BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS.

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

EL DESARROLLO DE LAS ESTRATEGIAS METACOGNITIVAS EN ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS: EL EFECTO EN EL RAZONAMIENTO LÓGICO

TESIS

PRESENTADA COMO REQUSITO PARA OBTENER EL TITULO

MAESTRO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

PRESENTA

Pablo Rodrigo Zeleny Vázquez

DIRECTOR DE TESSIS

Dr. Josip Slisko Ignjatov.

Puebla Pue. Diciembre 2016

AGRADECIMIENTOS.

A Juan Carlos Macías quien ha trabajado conmigo durante varios años y estuvo atento, dándome ánimo con su compañía durante mis vacaciones forzadas en el hospital.

A todas las personas que estuvieron pendientes de mi salud, les agradezco infinitamente su preocupación y buenos deseos por mi recuperación: Irene Herrera, Pedro García, Viridiana, Micaela, Vanesa Nava, Dulce. A mis queridas maestras Hilde, Laura, Teresa, Modesta, Gloria, Aracely, Laura Sonia, Guille, Silvia. Rosario, A mis alumnos Irene Carmona, Israel, Viridiana, Alma Vega, Gustavo, Emanuel, Dánae, Marco Antonio, Francisco Javier, Alma, Víctor, Jerónimo, Fernanda, Ángeles, Elizabeth de Gante, Rosalba Montalvo. Y especialmente a Fabiana por ser una buena amiga y compañera.

Al director de la FCFM Enrique Arrazola, y al secretario administrativo Juan Francisco Leyva por su apoyo y a todos mis compañeros quienes estuvieron preguntando por mi salud durante mi estancia en el hospital. Soy afortunado por contar con buenos amigos y compañeros.

A mis hermanos. Y pido perdón a los que omití sin, querer gracias a todos, pues esos días fueron confusos, solo pensaba que internamente me sentía bien, no decaía mi ánimo. Después de salir del hospital y de varias consultas los médicos me dijeron que tuve mucha suerte, sólo 3 de 10 sobreviven a un problema como el mío, así que soy doblemente afortunado. A Dayana, Nohemí y Ruth quienes me ayudaron a llevar el control del curso que se documenta en este trabajo, agradezco mucho su ayuda.

A mi esposa Anita por su paciencia, y por ser escucha cautiva, no le quedaba más remedio que escuchar mis avances y dudas sobre el trabajo, sus correcciones siempre fueron valiosas y así poco a poco mejore la redacción.

Seguí el consejo de escribe primero sin preocuparte mucho, de otra manera las ideas no fluyen a los dedos, corrige después. Y aunque trate de expresar claramente las ideas vagas que rondaban mi mente, es importante otra opinión. Gracias a las observaciones y críticas acertadas de los miembros del jurado: Dra. Araceli Juárez Ramírez, Dra. Lidia Aurora Hernández Rebollar, Dra. Honorina Ruiz Estrada y Dr. José Antonio Juárez López se logró mejorar la redacción y presentación. Al final del día, los errores y omisiones afectan la claridad de la redacción; es importante balancear forma y fondo, pero gracias al jurado se disminuyeron en buena medida los errores. No se logra avanzar mucho si estás solo, por ello agradezco la ayuda de mi asesor de tesis Dr. Josip Slisko.

INTRODUCCION

En este trabajo consideramos la metacognición como un elemento importante en la resolución de problemas. Se dan las bases para el diseño de un curso universitario con énfasis en la resolución de problemas, resaltando el uso de habilidades metacognitivas. Se espera que esto tenga efecto positivo en el razonamiento formal de los alumnos, para lo cual se aplicó el Test of logical thinking (TOLT) de Tobin y Capie. Se hace una propuesta concreta dentro del curso "Teoría de ecuaciones" del tronco común a las carreras que se ofrecen en la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas (FCFM), de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP). Sabía que la empresa era difícil, pues además de mis propias limitaciones, los resultados dependen de los alumnos, en mi mente no dejó de resonar una frase "*enseñar a base de resolver problemas es un reto más que una propuesta".* Pero acepté el reto con optimismo, siempre trato de aprender de mis alumnos.

Fue hace varios años que leí por primera vez el término metacognición, y hasta donde recuerdo fue en el libro de Psicología educativa de Woolfolk (1990). Ahora, al estudiar la maestría en educación matemática se presentó la oportunidad de hacer un trabajo sobre el tema. Se impartiría un curso con alumnos en la FCFM con el propósito de diseñar e implementar actividades relacionadas con la metacognición. ¿Se pueden enseñar habilidades metacognitivas? En el libro citado anteriormente se puede leer:

La metacognición comprende al menos dos componentes separados:

- Estar consciente de las habilidades, estrategias y los recursos que se necesitan para ejecutar una tarea de manera efectiva, saber qué hacer.
- La capacidad para usar los mecanismos autorreguladores para asegurar el término con éxito de la tarea, cómo y cuándo hacer qué cosas.

También debo confesar que el libro de Polya: "Como plantear y resolver problemas" lo leí hace muchos años, pero pronto perdí la fe, descubrí que no funciona como uno quisiera, además de los 4 pasos, se necesitan buenos conocimientos sobre el tema en el que se inscribe el problema y mucha práctica. Poco a poco fui reuniendo libros sobre solución de problemas: "Estrategias de pensamiento" de Larry Wood, "El arte de pensar" de Lewis y Greene y otros más recientes que se mencionan en la bibliografía. Pero Polya (1981) con su obra "Mathematical Discovery" me devolvió el ánimo pues aporta ejemplos concretos de cómo resolver problemas matemáticos. Esta obra la usé para el tema de inducción matemática. Por fortuna también leí el "Yearbook 1980", publicado por National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), que viene dedicado a la solución de problemas, ahí conocí el trabajo de Alan Schoenfeld, que de alguna manera complementa la propuesta de Polya.

El trabajo de manera natural se dividió en dos, diseño e impartición del curso, y la elaboración del cuerpo de la tesis, donde tuve que consultar muchos artículos y todos los libros que tenía a la mano. Finalmente, con base en la idea de Swartz y

Perkins (1991), se logró concretar la idea de “escalera metacognitiva”, que proponemos se aplique a la solución de problemas de manera reflexiva, en dos versiones: breve y extendida, se incluyen en los anexos.

Dentro de los logros obtenidos en el diseño esta la propuesta de un formato sencillo que reúne los 4 pasos de Polya, pero que insiste sutilmente en la metacognición, su sencillez permite utilizarlo ampliamente. Esto da identidad propia al trabajo realizado. La tesis está dividida en 6 capítulos.

En el capítulo 1 se da el planteamiento del problema y metodología para el diseño del curso impartido.

En el capítulo 2 revisamos brevemente el concepto de metacognición y resolución de problemas. Se dedica un poco más de espacio a considerar las propuestas de diferentes autores para resolver problemas, para tener idea de las estrategias sugeridas por cada uno.

En el capítulo 3 comentamos las consideraciones que nos sirvieron de base para el diseño del curso. Se dan los enunciados de 25 problemas que fueron propuestos a los alumnos con un formato de 4 fases para trabajar. La selección de los problemas es importante, pues no se trata de proponer problemas aislados, sino que estos deben tener relación entre sí para resaltar la presentación de estrategias para resolver problemas y las estrategias metacognitivas.

En el capítulo 4 se presentan las soluciones expertas a los problemas propuestos, para indicar las estrategias que se pretende que aprendan los alumnos durante el curso.

En el capítulo 5 brevemente se consideran las soluciones enviadas por los alumnos y se hacen comentarios sobre las estrategias observadas y su reflexión.

En el capítulo 6 hacemos una evaluación del diseño y las actividades realizadas por los alumnos, se discuten los resultados obtenidos durante el curso. Se presentan los resultados de la aplicación de TOLT como **pre prueba y post prueba** y, finalmente, damos las conclusiones sobre el trabajo de los alumnos.

En los anexos, para consulta incluimos:

- El método de Polya, como aparece en su libro de “Como plantear y resolver problemas”.
- Escalera metacognitiva para la reflexión.
- Cuestionario de Biryukov (2002) sobre metacognición, que aplica inmediatamente después de resolver un problema de combinatoria.

ÍNDICE

Contenido

CAPÍTULO 1

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La enseñanza - aprendizaje de las matemáticas es un tema difícil, no hay recetas fáciles para lograr aprendizajes en los alumnos. En particular, enseñar a resolver problemas es una labor complicada, hay muchos factores a considerar e inercias que combatir. En este trabajo consideramos la resolución de problemas y habilidades metacognitivas dentro del contexto de un curso de matemáticas común a las carreras que se imparten en FCFM, BUAP. Resolver problemas se considera una de las competencias más importantes dentro del currículo.

Burón (2007) comenta que los estudiosos de la metacognición, al examinar qué hacen los alumnos cuando estudian, leen, memorizan etc. han comprobado que varios llegan a cursos avanzados sin saber realizar tareas básicas para el aprendizaje, y muchos identifican aprender con simplemente memorizar.

Actualmente se reconoce que es importante implementar la enseñanza explícita y sistemática de estrategias metacognitivas para lograr que el aprendiz llegue a ser autónomo, es ingenuo pensar que el alumno lo puede conseguir solo en el corto plazo. Los docentes rara vez alientan a los estudiantes a reflexionar sobre su forma de pensar y resolver problemas. Matemáticas y ciencias en la universidad nunca han sido fáciles, pero si los estudiantes desconocen estrategias metacognitivas como supervisión y regulación, el camino puede ser aún más difícil ante los pobres resultados. También se insiste en que los docentes debemos cambiar nuestras prácticas, haciendo hincapié en la necesidad de transmitir la responsabilidad del aprendizaje del profesor al estudiante, para lo cual se deben proporcionar herramientas para el aprendizaje independiente, que los alumnos se hagan cargo de su aprendizaje en el mediano y largo plazo**.** Marina (2016) lo expresa claramente, los alumnos deben consolidar su autonomía, no reproducir nuestros modelos.

El uso de las estrategias metacognitivas diferencia los estudiantes con alto y bajo desempeño en la resolución de problemas. Özsoy y Ayşegül (2009) comentan que, mientras los estudiantes con alto desempeño usan las estrategias metacognitivas, los estudiantes con bajo desempeño casi no usan tales estrategias.

Varios autores sostienen que una manera de mejorar el desempeño de los estudiantes es diseñar actividades que puedan promover el desarrollo de las estrategias metacognitivas, de preferencia, en relación a un curso curricular para que los alumnos puedan usarlas en clase. Pero esto no se ha implementado en nuestra facultad, donde se sigue un formato expositivo de clase de tipo tradicional, y los alumnos al ser espectadores pasivos no practican las habilidades de pensamiento que deben mostrar en los exámenes. Existen varios estudios que demuestran que el fomento de las estrategias metacognitivas en clase, tiene como resultado una mejora del aprendizaje matemático. Yimer y Ellerton (2006) comentan que poner énfasis en la cognición sin un correspondiente énfasis en el pensamiento metacognitivo rinde como un esfuerzo incompleto. Un rico almacén de conocimientos, se cree que es un requisito necesario, pero no suficiente, para el éxito al resolver problemas matemáticos. Aunque los estudiantes pueden tener los conocimientos para interpretar el enunciado de un problema, los mecanismos de control ineficientes impiden avances hacia la solución, porque no se consideran diferentes estrategias y no se detectan errores oportunamente.

Objetivo general

El principal objetivo de este trabajo es el diseño, la implementación y la evaluación de la secuencia de problemas que realizarán los estudiantes en el aula y en casa, durante un curso de18 semanas.
En el diseño de la secuencia de problemas se pone énfasis en las estrategias de solución, mismas que el docente explicará como parte del proceso de resolución en clase, fungiendo como modelo, mostrando alternativas de solución, aplicación de conocimiento y una forma flexible de pensar. Se propone un problema por semana.

Los problemas que finalmente fueron propuestos no se encuentran fácilmente en los textos de álgebra superior, se requiere seleccionarlos con cuidado para que sirvan a la intención principal: ilustrar diferentes estrategias metacognitivas, a la vez que se relacionan de manera importante con el curso. Obviamente no se pueden cubrir todos los contenidos del curso mediante la solución de problemas, por ello utilizamos la bibliografía recomendada para la presentación del curso, y como apoyo a los alumnos.

Pero, ¿cómo puede el docente de matemáticas ayudar al desarrollo de las habilidades metacognitivas de sus alumnos durante un curso? Nuestra propuesta es que el docente apoye al alumno con las sugerencias de Polya (2016) para la resolución de problemas, pero no de forma mecánica. Insistiendo además, en el uso de estrategias metacognitivas como parte importante del proceso, fungiendo como modelo al “pensar en voz alta”. El trabajo se realiza en 4 fases o momentos:

I. Trabajo individual para resolver un problema que se propone en clase.
II. Trabajo en parejas, cada uno comenta su estrategia para resolver el problema y tratan de ponerse de acuerdo.
III. Solución del docente o solución experta, se presenta en una clase posterior.
IV. Elaboración de un reporte de los pasos anteriores, con reflexión final libre, el cual debe ser enviado por correo electrónico en fin de semana.

Por lo tanto podemos formular el siguiente:

Objetivo específico.

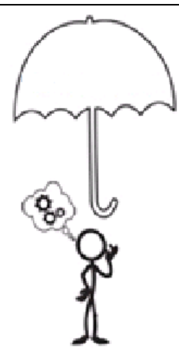
El objetivo específico es implementar el curso bajo una dinámica de 4 fases, donde se pretende resaltar algunas estrategias de solución y estrategias metacognitivas en relación a la solución de un problema semanal.

Brevemente comentamos en qué consisten las fases del trabajo.

Fase 1. Trabajo individual. Los alumnos trabajan durante 10 –15 minutos de manera individual, para que después tengan algo que aportar al trabajar con sus compañeros. Se toman en cuenta las ideas individuales, no para criticarlas negativamente, sino para “entender al alumno”. No se exige la solución, pero se debe observar qué alumnos avanzan y quienes no en esta fase.

Fase 2. Trabajo en parejas. Se pide que los alumnos formen parejas con un compañero cercano durante 10 -15 minutos.

Whimbey y Lochhead citados en Perkins (2000), proponen que la resolución de problemas sea en parejas, uno explica su solución, el otro escucha y le formula preguntas, para que resulte más claro, y se invierten los roles, método conocido como TAPPS (Thinking Aloud Pair Problem Solving**)**. La reflexión y la conciencia metacognitivas constituyen dos aspectos importantes para la solución efectiva de problemas. Cuando el estudiante está preocupado por el problema en sí, le resulta difícil manejar, al mismo tiempo, la capacidad metacognitiva. Al solucionarlo en pareja, la conciencia cognitiva se divide y pasa a desempeñar dos papeles diferentes. Se ilustra con el siguiente dibujo tomado de Conte (2013)

	
Metacognición individual	Metacognición socialmente compartida

Entre la presentación del problema, fase 1 y 2 se sugiere no consumir más de 50 minutos de clase. El curso consta de 3 sesiones a la semana, 2 sesiones de 100 minutos y una de 50 minutos.

Fase 3. Solución experta. El maestro, u otro alumno, exponen la solución que se considera mejor, porque muestra alguna estrategia interesante, aporta una nueva forma de ver el problema, o porque ahorra trabajo. Pero no en la forma tradicional,

donde el docente da una solución breve y “elegante”, sino que muestra con más detalle el proceso que lo llevo a resolver el problema. Y aunque no use los términos relacionados con la metacognición, si va ilustrando como se autorregula y como revisa su avance hacia la solución. Se insiste en la importancia de ser conscientes de algunos pasos de Polya. Hay dos partes: en una se muestran las estrategias matemáticas y en la otra las estrategias metacognitivas de manera sutil, con el ánimo de no recargar de reglas rígidas a los alumnos, porque una de las habilidades importantes a fomentar es la flexibilidad de pensamiento; es decir, la capacidad de cambiar fácilmente de enfoques o estrategias.
Es importante que los alumnos se den cuenta de la forma en que se abordan los problemas cuando el maestro piensa en voz alta, o algún otro compañero que haya tenido una buena idea, o la misma solución del maestro.

Fase 4. Autorreflexión. Deben elaborar un reporte por escrito de manera individual. Es la parte más importante del aprendizaje en esta propuesta. Los estudiantes miran hacia atrás y evalúan el trabajo realizado para averiguar lo que se aprendió y lo que no; lo que hicieron bien o no, comparan sus ideas con las de sus compañeros de manera crítica. Y en su caso deben determinar cuáles fueron las causas por las cuales no tuvieron éxito al intentar resolver el problema propuesto.

A fin de ayudar a los estudiantes en su autorreflexión, previamente se presenta la solución experta, donde el docente resalta las principales estrategias que usó para resolver el problema. La reflexión es una forma de desarrollar la metacognición como una extensión natural del proceso individual al resolver un problema, para garantizar esto, el alumno debe participar al trabajar discutiendo con sus compañeros.

Durante el curso se alienta la discusión por parejas, de otra manera sólo unos cuantos alumnos participan. Hay que resaltar que, al trabajar de esta forma los alumnos aceptan más fácilmente la solución experta, pues tienen oportunidad de compararla con la propia, y con la de otros compañeros. Pensar y/o criticar las soluciones de otros permite la reflexión sobre el proceso de resolver un problema de manera natural. En la fase 4 el alumno recrea el proceso de solución al redactar su informe que incluye sus ideas iniciales, la discusión con un compañero y la solución del profesor, esto le lleva a hacer un esfuerzo por expresar claramente sus conclusiones y sus experiencias.

Es necesario aclarar qué entendemos por ***reflexión***: considerar nuevamente y con más detenimiento la solución a un problema. En una clase con formato tradicional, la solución a un problema dada por el profesor, se ve como ajena, como algo que él propone sin que haya participación de los alumnos y por ello se olvida más fácilmente. La discusión con otros compañeros permite al estudiante una participación más plena, la solución experta da un cierre a la actividad, pero deja entrever la relación con problemas anteriores y futuros usos de las estrategias mostradas. La reflexión es repasar mentalmente los momentos clave y tomar consciencia de los nuevos conocimientos, de los aciertos y errores.

En este contexto, Díaz y Hernández (1997) comentan que se busca que los estudiantes exploren sus propios pensamientos con la intención de que valoren la eficacia de actuar reflexivamente y modifiquen más tarde su forma de enfrentar problemas similares. En base en lo anteriormente expuesto formulamos la siguiente:

Hipótesis

La aplicación de los pasos de Polya de manera reflexiva, mediante el trabajo en 4 fases, influye positivamente en el desarrollo de estrategias metacognitivas de los estudiantes y se refleja en la mejora del razonamiento lógico, evaluado con TOLT

Se espera que los alumnos den muestra, en sus reportes reflexivos, que identifican las estrategias explicadas en clase para resolver el problema propuesto. Las fases les llevarán a reflexionar, ver la solución de un problema como un proceso que es necesario supervisar, y a la autocrítica (autoevaluación) de sus avances.
El avance en la aplicación de estrategias metacognitivas al resolver problemas se evaluará de manera cualitativa durante el curso, mediante 15 reportes semanales, utilizando los cuatro niveles de metacognición propuestos por Perkins y Swartz (1991)

- El tácito.
- El consciente.
- El estratégico.
- Reflexivo.

Los estudiantes que pertenecen al nivel tácito no tienen consciencia de su conocimiento metacognitivo. Los que pertenecen al nivel consciente conocen algunas de las categorías del pensamiento que usan –generar ideas, encontrar pruebas- pero no utilizan el pensamiento estratégico. Los que pertenecen al nivel estratégico organizan su pensamiento al resolver problemas, al tomar decisiones, la búsqueda de pruebas, etc. Por último, los estudiantes que han alcanzado el nivel reflexivo no solo son estratégicos respecto del pensar sino que meditan sobre la evolución del propio pensamiento y revisan y evalúan sus estrategias y esto les lleva a tener más éxito en la solución de problemas.

Metodología del estudio

Se aplicó el Test of logical thinking (TOLT), prueba de pensamiento lógico como **pre prueba y pos prueba** a un solo grupo académico. La prueba TOLT de Tobin y Capie (1981), ha sido aplicada en múltiples estudios en ciencias y matemáticas en diferentes niveles educativos. La investigación ha determinado que la capacidad de razonamiento formal es el más fuerte predictor de éxito en estudiantes de ciencias.

Aguilar (2002) encontró que los alumnos con mayor nivel de pensamiento formal son los que mejor resuelven los problemas matemáticos. Los alumnos con razonamiento formal tienen mayor comprensión y habilidades de generalización.

Siguiendo a Hernández, Fernández y Baptista (1991), usamos los términos pre prueba y post prueba, explican además, las ventajas y desventajas de usar un diseño con uno o dos grupos con esta técnica.

Usamos la versión de TOLT en español de Acevedo y Oliva (1995), quienes hicieron un estudio para validar el test con estudiantes españoles. Para mayor claridad se reeditó el test. Incluye 10 preguntas, 8 de opción múltiple, pero con la característica de que da 5 opciones de respuesta y además da 5 opciones para que el alumno de la razón, y el ítem se considera correcto si la respuesta y la razón lo son.
Las personas con nivel de razonamiento formal (7-10 aciertos) tienen una mayor comprensión de temas abstractos. Si bien los profesores no pueden hacer mucho para aumentar la capacidad mental del estudiante, si pueden modificar sus estrategias de enseñanza para hacer los conceptos más fáciles de comprender y proponer retos donde los alumnos activen sus conocimientos y estrategias. Un estudiante de desarrollo cognitivo en crecimiento, podrá incrementar sus habilidades a través de actividades que le exijan aplicar razonamiento formal de forma progresiva.

Existen otros test como el de Longeot, que es un test sobre razonamiento combinatorio pero no se aplicó. TOLT incluye 10 preguntas, dos de ellas de combinatoria (9 y 10). Piaget (1971), es quien propone las características del razonamiento formal: razonamiento proporcional, correlación de variables, control de variables, probabilidad, combinatoria. Deaño en la introducción al libro "Lógica y psicología" de Piaget (1977), comenta que: "*en la conducta del sujeto se pueden observar regularidades, es decir, que el sujeto, aunque él mismo no se percate de ello actúa de acuerdo con unas reglas. Ello supone, qué a su vez, que la inteligencia del sujeto no es un puro haz de conductas en respuesta a unos estímulos, sino que posee una estructura desde la cual aquél se enfrenta con los problemas*".

Esta estructura es la que explica por qué los alumnos persisten en dar respuestas que nada tienen que ver con la enseñanza en ciencias, es decir, tal parece que no se han apropiado de las leyes científicas y contestan de acuerdo a sus concepciones previas a la instrucción. Esto es más persistente de lo que los maestros creen, Hierrezuelo y Montero (1998) lo explican ampliamente. Así, el resultado de un test como TOLT, si refleja el estado de avance el razonamiento formal, mismo que se corrobora, especialmente con los alumnos con bajo puntaje: sus soluciones a problemas matemáticos muestran poca generalidad, es decir todavía razonan a nivel aritmético, no usan el álgebra con soltura para tratar el caso general.

Si concebimos el pensamiento como dirigido hacia una meta y con un propósito, entonces debemos reconocer que las metas del que se somete a la prueba pueden no ser las de quien aplica la prueba, y las metas del alumno, pueden no ser las mismas que las del maestro, de esta forma Keating (2001) nos previene de que nuestro sistema cerrado de enseñanza pretende producir excelentes resultados pero no se toman en cuenta las motivaciones de los jóvenes. Así, el test aplicado y las actividades simplemente pueden no estar en sintonía con los intereses de los alumnos y esto repercute en su desempeño.

Adey y Shayer (1999) encuentran que únicamente un 30% de alumnos de 16 años alcanzan la etapa de razonamiento formal, por lo cual actualmente se reconoce que este tipo de razonamiento no se alcanza según los planteamientos originales de Piaget. Y plantean 5 pilares para su proyecto (CASE). El primero es la suposición de que la capacidad de procesamiento de la mente crece paulatinamente en respuesta a la demanda que se le haga al enfrentarse a algún problema, otro es la metacognición.

Hay varios cuestionarios para estudiar el uso de estrategias metacognitivas, por ejemplo el inventario de habilidades (MAI) de Schraw y Dennison (1994), consta de 52 preguntas. Pero preferimos revisar el proceso después de resolver cada uno de los problemas propuestos mediante las 4 fases, la metacognición en acción, tal y como es expresada por los alumnos. Sherman y Webb (1988), resumen las características de la investigación cualitativa señalando que el término cualitativo implica una preocupación directa por la experiencia tal y como es vivida, sentida o experimentada por los sujetos.

La población del estudio fueron los estudiantes de un grupo, que cursaron teoría de ecuaciones en la FCFM, BUAP. Esta materia se cursa en el segundo semestre y forma parte del tronco común de las 5 carreras que se ofrecen.

Siguiendo los consejos de Schmelkes (2014), es oportuno indicar el marco institucional, dado que la muestra es un grupo académico de la FCFM, BUAP. Es conocido que los alumnos de físico matemáticas, al momento de ingresar no representan un grupo con alto puntaje obtenido en el examen de admisión, comparado con otras facultades. No tuve acceso a los puntajes de admisión de los alumnos. Varios alumnos provienen de estados circunvecinos, por lo cual es de esperarse que su preparación anterior sea diversa. Por ello supuse que sus conocimientos de álgebra eran básicos y no insistí más en tomar datos sobre sus características, por ejemplo tipo de bachillerato de procedencia, edad, etc. También esperaba un 10% de deserción o falta de asistencia regular al curso desde el inicio

en comparación con la lista oficial de inscritos. No conocía de manera previa a ninguno de los alumnos, por lo cual no tenía idea de su grado de entusiasmo para trabajar.
Existen varias tesis donde se aborda la problemática que viven los alumnos de FCFM entre ellas podemos mencionar la de Hernández (2013): “Uso del Modelo de Regresión Logística para Estudiar la aprobación de la materia de Matemáticas Básicas de la FCFM en las Generaciones 2010 y 2011”. Misma que puede consultarse en línea en la página de FCFM. Matemáticas básicas en un curso que se toma en primer semestre y es pre requisito para el Teoría de ecuaciones. La tesis presenta datos interesantes pero únicamente destacamos la siguiente gráfica:

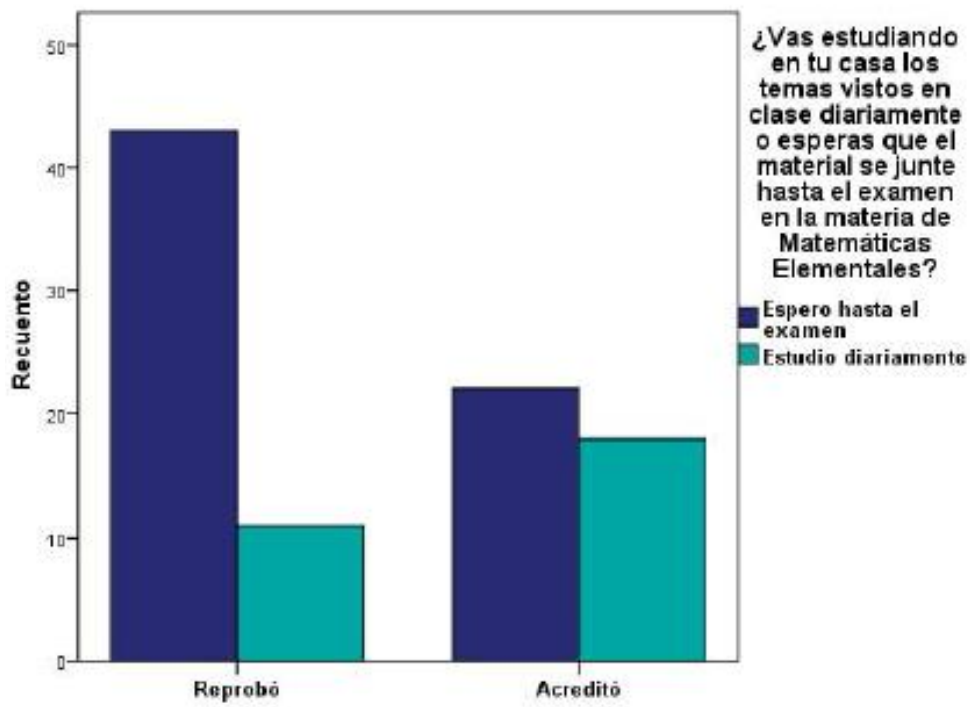


Figura 4.52

En general los alumnos no tienen buenos hábitos de estudio para prepararse para un examen parcial. Este tipo de información se buscó hasta el final del trabajo. Se incluye con la intención de mostrar que los alumnos no tienen buenos hábitos para el trabajo académico y esto repercute en el trabajo diario en nuestra Facultad y desde esta óptica se pueden valorar mejor los resultados obtenidos en este trabajo.

CAPÍTULO 2

METACOGNICIÓN Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

2.1 Metacognición

Un punto importante que ayuda a explicar el escaso éxito en la enseñanza de las matemáticas es que el trabajo docente no tiene en cuenta la naturaleza del aprendizaje. Bransford, Brown y Cocking (2003) proponen 3 principios de aprendizaje.

1. Los estudiantes llegan al aula con concepciones previas acerca de cómo funciona el mundo. Si no se incorpora al estudio esta comprensión inicial, es posible que ellos no asimilen los nuevos conceptos e información que se les están enseñando; o puede suceder que los aprendan para responder un examen, pero que, fuera del aula, regresen a sus concepciones previas.

2. Para desarrollar la competencia en un área de conocimiento, los estudiantes deben:
(a) Tener una base profunda de saberes concretos;
(b) Comprender hechos e ideas en el contexto de un marco conceptual; y
(c) Organizar los saberes en formas que faciliten el acceso a ellos y su aplicación.

3. Un enfoque "metacognitivo" de la enseñanza puede ayudar a los estudiantes a aprender a asumir el control de su propio aprendizaje, por medio de la definición de metas, y de la permanente vigilancia de su progreso hacia el logro de ellas.

Y proponen que la enseñanza de habilidades metacognitivas debe integrarse en el plan de estudios en una variedad de áreas temáticas. Debido a que a menudo la metacognición toma la forma de un diálogo interno, muchos estudiantes pueden no ser conscientes de su importancia a menos que los procesos se enfaticen de forma explícita por los profesores.

Con anterioridad en 1990 la American Psychological Association (APA) propone los principios psicológicos centrados en el aprendiz (learner-centered psychological principles) para nosotros son de resaltar los principios 4 y 5.

- Pensamiento estratégico. El estudiante exitoso puede crear y utilizar un repertorio de pensamiento y estrategias de razonamiento para lograr metas de aprendizaje complejas.

- Pensar sobre el pensamiento. Estrategias de orden superior para la selección y supervisión de operaciones mentales facilitan el pensamiento crítico y creativo.

Según Burón (2007), la metacognición se destaca por cuatro características:

- Llegar a conocer los objetivos que se quieren alcanzar con el esfuerzo mental.
- Posibilidad de la elección de las estrategias para conseguir los objetivos planteados.
- Auto observación del propio proceso de elaboración de conocimientos, para comprobar si las estrategias elegidas son las adecuadas.
- Evaluación de los resultados para saber hasta qué punto se han logrado los objetivos.

Como podemos ver Burón considera un espectro muy amplio, en este trabajo insistimos en la metacognición en relación a la solución de problemas. Es claro que toda persona realiza varios procesos mentales cuando resuelve un problema. Se pueden considerar las destrezas metacognitivas como la habilidad de ser crítico con la propia resolución de un problema. Aunque normalmente es el profesor quien critica el trabajo de los alumnos, señalando errores; el objetivo es transferir poco a poco el rol crítico del profesor al estudiante.

Un problema de las habilidades metacognitivas es que generalmente están cubiertas e implícitas en la ejecución experta. Para enseñar esas habilidades y cuándo usarlas, el profesor tiene que lograr que la metacognición sea abierta y explícita mediante el diálogo grupal. El diálogo grupal consiste en que los estudiantes pasan al pizarrón a explicar su solución, los demás alumnos participan opinando, el docente los cuestiona ¿tienes una razón para pensar así? Los alumnos deben argumentar. Esta discusión grupal permite hacer público y compartir las ideas, los razonamientos, la planificación y la supervisión. Los alumnos empiezan a ver los procesos cognitivos en acción y a entender como pueden ser supervisados y controlados. No se aplicó esta técnica, porque se dio preferencia a la solución experta y a la fase 4 de reflexión, los estudiantes discutían en pareja. La idea central es que el experto modela la forma de resolver un problema, resaltando algunos pasos en el proceso de solución, por ejemplo cómo superar los errores iniciales, cuando considerar oportuno usar un plan B, identificar claramente los subojetivos.

El problema de enseñar habilidades metacognitivas en relación a la solución de problemas no es sencillo, toda vez que no basta un curso curricular, o asistir a un taller de resolución de problemas. Soto (2003), nos comenta sobre la paradoja de Augusto Comte:

El pensador no puede dividirse a sí mismo en dos, uno de los cuales razona mientras el otro observa su razonamiento. El sujeto observado y el sujeto que observa en este caso son, los mismos. Entonces ¿cómo es posible, en estos casos, la observación? Es muy claro que para Comte, la introspección no era posible. Se trata de dar respuesta a la pregunta: ¿Cómo es posible que tal fenómeno exista?, es decir ¿cómo es posible que el sujeto sea al mismo tiempo el observador?

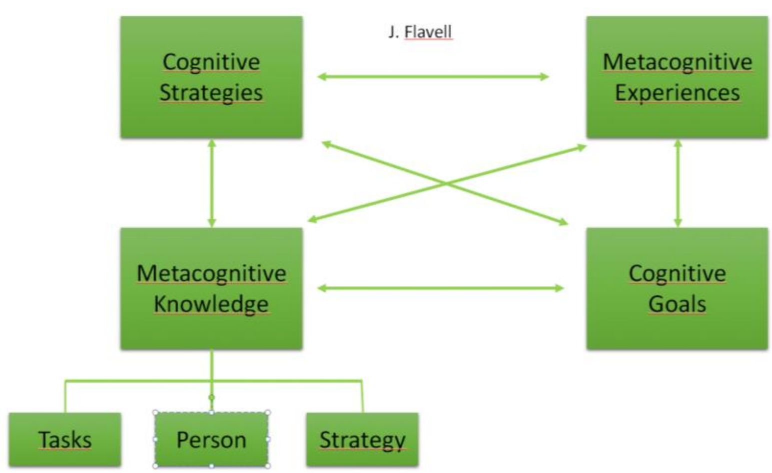
Esto nos muestra que no es tan fácil desarrollar habilidades metacognitivas en los estudiantes al momento de resolver problemas matemáticos. Cuando se le pide a un novato que durante la solución de problemas, controle o ejerza una acción de supervisión sobre sus procesos de pensamiento, no puede hacer las dos cosas al mismo tiempo, está confundido tratando de resolver el problema ¿cómo le pedimos que ejerza control? Por ello Perkins (2000) propone, que es mejor trabajar en pareja, así los papeles se reparten, y poco a poco el alumno puede ir interiorizando las estrategias, lo que nos recuerda a Vygotsky (1999): lo que podemos hacer hoy con ayuda de otros, mañana seremos capaces de hacerlo solos.

Cada persona tiene de alguna manera habilidades metacognitivas, algunas veces en forma inconsciente. De acuerdo a los métodos utilizados por los profesores durante la enseñanza, pueden alentarse o desalentarse las habilidades metacognitivas de los estudiantes.

Revisamos rápidamente a los autores pioneros en el tema. Es John Flavell, citado en Burón (2007), quien acuña este término y lo define como:

…"el conocimiento que uno tiene acerca de los propios procesos y productos cognitivos o cualquier otro asunto relacionado con ellos, por ejemplo, las propiedades de la información relevante para el aprendizaje. Así practico la metacognición (metamemoria, metaaprendizaje, metaatención, metalenguaje, etc.) cuando caigo en la cuenta de que tengo más dificultad en aprender A que B; cuando comprendo que debo verificar por segunda vez C antes de aceptarlo como un hecho; cuando se me ocurre que haría bien en examinar todas y cada una de las alternativas en una elección múltiple antes de decidir cuál es la mejor, cuando advierto que debería tomar nota de D porque puedo olvidarlo… la metacognición hace referencia, entre otras cosas, a la supervisión activa y consecuente regulación y organización de estos procesos en relación con los objetos o datos cognitivos sobre los que actúan, normalmente al servicio de alguna meta u objetivo concreto"

Modelo de J. H. Flavell



El conocimiento metacognitivo está estructurado a partir de tres tipos de variables o categorías que se relacionan entre sí, citado en Díaz Barriga (1998).
Variable de la persona: se refiere a los conocimientos o creencias que una persona

tiene sobre sus propios conocimientos, sobre sus capacidades y limitaciones como aprendiz.
La variable de la tarea: son los conocimientos que un aprendiz posee sobre las características intrínsecas de las tareas y de éstas en relación con el mismo.
La variable de la estrategia: son los conocimientos que un aprendiz tiene sobre las distintas estrategias y técnicas que posee para diferentes empresas cognitivas.

Las experiencias metacognitivas son aquellas en que el sujeto es consciente sobre asuntos cognitivos o afectivos. No cualquier experiencia es metacognitiva. Para que pueda considerarse como tal, es necesario que posea relación con alguna tarea o empresa cognitiva, por ejemplo cuando uno siente que algo es difícil de aprender, comprender o solucionar, o cuando uno siente que está lejos de conseguir la realización completa de una tarea cognitiva o cuando uno cree que está cada vez más próximo a conseguirla. Las experiencias metacognitivas pueden ocurrir antes, durante o después de la realización del proceso cognitivo, pueden ser momentáneas o prolongadas, simples o complejas. Flavell (1987) menciona las siguientes situaciones, en donde las experiencias metacognitivas pueden ocurrir con mayor probabilidad:

- Si la situación explícitamente las demanda o las solicita.
- Si la situación cognitiva fluctúa entre lo nuevo y lo familiar.
- Cuando se plantean situaciones donde se juzga importante hacer inferencias, juicios y decisiones.
- Si la actividad cognitiva se encuentra con alguna situación o problema u obstáculo que dificulte su realización.
- Si los recursos atencionales o mnemónicos no son enmascarados por alguna otra experiencia subjetiva más urgente (miedo, ansiedad)

Brown indica que el conocimiento y comprensión acerca de la cognición es del tipo “estable, constatable y falible”, citado por Díaz (1998). El conocimiento que tiene una persona sobre su propio conocimiento es relativamente estable, porque lo que se sabe sobre alguna área de la cognición no suele variar de una situación a otra; es constatable porque cualquiera “puede reflexionar sobre sus procesos cognitivos… y discutirlos con otros”. Y por último es considerado falible porque “el niño o el adulto pueden conocer ciertos hechos acerca de su cognición que (verdaderamente) no son ciertos”.
Hay que observar que en el extremo opuesto tenemos la **metaignorancia** o ilusión de saber: incapacidad para distinguir entre saber y no saber, de la falta de consciencia de la no-comprensión, de la sensación de no entender. La capacidad para discernir cuando se comprende y cuando no. Ignorar la propia ignorancia, Burón (2007). Por ejemplo, la ilusión de saber se presenta cuando niños pequeños aprenden a leer palabra por palabra, pero no entienden las oraciones, y los alumnos al salir de un examen de opción múltiple y que creen que lo resolvieron bien. La clase tradicional provoca “**ilusión de saber**”, porque el alumno no es exigido, no es cuestionado y por tanto no moviliza sus recursos cognitivos día a día y por ello se vuelve costumbre estudiar solo para el examen. No practica las habilidades que supuestamente debe ir adquiriendo, posteriormente el docente espera que rinda un

buen examen. Si el maestro conoce el trabajo de sus alumnos en clase tiene oportunidad de ver cuáles son sus verdaderos conocimientos y habilidades, con esta base puede planear mejor las clases futuras.

¿Es necesario enseñar estrategias metacognitivas?

Cuando un maestro de primaria pregunta a un alumno: ¿cómo has resuelto el problema? ¿Qué estrategia has usado? ¿Cómo has llegado al resultado? Es frecuente la respuesta “no lo sé, simplemente lo resolví y este es el resultado”. Normalmente esto mejora con la edad pero a condición de que el maestro solicite una explicación del proceso de solución. Pintrich (2000), observa que cuando los estudiantes conocen los diferentes tipos de estrategias para el aprendizaje, pensamiento y resolución de problemas será más probable que las utilicen. Por tanto la **respuesta es sí.**
Para que un alumno pueda poner en práctica una estrategia, antes debe tener conocimiento de estrategias específicas, saber cómo, cuándo y por qué debe usarlas. A través de autoregulación, es posible observar la eficacia de las estrategias elegidas y cambiarlas según la percepción de avance hacia la solución del problema. Dominar una estrategia, no significa solamente saber realizar o ejecutar correctamente las distintas operaciones de un procedimiento, significa sobre todo saber cuándo y por qué, es decir, en qué circunstancias esa técnica será útil.

El desarrollo metacognitivo es motivacional por su naturaleza: un alumno metacognitivamente desarrollado generalmente conoce el esfuerzo que requiere una tarea, posee recursos para realizarla, tiene consciencia de que el esfuerzo le lleva a un rendimiento superior y, por consiguiente, está motivado. El sentirse eficaz es una fuente poderosa de motivación, Burón (2007). Por ello es importante, en nuestro caso, la selección de los primeros problemas, y apoyar al estudiante, si la tarea es muy difícil se desmotiva, poco a poco debe aumentarse la dificultad.

Cuando un alumno no trabaja en un problema ¿le falta motivación o no sabe cómo realizar la tarea? Un docente puede pensar que el alumno es flojo, pero debe considerarse seriamente, si la causa es que desconoce las estrategias para enfrentar el problema o la tarea propuesta por él. En nuestro caso tratamos que los enunciados de los problemas fueran llamativos, por lo cual se incluían imágenes en el enunciado que se publicaba en Facebook. En especial los problemas con triángulos numéricos, requieren se encuentre un patrón, y por ello todos los alumnos pueden participar, aun si sus ideas no son del todo acertadas, en el capítulo se presentan dichos problemas. El docente debe tener claro qué prácticas favorecen la metacognición, según Ormrod (2005) debemos tener presente:

- Los estudiantes aprenden las estrategias de forma más eficaz cuando se les enseñan dentro del contexto de materias específicas y en tareas de aprendizaje académico reales.
- Los estudiantes pueden usar estrategias de aprendizaje sofisticadas sólo cuando tienen una base adecuada de conocimientos con la que relacionar el

material nuevo.

- Los estudiantes deberían aprender una diversidad de estrategias, así como las situaciones para las cuales cada una de ellas es adecuada.
- Las estrategias eficaces se deberían practicar en una variedad de tareas y de forma regular.
- La instrucción en estrategias debería incluir tanto las estrategias evidentes como las encubiertas.
- Los profesores pueden ser un modelo útil en el uso de estrategias efectivas pensando en voz alta sobre el material nuevo.
- Los profesores deberían usar el andamiaje en los primeros intentos de los alumnos de emplear estrategias nuevas e ir quitándolo gradualmente conforme son más expertos.
- Los estudiantes pueden aprender estrategias eficaces al trabajar de forma cooperativa con los compañeros de clase.
- Los estudiantes deben entender por qué son útiles las habilidades que se les están enseñando.

2.2 Solución de problemas y metacognición

Es importante comentar acerca de la solución de problemas matemáticos y metacognición, porque no son las mismas estrategias con relación a la comprensión lectora; Brown y Palincsar (1984) entre otros han trabajado sobre enseñanza de estrategias metacognitivas relacionadas con la lectura. Pero a nosotros nos interesa: ¿Cómo puede el docente ayudar al desarrollo de las habilidades metacognitivas de sus alumnos cuando resuelven problemas? Apoyando el aprendizaje de nuevas estrategias y aplicando los pasos de Polya para la resolución de problemas de manera reflexiva. El docente actúa de monitor cuando un alumno resuelve problemas en clase.

Es necesario aclarar que hay dos clases de monitoreo uno interno y otro externo (maestro o un compañero). El monitor es quien nos recuerda algún punto importante que omitimos al trabajar en la solución de un problema. Es interesante lo que indica el diccionario de Real Academia del Español (RAE) sobre el término **monito**r:

- *Subalterno que acompañaba en el foro al orador romano, para recordarle y presentarle los documentos y objetos de que debía servirse en su peroración.*
- *Esclavo que acompañaba a su señor en las calles para recordarle los nombres de las personas a quienes iba encontrando*.

Este es el sentido que damos a “monitor”, persona (el docente) que ayuda a recordar alguna estrategia que reoriente el trabajo del alumno, ver más adelante el comentario sobre trabajo de Lester y Garafalo (1985). Por su parte Mason, Burton y Stacey (2013) sugieren desarrollar un monitor interno. Así el aprendizaje se produce con ayuda externa y poco a poco el alumno debe internalizar las estrategias. Esto es importante porque algunos autores usan el término “monitorear” para indicar supervisión del proceso de resolver un problema.

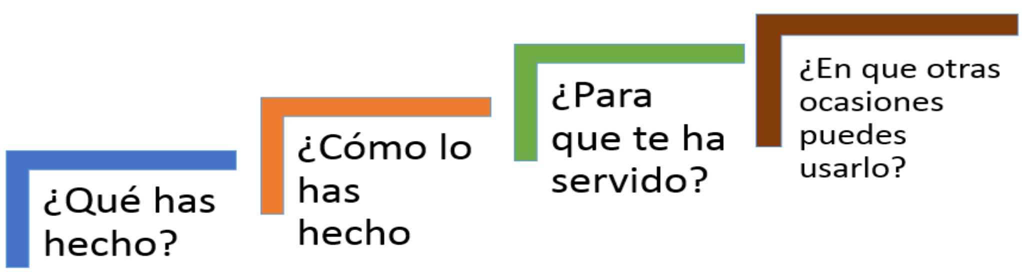
Una situación problemática detona la actividad cognitiva, pero debe ser accesible y debe permitir al alumno utilizar conocimientos previos. González (2008) comenta que realizar una acción metacognitiva consiste en convertir la actividad propia en un objeto sobre el cual se ejerce algún tipo de acción cognitiva (analizar, revisar, modificar). Esto puede hacerse concurrentemente o en forma retrospectiva, es decir reflexionando acerca del pensamiento propio en el instante en que se está ejecutando un determinado proceso cognitivo, o hacerlo a posteriori. Durante la actividad metacognitiva el sujeto transforma en objeto de reflexión:

- Las acciones que despliega durante el desarrollo de la tarea, comparar los logros intermedios obtenidos con la situación deseada final; en caso de que haya discrepancia, es el momento de hacer alto ¿Qué estoy haciendo? ¿Hacia dónde voy? ¿Qué tanto me estoy alejando de la meta? ¿Es necesario volver a tras o releer el enunciado? ¿Debo buscar otro plan de ataque?
- Sus estados emocionales, su grado de satisfacción con la tarea que está realizando.
- Darse cuenta claramente ¿que necesito para resolver el problema? Cuento con…

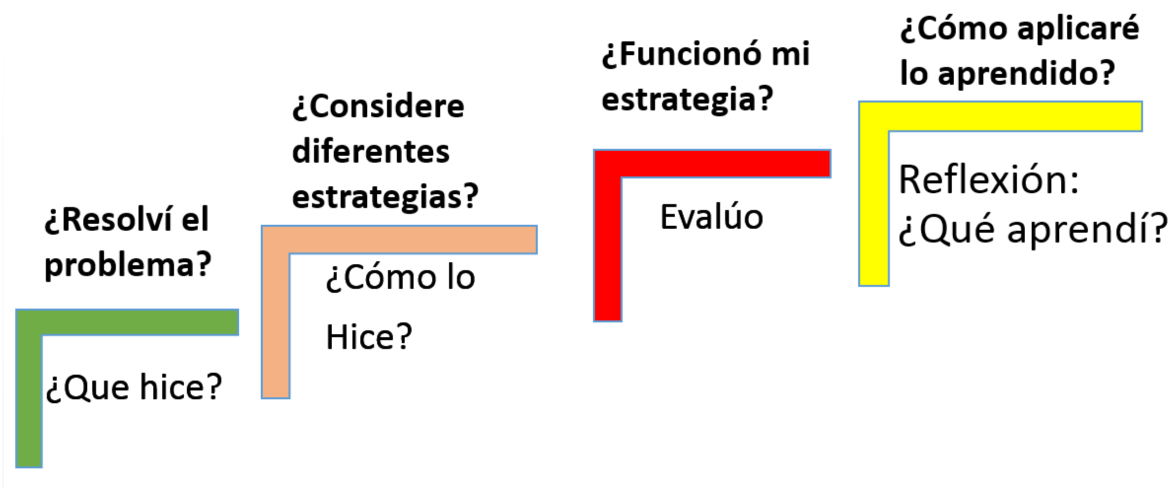
Por lo tanto, el alumno con ayuda del docente debe adquirir habilidades metacognitivas para tener un mejor proceso cuando resuelve un problema. En este sentido Swartz y Perkins (2014) proponen la "escalera metacognitiva":

1. Cobrar conciencia del proceso de pensamiento que estamos llevando a cabo.
2. Describir cómo nos involucramos en el proceso de pensamiento.
3. Evaluar si lo hemos llevado a cabo de forma eficaz.
4. Planificar la ejecución del proceso de pensamiento la próxima vez que tengamos que hacerlo.

Esta idea ha servido para hacer diferentes representaciones gráficas, por ejemplo:



Con base en esta idea nosotros proponemos una versión modificada para poder aplicar la "escalera metacognitiva" a la reflexión del proceso de solución de un problema. Además representa el espíritu de las 4 fases propuestas a los alumnos.



Perkins (2010) comenta que se doctoró en Matemáticas, pero después se dedicó a la educación. Es muy interesante para nuestros fines el siguiente párrafo:

"*Era bastante bueno para resolver problemas matemáticos, pero solo después de mucho tiempo descubrí cómo era bueno. Cuando estaba absorto en la matemática, no tomaba distancia para analizar el enfoque estratégico que utilizaba. Debo mi descubrimiento a una conocida obra clásica denominada "Como plantear y resolver problemas", cuyo autor es el matemático George Polya. Polya sostenía que el secreto de la resolución de los problemas matemáticos consistía en realizar buenas jugadas estratégicas, a las que llamaba* ***reglas*** *heurísticas. Las buenas reglas heurísticas incluían por ejemplo descomponer un problema en partes, relacionar un problema con otro resuelto con anterioridad, hacer un diagrama… Cuando descubrí la obra de Polya, me pregunté: ¿Tiene razón? ¿Utilizo las distintas reglas heurísticas? Hice un experimento deliberado conmigo mismo: busque tres o cuatro problemas matemáticos, me puse a resolverlos y presté especial atención a mi propio proceso de pensamiento, para lo cual tomé notas breves mientras resolvía los problemas.*
Para mi sorpresa, descubrí que estaba usando el juego oculto de Polya. Durante los años que pasé estudiando matemáticas, había utilizado el método de resolución estratégica de problemas sugerido por Polya sin ni siquiera saberlo. No quiero decir que las reglas heurísticas estuvieran funcionando de un modo inconsciente. Cuando descomponía un problema en partes, hacia un diagrama o examinaba casos específicos, sin duda sabía que lo estaba haciendo para poder resolver el problema. Sin embargo, si alguien me hubiera preguntado durante esos años: ¿Qué haces para resolver problemas?, no hubiera recitado mi lista de trucos. Los sabía al resolver en el momento, pero no al de dar una explicación global.

Nos ilustra claramente dos puntos:

- Es común que un estudiante sea bueno resolviendo problemas, pero que no sea capaz de explicar claramente cuáles son sus estrategias.
- A pesar de las críticas al método de Polya, en el sentido de que no son suficientes para hacer que cualquier estudiante sea bueno resolviendo problemas, de que parece una receta fácil, pero al final su práctica mecánica rinde pocos resultados. Un estudiante capaz de resolver problemas matemáticos, utiliza varias heurísticas de las propuestas por Polya sin

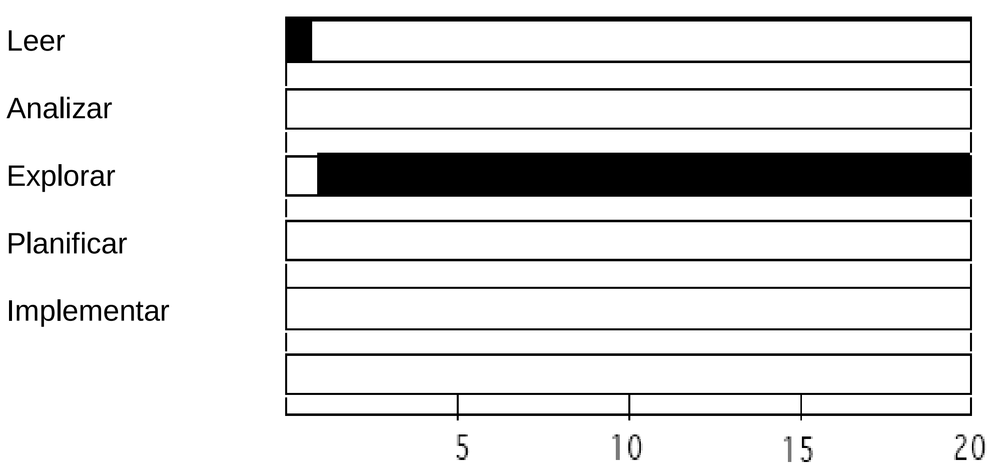
saberlo o sin ser plenamente consciente por falta de comunicación con sus pares, donde trate de ser explícito en su forma de atacar un problema.

El error es pensar que el método de Polya rinde frutos en el corto plazo, y que su práctica como receta es infalible. Perkins comenta también que los alumnos pueden aprender las estrategias pero que se convierten en “conocimiento inerte”, porque no las saben aplicar, a menos que se les sugiera. Interpreta la investigación de Schoenfeld en el sentido de que “*comprobó que el elemento más importante que faltaba era la autogestión”*, para nosotros “autorreflexión sobre el proceso” y práctica constante durante un curso.

Ser conscientes de nuestros pensamientos cuando resolvemos un problema, nos permite tener un mejor diálogo con nosotros mismos. La metacognición toma la forma de una voz interna, nosotros nos convertimos en nuestro propio monitor. Perkins nos ha compartido como se volvió más consciente de su forma de resolver problemas. Cuando varios autores critican el método de Polya, dicen que basó su método en su propia introspección en lugar de observar a sus alumnos, están olvidando el carácter introspectivo de la metacognición, y que el maestro solo puede ayudar al alumno desde las propias vivencias al resolver un problema, no se puede sustituir el trabajo del alumno. Se trata de orientar al alumno cuando está confundido, pero esto no excluye que con práctica el alumno llegue a ser más listo que nosotros y llegue por su propio camino a una mejor solución. La intención es ayudarle a dar sus “primeros pasos”, en la solución de problemas. Con la práctica consciente logrará la autonomía. Ahora se sabe que esta guía es mejor si también se tiene en cuenta los aspectos metacognitivos, ¡Polya no lo sabía!

2.3 El trabajo de Alan Schoenfeld.

El trabajo de Schoenfeld constituye nuestro marco de referencia respecto de la solución de problemas matemáticos en contexto escolar. Consideramos con cierto detalle su trabajo porque nos ilustra claramente porqué es difícil trabajar bajo un enfoque de resolución de problemas. Hay varios factores a considerar, cuando el docente plantea un problema espera que sus alumnos movilicen sus conocimientos previos, pero ellos muestran claramente que solo son capaces de aplicarlos en el nivel de repetir ejercicios semejantes. Esto refleja un aprendizaje basado en la mecanización. La figura 1 muestra el gráfico del intento de resolver un problema de un **par de estudiantes** trabajando como equipo.



Verificar

Figura 1.

Los estudiantes leyeron el problema, rápidamente escogieron un acercamiento y se mantuvieron en su enfoque. Ellos se mantuvieron trabajando, a pesar de clara evidencia de que no estaban haciendo progresos en los 20 minutos asignados al problema. Y al final se les preguntó ¿cómo es que su aproximación podría haberles ayudado? Ellos no lo pudieron decir.

En el gráfico se puede ver que los alumnos son poco eficientes porque no supervisan su avance. Se ve que los alumnos no diversifican sus actividades mentales, por ejemplo, nunca vuelven a leer el problema ni verifican su solución. Trabajan con la primera idea que les viene a la mente y no consideran otras alternativas. Tal comportamiento no aparece cuando los estudiantes trabajan ejercicios de rutina. En un examen sobre una unidad específica, por ejemplo, ecuaciones cuadráticas, ellos saben que deben utilizar la fórmula general, pero cuando los estudiantes están resolviendo problemas reales, trabajando sobre problemas no familiares o problemas fuera del contexto escolar tal comportamiento refleja más bien una norma.
Schoenfeld encontró que estudiantes trabajando problemas no familiares aproximadamente en el 60 % de los intentos de solución son: "*Leo, hago una decisión rápidamente y prosigo esa dirección sin importar que vaya al infierno o una caída de agua".* Una rápida decisión, es una mala decisión, es una garantía de fracaso. Schoenfeld lo describe metafóricamente, diciendo que cuando los alumnos resuelven un problema, se comportan como si estuvieran "corriendo detrás de una gallina". Es difícil saber qué pasa por la mente de la mayoría de los alumnos, pero si percibo claramente mayor confusión en los alumnos con bajo nivel de razonamiento y que usan estrategias básicas como ensayo y error o hacer una tabla. El docente debe ayudar a los alumnos a considerar que debemos cambiar de plan cuando no vemos avances con nuestra primera idea.

Schoenfeld (1985) indica claramente que resolver problemas se ve afectado por varios factores:

- Recursos
- Heurísticas
- Control
- Sistema de creencias

Esto nos muestra porqué es complicado tener éxito en el corto plazo, cuando se implementa la solución de problemas dentro de un curso. En este trabajo nos interesa el punto 3, pero vamos por partes.

1. Los recursos (conocimiento base)

Schoenfeld identifica cinco tipos de conocimiento:

1. Conocimiento informal e intuitivo acerca del dominio (la disciplina) o del problema por resolver.
2. Hechos y definiciones. Durante el proceso de resolución de un problema el estudiante debe utilizar algunos hechos necesarios para plantear o seleccionar algún camino de solución.
3. Procedimientos rutinarios.
4. Conocimiento acerca del discurso del dominio. La percepción que el estudiante tenga acerca de las reglas al resolver un problema determinará la dirección y los recursos que utiliza en el proceso de solución.
5. Errores consistentes o recursos débiles. Cuando un estudiante comete un gran número de errores en procedimientos simples se puede pensar que es el resultado de un mal aprendizaje.

Pero además, en un curso curricular el maestro intenta que los alumnos aprendan nuevos conceptos y las apliquen en nuevos problemas, lo que hace más complicada la labor docente.

2. Heurísticas

¿Cómo deben ser enseñadas éstas a los estudiantes? Parece que no es suficiente que el alumno conozca las diversas estrategias, sino que es importante que participe en experiencias relacionadas con el cuándo y cómo utilizarlas. Schoenfeld propone algunas heurísticas importantes en la solución de problemas:

Analizando y comprendiendo el problema

- Dibujar un diagrama siempre que sea posible
- Examine casos especiales
- Trate de simplificar usando simetría o “sin pérdida de generalidad”

Diseñando y planificando una solución

- Planifica soluciones jerárquicamente.
- De ser posible explica, en cualquier punto de una solución que estás haciendo y por qué. Que harás con el resultado de esta operación.
- Explorando soluciones a problemas difíciles.
- Considera una variedad de problemas equivalentes.
- Reemplaza condiciones por otras equivalentes.
- Recombina elementos del problema de modos diferentes.
- Introduce elementos auxiliares.

Reformulando el problema por medio de:

- Cambio de perspectiva o de notación.
- Argumentando por contradicción o por contrapositiva.
- Suponiendo una solución y determinando las propiedades que debe de tener.

Considera ligeras modificaciones al problema original:

- Escoge subobjetivos y trata de alcanzarlos.
- Relaja una condición y entonces trata de comprenderla.
- Descompón el problema y trabaja en cada una de las partes.
- Considera amplias modificaciones al problema original.
- Examina problemas análogos con menor complejidad (menos variables).
- Explora el rol de una variable o condición dejando las demás fijas.
- Explota cualquier problema de forma similar, datos o conclusiones; trata de explotar el resultado o el método.
- Verifica la solución.
- Use pruebas específicas: ¿Use todos los datos?, ¿El resultado está conforme a estimaciones razonables? ¿Pasa pruebas de simetría, análisis dimensional o de escala?
- Usa pruebas generales: ¿puede obtenerse el resultado de manera diferente? ¿Sustituyendo por casos especiales? ¿Puede generar algo conocido?

Pero como puede observarse fácilmente algunas pueden considerarse que son "sofisticadas" para un alumno con poca experiencia resolviendo problemas, que es importante distinguirlos de los ejercicios. Además la lista es muy grande, podemos perdernos en ella, buscando cual es la más adecuada para resolver nuestro problema, por ello es recomendable usar una versión simplificada y fácil de recordar.

3. Control

Schoenfeld explica que el **control** tiene que ver con las decisiones globales con respecto a la selección e implementación de recursos y estrategias. Y propone 4 formas de ejercer control:

- Planeación.
- Supervisión y evaluación.
- Toma de decisiones.
- Actos metacognitivos conscientes.

Las acciones que involucran un control incluyen:

- Tener claridad acerca de lo que trata el problema antes de iniciar el proceso de resolución.
- Considerar varias formas de resolver el problema y seleccionar un método particular a partir de una evaluación en relación con su utilidad.
- **Supervisar** el proceso y decidir cuándo abandonar algún camino que no esté produciendo resultados.
- Revisar el proceso de solución y evaluar la respuesta obtenida.

Schoenfeld identifica tres categorías donde se presenta la **metacognición.**

- El conocimiento acerca de nuestro propio proceso, descripción de nuestro propio proceso de pensar.

- El control y la autorregulación.
- Creencias e intuiciones.

2.4 Diferentes modelos para resolver problemas

Existen muchos enfoques en la resolución de problemas dado el gran número de autores que han realizado estudios e investigaciones en este tema. La preocupación por conseguir que los alumnos sean buenos al resolver problemas, ha llevado a determinar diferentes fases en el proceso de resolución. Existen diferentes autores que proponen métodos para la resolución de problemas como: Polya, IDEAL de Bransford, Miguel de Guzmán, de Mason, Burton, Stacey. Creo que es importante mencionar algunos autores para poder comparar con el modelo de F. K. Lester, mismo que comentamos un poco más adelante en detalle, porque intenta claramente que el docente ayude a sus alumnos a desarrollar la metacognición.

El método de Polya

El método de George Polya es muy conocido por lo cual no lo repetiremos, sin embargo puede ver su lista de sugerencias en el anexo 2. Polya estableció cuatro etapas, que sirvieron de referencia para muchos planteamientos y modelos posteriores, en los que se fueron añadiendo nuevos matices, si bien el esquema básico de todos ellos se mantiene tal como lo reconoce, por ejemplo de Guzmán (1994). Pero a nuestro juicio Polya indica claramente que el propósito es que el docente ayude a sus alumnos sin imponerse, mediante las preguntas que indiquen una dirección general, pero dejando al alumno mucho por hacer; para que con el tiempo sea el alumno quien se las formule al trabajar de manera individual**.** Por ello algunas críticas a Polya, en mi opinión, no son acertadas, pues indica claramente su propósito: ayudar al alumno, no dar un método infalible. Comenta claramente que sus propuestas son generales, por lo tanto no sirven de mucho en problemas particulares. Las estrategias concretas con las que se intentara resolver un problema corren a cargo del docente insinuarlas, pues cualquier lista de sugerencias resulta demasiado larga. ¿Qué estrategia puedo seleccionar para este problema? Por lo tanto, un método sensato es proponer problemas dentro del contexto de una materia, donde el docente debe seleccionar cuidadosamente la secuencia de problemas para resaltar las estrategias más importantes y al mismo ir avanzando poco a poco hacia los objetivos propios de la materia. Y servir como monitor externo.

El método IDEAL

I = Identificación del problema.
D = Definición y representación.
E = Exploración de distintas estrategias.
A = Actuación fundada en la estrategia.
L = Logros, observación y evaluación de los efectos de nuestras actividades.

Este método es propuesto por Bransford y Stein, citado en Pozo (1998). Este método puede aplicarse a problemas de la vida real, donde no existen soluciones definitivas, por ello es importante evaluar si se tienen avances (logros).

Es interesante la idea de explorar buscando una estrategia, porque no debemos aferrarnos a la primera idea que nos venga a la mente, jugar un poco con los datos del problema nos debe permitir relajarnos y ser flexibles. En el curso se alienta a los alumnos a explorar, indicándoles que no deben estresarse con el problema. El explorar nos permite buscar una buena estrategia (formular un plan) y llevarla a cabo, de esta manera recordamos los pasos de Polya, pero sin ser rígidos en su aplicación. Finalmente el cuarto paso de Polya es la revisión del resultado, se indica a los alumnos que si hemos obtenido algún resultado poco creíble (por ejemplo un números negativos o decimales) cuando la respuesta debe ser un numero entero positivo, inmediatamente debemos resolver nuestros pasos anteriores, incluso volver a leer el problema.
.

Método de Miguel de Guzmán

Propone en su libro “Para pensar mejor” (1994) 4 pasos:

Familiarización con el problema.
Búsqueda de estrategias (Tener un plan).
Llevar adelante tu estrategia.
Revisar el proceso y saca consecuencias de él.

Por brevedad no se comentan las heurísticas que para cada paso propone.

Modelo de Richard Mayer (1992)

COMPONENTE	Tipo de conocimiento	Procesos realizados por el alumno.
Traducción del problema	Conocimiento lingüístico	Comprensión lingüística del enunciado.
	Conocimiento semántico	Conocimiento sobre los referentes del problema.
Integración del problema	Conocimiento esquemático	Adscripción del problema a una tipología preestablecida.
Planificación y supervisión del plan	Conocimiento **estratégico**	Generación de estrategias de solución. Monitoreo de aplicación de las estrategias.

En este modelo se resalta claramente el conocimiento estratégico, es decir, el alumno aun con pocos conocimientos, o herramientas matemáticas elementales, puede idear un plan de solución que lo llevara a la respuesta, aunque su proceso no sea “elegante”. Esto puede comprobarse, por ejemplo, cuando los alumnos dan una solución aritmética a un problema que el profesor esperaba se resolviera usando algebra.

Mayer (1992) explica que es el conocimiento estratégico: para resolver un problema, una vez que usted lo entiende, debe tener algún conocimiento adicional acerca de cómo generar y monitorear un plan de solución – lo que llamamos conocimiento estratégico-.

En mi opinión el conocimiento estratégico se activa solo cuando enfrentamos un problema, no es del mismo tipo del que usamos por ejemplo para resolver una ecuación de segundo grado o cuando realizamos varios ejercicios de álgebra, donde sólo debemos aplicar las reglas correspondientes. El alumno no podrá indicar varias estrategias específicas, sólo hasta que tiene necesidad de resolver un problema es como activa alguna estrategia elemental: hacer ensayo y error, hacer una tabla. La intención del curso es enriquecer las estrategias de los alumnos, pero desafortunadamente los alumnos se apropian de las estrategias de forma diferente, es algo muy personal, únicamente con la práctica se mejora. Esto nos previene para no pecar de optimistas sobre los resultados de la enseñanza.
Mayer también indica claramente que tenemos la tendencia a clasificar los problemas dentro de ciertos tipos: aditivos, de porcentaje, de mezclas, de trabajos problemas de velocidad, etc. Nosotros trabajamos problemas de algebra: enunciados que conducen a ecuaciones de primer grado o simultáneas. Menciona 18 tipos. Algunas estrategias se activan al reconocer el problema dentro de un tipo ya resuelto o visto con anterioridad. Por esta razón nosotros insistimos sólo en un cierto tipo de problemas por ejemplo en problemas multiplicativos que conducen a ecuaciones de segundo grado, esto se hizo hacia el final del curso, dentro del tema de raíces de polinomios. Pero por su naturaleza se pide a los alumnos que resuelvan al menos por dos métodos diferentes.

Esto permite indicar a los alumnos, que la aplicación de estrategias a futuro depende de saber escoger entre diferentes alternativas, pero primero debemos poseer el conocimientos de algunas de ellas, de otra manera no tenemos muchas opciones para elegir. Para poder someter una función al control intelectual y volitivo, primero debemos poseerla (Vigotsky, 1999, p.111).

Modelo de Verschaffel - de Corte (2004).

	Heurísticas
1.Construye una representación mental del problema	Dibujar una figura
	Hacer una lista, un esquema o una tabla
	Distinguir los datos relevantes de los irrelevantes
	Usar el conocimiento del mundo real

2.Decide cómo resolver el problema	Hacer un diagrama de flujo
	Conjeturar y probar
	Buscar un patrón
	Simplificar los números
3. Realizar los cálculos necesarios	
4. Interpretar el resultado y formular una respuesta	
5. Evaluar la solución.	

El modelo de Lester hace énfasis en la metacognición, consta de 4 partes que el docente debe implementar en su curso al resolver problemas, proponen: un "Marco de referencia cognitivo - metacognitivo para estudiar el desempeño matemático". Garafalo y Lester (1985)

ORIENTACIÓN: Comportamiento estratégico para evaluar y entender el problema.

A. Comprensión de estrategias.
B. Análisis de la información y condiciones.
C. Evaluación de la familiaridad con la tarea.
D. Representación inicial y las subsecuentes.
E. Evaluación del nivel de dificultad y oportunidades de éxito.

ORGANIZACIÓN: planificación del comportamiento y selección de acciones

A. Identificación de objetivos y subojetivos.
B. Planeación global.
C. Planeación local (para implementar el plan global).

EJECUCIÓN: regulación del comportamiento conforme al plan

A. Desempeño (rendimiento) de las acciones locales.
B. Monitoreo del progreso del plan local y global.
C. Negociación de decisiones (velocidad contra precisión, grado de elegancia).

VERIFICACIÓN. Evaluación de las decisiones hechas y resultados de la ejecución del plan.

A Evaluación de la orientación y organización

1. Adecuación de la representación.
2. Adecuación de las decisiones organizativas.
3. Consistencia del plan local con el plan global.
4. Consistencia del plan global con los objetivos.

B Evaluación de la ejecución

1. Adecuación del desempeño de las acciones.
2. Consistencia de las acciones con el plan.
3. Consistencia de los resultados globales con el plan y las condiciones del problema.
4. Consistencia de los resultados finales con las condiciones del problema.
5. Ejecuta los cálculos necesarios.
6. Interpreta los resultados y formula una respuesta.
7. Evalúa la solución.

De acuerdo con Lester (1985) básicamente, el profesor ha de desempeñar tres funciones:
a) ha de facilitar el aprendizaje de estrategias, bien con su instrucción directa o bien con el diseño de los materiales didácticos adecuados;
b) ha de ser un modelo de pensamiento para sus alumnos; y
c) ha de ser un **monitor externo** del proceso de resolver problemas, aportando, en un primer momento, las ayudas necesarias que faciliten la ejecución por parte del alumno de determinadas actuaciones cognitivas que sin esta ayuda externa no podría realizar y que, en un segundo momento, irá retirando gradualmente a medida que el alumno sea capaz de utilizarlas por sí mismo.

Pero cuidado, como acabemos de ver, existen varias propuestas para resolver problemas de manera sistemática, que incluyen una serie de pasos. El hecho de dividir el proceso de resolución en fases o momentos para organizar y facilitar su enseñanza puede propiciar que el aprendizaje de este proceso se vea como poco natural y se convierta en un obstáculo al querer aplicar los pasos en forma lineal y mecánica. Por ello se insiste en tomar en cuenta las ideas de los alumnos. Y en la fase de reflexión también se da libertad, únicamente se indican algunas sugerencias. Si vemos los métodos de Polya, Schoenfeld y Guzmán incluyen demasiadas estrategias, de tal suerte que leer la lista puede ser de poca ayuda a la hora de seleccionar una. Es importante tener en cuenta que hay dos opciones: se trabajan problemas de geometría, aritmética y algebra en una sesión, o se trabaja dentro del contexto de una materia. El primer caso sería apropiado para preparar alumnos para un concurso de matemáticas, tipo olimpiada, donde las clases son extracurriculares. El segundo caso es dentro de un curso normal, donde el docente debe cubrir cierta cantidad de material, introduciendo nuevos conceptos a la par de la resolución de problemas, pero no como simples ejemplos de aplicación de la teoría.
No debemos sentir la obligación de aceptar un modelo, cada uno tiene ventajas, el alumno debe conocerlo y con ellos tener una caja de herramientas que puede consultar cuando crea oportuno. Esta es la motivación para mencionar algunos.
En el curso se propuso un formato diferente a los métodos anteriores para el alumno cuando reflexiona al resolver un problema (fase 4), con el propósito de dar frescura y naturalidad a las sugerencias tipo Polya y las estrategias metacognitivas. Mismo que fue comentado en clase como sugerencia, pero que podían comentar libremente las fases del trabajo.

La habilidad para resolver problemas no se consigue por el hecho de enfrentarse a ellos y dedicarles tiempo dentro del horario escolar. Es necesario además familiarizarse y utilizar de manera consciente una serie de estrategias propuestas por Polya y que llama “heurísticas” junto con “estrategias metacognitivas”. El desarrollo de estas capacidades se consigue enfrentándose a dificultades, errando y volviéndolo a intentar, el docente poco a poco va limitando su intervención. Si el docente interrumpe a los alumnos en el proceso de resolución de un problema, para señalar otra ***vía más elegante*** que les lleve a la solución, está evitando que se topen con la dificultad y aprendan a superarla con sus propios medios, el docente debe ser un guía discreto. En nuestro caso la solución experta es el tercer momento, damos tiempo para que los alumnos trabajen entre ellos y así evitamos caer en la tentación de dar indicaciones demasiado rápido. Se presenta el problema a los alumnos, trabajan en solución mediante fase las 1 y 2, la solución experta se explica en una clase posterior.
Muchos problemas tienen un enunciado que los hace especiales y que los convierte en problemas apropiados para introducir estrategias. La realización de esquemas gráficos a partir de los datos que se extraen del enunciado de los problemas es otro proceso heurístico que se debe utilizar. Se trata de prescindir de toda aquella información no matemática y representar las relaciones existentes entre los datos aportados.

2.5 Transferencia y resolución de problemas

Este apartado está basado principalmente en Perkins (2000, 2010). Este punto es muy importante porque finalmente las estrategias metacognitivas como casi todo aprendizaje debe ser aplicado (transferido) a nuevas situaciones. La transferencia es uno de los problemas centrales del aprendizaje, el profesor y el alumno han trabajado con material nuevo ¿el alumno será capaz de aplicar lo aprendido en el futuro cercano, donde el contexto sea diferente? ¿Usará las estrategias aprendidas? Todo conocimiento queda inicialmente “anclado” en la situación en que fue aprendido inicialmente, y no es tan fácilmente aplicado (transferido) a nuevas situaciones. Los educadores en todo el mundo asumen que la transferencia deseada se producirá en forma espontánea, el alumno solo debe estudiar. Para ellos no existen los problemas de transferencia. Por ejemplo, los típicos problemas verbales de algebra sobre edades, con mezclas, etc. pero a los alumnos les cuesta trabajo aplicar el álgebra para resolver otros problemas con enunciados porque evocan otras situaciones. Los maestros (ingenuamente) esperan: que con un par de ejemplos sobre cómo resolver problemas que requieren plantear ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones, los alumnos serán capaces de resolverlos, para su sorpresa los alumnos aplican ensayo y error, hacen una tabla hasta llegar a la solución, aprender el álgebra toma tiempo y ser capaces de aplicarla a resolver problemas con enunciado, aún más.

La transferencia cercana implica situaciones o problemas que se parecen tanto en las características superficiales como en las relaciones implícitas. La transferencia lejana, se da cuando el alumno es capaz de aplicar sus conocimientos pero hay un lapso de tiempo mayor y la situación actual no se parece mucho al contexto inicial.

La investigación documenta la frágil naturaleza de la transferencia lejana, Perkins (2010).

La mayoría del aprendizaje es específico para el contexto en que está situado. Por ello lo más conveniente es limitarse a enseñar las estrategias más comunes en la resolución de problemas en una materia específica, en nuestro caso se trata del curso “teoría de ecuaciones”

Perkins indica que la transferencia no se produce de manera espontánea, esto es ser pesimista. Sin embargo hay esperanza: la transferencia debe ser guiada.

La transferencia lejana: la nueva situación no se parece en nada (aparentemente) a la original. La habilidad para resolver problemas en general no es fácilmente transferible, las heurísticas que se aprenden en geometría no sirven de mucho en otro campo. Este es el error de quienes creen que con la lista de estrategias de Polya resolveremos problemas con cierta facilidad, a los alumnos les pueden faltar conocimientos propios de la materia. Ante un problema concreto ¿cuál estrategia de los pasos de Polya debo usar? ¿Conozco un problema parecido? ¿Hacer un dibujo? ¿Una tabla? Esto es como tratar de escoger la llave adecuada para abrir una puerta, dentro de un llavero con muchas llaves (estrategias concretas).

Perkins explica de otra manera lo anterior, propone dos mecanismos diferentes de transferencia y los denomina:

- Transferencia de autopista (highway): carretera diseñada y construida para permitir mayor velocidad y a mayor altura del terreno natural.
- Y trasferencia de vía baja/ carretera lateral (lenta).

La transferencia de vía alta es una consecuencia de la abstracción reflexiva. Tiene lugar cuando procedemos reflexivamente y hacemos conexiones conceptuales. La transferencia de vía baja es una reacción refleja a las características superficiales de una situación. Tiene lugar cuando una nueva situación nos recuerda espontáneamente a otra anterior porque es claramente semejante (peras por manzanas). El problema de la transferencia es real pero abordable, con una buena guía del docente. **La transferencia es resultado del desarrollo metacognitivo.**

¿Cómo medir el avance de las habilidades metacognitivas?

Jacobse y Harskamp (2012) comentan sobre la forma de medir la metacognición. Una de las categorías más utilizadas de medir fuera de línea (no directamente después o durante la solución a un problema) con cuestionarios de auto informe (self-report) en la que se piden a los estudiantes que informen sobre la propia metacognición. Algunos ejemplos de cuestionarios utilizados son: las estrategias de motivación de aprendizaje (MSLQ) por sus siglas en inglés, el aprendizaje y el inventario de estrategias de estudio (LASSI) y el inventario de conciencia metacognitiva (MAI). Estos cuestionarios contienen típicamente declaraciones muy generales sobre monitoreo metacognitivo.

Las declaraciones que se utilizan son del estilo: "Antes de empezar a estudiar pienso en las cosas que necesito hacer para aprender" o "Me cuestiono a mí mismo, para asegurarse de que he comprendido el material que he estado estudiando". Una notable ventaja práctica del uso de cuestionarios es que fácilmente puede ser administrada en gran escala. Sin embargo, aplicados fuera de línea no miden el curso del comportamiento metacognitivo de los alumnos durante la tarea porque se recogen antes o después de que el estudiante realice una tarea de aprendizaje. Esto causa algunos problemas graves. En primer lugar, el hecho de que uno mismo informe respondiendo un cuestionario que se recogen aparte de la tarea de aprendizaje, significa que los estudiantes tienen que recuperar los procesos anteriores y el rendimiento de su memoria a largo plazo no es óptimo. Por lo tanto cuestionarios de auto informe, son susceptibles de sufrir problemas de distorsión, debido a las limitaciones de la memoria a corto plazo de los alumnos.

En segundo lugar, los estudiantes pueden diferir en su marco de referencia en cuanto a qué situaciones tienen en mente al responder las preguntas e interpretar las escalas tipo Likert. En Hernández (1991) se explica las escalas tipo Likert.

En tercer lugar, la forma en que los estudiantes responden a cuestionarios de autoinforme puede estar sesgada por factores desencadenantes en las preguntas que los induce a un “sello” incorrecto de su propio comportamiento o por deseabilidad social (quiere quedar bien). Por lo tanto, los estudiantes suelen ser bastante inexactos en el informe de su propio comportamiento metacognitivo. Aunque los cuestionarios de autoinforme en su mayoría están diseñados para medir la regulación metacognitiva, parecen no ser representativos de lo que los estudiantes realmente hacen.

Por estas razones no aplicamos un “inventario de habilidades metacognitivas” para tener una idea de cómo perciben los alumnos sus habilidades, aunque es más laborioso preferimos analizar los reportes reflexivos, porque tienen la ventaja de ser en “línea” es decir, el alumno todavía está involucrado de alguna manera en la solución del problema cuando redacta su informe.

En un anexo incluimos un cuestionario elaborado por Biryukov (2002), mismo que aplica después de que los alumnos han resuelto un problema de combinatoria, pero contiene algunas oraciones del estilo: “he leído el problema varias veces”, que pueden inducir respuestas en los alumnos, por esta razón nosotros insistimos en que los alumnos hagan una reflexión más espontánea.

CAPITULO 3

DISEÑO DEL CURSO

3.1 Fases del trabajo

El curso se diseñó para trabajar un problema semanal en 4 momentos o fases, relacionados con el contenido que marca el programa de Teoría de ecuaciones. Se lograron reunir 15 tareas con el ciclo de 4 fases:
1. Se proponen problemas en clase, se indica a los alumnos que deben trabajar en individual. En un par de ocasiones el trabajo consistió en corregir las preguntas de exámenes parciales. En total se propusieron 25 problemas.

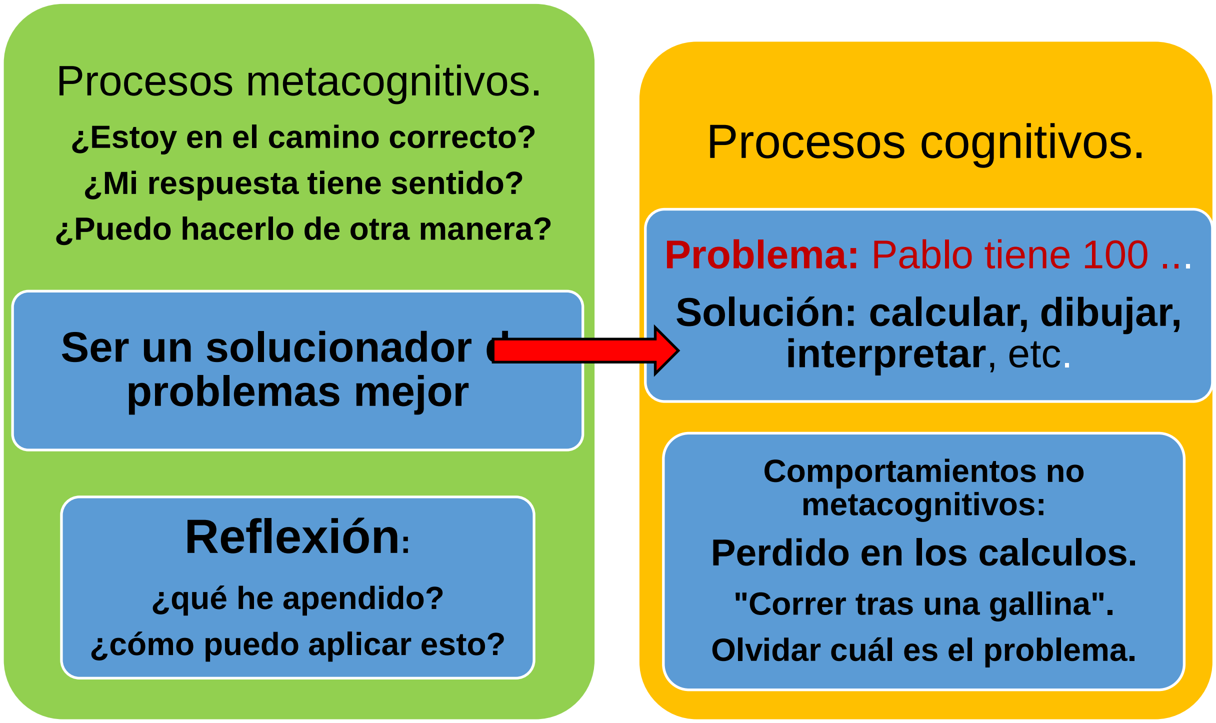
2. Segundo intento de solución, de preferencia trabajando en parejas, aunque no se prohibía platicar con uno o más compañeros cercanos para evitar movimientos de sillas. Se les indicó que podían seguir trabajando por equipos fuera de clase.

3. Solución experta, en una clase posterior. Se explican algunos puntos importantes del problema ¿Qué es lo esencial del problema? ¿Cuál es la estrategia natural? ¿Qué trampas evitar? Polya insiste en que el papel del docente sea discreto para que el alumno sienta que el éxito es suyo.

4. Se propuso un formato sencillo como guía para los alumnos cuando mandan su solución por correo el fin de semana. Se pide que reflexionen sobre el proceso. Se insiste en que escriban su solución inicial, lo que comentaron con sus compañeros, la solución del maestro y finalmente una reflexión libre. Ver Anexo 1.

Las tres fases iniciales son una forma de implementar el ciclo "*I do - we do - you do*" que propone Wong (2015) para abandonar el trabajo exclusivamente de tipo expositivo de la clase. "*I do*", corresponde al trabajo del docente, "*we do*" al trabajo en parejas, o discusión grupal; y "*you do*" al trabajo individual del alumno, pues el alumno deberá trabajar en muchas ocasiones solo. El docente es la primera persona. En la cuarta fase se debe elaborar un reporte reflexivo, es decir pensar detenidamente sobre lo que paso en las tres primeras fases. Pero con una diferencia importante, ponemos énfasis al "*you do*", es el primer paso en cada actividad, y como se repite cada semana se cumple con el propósito de trabajar en un ciclo ascendente.

Wong (2015) explica la diferencia entre metacognición y cognición durante la solución de problemas, con el siguiente diagrama.



Es decir, leer el problema, calcular, recordar algún teorema, regla, algoritmo, para resolver el problema, hacer una tabla, hacer un dibujo etc. son procesos cognitivos. A la izquierda pone los procesos metacognitivos, mismos que se aplican en general y con la práctica de ambos se llega a ser un “mejor solucionador de problemas”. Así, queda claro que las estrategias o heurísticas de Polya son diferentes de las estrategias metacognitivas, de tal manera que cuando se indica “uso de estrategias” nos referimos a las estrategias para resolver problemas concretos. Las heurísticas de Polya son muy generales. Las estrategias metacognitivas a pesar de ser muy simples, el problema de los alumnos es que no las utilizan conscientemente para autorregular su proceso de resolver el problema. El docente las presenta las estrategias metacognitivasen clase formulando preguntas como las que aparecen en el diagrama anterior.

Para el diseño de los nos basamos en el tetraedro de Jenkins, modificado por Brown, citado en Díaz y Hernández (1997) y adaptado a nuestras necesidades que incluye:

a) Características de los sujetos, hay que considerar: edad, nivel escolar, habilidades, intereses, motivación, conocimientos previos sobre la materia, si padecen algún desorden psicológico etc. En nuestro caso, las características que consideraremos únicamente dos: se trata de alumnos universitarios de primer año y su puntaje en TOLT. En general se puede decir que un alumno con bajo puntaje tendrá dificultades para razonar de manera abstracta, al resolver un problema aplicará conocimientos elementales y estrategias poco sofisticadas. Consideramos que los alumnos están acostumbrados a la enseñanza expositiva y tienen poca experiencia resolviendo problemas que no se resuelven directamente con lo recién visto en clase, por ello desconocen el uso de estrategias en general.

b) Materiales: en nuestro caso usamos un juego de domino, dados, ruletas (dibujos) cualquier medio que ayude a comprender mejor el enunciado. Pero sobre todo intentando que el problema no sea muy abstracto para que el alumno pueda participar aportando ideas y estrategias elementales.

c) Estrategias, en nuestro caso la presentación de problemas que impliquen el uso de estrategias o heurísticas de Polya. ¿Qué estrategias queremos resaltar en cada problema? Los primeros problemas se relacionan de manera importante con los siguientes tanto por los conocimientos que se deben poner en juego, como por el empleo de estrategias. Debe quedar claro que unas son las estrategias que se presentan al resolver el problema (experto) y otras las estrategias metacognitivas que sutilmente explica el profesor, sin usar los términos técnicos correspondientes. Se trata evitar que los alumnos "le sigan la corriente" al profesor usando la terminología. Se insiste en pocas estrategias metacognitivas, por ejemplo, revisión de la solución, considerar otra alternativa (plan B). El docente funge como monitor externo formulando preguntas y con el formato para los alumnos.

d) Demandas de la tarea: que tan fácil o difícil es el problema para los alumnos según experiencia de cursos anteriores.

Debemos considerar dos puntos de vista, el del alumno y el del docente. El docente no puede tomar en cuenta las características de cada uno de sus alumnos al proponer un problema, por ello planea para proponer problemas a todo el grupo.

3. 2 Diseño de la secuencia de problemas

En seguida se presenta la lista de problemas para el curso Teoría de ecuaciones FCFM - BUAP (agosto, diciembre 2015), que los alumnos debían resolver y enviar por correo en fin de semana. Los problemas se numeran en forma consecutiva, se indica cómo se fueron agrupando por semana y el propósito. En el curso se da énfasis al trabajo en 4 fases para resolver un problema semanal, por ello sólo se hacen breves comentarios respecto del resto del curso.

SEMANA I.
Problema 1. Ayuda a Homero.
P1.- El señor Burns ofrece a Homero un premio, pero debe elegir entre dos opciones:

a) Recibir mil dólares durante veinte días o

b) Recibir un dólar el primer día, dos el segundo, cuatro el tercero, ocho el cuarto y así sucesivamente hasta el día numero veinte (cada día se duplica la cantidad anterior). ¿Puedes ayudar a Homero a elegir la **mejor opción**? Justifica tú respuesta.

Propósito: introducir o recordar la serie geométrica, aunque ya se sabe por experiencia, que la gran mayoría de alumnos hace una tabla con las potencias de dos y suma. También se tiene en mente que sirva para “romper el hielo” y activar conocimientos previos.

SEMANA II.
Problema 2. Calendario. Se escoge un cuadrado 3x3 en un mes cualquiera del calendario, se propone a los alumnos que hallen la suma de los 9 números, y que propongan una forma de hacerlo rápidamente. Se pide que expliquen su solución.

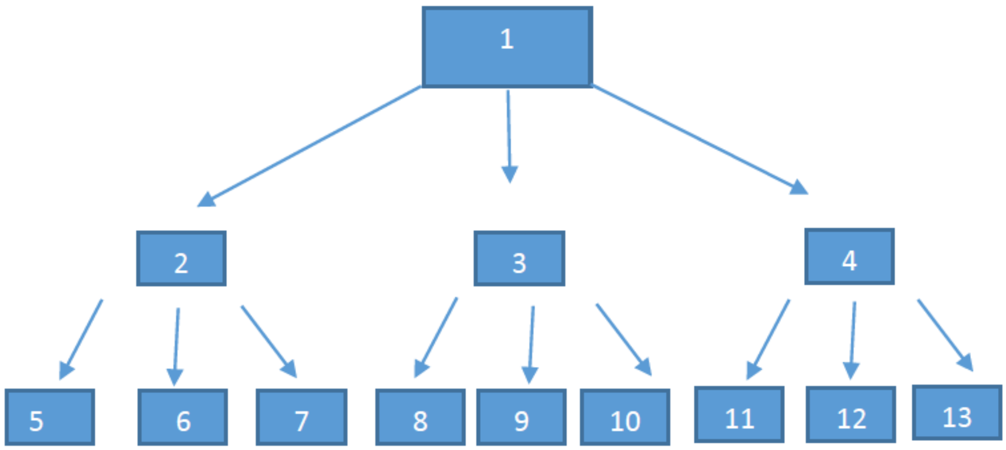
AGOSTO

Lu	Ma	Mi	Ju	Vi	Sa	Do
					1	2
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30
31						

Propósito: al escoger de manera adecuada la notación algebraica, es más fácil hallar la suma de los nueve números en el caso general. Esto se aplica en otros problemas. Los alumnos en un curso pasado no pudieron, demostrar que “la suma de los cuadrados de 3 enteros impares consecutivos aumentada en 1 es múltiplo de 12”. Por ello es importante practicar este tipo de enunciados.

SEMANA III.

Problema 3. Tres hijos. Supongamos que cada número tiene “tres hijos” como se muestra en el siguiente diagrama



¿Quién es el “papá” de 2015? Suma los números de cada renglón ¿observas un patrón? ¿Lo puedes demostrar? Debes usar lo que se ha visto en el tema de inducción matemática.

Propósito: aplicar suma de Gauss, y la estrategia de calcular la suma de todos los números del triángulo y restar, para quedarnos solo con la suma de los números del último renglón, que es lo que piden hallar. Se debe hallar primero el término final de cada renglón, para lo cual se debe aplicar la serie geométrica. Se trabajaran en el curso varios triángulos numéricos, por ejemplo triángulo de Pascal.

SEMANA IV.

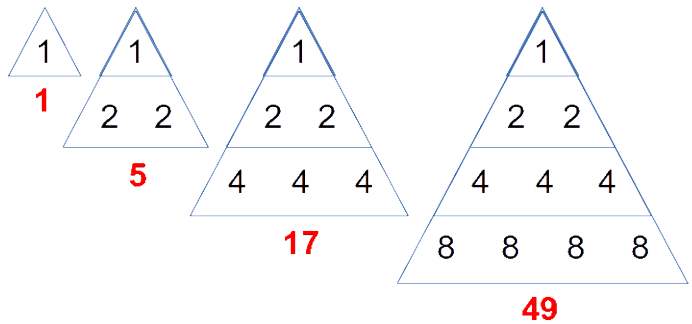
Problema 4. Triángulo de números impares.
Los números impares se colocan formando un triángulo:

1				
3	5			
7	9	11		
13	15	17	19	
21	23	25	27	29

Hallar la suma de los números del “n ésimo” renglón.
Propósito: Recordar que la suma de impares consecutivos es un cuadrado perfecto. Hallar el patrón y usar la idea del problema 3.

Problema 5. Triangulo numérico con potencias de 2.

Supongamos que formamos triángulos numéricos de la siguiente forma:



Se indica la suma de los números contenidos en el triángulo en rojo. Hallar el término "n ésimo" de la sucesión de sumas. Problema tomado de http://misterioeducacionyciencia.blogspot.mx/2013/11/triangulos-que-generan-espacios.html

Propósito: considerar diferentes alternativas. El intento natural seria sumar por renglones, sin embargo no ayuda mucho, una estrategia alternativa es sumar por diagonales.

SEMANA V.

Problema 6. Fichas de dominó. Se sabe que el domino común y corriente tiene 28 fichas ¿Cuántas fichas tendrá un domino doble 9?
¿Cuántas fichas tendrá un domino doble 12?
¿Cuántas fichas tendrá un domino doble 15? Generaliza.
Propósito: se puede resolver por conteo, o aplicando suma de Gauss.

Problema 7. Suma de puntos del dominó.

Hallar la suma total de los puntos del domino común.
Propósito: se puede resolver formando parejas, imaginando que se tienen dos dominós, o aplicando suma de Gauss. Se les mostro físicamente el domino doble 12 y doble 15.

SEMANA VI.

Problema 8. Sistema 7x7. Resolver el siguiente sistema:

$$a+b+c=1$$
$$b+c+d=2$$
$$e+d+c=3$$
$$d+e+f=4$$
$$e+f+g=5$$
$$f+g+a=6$$
$$g+a+b=7$$

Propósito: el alumno debe buscar una estrategia alternativa al método de Gauss, que simplifique el proceso de solución, al observar que los números a la derecha son consecutivos, y que cada incógnita aparece 3 veces.

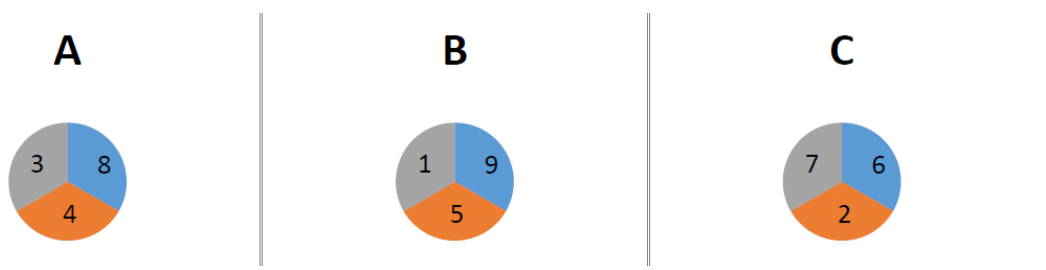
SEMANA VII.

Problema 9. El comandante y su tropa. Un comandante dispone su tropa tomando un cuadrado y ve que le quedan 36 hombres por acomodar. Decide poner una fila y una columna más de hombres en dos lados consecutivos del cuadrado y se da cuentan que le faltan 75 hombres para completar el cuadrado ¿Cuántos hombres hay en la tropa?

Propósito: resolver el problema planteando una ecuación.

SEMANA VIII.

Problema 10. Tres ruletas. En el siguiente juego se utilizan 3 ruletas divididas en 3 partes iguales, pero cada ruleta tiene números diferentes.



Es un juego para dos personas consiste en lo siguiente: se lanza una moneda y el jugador que gana escoge una de las ruletas y luego el segundo jugador escoge una de las restantes. Ambos jugadores hacen girar su ruleta, gana el que obtenga el número mayor.

¿Cuál jugador te convendría ser? Explica claramente.

¿Cuál es la esencia del problema?

Propósito: analizar un número finito de casos, usar un diagrama de árbol.

SEMANA IX.

Las siguientes preguntas fueron un examen parcial, como tarea se dejó que corrigieran sus respuestas, después de explicar la solución en clase.

Problema 11. Las Vegas. Un apostador se va las Vegas (USA) y cada noche visita un casino diferente, el primer día llega con X dólares y al final sale con 2X. Como la surte le sonríe, al siguiente día va a otro casino y apuesta todo el dinero ganado el día anterior, y al final sale con el doble de la cantidad que llevaba. Y así sucesivamente hasta que el décimo día sale con un millón de dólares.

a) ¿Cuánto dinero tenia al final del quinto día?
b) ¿Cuánto dinero tenia al final del noveno día?
c) ¿Con cuánto dinero inicio?

Propósito: usar la serie geométrica, es semejante al problema 1.

Problema 12. El soldado.
Un soldado como parte de su entrenamiento tiene que recoger un cierto número de piedras, colocadas en línea recta, separadas cada 10 metros. Debe recoger una por una y regresar formando un montón en punto inicial. Al final recorre 6000 metros ¿Cuántas piedras recogió?

Inicio 1ª 2ª. k ésimo

□ 10 metros □ 10 metros □ 10 metros □ 10 metros □ …. …. □ 10 metros □

Propósito: usar la suma de Gauss, los alumnos deben identificar que hay una incógnita, por lo tanto deben plantear una ecuación y resolverla.

Problema 13. Dos viajeros.
Dos viajeros salen juntos, uno de ellos decide caminar 20 kilómetros diarios, pero el segundo decide que el primer día solo caminará 1 km, el segundo día 2 km, el tercer día 3 km, y así sucesivamente; cada día aumenta un kilómetro con respecto al día anterior. ¿Cuántos días tarda en alcanzar al primer viajero?

Propósito: el alumno puede utilizar diferentes estrategias para resolver este problema, una de ellas es la suma de Gauss y plantear una ecuación.

SEMANA X.
Cuadrados mágicos. Esta actividad se desarrolló en clase, solución individual, al final se deja de tarea después de haber explicado la solución en clase.

La siguiente figura muestra un cuadrado mágico 3x3 con los números 1, 2, 3, 4, 5, 6,7, 8, 9. La suma de los números en las columnas, renglones y diagonales siempre es la misma y se llama “suma mágica”

4	**3**	**8**
9	**5**	**1**
2	**7**	**6**

Problema 14. Cuadrado mágico (1)
14 a) Con los números 11, 12, 13,...,19 completa el siguiente cuadrado mágico

18	11	
		12

¿Qué es lo primero que debes hallar? Explica como completas el cuadrado mágico

14 b) Cuadrado mágico (2)
Completa el siguiente cuadrado mágico con los números 1, 2, 3, 4,…,16

16	3		13
5		11	
		7	12
4		14	1

Además explica. ¿Cuál es la esencia del problema? ¿Cuál es la estrategia?

Problema 15. Problema abierto con cuadrado semi mágico.
Completa el siguiente cuadrado mágico.

	4	
2		2

Tú debes dar las condiciones para completar la tarea. ¿Cuál es la esencia del problema? Justifica tu respuesta.

Propósito: para completar un cuadrado mágico, primero debemos saber la suma mágica, el propósito es ver cómo explican su solución. Problema propuesto por Arcavi (2005), quien comenta que no tiene solución si pide suma mágica igual a 10, pero pocos alumnos logran explicar satisfactoriamente por qué. La forma más fácil de hacerlo sería poner una literal en el tercer renglón y aplicar la condición de que las sumas deben ser iguales por renglón y por columna. Se presentó en forma abierta, es decir depende de si el alumno considera que podemos tomar números repetidos o no; si permitimos usar 0 o no.

Problema 16. Cubo mágico.
Hay que colocar los números del 1 al 27 formando un cubo de lado 3, para que al sumar 3 en fila o en columna siempre de lo mismo, la llamaremos “suma mágica”. ¿Cuál es la suma mágica?

Propósito: ver si los alumnos son capaces de emplear los problemas anteriores, para resolver este cubo mágico.
SEMANA XI.
Las siguientes preguntas se aplicaron como examen parcial.
Problema 17. Sistema no lineal 3x3.

Resolver el siguiente sistema

$$x(x+y+z) = 26$$
$$y(x+y+z) = 27$$
$$z(x+y+z) = 28$$

Propósito: Sumar las 3 ecuaciones al observar que tiene una forma especial que los números de la derecha son consecutivos. Esta estrategia ya se ha usado antes.

Problema 18. Tarea de Pablito.

Pablito está haciendo la tarea de matemáticas cada problema que resuelve le toma un minuto más que el anterior. Toda la tarea la termina en una hora con 48 minutos. ¿Cuántos problemas hizo? ¿En cuantos minutos hizo el primero? Hay varias soluciones.

Propósito: utilizar una forma modificada de la suma de Gauss y resolver la ecuación que resulta. Sirve para introducir la estrategia que buscamos soluciones enteras.

Problema 19. Suma de impares consecutivos.

Expresar a 216 como suma de 6 enteros impares consecutivos.

Propósito: que los alumnos recuerden la notación algebraica, teniendo cuidado de que se pide números impares consecutivos.

Problema 20. Un ingeniero y sus trabajadores.

Un ingeniero debe terminar de construir una casa y al final de una semana de trabajo paga a sus trabajadores, pero traspapelo los sueldos individuales y solo tiene a la mano sueldos combinados

Pintor + albañil = 3,000
Plomero + albañil= 3,400
Plomero + electricista= 3,300
Electricista + carpintero=3,500
Carpintero + pintor= 2,800

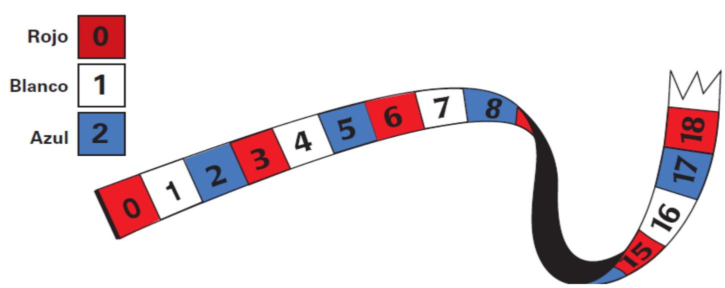
Propósito: si los alumnos observan con atención verán que cada incógnita aparece dos veces, y esto ya se practicó antes.

Problema 21. Cien ecuaciones, cien incógnitas.

Resolver el sistema de ecuaciones:
$x_1 + x_2 + x_3 = 0$
$x_2 + x_3 + x_4 = 0$
$x_3 + x_4 + x_5 = 0$
.
.
.
$x_{98} + x_{99} + x_{100} = 0$
$x_{99} + x_{100} + x_1 = 0$
$x_{100} + x_1 + x_2 = 0$

Propósito: que los alumnos observen que se trata de un sistema muy especial y que por tanto no sería conveniente usar el método de eliminación de Gauss, pues hay que observar que cada incógnita aparece exactamente 3 veces.

SEMANA XII.
Problema 22. Números de colores.
Imagina que en la recta numérica (positiva) se indican los números naturales y el cero y que la tira de números es muy grande, que los números se pintan de colores y que sigue el mismo patrón de números y colores de la figura que se muestra.



a) Completa la siguiente tabla, por ejemplo debes sumar dos números rojos ¿Qué clase de número resulta?
b) Completa la siguiente tabla:

+	R	B	A
R			
B			
A			

Propósito: ver si los alumnos son capaces de escribir la solución formal teniendo en cuenta que hay 3 clases de números: 3k, 3k+1, 3k+2. Esto sería semejante a demostrar las reglas par + par = par, impar + impar = par, etc. Escoger la notación algebraica adecuada, ya se vio en el problema del calendario.

SEMANA XIII.

Problema 23. Fiesta en el hotel.
En un hotel de playa hay 120 personas distribuidas entre la recepción, el bar, el comedor, y el salón de reuniones. La cantidad de personas que hay en el bar es *quinto* de las que hay en el comedor; en la recepción hay octavo de las que hay en el salón. Al pasar 10 personas del comedor al salón y 6 del bar a la recepción, en la recepción hay sexto de las que quedan en el comedor.
¿Cuántas personas había inicialmente en cada uno de los lugares?

Propósito: que los alumnos observen que hay dos condiciones que producen dos ecuaciones muy sencillas y que hay que aprovechar para resolver el sistema de manera más rápida que usando el método de eliminación de Gauss.

SEMANA XIV

Problema 24. Botellas de jugo.
Un grupo de amigos organiza una fiesta, reúnen $700 y deciden comprar unas botellas de jugo, pero al llegar a la tienda, descubren que el precio aumento 15 pesos, por lo cual, compran 6 menos de las que pensaban ¿Cuánto costaban la botellas inicialmente?

Propósito: que los alumnos vean que este problema puede resolverse de dos formas: una factorizando 700 (solución aritmética). Y otra resolviendo las ecuaciones simultaneas de las condiciones que se dan.

SEMANA XV.
Problema 25 Triángulo numerico de impares.
Observa el siguiente arreglo de números en forma triangular.
1
2, 3, 4 suma 9
3, 4, 5, 6, 7 suma 25
4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 suma 49
5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 suma 81

Y así sucesivamente. Generalizar y demostrar tu afirmación.

Propósito: tomar en cuenta que se trata de sumar enteros consecutivos, y luego buscar la forma de quedarnos con el último renglón.

En la siguiente tabla se concentran los problemas y las principales estrategias que se implementaron.

Problema	Patrón numérico	Suma Gauss/ parejas	Serie geométrica	Suma impares	Sumar ecs.
1. Homero	si		si		
2. Calendario	si				
3. Tres hijos	si	si			
4. Suma impares	si			si	
5. Triangulo 2^n			si		
6. Dominó (n,n)	si	si			
7. Sumar puntos domino	si	si			
8. Sistema 7x7		si			si
9. Tropa	si			si	
10. Ruletas					
11. Vegas	si		si		
12. Soldado/ piedras	si	si			
13. Dos viajeros	Si	si			
14. Cuadrados mágicos (2)		si			
15. Cuadrado mágico imposible	si	si			
16. Cubo mágico 3x3x3	si	si			
17. Sistema 3x3					si
18. Pablito tarea	si	si			
19. Enteros impares consecutivos	si				
20. Ingeniero	si				si
21. Cien ecuaciones.	si				si
22. Números de colores	si				
23. Fiesta en hotel					
24. Botellas de jugo					
25.Triángulo de números					

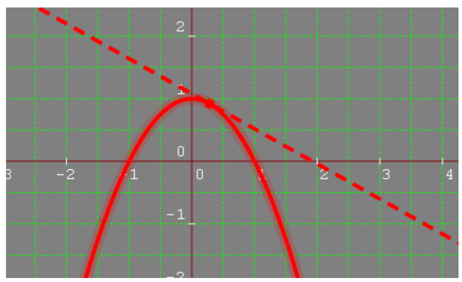
Problema	Número finito de casos	Factorizar	Selección de notación	Algebra $P(x) =0$ $Ax = 0$
1. Homero				
2. Calendario			si	
3. Tres hijos				
4. Suma impares				
5. Triangulo 2^n				
6. Dominó (n,n)				
7. Sumar puntos dominó				
8. Sistema 7x7				
9. Tropa		si	si	
10. Ruletas	si			
11.Vegas				
12. Soldado/ piedras	si			
13. Dos viajeros				
14.Cuadrados mágicos (2)				
15 Cuadrado Mágico imposible				
16. Cubo mágico 3x3x3	si			
17. Sistema 3x3				si
18. Pablito Tarea		si		
19. Enteros impares consecutivos			si	
20. Ingeniero				
21. Cien ecuaciones.				
22. Números de colores	si			
23. Hotel			si	si
24. Botellas de jugo		si		
25. Triángulo de números		si		si

Finalmente el método de las 4 fases se puede aplicar a otros cursos, cualquier docente puede diseñar su curso seleccionando los problemas (uno o dos por semana) que considere más importantes para desarrollar la comprensión de la materia y de estrategias más comunes en la materia, que los alumnos deben elaborar con procesador de textos. Adicionalmente debe desarrollar su curso con tareas diarias en lápiz y papel.

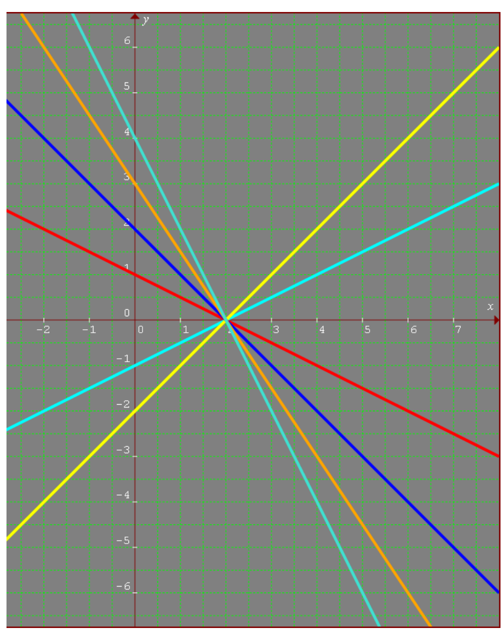
Pero las estrategias explicadas en este curso, son diferentes a las que pueden verse por ejemplo en cálculo diferencial con problemas típicos. Veamos un ejemplo:

Hallar las coordenadas de todos los puntos de la gráfica de $y = f(x)= 1–x^2$ en los cuales la recta tangente pase por el punto (2,0).

Una condición la obtenemos de la derivada, que es la pendiente de la recta tangente en un punto fijo de y = f(x). Una segunda condición se obtiene de la condición geométrica que pide el problema, normalmente estas condiciones llevan a un par de ecuaciones simultáneas que al resolverlas dan la solución.
Pero para mayor claridad se hace el dibujo y se hace notar que no nos dan el valor x_0 y por tanto no es inmediata la solución. Se explica haciendo la gráfica de la función:



De la recta tangente solo sabemos que debe pasar por (2,0) esto nos da una familia de rectas que pasan por un punto fijo y -0 = m(x-2). De la ecuación de la recta buscada y = m(x-2)   no conocemos la pendiente, buscamos una que sea tangente a la gráfica de la función dada.



Hay dos soluciones.

CAPÍTULO 4

IMPLEMENTACIÓN DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS Y SOLUCIÓN EXPERTA

Desde la primera clase se estableció que con frecuencia resolveríamos problemas en clase y como tarea, se explicaron las 4 fases. Según el horario del curso se tienen 3 sesiones por semana, dos sesiones de 100 minutos y una sesión de 50 minutos. En la primera sesión de la semana se proponía el problema, se trabajaba fase 1 y 2. En una clase posterior se daban indicaciones para avanzar en la solución o se explicaba la solución, el fin de semana los alumnos enviaban su solución por correo electrónico. Así se trabajó hasta lograr 15 tareas con reporte. Los problemas fueron publicados en Facebook y el formato que podría servir de guía para elaborar el reporte con la reflexión final.

Según el programa oficial FCFM BUAP el curso de Teoría de ecuaciones incluye las siguientes unidades:

- Inducción matemática.
- Solución de sistemas de ecuaciones.
- Matrices.
- Método de Gauss.
- Determinantes.
- Vectores en R^n y sistemas de ecuaciones.
- Números complejos.
- Raíces de polinomios.

Algunos puntos del programa no se incluyeron en los problemas semanales, porque la implementación de las 4 fases tomaba bastante tiempo de clase. Al final del curso se dio preferencia a los problemas con enunciados, que debían resolverse usando algebra (solución de ecuaciones). Además de los problemas semanales, se dejaban tareas de lápiz y papel para el resto de los temas a cubrir en el curso.

Problema 1. Ayuda a Homero.

Los alumnos deben obtener el acumulado en ambas opciones, para poder comparar, se utiliza para introducir (o recordar) la serie geométrica.

Podría parecer muy fácil de resolver, pero el principal objetivo es ver si los alumnos recuerdan y aplican la serie geométrica, encontramos que un alto porcentaje utiliza una tabla, para las potencias de 2, y comenten un error al calcular el total, pues obtienen un número par, el 1 al inicio de la suma hace que el total sea impar. El objetivo es aplicar la serie geométrica que será usada en otros problemas. El total cuando se duplica sucesivamente es $T = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{19}$

Problema 2. Calendario

Hay varias formas de resolverlo, pero se hace observar a los alumnos que si nos fijamos en el número central, los números son "simétricos" por pares, digamos en las diagonales, así podemos sumar por parejas. Esto se ve más claramente si usamos un poco de algebra.Tomando N al centro completamos el cuadrado de números, según un calendario y obtenemos:

N-8	N-7	N-6
N-1	N	N+1
N+6	N+7	N+8

Tomando las parejas obtenemos:
(N-8)+ (N+8)+ (N-6)+ (N+6)+ (N)+ (N-1)+ (N+1)+ (N+7)+ (N-7)= 9N
El objetivo es mostrar a los alumnos que en algunos problemas podemos elegir la notación algebraica que nos permita obtener la respuesta más fácilmente. La idea es identificar un patrón, tomando en cuenta que se trata de un arreglo de números de siete en siete. Identificar patrones numéricos será usado en otros problemas resueltos en clase.

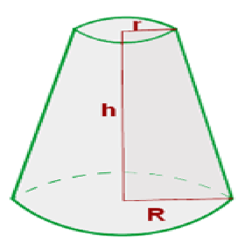
De la experiencia ganada en cursos anteriores, se sabe que lo alumnos tienen problemas para usar la notación algebraica, ello empezaremos con este tipo de enunciados, donde los alumnos simbolicen algebraicamente los enunciados.

Problema 3. Tres hijos.

Objetivo: usar la suma de Gauss para los enteros consecutivos, y eliminar lo que no quiero.

Se explica en clase que para hallar el volumen de un cono truncado:

$$V = \frac{\pi(r^2 + rR + R^2)h}{3}$$



La idea es completar el cono y restar la parte que no queremos. Igual procedimiento se utiliza Polya (1981) para obtener el volumen de una pirámide truncada de base cuadrada. También se utiliza en conteo $A \cap A^c = U$

El problema 3 es un problema difícil, porque se ha propuesto en cursos anteriores y los alumnos no lo resuelven al primer intento. Debe hallarse un patrón, además requiere lograr subobjetivos, antes de generalizar. No se resuelve de inmediato. Se explica según los estudiantes van avanzando en la comprensión de los detalles. Los detalles algebraicos requieren habilidad para simplificar.

Consideremos el último número de cada renglón y observamos
$1 = 3^0$
$4 = 3^0 + 3^1$
$13 = 3^0 + 3^1 + 3^2$ tenemos el patrón para el último número.

Sea U_n = el último número del renglón n, entonces

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} 3^k = \frac{3^{k+1} - 1}{2}$$

Por lo tanto la suma de los elementos del n ésimo renglón S_n es

$$S_n = \frac{\frac{3^{n+1}-1}{2} \times \frac{3^{n+1}+1}{2}}{2} - \frac{\frac{3^n-1}{2} \times \frac{3^n+1}{2}}{2}$$

Simplificando

$$S_n = \frac{1}{8}\{(3^{2n+2} - 1) - (3^{3n} - 1)\} = \frac{1}{8}\{8(3^{2n})\} = 9^n$$

En clase se explica el método de inducción matemática. Ejemplos que no pueden faltar son: la suma de Gauss de enteros consecutivos, la suma de la serie geométrica, la suma de impares, la suma de los cuadrados de los naturales y números piramidales y binomio de Newton. Que se aplican en varios problemas.

Problema 4. Triángulo de números impares
Una de las sumatorias más fáciles de recordar: la suma de enteros impares consecutivos es un cuadrado perfecto.
Los números impares se colocan formando un triángulo:
1
3 5
7 9 11
13 15 17 19
21 23 25 27 29
Se pide hallar la suma de los números del "n ésimo" renglón.

Una de las heurísticas de Polya que queremos practicar es que primero debemos lograr un sub objetivo, debemos obtener el primero y el ultimo término del renglón n ésimo y luego sumar.
Primero debemos hallar el último elemento de cada renglón: $n^2 + n - 1 = n(n+1) - 1$

Una vez que tenemos el último número de cada renglón parece más fácil sumar directamente observando (n^2 –n +1) el primer término del renglón n-ésimo y (n^2 +n +1) es el último.

$$(n^2-n+1)\xrightarrow{+\,2}(n^2-n+3)\xrightarrow{+\,2}(n^2-n+5)+\cdots+\underset{}{\overset{\text{Último}}{(n^2+n-1)}}$$

Debemos expresar claramente lo que queremos sumar.

(n^2 –n +1) + (n^2 –n +3) + (n^2 –n +5)+.... + (n^2 +n -1) = n (n^2) –n(n) +1+3+5+…+ (2n-1)
= $n^3 - n^2 + n^2 = n^3$
Porque tenemos n términos de la forma n^2.

Problema 5. Triángulo numérico con potencias de 2
Aquí usaremos la serie geométrica, trabajando el triángulo numérico por diagonales, cuando lo natural a partir del enunciado sería simplemente sumar. Se presenta una estrategia muy general: “sin cambiar nada, debemos ver el problema desde otro ángulo”. En este caso sumar por diagonales y confiar (al desarrollar el plan) que al final podemos simplificar.

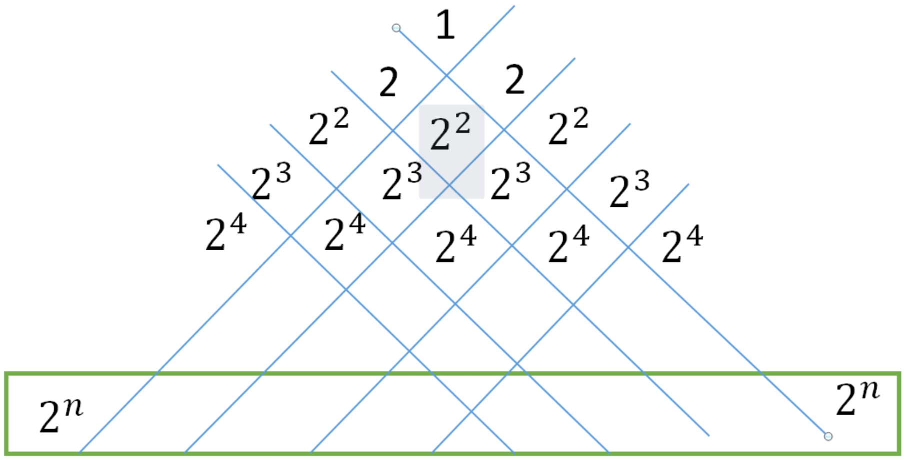
Hallar la suma total del triángulo de números:

Caso general

Número de Elementos			Suma de la Fila	Suma total
1	R_0	1	1	1
2	R_1	2 2	4	5
3	R_2	2^2 2^2 2^2	12	17
4	R_3	2^3 2^3 2^3 2^3	32	49
5	R_4	2^4 2^4 2^4 2^4 2^4	80	129
6	R_5	2^5 2^5 2^5 2^5 2^5 2^5	192	321
…	…	… … … … … …	…	…
$n+1$	R_n	2^n 2^n	$(n+1)2^n$	¿?

Sumando por diagonales
1ª. Diagonal 1+2+$2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$
2ª. Diagonal $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 2 = 2^{n+1} - 2^1$

3ª. Diagonal $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 4 = 2^{n+1} - 2^2$
4ª. Diagonal $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 8 = 2^{n+1} - 2^3$
Tenemos el siguiente esquema para ilustrar lo que se quiere



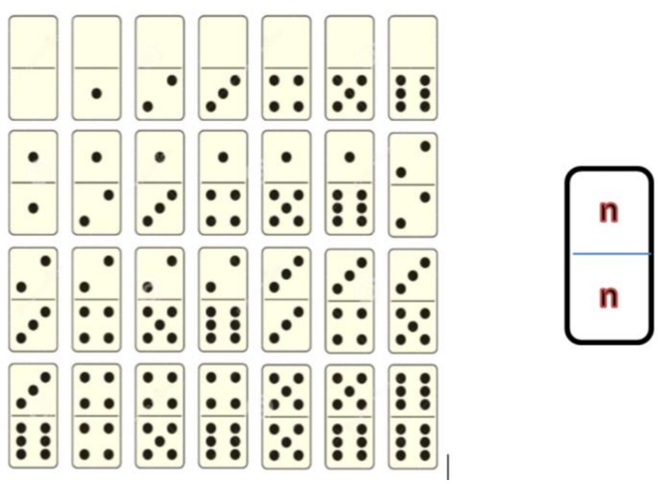
Obtenemos:

$$T_n = (1+n)2^{n+1} - (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n)$$
$$=(n+1)2^{n+1} - (2^{n+1} - 1)$$
$$= n2^{n+1} + 2^{n+1} - 2^{n+1} + 1$$
$$T_n = n2^{n+1} - 1$$

También se hace notar que el triángulo de números más famoso, es el triángulo de Pascal. Que muestra los coeficientes binomiales donde pueden identificarse varios patrones, en clase se muestran algunos.

Problema 6. Fichas de dominó.

Aquí se puede hacer uso de material, o simplemente pedir al alumno que recuerde las fichas del domino. Una forma de colocar las fichas (en cierto orden) es



Debemos hallar el número de fichas si el domino llega hasta (n, n). Así el problema se reduce a contar (0,0) hasta (n, n) según el patrón que se observa al colocar las fichas según el arreglo anterior.

0 – 0							
0 – 1	1 – 1						
0 – 2	1 – 2	2 – 2					
0 – 3	1 – 3	2 – 3	3 – 3				
0 – 4	1 – 4	2 – 4	3 – 4	4 – 4			
0 – 5	1 – 5	2 – 5	3 – 5	4 – 5	5 – 5		
0 - 6	1 - 6	2 – 6	3 - 6	4 – 6	5 - 6	6 - 6	
7 fichas	6 fichas	5 fichas	4 fichas	3 fichas	2 fichas	1 ficha	28

La suma es 1+ 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 (suma de consecutivos)

Utilizar la fórmula de Gauss sabiendo que **n = 6 (puntos),** pero en la tabla **n = 7** porque iniciamos en 0, entonces y entonces la fórmula de Gauss sería la siguiente

$$1+2+3+\ldots+n+(n+1)=\frac{(n+1)\,(n+1+1)}{2}$$

$$=\frac{\boldsymbol{(n+1)(n+2)}}{\mathbf{2}}$$

Finalmente tendríamos

n =6	$\frac{\mathbf{(6+1)(6+2)}}{\mathbf{2}}=\mathbf{28}$ Es conocido por todos
n =9	$\frac{\mathbf{(9+1)(9+2)}}{\mathbf{2}}=\mathbf{55}$
n =12	$\frac{\mathbf{(12+1)(12+2)}}{\mathbf{2}}=\mathbf{91}$ Se tiene este domino físicamente.
n =15	$\frac{\mathbf{(15+1)(15+2)}}{\mathbf{2}}=\mathbf{136}$

	Se tiene este domino físicamente.

Otra estrategia: dividir en dos casos:

1. Números iguales (mulas) tenemos n+1, desde (0,0) hasta (non)
2. Números diferentes en la ficha, por principio de conteo hay n(n+1)/2, y en total tenemos

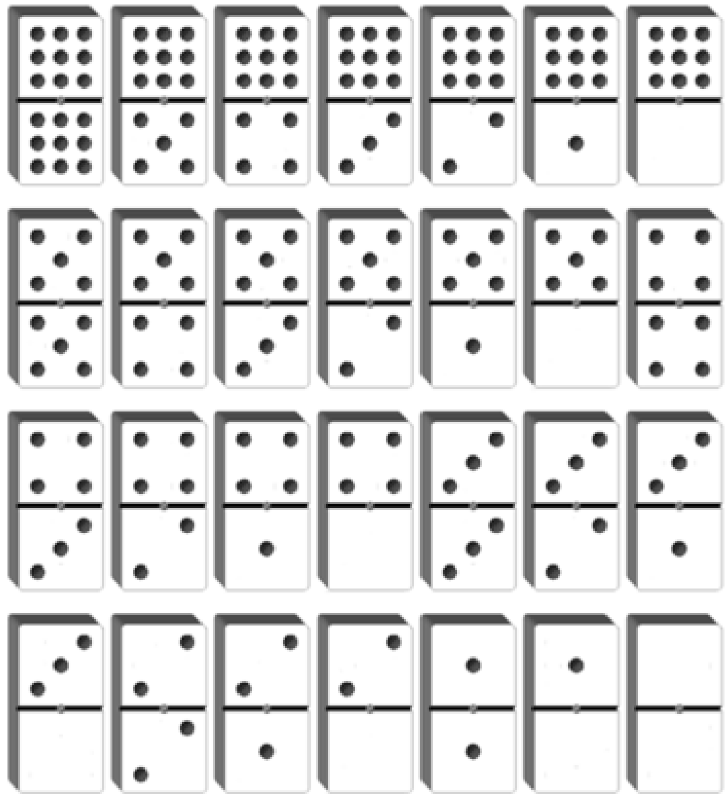
$$\boldsymbol{Total} = \frac{\overbrace{(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})(\ \boldsymbol{n}\ )}^{\text{Del 0 – n, fichas con números diferentes}}}{\mathbf{2}} + \underbrace{(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})}_{\text{Mulas}}$$

Se divide entre dos porque

(n,k) y (k,n) se consideran iguales.

Problema 7. Suma de los puntos del domino.

Conviene que pensemos que tenemos dos dominós, el segundo lo ponemos “al revés” que el primero. Se observa que por parejas la suma de puntos es 12, (6,6) con (0,0) etc. Total de puntos 12x28/2



Problema 8. Sistema 7x7.

Notamos que las incógnitas aparecen 3 veces, por ello se propone sumar todas las ecuaciones y obtenemos:

$$3(a+b+c+d+e+f+g)=28$$

Usando las ecuaciones (1) y (4) podemos obtener "g".

$$a+b+c=1$$
$$d+e+f=4$$
$$3\big((1)+(4)+g\big)=28$$
$$3(5+g)=28$$
$$15+3g=28$$
$$3g=28-15$$
$$\boldsymbol{g=\frac{13}{3}}$$

Y de manera semejante hallamos el resto de las incógnitas.

Problema 9. El comandante y la tropa.

De acuerdo al enunciado tenemos el total de hombres expresado de dos maneras, entonces podemos escribir una igualdad.

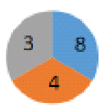
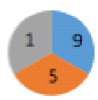
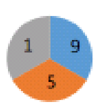
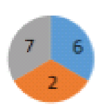
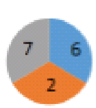
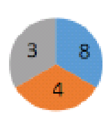
$x^2 + 36 = (x+1)^2 - 75$ Desarrollando y simplificando

$36 = 2x - 74$ *es decir* $2x = 110$ Por lo tanto $x = 55$

Sustituyéndolo en $x^2 + 36 = (55)^2 + 36 = 3025 + 36 = \mathbf{3061}$

Por lo tanto hay 3061 hombres en la tropa.

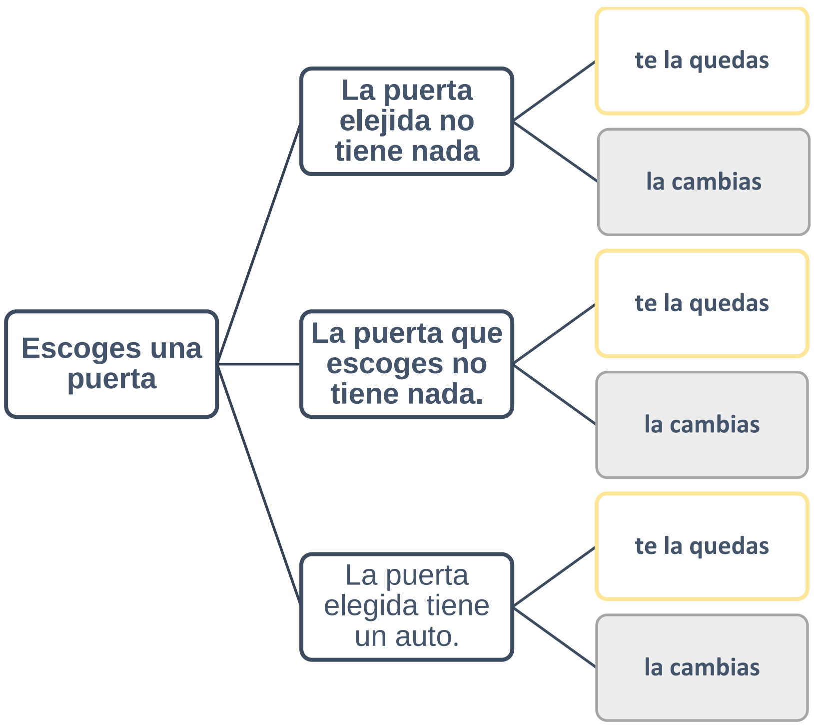
Problema 10. Tres ruletas

<table>
<tr><th>1° jugador</th><th>2° jugador</th><th>Combinaciones</th><th>Posibilidades de ganar</th></tr>
<tr>
<td>A
</td>
<td>B
</td>
<td><table>
<tr><td>A con B</td><td>Gana</td></tr>
<tr><td>3>1</td><td>A</td></tr>
<tr><td>3<5</td><td>B</td></tr>
<tr><td>3<9</td><td>B</td></tr>
<tr><td>4>1</td><td>A</td></tr>
<tr><td>4<5</td><td>B</td></tr>
<tr><td>4<9</td><td>B</td></tr>
<tr><td>8>1</td><td>A</td></tr>
<tr><td>8>5</td><td>A</td></tr>
<tr><td>8<9</td><td>B</td></tr>
</table></td>
<td>Tiene más posibilidades de ganar el 2° jugador.</td>
</tr>
<tr>
<td>B
</td>
<td>C
</td>
<td><table>
<tr><td>B con C</td><td>Gana</td></tr>
<tr><td>1<2</td><td>C</td></tr>
<tr><td>1<6</td><td>C</td></tr>
<tr><td>1<7</td><td>C</td></tr>
<tr><td>5>2</td><td>B</td></tr>
<tr><td>5<6</td><td>C</td></tr>
<tr><td>5<7</td><td>C</td></tr>
<tr><td>9>2</td><td>B</td></tr>
<tr><td>9>6</td><td>B</td></tr>
<tr><td>9>7</td><td>B</td></tr>
</table></td>
<td>Tiene más posibilidades de ganar el 2° jugador.</td>
</tr>
<tr>
<td>C
</td>
<td>A
</td>
<td><table>
<tr><td>C con A</td><td>Gana</td></tr>
<tr><td>2<3</td><td>A</td></tr>
<tr><td>2<4</td><td>A</td></tr>
<tr><td>2<8</td><td>A</td></tr>
<tr><td>6>3</td><td>C</td></tr>
<tr><td>6>4</td><td>C</td></tr>
<tr><td>6<8</td><td>A</td></tr>
<tr><td>7>3</td><td>C</td></tr>
<tr><td>7>4</td><td>C</td></tr>
<tr><td>7<8</td><td>A</td></tr>
</table></td>
<td>Tiene más posibilidades de ganar el 2° jugador.</td>
</tr>
</table>

En clase se explicó el problema de Monty Hall. Una persona está con el presentador del show y este le pide que escoja una de 3 puertas, el concursante escoge una, una pero el presentador si sabe dónde está el auto, y le dice que le va a ayudar eliminando una puerta la cual está vacía. Si cambia de opinión ¿tiene más posibilidades de ganar el auto?

Debemos calcular la probabilidad de ganar si mantiene su elección inicial y comparar con la probabilidad de ganar si cambia. Este problema es bueno para fomentar la discusión grupal, porque al inicio las opiniones se dividen en dos sin poder dar fundamento firme a su opinión. La solución a la polémica, es hacer un diagrama de árbol para considerar todas las posibilidades.

Tengo un numero finito de casos: 3 puertas y se elige una.



Se propusieron dos diagramas de árbol más: ganar 4 juegos de siete (béisbol, basquetbol), lanzamiento de una moneda 10 veces para contar cuantas veces aparecen 6 soles y 4 águilas.

Problema 11. Las Vegas

El primer día salió con 2*x* dólares, ya que se duplico "*x*" y cada día iba duplicándose ese dinero, entonces realice una tabla como la siguiente:

Día 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2x	4x	8x	16x	32x	64x	128x	256x	512x	1024x

Entonces se menciona que el décimo día sale con un millón de dólares, y en la tabla se puede notar que ese día tenia 1024*x* dólares, entonces lo único que había que hacer para encontrar la cantidad inicial era despejar *x* de la fórmula:

$$1024x = 1000000$$

$$x = \frac{1000000}{1024} = 976.5625$$

Así se obtiene la respuesta al inciso c), ya que se sabe que inicio con la cantidad de 976.5625 dólares. Para dar respuesta al inciso a) tan solo hay que sustituir el valor de *x* en 32*x* ya que es la cantidad que corresponde según la tabla, así 32(976.5625) = 31250 dólares.

Y finalmente para responder el inciso b) se hace exactamente lo mismo, ya que según la tabla en el día 9 se tiene la cantidad de 5012*x* dólares, así que se vuelve a sustituir: 512(976.5625) = 500000 dólares.

P 12 Soldado que recoge piedras.

Los alumnos realizan una tabla y observan un patrón (recuadro rojo):

Piedra	Metros
1	20
2	20 + 40 = 60
3	20 + 40 + 60 = 120
4	20 + 40 + 60 + 80 = 200
5	20 + 40 +… + 80 + 100 = 300
6	20 + 40+ … + 100 + 120 = 420
7	20 + 40+ … + 120+ 140 = 560
.	
.	
.	
n	$n[10(n+1)] = n(10n+10) = 10n^2 + 10n$

Solo falta encontrar n, que representaba el número de piedras, de la siguiente ecuación:

$$10n^2 + 10n = 6000$$

$$n = \frac{-(10) \pm \sqrt{(10)^2 - 4(10)(-6000)}}{2(10)}$$

Al resolver esta ecuación de segundo grado se obtuvieron las soluciones:

n = 24 y *n* = -25, por lo tanto solo se tomó el valor positivo de *n*, así se obtuvo que la respuesta es que el soldado recogió 24 piedras.
Casi todos los alumnos usan la fórmula de Gauss, ya no hacen tabla para las distancias de ambos viajeros, plantean directamente la ecuación.

Problema 13 Dos viajeros

Día	**Viajero 1**	**Viajero 2**
1	20 km	1 km
2	20 + 20 = 40	1 + 2 = 3
3	20 + 20 + 20 = 60	1 + 2 + 3 =6
4	60 + 20 = 80	6 + 4 = 10
5	100	10 + 5 = 15
6	120	15 + 6 = 21
7	140	21 + 7 = 28
.		
.		
.		
n	20n	$\frac{\boldsymbol{n\ (n+1)}}{\boldsymbol{2}}$

En esta tabla se puede notar que para el primer viajero el número de kilómetros recorridos depende de la formula 20n y para el segundo viajero la fórmula que sigue el número de kilómetros que recorre es $\frac{n(n+1)}{2}$.
Como menciona que los dos llegan a un punto en común lo que hice fue igualar las dos formula y de ahí despejar a *n* de la ecuación de segundo grado que resultaba:

$$\boldsymbol{20n\ = \frac{n\ (n+1)}{2}}$$

$$\boldsymbol{n^2 + n - 40n = n^2\ - 39n = 0}$$

$$\boldsymbol{n = \frac{-(-39) \pm \sqrt{(-39)^2 - 4(1)(0)}}{2(1)}}$$

Obtenemos como solución positiva n= 39, por lo tanto la respuesta para este ejercicio es que los viajeros coinciden al final del día 39**.**

Se pudo notar que la mayoría de los alumnos, lo resuelven algebraicamente, en este caso es menor el número de soluciones con tabla, no se observan otras estrategias. Se propuso porque se aplica la suma de Gauss.

Problema 14. Cuadrados mágicos

14a) Para encontrar la “suma mágica” sume los números consecutivos del 1 al 19. Teniendo el resultado, le reste la suma consecutiva del 1 al 10, ya que el problema nos indica que el cuadro mágico trabaja con números del 11 al 19.

1+2+3+…+19 = $\frac{19(19+1)}{2} = 190$, pero como el problema nos asigna números a partir el 11
Hasta el 19, entonces: (190) – $\frac{10(10+1)}{2} = \mathbf{135}$

La suma mágica es:

$$\frac{135}{3} = \mathbf{45}$$

Con el valor de la suma mágica podemos encontrar inmediatamente el valor de las variables **A, B, C, D, E y F.**

18	11	**A**
B	**C**	**D**
E	**F**	12

18+11+A= 45 **A=16**
A+ D+12= 45 **D=17**
18+C+12= 45 **C=15**
B+ **C** + **D**= 45 **B=13**
18+ **B**+ E= 45 **E=14**
E + F+12= 45 **F=19**

P14b) cuadrado mágico

Utilizando el método del anterior ejercicio, debemos encontrar la “suma mágica” sume los números consecutivos del 1 al 16. Esto nos dará la suma total del sistema.

$$\frac{16(16+1)}{2} = 136$$

A esta suma total del sistema la dividí entre la cantidad de renglones, en este caso 4. Para que posteriormente nos diera el valor de la “Suma mágica”.

$$\frac{136}{4} = \mathbf{34}$$

Con el valor de la suma mágica podemos encontrar inmediatamente el valor de las variables A, B, C, D, E y F.

16+3+A+13=34 A=2
16+5+D+4=34 D=9
13+C+12+1=34 C=8

5+B+11+C=34	B=10
D+E+7+12=34	E=6
4+F+14+1=34	F=15

Problema 15. Cuadrado semi -mágico.
Completa el siguiente cuadrado mágico. Debemos indicar bajo qué condiciones puede completarse la tarea, no hay condiciones extras en el enunciado. Debemos entender que solo suma de renglones, diagonales y columnas debe ser constante.

	4	
2		2

Estrategia colocamos A en la celda central del tercer renglón, pues en este renglón tenemos dos números. Usando que debe ser mágico, obtenemos las condiciones para las demás celdas al considerar que suma mágica debe ser **A+4**, entonces como ya tenemos 4 en la celda central del cuadrado, colocamos 0 en A_{12}

A_{11}=?	0	A_{13}=?
A_{21}=?	4	A_{23}=?
2	A	2

La suma de la diagonal debe ser A+4, esto nos lleva a la ecuación A_{11} +6 = A+4 es decir A_{11} = A-2, igual condición debe cumplir A_{13}

A-2	0	A-2
	4	
2	A	2

Para el primer renglón debemos tener suma A+4, tenemos la ecuación: A+4=2A -4 decir A=8, así tendríamos el siguiente avance

6	0	6
	4	
2	8	2

Nos faltan dos números en el segundo renglón, A_{21}+A = A+4 es decir A_{21}= 4
Finalmente el cuadro mágico sería:

6	**0**	**6**
4	4	**4**
2	**8**	2

Como se observa tenemos números repetidos, pero no se pedía otra condición. A. Arcavi propone este problema con suma mágica igual a 10, y no tiene solución. Comenta además que este problema no es resuelto satisfactoriamente, aun por alumnos con buenos conocimientos de algebra. Su error estratégico es no usar una incógnita y la condiciones de ser cuadrado mágico (Sm = 10) los lleva a una igualdad que no puede satisfacerse. Solo si la suma mágica es 12 puede completarse. Este problema ilustra que se pueden tener los conocimientos, pero la mayoría de los alumnos necesitan que se les indique la estrategia, de usar una incógnita en el tercer renglón.

Problema16. Cubo mágico

Imagina que tienes un cubo de 3x3x3 y los números del 1 al 27 con los cuales quieres formar un cubo mágico en el cual la suma de filas y columnas nos da el mismo resultado, ¿cuál es la suma mágica de cubo?

$1+2+3+\ldots+27=n(n+1)/2=378$

Observar que tenemos una suma de 3 números por capa que debe darnos el mismo resultado: la suma mágica S_m por lo cual tenemos 9 veces la suma mágica por lo tanto

$S_m=378/9$

Problema 17. Sistema 3x3 no lineal.

Se pide resolver el sistema

$$x(x+y+z) = 26$$
$$y(x+y+z) = 27$$
$$z(x+y+z) = 28$$

Utilizando una estrategia vista antes, sumamos las 3 ecuaciones tenemos:

$(x+y+z)+y(x+y+z)+z(x+y+z)=81$

Factorizando $(x+y+z)(x+y+z)=81$

Es decir $(x+y+z)^2=81$

Por lo tanto $x+y+z=9$ o $x+y+z=-9$ Primero consideramos $x+y+z=9$.

Podemos sustituir en las tres ecuaciones a $x+y+z$ por su valor, así $x(x+y+z)=26$ obtenemos $x=26/9$.

Usando $y(x+y+z)=27$ obtenemos $y=3$.

Además $z(x+y+z)=28$ y finalmente $z=28/9$. De igual manera trabajamos el caso $x+y+z=-9$

Problema 18. Tarea Pablito

Tomando en cuenta que al final es una suma de números consecutivos. Entonces lo podemos expresar de la siguiente manera:

$$x+(x+1)+(x+2)+ ... + \{x+(k-1)\}$$

Sabemos que hizo *k* problemas. Simplificando nos queda así:

$$kx(1+2+3+...+(k-1))=108$$
$$k[(2x+(k-1))/2]=108$$
$$k[2x+(k-1)]=216$$

Factorizamos 216 y obtenemos $216=8(3^3) =2^3x3^3=8x27$.
Teniendo así: $k[2x+(k-1)]=8(27)$
Siendo nuestra primera opción: $k=8$ y $2x+(k-1)=27$

$$2x+7=27$$
$$2x=10,\ x=10$$

Donde x=10 son lo minutos que tardó para resolver el primer problema.
Se hace notar que buscamos soluciones enteras, y aplicamos factorización en ambos lados de la igualdad, es decir las soluciones en número finito se obtienen de las diferentes factorizaciones de 216. Esto es una buena forma de trabajar problemas con soluciones enteras.

Se presenta el problema en clase: el producto de 4 enteros consecutivos es 3024.

Se comenta, que evidentemente no es aconsejable resolver por álgebra la ecuación resultante: $x(x+1)(x+2)(x+3)=3024$.

Simplemente factorizamos 3024 y busco factores consecutivos.

Hay varios problemas semejantes y la idea es ver que puede aplicarse la misma estrategia. Una pareja tiene 3 hijos, el producto de sus edades es 1664, el menor de ellos tiene la mitad del mayor ¿Cuál es la suma de las edades de los 3 hijos?
1664 16x13x8 = $13x2^7 = 13x\ 2^4 \ x\ 2^3$ y de aquí buscamos la respuesta, que implica buscar entre un numero finito de casos.

Problema19. Suma de impares consecutivos

Expresar a 216 como suma de 6 enteros impares consecutivos.

Tiene por objetivo que los alumnos no olviden la suma de enteros consecutivos.

$(2n-1) + (2n+1) (2n+3) + (2n+5) + (2n+7) + (2n+9) = 12n+24= 216$ y obtenemos $n=16$
Por lo tanto los números son 31,33, 35, 37, 39, 41

Problema 20. Ingeniero y sus trabajadores

Sea $pintor = a,\ albañil = b, plomero = c, electricista = d,\ Carpintero = e$

Entonces podemos escribir:
$a+b=3000$
$c+b=3400$
$c+d=3300$
$d+e=3500$
$e+a=2800$

Podemos sumar todas las ecuaciones al observar que cada incógnita aparece dos veces:
$2(a+b+c+d+e)=16000$
$a+b+c+d+e \quad = \frac{1600}{2}$
$a+b+c+d+e \quad = 8000$

Y como $b+c=3400\ y\ d+e=3500\ entonces$
$a+3400+3500=8000$
$a=8000-6900$
$a=1100$
Así teniendo en cuenta las sumas combinadas tenemos:
$a+b=3000$ Y como $a=1100$ entonces
$b=3000-1100$
$b=1900$ Y continuamos al obtener todas las incógnitas. Por lo tanto los sueldos de cada trabajador son:

$pintor=1100$
$albañil=1900$
$plomero=1500$
$electricista=1800$
$Carpintero=1700$
Se muestra nuevamente la estrategia de sumar todas las ecuaciones, en contraste con el método de Gauss que puede ser más laborioso en este caso.

Problema 21. Cien ecuaciones cien incógnitas

Del sistema original observamos que cada incógnita aparece 3 veces entonces sumando las 100 ecuaciones podemos escribir
$3(x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{98}+x_{99}+x_{100})=0$

Así si formamos grupos de 3 en tres tenemos:

$(x_1+x_2+x_3)+\cdots+(x_{97}+x_{98}+x_{99})+x_{100}=0$

Y sobra x_{100} tenemos una ecuación que empieza en x_4, x_8, x_{97} y cada una de ellas es cero, por lo tanto $x_{100}=0$. Así se procede con las demás incógnitas, obtenemos que todas son iguales a cero.

Problema 22. Números de colores

+	R	B	A
R	ROJO	BLANCO	AZUL
B	BLANCO	AZUL	ROJO
A	AZUL	ROJO	BLANCO

$R + R = R \rightarrow 3(n_1) + 3(n_2) = 3(n_1 + n_2) = 3(n_3); 3(n_3) \in R$ojos

$$R + B = B \rightarrow 3(n_1) + 3(n_2) + 1 = 3(n_1 + n_2) + 1 = 3(n_3) + 1; 3(n_3) + 1 \in Blancos$$

$$R + A = A \rightarrow 3(n_1) + 3(n_2) + 2 = 3(n_1 + n_2) + 2 = 3(n_3) + 2; 3(n_3) + 2 \in Azules$$

$$B + B = A \rightarrow 3(n_1) + 1 + 3(n_2) + 1 = 3(n_1 + n_2) + 2 = 3(n_3) + 2; 3(n_3) + 2 \in A$$

$$A + A = B \rightarrow 3(n_1) + 2 + 3(n_2) + 2 = 3(n_1 + n_2) + 3 + 1$$
$$= 3(n_3 + 1) + 1; 3(n_3 + 1) + 1 \in B$$
$$B + A = R \rightarrow 3(n_1) + 1 + 3(n_2) + 2 = 3(n_1 + n_2) + 3 = 3(n_3 + 1); 3(n_3 + 1) \in R$$

Varios alumnos no resuelven algebraicamente, a pesar de que es semejante a numero par = 2k, número impar =2k+1. Tienen los conocimientos, pero se les debe indicar que es necesario hacerlo en general, y que si tenemos dos números rojos debemos usar letras diferentes por ejemplo 3k, 3m.

Problema 23. Fiesta en el hotel

Sea c= comedor, b= bar, r=recepción, s=salón de reuniones

$r + b + c + s = 120,$ Ec. (1)

$b = \frac{c}{5} \Leftrightarrow 5b = c,$ Ec. (2)

$r = \frac{s}{8} \Leftrightarrow 8r = s,$ ec. (3)

$c - 10 \quad s + 10 \quad b - 6 \quad r + 6$

$r + 6 = \frac{1}{6}(c - 10),$ ec. (4)

Sustituimos los valores de la ecuación 2 y 3 en la ecuación 1, por lo que sigue:

$r + b + c + s = 120 \Rightarrow r + b + 5b + 8r = 120 \Rightarrow \mathbf{6b + 9r = 120},$ por lo que la ecuación se reduce a dos variables.

Sustituyendo en valor de c en la ecuación 4 tenemos:

$$r + 6 = \frac{1}{6}(5b - 10)$$
$$6(r + 6) = (5b - 10)$$
$$6r + 36 = 5b - 10$$
$$6r + 36 - 5b + 10 = 0$$

$$\boldsymbol{6r - 5b + 46 = 0}$$

Igualando las ecuaciones obtenidas, tenemos:

$$\mathbf{6b + 9r = 120}$$

$$\mathbf{-5b + 6r = -46}$$

$$5(6\text{b} + 9\text{r}) = (120)5$$

$$6(-5\text{b} + 6\text{r}) = (-46)6$$

$$30b + 45r = 600$$

$$-30b + 36r = -276$$

$$81r = 324 \Rightarrow r = 4$$

Ahora sustituyendo el valor de r en la ecuación $\boldsymbol{6b + 9r = 120}$ obtendremos el valor de b, por lo que se obtiene:

$$6\text{b} + 9\text{r} = 120$$

$$6\text{b} + 36 = 120$$

$$\Rightarrow b = 14$$

Ahora sustituyendo en la ecuación 2 y 3 obtendremos el valor de s y c, como sigue:

$$c = 5b \Rightarrow c = 14(5) \Rightarrow c = 70$$

$$s = 8r \Rightarrow s = 8(4) \Rightarrow s = 32$$

c= comedor = 70, b= bar =14, r=recepción= 4, s=salón de reuniones =32

Pocas soluciones correctas de los alumnos al primer intento, no resuelven correctamente el sistema lineal de ecuaciones 4x4, al parecer se les dificulta trabajar en un problema con enunciado con 4 incógnitas y buscar el camino más fácil. Ya se había visto el método de Gauss. Si aplican este método tienen varios ceros en la matriz que deben acomodar de manera conveniente

Problema 24. Botellas de jugo

Del enunciado tenemos: Precio x No. Botellas =700

$$(p) \times (n) = 700 \text{ Ec. (1)}$$

$$(p + 15) \times (n - 6) = 700 \text{ Ec. (2)}$$

Aplicamos factorización, y analizamos todos los casos

$$7 \times 4 \times 25 = 7 \times 100$$

$$7 \times 5 \times 4 \times 5 = 700$$

Vemos que los factores son 35×20=700

p=35 y n=20

35×20=700

(35+15)(20-6)=700

50×14=700

La segunda solución es algebraica, se resuelven las ecuaciones (1) y (2) y se obtiene una ecuación de segundo grado

p x n = 700

(p+15) x (n-6) = 700

p = 700/ n

$(\frac{700}{n} +15) (n-6) = 700$

$(\frac{700+15n}{n})(n-6) = 700$

$$\frac{700n - 4200 + 15n^2 - 90n}{n} = 700$$

$$700n - 4200 + 15n^2 - 90n = 700n$$

$$-4200 + 15n^2 - 90n = 0$$

$$15n^2 - 90n - 4200 = 0$$

$$x^2 - 6x - 280 = 0$$

$$x = \frac{(6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(-280)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 1120}}{2}$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{1156}}{2}$$

$$x = \frac{6 \pm 34}{2}$$

$$x1 = \frac{6 + 34}{2} \qquad x2 = \frac{6 - 34}{2}$$

x_1 = 20 x_2 = -14 $\frac{700}{20} = 35$ Cada botella cuesta **$35**

Problema 25**.** Triangulo numérico

1

2, 3, 4 suma 9

3, 4, 5, 6, 7 suma 25

4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 suma 49

5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 suma 81

La estrategia es fijarnos en el número central, además de que había una relación con respecto a los extremos

$$centro = \frac{suma\ de\ una\ \ pareja(extremos)}{2}$$

Ya que éste era el patrón, por lo que la suma para el renglón “n” queda

$$(n) + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) + \cdots + (3n - 2)$$

Se suman por parejas (simétricos) por lo que la suma queda

$$Suma\ R_n = (2n - 1)^2$$

CAPÍTULO 5

SOLUCIONES DE ALUMNOS

"Si nos quitan la posibilidad de equivocarnos, nos quitan el placer de acertar". Aldo Camarota.

De acuerdo a la frase anterior, no importa si los alumnos resuelven un problema usando aritmética en lugar de algebra, no podemos quitarles el gusto de resolver el problema por sus propios medios. En general, esto muestra la intención de trabajar resolviendo problemas, debemos estar atentos a escuchar otras soluciones, aunque sean menos "elegantes".

"La enseñanza es más exitosa cuando se adapta a los procesos de pensamiento y las estrategias naturales de solución de los alumnos. Los alumnos no aprenden matemáticas mediante la mera explicación en clase, independientemente de lo que ya saben. En cambio, asimilan o interpretan el nuevo conocimiento de acuerdo a sus propios esquemas mentales" Bransford (2000)

Se esperaban soluciones con álgebra, pero se dieron algunas sorpresas como la de una solución usando un diagrama, dejando de lado el álgebra. Debemos retomar las soluciones de los alumnos, y esto está contemplado en la dinámica de las 4 fases: considerar diferentes alternativas (estrategias) para resolver un problema, y esto solo se logra si se comparten ideas.
Las fases propuestas para resolver un problema permiten que los alumnos revisen sus soluciones, que comparen y compartan ideas con sus compañeros para revisar lo hecho, para corregir o para cambiar de estrategia, para aprender otras estrategias. Y finalmente la solución del maestro les permite evaluar su avance, no importa tanto la respuesta, sino que tanto avanzaron solos, la crítica no viene del maestro, ellos se autoevalúan críticamente.
Se presentan algunas soluciones típicas a cada problema enviadas por los alumnos (por correo electrónico), y se hacen algunos comentarios señalados con (PZ), no se indican los nombres pues se incluyen aciertos y errores, se enumeran como alumno 1, alumno 2.

Problema 1. Ayuda a Homero.
A Homero le ofrecen dos opciones: recibir 1000 dólares diarios por 20 días. O recibir 1 dólar el primer día, 2 el segundo día y cada día recibir el doble que el anterior durante 20 días. ¿Qué opción le conviene a Homero?

Alumno (1)
Mi solución fue hacer una tabla dividida en tres filas y con 20 columnas, donde la primera fila iba de uno al veinte, la cual era el día. La segunda fila era el dinero que recibiría Homero si elegía la segunda opción, en donde el primer dato de dicha fila era 1, luego 2, 4,8 y así continúe hasta la sexta columna de esa fila. En la última fila

puse la diferencia que había de dinero con respecto al día anterior, también la llene hasta la sexta columna. La tabla quedo de la siguiente forma:

DIA	DINERO	DIFERENCIA
1	1	0
2	2	1
3	4	2
4	8	4
5	16	8
6	32	16
7	64	32
8	128	64
9	256	128
10	512	256
11	1024	512
12	2048	1024
13	4096	2048
14	8192	4096
15	16384	8192
16	32768	16384
17	65536	32768
18	131072	65536
19	262144	262144
20	1048576	262144

Posteriormente puede notar que había una forma más sencilla de encontrar el dinero que recibiría homero y era buscar una función, así deduje la formula $f(n)=2^{n-1}$, donde n representaba el número de día. Finalmente sume todas las cantidades de dinero y me pude percatar que a Homero le convenía más la segunda opción, ya que si elegía la primera lo único que había que hacer era multiplicar los vente días por 1000 dólares (20x1000).

Fase 2. La solución de mi compañero fue multiplicar en su calculadora el dinero recibido del día anterior y al final sumar todo. En realidad no creo que fuese tan útil porque requería de más trabajo pero de la misma forma llego al resultado.

Fase 3. La solución del profesor mucho más rápida, ya que el uso una función con la cual iba sumando de una vez todo el dinero acumulado. Me pareció más práctica y creo es conveniente saber esa fórmula ya que puede aplicar para otro tipo de problema o ejercicio.

Fase 4. Creo que es muy importante saber explicar a alguien más, la manera en que resuelves un problema y preguntar siempre que tengas dudas.

(PZ) Observar que no saca el total de cada opción. La mayoría de los alumnos hace una tabla, solo un bajo porcentaje usa serie geométrica.

Problema 2. Calendario.
Este problema fue más fácil, sin embargo hay algunas respuestas incompletas.

D	L	M	M	J	V	S
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	

Fase 1 Solución Individual:

7	8	9
14	15	16
21	22	23

n	$n+1$	$n+2$
$2n$	$2n+1$	$2n+2$
$3n$	$3n+1$	$3n+2$

$n=7$, $n+n+1+n+2+\ 2n+2n+1+2n+2+\ 3n+3n+1+3n+2=135$

Fase 2 Solución en equipo:

6	7	8
13	14	15
20	21	22

n	$n+1$	$n+2$
$2n\ +1$	$2n+2$	$2n+3$
$3n\ +2$	$3n+3$	$3n+4$

$$n+n+1+\ n+2=3n+3$$
$$2n+1+2n+2+2n+3=6n+6$$
$$3n+2+3n+3+3n+4=9n+9$$
$$3n+3+6n+6+9n+9=18n+18$$
$$18n+18=9(2n+2)$$
$$9(2n+2)=18(n+1)$$

R:$18(n+1)=126$

Fase 3 Solución del profesor:

$n-8$	$n-7$	$n-6$
$n-1$	n	$n+1$
$n+6$	$n+7$	$n+8$

$n\cancel{-8}$	$n\cancel{-7}$	$n\cancel{-6}$
$n\cancel{-1}$	n	$n\cancel{+1}$
$n\cancel{+6}$	$n\cancel{+7}$	$n\cancel{+8}$

R:$9n$
Reflexión de todo el proceso:
Me equivoque en la solución al creer en el patrón que identifique, al igual que mi compañera de equipo, al final comprendimos la solución.

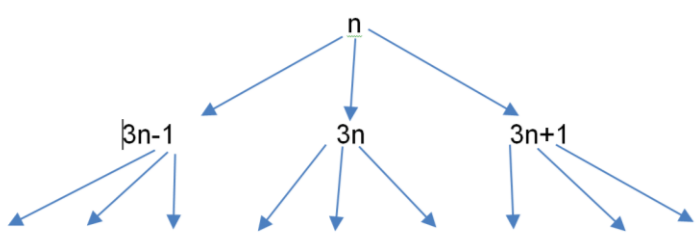
(PZ) Reconoce que se equivoca, pero este es un paso importante para mejorar en varios aspectos, para corregir un error, primero hay que aceptarlo, reconocerlo, es un buen inicio para desarrollar las habilidades metacognitivas. Efectivamente debió escribir n, n+7, n+14 en la primera columna, que es la esencia del calendario.

Alumno 2. Reflexión
La solución del maestro me ayudó a darme cuenta que no es necesario empezar por el primero dígito, sino que podemos buscar que nuestras sumas al final den un resultado menor. Reduciendo lo más que se pueda.

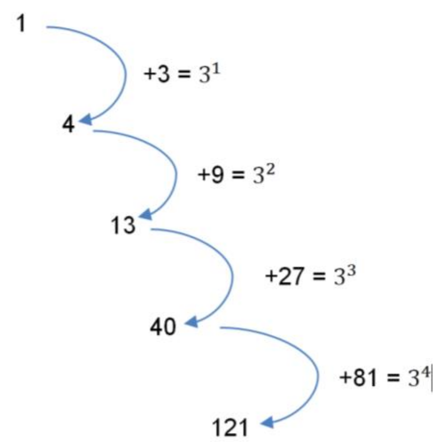
Se da cuenta que conviene poner n al centro, que es otra opción.

Alumno 3. Reflexión. Si aprendí mucho ya que nunca me imaginé que pudiese encontrar una fórmula para encontrar la suma de los términos de un mes, y es muy satisfactorio saber que lo logre hacer por mis propios méritos.

Problema 3. “3 hijos”
Supongamos que cada número tiene tres hijos ¿Quién es el papá 2015?
Supongamos n



Se puede ver que en el renglón que sigue se multiplica por 3, así que en cada renglón el 3 multiplica dentro de cada paréntesis por 3^n. También al final de cada renglón se ve que

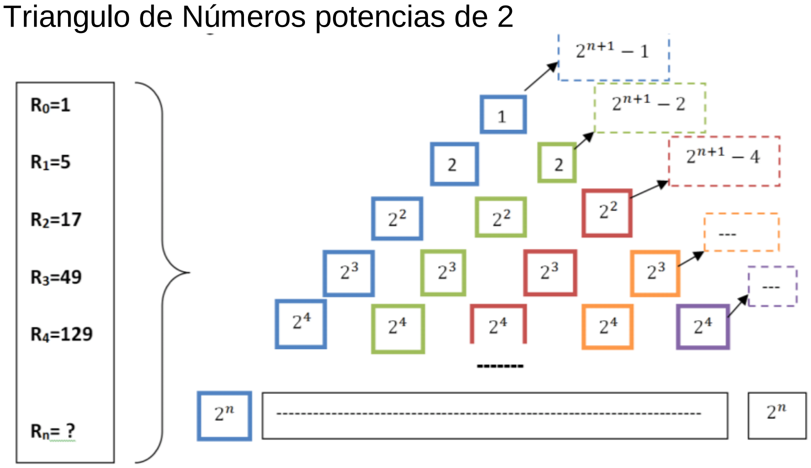


Hasta esta parte pude llegar porque no me sale la suma.
(PZ) De cada número tenemos "3 hijos", el del centro se obtiene multiplicando por 3, en este caso el de la izquierda para 3n-1 sus hijos son, izquierda 3(3n-1)-1, centro 3(3n-1), derecha 3(3n-1)+1
Está en camino de llegar a obtener el término "n ésimo": último término de cada renglón. Posteriormente debe sumar, pero como se ve todavía no sabe cómo.
$1+3+3^2+3^3$ pero si se observa con cuidado tenemos una serie geométrica con r =3

Alumno 2. En conclusión, yo no logre el objetivo ya que solo encontré los términos de la suma el primero y ultimo pero no logre demostrar la suma de nuestro enésimo renglón, pero si comprendí la solución del profesor y logre llegar al objetivo con lo desarrollado.

Problema 4. Triangulo de números impares.
Primero debemos hallar el último elemento de cada renglón: $n^2 + n - 1 = n(n+1)-1$
Este problema fue un poco difícil para ellos, solo logran obtener el primero y último término del renglón n- ésimo. Se resuelve en clase, como ayuda para resolver los problemas 3 y 5.

Problema 5. Triangulo de Números potencias de 2



Fase 1. Mi plan es….
Encontrar una fórmula que nos brinde el resultado de la suma de todos los números que se encuentren en un triángulo de "n" renglones, con la particularidad de que el número fijo utilizado es "2" y que en el primer renglón el exponente sea 0, en el segundo sean de exponente 1, en el tercero sean de exponente 2, y así consecutivamente hasta el renglón "n".
Me di cuenta que de manera diagonal en el triángulo, hay números con los que hemos trabajado, como lo es en la diagonal de "*cuadro azul*". Esta secuencia de números en los cuadros azules la podemos sumar de acuerdo a una fórmula vista en clase que es: $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$, por lo que esta formula nos daría prácticamente la respuesta que buscamos, con la diferencia sería en que en las próximas diagonales cambiaría la notación de la formula.
Por ejemplo, en la diagonal verde nos quedamos sin un número menos (El número 1, a diferencia de la diagonal azul), por lo que la fórmula de esa diagonal seria $2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 2$, en la siguiente diagonal nos quedamos sin el

número 2 por lo que la formula quedaría: $2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 4$, en la próxima diagonal perdemos al 2^2 por lo que también modificaríamos la formula, y así sucesivamente.
Al identificar esta particularidad secuencial de este triángulo, me di la tarea de llegar a una fórmula utilizando la fórmula original y sus modificaciones que se mencionaron anteriormente. Realice algunos intentos de sumar esas fórmulas, pero el tiempo se nos acabó y no logre completar la idea.
Fase 2 solución en equipo
El compañero Roberto llego a este resultado: $n2^{n+1} + 1$, en donde él mismo tuvo dudas de cómo logro llegar a ese resultado. Por lo que su solución no me quedo clara a primera vista.
No pude llegar al resultado final por falta de tiempo.
¿Me fue útil trabajar con mis compañeros?
No mucho, debido a que él compañero también tenía dudas con su propio resultado, por lo que me genero desconfianza a su resultado propuesto.
¿Analice críticamente sus ideas?
Sólo en las parte en las que lograba comprender su explicación.
¿Llegamos a una conclusión entre todos?
Sí, junto con el profesor.
¿Entendí la solución del maestro, o me resulto confusa?
Sí le entendí, y termino concluyendo la idea que yo tenía en mente pero que no logre concretar.

Alumno 2. Fase 4 Reflexiones Finales
Durante desarrollo de la solución de este problema, y en general de los problemas de tareas anteriores, me he dado cuenta de lo útil que es conocer fórmulas para la suma de sucesiones de números enteros. Considero que también es bastante útil saber observar y hallar patrones, ya que de esta forma se puede deducir una fórmula matemática para hallar la suma de cualquier sucesión que siga un patrón de incremento definido. En lo personal creo que este tipo de tareas me ha ayudado a mejorar mi habilidad para pensar matemáticamente y hallar patrones utilizando expresiones algebraicas. En este problema en particular, las observaciones de los patrones del Triángulo de Números y sus descripción detallada me ayudaron a poder expresar de mejor de forma matemática lo observado.

Problema 6 Fichas de dominó En lo personal, este problema tuvo sus dificultades para mí, tanto que no pude ni terminarlo, pero al ver la forma en la que mi compañero y el profesor lo resolvieron de dos maneras distintas pero similares, y sobre todo el escuchar y entender su razonamiento me ayudó a ver el problema desde sus puntos de vista.
Al terminar las fases dos y tres me di cuenta de lo importante que es siempre tener en cuenta los y problemas similares y conocimientos adquiridos anteriormente. Tendré esto siempre presente de ahora en adelante.
Problema 7. Suma puntos domino
Fase 1 – Solución individual

Plan: Las fichas de dominó de doble 6 van desde la ficha que tiene doble 0 $\binom{0}{0}$, es decir la ficha que no tiene puntos ni arriba ni debajo de la línea que divide la ficha, hasta la ficha doble 6 $\binom{6}{6}$ que tiene 6 puntos arriba y debajo de la línea que la divide. Esto de forma que no haya dos fichas iguales, es decir, que no haya dos fichas con el mismo número de puntos arriba y abajo. Entonces de manera escalonada podemos representar las fichas de la siguiente forma.

Fichas de doble 6

							Núm. de fichas por fila
0 0	0 1	0 2	0 3	0 4	0 5	0 6	7
	1 1	1 2	1 3	1 4	1 5	1 6	6
		2 2	2 3	2 4	2 5	2 6	5
			3 3	3 4	3 5	3 6	4
				4 4	4 5	4 6	3
					5 5	5 6	2
						6 6	1

Observamos que la fila de arriba son 7 fichas, la siguiente fila contiene 6, la siguiente 5 y la última fila solo 1 ficha. Podemos notar que esta es una suma de números consecutivos desde 1 hasta 7 fichas y esta sumatoria nos la da la fórmula de Gauss de números consecutivos.

Solución: Considerando la fórmula de Gauss $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ y con $n = 6$, por ser un juego de fichas de doble 6 y que nuestra sumatoria llega hasta $n + 1 = 7$, entonces podemos considerar la suma siguiente,

$$\left(\sum_{i=1}^{6} i\right) + (6+1) = \frac{6(6+1)}{2} + (6+1) = \frac{(6+1)(6+2)}{2}$$

Y generalizando para cualquier juego de fichas de doble "n", se llega a la siguiente formula:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} i\right) + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Ahora, podemos utilizar la fórmula de arriba para hallar el número de fichas del juego de doble 9, doble 12 y doble 15. Entonces para cada caso tenemos,

Juego de doble 9: Si $n = 9$,

$$S_9 = \frac{(9+1)(9+2)}{2} = \frac{110}{2} = 55$$

Juego de doble 12: Si $n = 12$,

$$S_{12} = \frac{(12+1)(12+2)}{2} = 13(7) = 91$$

Juego de doble 15: Si $n = 15$,

$$S_{15} = \frac{(15+1)(15+2)}{2} = 8(17) = 136$$

Así, hemos hallado la solución a nuestro problema y deducimos una formula general para determinar el número de fichas de cualquier juego de domino de doble "n".

Fase 2 – Discusión por parejas

En la fase de discusión por parejas, platique con mi compañero Carlos, pero aun no tenía una solución al problema y, la verdad es que en ese momento yo tampoco había llegado a una solución. En ese momento estaba contando las fichas manualmente y no había encontrado la relación entre el número de fichas y los números que definen cada juego de fichas (6, 9, 12, 15).

El compañero que paso a mostrarnos su solución había encontrado que con las fichas de doble 6, su suma podía hallarse por la fórmula de Gauss hasta $n+1$ con $n = 6$ de la siguiente forma:

$$\left(\sum_{i=1}^{6} i\right) + (6+1) = 1+2+3+4+5+6+(6+1) = \frac{6(6+1)}{2} + (6+1) = 21 + 7 = 28$$

Y con ello pudo generalizar una fórmula para cualquier juego de fichas de doble "n", que quedo de la siguiente manera:

$$S_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Fase 3 – Solución Experta

La solución experta del profesor Zeleny coincidió con la solución expuesta por el compañero, pero mejor explicada y con las consideraciones algebraicas pertinentes. Había considerado la fórmula de Gauss $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$, primero para el juego de fichas de doble 6 tomando $n = 6$ y sumando $(n+1)$ a la formula, esto porque se cuentan las fichas desde la ficha $\binom{0}{0}$ hasta la ficha $\binom{6}{6}$ y estas son 7 por serie sin que ninguna de ellas se repita, y en efecto se llega a la formula hallada en mi solución individual y la encontrada por el compañero en la exposición de clase,

$$S_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Fase 4 – Reflexiones

Este problema nos pedía hallar el número de fichas total de cualquier juego de fichas de doble "n", considerando precisamente el número que definía al conjunto de fichas (ej. 9, 12, 15,…, n). Sin embargo hay que darse cuenta de que cada ficha tiene cierta cantidad de puntos tanto arriba de la línea divisoria como debajo de esta y, la cantidad de puntos va desde 0 hasta 6, 9, 12, 15, o hasta "n", pero esto solo una ficha y, cada ficha es irrepetible, es decir, no hay dos fichas de $\binom{0}{0}$ o dos fichas de $\binom{9}{9}$, por ejemplo. Así dependiendo de cuál sea "n", notamos que si comenzamos a sumar ordenadamente desde la ficha $\binom{n}{n}$ hasta la ficha $\binom{0}{0}$ vemos que las fichas aumentan consecutivamente de uno en uno.

Problema 7: Encontrar el número total de puntos del juego de domino Desde doble 6, doble 9, doble 12 y doble 15. Generalizar una fórmula para calcular el número de puntos de cualquier juego de doble “n”.

Fase 1 – Solución individual

Plan: Podemos utilizar la formula deducida para calcular el número de fichas de cualquier juego de doble “n” como apoyo. Como esta fórmula nos da el número de fichas, simplemente debemos hallar el promedio de puntos por ficha y multiplicarlo por el número de fichas o en tal caso por la formula $S_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. Lo que estamos proponiendo en realidad es usar el principio multiplicativo.

Empecemos trabajando con el caso de doble 6 $\binom{6}{6}$. Podemos representar convenientemente todas las fichas para encontrar el promedio de puntos por ficha. Podemos juntar las fichas por pares de manera que al sumar los puntos de la pareja de fichas, estas siempre den el mismo número y observar si sobra alguna ficha.

Fichas por Parejas

Pareja	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	
	0 0	0 1	0 2	0 3	0 4	0 5	0 6	1 1	1 2	1 3	1 4	1 5	2 2	2 3	
	6 6	6 5	6 4	6 3	6 2	6 1	2 4	5 5	5 4	5 3	5 2	3 3	4 4	4 3	**Suma de puntos**
puntos por pareja	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	168

Vemos que ordenando convenientemente las fichas, el promedio de puntos por ficha es 12 y la suma total de puntos es 168. Observemos que el 12 se repite 14-veces y el producto de estos dos números nos da el número total de puntos de juego de fichas de doble 6. Con esto en mente, vemos que $12 = 6(2)$ y que $14 = \frac{(6+1)(6+2)}{4}$ y con estas igualdades tenemos,

$$6(2)\frac{(6+1)(6+2)}{4} = \frac{(6)(6+1)(6+2)}{2} = \frac{(6)(7)(8)}{2} = 168$$

Con el caso anterior, podemos intentar generalizar la siguiente formula:

$$P_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{2}$$

Ahora, probemos la fórmula para los casos doble 9, doble 12 y doble 15.

Juego de doble 9: Si $n = 9$,

$$P_9 = \frac{9(9+1)(9+2)}{2} = 495$$

Juego de doble 12: Si $n = 12$,

$$P_{12} = \frac{12(12+1)(12+2)}{2} = 1092$$

Juego de doble 15: Si $n = 15$,

$$P_{15} = \frac{15(15+1)(15+2)}{2} = 2040$$

Así, nuestra formula ha dado siempre resultados de números enteros positivos, por lo que parece ser cierta, sin embargo no lo sabremos hasta someterla a prueba por inducción.

Problema 8. Sistema 7x7

(PZ) Varios alumnos no usaron la sugerencia dada en clase.

Por ejemplo el siguiente alumno plantea el sistema y resuelve usando operaciones elementales por renglones.

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 5 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 6 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7
\end{array}\right)$$

Primera fila por menos uno más la sexta fila= sexta fila

Primera fila por menos uno más la séptima fila= séptima fila

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 5 \\
0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 5 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6
\end{array}\right)$$

Segunda fila menos la sexta fila= sexta fila

Segunda fila menos la séptima fila= séptima fila

El sistema lineal asociado a la matriz aumentada reducida es:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
a + & b + & c & & & & & & & & & = & 1 \\
 & b + & c + & d & & & & & & & & = & 2 \\
 & & c + & d + & e & & & & & & & = & 3 \\
 & & & d + & e + & f & & & & & & = & 4 \\
 & & & & e + & f + & g & & & & & = & 5 \\
 & & & & & f + & 2g & & & & & = & 8 \\
 & & & & & & 3g & & & & & = & 13
\end{array}$$

PZ no saca provecho de que la matriz tiene varios ceros, y que cada incógnita aparece 3 veces.

A	$^{7}/_{3}$	2.33
B	$^{1}/_{3}$	.33
C	$^{-5}/_{3}$	-1.66
D	$^{10}/_{3}$	3.33
E	$^{4}/_{3}$	1.33
F	$^{-2}/_{3}$	-.66
G	$^{13}/_{3}$	4.33

Alumno 2.

Fase 1

Intente resolver el sistema por medio de Gauss pero no logre hacer nada y no porque no lo intentara sino porque <<a ojo de buen cubero>> vi que se pondría muy pesado y tardado.

Busque otras maneras de resolver y se me ocurrió por medio de determinantes, pues tenía muchos ceros y eso me ayudaría.

Fase 2

No pregunte a nadie acerca de cómo hacerlo.

Fase 3

El método que realizo el profesor fue bastante compresible y me gusto esa manera de resolverlo porque algo que se veía tan complicado fue muy rápida de resolver.

Y las respuestas serian

a=7/3 b=1/3 c=-5/3 d=10/3 e=4/3 f=-2/3 g=13/3

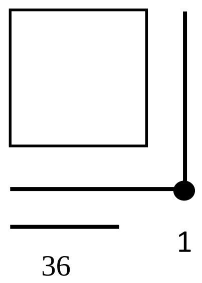
Conclusión

Buscar patrones en los problemas, también puede ayudar a resolverlos, como en este ejemplo era fijarse que todas las variables se repetían tres veces y que si los sumábamos quedaba todo más simple.

Problema 9. Comandante y tropa

Un comandante dispone su tropa formando un cuadrado y ve que le quedan 36 hombres por acomodar. Decide poner una fila y una columna más de hombres en dos lados consecutivos del cuadrado y se da cuenta que le faltan 75 hombres para completar el cuadrado. ¿Cuántos hombres hay en la tropa?

Solución Individual:

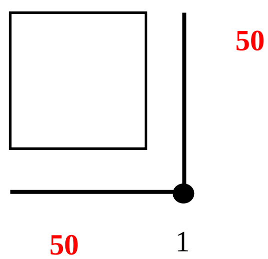


Faltan 75 hombres

$$36 + 75 = 111$$
$$111 - 1 = 110$$

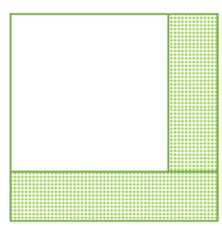
$$51 * 51 = 2601$$
$$2601 - 75 = 2526$$

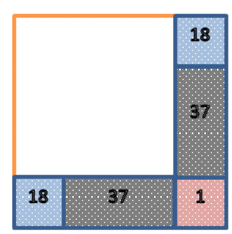
R: 2526 hombres



Me equivoque, pues en realidad era 55.

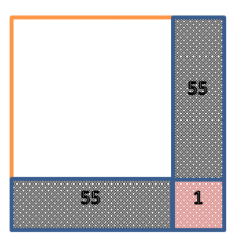
(PZ) se refiere al lado del cuadrado, no se dio cuenta que 111 = 2n+1
Alumna 2.
Comenta la solución de sus compañeros, sin utilizar algebra.





Esta es la solución grafica

Ahora muestra como se ve al final



Por lo tanto la solución es que inicialmente hay 55^2 +36 soldado en la tropa
Fase4. Reflexión sobre todo el proceso
¿Logre el objetivo? si
¿Use todas las condiciones del problema? Cuando nuestros compañeros nos explicaron entendí cada uno de ellos
¿Mi respuesta corresponde a lo que pide el problema? Por supuesto
¿Me fue útil trabajar con mis compañeros? Demasiado útil para mi opinión.
¿Analice críticamente sus ideas? si ¿Obtuve alguna conclusión valiosa? El resultado al que queríamos llegar
¿Llegamos a una conclusión entre todos? Claro
¿Entendí la solución del maestro, o me resulto confusa? perfectamente

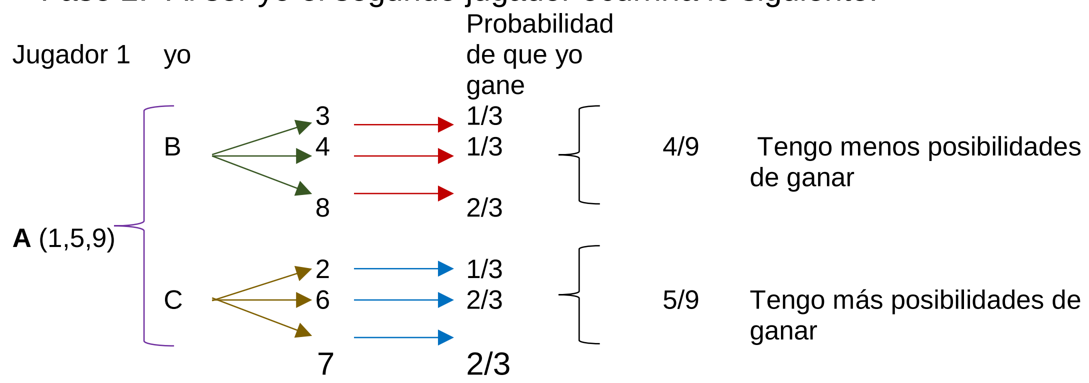
¿APRENDI NUEVAS ESTRATEGIAS? SI, algebraicamente.

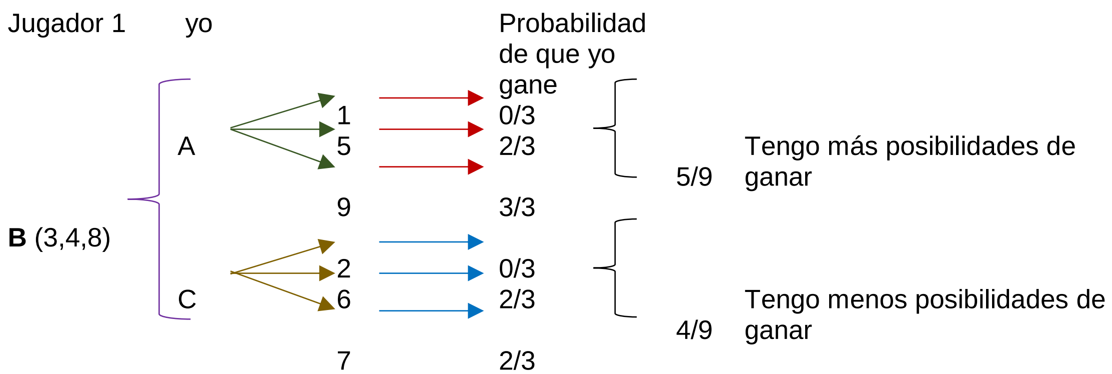
Alumno 3.
¿COMPRENDI MEJOR LOS CONCEPTOS MATEMATICOS INVOLUCRADOS?
Si aprendí a traducir de un lenguaje coloquial a un lenguaje matemático.
Utilizando la fórmula del área del cuadrado y combinarla con el álgebra me hizo mucho bien para entender mejor este tipo de problemas.
Alejandra: Como conclusión tenemos que podemos resolver el mismo problema algebraicamente o aritméticamente.

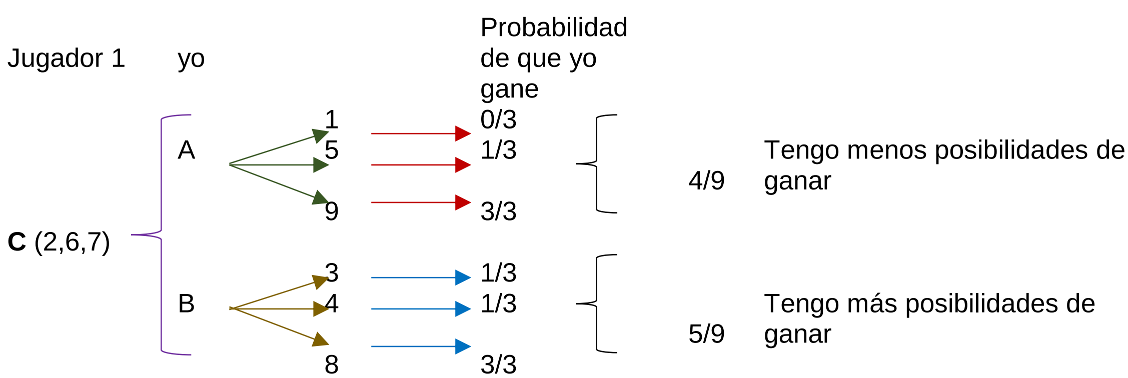
Alejandra: debemos darnos cuenta que resolver un problema no siempre tiene que ser difícil y muy laborioso. Podemos notar que en casi todos los problemas hemos usado simplificación después de haber planteado el problema.

Problema10. 3 Ruletas

Fase 2.- Al ser yo el segundo jugador ocurriría lo siguiente:







FINALMENTE LA SOLUCION QUE PROPONGO ES:

Me conviene ser el segundo jugador porque al ya saber la probabilidad de ganar en cada caso, puedo elegir de acuerdo a la ruleta escogida por el primer jugador la ruleta que me dé más probabilidades de ganar, y así tener más posibilidad de ganar.

Fase2. Solución en equipo.

Mi compañera y yo coincidimos en la forma de resolverlo y ambas pensamos que está bien planteada la solución. Fue una conclusión en equipo

Fase3. Solución Del Experto.

El profesor comento que la mejor forma, porque son pocos casos, es la de analizar todos los casos posibles para así poder encontrar la mejor opción, que por lo que se puede observar anteriormente fue lo que hice.
(PZ) Observación, trabaja más de lo necesario, se explicó en clase que conviene ser el segundo jugador.
Alumno 2.

Fase 3

El profesor dijo que se tenía que hacer caso por caso para poder saber cómo siendo el segundo era más probable ganar.
Y en efecto hice una tabla que (según yo eran todos los casos porque no tenía sentido repetir)

	A $\longrightarrow$	B	B $\longrightarrow$	C	C $\longrightarrow$	A
	8; 2/3	9;1	9;1	6;2/3	6;2/3	8; 1
	4;1/3	5;2/3	5;1/3	7;2/3	7;2/3	4;1/3
	3;1/3	1;0	1;0	2;1/3	2;0	3;1/3
Total	4/3	5/3	4/3	5/3	4/3	5/3

Conclusión

No se me había ocurrido que eran pocos casos (me daba flojera), pero haciendo lo me di cuenta de por qué era ser mejor el jugador dos, puesto que para cada ruleta existe otra ruleta con la que se tiene más probabilidades de ganar y que no existe una ruleta que tenga más probabilidades que las otras dos.

Problema 11. Vegas

Resolución: Según el problema, la forma en que va aumentando de dinero sigue un patrón particular. En día cero (antes de llegar a Las Vegas) comienza y termina con X dólares, el día 1 termina con 2X, el tercero con 4X, el cuarto con 8X y así sucesivamente hasta el décimo día. Los coeficientes de X siguen el patrón de 2^n desde n=0 hasta n=10. Podemos usar la formula que nos da la sumatoria de estos coeficientes de X. Hay que puntualizar que las cantidades no se suman, sino que cada término es la cantidad de dinero con que termina ese día.

$$1x + 2x + 2^2x + 2^3x + 2^4x + 2^5x + \cdots + 2^nx = (2^{n+1} - 1)x$$

Como al final del décimo día termina con $1, 000,000 podemos despejar X de la siguiente ecuación, donde n=10:

$$2^{10}x = 1000000$$

$$x = \frac{1000000}{1024} \approx 976.56$$

Es decir que la cantidad de dinero con la que comienza es **X= $976.56 dólares**.
a) Entonces al final del quito día termina con:

$$\mathbf{2^5(976.56) = 31250}$$

b) Y al final del noveno día termina con:

$$\mathbf{2^9(976.56) = 500000}$$

Problema 12. El soldado y las piedras.

$$
\begin{gathered}
Para\ este\ problema\ tenemos\ lo\ siguiente\ : \\
para\ recojer\ la\ primera\ piedra\ recorre\ 20m \\
para\ la\ segunga\ 40m\ mas\ los\ 20m\ de\ la\ primera\ lleva\ 60m \\
para\ la\ tercera\ \ 60m+60=120 \\
4° --- 80m+120=200m \\
5° --- 100m+200m=300m \\
6° --- 120m+300m=420m \\
7° --- 140m+420m=560m \\
8° --- 160m+560m=720m \\
9° --- 180m+720m=900m \\
10° --- 200m+900m=1100m \\
11° --- 220m+1100m=1320m \\
12° --- 240m+1320m=1560m \\
13° --- 260m+1560m=1820m \\
14° --- 280m+1820m=2100m \\
15° --- 300m+2100m=2400m \\
16° --- 320m+2400m=2720m \\
17° --- 340m+2720m=3060m \\
18° --- 360m+3060m=3420m \\
19° --- 380m+3420m=3800m \\
20° --- 400m+3800m=4200m \\
21° --- 420m+4200m=4620m \\
22° --- 440m+4620m=5060m \\
23° --- 460m+5060m=5520m \\
24° --- 480m+5520m=6000m
\end{gathered}
$$

¿COMPRENDI MEJOR LOS CONCEPTOS MATEMATICOS INVOLUCRADOS?
Si aprendí a traducir de un lenguaje coloquial a un lenguaje matemático. Y por supuesto que esto me ayudo a familiarizarme con los conceptos matemáticos de este problema. Además logre comprobar por <u>dos métodos distintos</u> mis resultados.

Alumno 2
Entonces para cuando recorre 6000m tenemos que...
6000= 10[n(n+1)]
600= n(n+1)
0=n^2+n-600
0=(n-24)(n+25)
n=-25 o n=24

(PZ) De todas formas factoriza, podemos factorizar 600= n(n+1) que es menos trabajo, porque buscamos números consecutivos.

Problema 13. Dos viajeros

$$
\begin{gathered}
El\ primer\ viajero\ tiene\ una\ ecuacion\ de\ este\ tipo \\
20n\ donde\ n\ son\ los\ dias\ que\ pasan \\
y\ para\ el\ segundo\ viajero, la\ ecuacion\ que\ descrive\ su\ caminata\ es
\end{gathered}
$$

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

$ahora\ lo\ que\ queremos\ saber\ es\ cunado\ lo\ alcanza\ pues\ igualamos\ las\ dos\ ecuaciones\ y\ listo$

$$20n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$40n = n^2 + n$$

$$n^2 - 39n = 0$$

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\frac{39 \pm \sqrt{1521 - 4(0)}}{2}$$

$$\frac{39 \pm \sqrt{1521}}{2} = \frac{39 + 39}{2} = 39$$

Alumno 2.

MI PLAN ES…

Hacer una tabla que me permita encontrar en que día alcanza el segundo viajero al primero.

Para encontrar la distancia que recorre el primer viajero solo multiplicaba el número de días por 20 y para el segundo utilicé la fórmula de Gauss pero tanteándole al número de días

	1 viajero	2 viajero
1 día	20 km	1 km
2 día	40 km	2 km
3 día	60 km	4 km
30	600 km	465 km

FINALMENTE LA SOLUCION QUE PROPONGO ES:

Hacer la tabla como anteriormente lo hice e irle tanteando al número de días con respecto al segundo viajero hasta encontrar el día en el cual se encuentran.

	1 viajero	2 viajero
1 día	20 km	1 km
2 día	40 km	2 km
3 día	60 km	4 km
30 días	600 km	465 km
35 días	700 km	630 km
39 días	**780 km**	**780 km**

Debo de poner más empeño con las formulas ya que siempre me voy por el camino más largo.

Problemas 14a   Cuadrados mágicos.

Completa el siguiente cuadro mágico de 3x3 con los números: 11, 12, 13, 14,15,…,19.

Con mis propias palabras el problema es: encontrar un método para poder completar los cuadrados mágicos

18	11	16
13	15	17
14	19	12

Lo primero que se debe obtener es la suma mágica del cuadrado, para que en base a ella, podamos completarlo de una manera más rápida.
Explica como completas el cuadrado.
La suma mágica la encontré de la siguiente manera:
$\sum \mathbf{11+12+13+14+\cdots+19=135}$

$$\frac{\mathbf{135}}{\mathbf{3}}=\mathbf{45}$$

14b Completar el siguiente cuadrado mágico de 4x4 con los números: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,...,19

16	3	2	12
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

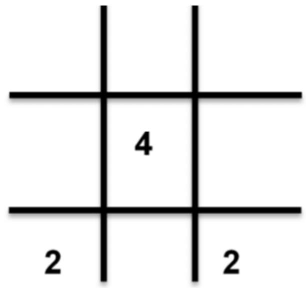
En este caso, nuevamente lo primero que debo hallar es la suma mágica, y lo hice utilizando el mismo método que el caso anterior.

$$\sum \mathbf{1+2+3+4+\cdots+16=136}\ \boldsymbol{es\ decir}\ \frac{\mathbf{136}}{\mathbf{4}}=\mathbf{34}$$

Cuadrados Mágicos
¿Qué es lo primero que debes hallar?
R: Lo primero que debo hallar es la suma mágica. Como debo completar el cuadrado con los números 11, 12, 13,…, 19, la suma mágica es la suma de todos ellos dividido entre tres porque es la cantidad de columnas o reglones.

$$\frac{11+12+13+14+15+16+17+18+19}{3}=\frac{135}{3}=45$$

La suma mágica es de 45.
Explica como completas el cuadrado mágico.
R: Como la suma mágica es de 45, debo de encontrar un número entre los números 11, 12, 13,…, 19, que sumados con los números del primer renglón den 45, el cual es 16.
Problema 15. Cuadrado sema -mágico (números repetidos). López Bonilla
Completar el siguiente “gato” de manera que se vuelva un cuadrado mágico.



Considerando que la característica principal de un cuadro mágico, es que cada una de sus filas, sus columnas y sus diagonales deben sumar siempre lo mismo, y tomando en cuenta que el gato nos daba un número repetido, intente completar varias veces el cuadrado pero desafortunadamente no lo conseguí.

¿Entiendo todos los términos, conceptos que se usan en el problema? si

¿Identifico las palabras clave? si

Lo pienso y trato de resolver (fase de exploración, no debo apresurarme a dar una solución, puedo jugar un poco con los datos "a ver que sale")

Mi plan es: primero intento llenar al azar cada uno de los recuadros faltantes, pero después me doy cuenta de que hacerlo de esta manera me tomara más tiempo resolver el problema, entonces busco un patrón para poder localizar un método más sencillo, y encuentro que debo sumar cada uno de los números que puedo utilizar, y al resultado dividirlo entre el número de columnas que tiene mi cuadro mágico para localizar la suma mágica, y con ellos llenar el cuadro mucho más rápido.

Al ejecutar el plan sucede que: he encontrado un método más sencillo, pues lo que hice me dio resultado, sin embargo eso no quiere decir que sea el más fácil.

FINALMENTE LA SOLUCION QUE PROPONGO ES: Que debo sumar cada uno de los números que puedo utilizar, y al resultado dividirlo entre el número de columnas que tiene mi cuadro mágico para localizar la suma mágica, y con ellos llenar el cuadro mucho más rápido.

Problema16. Cubo Mágico

Con los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,…, 27 (consecutivos) se desea armar un cubo mágico de 3x3x3. En cada cubito se coloca solo un número. En este caso la suma de los números en todos los renglones y todas las columnas debe de ser constante. Suponiendo que existe solución. Hallar la suma mágica.

Debo sumar cada uno de los números que puedo utilizar (1+2+3+4+5+6+7+8+9+…+27), y al resultado dividirlo entre 9, pues nueve es el número que abarca todas las columnas de mi cubo, esto, para localizar la suma mágica, y con ellos llenar el cuadro mucho más rápido.

$$\sum 1+2+3+4+5+\cdots+27=378$$

$$\frac{378}{9}=42$$

¿Qué es lo esencial? Lo esencial en este problema, es considerar que únicamente me están pidiendo encontrar la suma mágica, nunca me piden completar el cubo mágico, entonces una vez comprendido esto, lo único que hice fue aplicar nuevamente mi formula anterior, y de esa manera localizar la suma mágica.

Problema 17. Sistema 3x3 no Lineal

1. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones.

x(x+y+z) = 26
y(x+y+z) = 27
z(x+y+z) = 28

Solución

Notemos que (x+y+z) se repite en las tres ecuaciones, y podemos decir que es el mismo valor en cada ecuación.

Sumaremos, entonces, las tres ecuaciones.

x(x+y+z) + y(x+y+z) + z(x+y+z) = 26+27+28

Como tenemos como factor común a (x+y+z) podemos simplificar la suma (como me hizo ver mi compañero David), de manera que queda expresada de la siguiente forma.

(x+y+z)(x+y+z) =81
(x+y+z)^2=81
(x+y+z)=9

Una vez determinado el valor de (x+y+z) podemos sustituirlo en cada ecuación original

x(9)=26 -> x=26/9
y(9)=27 -> y=27/9
z(9)=28 -> z=28/9

Problema 18. Tarea de Pablito

Pablito está haciendo la tarea de matemáticas cada problema que resuelve le toma un minuto más que el anterior. Toda la tarea la termina en una hora con 48 minutos. ¿Cuántos problemas hizo? ¿En cuantos minutos hizo el primero? Hay varias soluciones, hallar todas.

La verdad es que solo tuve la idea de poner la solución de la siguiente manera, pero no puede justificar bien la formula.

$$x + (x + 1) + (x + 2) + (x + 3) + \cdots + (x + \cdots) = 108$$

R: $31 + 33 + 35 + 37 + 39 + 41 = 216$

Mi estrategia es poner los 6 números impares consecutivos según su forma y obtener la solución de la ecuación.

$(2k + 1) + (2k + 2) + 1 + (2k + 3) + 2 + (2k + 4) + 3 + (2k + 5) + 4 + (2k + 6) + 5 = 216$

$$6(2k) + \left(\frac{6(7)}{2}\right) + \left(\frac{5(6)}{2}\right) = 216$$

$$(12k) + 21 + 15 = 216$$

$$12k + 36 = 216$$
$$12k = 216 - 36 = 180$$
$$k = \frac{180}{12}$$
$$k = 15$$

Alumna 2. Para resolver este ejercicio realice una tabla en donde la primera columna es el número de ejercicios realizados, la segunda los minutos que se tarda solamente en ese ejercicio y la tercera el número de minutos que lleva hasta el momento:

Ejercicio	Minutos	Total
1	1	1
2	2	3
3	3	6
4	4	10
5	5	15
. .	. .	. .
n	n	$\frac{n(n+1)}{2}$

Con la tabla anterior pude notar que cuando llega al ejercicio *n,* el tiempo total es $\frac{n(n+1)}{2}$. Por lo tanto lo que se debía hacer es igualar dicha fórmula con el tiempo mencionado que es una hora con 48 minutos, pero antes se transforma el tiempo en minutos y entonces el tiempo es de 108 minutos:

$$\frac{n(n+1)}{2} = 108$$
$$\frac{n^2 + n}{2} = 108$$
$$n^2 + n = 2(108)$$
$$n^2 + n - 216 = 0$$

Y resolviendo la ecuación de segundo grado se obtiene el valor de n:

$$n^2 + n - 216 = 0$$
$$n = \frac{-(1) \pm \sqrt{(1)^2 - 4(1)(-216)}}{2(1)} = \frac{1 \pm \sqrt{865}}{-2} = \frac{1 \pm 29.41088234}{-2}$$
$$n_1 = 15.205 \; y \; n_2 = -14.205$$

Al sustituir la parte entera de los dos valores encontrados en $\frac{n(n+1)}{2}$ se puede notar que no da exactamente 108 minutos, por lo tanto concluí que Pablo realizo entre 14 y 15 ejercicios.

No toma en cuenta que la solución debe ser entera, este fue un error típico, no consideraron que el primer problema le pudo haber tomado 10 minutos, es decir la suma de consecutivos no necesariamente inicia en 1. Y el problema seria 10+11+12 etc. e igualar a 108.

Alumno 3
Todos los divisores impares de 108 serán solución, representando el divisor impar el número de ejercicios realizados y el resultado de la división de 108 entre su divisor impar el número medio de la sucesión de números enteros consecutivos:
Los divisores de 108 son:
1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 27, 36, 54, 108.
De los cuales son impares:
1, 3, 9, 27
Por lo tanto, existen 4 soluciones:
<u>Primera solución:</u>
Resolvió un solo problema en 108 minutos.

<u>Segunda solución:</u>
Resolvió 3 problemas en 108 minutos, es decir:
$\frac{108}{3} = 36$ 35+36+37=108
Resolvió el primer problema en 35 minutos

<u>Tercera solución:</u>
Resolvió 9 problemas en 108 minutos, es decir:
$\frac{108}{9} = 12$ 8+9+10+11+12+13+14+15+16=108
Resolvió el primer problema en 8 minutos

<u>Cuarta solución:</u>
Resolvió (27)* problemas en 108 minutos, es decir:

$$\frac{108}{27} = 4$$

-9+(-8)+(-7)+(-6)+(-5)+(-4)+(-3)+(-2)+(-1)+0+1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14+15+16+17=108
~~-9+(-8)+(-7)+(-6)+(-5)+(-4)+(-3)+(-2)+(-1)+0+1+2+3+4+5+6+7+8+9+~~10+11+12+13+14+15+16+17=108

*Como observamos, los números del -9 hasta el 9 se cancelan entre sí, por lo tanto, resolvió 8 problemas en 108 minutos, el primero lo resuelve en 10 minuto**s**

Problema 19 Expresar a 216 como suma de 6 enteros impares consecutivos.
Dividimos 216 entre 6:

$$\frac{216}{6} = 36$$

36 será el número medio de nuestra serie de números enteros impares consecutivos, pero al ser éste par, tomaremos los 3 números impares anteriores a 36 y los 3 números impares posteriores a 36 dando la solución:

$$31 + 33 + 35 + 37 + 39 + 41 = 216$$

Alumno 2
Aquí exprese 6 números impares consecutivos de esta manera

n + (n+2) + (n+4) + (n+6) + (n+8) + (n+10)

Con la incógnita "n" como el primer número de los 6 números consecutivos.

Conociendo que la suma de esos 6 números es 216, entonces:

n + (n+2) + (n+4) + (n+6) + (n+8) + (n+10) = 216

Realizando los despejes correspondientes tenemos que el valor de n = 31
Por lo que los otros 5 números restantes serian: 33, 35, 37, 39, 41.
El mismo método fue utilizado por el compañero con el que pedí ayuda.

Problema 20. Ingeniero y sus trabajadores
Esta respuesta la tuve mal, pero fue debido a mi inseguridad, ya que la estrategia que utilizare a continuación la había pensado.
Mi compañero me yudo a concretar la idea.
Sume todo, quedándome una expresión de esta manera:
2(pin + alb + elec + plo + carp) = 1600
El número 2, se debe a que cada trabajador aparece 2 veces en toda la suma. Por lo que posteriormente la ecuación nos quedaría de esta manera.
pin + alb + elec + plo + carp = 8000
De algunas sumas conocemos sus valores debido a los datos del problema. Por lo que podemos sustituir.
300 + 3500 + plo = 8000
Despejando tenemos que el sueldo del plomero es de 1500.
Realizando el mismo procedimiento para los demás sueldos tenemos los sueldos siguientes:
Electricista = 1800
Albañil = 1900
Pintor = 1100
Carpintero = 1700
Problema 21. Cien ecuaciones cien incógnitas
(PZ) La mayoría entendió la solución dada en clase, ver la solución en el capítulo 3. Algunos alumnos intentaron resolver escribiendo toda la matriz. Alguien comento que no entendió bien la estrategia explicada en clase.

Problema 22. Numero de Colores
Solución: por ejemplo debes sumar dos números rojos ¿Qué clase de número resulta?
El número que resulta es de la forma 3n, n en los naturales, ya que los números en rojo son múltiplos de 3.
Si sumas un número rojo y uno blanco ¿Qué clase de número resulta?
Note que todos los números en blanco los podemos escribir como 3n-2. Luego, la suma de un número rojo y un blanco es 3n+3n-2=6n-2.
Para completar la tabla tenemos lo siguiente. Los números en rojo son de la forma 3n; los que están en blanco, 3n-2; y los de azul de la forma 3n-1. De esta forma, la tabla queda de la siguiente forma:

+	R	B	A
R	6n	6n-2	6n-1
B	6n-2	6n-4	6n-3
A	6n-1	6n-2	6n-2

2.- Halla que clase de número es R^2, B^2, A^2 ¿lo puedes demostrar?
Ya dijimos que los números en rojo son de la forma 3n; los que están en blanco, 3n-2; y los de azul de la forma 3n-1. Así que un número en rojo al cuadrado tiene la forma $9n^2$; los de blanco, $(3n-2)^2$, y los de azul $(3n-1)^2$.
Discusión con el compañero: no tuve la oportunidad de platicar con un amigo.
Reflexión: algo que no entendí fue lo de hallar que clase de número es R^2, B^2, A^2 pues pensé en que era el cuadrado de un elemento del conjunto R, B, A, respectivamente. Y también creí que se trataba de producto cartesiano de R, B, A lo cual la respuesta sería las R^2= {(3n, 3n) | n en R y n en R}, B^2= {(3n-2,3n-2) | n en B y n en B}, y A^2= {(3n-1,3n-1) | n en A y n en A}.
2ª. Guille
Denotare n = n-ésimo número de mi serie, (empezando con 0); y a los elementos del conjunto:
Rojo como:
R= (3n)
Al conjunto blanco:
B= (3n)+1
Al conjunto azul:
A= (3n)+2
Para saber el color del número resultante sumare la fórmula de cada conjunto dependiendo del color de los dos sumandos y de acuerdo a la forma que tenga el número resultante es al conjunto que pertenecerá.
Y obtengo las siguientes sumas:

$R+R$	$R+B$	$R+A$	$B+B$	$B+A$	$A+A$
$3n+3n$	$3n+3n+1$	$3n+3n+2$	$3n+1+3n+1$	$3n+1+3n+2$	$3n+2+3n+2$

Resolviendo las sumas llegue a los siguientes resultados:

Suma	Resultado	Que es de la forma	Por lo tanto pertenece al conjunto:
R+R	$3n+3n$ $=6n$	$2(3n)$	R
R+B	$3n+3n+1$ $=6n+1$	$2(3n)$ +1	B
R+A	$3n+3n+2$ $=6n+2$	$2(3n)$ +2	A
B+B	$3n+1+3n+1$ $=6n+2$	$2(3n)$ +2	A

B+A	$3n+1+3n+2$ $=6n+3$	$2(3n)$ +3 Y como el número se repite cada 3, queda de la siguiente forma: $2(3n)$ +3-3 $=2(3n)$	R
A+A	$3n+2+3n+2$ $=6n+4$	$2(3n)$ +4 Y como el número se repite cada 3, queda de la siguiente forma: $2(3n)$ +4-3 $=2(3n)$ +1	B

Problema 23 Fiesta en el hotel

En un hotel de playa hay 120 personas distribuidas entre la recepción, el bar, el comedor, y el salón de reuniones. La cantidad de personas que hay en el bar es quinto de las que hay en el comedor; en la recepción hay octavo de las que hay en el salón. Al pasar 10 personas del comedor al salón y 6 del bar a la recepción, en la recepción hay sexto de las que quedan en el comedor.

¿Cuántas personas había inicialmente en cada uno de los lugares?

Mi solución:

R= recepción

B= bar

C= comedor

S= salón

Como todas las personas están en estos cuatro lugares

R + B + C + S = 120

Pero posteriormente nos da los siguientes resultados:

1/5 B = C
1/8 R = S

Entonces podemos decir que:

R + B + 1/5 B + 1/8 R = 120

Después, nos dicen que: **9/8 R + 6/5 B = 120**

"Al pasar 10 personas del comedor al salón y 6 del bar a la recepción, en la recepción hay sexto de las que quedan en el comedor".

Por lo que:

(R + 6) + (B - 6) + (C - 10) + (S + 10) = 120

En esta parte tengo dudas

$$\boxed{(1/6(C-10)) + (B-6) + (C-10) + (S+10) = 120}$$

$$\boxed{(R+6) + (B-6) + (1/6R) + (S+10) = 120}$$

No sé cuál sea la correcta (si es que alguna lo es), eso me confunde. En la parte de "en la recepción hay sexto de las que quedan en el comedor", me confunde un poco, reduje las dos ecuaciones en "naranja" que creí, pero al hacer la matriz de 2 x 2 de una naranja con la azul no me da números enteros. Tengo ya la idea de cómo resolver el problema, pero la parte que anteriormente mencione me confunde, ya que al parecer estoy haciendo algo mal para llegar a la segunda ecuación.
Teniendo los valores enteros de R y B, podríamos formar otro sistema de dos ecuaciones pero ahora con los valores de C y S, la cual nos daría los últimos resultados.
Alumno 2.

FINALMENTE LA SOLUCIÓN QUE SE PROPONE ES LA

¿Cuántas personas había inicialmente en cada uno de los lugares?
c= comedor = 70
b= bar =14
r=recepción= 4
s=salón de reuniones =32
Un alumno escribió las ecuaciones y lo hizo por tanteo, buscando múltiplos de 5.

Fase 4 Reflexión sobre todo el proceso

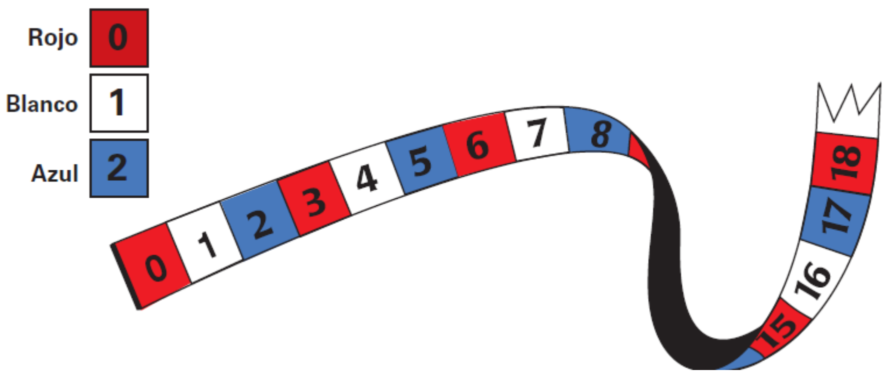
En conclusión, yo no logre el objetivo ya que no encontré la solución, y solo caía en lo mismo ya que me faltaba una ecuación. En general yo si pude comprender la solución del profesor.

Fase 4 Conclusiones (cuadrados mágicos)

En estos problemas de solución de cuadrados "mágicos", pude hallar algunos patrones o similitudes para hallar la solución.
En general lo primero que se requiere para completar correctamente un cuadrado de este tipo es hallar la "suma mágica", ya que con ello se simplifica mucho el problema y se sabe a dónde se quiere llegar, sin mencionar que se deben cumplir las condiciones que se piden (como que se deben usar los números 1, 2, 3,…, 9.
Si se conocen los elementos que debe estar en el cuadrado mágico, se pueden sumar para hallar el total y con ello un promedio de la suma lo cual permite hallar más rápidamente la "suma mágica". Para esto se pueden utilizar varias estrategias y formulas, como la suma de Gauss o sumar los números extremos de la sucesión para hallar más rápidamente la suma. Aquí depende mucho del problema y el cuadrado en cuestión.
Una vez se conoce la suma mágica se pueden construir unas expresiones algebraicas que permitan encontrar sin error los números faltantes del cuadrado mágico y saber precisamente en donde van ubicados. Conociendo cuanto deben resultar se pueden despejar las incógnitas faltantes.
Finalmente con estas mismas expresiones algebraicas se puede verificar que no se haya cometido algún error y se cumplan efectivamente cada una de las sumas.

Tener bien claras las condiciones para completar el cuadrado es también muy importante. Por ejemplo, el saber si se pueden repetir los números o no también es factor para hallar correctamente las incógnitas faltantes.
Estos fueron algunos de los puntos importantes que pude notar sobre la resolución de estos problemas en particular. Quizá haya más que no he notado.
¿COMPRENDI MEJOR LOS CONCEPTOS MATEMATICOS INVOLUCRADOS?
Si, pues cada vez es más fácil resolver nuestras dudas y con un final mucho más satisfactorio.

Problema 22. Números de colores.
Imagina que en la recta numérica (positiva) se indican los números naturales y el cero y que la tira de números es muy grande, que los números se pintan de colores y que sigue el mismo patrón de números y colores de la figura que se muestra.



1.- Completa la siguiente tabla, por ejemplo debes sumar dos números rojos ¿Qué clase de número resulta?
Si sumas un número rojo y uno blanco ¿Qué clase de número resulta?
Completa la tabla

+	R	B	A
R			
B			
A			

Para mayor claridad te escribimos lo anterior en forma de conjunto
Números en Rojo = {0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30….}
Números en Blanco = {1, 4, 7, 10, 13, 16…. }
Números en Azul = {2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26,29…}
Al hacer la tabla anterior, haces algunas afirmaciones como R + R es….
Fase 2 Mi plan es:

Lo primero que debo realizar es completar la tabla:

+	3	4	5
0	3	4	5
1	4	5	6
2	5	6	7

+	9	10	11
6	15	16	17
7	16	17	18
8	17	18	19

+	15	10	14
0	15	10	14
1	16	11	15
2	17	12	16

Con lo obtenido en las tablas anteriores se puede observar que al sumar:

Rojo + Rojo = Rojo
Rojo + Blanco = Blanco
Rojo + Azul = Azul
Blanco + Blanco = Azul
Blanco + Azul = Rojo
Azul + Azul = Blanco

Por lo que la tabla nos queda de la siguiente forma:

+	**R**	**B**	**A**
R	**R**	**B**	**A**
B	**B**	**A**	**R**
A	**A**	**R**	**B**

FINALMENTE LA SOLUCION QUE PROPONGO ES
1.- Completa la siguiente tabla, por ejemplo debes sumar dos números rojos ¿Qué clase de número resulta?
Respuesta: Rojo + Rojo = Rojo
Si sumas un número rojo y uno blanco ¿Qué clase de número resulta?
Respuesta: Rojo + Blanco = Blanco

2.- Halla que clase de número es R^2, B^2, A^2 ¿lo puedes demostrar?
Para mayor claridad te escribimos lo anterior en forma de conjunto
Números en Rojo = {0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30….}
Números en Rojo se puede definir con la siguiente fórmula $NR = (3n)$
Números en Blanco = {1, 4, 7, 10, 13, 16…. }
Números Blancos se puede definir con la siguiente fórmula $NB = (3n) + 1$
Números en Azul = {2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26,29…}
Números Azules se pueden definir con la siguiente fórmula $NA = (3n) - 1$
Halla que clase de número es R^2
Como la fórmula es $NR = (3n)$, entonces al cuadrado queda de la siguiente manera
$(3n)^2 = 0 \Rightarrow (9n^2) = 0$ Y como 9 es un múltiplo de 3, entonces el número que resulta es un número Rojo.
Halla que clase de número es B^2

Como la fórmula es $NB = (3n) + 1$, entonces al cuadrado queda de la siguiente manera $(3n) + 1 = B \Rightarrow ((3n) + 1)^2 = B^2 \Rightarrow 9n^2 + 6n + 1 = B^2$
Halla que clase de número es A^2
Como la fórmula es $NA = (3n) - 1$, entonces al cuadrado queda de la siguiente manera $(3n) - 1 = A \Rightarrow \left((3n) - 1\right)^2 = A \Rightarrow 9n^2 - 6n + 1 = A^2$
Fase 4 Reflexión sobre todo el proceso
En conclusión, yo no logre el objetivo de este problema ya que no pude demostrar que clase de números resultaban de R^2, B^2, A^2. Solo logre obtener las fórmulas de cada conjunto por lo que trabajare en equipo para lograr lo que me falta de este ejercicio.

(PZ) No hace la demostración del caso general, que se explicó en clase, si tengo dos números diferentes (múltiplos de 3 y los sumo) escribimos 3k +3m = 3(k+m) etc. con los demás casos. Yo esperaba esto, pues ya lo observe en otros cursos, los alumnos no hacen el caso general de manera espontánea, a menos que insistas mucho, con casos particulares piensan que ya es suficiente

Problema 23. Fiesta en el hotel
En un hotel de playa hay 120 personas distribuidas entre la recepción, el bar, el comedor, y el salón de reuniones. La cantidad de personas que hay en el bar es de un quinto de las que hay en el comedor; en la recepción hay un octavo de las que hay en el salón. Al pasar 10 personas del comedor al salón y 6 del bar a la recepción, en la recepción hay un sexto de las que quedan en el comedor. ¿Cuántas personas había inicialmente en cada uno de los lugares?
Fase 2 Mi plan es:
Lo que yo realice en este problema fue lo siguiente, plantee las siguientes ecuaciones:
c= comedor x
b= bar $\frac{1}{5}x$ $\left(\frac{1}{5}x - 6\right)$ $(x - 10) = z$
r=recepción $\frac{1}{8}y$ $\left(\frac{1}{8}y + 6\right) = \frac{1}{6}z$
s=salón de reuniones y $(y + 10)$
$\frac{1}{5}x + x + \frac{1}{8}y + y = 120$, ecuación 1

$$\left(\frac{1}{5}x - 6\right) + (x - 10) + \left(\frac{1}{8}y + 6\right) + (y + 10) = 120$$

Finalmente la solución que propongo es
No encontré la solución ya que ambas ecuaciones son las mismas.
PONE LA SOLUCION VISTA EN CLASE PZ
¿Cuántas personas había inicialmente en cada uno de los lugares?
c= comedor = 70
b= bar =14
r=recepción= 4
s=salón de reuniones =32
Fase 4 Reflexión sobre todo el proceso

En conclusión, yo no logre el objetivo ya que no encontré la solución, y solo caía en lo mismo ya que me faltaba una ecuación. En general yo si pude comprender la solución del profesor.

Problema 24. “botellas de jugo”
Un grupo de amigos organiza una fiesta, reúnen $700, para comprar unas botellas de “jugo”. Pero al llegar a la tienda descubren que el precio ha aumentado $15, por lo que compran 6 botellas menos de las que habían pensado inicialmente. ¿Cuánto costaban inicialmente las botellas?
Fase 2 Mi plan es:
1.- Encontrar las ecuaciones para así poder encontrar el valor de cada botella.
Las ecuaciones que propuse son las siguientes, en donde
$p = precio\ de\ cada\ botella$ Y $n = número\ de\ botellas$
$pn = 700 \ \Rightarrow n = \frac{700}{p}$, Ecuación 1
$(p + 15)(n - 6) = 700$, Ecuación 2
Fase 4 Reflexión sobre todo el proceso
En conclusión, yo no logre el objetivo ya que solo encontré la solución de dos problemas del cual el tercero aún no tengo solución. La estrategia en este problema consiste en factorizar cada cantidad total para así poder encontrar la solución o un acercamiento a ella, con este método de factorizar la solución se encuentra más fácilmente.

Problema 25

Observa el siguiente arreglo de números en forma triangular

1	**suma $1=1^2$**
2, 3, 4	**suma $9=3^2$**
3, 4, 5, 6, 7	**suma $25=5^2$**
4, 5, 6, 7, 8, 9, 10	**suma $49=7^2$**
5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13	**suma $81=9^2$**

Para este ejercicio lo primero que note es que la suma de todos los números de una fila es igual al número central elevado al cuadrado.

Por lo tanto para encontrar la suma de la n-ésimo fila, lo único que hay que hacer es elevar el número que se encuentra en la parte central y elevarlo al cuadrado.

La solución que mi compañero propuso fue en base a que el término central al cuadrado de cada reglón es la suma correspondiente a esté, además de los términos centrales son impares consecutivos, es decir son de la forma $2n+1$ con N=0,1, 2, 3,…, n así;

Renglón	T. Central.	SUMA
R_0	1	1^2
R_1	3	3^2
R_2	5	5^2
R_N	$2n+1$	$(2n+1)^2$

Así, sólo basta conocer el término central del renglón deseado para saber su suma.

Alumno 2

Fase 1

1. Me fije en que el primer número de cada renglón indica el número de renglón, i.e. el primer término es *n* y el último número es *3n -2,* para saber la suma de todo el renglón aplico la fórmula de gauss, i.e.

$$\frac{(3n-2)(3n-1)}{2} = 1 + \cdots + (3n-2)$$

Pero eso nos daría la suma desde 1 hasta (3n -2) por lo que le restaríamos la suma hasta (n-1) i.e.

$$\frac{(3n-2)(3n-1)-(n-1)n}{2} = 1 + \cdots + (3n-2) - \big(1 + \cdots + (n-1)\big)$$

Haciendo el álgebra

$\frac{(3n-2)(3n-1)-(n-1)n}{2}$= $4n^2$ -4n +1

CAPITULO 6

EVALUACIÓN DEL DISEÑO Y LAS ACTIVIDADES REALIZADAS POR LOS ALUMNOS

Como se comentó al inicio de este trabajo, el objetivo es reportar sobre el diseño, implementación y evaluación de las actividades que desarrollaron los alumnos durante el curso de teoría de ecuaciones, con las cuales se pretendía mejorar las habilidades metacognitivas y medir sus efectos en el razonamiento lógico.

6.1 Diseño

Díaz y Hernández (1997) comentan que existen programas de enseñanza de estrategias, pero desafortunadamente proporcionan un entrenamiento "ciego", pues sólo explican la naturaleza de las estrategias, y menciona que Brown, Campione y Day opinan que este tipo de entrenamiento puede mejorar ligeramente el recuerdo pero no favorece de ningún modo la generalización o la transferencia de los procedimientos estratégicos aprendidos. Para no caer en este error, en el curso únicamente se insistió en un número reducido de estrategias relacionadas con álgebra superior, se propusieron problemas con enunciado y situaciones diferentes, ello permitió a los estudiantes identificarlas claramente al presentar la solución, por ello es más probable que las recuerden y apliquen en el futuro.
En un enfoque tradicional, el profesor continúa con la exposición lineal del curso, no le preocupa mucho si los alumnos entendieron o se quedaron con dudas o simplemente no pudieron resolver el problema.
El diseño del curso con las 4 fases de trabajo ofrece la ventaja de que alumno aprende de la discusión con sus compañeros y de la solución experta. Lo que le permite darse cuenta de sus errores y corregirlos, en el reporte tiene oportunidad de expresar sus propias ideas del proceso llevado a cabo. Además, como el reporte tenía que ser elaborado con un procesador de textos con editor de ecuaciones, desarrolla su cultura digital y sus habilidades de comunicación.

Se tomó en cuenta el tetraedro de Jenkins para el diseño de los problemas. En uno de los vértices se deben considerar las características de los sujetos, no se esperaba que los alumnos fueran especialmente competentes para resolver problemas. Para tener una idea más precisa se aplicó TOLT como examen de diagnóstico, además permite tener idea del nivel de desarrollo del pensamiento formal de los alumnos, lo que se ve reflejado en la calidad de sus respuestas individuales. Hay varios estudios donde aplican algún tipo de examen diagnóstico por ejemplo Lester y Garafalo (1989) aplican el Stanford Diagonostic Mathematics Test.

Un porcentaje fallaron en los dos primeros ítems de TOLT, que se refieren a razonamiento proporcional, lo que muestra falta de dominio del tema. Los problemas de álgebra se diseñaron con un nivel básico para estudiantes universitarios.

Se implementaron varios problemas con sucesiones numéricas y patrones, este es un tema que se toca en el curso, dentro del apartado de inducción matemática. Por experiencia se sabe que los alumnos tienen problemas para manejar expresiones algebraicas en problemas, concretamente en el paso inductivo se observan errores. Se tenía contemplado explicar con detalle los pasos algebraicos en varios de los problemas, se hizo mención especial de que conviene factorizar y esta es una de las estrategias que se quieren presentar en el curso, así es más probable que se puedan transferir las estrategias usadas a otros problemas de álgebra, donde las soluciones son enteras. Por lo que se considera que el diseño de la secuencia de problemas tiene un nivel de dificultad de acuerdo a los conocimientos elementales con que cuentan nuestros alumnos, tienen como antecedente el bachillerato con trabajo docente tradicional (expositivo a base de ejercicios).
El diseño aporta una buena secuencia de problemas donde se resalta la aplicación de estrategias que se aplican varias veces durante el curso. Con lo cual se cumple con las recomendaciones dadas en el capítulo 2. Se tuvieron en cuenta las sugerencias de Ormrod (2005) acerca de las prácticas que favorecen el uso de estrategias metacognitivas citadas en 1.2 así como las observaciones de Flavell acerca de las situaciones que pueden llevar a vivir experiencias metacognitivas.

En el vértice de materiales, se usaron imágenes para que los problemas no resultaran muy “abstractos”, por el contrario el propósito era motivar al trabajo para resolverlos, y un contexto concreto como el problema del domino, presentado físicamente el dominó doble 15.

En el vértice de estrategias que se pretenden implementar se puso especial cuidado en proponer problemas que pueden resolverse de varias formas, para que el alumno vaya considerando que un problema puede atacarse desde diferentes ángulos, se sabe por experiencia que los alumnos recurren a dos estrategias muy elementales como son hacer una tabla, ensayo y error al resolver problemas con enunciado. Por ejemplo, el problema del comandante y su tropa un alumno realiza la tabla (incrementando de 1 en 1) hasta hallar n tal que n^2 y n que difieran en 75. Otros más hicieron una tabla pero avanzaban omitiendo algunos valores. En el concentrado de estrategias se detallan las principales estrategias explicadas en clase, al final del capítulo 2.

Por último, en el cuarto vértice demandas de la tarea: se considera la dificultad de los problemas, que también está en función de los sujetos. De la experiencia con otros grupos de años anteriores, se conoce razonablemente bien, la dificultad de los problemas propuestos, por ejemplo el problema de los 3 hijos es difícil, pocos alumnos lo resuelven por completo. La dificultad de los problemas propuestos no es insuperable para los alumnos con conocimientos básicos de álgebra, por lo que consideramos que es adecuada para un curso universitario, que pretende destacar el uso de estrategias. De manera consciente no se pidieron demostraciones en los reportes semanales.

6.2 **Implementación**

Se trabajó según lo planeado con 4 fases, ello permitió que los alumnos tuvieran mayor participación que en un curso basado en la exposición en el pizarrón. Es bueno tener presente las observaciones de *Giry (2003)*

"Salir de la rutina, los alumnos están acostumbrados a una rutina del silencio que a la dinámica de la comunicación en grupo. El alumno deberá producir una solución y no conformarse con dar un resultado".

"Dar sentido a la tarea, alentar al alumno a realizarla. El maestro no enseña, no juzga, ayuda a la formulación, a la formalización. El error es convertido en una vivencia positiva".

Es importante señalar que el trabajo diario en clase no se vio afectado por los resultados de TOLT inicial. Poco a poco fui conociendo a los alumnos por su trabajo en clase y sus tareas, el trato fue respetuoso con todos los alumnos. Se tuvo cuidado de no criticar negativamente las soluciones de los alumnos, tanto en el trabajo diario como en la revisión de las tareas. Con ello se logró que las reflexiones fueran espontáneas y creativas, pues si bien es cierto que se esperaban soluciones algebraicas para todos los problemas, hubo varias soluciones correctas por métodos aritméticos, pero esto lejos de ser un defecto, por el contrario muestra que los alumnos entendieron el enunciado de los problemas y por ello dieron una solución "menos abstracta" y lo más importante es que movilizaron sus conocimientos previos y estrategias. Bajo este contexto los alumnos aceptaron más fácilmente la "solución experta" como otra opción, no como la única. ¡Hay varias formas de resolver un problema!

Se observó que en el trabajo individual pocos alumnos lograban avances en la solución del problema propuesto en clase, se permitió el trabajo en parejas y en una clase posterior se dio la solución, así en el reporte los alumnos ya tuvieron oportunidad de contrastar ideas. Esta estrategia docente permite corregir a los alumnos "sin dolor" para ellos. Porque cuando los alumnos individualmente resuelven problemas en clase varias cosas pueden salir mal:

- El alumno no utiliza sus conocimientos para atacar un determinado problema y recurre a estrategias muy elementales para estudiantes universitarios, por ejemplo no aplica álgebra para resolver un problema de enunciado y resuelve usando una tabla de valores hasta llegar a la respuesta.
- El alumno es poco flexible a la hora de abandonar un determinado plan, que no le está llevando a un avance y no busca otras vías. En los problemas de los 3 hijos y suma de ecuaciones mostraron poca flexibilidad.
- El alumno no moviliza su conocimiento concreto para comprobar si la solución a la que llega es razonable, por ejemplo, cuando un problema debe tener soluciones enteras; el problema de Pablito y su tarea, varios alumnos dieron soluciones no enteras que resultaban de resolver una ecuación de segundo grado incorrecta según el enunciado. O estimar si la respuesta es muy pequeña o muy grande.
- El enunciado del problema no les motiva a trabajar, no despierta su curiosidad.

- No es crítico con su propio trabajo, sobre todo cuando se trata de problemas de examen.
- Puede abandonar el problema y fingir que trabaja.

Aunque trabajar con las 4 fases propuestas reduce el tiempo para exponer el curso tradicional es importante resaltar las estrategias, y para los contenidos se recomendó la consulta de los libros de texto de álgebra superior. En la actualidad se reconoce que es más importante dedicar tiempo de clase a lo que vale la pena, lo que los alumnos no van a encontrar en los libros de texto: ejercicios y problemas resueltos donde el docente explica las estrategias metacognitivas que permiten avanzar a la solución.

Rigo (2009) propone un instrumento de análisis que permite examinar los procesos metacognitivos que se dan en las clases de matemáticas. Consta de 4 niveles:
Primer nivel: actividades concretas
Segundo nivel: procesos cognitivos
Tercer nivel: procesos metacognitivos
Cuarto nivel: procesos de auto-corrección.

El nivel tres incluye:

- La comprensión del enunciado del problema.
- La planeación del problema.
- La elección de la estrategia.
- La aplicación de la estrategia.
- La ejecución de las operaciones.
- El resultado obtenido.

Insiste en que no es posible reflexionar sobre lo no hecho y por tanto, es imprescindible un trabajo realizado para que se den procesos metacognitivos. En nuestro caso, y aclarando que el trabajo de Rigo Lemini fue consultado después de terminado el curso, sólo fue hasta la fase 4 del trabajo en que se pide al alumno haga una reflexión. Las dos primeras fases se dejaron al cuidado de los alumnos, es decir, en la solución individual y solución por parejas, no se intervino. En varias ocasiones se recogió el trabajo individual para comprobar que tanto avanzaban en la solución. A diferencia de Rigo que observa el trabajo de dos maestras de primaria y por ello no analiza el cuarto nivel, nosotros si pedimos a los alumnos que realizaran una reflexión sobre su propia solución y la solución experta, y ellos se "autocorrigen" al tomar consciencia de sus errores, o estrategias inadecuadas.

Al presentar la "solución experta" se insistió en dos aspectos básicamente:
a) Buscar en cada problema otra alternativa de solución, es decir cambiar de estrategia en contra de usar el algoritmo conocido, como el método de Gauss para resolver sistemas de ecuaciones, puesto que esto permitiría una solución más rápida.

b) No se puede resolver el problema, sin antes lograr algún subobjetivo, por ejemplo hallar el término “n ésimo” de una sucesión. Esto se trabajó en los problemas sobre triángulos de números.

Como se mencionó en el capítulo 1, es importante la fase de monitoreo (externo-interno) del trabajo. **¿Cómo se implementó la ayuda metacognitiva externa para monitorear el proceso de solución?**

Se les proporcionó a los alumnos el siguiente formato para la fase 4 (su reporte semanal), donde debían incluir solución individual, solución en parejas, solución experta y reflexión del proceso. Se publicó en *Facebook* y la lista de problemas semanales, para los alumnos que por alguna razón no asistieran a clase. Este formato forma parte de la propuesta para trabajar buscando fomentar las habilidades metacognitivas en los estudiantes, se intentó que las preguntas y sugerencias fueran naturales, durante el curso se insistió en pocas cosas como ¿Qué tal si hago un segundo intento de solución? Lo que lleva a cambiar de estrategia o de plan de “ataque”. También se insistió en que hay mucha diferencia entre copiar la solución del compañero y comprender su idea y desarrollarla uno mismo.

Formato para los alumnos.

Mi problema: con mis propias palabras el problema es

¿Entiendo todos los términos, conceptos que se usan en el problema? ¿Identifico las palabras clave?

Fase de exploración: pienso y trato de resolver el problema, me familiarizo con el problema, la idea es no presionarme, puedo jugar un poco con el problema.

Mi plan es… (Aquí escribes tus ideas para resolver el problema.)

Al ejecutar el plan sucede que:

- No veo como
- Me falta ¿cómo lo puedo encontrar?

Inténtalo, no tengas miedo de equivocarte.

Si obtengo una "contradicción", algo que no tiene mucho sentido entonces debo buscar un error en mi desarrollo, es decir, reviso mis pasos, mi razonamiento.
Mi reflexión consiste en darme cuenta de qué fue exactamente lo que intente, esto es ¿cuál fue mi plan A o inicial?

Hago un alto y me pregunto:

- ¿Mi plan inicial me llevo a un avance?
- ¿Tengo claro cuál es la dificultad a vencer?
- ¿Qué tal si cambio de estrategia, de enfoque, busco otra idea?
- ¿Qué propone mi compañero?
- ¿Puedo usar su idea?
- ¿Puedo proponer un plan B?

Intento resolver el problema por segunda vez con más calma. Vuelvo a leer el problema con más cuidado… ¿Estoy considerando todas las opciones? ¿Qué es lo que quiero? ¿Qué es lo esencial?

Finalmente la solución que propongo es:

Comentarios al proceso de solución, incluyendo la solución del maestro.

- ¿Logre el objetivo?
- ¿Usé todas las condiciones del problema?
- ¿Mi respuesta corresponde a lo que pide el problema?
- ¿Me fue útil trabajar con mis compañeros?
- ¿Entendí la solución del maestro, o me resulto confusa?
- ¿Aprendí nuevas estrategias? si no
- ¿Comprendí mejor los conceptos matemáticos involucrados?

Mi reflexión final es….

Lo anterior es para que puedas tener idea sobre que poner en tu reflexión, pero puedes hacerlo en forma libre.

El objetivo principal del formato anterior es que los alumnos no repitieran mecánicamente los 4 pasos de Polya u otra propuesta. También se buscó que no usarán algunas palabras comunes al explicar la solución vista en clase, se alentó la expresión libre y comentarios más espontáneos en la reflexión. Es común que los alumnos repitan las palabras que usa el docente, el único término que se detectó fue “solución experta”. Se logró en buena medida que los comentarios fueran espontáneos, pues se tienen las soluciones enviadas por los alumnos y sus reflexiones, son diversas en el lenguaje utilizado por ellos. Algunos solo contestaban si - no en la sección de comentarios al proceso. Existen otros formatos, como el de Biryukov (2002) (ver anexo), donde se intenta hacer consciente al alumno de los diferentes pasos propuestos por Polya.

Este formato se propuso a los alumnos con la única intención de que les quedara claro que tenían que “reportar” las fases de solución del problema. Posterior al curso, encontré que Díaz (1998) le llama “*autointerrogación metacognitiva*”, que es una serie de preguntas que el sujeto va aprendiendo a hacerse antes, durante y después de la ejecución de la tarea. Por lo tanto, la implementación fue adecuada a los objetivos propuestos.

Sin lanzar las campanas al vuelo, el formato fue un acierto: incorpora los pasos de G. Polya, solo agregamos una fase de exploración donde el alumno debe considerar conscientemente diferentes posibilidades antes de elegir un plan, que llevará a cabo con más calma. ¿Qué tal si propongo un plan B? Y finalmente se pide una reflexión, con esto se logra un avance en el objetivo específico propuesto: trabajar la solución de problemas en el contexto de un curso curricular y al mismo tiempo insistir en el uso de estrategias metacognitivas. Ahora al término de este trabajo nos permite proponer la escalera de reflexión, que resume las 4 fases, donde se hace énfasis en la reflexión de cara al futuro. El formato es lo que da cuerpo e identidad a la propuesta de esta tesis, obviamente con aciertos y omisiones propias de un formato breve. De tal suerte que debemos considerar los diferentes modelos para resolver problemas como una caja de herramientas que el alumno debe tener para consultar de vez en cuando, por ello se incluyeron en el texto y en los anexos.

Comparando la solución individual y su reporte final (fase 4) se pudo observar un avance en la comprensión de las estrategias para resolver los problemas propuestos, así como en la comprensión de los temas propuestos en el curso, aclarando que no es lo mismo conocer las propiedades de la sumatoria, por ejemplo: $\sum_{k=1}^{k=n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{k=n} a_k + \sum_{k=1}^{k=n} b_k$ que aplicarla en la solución de problemas. O conocer la teoría para resolver sistemas de ecuaciones y resolver un problema con enunciado, como el problema del hotel (problema 23), donde se comprobó que pocos alumnos lo logran resolver al primer intento.

“Un uso eficaz de los conocimientos para la resolución de problemas es posible sólo a través de las habilidades metacognitivas”

6.3 Evaluación: resultados de pre prueba y post prueba.

Se aplicó el instrumento TOLT al inicio y al final del curso. Esto tiene dos funciones: Primero. Los resultados de TOLT inicial caracterizan de alguna manera a los alumnos, lo cual resulta útil al considerar el tetraedro del aprendizaje en el vértice de características de la persona. Tomar en cuenta esto explica las diferencias que podrían obtenerse en el rendimiento de los alumnos, es decir de dos grupos, uno con mayor promedio en TOLT podría esperarse mayor rendimiento. Tal y como reporta Aguilar (2002) con un grupo con bajo TOLT.

Segundo. Al comparar los resultados de TOLT final e inicial se pretende medir si los alumnos tuvieron un avance con el trabajo realizado durante el curso. Se tuvo cuidado de no mencionar ningún problema relacionado con los reactivos de TOLT, para no influir directamente cuando se aplica la post prueba.
Pero el trabajo reflexivo hará que los alumnos resuelvan con más cuidado y seguridad en la segunda aplicación. Por tal razón conviene precisar si hubo algún contacto con el tipo de preguntas de TOLT. En el curso se consideraron preguntas relacionadas con combinatoria (permutaciones y combinaciones) en relación al teorema del binomio, y problemas como el de las 3 ruletas y el de Monty Hall que se relaciona con probabilidad finita, en conjunto esto tiene relación con las preguntas 5 a 10. Las preguntas 1-4 de TOLT no se consideran en ningún tipo de preguntas o actividades.
Puede consultarse el libro de Cárdenas, Raggi para comprobar que combinatoria se considera brevemente dentro de un curso de “álgebra superior”

Los alumnos se identifican solo por su número de lista. Total 51 alumnos registrados en lista, pero algunos no se presentaron a los exámenes, 37 alumnos terminaron el curso. Se mantuvo la numeración. No tuve acceso a los resultados de TOLT después de la primera aplicación, los consulté hasta el final junto con los resultados de la segunda aplicación.

Número de aciertos	Inicial Agosto 2015 Número de alumnos.	Final Diciembre 2015 Número de alumnos.
2	2	0
3	2	1
4	5	5
5	9	1
6	6	2
7	4	6
8	5	9
9	2	7
10	2	6
Promedio con 37 alumnos	P = 5.8648	P=7.4864

Clasificación TOLT	Aciertos	Inicial	%	Final	%
Concreto	0-3	4	10.81	1	2.70
Transición	4-6	20	54.05	8	21.62
Formal	7-10	13	35.13	28	75.67
Total		Alumnos 37		Alumnos 37	

Suben un punto o más 29 alumnos, que equivale a 78.37 %

Hay dos alumnos de 10 inicial y final que equivale 5.4%

5 alumnos mantiene igual su TOTL (menor que 10) 5/37 equivale a 13.51 %.

Baja un alumno 1/37 equivale a 2.70%

TOLT incluye 10 preguntas de 5 tipos, por ello se agrupan de dos en dos, se muestran los porcentajes de aciertos.

Tipo de pregunta en TOLT	Pre	Post	Diferencia
Proporcionalidad	77.03%	91.89%	14.86
Control de variables	56.76%	79.73%	22.97
Probabilidades	50.00%	56.76%	6.76
Correlaciones	67.56%	77.03%	9.47
Combinaciones	41.89%	68.92%	27.03

Como se ve donde hay un mayor incremento es el tema de combinaciones (conteo) que corresponde a las preguntas 9 y 10.

Tareas

Número de tareas	Número de alumnos	Aumento de TOLT en un punto o más	Igual	Bajan
15	8	4	4	0
14	5	5	0	0
13	4	2	1	1
12	2	2	0	0
11	3	3	0	0
10	5	4	1	0
Menos de 10	10	9	1	0

27 alumnos tiene 10 o más tareas 72.97% de ellos 20 aumentan

10 alumnos tienen menos de 10 tareas

6.4 Discusión de resultados

Si bien hubo una clara mejora en los resultados de TOLT en la mayoría de los estudiantes que terminaron el curso. También debe indicarse que la forma de trabajar usando las 4 fases ayudó a los alumnos a verse a sí mismos como capaces de aprender mejor, toda vez que varios alumnos reconocieron que inicialmente no pudieron resolver algunos problemas, pero con ayuda de sus compañeros y la solución del profesor sí lograron entender las estrategias usadas y con ello tuvieron más confianza al resolver los problemas siguientes. Se logró con las 15 tareas que la mayoría de los alumnos mejoraran la comprensión y uso de las estrategias explicadas durante el curso. También se logró que realizaran de manera aceptable la fase 4 del trabajo propuesto: la autorreflexión donde deberían hacer una introspección y comentar sobre el proceso de solución del problema tomando en consideración las fases anteriores, analizan críticamente su solución inicial, las ideas de sus compañeros, la solución del profesor.

Dada la importancia de tener claro el concepto de pensamiento formal, que algunos autores expresan como "pensamiento lógico", me permito citar ampliamente a Piaget (1978).

Si lo comparamos con un niño, el adolescente es un individuo que construye sistemas y teorías. El niño no edifica sistemas no reflexiona jamás. En otras palabras, piensa concretamente problema tras problema, a medida que la realidad los plantea y no une soluciones que encuentra mediante teorías generales que puedan poner de relieve un principio. En cambio lo que sorprende en el adolescente es su interés por los problemas inactuales, sin relación con las realidades vividas día a día. Lo que sorprende más que nada es su facilidad para elaborar teorías abstractas, hay algunos que escriben, que crean una filosofía, una política, una estética o lo que sea. Cabe situar un cambio decisivo hacia los 12 años, y a partir de ahí, empieza poco a poco el auge en la dirección de la reflexión libre y desligada de lo real.

Entre los 11 y 12 años aproximadamente, tiene lugar una transformación fundamental en el pensamiento del niño que marca su final con respecto a las operaciones construidas durante la segunda infancia: el paso del pensamiento concreto al pensamiento formal "hipotético-deductivo".

Hasta esa edad, las operaciones de la inteligencia infantil son únicamente concretas, es decir que no se refieren más que a la realidad en sí misma y especialmente, a los objetos tangibles que pueden ser manipulados y sometidos a experiencias efectivas. Cuando el pensamiento del niño se aleja de lo real, es simplemente que substituye los objetos ausentes por su representación más o menos viva.

Después de los once años o doce, el pensamiento formal se hace posible, es decir, las operaciones lógicas comienzan a ser transpuestas del plano de la manipulación concreta al plano de la meras ideas expresadas en un lenguaje cualquiera, pero sin el apoyo de la percepción, ni la experiencia.

Piaget proponía que el nivel de pensamiento formal se alcanzaba a los 15 años, ahora el rango de edad ha cambiado. Pero a nosotros nos interesa el hecho de que los estudiantes universitarios, en muchos casos, aun no alcanzan este nivel, como se reporta en muchas investigaciones, donde tratan de explicar la deserción universitaria durante los primeros años de la licenciatura. Las personas que no asisten a la escuela tienen menos probabilidad de desarrollar el pensamiento formal. Según el sistema escolar mexicano, se puede ingresar a la universidad a partir de los 18 años, en este rango de edad es más factible que los alumnos consoliden su pensamiento formal, en contra de la propuesta inicial de Piaget. Y si tomamos en cuenta que los alumnos de FCFM en el curso de matemáticas básicas, trabajan los números reales de manera deductiva, esto nos lleva al menos a un terreno donde es necesario practicar las habilidades del pensamiento formal, con excepción del "razonamiento proporcional". Las otras 4 categorías de alguna manera se consideran dentro de las licenciaturas que se imparten en FCFM (razonamiento combinatorio, probabilístico, correlación de variables). Así, los resultados sugieren que hubo un efecto positivo en el desarrollo del pensamiento formal de los alumnos que asistieron y realizaron las tareas en el formato propuesto. El pensamiento formal se desarrolla sólo con base en la instrucción formal.

Algunas reflexiones de los alumnos.

Como en el trabajo que reportan los alumnos cada semana se incluye la solución experta, no hay forma de analizar su solución al problema que inicialmente dieron ellos, por tal razón solamente nos limitamos a revisar con más detalle su reflexión sobre el proceso de las 3 fases previas tal y como ellos lo expresan. Dicha reflexión puede incluir, entre otras cosas, la autocorrección, es decir que se den cuenta de su error, esta indicación ya no viene dada por el profesor, sino que surge por iniciativa propia, y esto es lo valioso. Es común que el profesor al corregir un problema de examen simplemente indica el error y muchos alumnos "no aprenden de sus errores", pues se toma como un fracaso y punto. Ahora con la dinámica de trabajo propuesta, el alumno puede autocorregirse y aprender.

- Me di cuenta de mi error al platicar con mi compañero.
- ¿Logré el objetivo? No, por mi parte no logré resolver el problema, hasta que escuché y comprendí la solución por parte del profesor.
- Me di cuenta de mi error.
- Hasta esta parte puede llegar porque no me sale la suma.
- Si, pues cada vez es más fácil resolver nuestras dudas y con un final mucho más satisfactorio.
- Identifiqué estrategias usadas en problemas anteriores.
- Creo que es muy importante saber explicar a alguien más la manera en que resuelves un problema y preguntar siempre que tengas dudas.
- Practicamos lo que ya habíamos visto.
- Pude haber simplificado.
- Encontré una respuesta fácil.
- No leí correctamente, debo tener más cuidado.
- He aprendido a ver lo esencial del problema.
- Apliqué lo que ya sabía.

- El profesor resolvió adecuadamente el problema ya que me hizo ver que mi procedimiento estaba mal y fue por eso que me fue de mucha utilidad realizar este trabajo.
- Si no se puede resolver un ejercicio tienes que buscar otra manera de resolverlo o revisar si estás desarrollando bien el problema.
- Siempre tenemos que buscar todas las formas posibles de resolver los ejercicios y no nos tenemos que aferrar a una sola idea.
- Tenemos que reorganizar el problema para aplicar lo que ya conocemos.
- Encontrar el patrón y COMPARAR el resultado con el patrón inicial.
- Además factorizar igual nos ayuda mucho a que la solución sea más viable.
- Tratar de recordar estrategias que se y compararlas con lo que tengo que hacer, para así facilitar el ejercicio.
- Si, aprender a no darme por vencida y seguir intentando hasta que me salga bien, y revisar detalladamente el procedimiento.

Por lo tanto, también se avanzó, tomando en cuenta los niveles propuestos por Perkins y Swartz, concretamente al final del curso los alumnos eran conscientes de las estrategias usadas, es decir se encuentran, en el nivel 2 (consciente). En un principio se encontraban en el nivel 1 (tácito) pues en los primeros problemas no indicaban claramente que estrategias usaban.

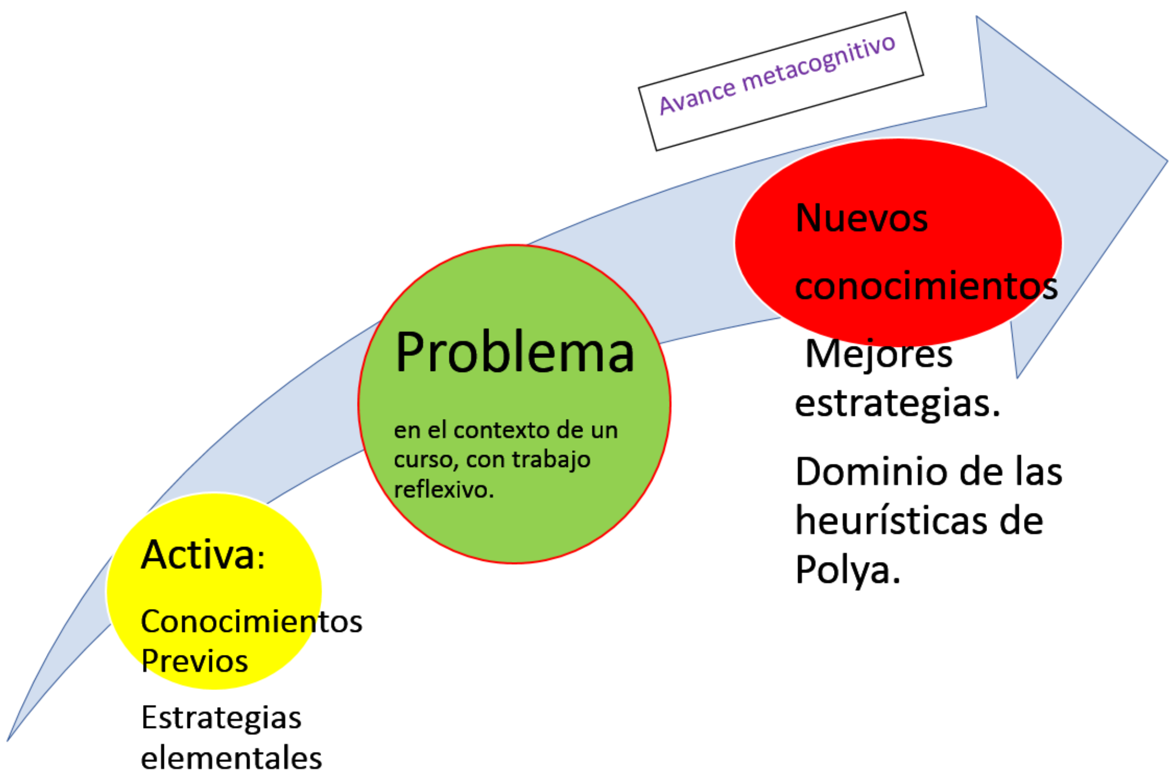
Con base en la experiencia ganada se propone el siguiente formato para la autoevaluación de los alumnos, modificando la escalera de Swartz, la cual se implementará en el curso Agosto – diciembre 2016. Ahora es más claro cómo se puede mejorar el trabajo con las 4 fases. De hecho durante las 4 fases se insiste en varios puntos que aparecen en la escalera que proponemos, pero ahora estamos en la posibilidad de hacerlo de manera totalmente consciente, insistir en un modelo sencillo para la autointerrogación metacognitiva.

1. SOY CONSCIENTE ¿QUÉ HICE?	¿Resolví el problema?
	¿Qué plan/idea haz utilizado para intentar resolver el problema?
2. ¿CÓMO LO HICE?	¿Qué estrategias se usaron?
	¿Qué conocimientos se aplicaron?
3. EVALÚO MI TRABAJO	¿Qué hice bien o mal? ¿Cómo lo corregí?
	¿Cómo puedo mejorar?
4. REFLEXIÓN	¿Qué aprendí?
	¿Cómo enfrentare problemas como éste en el futuro?

El diagrama anterior es la forma en que imaginamos la metacognición con un modelo simplificado, relacionándolo los 4 pasos de G. Polya.
Con base en la experiencia ganada proponemos una nueva forma de ver los niveles de Swartz – Perkins:

Esta es la forma en que concebimos los niveles metacognitivos, de tácito se va ampliando, pero la mayor o menor facilidad con que aplico mis habilidades depende en cierta medida de la dificultad del problema. Al monitorear el proceso de solución la dificultad del problema nos confunde y mi desempeño metacognitivo es menor que cuando enfrentamos un problema más sencillo o con términos más familiares. Con la práctica vamos consolidando el avance hacia el nivel reflexivo.
En nuestro caso, por el simple hecho de hacer el reporte (en la mayoría de los casos) los alumnos se van tornando conscientes de sus errores, se corrigen a la luz de la solución vista en clase y este es un buen inicio para mejorar en los niveles metacognitivos.

Cuando se propone un problema y se permite solución libre, los alumnos activan sus conocimientos previos y aplican sus estrategias, cuando el maestro explica la solución pone en juego los nuevos conocimientos, pero también debe hacer énfasis en nuevas estrategias: recordar un problema parecido, considerar primero lograr algún subobjetivo, analizar un número finito de casos, buscar un patrón, introducir una variable auxiliar (Polya), esto nos lleva a un avance metacognitivo, basado en el trabajo reflexivo. Y en nuestra opinión esta es la clave: dar apoyo para desarrollar las habilidades metacognitivas, sobre la base de un trabajo reflexivo de los alumnos, ya que se cuenta con algunos factores positivos para desarrollar el pensamiento formal: edad e instrucción universitaria.



¿Por qué hubo avance en los resultados en la segunda aplicación de TOLT?

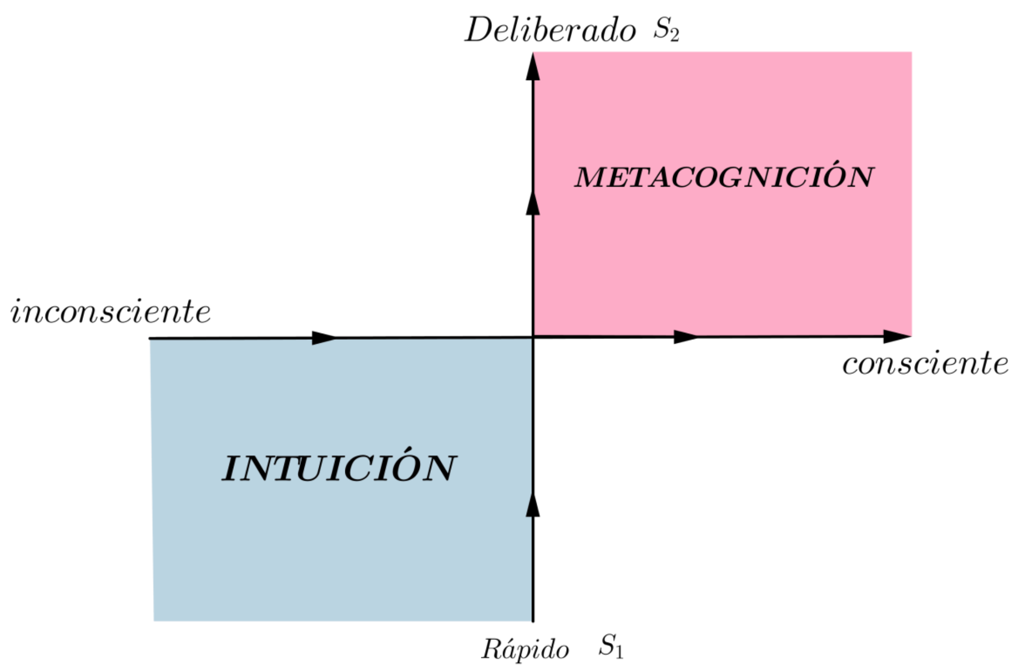
En nuestra opinión hubo un avance cualitativo con base en los reportes enviados por los alumnos**.** Pueden intentarse varias explicaciones, pero no debemos olvidar que con las tareas (4 fases) se ha insistido en la reflexión; es decir, que aunque los alumnos tengan una respuesta, al considerar la solución de otros, por ejemplo la del docente, esto les ha obligado a reflexionar detenidamente el problema y no dejarse llevar por la primera impresión, esto para ellos ha sido una "experiencia metacognitiva", recordando la idea de Flavell citada en el capítulo 2. Así, al resolver por segunda vez TOLT ellos han pensado con más calma. Recordar que TOLT pide respuesta y justificación, en 8 preguntas, se presentan 5 opciones para la respuesta y 5 para la justificación, lo que produce 25 combinaciones.

La idea de pensar con más detenimiento se encuentra desarrollado por Kanhneman (2013) en su libro, "*Pensar rápido, pensar despacio*" El pensar lento es un proceso de trabajo mental deliberado, esforzado y ordenado. Propone la existencia de dos sistemas mentales para simplificar su exposición:
El sistema 1 opera de manera rápida y automática con poco o ningún esfuerzo y sin sensación de control voluntario.
El sistema 2 centra la atención en las actividades mentales esforzadas que lo demandan, incluidos los cálculos complejos. Más adelante apunta: "*adoptar como norma de vida la vigilancia continua no es necesariamente bueno, y además es impracticable. Cuestionar con constancia nuestro pensamiento sería insoportablemente tedioso, y el sistema 2 es demasiado lento e ineficiente para servir de sustituto del sistema 1 en las decisiones rutinarias"*.
La mente no se puede dividir, pero si la forma en que enfrenta algunas tareas cognitivas, algunas se responde de manera automática, otras requieren un esfuerzo deliberado.
Ahora los alumnos en buena medida ya no responden con la primera opción que se les presenta. Buscan y reflexionan sobre las diferentes opciones de respuesta que TOLT ofrece.

Kanhneman discute sobre la facilidad cognitiva, "*cuyo rango se encuentra entre facilidad y tensión". Menciona un experimento interesante: los experimentadores reclutaron 40 estudiantes de Princeton para hacer un test de reflexión cognitiva (TRC). La mitad de ellos leyó los problemas en una letra pequeña y una impresión gris y desdibujada. Eran legibles, pero la letra provocaba tensión cognitiva. Los resultados fueron inequívocos: el 90 % de los estudiantes que leyeron el TRC con letra normal cometieron al menos un error en el test, pero el porcentaje bajó al 35% cuando la letra era apenas legible. La tensión cognitiva, cualquiera que sea su origen, moviliza al sistema 2, que es más probable que rechace la respuesta intuitiva sugerida por el sistema 1"*

También hay que anotar que el reporte escrito (fase 4) obliga a los estudiantes a tener claridad de ideas para redactar, lo que nos recuerda las ideas de Vigotsky (1999) sobre la escritura. Lo que constituye un acierto del método empleado. El reporte, brinda la oportunidad de "redactar en limpio", escapar de esquemas preconcebidos, pues no podemos saber qué pensó cada uno de los alumnos en la fase 1. Al resolver un problema por primera vez el proceso está lleno de vivencias personales difíciles de reproducir y compartir: avances, retrocesos, dudas, la sensación de estar atorado, el desaliento ante caminos falsos, etc., y la alegría de acertar. Pero al explicarla a alguien más renace como segunda solución, ya viene mejor ordenada, más corta, más breve (se omiten detalles), más clara. El alumno se apropia más fácilmente de las ideas discutidas en clase ya no importa quién lo dijo, lo que importa es que entendemos mejor la solución del problema y los conocimientos puestos sobre la mesa.

Con la ayuda de Kirk (2006) podemos resumir, las ideas de Kanhneman y relacionarlas con la metacognición en el siguiente diagrama:



6.5 Conclusiones

Se animó a los alumnos a ir más allá de la primera alternativa cuando enfrentan un problema. Y como los alumnos aceptaron de buena gana, creemos que es el inicio para mejorar sus habilidades metacognitivas, es un primer paso, pero significativo. Pueden ayudarse de las ideas de sus compañeros o del maestro para considerar otras opciones para atacar un problema.

Por otro lado, comunicar la estrategia usada para solucionar problemas, por escrito, mejora el desempeño de los novatos (Pugalee 2004). Por lo tanto, creemos que es un acierto pedir un reporte reflexivo elaborado con más tiempo en formato libre. Aunque se dan indicaciones para su elaboración, el alumno debe redactar su experiencia, y esto le ayuda a aclarar sus ideas, debe hacer un esfuerzo deliberado.

Con el trabajo realizado en 4 fases rompemos ataduras mentales, pues el alumno percibe que sus ideas son tomadas en cuenta, tiene la oportunidad de expresarlas en la fase 4. Es importante no perder la frescura de las soluciones "espontáneas" pero creativas, esto es común cuando se da libertad y confianza, no hubo censura La solución esperada por el docente no siempre llega, pero si tenemos 50 alumnos en clase, es iluso esperar que todos piensen como nosotros deseamos.

El balance del curso, aplicando el diseño basado en la solución de problemas de manera reflexiva, es bueno, el desempeño de los estudiantes fue aceptable. Como se comentó.
Esto sugiere que el trabajo realizado tiene algún impacto en la mejora del razonamiento lógico, según los cinco componentes propuestos por Piaget y que TOLT recoge con sus 5 tipos de preguntas.

Logramos conjuntar de manera sencilla y armónica el trabajo en clase con el trabajo fuera del aula, teníamos muchas propuestas para implementar la solución de problemas. Se corría el riesgo de confundirnos, de perder el rumbo, pero optamos por la sencillez de la propuesta de Polya. El objetivo es "ayudar al alumno" apoyándolo a monitorear y controlar mejor su proceso de solución al enfrentar problemas. En general, los alumnos mejoraron sus habilidades metacognitivas, la mayoría pasó del nivel tácito al nivel consciente y pocos lograron llegar al nivel estratégico.

No todo está resuelto, los alumnos deben enfrentar nuevas materias, nuevos retos. Las "experiencias metacognitivas" vividas en el curso son como casi todo en la vida, pueden pasar sin dejar huella permanente, o podemos guardar un poco en muestra mente y en nuestro corazón para los retos que enfrentaremos en el futuro. Un avance firme sólo se logra si los alumnos consolidan sus habilidades en todos los frentes, adquieren nuevos conocimientos, nuevas estrategias, actitudes positivas, control de sus emociones, y esto, a su vez, depende de que el docente proponga actividades enriquecedoras.

Una actividad por si misma rara vez lleva al aprendizaje esperado, pero si activa conocimientos previos, si prepara nuevos conocimientos, si anticipa usos futuros de las estrategias, si usa diferentes representaciones cumplirá con el propósito de hacer vivir la matemática como una experiencia positiva, desafiante pero estimulante para los alumnos.

Los estudiantes deberán enfrentar nuevos retos en el futuro. Con esto en mente, valoramos mejor el esfuerzo hecho, no podemos pretender que con un curso los alumnos han aprendido a resolver problemas, hay muchas estrategias que practicar y aprender en dominios específicos. Lo importante, al final, es lo vivido en clase, que enriquece la experiencia de todos. Aunque alguien afirme que la escuela no es buena porque *"pasamos muchos años en la escuela y poco recordamos*". Los docentes no podemos influir en 50 personas tanto como quisiéramos, así que no hay nada que lamentar, solo queda la esperanza y la promesa de intentar ser mejores.

La mejor manera de enseñar no es imponer ideas, sino compartir soluciones en un ambiente de libertad.

Bibliografía.

American Psychological Association, (1990) Learner-centered psychological principles: a framework for school reform & redesign. USA

Acevedo, J., Oliva, J. (1995). Validación y aplicación de un test de razonamiento lógico. Revista de Psicología General y Aplicada, volumen (48), 339 - 351.

Adey, P. (1999). La Ciencia del Pensamiento, y las Ciencias para el Pensamiento: La Aceleración Cognitiva Mediante la Educación Científica (CASE). Recuperado de www.ibe.unesco.org/fileadmin/user_upload/archive/publications/innodata/inno02s.pdf.

Aguilar, V. M., Navarro G. J., López P. J. & Alcalde, C. C. (2002). Pensamiento formal y resolución de problemas matemáticos**.** *Psicothema, 14 (2), 382-386.*

Arcavi, A. (2005). Developing and using symbol sense in mathematics. For the Learning of Mathematics FLM Publishing Association, Edmonton, Alberta, Canada. **25**, (2)

Bransford, J. D., Brown, A. L., Cocking R. R., eds *(*2000*).* How people learn, brain, mind, experience, and school**.** USA. National Academy of Science.

Biryukov, P. (2002). Metacognitive aspects of solving combinatorics problems. International Journal in Educational Mathematics.

Burón, J. (2007). Enseñar a aprender: Introducción a la metacognición. España: Ediciones Mensajero.

Conte, A. (2013). Metacognition and Problem Solving Computer-Supported Collaborative Learning. Recuperado de wiki.oulu.fi/pages/viewpage.action?pageId=37783065 .

De Corte, E., Verschaffel, L. & Masui, C. (2004). The CLIA model: a framework for designing powerful learning environments for thinking and problem solving. European journal of psychology of education. 19(4) 365-384.

De Guzmán, O. M. (2006). Para pensar mejor. España: Pirámide

Díaz, B. A., Hernández, R. G. (1998). Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. México: Mc Graw Hill.

Giry, M. (2003). Aprender a pensar, aprender a razonar. México: Siglo XXI editores.

González, F. (2008). La metacognición y la resolución de problemas matemáticos con texto. Recuperado de www.scielo.org.bo/pdf/rieiii/v2n2/n02a05.pdf

Hernández, G. S. (2013). Uso del Modelo de Regresión Logística para Estudiar la aprobación de la materia de Matemáticas Básicas de la FCFM en las Generaciones 2010 y 2011. Tesis de licenciatura no publicada. Recuperada de www.fcfm.buap.mx/assets/docs/docencia/tesis/matematicas/SeleneHernandezGuerra.pdf

Hierrezuelo, J., Montero, A. (1998). La ciencia de los alumnos. España: Editorial Laia / MEC.

Kahneman, D. (2013). Pensar rápido, pensar despacio, México: Random House Mondadori. Debate.

Keating, D. P. Adolescent thinking traducción de SEP (2001). Desarrollo de los adolescentes IV procesos cognitivos, programa y materiales de apoyo para el estudio.

Marina, J. (2016). El talento adolescente. México: Ariel editorial Planeta.

Mason, J., Burton, L. & Stacey, K. (2013). Pensar matemáticamente. México: Trillas.

Mayer, R. (1992). Thinking, problem solving, cognition. Nueva York: W. H. Freeman and Co.

Ministry of Education Singapore (2006). Mathematics syllabus Primary Recuperado de www.moe.gov.sg/docs/default-source/document/education/syllabuses/sciences/files/2007-mathematics-(primary)-syllabus.pdf

Ormrod, E. J. (2005). Aprendizaje humano. España: Pearson.

Özsoy, G., Ayşegül, A. (2009). The effect of metacognitive strategy training on mathematical problem solving achievement *International Electronic Journal of Elementary Education. 1 (2)*

Perkins, D. (2000). La escuela inteligente. México: SEP/Gedisa.

Perkins, D. (2010). El aprendizaje pleno. Argentina: Paidós.

Perkins, D. N., & Swartz, R. (1991). The Nine Basics of Teaching Thinking. Costa, A., Bellanca, J., & Fogatry, R. (Eds.), If Minds Matter: A Forward to the Future, Vol. II, Palatine IL: Skylight, pp. 53-69.

Piaget, J. (1977). Lógica y psicología. Argentina: Solpir.

Piaget, J. (1978). Seis estudios de psicología. México: Seix Barral.

Polya, G. (2016). Como plantear y resolver problemas. México: Trillas.

Polya, G. (1981). Mathematical Discovery: on understanding, learning and teaching problem solving. USA: John Wiley & Sons.

Pozo, J. (1994). La solución de problemas. México: Santillana

Pugalee, D. K. (2004). A comparison of verbal and written descriptions of student´s problem- solving process. Educational Studies in mathematics, 55, 27-47.

Pugalee, D. (2001). Writing, mathematics, and metacognition: Looking for connections through participants' work in mathematical problem solving. School Science & Mathematics, 101(5), 236

Quirk, M. (2006). **Intuition and Metacognition in Medical Education: Keys to Developing Expertise.** USA Springer Publishing Company, Inc.

Rigo, M., Alfonso, D. & Gómez, B. (2009). Procesos metacognitivos en las clases de matemáticas de la escuela elemental. Propuesta de un marco interpretativo. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), Investigación en Educación Matemática XIII (pp. 435-444). Santander: SEIEM

Roediger, H. L. (2007). Relativity of Remembering: Why the Laws of Memory Vanished Annu. Rev. Psychol. (59) 225–54

Hernández, S. R., Fernandez, C. C. & Baptista, L. P. (1991). Metodología de la investigación. México: Mc Graw Hill.

Schmelkes, C., Schmenlkes, N. (2014). Manual para la presentación de anteproyectos e informes de investigación Tesis, México: Oxford University Press.

Schoenfeld, A. (1985). Problem Solving. USA. Academic Press.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In D. Grouws (Ed.), Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning 334-370. New York: MacMillan.

Schraw, G. & Dennison, R.S. (1994). Assessing metacognitive awareness. Contemporary Educational Psychology*, 19,* 460-475.

Sherman, R. R., Webb, R. B. (1988). Qualitative research in education is a valuable contribution to the field of education. Great Britain: Routledge Falmer

Soto L. C. A. (2003). Metacognición cambio conceptual y enseñanza de las ciencias. Colombia: Magisterio.

Sternberg, R. (2000). Enseñar a Pensar. España: Santillana.

Sternberg, R. (2011). Psicología cognoscitiva. México: Cengage learning editores.

Swartz R. J., Costa, A.L., Beyer, B. K. & Reagan, R. (2014). El aprendizaje basado en el pensamiento. México: SM ediciones.

Tobin, K. & Capie. W. (1981). Development and validation of a group test of Logical Thinking. *Educational and Psychological Measurement*, *41*, 413-424.

Vygotsky, L. (1999). Pensamiento y lenguaje. México: Quinto Sol.

Vygotsky, L. (2009). El desarrollo de los procesos psicológicos superiores. España: Critica.

Woolfolk, A. (1990). Psicologia educativa. México: Prentice Hall.

Wong, K. (2015) Effective mathematics lessons through an eclectic Singapore approach. Singapore: World Scientific.

Yimer, A. & Ellerton, N. (2006). Cognitive and metacognitive aspects of mathematical problem solving: An emerging model. In P. Grootenboer, R. Zevenbergen, & M. Chinnappan (Eds.), Identities, cultures, and learning spaces (pp. 575–582).

Yıldırım, S. & Ersözlü, Z. N. (2013). The Relationship Between Students' Metacognitive Awareness and their Solutions to Similar Types of Mathematical Problems. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, *9*(4), 411-415.

ANEXOS

Anexo 1 Para resolver un problema se necesita (G Polya)

Comprender el problema

❖ ¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son los datos?

❖ ¿Cuál es la condición? ¿Es la condición suficiente para determinar la incógnita? ¿Es insuficiente? ¿Redundante? ¿Contradictoria?

Concebir un plan

❖ ¿Se ha encontrado con un problema semejante? O ¿ha visto el mismo problema planteado en forma ligeramente diferente?

❖ ¿Conoce un problema relacionado con éste? ¿Conoce algún teorema que le pueda ser útil? Mire atentamente la incógnita y trate de recordar un problema que le sea familiar y que sea la misma insignita o una incógnita similar.

❖ He aquí un problema relacionado al suyo y que se ha resuelto ya. ¿Podría usted utilizarlo? ¿podría utilizar su resultado? ¿Podría emplear su método? ¿Le haría a usted falta introducir algún elemento auxiliar a fin de poder utilizarlo?

❖ ¿Podría enunciar el problema en otra forma? ¿Podría plantearlo en forma diferente nuevamente? Refiérase a las definiciones

❖ Si no puede resolver el problema propuesto, trate de resolver primero algún problema similar. ¿Podría imaginarse un problema análogo un tanto más accesible? ¿un problema más general? ¿un problema más particular? ¿un problema más análogo? ¿puede resolver una parte del problema? Considere solo una parte de la condición; descarte la otra parte; ¿En qué medida la incógnita queda ahora determinada? ¿En qué forma puede variar? ¿Puede usted deducir algún elemento útil de los datos? ¿Puede pensar en algunos otros datos apropiados para determinar la incógnita? ¿Puede cambiar la incógnita? ¿Puede cambiar la incógnita o los datos, o ambos si es necesario, de tal forma que la nueva incógnita y os datos estén más cercanos entre sí?

❖ ¿Ha empleado todos los datos? ¿Ha empleado toda la condición? ¿Ha considerado usted todas las nociones esenciales concernientes al problema?

Ejecución del plan

❖ Al ejecutar su plan de la solución, compruebe cada uno de los pasos.

❖ ¿Puede usted ver claramente que el paso es correcto? ¿Puede usted demostrarlo?

Visión retrospectiva

❖ ¿Puede usted verificar el resultado? ¿Puede verificar el razonamiento?

❖ ¿Puede obtener el resultado en forma diferente? ¿Puede verlo de golpe? ¿Puede usted emplear el resultado o el método en algún otro problema?

ANEXO 2 Escalera para la reflexión.

Basado en la idea de R. Swartz

1. SE CONSCIENTE ¿QUÉ HICE?	**¿Obtuviste la solución del problema?** **Si / no ¿por qué?**
	¿Qué plan /idea haz utilizado para intentar resolver el problema?
2. ¿CÓMO LO HICE?	**¿Qué estrategias se usaron? ¿Qué alternativas se analizaron?**
	¿Qué conocimientos se aplicaron?
3. EVALUO	**¿Qué hice bien?** **¿Qué hice mal?** **¿Cómo lo corregí?**
	¿Cómo puedo mejorar?
4. REFLEXIÓN	**¿Qué aprendí?**
	¿Cómo enfrentara problemas como éste en el futuro?

Escalera versión larga

4. **Planifica a futuro**	¿De qué modo aplicarías las estrategias de solución de este problema en el futuro? Transformar la expresión original, elimino lo que no se necesita, analizar un numero finito de casos ¿Qué conocimientos relacionados con el problema podrías aplicar en el futuro? Por ejemplo suma de Gauss, propiedades de sumatoria.
3. **Evalúa**	¿Funciono tú estrategia? Si/ No ¿Por qué? ¿Te lleva a un avance? ¿Cómo sabes que tu estrategia funciono? ¿Qué aspectos te dicen que tu estrategia funciono? ¿Qué estrategias alternativas podrías aplicar? ¿Por qué crees que tú estrategia es mejor para este problema? ¿Te ha funcionado antes? ¿Cuál es tu estrategia? ¿Por qué escogiste la estrategia? ¿Cómo trataste de resolver el problema? ¿En qué punto te encuentras?
2. **Describe la estrategia aplicada**	¿Cuál es tu estrategia? ¿Por qué escogiste la estrategia? ¿Cómo trataste de resolver el problema
1**. Se consciente**	¿Qué plan/idea haz utilizado para intentar resolver el problema? ¿Obtuviste la solución del problema?

ANEXO 3 Cuestionario de Polina Biryukov

Para reflexionar al terminar de resolver un problema, la idea es ser consciente de algunos pasos, que de momento no note que hice.

Afirmaciones	Si	No	indeciso
1. Leí el problema más de una vez			
2. Verifique que entiendo lo que pide el problema.			
3. Evaluó cuánto tiempo puede necesito para resolver este problema.			
4. Represente el problema esquemáticamente.			
5. Trate de recordar si ya resolví un problema parecido anteriormente.			
6. He construido una estrategia para resolver el problema.			
7. Yo no sabía cómo empezar.			
8. Durante la solución del problema encontré una dificultad (si la respuesta es sí, describe el carácter de la dificultad).			
9. Durante la solución del problema encontré un error y lo corregí. (Si la respuesta es sí describe el error).			
10. Pensé en cómo iba avanzando.			
11. He intentado diferentes enfoques para la solución del problema.			
12. Me pregunté si mi respuesta tenía sentido.			
13. He comprobado mis cálculos para asegurarse de que estaba en lo correcto.			
14. Pensé que si había algo en la información que se me dio en el problema que necesita atención especial (si la es respuesta es "Sí", descríbelo).			