenos no vacíos tales que $S \cup T = X$, entonces X tiene una separación.

Demostración. Como S y T son ajenos, tenemos que $X \setminus (S \cap T) = X$, es decir, $(X \setminus S) \cup (X \setminus T) = X$. Como $S \cup T = X$ se implica que $X \setminus (S \cup T) = \emptyset$ o, equivalentemente, $(X \setminus S) \cap (X \setminus T) = \emptyset$. Además, $X \setminus S, X \setminus T$ son abiertos de X no vacíos. Por lo tanto, $(X \setminus S, X \setminus T)$ es una separación de X . $\square$

Sobre lo anterior, note que si (S, T) es una separación de X , entonces S, T son abiertos y cerrados de X .

Definición 1.45. Un espacio métrico X es **conexo** si no existe una separación de X . De otro modo, se dice que X es **disconexo**.

Más aún, sea $A \subseteq X$. Si existen S, T abiertos en X tales que $(S \cap A) \cup (T \cap A) = A$ y $A \cap S \cap T = \emptyset$ se dice que A es diconexo en X . De otro modo se dice que A es conexo en X .

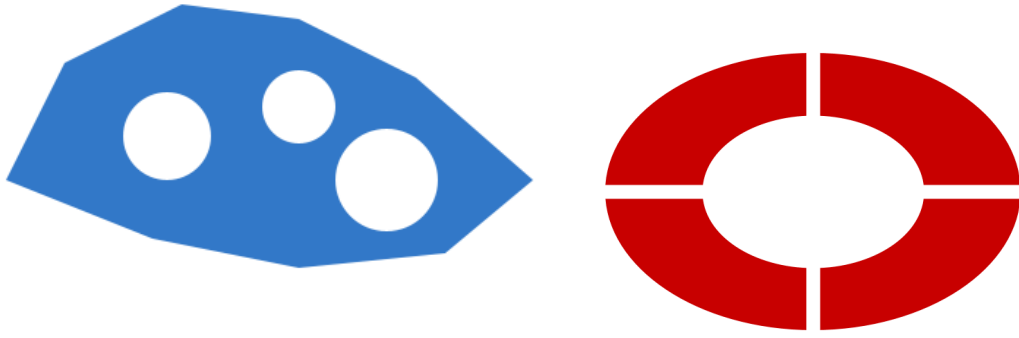


Figura 1.3: Ejemplos de conexo (azul) y desconexo (rojo).

Lema 1.46. Sea A un subconjunto de un espacio métrico X , entonces A es desconexo si y sólo si existe $S \subset A$ con $S \neq \emptyset$ tal que S es abierto y cerrado de A .

Demostración. $(\Rightarrow)$ Supongamos que A es desconexo. Entonces existen S, T abiertos ajenos de X tales que $(S \cap A) \cup (T \cap A) = A$. Por Proposición 1.44, $S \cap A$ y $T \cap A$ son abiertos y cerrados de A . Así, $S \cap A \subset A$ puesto que $T \cap A \neq \emptyset$ y $S \cap A \neq \emptyset$.

$(\Leftarrow)$ Ahora, supongamos que existe $S \cap A \subset A$ con $S \cap A \neq \emptyset$ abierto y cerrado de A . Sea $T = A \setminus (S \cap A)$, entonces $T = T \cap A \neq \emptyset$. Como $S \cap A$ es cerrado de A , tenemos que $T \cap A$ es abierto de A . Además, $S \cap T = \emptyset$ y $(S \cap A) \cup (T \cap A) = A$. Por lo tanto, A es desconexo. $\square$

Lema 1.47. Sea A un subconjunto de un espacio métrico X . Entonces A es conexo si y sólo si los únicos subconjuntos abiertos y cerrados de A son $\emptyset$ y A .

Demostración. Es la negación del lema 1.46. $\square$

Teorema 1.48. Sean A, B subconjuntos de un espacio métrico X con A conexo. Si $A \subseteq B \subseteq \text{cl}_X(A)$, entonces B es conexo.

Demostración. Supongamos que B no es conexo, es decir, existen S, T abiertos ajenos en X tales que $(S \cap B) \cup (T \cap B) = B$. Como $A \subseteq B$, entonces $(S \cap A) \cup (T \cap A) = A$. Por ser A conexo, $A \cap S = \emptyset$ o $A \cap T = \emptyset$ por el lema 1.47. Supongamos que $A \cap S = \emptyset$, entonces $A = A \cap T$, lo cual implica que $A \subseteq T$.

Notemos que $\text{cl}_X(A) \cap S = \emptyset$, pues en caso contrario $A \cap S \neq \emptyset$. Como $B \subseteq \text{cl}_X(A)$, $B \cap S = \emptyset$. Por lo tanto, B es conexo. $\square$

Corolario 1.49. Sea X un espacio métrico y $A \subseteq X$. Si A es conexo, entonces $\text{cl}_X(A)$ es conexo.

Demostración. Por el teorema 1.20 sabemos que $A \subseteq \text{cl}_X(A) \subseteq \text{cl}_X(A)$. Luego, por el teorema 1.48, $\text{cl}_X(A)$ es conexo. $\square$

Proposición 1.50. $[0, 1]$ es conexo con la métrica euclidiana.

Demostración. Supongamos que $[0, 1]$ no es conexo. Entonces existen U y V abiertos de $[0, 1]$ ajenos y no vacíos tales que $U \cup V = [0, 1]$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $0 \in U$ y consideremos $\alpha = \sup(U)$. Si $\alpha \in U$, entonces existe un abierto A que contiene a α y $A \subseteq U$; pero esto implica que α no es el supremo de U , entonces $\alpha \notin U$.

Por otra parte, si $\alpha \in V$, entonces existe un abierto B que contiene a α y $B \subseteq V$, pero esto implica que hay puntos menores que α y están en V , entonces α no es el supremo de U , es decir, U no tiene supremo, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $[0, 1]$ es conexo. $\square$

Definición 1.51. Sea $[0, 1]$ con la métrica euclidiana. Un espacio topológico X es **arco-conexo** si para cualesquiera $x, y \in X$ existe una función $\widetilde{L}_{x,y} : [0, 1] \rightarrow X$ inyectiva tal que $\widetilde{L}_{x,y}(0) = x, \widetilde{L}_{x,y}(1) = y$ y si A es un abierto de X entonces $\widetilde{L}_{x,y}^{-1}(A)$ es abierto de $[0, 1]$. La **curva que une a x con y** es $\widetilde{L}_{x,y}([0, 1])$.

Teorema 1.52. Si X un espacio métrico arco-conexo, entonces es conexo.

Demostración. Supongamos que X no es conexo. Entonces existen U y V abiertos de X ajenos y no vacíos tales que $U \cup V = X$. Tomemos $x \in U$ y $y \in V$. Como X es arco-conexo, existe $\widetilde{L}_{x,y}([0, 1])$ una curva que une a x con y . Por la definición $\widetilde{L}_{x,y}^{-1}(U)$ y $\widetilde{L}_{x,y}^{-1}(V)$ son abiertos de $[0, 1]$. Es más, son ajenos, no vacíos y $\widetilde{L}_{x,y}^{-1}(U) \cup \widetilde{L}_{x,y}^{-1}(V) = [0, 1]$. Pero esto contradice el hecho de que $[0, 1]$ es conexo. Por lo tanto, la arco-conexidad implica conexidad. $\square$

Teorema 1.53. Sea $\mathbb{R}^2$ con la métrica euclidiana. Si R es el anillo bidimensional, entonces es arco-conexo.

Demostración. Sean $x, y \in R$ con R bajo las mismas características que en la definición 1.21, $x = p + (r_x \cos \theta_x, r_x \sin \theta_x)$ y $y = p + (r_y \cos \theta_y, r_y \sin \theta_y)$. Sea la función $f : [0, 1] \rightarrow R$ definida según cada situación:

Caso $\theta_x = \theta_y$:

$$f(t) = p + ty + (1 - t)x.$$

Caso $\theta_x < \theta_y$:

$$f(t) = p + [tr_y + (1 - t)r_x](\cos(t\theta_y + (1 - t)\theta_x), \sin(t\theta_y + (1 - t)\theta_x)).$$

Caso $\theta_x > \theta_y$:

$$f(t) = p + [tr_x + (1 - t)r_y](\cos(t\theta_x + (1 - t)\theta_y), \sin(t\theta_x + (1 - t)\theta_y)).$$

Notemos que f es continua e inyectiva, entonces tomemos para cada $x, y \in R$, $f = \widetilde{L}_{x,y}$. Por lo tanto, R es arco-conexo. $\square$

Corolario 1.54. Sea $\mathbb{R}^2$ con la métrica euclidiana. Si R es el anillo bidimensional, entonces es conexo.

Demostración. Por el teorema 1.53, R es arco-conexo. Luego, por el teorema 1.52 tenemos que R es conexo. $\square$

Definición 1.55. Sea A un subconjunto del espacio métrico $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$. Se dice que A es **convexo** en $\mathbb{R}^n$ si para cualesquiera dos puntos distintos $x, y \in A$ y $t \in [0, 1]$ sucede que $ty + (1 - t)x \in A$.

Note que si A es convexo, es posible definir para cada $x, y \in A$ una función $\overline{L_{x,y}} : [0, 1] \rightarrow A$ donde $\overline{L_{x,y}}(t) = ty + (1 - t)x$. Es más, $\overline{L_{x,y}}$ es continua en A pues existe $\overline{L_{x,y}}'(t) = y - x$. Denominemos a $\overline{L_{x,y}}([0, 1])$ como el segmento que une a x con y .

Proposición 1.56. En el espacio métrico $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ las bolas abiertas son convexas.

Demostración. Sea $B(a, \varepsilon)$ una bola abierta y sean x, y dos puntos en él. Entonces $\|x - a\| < \varepsilon$ y $\|y - a\| < \varepsilon$. Tomemos $z \in \overline{L_{x,y}}([0, 1])$. Queremos probar que $\|z - a\| < \varepsilon$, para esto notemos que $z - a = t_z(x - a) + (1 - t_z)(y - a)$ para algún $t_z \in [0, 1]$. Luego, $\|z - a\| = \|t_z(x - a) + (1 - t_z)(y - a)\| \leq t_z\|x - a\| + (1 - t_z)\|y - a\| < t_z\varepsilon + (1 - t_z)\varepsilon = \varepsilon$. Por lo tanto, $z \in B(a, \varepsilon)$ $\square$

Teorema 1.57. Sea $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$. Si $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es convexo, entonces es conexo.

Demostración. Supongamos que A no es conexo; esto es, existen S, T abiertos ajenos en $\mathbb{R}^n$ tales que $(S \cap A) \cup (T \cap A) = A$. Tomemos $x \in S \cap A$ y $y \in T \cap A$. Como $\overline{L_{x,y}}$ es continua, entonces existe $t_0 \in [0, 1]$ tal que $\overline{L_{x,y}}(t_0) \in S \cap A \cap T$ o $\overline{L_{x,y}}(t_0) \in A \setminus (S \cup T)$. Ambas situaciones contradicen la condición de no conexidad. Por lo tanto, A es conexo. $\square$

Corolario 1.58. En el espacio métrico $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ las bolas abiertas y las bolas cerradas son conexas.

Demostración. Por la proposición 1.56 y el teorema 1.57, las bolas abiertas son conexas. Por otra parte, sabemos que la cerradura de una bola abierta es una bola cerrada. Entonces, por corolario 1.49, las bolas cerradas son conexas. $\square$

Note que gracias a este corolario, los intervalos de la forma (a, b) y $[a, b]$ son conexos en el espacio métrico $(\mathbb{R}, \|\cdot\|)$.

Definición 1.59. Se dice que el espacio métrico X es **localmente conexo en** $x \in X$ si para cualquier abierto U de X con $x \in U$, existe un abierto conexo W de X tal que $x \in W \subseteq U$.

Definición 1.60. Un espacio métrico X es **localmente conexo** si para cualquier punto $x \in X$, se tiene que X es localmente conexo en x .

Ejemplo 1.61. El espacio $[0, 1]$ es localmente conexo.

Ejemplo 1.62. $\mathbb{R}^n$ es localmente conexo, pues toda bola abierta es conexa.

Note que ser localmente conexo no implica ser conexo. Basta con mirar el espacio $X = (0, 1) \cup (2, 3)$. Es más, ser conexo tampoco implica ser localmente conexo. Presentamos el contraejemplo en el siguiente capítulo.

1.4. Continuidad

El concepto de continuidad es central en el estudio realizado en esta tesis, pues nos permite estudiar el comportamiento local de las funciones entre espacios. En sus orígenes, aplicado a funciones de variable real, se entendía como una curva cuya gráfica podía dibujarse “sin levantar el lápiz”. Sin embargo, esta noción geométrica necesitaba ser formalizada para ser útil en contextos más generales.

El formalismo introducido por Cauchy y Weierstrass para funciones reales $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, basado en la relación $(\varepsilon - \delta)$ fue un hito, pues la clave de esta formulación es que depende estrictamente de la distancia entre los puntos en el dominio y en el codominio.

Al reemplazar la distancia euclidiana estándar de $\mathbb{R}$ o $\mathbb{R}^n$ por una métrica general d_X en el dominio y d_Y en el codominio, podemos generalizar el concepto de continuidad a cualquier función $\phi : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$.

La formalización de la continuidad en estos términos no solo unifica el concepto para dominios tan diversos como el de los números complejos o espacios de funciones, sino que establece las bases para una formulación aún más general en la topología: la continuidad en términos de conjuntos abiertos.

A continuación exploraremos cómo definir la continuidad a partir de las métricas y cómo esta propiedad se relaciona con otros conceptos cruciales como la preservación de propiedades topológicas esenciales.

Definición 1.63. Sean X, Y espacios métricos, A un subconjunto de X y $f : A \rightarrow Y$ una función. Se dice que f es **continua** en $a \in A$ si para cualquier abierto $U \subseteq Y$ que contenga a $f(a)$, existe un abierto $V \subseteq X$ con $a \in V$ tal que $f(V \cap A) \subseteq U$.

Teorema 1.64. Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) espacios métricos, $a \in A \subseteq X$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ y $f : A \rightarrow Y$. La función f es continua en a si y sólo si para cada $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, existe $\delta \in \mathbb{R}^+$ tal que si $x \in A$ y $d_X(x, a) < \delta$, entonces $d_Y(f(a), f(x)) < \varepsilon$.

Demostración. $(\Rightarrow)$ Sea $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Notemos que $B_Y(f(a), \varepsilon)$ es un abierto de Y que contiene a $f(a)$. Por hipótesis existe un abierto $V \subseteq X$ tal que $a \in V$ y $f(V \cap A) \subseteq B_Y(f(a), \varepsilon)$. Es decir, existe $\delta \in \mathbb{R}^+$ tal que $a \in B_X(a, \delta)$ y $f(B_X(a, \delta) \cap A) \subseteq B_Y(f(a), \varepsilon)$. Esto es, que si $x \in A$ y $d_X(x, a) < \delta$, entonces $d_Y(f(a), f(x)) < \varepsilon$.

$(\Leftarrow)$ Sea U un abierto de Y tal que $B(f(a), \varepsilon) \subseteq U$, por hipótesis, existe V un abierto de X tal que $V \subseteq B(a, \delta)$. Notemos que $V \cap A \subseteq B(a, \delta) \cap A$. De modo que $f(V \cap A) \subseteq f(B(a, \delta) \cap A) \subseteq B(f(a), \varepsilon) \subseteq U$. $\square$

Definición 1.65. Sean X, Y espacios métricos, A un subconjunto de X y $f : A \rightarrow Y$ una función. Se dice que f es continua en A si f es continua en cualquier $a \in A$. De forma más general, se dice que f es continua, si $A = X$.

Teorema 1.66. Sean X, Y espacios métricos y $f : X \rightarrow Y$, f es continua si y sólo si toda preimagen de un abierto de Y es un abierto de X .

Demostración. ($\Rightarrow$) Sea U un abierto de Y . Note que si $U = \emptyset$ o $U \cap f(X) = \emptyset$, entonces $f^{-1}(U) = \emptyset$, el cual es abierto de X . Por otra parte, supongamos que $U \neq \emptyset$ y $U \cap f(X) \neq \emptyset$. Veamos que $f^{-1}(U)$ es abierto de X . Sea $x \in f^{-1}(U)$, entonces $f(x) \in U$. Por continuidad existe V abierto de X con $x \in V$ tal que $f(V) \subseteq U$. Es decir, que para cada $x \in f^{-1}(U)$ existe $\varepsilon_x > 0$ tal que $B_X(x, \varepsilon_x) \subseteq U$. Por lo tanto, $f^{-1}(U)$ es abierto de X .

($\Leftarrow$) Sea U un abierto de Y . Note que si $U = \emptyset$ o $U \cap f(X) = \emptyset$, entonces $f^{-1}(U) = \emptyset$, y por vacuidad f es continua. Por otra parte, supongamos que $U \neq \emptyset$ y $U \cap f(X) \neq \emptyset$. Veamos que f es continua. Sea $f(x) \in U$, por hipótesis, $f^{-1}(U)$ es un abierto de X y $x \in f^{-1}(U)$. Por lo tanto, f es continua. $\square$

Teorema 1.67. Sean X, Y espacios métricos con X compacto. Si $f : X \rightarrow Y$ es una función continua, entonces $f(X)$ es compacto.

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de $f(X)$ y consideremos el conjunto $\mathcal{V} = \{f^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{U}\}$. Notemos que $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de X donde por ser X compacto, existe $\{f^{-1}(U_1), f^{-1}(U_2), \dots, f^{-1}(U_n)\} \subseteq \mathcal{V}$ tal que $\bigcup_{i=1}^n f^{-1}(U_i) = X$.

Afirmamos que $\bigcup_{i=1}^n U_i = f(X)$. En efecto, es inmediato que $\bigcup_{i=1}^n U_i \subseteq f(X)$. Por otro lado, sea $y \in f(X)$, entonces existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$, es decir, x pertenece a algún $f^{-1}(U_j)$ y por consiguiente $y \in U_j \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_i$. Por lo tanto, es compacto. $\square$

Corolario 1.68. Sean X, Y espacios métricos con X compacto. Si $f : X \rightarrow Y$ es una función continua y suprayectiva, entonces Y es compacto.

Demostración. Como $f(X) = Y$ al aplicar el teorema anterior, Y es compacto. $\square$

Teorema 1.69. Sean X, Y espacios métricos con X conexo. Si $f : X \rightarrow Y$ es una función continua, entonces $f(X)$ es conexo.

Demostración. Con la finalidad de llegar a una contradicción supondremos que $f(X)$ es disconexo. Sea $(U \cap f(X), V \cap f(X))$ una separación de $f(X)$ con U, V abiertos de Y , ajenos. Como $U \cap f(X)$ y $V \cap f(X)$ son ajenos, tenemos que $X = f^{-1}[(U \cap f(X)) \cup (V \cap f(X))] = f^{-1}[U \cap f(X)] \cup f^{-1}[V \cap f(X)]$, entonces $(f^{-1}(U \cap f(X)), f^{-1}(V \cap f(X)))$ es una separación de X , lo cual es una contradicción pues X es conexo. Por lo tanto, $f(X)$ es conexo. $\square$

Corolario 1.70. Sean X, Y espacios métricos con X conexo. Si $f : X \rightarrow Y$ es una función continua y suprayectiva, entonces Y es conexo.

Demostración. Como $f(X) = Y$ al aplicar el teorema anterior, Y es conexo. $\square$

1.5. Homeomorfismos

Definición 1.71. Sean X, Y espacios métricos. Un **homeomorfismo** entre X y Y es una función $\phi : X \rightarrow Y$ la cual es biyectiva, continua y ϕ^{-1} es continua. Se dice que X es **homeomorfo** a Y si existe un homeomorfismo entre X y Y , este hecho será denotado como $X \simeq Y$.

Ejemplo 1.72. Los espacios $[0, 1]$ y $[a, b]$ con la métrica euclidiana son homeomorfos mediante $\phi : [0, 1] \rightarrow [a, b]$ definida para cada $x \in [0, 1]$ como $\phi(x) = a(1 - x) + bx$.

Más adelante veremos que este resultado nos ayudará a caracterizar la arcoconexidad de los espacios métricos de una manera más intuitiva.

Definición 1.73. La **esfera unitaria** de $\mathbb{R}^{n+1}$ es $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = 1\}$. Particularmente S^1 es llamado **circunferencia unitaria**.

Ejemplo 1.74. La circunferencia unitaria es homeomorfa a la frontera del cuadrado unitario mediante $f : S^1 \rightarrow \text{fr}_{\mathbb{R}^2}([0, 1]^2)$ definida como

$$f(x, y) = \left(\frac{x}{\max\{|x|, |y|\}}, \frac{y}{\max\{|x|, |y|\}} \right).$$

Lema 1.75. En $\mathbb{R}^n$ toda bola abierta es homeomorfa a $\mathbb{R}^n$.

Demostración. Sea $\bar{0} = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ y consideremos $\phi : B_{\mathbb{R}^n}(\bar{0}, 1) \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida como $\phi(x) = \frac{x}{1-d(x, \bar{0})}$ y la función $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow B_{\mathbb{R}^n}(\bar{0}, 1)$ definida como $\psi(y) = \frac{y}{1+d(\bar{0}, y)}$. Note que ϕ y ψ son funciones continuas tales que $\phi \circ \psi = \psi \circ \phi = Id_{\mathbb{R}^n}$, es decir, son biyectivas y ψ es función inversa de ϕ . Por lo tanto, $B_{\mathbb{R}^n}(\bar{0}, 1) \simeq \mathbb{R}^n$. $\square$

Capítulo 2

Encajes

Un encaje es, en esencia, una “copia fiel” de X dentro de Y . No sólo es una función inyectiva, sino que preserva la estructura de los conjuntos abiertos.

Definición 2.1. Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) espacios métricos. Una función $\varphi : X \rightarrow Y$ se denomina encaje (o embedding) si φ es un homeomorfismo sobre su imagen $\varphi(X) \subseteq Y$ (considerando en $\varphi(X)$ la métrica inducida por Y). En tal caso, decimos que X se puede encajar en Y mediante φ .

Ejemplo 2.2. 1. El anillo bidimensional $A = \{z \in \mathbb{R}^2 : r < \|z\| < R\}$ se puede encajar en $\mathbb{R}^2$.

2. El intervalo abierto $(0, 1)$ de $\mathbb{R}$ se encaja de forma natural en $[0, 1]$ mediante la inclusión $i(x) = x$.

3. El intervalo cerrado $[0, 1]$ puede ser encajado en $(0, 1)$ mediante una función afín φ , por ejemplo: $\varphi(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$.

Diferencia con la inyección continua: Es crucial notar que una función inyectiva y continua no es necesariamente un encaje. Para que lo sea, la inversa $\varphi^{-1} : \varphi(X) \rightarrow X$ también debe ser continua. Un ejemplo clásico es “enrollar” un intervalo semiabierto para formar una circunferencia en $\mathbb{R}^2$: la función es inyectiva y continua, pero no es un homeomorfismo sobre su imagen porque rompe la estructura cerca del punto de unión.

Definición 2.3. Se dice que una propiedad P de un espacio métrico X es una **propiedad topológica** si, para cualquier espacio métrico Y tal que X homeomorfo a Y , Y también posee la propiedad P .

Las propiedades topológicas son los “objetos de estudio” de la topología. Si una propiedad cambia al deformar el espacio (sin romperlo ni pegarlo), entonces no es topológica. Ejemplos y Contraejemplos: Es propiedad topológica: la separabilidad.

No son propiedades topológicas: El acotamiento y la completitud. (Por ejemplo, $(0, 1)$ es homeomorfo a $\mathbb{R}$, pero $(0, 1)$ está acotado y $\mathbb{R}$ no; $\mathbb{R}$ es completo y $(0, 1)$ no lo es con la métrica usual).

Por los corolarios 1.68 y 1.70, sabemos que la compacidad y la conexidad son propiedades topológicas. Para ilustrar el poder de este concepto, note que, si X puede ser encajado en Y y Y encajado en X , no necesariamente $X \simeq Y$. Basta con recordar que $[0, 1]$ es compacto y, por ser una propiedad topológica, $[0, 1]$ no es homeomorfo a $(0, 1)$.

Teorema 2.4. Sean X y Y espacios métricos con X compacto. Si $f : X \rightarrow Y$ es continua e inyectiva, entonces $X \simeq f(X)$.

Demostración. Consideremos $h : X \rightarrow f(X)$ con $h = f$. Como f es inyectiva, h es sobreyectiva y continua. Veamos que $h^{-1} : f(X) \rightarrow X$ es continua. Sea U un abierto de X , entonces $X \setminus U$ es cerrado de X . Por el teorema 1.27, $X \setminus U$ es compacto. Como f es continua, $f(X \setminus U)$ es compacto por el teorema 1.67 y, por consiguiente, cerrado de $f(X)$. De modo que $f(X) \setminus f(X \setminus U) = f(U)$ es abierto de $f(X)$. Así, h^{-1} es continua. Por lo tanto $X \simeq f(X)$. $\square$

2.1. Encajes entre continuos

Definición 2.5. Sea X un espacio métrico. Se dice que X es un **continuo** si es compacto, conexo y no degenerado (es decir, con más de un punto).

Definición 2.6. Sean X un continuo y $Y \subseteq X$. Se dice Y es un **subcontinuo** de X si Y es compacto y conexo. Si además $Y \neq X$, se dice que Y es **subcontinuo propio** de X .

Teorema 2.7. La propiedad de ser continuo es una propiedad topológica.

Demostración. Sea $\phi : X \rightarrow Y$ un homeomorfismo entre los espacios (X, τ_{d_X}) y (Y, τ_Y) , donde (X, τ_{d_X}) es un continuo.

Veamos que Y es un espacio métrico.

Para esto, sea τ_{d_X} la topología inducida por la métrica d_X para X . Consideremos $d_Y : Y \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $d_Y(x, y) = d_X(\phi^{-1}(x), \phi^{-1}(y))$ para cada $x, y \in Y$. Note que para cualesquiera $x, y, z \in Y$ sucede que $d_Y(x, y) \geq 0$, $d_Y(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$, y $d_Y(x, y) \leq d_Y(x, z) + d_Y(z, y)$ por la forma en que se definió. Es decir, es una métrica para Y . Veamos que $\tau_Y = \tau_{d_Y}$. Para esto demostraremos que cualquier bola abierta de Y con la métrica propuesta es un elemento de τ_Y . Sean $x \in X$ y

$\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ y consideremos $B(x, \varepsilon) \in \tau_{d_X}$, así:

$$\begin{aligned}\phi[B_X(x, \varepsilon)] &= \{\phi(y) \mid y \in B_X(x, \varepsilon)\} \\ &= \{\phi(y) \mid d_X(x, y) < \varepsilon\} \\ &= \{\phi(y) \mid d_Y(\phi(x), \phi(y)) < \varepsilon\} \\ &= B_Y(\phi(x), \varepsilon),\end{aligned}$$

es decir, cualquier bola abierta en X es una bola en Y . Además, por ser ϕ un homeomorfismo, tenemos que $B_Y(\phi(x), \varepsilon) \in \tau_Y$. De modo que $\tau_Y = \tau_{d_Y}$. Por lo tanto, Y es un espacio métrico.

Sabemos que ϕ es continua y suprayectiva. Por corolario 1.68 y corolario 1.70 respectivamente, concluimos que Y es compacto y conexo. Así, Y es un continuo. $\square$

Definición 2.8. Se dice que X es un arco si es homeomorfo a $[0, 1]$ con la métrica euclidiana.

Teorema 2.9. Todo arco es un continuo.

Demostración. Sea $[0, 1]$ con la métrica euclidiana. Por el teorema de Heine-Borel, el espacio es compacto. Además, por el corolario 1.58, $[0, 1]$ es conexo. Así, $[0, 1]$ es un continuo. Luego, por el teorema 2.7, todo arco es un continuo. $\square$

Lema 2.10. Todo subcontinuo de un arco, no degenerado, es un arco.

Demostración. Sea el arco $[0, 1]$ y X un subcontinuo no degenerado de él. Como $X \subseteq [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ tenemos que existen $x, y \in [0, 1]$ tales que $x = \min(X)$, $y = \max(X)$ y $a < b$ (por ser no degenerado). Por ser $[0, 1]$ convexo, existe un segmento $[x, y]$ en $[0, 1]$ que une a x con y , de modo que $X = [x, y]$, el cual es compacto, conexo y no degenerado. $\square$

Definición 2.11. Un espacio métrico conexo X es una **gráfica finita conexa** si puede escribirse como la unión de una cantidad finita de arcos tales que cualesquiera dos de ellos son ajenos o se intersectan en uno o ambos puntos extremos.

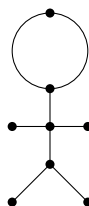


Figura 2.1: Ejemplo de gráfica finita conexa.

Teorema 2.12. Toda gráfica finita conexa es un continuo.

Demostración. Sean X una gráfica finita conexa, $n \in \mathbb{N}$ y $\{A_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ es una familia finita de arcos tales que cualesquiera dos de ellos son ajenos o se intersectan en uno o ambos puntos extremos, de modo que $X = \bigcup_{i=1}^n A_i$. Como X es un espacio métrico conexo, sólo resta ver que es compacto.

Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X y definamos para cada $i \leq n$ la familia $\mathcal{U}_i = \{U \in \mathcal{U} \mid U \cap A_i \neq \emptyset\}$, es decir, $\mathcal{U}_i$ es una cubierta abierta del arco A_i . Como cada arco es compacto, cada $\mathcal{U}_i$ tiene un refinamiento finito $\mathcal{V}_i$ que es una cubierta abierta de A_i . Así $\mathcal{V} = \{U \in \mathcal{V}_i \mid i \leq i \leq n\}$ es una subcubierta finita de X .

Por lo tanto, X es compacto y por consiguiente, es un continuo. $\square$

Teorema 2.13. Las n -celdas son continuos.

Demostración. Sea X un n -celda. Por Heine-Borel X es compacto. Note que X es convexo, entonces por el teorema 1.57, es conexo. Por lo tanto, toda n -celda es un continuo. $\square$

Definición 2.14. Sea $\{X_\alpha \mid \alpha \in I\}$ una familia de conjuntos no vacíos indizado por I . Definimos al **producto cartesiano** como:

$$\prod_{\alpha \in I} X_\alpha = \{f : I \rightarrow \bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha \mid \forall \alpha \in I : f(\alpha) \in X_\alpha\}.$$

Definición 2.15. Sea $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ el producto cartesiano de una familia de conjuntos no vacíos. Para cada $\beta \in I$ definimos

$$\pi_\beta : \prod_{\alpha \in I} X_\alpha \rightarrow X_\beta \quad \text{como} \quad \pi_\beta(f) = f(\beta).$$

Llamaremos a π_β la **proyección** de la β -ésima coordenada.

Definición 2.16. Sea τ es una topología para un conjunto X , diremos que (X, τ) es un **espacio topológico**.

Note que si d es una métrica para un conjunto no vacío X , entonces $\tau_d = \{A \subseteq X \mid a \in A \Rightarrow \exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ : B_X(a, \varepsilon) \subseteq A\} \cup \{\emptyset\}$ es una topología para X . En este caso se dice τ_d es la topología inducida por la métrica d , de modo que todo espacio métrico es un espacio topológico. Además, a los elementos de τ también se les llamará conjuntos abiertos de X .

Definición 2.17. Sea $\{(X_\alpha, \tau_\alpha) \mid \alpha \in I\}$ una familia de espacios topológicos y $X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$. Definimos la **topología producto** en X como $\tau_\pi = \bigcap \mathcal{T}$ con $\mathcal{T}$ definida como sigue:

$$\mathcal{T} = \{\tau \subseteq \mathcal{P}(X) \mid (X, \tau) \text{ es espacio topológico y } \forall \beta \in I, \pi_\beta \text{ es continua}\}$$

Note que si $U_\gamma \in \tau_\gamma$, entonces $U_\gamma \times \prod_{\alpha \in I \setminus \{\gamma\}} X_\alpha = \pi_\gamma^{-1}(U_\gamma) \in \tau_\pi$. Es más, si J es un subconjunto finito de I y por ser (X, τ_π) un espacio topológico, $\bigcap_{\alpha \in J} \pi_\alpha^{-1}(U_\alpha) = \prod_{\alpha \in J} U_\alpha \times \prod_{\alpha \in I \setminus J} X_\alpha \in \tau_\pi$.

Así que es correcto asumir que los abiertos de X con la topología producto son (en principio) de la forma $\prod_{\alpha \in J} U_\alpha \times \prod_{\alpha \in I \setminus J} X_\alpha$ con $U_\alpha \in \tau_\alpha$ para cada $\alpha \in J$.

Proposición 2.18. Sean $\{(X_n, d_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ una familia numerable de espacios métricos y $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$. La función d definida para cada $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}, y = (y_n)_{n=1}^{\infty} \in X$ como $d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\min\{d_n(x_n, y_n), 1\}}{2^n}$ es una métrica para X .

Demostración. Note que $d_n(x_n, y_n) \geq 0$ para $n \in \mathbb{N}$, luego $0 \leq \min\{d_n(x_n, y_n), 1\} \leq 1$. Es más, $0 \leq \frac{\min\{d_n(x_n, y_n), 1\}}{2^n} \leq \frac{1}{2^n}$ implica $0 \leq d(x, y) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$, es decir, d está bien definida y es no negativa.

Ahora, $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\min\{d_n(x_n, y_n), 1\}}{2^n} = 0 \Leftrightarrow \frac{\min\{d_n(x_n, y_n), 1\}}{2^n} = 0 \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \min\{d_n(x_n, y_n), 1\} = 0 \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow d_n(x_n, y_n) = 0 \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow x_n = y_n \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow x = y$.

Por último

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\min\{d_n(x_n, y_n), 1\}}{2^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\min\{d_n(x_n, z_n), 1\} + \min\{d_n(z_n, y_n), 1\}}{2^n} \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\min\{d_n(x_n, z_n), 1\}}{2^n} + \frac{\min\{d_n(z_n, y_n), 1\}}{2^n} \right) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\min\{d_n(x_n, z_n), 1\}}{2^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\min\{d_n(z_n, y_n), 1\}}{2^n} \leq d(x, z) + d(z, y). \end{aligned}$$

Por lo tanto, d es una métrica para X . $\square$

Teorema 2.19. Sean $\{(X_n, d_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ una familia numerable de espacios métricos y $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$. La topología producto para X coincide con la topología inducida por la métrica d definida como en 2.18.

Demostración. Demostaremos que $\tau_\pi = \tau_d$.

($\subseteq$) Sean $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X$ y un abierto $U = \prod_{\alpha \in J} U_\alpha \times \prod_{\alpha \in \mathbb{N} \setminus J} X_\alpha$ en τ_π donde J es finito y cada U_α es un abierto de X_α . Supongamos que $x \in U$ y veamos que existe una bola centrada en x contenida en U .

Note que para cada $\alpha \in J$ existe $\varepsilon_\alpha > 0$ tal que $B_{d_\alpha}(x_\alpha, \varepsilon_\alpha) \subseteq U_\alpha$. Tomemos $\varepsilon = \min\left\{\frac{\varepsilon_\alpha}{2^\alpha} \mid \alpha \in J\right\}$. Afirmamos que $B_d(x, \varepsilon) \subseteq U$. En efecto, para esto consideremos $y \in B_d(x, \varepsilon)$ de modo que $d(x, y) < \varepsilon$. Así, para cualquier $\alpha \in J$ sucede que:

$$\frac{\min\{d_\alpha(x_\alpha, y_\alpha), 1\}}{2^\alpha} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\min\{d_n(x_n, y_n)\}}{2^n} = d(x, y) < \varepsilon \leq \frac{\varepsilon_\alpha}{2^\alpha}$$

Esto implica que $\min\{d_\alpha(x_\alpha, y_\alpha), 1\} \leq \varepsilon_\alpha$ y como $\varepsilon_\alpha \leq 1$, tenemos que $d_\alpha(x_\alpha, y_\alpha) < \varepsilon_\alpha$ para cada $\alpha \in J$. Luego, si $\alpha \in J$, entonces $y_\alpha \in B_{d_\alpha}(x_\alpha, \varepsilon_\alpha)$. Por otra parte, si $\alpha \in \mathbb{N} \setminus J$, entonces $U_\alpha = X_\alpha$. Así, $B_d(x, \varepsilon) \subseteq U$.

($\supseteq$) Sean $x = (x_n)_{n=1}^\infty \in X$ y $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=N+1}^\infty \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^N} < \frac{\varepsilon}{2}$. Para cada $n = 1, 2, \dots, N$ definimos:

$$U_n = \left\{ y_n \in X_n \mid \min\{d_n(x_n, y_n), 1\} < \frac{\varepsilon}{2} \right\}$$

para construir un abierto de X de la siguiente forma $U = \prod_{n=1}^N U_n \times \prod_{n=N+1}^\infty X_n$. Es evidente que $x \in U$, es decir, U es un abierto de X que contiene a x . Veamos que $U \subseteq B_d(x, \varepsilon)$. Para esto, note que si $y \in U$, entonces:

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \sum_{n=1}^\infty \frac{\min\{d_n(x_n, y_n), 1\}}{2^n} \\ &= \sum_{n=1}^N \left(\frac{\min\{d_n(x_n, y_n), 1\}}{2^n} \right) + \sum_{n=N+1}^\infty \left(\frac{\min\{d_n(x_n, y_n), 1\}}{2^n} \right) \\ &\leq \sum_{n=1}^N \left(\frac{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}{2^n} \right) + \sum_{n=N+1}^\infty \frac{1}{2^n} \leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{2^n} \right) + \frac{1}{2^N} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Así, $U \subseteq B_d(x, \varepsilon)$. Por lo tanto, $\tau_\pi = \tau_d$. □

Teorema 2.20 (de Tychonoff). [10, Teorema 37.3, pág. 267] El producto de compactos es compacto con la topología producto.

Teorema 2.21. [3, Teorema 6.1.15, pág. 354] El producto de conexos es conexo con la topología producto.

Definición 2.22. El **toro** es el espacio $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$.

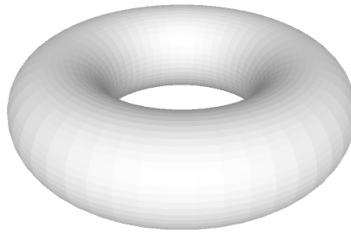


Figura 2.2: Toro $\mathbb{T}^2$.

Teorema 2.23. El toro es un continuo.

Demostración. Se sigue del teorema de Tychonoff y el teorema 2.21. $\square$

Definición 2.24. Sea $[0, \infty)$ con la métrica euclidiana. El rayo es un espacio homeomorfo a $[0, \infty)$.

Note que el rayo es conexo.

Proposición 2.25. Los espacios $[0, 1]$ y $(0, 1]$ son homeomorfos al rayo.

Demostración. Consideremos $f(x) = \frac{x}{x+1}$, $g(x) = 1-x$ y $h(x) = \frac{1}{x} - 1$ de la siguiente forma:

$$[0, \infty) \xrightarrow{f} [0, 1) \xrightarrow{g} (0, 1] \xrightarrow{h} [0, \infty).$$

Note que son continuas (por la existencia de la derivada), biyectivas y de inversa continua (bajo el mismo argumento de la derivada). Por lo tanto, son homeomorfos. $\square$

Definición 2.26. Un espacio métrico compacto X es una **compactación del rayo** si contiene un subconjunto S denso en X homeomorfo a un rayo. Llamaremos residuo de X al conjunto $R = X \setminus S$.

Teorema 2.27. Toda compactación del rayo es un continuo.

Demostración. Sea X una compactación del rayo, con S denso en X y homeomorfo a un rayo. Por construcción X es un espacio métrico compacto. Veamos que X es conexo. Como S es conexo y denso en X , por el teorema 1.49 $\text{cl}_X(S) = X$ es conexo. Por lo tanto, X es un continuo. $\square$

Proposición 2.28. La cerradura en $\mathbb{R}^2$ de la gráfica de la función $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ con $x \in (0, 1]$ es una compactación del rayo con residuo $R = \{0\} \times [-1, 1]$.

Definición 2.29. La cerradura en $\mathbb{R}^2$ de la gráfica de la función $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ con $x \in (0, 1]$ es conocida como la **curva del topólogo**.

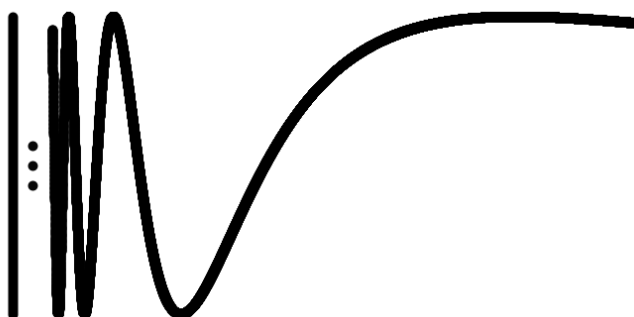


Figura 2.3: Curva del topólogo.

Notemos que la curva seno del topólogo no es localmente conexo pero sí es un espacio conexo.

Definición 2.30. Si consideramos a Y como la curva seno del topólogo y unimos los puntos $(0, -1)$ y $(1, \sin(1))$ mediante un arco A en $\mathbb{R}^2$ de modo que $Y \cap A = \{(0, -1), (1, \sin(1))\}$, entonces $X = Y \cup A$ es el **círculo de Varsovia**.

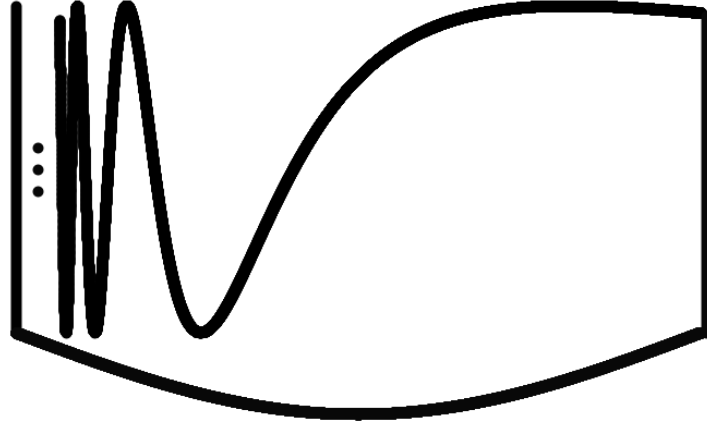


Figura 2.4: Círculo de Varsovia.

Teorema 2.31. El círculo de Varsovia es un continuo.

Demostración. Sea X el círculo de Varsovia, sabemos por Heine-Borel que X es compacto. Como X es arco-conexo, concluimos que X es un continuo. $\square$

Teorema 2.32. Sean X un continuo y $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subcontinuos de X tales que $A_1 \supset A_2 \supset \dots$. Muestre que $A = A_1 \cap A_2 \cap \dots$ es un subcontinuo de X .

Demostración. Por el teorema 1.28, A es compacto y no vacío. Para demostrar que A es conexo, supongamos lo contrario, que existen dos cerrados de A ajenos no vacíos K y L tales que $A = K \cup L$. Sean U y V abiertos ajenos de X tales que $K \subseteq U$ y $L \subseteq V$. Note que

$$X \setminus (U \cap V) \subseteq X \setminus (K \cup L) = X \setminus A = X \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (X \setminus A_n).$$

Así, la familia $\{X \setminus A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ es una cubierta abierta del conjunto compacto $X \setminus (U \cap V)$. De modo que existe $k, n_1, n_2, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ tal que

$$X \setminus (U \cap V) \subseteq \bigcup_{i=1}^k (X \setminus A_{n_i}) = X \setminus \bigcap_{i=1}^k A_{n_i}$$

Tomemos $m = \max\{n_1, n_2, \dots, n_k\}$, entonces

$X \setminus \bigcap_{i=1}^k A_{n_i} = X \setminus A_m$. Así, $A_m \subseteq U \cup V$. Note que $A_m = (U \cap A_m) \cup (V \cap A_m)$. Es más, $U \cap A_m$ y $V \cap A_m$ son abiertos de A , ajenos. Como $K \subseteq U \cap A_m$ y $L \subseteq V \cap A_m$,

entonces $U \cap A_m$ y $V \cap A_m$ son no vacíos. Es decir que tenemos una separación de A_m . Pero esto contradice la condición de conexidad de A_m . Por lo tanto, A es conexo. $\square$

Definición 2.33. Sea un triángulo cerrado y convexo T_1 en el plano $\mathbb{R}^2$ y consideremos los siguientes cuatro triángulos determinados por la unión de los puntos medios de los bordes de T_1 , y sea T_2 el continuo obtenido de remover el interior del triángulo central. De esta manera tenemos que T_2 es la unión de 3 triángulos convexos. Repitiendo el procedimiento para cada uno de los triángulos en T_2 obtenemos el continuo T_3 . Continuando de esta manera construiremos $T_4, T_5, \dots$. El **triángulo de Sierpiński** está definido por $\bigcap_{n=1}^{\infty} T_n$.

Definición 2.34. Consideremos un cuadrado $C_1 = [0, 1]^2$. Tomemos la partición P en C_1 inducida por la partición $0 < \frac{1}{3} < \frac{2}{3} < 1$ en $[0, 1]$. Entonces C_1 está descompuesto en nueve cuadrados. Quitamos el interior del cuadrado del centro y así obtenemos C_2 . Esto es, $C_2 = C_1 \setminus ((\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \times (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}))$.

Así, C_2 es la unión de ocho cuadrados pequeños de área $(\frac{1}{3})^2$, inducidos por P . Repitiendo este procedimiento en cada uno de los ocho cuadrados obtenemos C_3 . Entonces C_3 es la unión de 64 cuadrados pequeños de área $(\frac{1}{9})^2$. Continuando este procedimiento obtenemos una sucesión de subcontinuos $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ en el plano $\mathbb{R}^2$ tal que $C_1 \supset C_2 \supset \dots$. La **alfombra de Sierpiński** está definida como $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$.

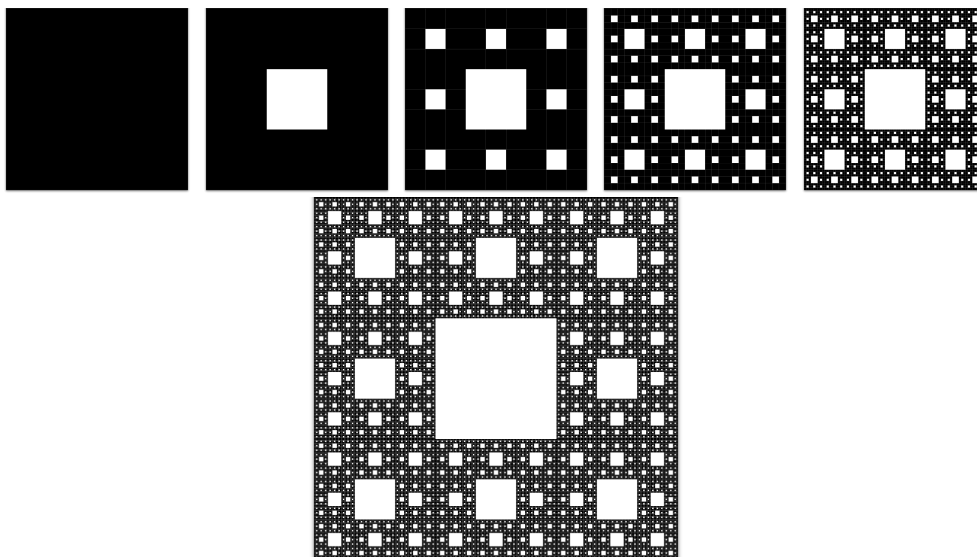


Figura 2.5: Construcción de la Alfombra de Sierpiński.

Definición 2.35. La **esponja de Menger** tiene una construcción similar a la alfombra de Sierpiński pero comenzando con $[0, 1]^3$ en lugar de $[0, 1]^2$. La construcción es como sigue. Sea $E_1 = [0, 1]^3$. Dividamos E_1 con planos paralelo a sus caras en

27 cubos iguales. Quitemos el cubo central D y todos los cubos de la subdivisión que comparten una cara bidimensional con D . De esta manera obtenemos E_2 , el cual consiste de 20 cubos pequeños y cerrados. Repitiendo exactamente el mismo procedimiento para cada uno de los 20 subos obtenemos el subcontinuo E_3 de E_2 el cual es unión de 400 subos pequeños. Continuando de forma recursiva, obtenemos una sucesión de continuos $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $E_1 \supset E_2 \supset \dots$. Definimos la **esponja de Menger** como $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ denotada como M_1^3 .

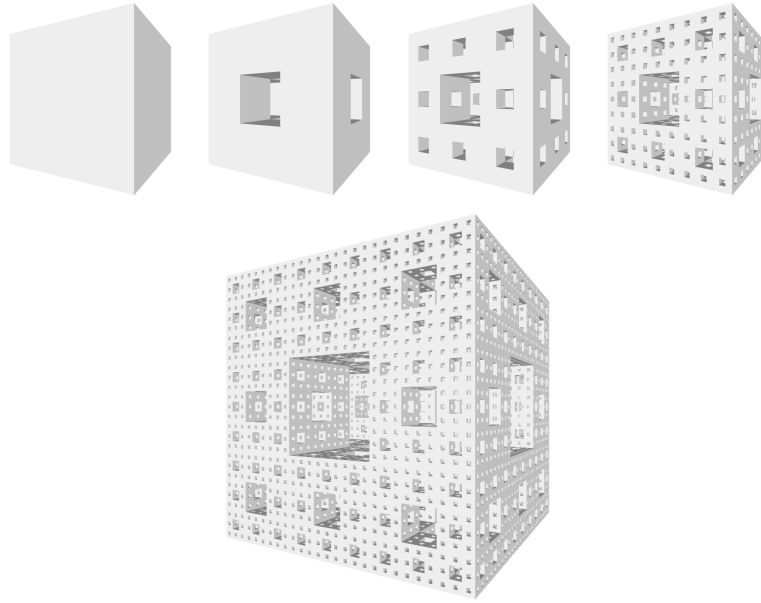


Figura 2.6: Construcción de la Esponja de Menger M_1^3 .

Corolario 2.36. El triángulo de Sierpiński, la alfombra de Sierpiński y la esponja de Menger son continuos.

Demostración. Se sigue de 2.32. □

Proposición 2.37. Sea $x \in S^1$. Si $\varepsilon \in (0, 2]$, entonces $S^1 \setminus B_{S^1}(x, \varepsilon)$ es un arco o un punto.

Demostración. Para cada $x \in S^1$, sabemos que $B_{S^1}(x, \varepsilon) = S^1 \cap B_{\mathbb{R}^2}(x, \varepsilon)$. Como S^1 y $B_{\mathbb{R}^2}(x, \varepsilon)$ son conexos de $\mathbb{R}^2$ cuya intersección no es vacía, entonces $B_{S^1}(x, \varepsilon)$ es un abierto de S^1 , conexo. Notemos que $|\text{fr}_{S^1}(B_{S^1}(x, \varepsilon))| \leq 2$. Si $\varepsilon = 2$, entonces $\text{fr}_{S^1}(B_{S^1}(x, \varepsilon)) = \{w\} \subseteq S^1$; es decir, $S^1 \setminus B_{S^1}(x, \varepsilon)$ es un punto. Por otra parte, si $\varepsilon < 2$, entonces $\text{fr}_{S^1}(B_{S^1}(x, \varepsilon)) = \{a, b\} \subseteq S^1$. Cada punto de S^1 pertenece a la imagen de la función $f : [0, 2\pi) \rightarrow S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$ definida como $f(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$, de modo que x, a, b tienen asociado $\theta_x, \theta_a, \theta_b \in [0, 2\pi)$, respectivamente, tales que $x = f(\theta_x), a = f(\theta_a), b = f(\theta_b)$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\theta_a > \theta_b$. Consideremos la función continua e inyectiva $g : [0, 1] \rightarrow S^1$ definida como $g(\theta) = f(\theta_a(1 - \theta) + \theta_b\theta)$

si $\theta_y < \theta_a < \theta_b$; de otro modo, será definida como $g(\theta) = f(\theta_b(1 - \theta) + \theta_a\theta)$. Así, $S^1 \setminus B_{S^1}(x, \varepsilon)$ es un arco. $\square$

Definición 2.38. Un espacio métrico X es una **curva cerrada simple** si es homeomorfo a S^1 .

Teorema 2.39. Las curvas cerradas simples no pueden encajarse en el arco.

Demostración. Supongamos que $\phi : S^1 \rightarrow A \subseteq [0, 1]$ es un homeomorfismo. Como S^1 es un continuo, A también lo es. Por el lema 2.10, A es un subcontinuo no degenerado de $[0, 1]$; entonces, digamos que es de la forma $[x, y]$ con $x, y \in [0, 1]$. Tomemos $\frac{x+y}{2} \in A$, de modo que $A \setminus \{\frac{x+y}{2}\}$ es desconexo; entonces, $S^1 \setminus \{\phi^{-1}(\frac{x+y}{2})\}$ también debe serlo. Pero esto es una contradicción. Pues $B_{\mathbb{R}^2}(z, 2) = S^1 \setminus \{\phi^{-1}(\frac{x+y}{2})\}$ con z tal que $d(z, \phi^{-1}(\frac{x+y}{2})) = 2$ es conexo. Por lo tanto, S^1 no puede encajarse en el arco. $\square$

Otra forma de ver este teorema es que ningún arco contiene curvas cerradas simples. Además S^1 y $[0, 1]$ no son homeomorfos.

Capítulo 3

Continuos universales

Dentro de la **Teoría de Continuos**, el concepto de elemento universal es esencial, ya que funciona como un “contenedor” o “estructura principal” que alberga a todos los miembros de una determinada clase.

Definición 3.1. Sea $\mathcal{C}$ una familia (o clase) de continuos. Decimos que un continuo U es **universal** para la familia (o clase) $\mathcal{C}$ si se cumplen las siguientes condiciones:

1. El continuo U pertenece a la clase $\mathcal{C}$ (o a una clase que la contiene).
2. Para cualquier continuo $X \in \mathcal{C}$, existe un subconjunto $K \subseteq U$ tal que $X \simeq K$.

En términos sencillos, un continuo es universal para cierta familia (o clase) de continuos si contiene una copia de cada uno de los elementos de su familia. Por ejemplo, la esponja de Menger (M_1^3) es un espacio universal para la clase de todos los espacios métricos compactos de dimensión no mayor a 1 [2, Teorema 1.11.7], como lo es el arco o la circunferencia S^1 .

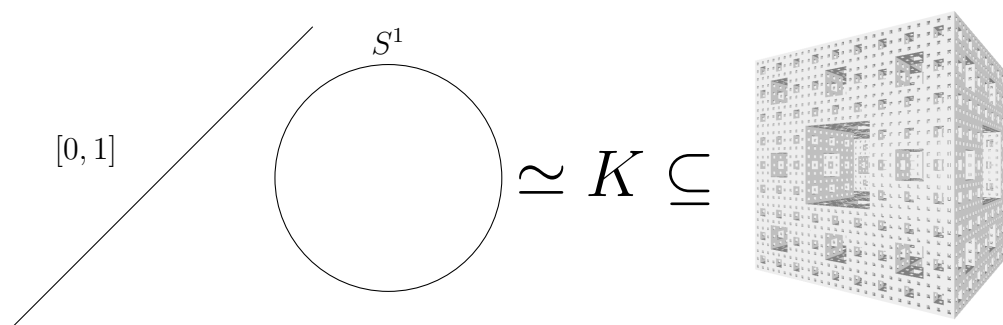


Figura 3.1: Ilustración de universalidad de la esponja de Menger.

La universalidad de estos continuos no es un mero rasgo técnico, es la propiedad que lo sitúa como un objeto canónico dentro de la topología métrica, capaz de contener de manera fiel y controlada la complejidad de todos los espacios de su clase.

En este capítulo veremos algunos continuos universales para clases específicas de continuos.

Definición 3.2. Una **dendrita** es un continuo localmente conexo que no contiene curvas cerradas simples.

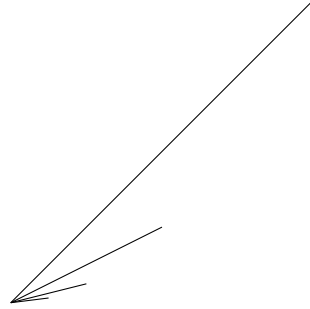
Teorema 3.3. El arco es una dendrita.

Demostración. Se sigue del ejemplo 1.61 y del teorema 2.39. $\square$

Ejemplo 3.4. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $\left[(0, 0), \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right)\right]$ el segmento de recta en $\mathbb{R}^2$ que va de $(0, 0)$ a $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right)$.

Sea

$$F_\omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[(0, 0), \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2} \right) \right].$$



Este continuo es una dendrita y la denotaremos precisamente como F_ω .

Veamos que existe una dendrita universal en la clase de las dendritas. Para esto, primero veamos la noción de límite inverso y algunos resultados que nos son de utilidad.

Definición 3.5. Sea $\{X_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ una familia numerable de espacios métricos. Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos $f_n^{n+1} : X_{n+1} \rightarrow X_n$ continua. La sucesión $\{X_n, f_n^{n+1}\}$ de espacios y funciones es llamada **sucesión inversa**.

A los espacios X_n se les conoce como **espacios coordinados** y las funciones f_n^{n+1} son llamadas **funciones de ligadura**.

Esta construcción sigue el siguiente esquema:

$$X_1 \xleftarrow{f_1^2} X_2 \xleftarrow{f_2^3} X_3 \xleftarrow{f_3^4} \cdots \xleftarrow{f_{n-1}^n} X_n \xleftarrow{f_n^{n+1}} X_{n+1} \xleftarrow{f_{n+1}^{n+2}} \cdots$$

Además, si $n > m$ usaremos la siguiente notación: $f_m^n = f_m^{m+1} \circ \cdots \circ f_{n-1}^n$ y $f_n^n = Id_{X_n}$ (función identidad en X_n).

Definición 3.6. Sea $\{X_n, f_n^{n+1}\}$ una sucesión inversa. El **límite inverso** de $\{X_n, f_n^{n+1}\}$ es el subespacio del producto cartesiano $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ definido como

$$\varprojlim \{X_n, f_n^{n+1}\} = \left\{ (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n \mid f_n^{n+1}(x_{n+1}) = x_n, \forall n \in \mathbb{N} \right\}$$

Note que $\varprojlim \{X_n, f_n^{n+1}\}$ es un espacio métrico.

Definición 3.7. Para cada $m \in \mathbb{N}$ las funciones $f_{(m)} : \varprojlim \{X_n, f_n^{n+1}\} \rightarrow X_m$ definidas como $f_{(m)} = \pi_m|_{\varprojlim \{X_n, f_n^{n+1}\}}$ las llamaremos **funciones proyección del límite inverso**.

Note que $f_n^{n+1} \circ f_{(n+1)} = f_{(n)}$.

Proposición 3.8. Cada f_n^{n+1} es suprayectiva si y sólo si las proyecciones $f_{(n)}$ son suprayectivas.

Demostración. $(\Rightarrow)$ Supongamos que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f_{(k)}$ no es suprayectiva. Sea $y \in X_k$ tal que para cada $x \in \varprojlim \{X_n, f_n^{n+1}\}$, sucede que $f_{(k)}(x) \neq y$. Por la suprayectividad de las f_n^{n+1} , para cada $m > k$ existe $w_m \in X_m$ tal que $f_k^m(w_m) = y$. De modo que, para cada $i > k$ definimos $x_i = w_i$. Consideremos a $x \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ definido como

$$x = (x_n)_{n=1}^{\infty} = \begin{cases} f_n^k(y) & , \text{ si } n \leq k \\ w_n & , \text{ si } k < n \end{cases}$$

Note que $x \in \varprojlim \{X_n, f_n^{n+1}\}$ y $f_{(k)}(x) = \pi_k(x) = y$, lo cual contradice nuestra suposición. Por lo tanto, las funciones $f_{(n)}$ son suprayectivas.

$(\Leftarrow)$ Sean $f_{(n)}$ suprayectivas y supongamos que existe $y \in X_k$ tal que para cada $w \in X_{k+1}$ sucede que $f_k^{k+1}(w) \neq y$. Por ser $f_{(k)}$ suprayectiva, si $y \in X_k$, entonces existe $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \varprojlim \{X_n, f_n^{n+1}\}$ tal que $f_{(k)}(x) = y$. Por la definición de límite inverso, x satisface que para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n^{n+1}(x_{n+1}) = x_n$, en particular se satisface $f_k^{k+1}(x_{k+1}) = y$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, cada f_n^{n+1} es suprayectiva. $\square$

Teorema 3.9. [11, Teorema 2.10] Sean (X, d) un espacio métrico y $\{X_n, f_n^{n+1}\}$ una sucesión inversa tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que X_n es un subconjunto compacto no vacío de X y cada f_n^{n+1} es suprayectiva. Si se cumplen las siguientes afirmaciones:

- (a) Para todo $\varepsilon > 0$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que para cualquier $p \in X_k$ sucede que $\text{diám} \left(\bigcup_{i=k+1}^{\infty} (f_k^i)^{-1}(p) \right) < \varepsilon$.
- (b) Para cualesquiera $j \in \mathbb{N}$ y $\delta > 0$ existe δ' tal que si $i > j$ y $p, q \in X_i$ son tales que $d(f_j^i(p), f_j^i(q)) > \delta$ entonces $d(p, q) > \delta'$.

Entonces $\varprojlim \{X_n, f_n^{n+1}\} \simeq \bigcap_{n=1}^{\infty} \left[\text{cl}_X \left(\bigcup_{i=n}^{\infty} X_i \right) \right]$. En particular, si para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $X_n \subseteq X_{n+1}$ entonces $\varprojlim \{X_n, f_n^{n+1}\} \simeq \text{cl}_X \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \right)$.

Definición 3.10. Sean X y Y espacios métricos. Una función $f : X \rightarrow Y$ es **monótona** si f es continua y para cada $y \in Y$, tenemos que $f^{-1}(y)$ es conexo.

Lema 3.11. [11, Teorema 10.36] Todo límite inverso de dendritas con funciones de ligadura monótonas es una dendrita.

Veamos la siguiente noción que nos será de utilidad para construir una dendrita, que llamamos D_{∞} y que más adelante veamos que es universal en la clase de las dendritas.

Definición 3.12. Sea $c \in \mathbb{R}^2$. Una **estrella con centro en c y rayos B_i** es $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$, donde para cada $i \in \mathbb{N}$, tenemos que B_i es un arco convexo en $\mathbb{R}^2$ tal que c es uno de sus puntos extremos, $\text{diám}(B_i) \rightarrow 0$ cuando $i \rightarrow \infty$ y $B_i \cap B_j = \{c\}$, si $i \neq j$.

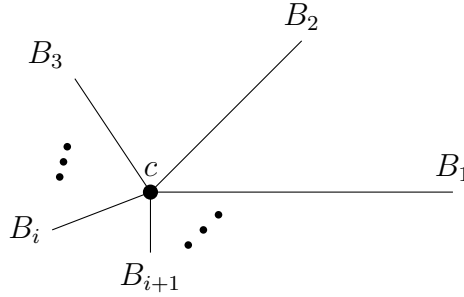


Figura 3.2: Estrella con centro en c y rayos B_i .

Definición 3.13 (Dendrita Universal de Wazewski). Construyamos el espacio D_{∞} de la siguiente forma. Primero consideremos $c \in \mathbb{R}^2$ y D_1 es una estrella con centro c y rayos B_i .

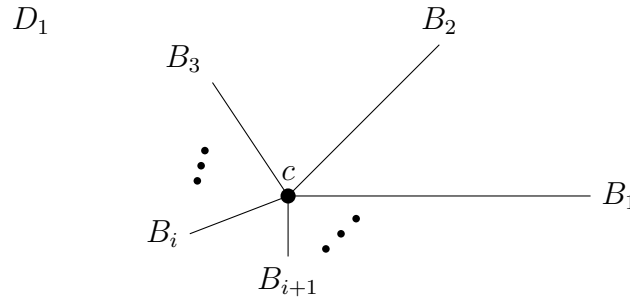


Figura 3.3: Representación de D_1 .

Para cada $i \in \mathbb{N}$ sean m_i el punto medio de cada arco B_i de D_1 y S_i una estrella con centro en m_i tal que $S_i \cap B_i = S_i \cap D_1 = \{m_i\}$, $\text{diám}(S_i) \rightarrow 0$ cuando $i \rightarrow \infty$ y $S_i \cap S_j = \emptyset$ si $i \neq j$.

Así, construimos $D_2 = D_1 \cup \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i \right)$.

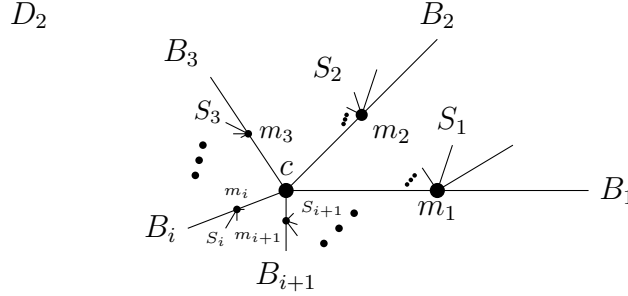


Figura 3.4: Representación de D_2 .

De manera similar, para cada $i \in \mathbb{N}$ añadimos una estrella con centro en cada punto medio del subarco B_i que va de c a m_i y otra estrella con centro en cada punto medio del subarco B_i que va de m_i al extremo de B_i que no es c . También para cada $j \in \mathbb{N}$ ponemos una estrella en el punto medio de las estrellas S_j cuidando que las nuevas estrellas sean ajenas dos a dos, que intersecten a D_2 sólo en sus respectivos centros y que sus diámetros tiendan a cero cuando $j \rightarrow \infty$. Siguiendo la misma idea, recursivamente construimos los D_n para cada $n \in \mathbb{N}$.

Notemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que D_n es una dendrita y $D_n \subseteq D_{n+1}$. Así, para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n^{n+1} : D_{n+1} \rightarrow D_n$ será una función definida para cada $x \in D_{n+1}$ por:

$$f_n^{n+1}(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in D_n \\ m_j, & \text{si } x \in S_j \text{ donde para cada } j \in \mathbb{N} \text{ tenemos que} \\ & S_j^i \text{ es una estrella agregada a } D_i. \end{cases}$$

Notemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que f_n^{n+1} es una función monótona. Es más, para cualesquiera $n, k \in \mathbb{N}$ tales que $n > k$ tenemos que f_k^n es monótona.

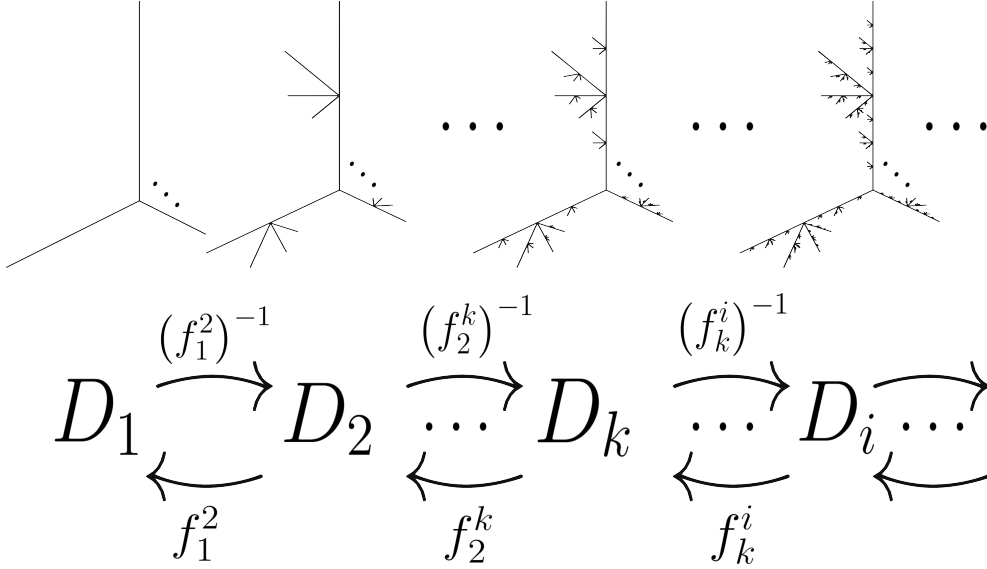
Así, la **dendrita univesal de Wazewski** es

$$D_\infty = \varprojlim \{D_n, f_n^{n+1}\}.$$

Proposición 3.14. El espacio D_∞ es una dendrita.

Demostración. Sea $D_\infty = \varprojlim \{D_n, f_n^{n+1}\}$. Como las funciones de ligadura son monótonas, por el lema 3.11, D_∞ es una dendrita. $\square$

Teorema 3.15. D_∞ puede encajarse en $\mathbb{R}^2$.

Figura 3.5: Diagrama de la construcción de D_∞ .

Demostración. Sea $D_\infty = \varprojlim \{D_n, f_n^{n+1}\}$. Queremos usar el teorema 3.9. Para esto veamos que se cumplen las condiciones (a) y (b).

Para (a). Sean $k \in \mathbb{N}$ y $p \in D_k$. Para cualquier $i > k$ tenemos que $p \in D_i$, entonces notemos que: $(f_k^i)^{-1}(p) = S_j^i$, si p pertenece a alguna de las estrellas S_j^i agregadas a los D_i (con $i > k$); de otro modo, $(f_k^i)^{-1}(p) = \{p\}$. Además, $(f_k^m)^{-1}(p) \subseteq (f_k^i)^{-1}(p)$ si $k < m < i$. Esto último implica que $\text{diám} \left(\bigcup_{j=k+1}^i (f_k^j)^{-1}(p) \right) = \text{diám} \left((f_k^i)^{-1}(p) \right)$ y por construcción de los D_n , el diámetro de las estrellas S_j^n a los D_n es cada vez más cercana al cero. Así, existirá $q \in \mathbb{N}$ tal que si $p \in D_q$, entonces $\text{diám} \left(\bigcup_{j=k+1}^\infty (f_k^j)^{-1}(p) \right) < \varepsilon$.

Para (b). Sean $i \in \mathbb{N}$ y $x, y \in D_i$ tales que $d(x, y) > \delta$ para algún $\delta > 0$, es decir, $x \neq y$. Note que $(f_i^{i+1})^{-1}(x) \cap (f_i^{i+1})^{-1}(y) = \emptyset$, pues si existiera un elemento w en dicha intersección, tendríamos que $w = x$ o w pertenece a alguna estrella S_k^i añadida a D_i (por estar en $(f_i^{i+1})^{-1}(x)$). De igual manera tendríamos que $w = y$ o w pertenece a alguna estrella S_l^i añadida a D_i . Pero si $w \in S_k^i \cap S_l^i$, entonces $k = l$, lo cual implica que $x = y$, esto sería una contradicción. Lo que es más, continuando de forma similar, si $j > i$ entonces $(f_i^{i+1})^{-1}(x) \cap (f_i^{i+1})^{-1}(y) = \emptyset$ donde $(f_i^{i+1})^{-1}(x)$ y $(f_i^{i+1})^{-1}(y)$ son cerrados de $\mathbb{R}^2$, así que podemos separarlos con abiertos de $\mathbb{R}^2$ ajenos. Por lo tanto, para cualesquiera $j \in \mathbb{N}$ y $\delta > 0$ existe δ' tal que si $i > j$ y $p, q \in D_i$ son tales que $d(f_j^i(p), f_j^i(q)) > \delta$ entonces $d(p, q) > \delta'$.

Aplicando el teorema 3.9, tenemos que $D_\infty \simeq \text{cl}_{\mathbb{R}^2} \left(\bigcup_{n=1}^\infty D_n \right) \subseteq \mathbb{R}^2$, es decir, D_∞ puede encajarse en $\mathbb{R}^2$. $\square$

Teorema 3.16. [11, 10.37, Paso 4] Toda dendrita puede ser encajada en D_∞ .

Así, toda dendrita puede verse como un subespacio de D_∞ .

Definición 3.17. Sea X un espacio métrico. Decimos que X es **separable** si y sólo si X tiene un subconjunto denso numerable.

Definición 3.18. Sea $n \in \mathbb{N}$. Una **n -variedad** es un espacio métrico separable X tal que todo $x \in X$ tiene una vecindad homeomorfa a una n -celda.

Definición 3.19. El **interior como variedad** de una n -variedad X es $\text{intv}_{(n)}(X) = \{x \in X \mid x \text{ tiene una vecindad homeomorfa a } \mathbb{R}^n\}$. La **frontera como variedad** de una n -variedad X es $\partial_n(X) = \{x \in X \mid x \notin \text{intv}_{(n)}(X)\}$.

Ejemplo 3.20. El cilindro $S^1 \times [0, 1]$ es una 2-variedad tal que

$$\text{intv}_{(2)}(S^1 \times [0, 1]) = S^1 \times (0, 1) \text{ y } \partial_2(S^1 \times [0, 1]) = (S^1 \times \{0\}) \cup (S^1 \times \{1\}).$$

Es importante recalcar que en este ejemplo el cilindro no tiene frontera, pues no lo estamos considerando como un subconjunto de $\mathbb{R}^3$, sino como espacio.

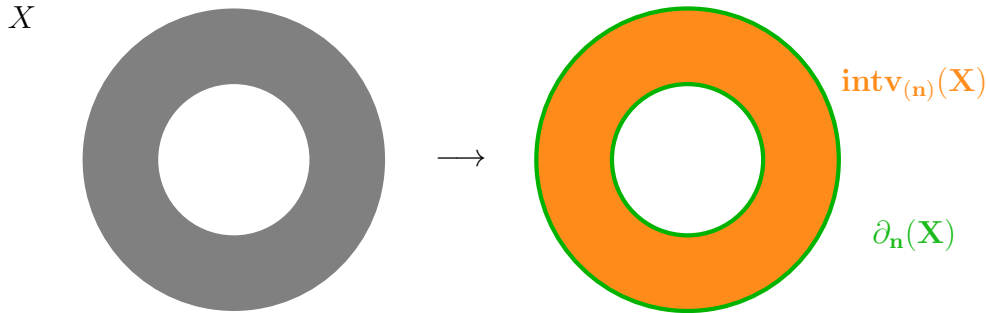


Figura 3.6: Interior y frontera como variedad de una 2-variedad.

Definición 3.21. Sea A un subconjunto del espacio métrico X . El **derivado** de A en X es

$$A'_X = \{x \in X \mid \text{Todo abierto } U \text{ tal que } x \in U \text{ satisface } U \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset\}.$$

Definición 3.22. Sea X un espacio métrico y A un subespacio de X . Se dice que A es **perfecto** si y sólo si A es cerrado de X y $A = A'_X$.

Lema 3.23. Si X es un espacio métrico, Y un subespacio de X tal que Y es perfecto y $p \in Y$, entonces $\text{cl}_X(Y - \{p\}) = Y$.

Demostración. Veamos que $\text{cl}_X(Y - \{p\}) = Y$. Primero notemos que $Y - \{p\} \subseteq Y$, de modo que $\text{cl}_X(Y - \{p\}) \subseteq \text{cl}_X(Y) = Y$. Por otra parte, consideremos $y \in Y$ y supongamos que $y \neq p$. Es inmediato que $y \in Y - \{p\} \subseteq \text{cl}_X(Y - \{p\})$. Si suponemos que $y = p$, tenemos que $p \in Y'_X$ por ser perfecto, es decir, todo abierto U de X que

contenga a p satisface que $U \cap (Y \setminus \{p\}) \neq \emptyset$; entonces $y \in \text{cl}_X(Y \setminus \{p\})$. Por lo tanto, $\text{cl}_X(Y - \{p\}) = Y$. $\square$

Lema 3.24. Si X y Y son espacios métricos y $p \in Y$, entonces $X \times \{p\}$ es homeomorfo a X .

Demostración. Sea $\pi_1 : X \times Y \rightarrow X$. Note que $g = \pi_1|_{X \times \{p\}} : X \times \{p\} \rightarrow X$ es continua y biyectiva. Es más, $g^{-1} : X \rightarrow X \times \{p\}$ definida para cada $x \in X$ como $g^{-1}(x) = (x, p)$, es continua. Por lo tanto, $X \times \{p\} \simeq X$. $\square$

Proposición 3.25. Tenemos que $\text{int}_{\mathbb{R}^n}([0, 1]^n)$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$.

Demostración. Tenemos que $\text{int}_{\mathbb{R}^n}([0, 1]) = (0, 1)$. Luego, $\text{int}_{\mathbb{R}^n}([0, 1]^n) = (0, 1)^n$. Por otro lado, $(0, 1)$ es homeomorfo a $\mathbb{R}$. Así $(0, 1)^n$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$. Por lo tanto, $\text{int}_{\mathbb{R}^n}([0, 1]^n)$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$. $\square$

Lema 3.26. Si X, Y son n -variedades y $h : X \rightarrow Y$ es un homeomorfismo, entonces:

- (1) $h(\text{intv}_{(n)}(X)) = \text{intv}_{(n)}(Y)$,
- (2) $h(\partial_n(X)) = \partial_n(Y)$.

Demostración. Para (1). Sea $z \in h(\text{intv}_{(n)}(X))$, esto es, $z = h(p)$ para algún $p \in \text{intv}_{(n)}(X)$, entonces existe un abierto U que contiene a p y es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$. Como $U \simeq h(U)$, tenemos que $h(U)$ es un abierto homeomorfo a $\mathbb{R}^n$, entonces $z \in \text{intv}_{(n)}(Y)$. Así, $h(\text{intv}_{(n)}(X)) \subseteq \text{intv}_{(n)}(Y)$. Por otra parte, como $h^{-1} : Y \rightarrow X$ es homeomorfismo, tenemos que si $z \in \text{intv}_{(n)}(Y)$ entonces de forma similar existirá V que contiene a z y es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$. Luego, $V \simeq h^{-1}(V)$ donde $h^{-1}(z) \in h^{-1}(V)$, es decir, $h^{-1}(z) \in \text{intv}_{(n)}(X)$. De modo que $h \circ h^{-1}(z) = z \in h(\text{intv}_{(n)}(X))$. Por lo tanto, $h(\text{intv}_{(n)}(X)) = \text{intv}_{(n)}(Y)$.

Para (2). Sabemos que h es biyectiva; entonces, por (1) tenemos que $h(\partial_n(X)) = h(X \setminus \text{intv}_{(n)}(X)) = h(X) \setminus h(\text{intv}_{(n)}(X)) = Y \setminus \text{intv}_{(n)}(Y) = \partial_n(Y)$. $\square$

Proposición 3.27. Si $(a_1, \dots, a_n) \in \text{int}_{\mathbb{R}^n}([0, 1]^n)$, entonces

$$(a_1, \dots, a_n, 0) \in \text{intv}_{(n)}([0, 1]^n \times \{0\}).$$

Demostración. Consideremos al espacio $\mathbb{R}^n$ y sea $(a_1, \dots, a_n) \in \text{int}_{\mathbb{R}^n}([0, 1]^n)$; entonces $(a_1, \dots, a_n, 0) \in \text{int}_{\mathbb{R}^n}([0, 1]^n) \times \{0\}$. Notemos que, por el lema 3.24 y Proposición 3.25, tenemos que $\text{int}_{\mathbb{R}^n}([0, 1]^n) \times \{0\} \simeq \text{int}_{\mathbb{R}^n}([0, 1]^n) \simeq \mathbb{R}^n$. Es decir, $\text{int}_{\mathbb{R}^n}([0, 1]^n) \times \{0\}$ es una vecindad de $(a_1, \dots, a_n, 0)$ homeomorfa a $\mathbb{R}^n$. Por lo tanto, $(a_1, \dots, a_n, 0) \in \text{intv}_{(n)}([0, 1]^n \times \{0\})$. $\square$

Lema 3.28. Sean X subespacio de $\mathbb{R}^n$ y $x \in X$. Entonces $x \in \text{int}_{\mathbb{R}^n}(X)$ si y sólo si existe un compacto Z en X tal que $x \in \text{int}_{\mathbb{R}^n}(Z)$.

Demostración. Supongamos que $x \in \text{int}_{\mathbb{R}^n}(X)$. Como $\mathbb{R}^n$ es localmente compacto (lema 1.42) y $\text{int}_{\mathbb{R}^n}(X)$ es abierto de $\mathbb{R}^n$, entonces existe V un abierto de $\mathbb{R}^n$ tal que $x \in V \subseteq \text{cl}_{\mathbb{R}^n}(V) \subseteq \text{int}_{\mathbb{R}^n}(X)$ y $\text{cl}_{\mathbb{R}^n}(V)$ es compacto en X . Así, $\text{cl}_{\mathbb{R}^n}(V) \subseteq X$ y $x \in \text{int}_{\mathbb{R}^n}(V) \subseteq \text{int}_{\mathbb{R}^n}(\text{cl}_{\mathbb{R}^n}(V))$, es decir, $Z = \text{cl}_{\mathbb{R}^n}(V)$ es el compacto que buscamos. Por otra parte, supongamos que existe Z compacto en X tal que $x \in \text{int}_{\mathbb{R}^n}(Z)$. Como $Z \subseteq X$, entonces $x \in \text{int}_{\mathbb{R}^n}(Z) \subseteq \text{int}_{\mathbb{R}^n}(X)$. $\square$

Lema 3.29. Tenemos que $\text{int}_{v(n)}([0, 1]^n) = \text{int}_{\mathbb{R}^n}([0, 1]^n)$.

Demostración. Sea $x \in \text{int}_{v(n)}([0, 1]^n)$, entonces existe U un abierto de $[0, 1]^n$ que contiene a x y es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$. Esto implica que existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_{\mathbb{R}^n}(x, \varepsilon) \subseteq U \subseteq [0, 1]^n$. Así, $x \in \text{int}_{\mathbb{R}^n}([0, 1]^n)$. Por otra parte, sea $x \in \text{int}_{\mathbb{R}^n}([0, 1]^n)$, es decir, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_{\mathbb{R}^n}(x, \varepsilon) \subseteq [0, 1]^n$ y por Lema 1.75, $B_{\mathbb{R}^n}([0, 1]^n) \simeq \mathbb{R}^n$, entonces $x \in \text{int}_{v(n)}([0, 1]^n)$ pues $B_{\mathbb{R}^n}([0, 1]^n)$ es una vecindad de x homeomorfa a $\mathbb{R}^n$. $\square$

Definición 3.30. Una **n-sombrilla** es un espacio métrico homeomorfo a la unión de $[0, 1]^n \times \{0\}$ y un arco J en $\mathbb{R}^{n+1}$ tales que $([0, 1]^n \times \{0\}) \cap J = \{(a_1, \dots, a_n, 0)\}$, donde $(a_1, \dots, a_n) \in \text{int}_{\mathbb{R}^n}([0, 1]^n)$ y $(a_1, \dots, a_n, 0)$ es un punto extremo de J .

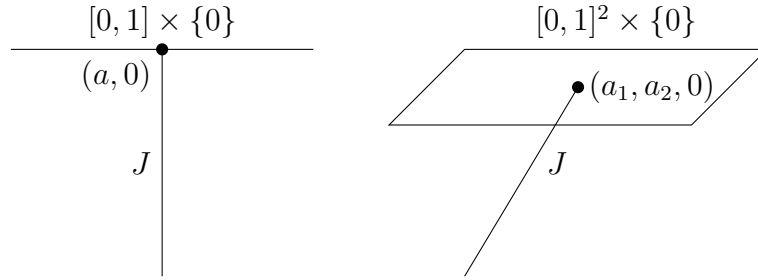


Figura 3.7: Ilustración de una 1-sombrilla (izquierda) y una 2-sombrilla (derecha).

Como toda n -sombrilla S es un subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$, uno podría estar tentado a pensar que el hecho de que S no es encajable en $\mathbb{R}^n$ se da de manera inmediata. Sin embargo, existen subespacios de $\mathbb{R}^{n+1}$ tales que son encajables en $\mathbb{R}^n$. A continuación, vemos un ejemplo y más adelante revisamos la prueba de que ninguna n -sombrilla es encajable en $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 3.31. Consideremos el espacio S^2 en $\mathbb{R}^3$. Sea $N = (0, 0, 1)$. La función $h : S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $h((x, y, z)) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right)$ es un homeomorfismo y se conoce como la **proyección estereográfica**.

Teorema 3.32. Ninguna n -sombrilla es encajable en $\mathbb{R}^n$.

Demostración. Sean $n \in \mathbb{N}$ y X una n -sombrilla. Tenemos que X es un espacio topológico homeomorfo a la unión de $[0, 1]^n \times \{0\}$ y un arco J en $\mathbb{R}^{n+1}$ tales

que $([0, 1]^n \times \{0\}) \cap J = \{(a_1, \dots, a_n, 0)\}$, donde $(a_1, \dots, a_n) \in \text{int}_{\mathbb{R}^n}([0, 1]^n)$; y $(a_1, \dots, a_n, 0)$ es un punto extremo de J .

Veamos que $([0, 1]^n \times \{0\}) \cup J$ no es encajable en $\mathbb{R}^n$. Para esto, supongamos lo contrario; es decir, supongamos que existe un encaje $h : ([0, 1]^n \times \{0\}) \cup J \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Luego, $h|_J : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un encaje. Por el lema 3.23, tenemos que

$$\text{cl}_{\mathbb{R}^n}(h(J) - \{h((a_1, \dots, a_n, 0))\}) = h(J).$$

Luego, existe una sucesión $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $h(J) - \{h((a_1, \dots, a_n, 0))\}$ tal que $r_n \rightarrow h((a_1, \dots, a_n, 0))$.

Por Proposición 3.27, tenemos que $(a_1, \dots, a_n, 0) \in \text{int}_{v(n)}([0, 1]^n \times \{0\})$. Luego, $h((a_1, \dots, a_n, 0)) \in h(\text{int}_{v(n)}([0, 1]^n \times \{0\}))$. Por el lema 3.26, tenemos que

$$h(\text{int}_{v(n)}([0, 1]^n \times \{0\})) = \text{int}_{v(n)}(h([0, 1]^n \times \{0\})).$$

Notemos que $[0, 1]^n \times \{0\}$ es homeomorfo a $[0, 1]^n$. Luego, $h([0, 1]^n \times \{0\})$ es una n -celda en $\mathbb{R}^n$. Por el lema 3.29, tenemos que

$$\text{int}_{v(n)}(h([0, 1]^n \times \{0\})) = \text{int}_{\mathbb{R}^n}(h([0, 1]^n \times \{0\})).$$

Como $\text{int}_{\mathbb{R}^n}(h([0, 1]^n \times \{0\}))$ es abierto de $\mathbb{R}^n$ y $r_n \rightarrow h((a_1, \dots, a_n, 0))$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces $r_n \in \text{int}_{\mathbb{R}^n}(h([0, 1]^n \times \{0\}))$. Así, en particular $r_N \in \text{int}_{\mathbb{R}^n}(h([0, 1]^n \times \{0\}))$. Luego,

$$r_N \in \text{int}_{\mathbb{R}^n}(h([0, 1]^n \times \{0\})) \cap (h(J) - \{h((a_1, \dots, a_n, 0))\}).$$

Como

$$\begin{aligned} & \text{int}_{\mathbb{R}^n}(h([0, 1]^n \times \{0\})) \cap (h(J) - \{h((a_1, \dots, a_n, 0))\}) \\ & \subset h([0, 1]^n \times \{0\}) \cap h(J), \end{aligned}$$

tenemos que $r_N \in h([0, 1]^n \times \{0\}) \cap h(J)$. Notemos que $r_N \neq h((a_1, \dots, a_n, 0))$. Luego, $h^{-1}(r_N) \in ([0, 1]^n \times \{0\}) \cap J$ y $h^{-1}(r_N) \neq (a_1, \dots, a_n, 0)$. Esto es una contradicción porque $([0, 1]^n \times \{0\}) \cap J = \{(a_1, \dots, a_n, 0)\}$.

Por lo tanto, $([0, 1]^n \times \{0\}) \cup J$ no es encajable en $\mathbb{R}^n$. Como X es homeomorfo a $([0, 1]^n \times \{0\}) \cup J$, tenemos que X no es encajable en $\mathbb{R}^n$. $\square$

3.1. Cubo de Hilbert

Definición 3.33. Sea $[0, 1]$ con la métrica euclidiana y consideremos al conjunto $\mathbf{Q} = \prod_{n=1}^{\infty} [0, 1]$. El **cubo de Hilbert** es un espacio homeomorfo a $(\mathbf{Q}, \tau_{\pi})$.

Teorema 3.34. El cubo de Hilbert es un continuo.

Demostración. Se sigue de los teoremas 2.20 y 2.21. $\square$

Definición 3.35. Sean X no vacío y d_1, d_2 métricas para X . Se dice d_1 y d_2 son **métricas equivalentes** si y sólo si generan la misma topología. Es decir, cualquier bola en (X, d_1) es una bola en (X, d_2) con los mismos elementos.

Lema 3.36. Todo espacio métrico admite una métrica equivalente acotada por 1.

Demostración. Sean (X, d') un espacio métrico y $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ definida para cada $x, y \in X$ como $d(x, y) = \frac{d'(x, y)}{1 + d'(x, y)}$. Afirmamos que d es una métrica equivalente con d' y está acotada por 1. Es inmediato que d es no negativa, nula si y sólo si los puntos son iguales, y es acotada por 1. Veamos que se satisface la desigualdad tirangular. Para esto consideremos la función $g : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ definida como $g(t) = \frac{t}{1+t}$. Note que $g'(t) = \frac{1}{(1+t)^2} \geq 0$, es decir, g es estrictamente creciente. Por lo cual, si $a \leq b + c$, entonces $g(a) \leq g(b + c)$. Es más, $g(b + c) \leq g(b) + g(c)$ porque:

$$g(b + c) = \frac{b + c}{1 + b + c} = \frac{b}{1 + b + c} + \frac{c}{1 + b + c} \leq \frac{b}{1 + b} + \frac{c}{1 + c} = g(b) + g(c)$$

Así, tenemos que $a \leq b + c$ implica que $g(a) \leq g(b) + g(c)$. Como $d = g \circ d'$, concluimos que d satisface la desigualdad triangular.

Ahora veamos que son equivalentes. Sean $a \in X$ y $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Afirmamos que $\{x \in X \mid d'(a, x) < \varepsilon\} = \{x \in X \mid d(a, x) < \frac{\varepsilon}{\varepsilon + 1}\}$, lo cual es inmediato pues:

$$\begin{aligned} y \in \left\{ x \in X \mid d(a, x) < \frac{\varepsilon}{\varepsilon + 1} \right\} &\iff d(a, y) < \frac{\varepsilon}{\varepsilon + 1} \\ &\iff 1 - \frac{1}{d'(a, y) + 1} < 1 - \frac{1}{\varepsilon + 1} \\ &\iff d'(a, y) < \varepsilon \\ &\iff y \in \{x \in X \mid d'(a, x) < \varepsilon\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto son equivalentes y d está acotada por 1. $\square$

Definición 3.37. Sea X un espacio métrico. se dice X es **Lindelöf** si y sólo si cualquier cubierta abierta de X tiene una subcubierta numerable.

Lema 3.38. Todo espacio métrico compacto es Lindelöf.

Demostración. Se sigue de la definición 1.24 y por propiedades de cardinalidad. $\square$

Teorema 3.39. Sea X un espacio métrico. X es Lindelöf si y sólo si X es separable.

Demostración. $(\Rightarrow)$. Construiremos un conjunto denso numerable en X . Consideremos para cada $n \in \mathbb{N}$ los conjuntos $A_n = \{B(x, \frac{1}{n}) \mid x \in X\}$. Note que cada A_n es

una cubierta abierta para X . Por ser Lindelöf, cada A_n admite un subcubrimiento numerable, digamos $U_n = \{B(x_{n,k}, \frac{1}{n}) \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq A_n$.

Definamos $D = \bigcup_{(n,k) \in \mathbb{N}^2} \{x_{n,k}\}$ el cual es numerable por ser unión numerable de conjuntos finitos. Veamos que D es denso en X . Tomemos V un abierto de X y $y \in V$, por ser abierto, existe un $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tal que $B(y, \varepsilon) \subseteq V$. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \varepsilon$, entonces existe alguna bola $B(x_{n,k}, \frac{1}{n})$ de U_n que intersecta a $B(y, \varepsilon)$. Lo cual implica que D es denso.

($\Leftarrow$). Sean $D = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ un conjunto denso numerable de X y $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X . Para cada x_n existe $U_n \in \mathcal{U}$ tal que $x_n \in U_n$. Además, como cada U_n es un abierto de X , existe $\varepsilon_n \in \mathbb{R}^+$ tal que $B(x_n, \varepsilon_n) \subseteq U_n$. Notemos que, como D es denso, la unión de todos los $B(x_n, \varepsilon_n)$ cubre a X . De modo que $\mathcal{V} = \{U_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{U}$ es una cubierta abierta numerable de X . $\square$

Proposición 3.40. [1, Proposición 4.5, pág. 121] Sean $\{X_i \mid i \in I\}$ una familia de espacios topológicos, X un espacio topológico y $f : X \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$ cuyo codominio tiene la topología producto. La función f es continua si y sólo si $\pi_i \circ f$ es continua para cada $i \in I$.

La que sigue es una de las proposiciones más útiles y elegantes en topología general, a menudo llamada el Teorema del Encaje Compacto. Es fundamental porque nos permite obtener un homeomorfismo sin tener que verificar explícitamente que la función inversa sea continua mediante “ $\epsilon - \delta$ ” o preimágenes.

Teorema 3.41. Sean X, Y espacios topológicos tales que X es compacto y Y Hausdorff. Si $f : X \rightarrow Y$ es continua e inyectiva, entonces $f(X)$ es homeomorfo a X .

Demostración. Para demostrar que $f(X)$ es homeomorfo a X , debemos verificar que la función f restringida a su imagen, $f : X \rightarrow f(X)$, es un homeomorfismo. Por hipótesis, f ya es continua e inyectiva, y por definición de imagen, es suprayectiva sobre $f(X)$. Por lo tanto, solo resta probar que f es una función cerrada (o abierta), lo cual garantizará que la inversa f^{-1} sea continua. Sea $A \subseteq X$ un conjunto cerrado arbitrario. Queremos ver que $f(A)$ es cerrado en $f(X)$.

1. Como X es un espacio compacto y A es un subconjunto cerrado de X , por una propiedad de los espacios compactos, **A es compacto.**
2. Dado que f es una función continua y el nombre de la imagen de un compacto bajo una función continua es compacto, se sigue que **$f(A)$ es compacto** en el espacio Y .
3. Por hipótesis, Y es un espacio **Hausdorff**. Una propiedad fundamental de estos espacios es que todo subconjunto compacto es cerrado. Por lo tanto, **$f(A)$ es un conjunto cerrado en Y .**

4. Como $f(A) \subseteq f(X)$, y $f(A)$ es cerrado de Y , por la definición de la topología relativa, $f(A)$ es cerrado en el subespacio $f(X)$.

Puesto que f es una biyección continua y cerrada entre X y $f(X)$, concluimos que f es un homeomorfismo. Así, $X \cong f(X)$. $\square$

Teorema 3.42. Si X es un espacio métrico compacto, entonces existe un encaje $\varphi : X \rightarrow Y \subseteq \mathbf{Q}$.

Demostración. Sea la métrica d definida como en el lema 3.36. Como X es un espacio métrico compacto, se sigue que existe $D = \{a_n \in X \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq X$ denso numerable por el teorema 3.39.

Consideremos $\varphi : X \rightarrow \mathbf{Q}$ definida para cada $p \in X$ como $\varphi(p) = \{d(p, a_n)\}_{n=1}^{\infty}$. Demostraremos que φ es un encaje usando el teorema 3.41.

“ φ es continua”. Por la Proposición 3.40, basta con verificar que $\pi_n \circ \varphi$ es continua para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea $(\pi_n \circ \varphi)(p) \in [0, 1]$ para algún $n \in \mathbb{N}$, queremos ver que para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $d(p, q) < \delta \Rightarrow |d(p, a_n) - d(q, a_n)| < \varepsilon$. Por la desigualdad triangular sabemos que $|d(p, a_n) - d(q, a_n)| \leq d(p, q) < \delta$, así que tomamos $\delta = \varepsilon$ y tenemos que $\pi_n \circ \varphi$ es continua para cada $n \in \mathbb{N}$. Aplicando el resultado de la Proposición 3.40 concluimos que φ es continua.

“ φ es inyectiva”. Supongamos que $p, q \in X$ tales que $p \neq q$ y $\varphi(p) = \varphi(q)$, este último implica que para cada $n \in \mathbb{N}$, $d(p, a_n) = d(q, a_n)$. Tomemos $\delta = \frac{d(p, q)}{2}$. Como $\delta > 0$ y D es denso en X , existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(p, a_N) < \delta$. Por hipótesis, $d(q, a_N) = d(p, a_N)$, entonces $d(q, a_N) < \delta$. Así $d(p, q) \leq d(p, a_N) + d(q, a_N) < 2\delta = d(p, q)$, pero esto implica que $d(p, q) < d(p, q)$ lo cual es una contradicción. Así, φ es inyectiva.

Luego, por el teorema 3.41, $\varphi : X \rightarrow \varphi(X) \subseteq \mathbf{Q}$ es un homeomorfismo. Por lo tanto, φ es un encaje de X a $\mathbf{Q}$. $\square$

Llegados a este punto, es sencillo ver que el cubo de Hilbert funciona como elemento universal de todos los continuos a través del siguiente corolario.

Corolario 3.43. Todo continuo se puede encajar en el cubo de Hilbert.

Demostración. Si X es un continuo, es un espacio métrico compacto. Del teorema anterior se sigue que X puede encajarse en un subespacio del cubo de Hilbert. $\square$

El análisis de los continuos universales permite simplificar el estudio de familias completas de espacios, ya que transforma problemas complicados en la consideración de un único objeto que “absorbe” las propiedades de los demás. Como hemos visto, el cubo de Hilbert es el “progenitor” de todos los continuos.

Referencias

- [1] Casarrubias Segura Fidel, Tamariz Mascarúa Ángel, *Elementos de Topología General*, Aportaciones Matemáticas, Serie de Textos No. 37, Sociedad Matemática Mexicana, México, 2012.
- [2] Engelking Ryszard, *Dimension Theory*, Warsaw, 1978.
- [3] Engelking Ryszard, *General Topology*, Helderman, 1989.
- [4] Hausdorff Felix, *Grundzüge der Mengenlehre (Fundamentos de la Teoría de Conjuntos)*, Veit & Comp., 1914.
- [5] Hernández Hernández Fernando, *Teoría de conjuntos (Una introducción)*, Aportaciones Matemáticas, Serie de Textos No. 13, Sociedad Matemática Mexicana, México, segunda edición, 1998.
- [6] Herrera Carrasco David, Macías Romero Fernando, Guerrero Méndez Luis Alberto, *La magia de los espacios métricos*, Textos Científicos, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2025.
- [7] Illanes Alejandro, Macías Sergio y Lewis Wayne, *Continuum Theory*, Springer, 2025.
- [8] Kuratowski Kazimierz. *Topology* (Vol. II). Academic Press, 1968.
- [9] Mazurkiewicz Stefan, *Sur les lignes de Jordan*, Fundamenta Mathematicae, 1920.
- [10] Munkres James, *Topología, 2da Edición*, Prentice Hall, 2002.
- [11] Nadler, Jr. Sam B., *Continuum theory: An introduction, Monographs and textbooks in pure and applied math.* Vol. 158, Marcel Dekker, New York, Basel, Hong Kong, 1992.
- [12] Nadler, Jr. Sam B., *Dimension Theory: An introduction with exercises.* Aportaciones Matemáticas, Serie de textos, no. 18, Sociedad Matemática Mexicana, 2002.

- [13] Sierpiński Waław, *Sur une courbe dont tout point est un point de ramification*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris, 1916.
- [14] Tarrés Freixenet Juan, *Cien años de los "Grundzüge der Mengenlehre" de Hausdorff*, https://www.researchgate.net/publication/284181979_Los_Grundzuge_der_Mengenlehre_de_Hausdorff.

Glosario

- Alfombra de Sierpiński, 27
- Anillo bidimensional, 6
- Arco, 21
- Arco-conexidad $\widetilde{L_{x,y}}$, 13
- Bola abierta $B_X(a, \varepsilon), B(a, \varepsilon)$, 1
- Bola cerrada $C_X(a, \varepsilon), C(a, \varepsilon)$, 2
- Cerradura $cl_X(A)$, 4
- Circunferencia unitaria S^1 , 17
- Compactación del rayo, 25
- Compacto, 7
- Conexidad local, 14
- Conexo, 11
- Conjunto abierto, 2
- Conjunto acotado, 7
- Conjunto cerrado, 3
- Continuo, 20
- Convexidad $\overline{L_{x,y}}$, 14
- Cubierta, 6
- Cubierta abierta, 6
- Cubo de Hilbert $\mathbf{Q}$, 40
- Curva cerrada simple, 29
- Curva del topólogo, 25
- Círculo de Varsovia, 26
- Dendrita, 32
- Dendrita universal de Wazewski D_∞ , 34
- Denso, 5
- Derivado A'_X , 37
- Disconexo, 11
- Esfera unitaria S^n , 17
- Espacio métrico (X, d) , 1
- Espacio topológico (X, τ) , 22
- Espacios coordenados, 32
- Esponja de Menger M_1^3 , 27
- Estrella, 34
- Frontera $fr_X(A), \partial A$, 4
- Frontera como n-variedad $\partial_n(X)$, 37
- Funciones de ligadura, 32
- Función monótona, 34
- Función proyección de límites inversos $f_{(k)}$, 33
- Función proyección π_β , 22
- Gráfica finita conexa, 21
- Hausdorff, 7
- Heine-Borel, 10
- Homeomorfismo $X \simeq Y$, 17
- Interior $int_X(A)$, 4
- Interior como n-variedad $intv_{(n)}(X)$, 37
- Lindelöf, 41
- Localmente compacto, 11
- Límite inverso $\varprojlim \{X_n, f_n^{n+1}\}$, 32
- Métrica d , 1
- Métrica equivalente, 41
- Métrica euclidiana, 1
- n-celda $\prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$, 9

n-sombrilla, 39	Separación (S, T) , 11
n-variedad, 37	Subcontinuo, 20
No degenerado, 20	Subcontinuo propio, 20
Perfecto, 37	Subcubierta, 6
Precompacto, 9	Sucesión inversa $\{X_n, f_n^{n+1}\}$, 32
Producto Cartesiano $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$, 22	Teorema de Tychonoff, 24
Propiedad topológica, 19	Topología producto τ_π , 22
Proyección estereográfica, 39	Toro $\mathbb{T}^2$, 24
Rayo $[0, \infty)$, 25	Triángulo de Sierpiński, 27
Separable, 37	Universal, 31