



# BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

INSTITUTO DE FÍSICA "LUIS RIVERA TERRAZAS"

**"DISPERSIÓN EN SISTEMAS DE BAJA  
DIMENSIONALIDAD CON TÉRMINOS DE  
PÉRDIDA Y GANANCIA"**

**TESIS**

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

**DOCTOR EN CIENCIAS  
(FÍSICA)**

PRESENTA:

**LILIÁN AURORA MORENO RODRÍGUEZ**

ASESOR(ES):

**DR. FELIX IZRAILEV  
DR. JOSÉ ANTONIO MÉNDEZ BERMÚDEZ**

CVU 549541

NOVIEMBRE 2020



Dispersión en sistemas de baja dimensionalidad con términos de  
pérdida y ganancia

---

Lilián Aurora Moreno Rodríguez



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA  
Instituto de Física Ing. Luis Rivera Terrazas

**Dispersión en sistemas de baja dimensionalidad con  
términos de pérdida y ganancia**



Lilián Aurora Moreno Rodríguez

Asesores

Dr. Felix Izrailev y Dr. José Antonio Méndez Bermúdez

**Lilián Aurora Moreno Rodríguez**

*Dispersión en sistemas de baja dimensionalidad con términos de pérdida y ganancia*

Jurado: Dr. Nykolay Makarov , Dr. Alfredo Díaz De Anda , Dr. Víctor Dossetti Romero y Dr. Eduardo Jonathan Torres Herrera

Asesores: Dr. Felix Izrailev y Dr. José Antonio Méndez Bermúdez

**BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA**

Instituto de Física Ing. Luis Rivera Terrazas

# Agradecimientos

---

En primer lugar deseo expresar mi agradecimiento a mis directores de tesis doctoral, Dr. Felix Izrailev y Dr. José Antonio Méndez Bermúdez, por la dedicación y apoyo que ha brindado a este trabajo, por su paciencia, sencillez y guía, por su amistad y por haberme permitido aprender de ellos.

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por haberme apoyado con una beca durante los programas de Maestría y Doctorado.

Agradezco al Instituto de Física "Luis Rivera Terrazas" por todas las facilidades que se me han prestado durante mi estancia. En particular a todos los Doctores que me acompañaron en mi formación durante la maestría y doctorado. A los amigos que hice dentro del instituto a lo largo de mi estancia, Romeo de Coss, Eladio Rivera Mociños y Nahum Calderón Chávez, por su amistad, consejos, apoyo y por todo lo que aprendí de ellos.

Del mismo modo agradezco a mi Jurado Revisor conformado por los Doctores Nykolay Makarov, Alfredo Díaz De Anda, Víctor Dossetti Romero, Eduardo Jonathan Torres Herrera y Jorge Flores Valdés por la excelente revisión que hicieron a mi tesis, por sus sugerencias y consejos, disposición y amistad.

Pero un trabajo de investigación es también fruto del reconocimiento y del apoyo vital que nos ofrecen las personas que nos estiman, sin el cual no tendríamos la fuerza y energía que nos anima a crecer como personas y como profesionales. Gracias a mi esposo Eduardo, a mis padres Albino y Guadalupe y a mi hermano Ángel por su cariño, paciencia, comprensión y apoyo incondicional siempre, por el tiempo que me han concedido. Sin su apoyo este trabajo nunca se habría escrito y, por eso, este trabajo es también el suyo.

A todos, muchas gracias.



# Resumen

---

En este trabajo se estudian las propiedades espectrales y de transporte de sistemas descritos por Hamiltonianos no hermíticos, usando como principales herramientas de estudio los métodos de matriz de transferencia y de dispersión, los cuales se aplican tanto analítica como numéricamente. La contribución más importante de este trabajo se da en el estudio de los así llamados sistemas  $\mathcal{PT}$  simétricos de tipo enlace fuerte, los cuales poseen un amplio interés teórico y experimental en diferentes campos de la física moderna al presentar novedosos fenómenos inherentes a esta simetría, como por ejemplo, el hecho de poseer un espectro de energías totalmente real para cierto rango de parámetros o bien presentar procesos como la invisibilidad unidireccional y la no reciprocidad en las reflexiones. En particular se describe el comportamiento de los coeficientes de transmisión y reflexión en función de los parámetros del sistema, mediante la derivación de expresiones analíticas compactas, cuya composición es tan clara que es de gran ayuda al análisis de dichas expresiones para cualesquiera valores que los parámetros de la estructura pudieran tomar. Se presenta una descripción en conjunto con el análisis de la relación de dispersión para un índice de tipo Bloch, el cual puede ser real sin importar la no hermíticidad que caracteriza al sistema. También se describe la importancia de los puntos excepcionales en modelos  $\mathcal{PT}$  simétricos, caracterizados por la igualdad de los autovalores de la matriz de transferencia, así como su relación con las propiedades de transporte. Este análisis permite establecer nuevos tipos de puntos excepcionales de naturaleza distinta a los reportados previamente en la literatura, diferenciados por las condiciones en las que aparecen y por la independencia que tienen respecto al tamaño del sistema, definiendo así una zona fija donde la transmisión es mucho mayor que uno para cualquier cadena. El enfoque de la matriz de dispersión también se aborda en este trabajo, para contrastar con los resultados obtenidos a partir de la matriz de transferencia. De tal forma que podemos estudiar a los puntos excepcionales desde este enfoque y debido a la libertad de elección de matriz de transferencia, se introduce una matriz de dispersión diferente a la previamente usada en la literatura, se estudiarán las ventajas y desventajas al aplicar ambas matrices. Por último se analiza la propagación a través del tiempo de una excitación inicial dentro de una estructura unidimensional  $\mathcal{PT}$  simétrica que presenta dos tipos de acoplamientos y se compara con diferentes configuraciones de estructuras.



# Abstract

---

In this work we study the spectral and transport properties of systems described by non-hermitian Hamiltonians, using as principal tools for the analysis the transfer and dispersion methods, which are applied both analytically and numerically. The most important contribution of this work is given in the study of the so-called  $\mathcal{PT}$  symmetric tight-binding systems, which have a broad theoretical and experimental interest in modern physics, due to their intriguing spectral and transport properties, as for example, the fact of having a totally real spectrum of energies for a certain range of system parameters or presenting processes such as unidirectional invisibility and non-reciprocity in the reflections. In particular, we focus on the description of the transmission and reflection coefficients in dependence of the different parameters that determine the model, by developing compact explicit analytical expressions for this quantities valid for any range of values for the parameters. Whose composition is so clear that it is of great help to the analysis of those expressions. Here a description is made in conjunction with the analysis of the dispersion relation for a Bloch like index, which can be real regardless of the non-hermiticity that characterizes the system. We also describe the importance of exceptional points in  $\mathcal{PT}$  symmetric models, characterized by equal eigenvalues of the transfer matrix, as well as their relationship with the transport properties. This analysis allows to establish new types of exceptional points of different nature to those previously reported in the literature, differentiated by the conditions in which they appear and the independence they have with respect to the size of the system, thus defining a fixed region where the transmission is greater than one for any chain size. The dispersion matrix approach is also reported in this work, to contrast with the previous results obtained from the transfer matrix. In such a way that we can study the exceptional points from this approach and due to the freedom of choice of transfer matrix, a different dispersion matrix previously used in the literature is also introduced, where the advantages and disadvantages of applying both matrices will be studied. Finally, we analyse the propagation over time of an initial excitation within a one-dimensional  $\mathcal{PT}$  symmetric structure that presents two types of couplings and we compare it with different configurations of structures.



# Contenido

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Conceptos Fundamentales</b>	<b>9</b>
2.1	Simetría $\mathcal{PT}$	10
2.1.1	Operadores de paridad $\mathcal{P}$ y de reversión temporal $\mathcal{T}$	11
2.1.2	Dímero $\mathcal{PT}$ -simétrico	14
2.2	Aplicaciones de la simetría $\mathcal{PT}$	17
2.3	Matriz de Transferencia y Matriz de Dispersión	21
2.4	Amplitudes de Reflexión y Transmisión	24
2.5	Definiciones alternas de la matriz de dispersión	26
2.6	Ley de composición de la matriz de transferencia	27
2.7	Modelo de Enlace Fuerte	30
2.8	Antecedentes	32
2.8.1	Caso Simétrico	33
<b>3</b>	<b>Modelo de enlace fuerte <math>\mathcal{PT}</math>-simétrico con acoplamientos diferentes entre sitios</b>	<b>39</b>
3.1	Matriz de transferencia del sistema asimétrico	40
3.2	Relación de dispersión	48
3.3	Propiedades de Transporte	50
3.3.1	Coefficiente de Transmisión	51
3.3.2	Reflexión izquierda y derecha	59
3.3.3	Valores para el parámetro $\gamma$	63
3.3.4	Caso $\delta^2 = \gamma^2$	66
<b>4</b>	<b>Matriz de dispersión</b>	<b>71</b>
4.0.1	Matriz de dispersión $S_c$	77
<b>5</b>	<b>Dinámica</b>	<b>83</b>
5.1	Dependencia Temporal	84
5.2	Análisis Analítico	85
5.2.1	Dinámica en una cadena simétrica	88
5.2.2	Dinámica en una cadena $\mathcal{PT}$ simétrica	90
<b>6</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>95</b>

A Obtención de las entradas de la matriz $M$ en términos de la función $F_{\pm}$	99
Bibliografía	103

# Introducción

La dispersión, ya sea cuántica o clásica está involucrada en cualquier sistema que se encuentre interactuando con el ambiente. En particular, la transmisión de una señal a través de un sistema, así como su detección subsecuente, es el principal instrumento para la obtención de información de sistemas con los cuales sería imposible interactuar a través de otros medios. Debido a la importancia crucial de este problema en el desarrollo de la física mesoscópica [57], con un amplio potencial de aplicación a, por ejemplo, información cuántica, electrónica y ciencia de materiales, se ha revivido el interés en el problema de dispersión múltiple tanto de ondas electromagnéticas como de ondas de materia. Aquí el sistema físico puede ser esencialmente un problema de un cuerpo, en donde, por ejemplo, electrones no interactuantes se mueven en una distribución uniforme o aleatoria de dispersores estáticos. A través de los años, las propiedades de transporte en sistemas hermíticos han sido sujeto a una investigación intensiva. Tales arreglos son ubicuos en la naturaleza y están típicamente caracterizados por una sucesión de bandas y brechas prohibidas [5]. Apareciendo en diversos campos de la física teórica y aplicada, desde estado sólido, condensados de Bose-Einstein [64], cristales y redes fotónicas [24, 92]. La hermiticidad es una simetría sutil y abstracta que es matemática en su origen. Esta es una idealización en la que un sistema está aislado de cualquier entorno circundante (y, por lo tanto, no se puede medir). Si bien esto proporciona un marco matemático manejable para la teoría cuántica, es un requisito no físico ya que todos los sistemas interactúan con su entorno y si deseamos medir un sistema, entonces se requiere dicha interacción.

En lugar de describir un sistema aislado, es interesante entender un sistema que está en equilibrio con su entorno, donde la energía puede fluir dentro y fuera del sistema de manera equilibrada; ya que en cualquier sistema realista es imposible despreciar los efectos de absorción e incluso los efectos de amplificación. Dichos efectos implican un carácter no hermítico y una forma en que se contemplan dentro de un modelo es mediante canales de decaimiento, conocidos o ignorados, existentes en cualquier problema de sistemas acoplados. Podemos encontrar ejemplos de estos sistemas en reacciones químicas, en donde las partículas se reacomodan para crear y destruir combinaciones atómicas estables, detectores en donde la partícula incidente desaparece (por ejemplo cuando un átomo es ionizado debido a la

absorción de un fotón), colisiones inelásticas que modifican las poblaciones de los diferentes niveles internos de partículas compuestas, "sistemas abiertos" con fuentes de inyección y pozos de absorción o en sistemas que decaen, por ejemplo, debido a la emisión espontánea de fotones a partir de un nivel excitado. En todos estos casos, la descripción de la dinámica global puede ser realizada, en principio, por medio del hamiltoniano hermitico del sistema total, el cual considera explícitamente a todas las partículas, grados de libertad y el espacio total de estados, sin embargo esta descripción puede resultar tan detallada que prácticamente es imposible de realizar. Una descripción reducida para el subespacio seleccionado puede ser realizada por medio de ecuaciones de Schrödinger efectivas en donde el subespacio complementario puede ser tomado en cuenta mediante interacciones efectivas descritas por un potencial complejo no hermitico.

En 1998, Carl Bender y Stefan Boettcher escribieron un artículo [10] explorando el reemplazo de la hermiticidad con otra simetría. Sin embargo, su nueva teoría tiene características interesantes: no era un reemplazo de igual a igual. La simetría subyacente que encontraron Bender y Boettcher fue lo que llamaron "simetría  $\mathcal{PT}$ ". La simetría aquí es de naturaleza geométrica y, por lo tanto, está más cerca de la física que de la hermiticidad. La " $\mathcal{P}$ " significa simetría de "paridad", a veces llamada simetría espejo. Si un sistema respeta la simetría " $\mathcal{P}$ ", entonces la evolución del sistema no cambiaría para una versión espacialmente reflejada del sistema. La " $\mathcal{T}$ " significa "inversión de tiempo". La simetría de inversión de tiempo es tal como suena: un sistema físico que respeta esta simetría evolucionaría de la misma manera, independientemente de si el tiempo avanza o retrocede. Algunos sistemas exhiben individualmente simetrías  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{T}$ , pero es la combinación de las dos lo que parece ser fundamental para la mecánica cuántica.

Esto permite construir y estudiar muchos tipos nuevos de hamiltonianos que previamente habrían sido ignorados. Estos nuevos tipos de hamiltonianos tienen propiedades matemáticas notables y bien puede resultar que sean útiles para describir el mundo físico. Es crucial, por supuesto, que al reemplazar la condición de hermiticidad por la simetría  $\mathcal{PT}$  no se deje de lado a ninguna de las propiedades físicas clave que debe tener una teoría cuántica. Si la simetría  $\mathcal{PT}$  del hamiltoniano no se rompe, entonces el hamiltoniano exhibirá toda las características de una teoría cuántica descrita por un hamiltoniano hermitiano. La importancia de estos sistemas es que además de exhibir un espectro de energías completamente real, también presentan características distintivas tales como modos propios no ortogonales [15, 17, 20, 75], puntos excepcionales [35, 39, 40, 59, 60], transporte coherente difusivo [29] e invisibilidad unidireccional. Además, la simetría  $\mathcal{PT}$  tiene profundas implicaciones en sistemas que incluyen la no linealidad [68], emisión estimulada (lasing) [34] y las topologías no triviales [91, 93]. En general, los autovalores de tales arreglos son reales sólo dentro de un cierto rango que define el parámetro que mide la no hermiticidad del sistema. Esto es, una vez que este parámetro excede un cierto valor crítico, el sistema se somete a un rompimiento espontáneo de simetría, correspondiente a la transición de un espectro real a uno complejo y por lo tanto entrando a lo que se conoce como un régimen de simetría  $\mathcal{PT}$  rota [10]. Interesantemente este punto de transición exhibe todas las características de un punto excepcional [39, 67].

Es claro que esta simetría es bastante complicada de lograr experimentalmente ya que su origen reside en el campo de la mecánica cuántica. Sin embargo, existe una analogía entre la mecánica cuántica y la óptica, la cual se basa en el hecho de que comparten el mismo formalismo matemático. La ecuación que rige la propagación del haz óptico se describe como la ecuación paraxial de difracción, matemáticamente equivalente a la ecuación de Schrödinger. En este contexto la simetría  $\mathcal{PT}$  puede ser fácilmente establecida mediante el requerimiento de que la distribución espacial del índice de refracción  $n(x)$  obedezca la relación  $n(x) = n_R(x) + in_I(x)$ . En otras palabras, ésta simetría demanda que el perfil del índice de refracción (parte real  $n_R$ ) debe ser una función par de la posición, mientras que la distribución espacial de ganancias y pérdidas ( $n_I$ ) debe ser antisimétrica. Como ha sido establecido en diversos estudios, la simetría  $\mathcal{PT}$  puede llevar a distintos procesos intrigantes. Estos incluyen, por ejemplo, efectos de unificación de bandas en redes  $\mathcal{PT}$  simétricas [55], transiciones de fase abruptas [75], oscilaciones de potencia, doble refracción e invisibilidad unidireccional [32, 51, 74]. Además, se puede presentar el caso de propagación no recíproca de ondas cuando la simetría  $\mathcal{PT}$  es usada en sistemas no lineales [72]. Otros aspectos como estados de defecto en redes  $\mathcal{PT}$  simétricas [74], la coexistencia de modos laser coherentes absorbentes [52, 53] y la selección de modos en láseres  $\mathcal{PT}$  simétricos, han sido también investigados en la literatura [61].

Para el estudio de problemas de dispersión, se emplean diferentes métodos para encontrar la solución a la ecuación de onda [57]. Un lugar importante dentro de estos métodos está ocupado por la matriz de dispersión  $\mathbf{S}$  que es el operador que relaciona a las componentes asintóticas de las funciones de onda incidentes y transmitidas, por lo cual contiene toda la información relevante para el proceso de dispersión. Aunque este operador es de gran importancia y utilidad para la descripción de, por ejemplo, resonancias, tiempos de vida y amplitudes de decaimiento, en este trabajo se aplica primeramente el método de la matriz de transferencia  $M$ , debido a que este último operador resulta más eficiente en el estudio de sistemas unidimensionales compuesto por unidades básicas acopladas, debido a la propiedad de composición, la cual tiene una formulación mucho más sencilla que aquella para la matriz de dispersión [56]. No obstante, en este trabajo se empleará también el método de la matriz de dispersión, como se verá más adelante para comparar los resultados obtenidos a través de ambos métodos matriciales, mostraremos que las expresiones analíticas de los elementos de esta matriz  $\mathbf{S}$  son más complicadas que las expresiones para los elementos de  $M$ . También se pudo demostrar, por ejemplo, que los autovalores complejos de los Hamiltonianos no hermíticos están íntimamente relacionados con los polos complejos de la matriz de dispersión y por lo tanto con la distribución y tiempos de vida de las resonancias del sistema.

## Capítulo 2

En el capítulo 2 de este trabajo se establecerán los conceptos básicos necesarios para establecer el contexto de nuestro estudio. Primeramente se definirán en detalle los métodos que se han usado en el análisis de los modelos unidimensionales en la aproximación de amarre fuerte, estos son el método de matriz de transferencia [56] y el método de la matriz de dispersión. Se mencionará brevemente la relación que existe entre ambas matrices, las ventajas y desventajas de cada una de ellas y aún más importante las simetrías que las caracterizan al ser aplicadas a un sistema hermítico y a uno que no lo es.

Aquí se establecerá principalmente como obtener a partir de ellas las propiedades de transporte para un modelo en general; es decir, los coeficientes de transmisión y reflexión del modelo que propondremos más adelante. Posteriormente se hará la introducción al modelo de mayor interés en este trabajo; el cual es, el modelo de enlace fuerte con interacción a primeros vecinos, en donde se hará énfasis en la importancia de este modelo no sólo en el estudio de la propagación de electrones en redes de iones si no también en el análisis de la propagación de ondas en sistemas de guías de onda en la aproximación de modos acoplados, este último es de gran interés en física experimental con aplicación a redes fotónicas [73]. En esta parte se establecerá también una versión del método de matriz de transferencia enfocado en la forma matricial de la ecuación de Schrödinger, de donde se puede establecer una expresión analítica para el coeficiente de transmisión en términos de los estados de dispersión [56]. Posteriormente se hará una introducción a la teoría de sistemas  $\mathcal{PT}$  simétricos en donde se definen los conceptos básicos para el entendimiento de estos sistemas, aquí se establecen las relaciones de conservación generalizadas para dichos sistemas, las cuales son de gran importancia para la caracterización correcta de las propiedades de transporte. Se incluye el ejemplo de un modelo sencillo para entender como es que el hamiltoniano que representa a ese sistema es  $\mathcal{PT}$  simétrico, como es la forma de los autovalores y eigenvectores propios del modelo y además las diferentes fases por las cuales pasan estas energías propias, es decir cuando el sistema tiene energías reales y por lo tanto está dentro del régimen de simetría  $\mathcal{PT}$  y cuando ocurre la transición donde las energías pasan a ser parcial o completamente complejas, caracterizando así una fase  $\mathcal{PT}$  simétrica rota. Finalmente se hará una breve introducción a la teoría de sistemas desordenados de baja dimensionalidad, aquí se hará énfasis en la descripción del comportamiento de las propiedades de transporte en dichos sistemas, principalmente el coeficiente de transmisión.

### Capítulo 3

En el capítulo 3 se presenta un estudio detallado de modelos tipo enlace fuerte unidimensionales  $\mathcal{PT}$  simétricos compuestos por sitios alternantes con pérdidas y ganancias balanceadas, analizando la configuración donde los acoplamientos entre sitios en la región interna del sistema toma dos valores diferentes de manera alternante. En este caso se considera que el acoplamiento entre la región de dispersión y las guías de ondas semi-infinitas es perfecto. Esta asimetría resulta en propiedades de dispersión inesperadas como veremos a lo largo del trabajo, además que uno de nuestros intereses está en establecer la relación entre las propiedades de un sistema ligado con un número finito de sitios y las propiedades de dispersión de un modelo abierto correspondiente a la misma estructura finita acoplada a guías de ondas semi infinitas perfectas las cuales modelan al continuo. Algunos aspectos de este problema ya han sido discutidos en la literatura. En la revisión corta [78] se demostró como los métodos que están bien desarrollados en la física nuclear y mesoscópica, pueden ser usados para describir la dispersión múltiple en resonadores no hermíticos  $\mathcal{PT}$  simétricos con regiones de absorción y amplificación. Las propiedades de matrices de dispersión en conexión con los puntos de rompimiento de simetría  $\mathcal{PT}$  en los correspondientes sistemas ligados han sido analizados en la referencia [2]. Otros aspectos para los sistemas ligados y abiertos han sido discutidos en las referencias [37, 79, 94].

En primer lugar, en la sección 3.1 se explica de manera detallada la obtención de la matriz de transferencia  $M$  que describe al modelo que se ha propuesto. El enfoque de la matriz de transferencia es más

apropiado para el análisis de sistemas unidimensionales y se utilizará en este capítulo. Al tener dos tipos de acoplamientos diferentes dentro del sistema y dos tipos de potencial en sitio (ya que uno representa pérdida seguido de un potencial que representa amplificación) podemos descomponer la cadena unidimensional en dímeros. Al hacer esto cada uno de ellos tendrá su propia matriz de transferencia, pero una de las propiedades más útiles de este enfoque es la multiplicación de las matrices individuales [56], haciendo que podamos extenderlo a toda la cadena y obtener una matriz de transferencia total, la cual expresa los coeficientes de la función de onda en el lado derecho de la muestra en términos de los coeficientes de la función de onda en el lado izquierdo de la misma.

En la sección 3.2, se estudia la obtención de la relación de dispersión correspondiente al modelo bajo estudio, tomando ventaja de la periodicidad que presenta la estructura, para así aplicar condiciones de frontera mediante el teorema de Bloch. Otro punto de nuestro estudio es el entender el rol de un índice tipo Bloch, el cual resulta específico en la descripción de las propiedades de transporte del sistema. En esta sección presenciaremos la aparición de un nuevo tipo de regiones de energía en donde este índice tipo Bloch  $\mu$ , que es el número de onda dentro de la región de dispersión, puede tomar valores reales, imaginarios e incluso complejos. La comparación de valores entre los parámetros define estas zonas para el coeficiente  $\mu$ , encontraremos que sólo es posible tener una región compleja justo y con respecto al centro de la banda de energías siempre y cuando el grado de asimetría sea mayor que el potencial en sitio. Estas transiciones de valores para el coeficiente  $\mu$  están además delimitados por puntos excepcionales [35, 39, 40, 59, 60] internos y externos, de los cuales se obtiene una expresión analítica en términos de los parámetros propios del sistema.

En la sección 3.3, se exploran las propiedades de transporte y como obtenerlas mediante la relación que guarda la matriz de transferencia con las amplitudes de los coeficientes de transmisión y reflexión. Esta es la parte clave e importante del trabajo, ya que se logrará obtener de manera exacta y no aproximada, expresiones para los coeficientes de transmisión y reflexión para cualquier valor que puedan presentar los parámetros que definen a la estructura. Cabe mencionar que la forma de las ecuaciones que los definen es compacta y sencilla. Estos resultados nos permiten analizar y conocer como se comportan las propiedades de transporte para este modelo en particular. Específicamente, mostramos que cuando el parámetro que establece la asimetría de los acoplamientos entre sitios es más grande que aquel que describe a las pérdidas y ganancias del sistema, se tiene que el coeficiente de transmisión es siempre menor a uno en el rango de energías definido por valores reales de  $\mu$ . Esto contrasta con los resultados hallados para el modelo con acoplamientos iguales dentro de la región de interacción, en donde la transmisión es siempre mayor a uno para valores reales del parámetro  $\mu$ . Otro aspecto importante de este modelo es que inesperadamente en los puntos excepcionales correspondientes a los bordes entre las regiones de energías reales y aquellas con energías complejas e imaginarias, el coeficiente de transmisión es diferente a uno. Por otro lado cuando el parámetro que describe a las pérdidas y ganancias del sistema es igual a aquel que describe la asimetría en los acoplamientos, se tiene una unificación de las bandas y un punto excepcional, justo en el centro de la banda. Para este punto excepcional la transmisión resulta ser perfecta y además se tiene que el cambio en la fase del estado de dispersión se anula. Este resultado puede ser de importancia en vista de realizaciones experimentales, debido a que se tiene una

transmisión perfecta en el interior de la banda de energías y no en la vecindad de los bordes de la banda, como sucede en el caso con acoplamientos perfectos. Para completar este análisis, también se estudia el comportamiento de los coeficientes de reflexión respecto al tamaño de la cadena, de la energía y del parámetro que mide el grado de no-hermiticidad del sistema  $\gamma$ . Además explicamos los dos tipos de resonancias que aparecen en el modelo bajo estudio, a partir de la expresión analítica del coeficiente de transmisión que gobierna al modelo, la cual podemos dividir en dos términos cuya dependencia de variables es distinta. Las resonancias Fabry-Pérot, son el primer tipo que el sistema manifiesta y dependen del tamaño del sistema, por otro lado tenemos resonancias que dependen de la no hermiticidad del sistema comparado con la asimetría dentro del mismo, las cuales denominamos resonancias  $U$ . Un hecho interesante es que estas últimas corresponden a los puntos donde ocurre el fenómeno intrínseco de este tipo de sistemas conocido como invisibilidad unidireccional.

## Capítulo 4

En el capítulo 4, se analiza la matriz de dispersión para este modelo. La obtención de dicha matriz proviene de la relación que guarda con la matriz de transferencia  $M$ . El análisis empieza con la obtención de los autovalores y eigenvectores, además de la comprobación de las simetrías inherentes que debe cumplir la matriz  $S$  para un modelo  $\mathcal{PT}$  simétrico. De esta manera permite hacer la comparación con los resultados obtenidos relacionados a los puntos excepcionales mediante el formalismo de la matriz  $M$ , los cuales indican el rompimiento espontáneo de la simetría  $\mathcal{PT}$  dando lugar a autovalores imaginarios. Como se verá, ambos formalismos coinciden en la determinación de las zonas donde se tiene una fase  $\mathcal{PT}$  simétrica y en las regiones con una fase  $\mathcal{PT}$  simétrica rota. Recientemente en algunos trabajos previos se habla de una definición alterna de matriz de dispersión, la cual denotamos como  $S_c$ , la cual difiere en una permutación de los canales de salida de la matriz de dispersión común que conocemos de la literatura. La razón por la cual se introduce esta nueva matriz de dispersión, reside en información adicional que puede dar acerca de un tipo de resonancias, a las cuales llamamos resonancias  $U$ . Este tipo de resonancias no dependen del tamaño del sistema, pero sí de los parámetros restantes de la estructura. Este hecho es importante porque nos permite ver que el método de la matriz de transferencia nos da un análisis completo acerca de las resonancias, donde la transmisión es perfecta y los coeficientes de reflexión se anulan. Mientras que si tomamos el enfoque de la matriz de dispersión es necesario tomar ambas matrices para un análisis completo.

## Capítulo 5

El capítulo 5, habla sobre la dinámica que existe dentro del modelo propuesto. El problema inicia con una excitación o perturbación dentro de cualquier sitio de la estructura y analizar como evoluciona en función del tiempo. Esta es la probabilidad de que al pasar cierto tiempo, la excitación se encuentre en un sitio  $m$ -ésimo diferente del inicial; el enfoque utilizado hace uso de la representación matricial del hamiltoniano, la cual corresponde a una matriz tridiagonal y la base a utilizar es la base de ocupación. De esta forma podremos determinar como se propaga la excitación dentro de la estructura. Varios casos diferentes son analizados para poder entender mejor la dinámica; entre los casos analizados se tiene el caso simétrico, un caso extremo donde uno de los acoplamientos internos de la cadena es cero y el caso de mayor interés que es cuando se tienen dos acoplamientos. De esta manera podrá notarse el

contraste de la propagación de la excitación inicial para cada caso. Veremos que los autovalores de los hamiltonianos para cada caso no son todos reales, de hecho aparecen eigenvalores imaginarios, ocasionando que la propagación de la perturbación diverja a tiempos muy cortos.

En los veintidós años transcurridos desde el artículo de 1998 de Bender y Boettcher, los científicos han creado láseres con simetría  $\mathcal{PT}$ , cables superconductores con simetría  $\mathcal{PT}$  y experimentos de difusión con simetría  $\mathcal{PT}$  para mencionar solo algunas validaciones de su teoría. A medida que la simetría  $\mathcal{PT}$  ha madurado, ha inspirado la creación de metamateriales exóticos que tienen propiedades que nos permiten controlar la luz de nuevas maneras. La comunidad académica, inicialmente escéptica ante un cambio tan fundamental en la teoría cuántica, se ha entusiasmado con la idea de la simetría  $\mathcal{PT}$ . Más de 200 investigadores de todo el mundo han publicado artículos académicos sobre simetría  $\mathcal{PT}$ . La literatura ahora se extiende a más de 2000 artículos, muchos en las principales revistas como Nature, Science y Physical Review Letters.

El futuro es brillante para la mecánica cuántica  $\mathcal{PT}$  simétrica, pero aún queda trabajo por hacer. Muchos de los experimentos mencionados tienen aspectos de mecánica cuántica pero no son verificaciones completas de la mecánica cuántica  $\mathcal{PT}$  simétrica. Sin embargo, los experimentos existentes ya están dando resultados emocionantes. La simetría  $\mathcal{PT}$  es un tema candente en las comunidades de óptica y grafeno y recientemente se ha sugerido la idea de crear una computadora basada en principios ópticos en lugar de electrónicos. A principios del siglo XXI, estamos encontrando una nueva comprensión de la teoría cuántica que tiene el potencial de desarrollar nuevas tecnologías de la misma manera que la física de los semiconductores fue potencializada por el auge de la mecánica cuántica hace cien años.



# Conceptos Fundamentales

En los cursos introductorios de mecánica cuántica se aprende la importancia de las simetrías; dentro de las simetrías fundamentales se encuentran la de paridad ( $\mathcal{P}$ ) y la de reversión temporal ( $\mathcal{T}$ ). Recientemente ha surgido un gran interés en los sistemas que obedecen una simetría combinada, denominada  $\mathcal{PT}$ , en lugar de las simetrías  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{T}$  por separado, debido a los diferentes fenómenos inesperados que trae consigo. Experimentalmente hablando, este tipo de sistemas, conocidos como  $\mathcal{PT}$  simétricos, se encontraron inicialmente en el campo de la óptica y fotónica, a pesar de que es en la mecánica cuántica donde surgen los cimientos para esta teoría. La parte experimental se logra creando un medio con regiones alternas de ganancia y pérdida, de modo que el índice de refracción toma el papel del potencial de los hamiltonianos no-hermíticos, debiendo satisfacer la condición  $V(x) = V^*(-x)$ . Esta condición implica que la creación y absorción de fotones se produce de manera equilibrada, haciendo que la pérdida y ganancia neta sea cero. Una primera realización experimental de tales arreglos (lineales) se ha informado recientemente en las referencias [7,8] donde se fabricó una estructura de doble acoplamiento  $\mathcal{PT}$ .

Hasta la fecha, la mayoría de los estudios sobre realizaciones ópticas de medios  $\mathcal{PT}$  sintéticos se han basado en la aproximación paraxial que mapea la ecuación de onda escalar a la ecuación de Schrödinger, donde el vector de onda desempeña el papel de la energía [55, 75]. Esta analogía formal permite investigar experimentalmente conceptos fundamentales de la simetría  $\mathcal{PT}$ ; la cual puede encontrarse en otras áreas, que van desde la teoría cuántica de campos y la física matemática, hasta el estado sólido y la física atómica. Entre los diversos temas que han fascinado a los investigadores, está la existencia de puntos de ruptura espontánea de la simetría  $\mathcal{PT}$ , denominados *puntos excepcionales*, donde los valores propios del hamiltoniano no-hermítico que describe la dinámica de estos sistemas sufren una transición de fase pasando de ser reales a parcial o completamente complejos [10].

Recientemente ha aumentado el interés en las configuraciones de dispersión  $\mathcal{PT}$  en relación con el uso de dispositivos  $\mathcal{PT}$  simétricos bajo un doble rol, el de un láser y una cavidad perfecta de absorción coherente [22]. De hecho, ya se han reportado varios fenómenos interesantes con respecto a las estructuras ópticas

$\mathcal{PT}$  simétricas [21, 33, 37, 38, 51–55, 65, 68, 72, 75, 79, 85, 94]. Estas incluyen, oscilaciones de potencia y no-reciprocidad de la propagación de la luz [55, 75, 94], oscilaciones no-recíprocas de Bloch [52] y la invisibilidad unidireccional [51]. En el dominio no lineal, tales efectos no recíprocos pseudo-hermíticos pueden usarse para realizar una nueva generación de aisladores y circuladores en chip (on-chip isolators) [72].

Hemos mencionado de manera general la importancia de la simetría  $\mathcal{PT}$ , es por ello que en este capítulo introduciremos los conceptos básicos necesarios en los cuales basamos el modelo que estudiaremos en este trabajo. Empezaremos explicando la simetría  $\mathcal{PT}$  y mediante un ejemplo plasmaremos todos los conceptos que vagamente hemos platicado en la introducción. Además se presentan los dos formalismos que se emplearon en este trabajo para obtener las propiedades de transporte de los sistemas dispersados; las cuales son la matriz de transferencia  $M$  y la matriz de dispersión  $S$ . Se hablará sobre las propiedades que satisfacen estas matrices bajo la transformación de  $\mathcal{PT}$  y las leyes de conservación que revelan las simetrías subyacentes del objetivo de dispersión, así como propiedades de transporte anómalas, como la transmisión mayor a uno, la reflexión asimétrica, la transparencia unidireccional y los absorbedores de láser simultáneos.

## 2.1 Simetría $\mathcal{PT}$

Al igual que muchas áreas de investigación en ciencias, el estudio de los hamiltonianos no hermíticos con espectros reales comenzó de manera inesperada y difusa. Existen numerosos ejemplos de descubrimientos aislados y desconectados de tales hamiltonianos no hermíticos. Por ejemplo, en 1980, Caliceti *et al*, que estudiaban la suma de Borel de una serie de perturbaciones divergentes derivadas de clases de osciladores anarmónicos, se asombraron al descubrir que los valores propios de un oscilador eran reales a pesar de contar con un término imaginario cúbico de auto-interacción dentro del hamiltoniano [18]. En 1992, Bessis y Zinn-Justin habían notado, a través del trabajo numérico, que algunos de los valores propios del Hamiltoniano cúbico,  $\hat{H} = \hat{p}^2 + i\hat{x}^3$ , parecían ser reales, y se preguntaron si el espectro pudiera ser completamente real [16]. En 1982, Andrianov, que estaba haciendo estudios perturbativos sobre potenciales de la forma  $-x^4$ , encontró evidencia de que tales teorías podrían tener valores propios reales [4]. En 1992, Hollowood [41] y Scholtz *et al* [77] descubrieron en sus propias áreas de investigación ejemplos sorprendentes de hamiltonianos no hermíticos con espectros reales. El último artículo ofreció un análisis matemático exhaustivo de operadores cuasi-hermíticos que tienen eigenvalores reales.

El campo de la mecánica cuántica  $\mathcal{PT}$  simétrica se estableció en 1998 con el descubrimiento de Bender y Boettcher de que las conjeturas numéricas de Bessis y Zinn-Justin no sólo eran válidas, sino que eran sólo una parte de una gran clase de hamiltonianos no-hermíticos cuyos espectros son completamente reales y positivos [10]. Bender y Boettcher mostraron que los espectros reales se debían a un principio de simetría, es decir, la condición de una simetría de reflexión espacio-tiempo ininterrumpida, y argumentaron que este principio de simetría podría reemplazar el requisito habitual de la hermiticidad de Dirac.

Este descubrimiento de Bender y Boettcher se basa en dos ingredientes matemáticos esenciales. Primero, Bender y Boettcher utilizaron las técnicas de continuación analítica de los problemas de eigenvalores. Estas técnicas fundamentales se desarrollaron y utilizaron en gran medida en los primeros trabajos de Bender y Wu en series de perturbaciones divergentes [12, 13] y más tarde fueron utilizadas por Bender y Turbiner [11]. Estas técnicas son cruciales porque muestran cómo continuar analíticamente las condiciones de contorno de un problema de eigenvalores en función de un parámetro en el hamiltoniano. En segundo lugar, Bender y Boettcher utilizaron las técnicas de expansión delta que habían sido descubiertas y desarrolladas por Bender *et al* [14] como una forma de evitar series de perturbaciones divergentes. La expansión delta es una poderosa técnica de teoría de perturbaciones en la que el parámetro de perturbación pequeña es una medida de la no linealidad del problema. En el caso de la mecánica cuántica  $\mathcal{PT}$  simétrica, el hecho de que los eigenvalores sean reales varía en función del parámetro de perturbación.

Muchos investigadores han contribuido enormemente al desarrollo de la mecánica cuántica  $\mathcal{PT}$  simétrica descubriendo nuevos ejemplos y modelos, demostrando teoremas y realizando análisis numéricos y asintóticos. En los últimos años, se ha desarrollado una comunidad de investigación grande y activa. El propósito de este trabajo es dar una introducción básica a este campo de investigación.

### 2.1.1 Operadores de paridad $\mathcal{P}$ y de reversión temporal $\mathcal{T}$

Para comprender el concepto de estructuras que son invariantes ante la combinación de los operadores de paridad y tiempo ( $\mathcal{PT}$ ), es natural revisar algunos teoremas y postulados fundamentales en mecánica cuántica, en donde se definió por primera vez el problema de la simetría  $\mathcal{PT}$ . Empecemos con el operador de paridad  $\mathcal{P}$ , el cual se define como un operador lineal que revierte el espacio y el momento, dicho operador a menudo se usa para verificar la quiralidad de un sistema dado (una quiralidad específica aparecerá como imagen reflejada después de la reflexión espacial). Por otro lado el operador de reversión temporal  $\mathcal{T}$  es un operador que corresponde a la reversión de la trayectoria de una partícula. En el caso de la mecánica cuántica, sin embargo, debemos tener más precaución con esto. Las transformaciones realizadas por cada uno de los operadores de paridad y de inversión temporal se definen como [8–10, 22, 37, 66].

$$\begin{aligned} \mathcal{P} & : \quad \hat{x} \rightarrow -\hat{x} \quad ; \quad \hat{p} \rightarrow -\hat{p} \\ \mathcal{T} & : \quad i \rightarrow -i \quad ; \quad \hat{x} \rightarrow \hat{x} \quad ; \quad \hat{p} \rightarrow -\hat{p}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

La reversión temporal incluye la conjugación compleja,  $\mathcal{T}i\mathcal{T} = -i$ , debido a la condición de antilinealidad; además de que debe preservarse la relación de conmutación canónica  $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ . Las ecuaciones (2.1) muestran la manera en que los operadores  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{T}$  actúan de manera individual en el espacio de Hilbert. En los sistemas de dispersión uni-dimensionales, es conveniente trabajar con las amplitudes de los vectores en lugar de la propia función de onda. Analicemos la acción de estos operadores sobre los vectores base  $e^{ikz}$  y  $e^{-ikz}$  [19]:

$$\mathcal{P} : Ae^{ikz} \rightarrow Ae^{-ikz} \quad \text{de modo que} \quad \mathcal{P} : \begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ A \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{P} : Be^{-ikz} \rightarrow Be^{ikz} \quad \text{de modo que} \quad \mathcal{P} : \begin{pmatrix} 0 \\ B \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix},$$

de lo cual podemos deducir que el operador  $\mathcal{P}$  tiene la forma,

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Podemos hacer algo similar para determinar la forma del operador  $\mathcal{T}$ ,

$$\mathcal{T} : Ae^{ikz} \rightarrow A^*e^{-ikz} \quad \text{de modo que} \quad \mathcal{T} : \begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ A^* \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{T} : Be^{-ikz} \rightarrow B^*e^{ikz} \quad \text{de modo que} \quad \mathcal{T} : \begin{pmatrix} 0 \\ B \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} B^* \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathcal{K}, \quad (2.3)$$

donde  $\mathcal{K}$  es el operador de conjugación compleja; en esta representación matricial, observemos que  $\mathcal{P}\mathcal{T} = \mathcal{P}\mathcal{P}\mathcal{K} = \mathcal{K}$ .

En el campo de la mecánica cuántica, es bien sabido que el comportamiento de una partícula se describe mediante la ecuación de Schrödinger, cuya forma independiente del tiempo viene dada por

$$\mathcal{H}\psi = E\psi, \quad (2.4)$$

donde  $\psi$  representa la función de onda independiente del tiempo,  $E$  es la energía correspondiente al estado descrito por dicha función de onda, la cual es completamente real,  $\mathcal{H}$  denota al operador Hamiltoniano; el cual puede expresarse en terminos de los operadores de posición  $\hat{\mathbf{x}}$  y momento lineal  $\hat{\mathbf{p}}$  como,

$$\mathcal{H} = \hat{\mathbf{p}}^2 + V(\hat{\mathbf{x}}), \quad (2.5)$$

aquí  $V(\hat{\mathbf{x}})$  denota la energía potencial de la partícula. El operador de momento  $\hat{\mathbf{p}}$  es imaginario y anti-simétrico, se define como  $\hat{\mathbf{p}} = -i\nabla$ ; implicando entonces que  $\hat{\mathbf{p}}^2 = -\nabla^2$  es real y simétrico, es decir, *hermítico* y por lo tanto la función del potencial  $V(\hat{\mathbf{x}})$  es una función real en el espacio, garantizando que todos los estados de energía  $E$  también son reales con el Hamiltoniano  $\mathcal{H}$  satisfaciendo,

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^\dagger, \quad (2.6)$$

el símbolo  $\dagger$  denota una operación adjunta hermitiana que en forma matricial denota una operación de conjugación compleja y transposición combinadas.

Según lo sugerido por Bender y Boettcher [10], aunque la condición de hermiticidad (2.6) es *suficiente* para asegurar que todos los estados posibles de energía son completamente reales, esto no es *necesario*. En las referencias [8–10] se muestra que una simetría aún más débil que la hermiticidad puede dar lugar a eigenvalores reales. Dicha simetría se denota como un hamiltoniano simétrico de *paridad* ( $\mathcal{P}$ ) y de *reversión temporal* ( $\mathcal{T}$ ), lo cual nos dice que el hamiltoniano es invariante bajo la transformación,

$$\mathcal{P}\mathcal{T}\mathcal{H}\mathcal{T}\mathcal{P} = \mathcal{H}. \quad (2.7)$$

La transformación anterior puede aplicarse al potencial como,

$$\mathcal{P}\mathcal{T}V(x)\mathcal{T}\mathcal{P} = V^*(-x) = V(x). \quad (2.8)$$

Aquí  $*$  denota la operación de conjugación compleja. La condición de simetría  $\mathcal{P}\mathcal{T}$  (2.7) implica que el potencial  $V(x)$  es una función compleja, la cual puede escribirse como  $V(x) = V_R + iV_I$ , donde la parte real del potencial es una función par de las posiciones y la parte imaginaria es una función impar en el espacio de posiciones.

A pesar del hecho de que los hamiltonianos  $\mathcal{P}\mathcal{T}$  pueden, en general, no ser hermíticos, sus espectros de energía pueden ser completamente reales, como ya se mencionó antes. La desviación de la hermiticidad se debe a la presencia de varios mecanismos de ganancia y pérdida que se producen de manera equilibrada dentro del sistema, por lo que la pérdida o ganancia neta es cero. Además, surge un parámetro de ganancia/pérdida  $\gamma$  que controla el grado de no-hermiticidad presente en  $\mathcal{H}$ , el cual al tomar cierto valor crítico  $\gamma_{cr}$  produce una ruptura espontánea de la simetría  $\mathcal{P}\mathcal{T}$ . Este parámetro separa las fases del espectro de energías, por ejemplo, para  $\gamma > \gamma_{cr}$  las funciones propias de  $\mathcal{H}$  dejan de ser eigenestados del operador  $\mathcal{P}\mathcal{T}$  a pesar de que los operadores  $\mathcal{H}$  y  $\mathcal{P}\mathcal{T}$  sigan conmutando. Esto sucede debido a que el operador  $\mathcal{P}\mathcal{T}$  es anti-lineal, por lo que los eigenestados de  $\mathcal{H}$  pueden o no ser eigenestados de  $\mathcal{P}\mathcal{T}$ . Como consecuencia, en esta fase de simetría  $\mathcal{P}\mathcal{T}$  rota, el espectro se vuelve parcial o completamente complejo. El otro caso de interés es cuando  $\gamma < \gamma_{cr}$ , donde ambos operadores  $\mathcal{H}$  y  $\mathcal{P}\mathcal{T}$  comparten el mismo conjunto de eigenvectores, lo cual corresponde a la fase  $\mathcal{P}\mathcal{T}$  simétrica, donde el espectro de energías es completamente real. Mostremos que esto es cierto considerando un

hamiltoniano no-hermítico  $\mathcal{H}$  con simetría  $\mathcal{PT}$  intacta (la simetría  $\mathcal{PT}$  no se ha roto). Si  $|\phi_n\rangle$  es un eigenvector de  $\mathcal{H}$  ( $\mathcal{H}|\phi_n\rangle = E_n|\phi_n\rangle$ ), debe también ser cierto que  $\mathcal{PT}|\phi_n\rangle = \lambda|\phi_n\rangle$ . Por lo tanto, tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{PT}(\mathcal{PT}|\phi_n\rangle) &= \mathcal{PT}(\lambda|\phi_n\rangle), \\
\mathcal{P}(\mathcal{TP})\mathcal{T}|\phi_n\rangle &= \lambda^*(\mathcal{PT}|\phi_n\rangle), \\
\mathcal{P}(\mathcal{PT})\mathcal{T}|\phi_n\rangle &= \lambda^*(\lambda|\phi_n\rangle), \\
\mathcal{P}^2\mathcal{T}^2|\phi_n\rangle &= |\lambda|^2|\phi_n\rangle, \\
|\phi_n\rangle &= |\lambda|^2|\phi_n\rangle,
\end{aligned} \tag{2.9}$$

donde se usó el hecho de que los operadores individuales  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{T}$  conmutan. Debido a que el autovalor  $\lambda$  es una fase pura ( $\lambda = e^{i\phi}$ ) podemos escoger al ángulo de fase  $\phi$  de tal manera que  $\mathcal{PT}|\phi_n\rangle = |\phi_n\rangle$ , dando como resultado,

$$\begin{aligned}
\mathcal{PT}(\mathcal{H}|\phi_n\rangle) &= \mathcal{PT}(E_n|\phi_n\rangle), \\
\mathcal{H}(\mathcal{PT}|\phi_n\rangle) &= E_n^*(\mathcal{PT}|\phi_n\rangle), \\
\mathcal{H}|\phi_n\rangle &= E_n^*|\phi_n\rangle, \\
E_n|\phi_n\rangle &= E_n^*|\phi_n\rangle, \\
E_n &= E_n^*.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Vemos que cuando  $\mathcal{H}$  y  $\mathcal{PT}$  comparten eigenfunciones propias simultáneas se garantiza un espectro de energía real. Recordemos que el hecho de que  $[\mathcal{H}, \mathcal{PT}] = 0$  no implica automáticamente que  $\mathcal{H}$  y  $\mathcal{PT}$  compartan funciones propias simultáneas ya que  $\mathcal{T}$  es un operador antilineal.

### 2.1.2 Dímero $\mathcal{PT}$ -simétrico

Una manera de emplear todas estas ideas y conceptos previos, es con el uso de un ejemplo. Consideremos un hamiltoniano no-hermítico, en su representación matricial, de tamaño  $2 \times 2$ :

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} v_0 + i\gamma & \kappa \\ \kappa & v_0 - i\gamma \end{pmatrix}, \tag{2.11}$$

donde  $v_0$ ,  $\gamma$ ,  $\kappa$  son números reales y corresponden a la parte real e imaginaria del potencial y el acoplamiento entre dos niveles de energía, respectivamente. Claramente el hamiltoniano  $\mathcal{H}$  es no-hermítico ya que  $\mathcal{H}^\dagger = \mathcal{H}^* \neq \mathcal{H}$ . Este hamiltoniano es  $\mathcal{PT}$  simétrico y satisface la condición (2.7), cuya prueba se realiza haciendo uso de la forma matricial de los operadores  $\mathcal{P}$  (2.2) y  $\mathcal{T}$  (2.3) como mostraremos a continuación,

$$\begin{aligned}
\mathcal{PTHTPT} &= \mathcal{K} \begin{pmatrix} v_0 + i\gamma & \kappa \\ \kappa & v_0 - i\gamma \end{pmatrix} \mathcal{K} \\
&= \mathcal{K} \begin{pmatrix} v_0 - i\gamma & \kappa \\ \kappa & v_0 + i\gamma \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} v_0 + i\gamma & \kappa \\ \kappa & v_0 - i\gamma \end{pmatrix} \\
&= \mathcal{H}.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

### Eigenvectores para el hamiltoniano $\mathcal{H}$ de la ecuación (2.11)

Al saber que los eigenvalores están dados por  $E_{\pm} = \varepsilon_{\pm} + i\Gamma_{\pm} = \pm\sqrt{\kappa^2 - \gamma^2}$ , llegaremos a la expresión (2.13).

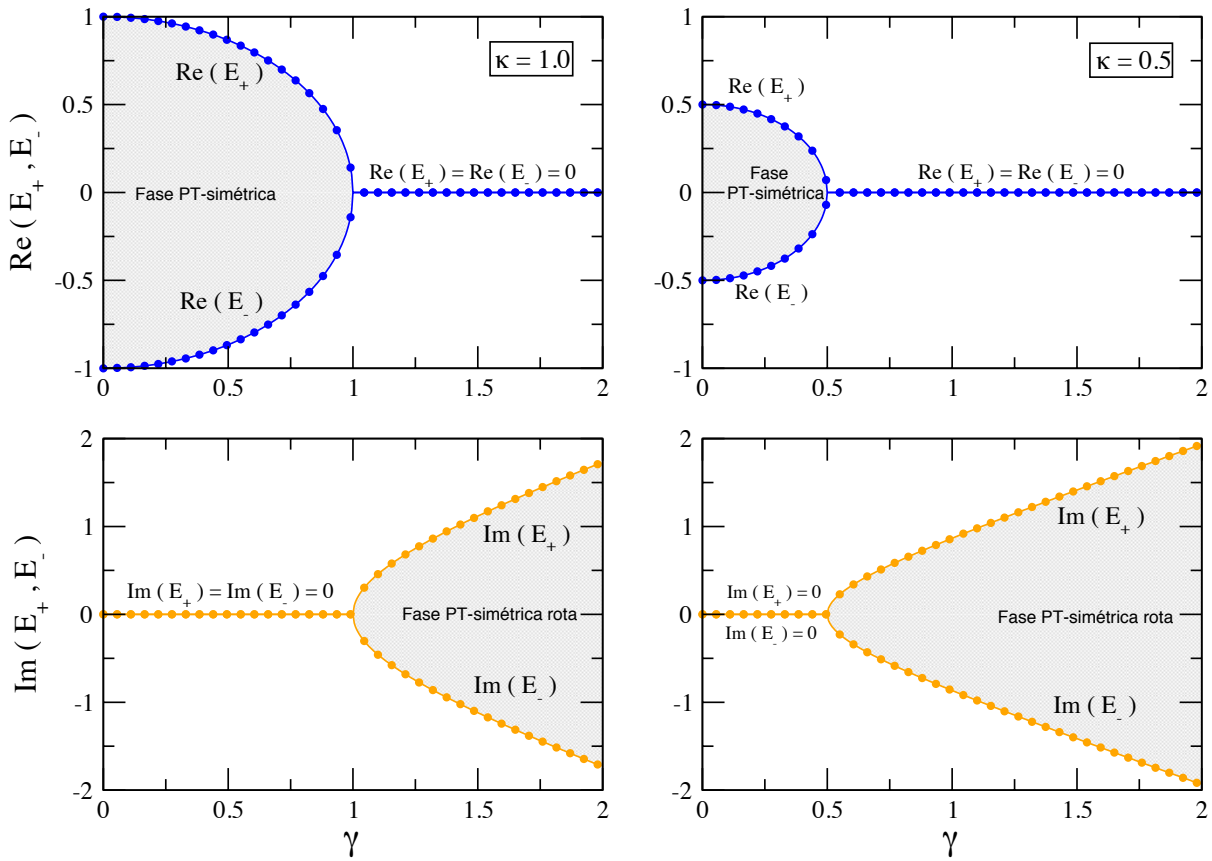
$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} i\gamma - E_{\pm} & \kappa \\ \kappa & -i\gamma - E_{\pm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow \begin{cases} a(i\gamma - E_{\pm}) + b\kappa = 0 \\ a\kappa + b(-i\gamma - E_{\pm}) = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Para el caso  $\kappa^2 > \gamma^2$ , tomamos la primera ecuación y se introduce  $\sin(\alpha) = \frac{\gamma}{\kappa}$

$$\begin{aligned}
a \left( i\gamma - \sqrt{\kappa^2 - \gamma^2} \right) + b\kappa &= 0 \\
a \left[ i\gamma - \kappa\sqrt{1 - (\gamma/\kappa)^2} \right] + b\kappa &= 0 \\
a \left[ i\gamma - \kappa\sqrt{1 - \sin^2(\varphi)} \right] + b\kappa &= 0 \\
a \left[ i\kappa\sin(\varphi) - \kappa\cos(\varphi) \right] + b\kappa &= 0 \\
-a\kappa e^{-i\varphi} + b\kappa &= 0 \\
\Rightarrow b &= a e^{-i\varphi}
\end{aligned}$$

Por lo que los eigenvectores correspondientes de  $\mathcal{H}$  tienen la forma  $\begin{pmatrix} a \\ a e^{-i\varphi} \end{pmatrix}$ . Normalizando encontramos que,

$$\begin{aligned}
a &= \frac{1}{\sqrt{1 + e^{-i2\varphi}}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 + 2\cos^2(\varphi) - 1 - i2\sin(\varphi)\cos(\varphi)}}
\end{aligned}$$



**Fig. 2.1.:** Paneles superiores: parte real de los eigenvalores  $E_{\pm}$  en función del parámetro  $\gamma$ . Para  $\gamma < \kappa$  nos encontramos en la fase  $\mathcal{PT}$ -simétrica donde los eigenvalores corresponden a valores reales. En el punto excepcional donde se rompe espontáneamente la simetría  $\gamma = \kappa$  los eigenvalores se vuelven degenerados. Paneles inferiores: parte imaginaria de los eigenvalores  $E_{\pm}$  en función del parámetro  $\gamma$ , siendo  $\gamma > \kappa$  donde la simetría  $\mathcal{PT}$  se ha roto y los eigenvalores son imaginarios.

$$a = \frac{1}{\sqrt{2} \cos(\varphi) e^{-i\varphi/2}}.$$

Dejando finalmente la expresión para el eigenvector,

$$|\beta_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2} \cos \varphi} \begin{pmatrix} e^{i\frac{\varphi}{2}} \\ e^{-i\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix}.$$

De una manera similar se obtiene la expresión para el segundo eigenvector  $|\beta_2\rangle$ .

Los eigenvalores de (2.11) están dados por  $E_{\pm} = \varepsilon_{\pm} + i\Gamma_{\pm} = \pm\sqrt{\kappa^2 - \gamma^2}$  (ver sección gris anterior para detalle de cálculos). Para  $\gamma < \kappa$  el sistema se encuentra en la fase  $\mathcal{PT}$  simétrica donde los eigenvalores son puramente reales. A medida que  $\gamma$  incrementa su valor hasta alcanzar el valor de  $\kappa$ , los dos eigenvalores convergen hasta que se vuelven degenerados en el umbral de ruptura de la simetría  $\mathcal{PT}$ . Esto se conoce como *punto excepcional* ( $\gamma = \kappa = \gamma_{\mathcal{PT}}$ ). Al pasar este valor crítico, es

decir, para  $\gamma_{\mathcal{PT}} > \kappa$ , los eigenvalores son parcial o completamente complejos debido a que el sistema se encuentra en la fase  $\mathcal{PT}$  simétrica rota. Estos eigenvalores, para  $\kappa = 1$  y  $0.5$ , se muestran como función del parámetro de no-hermiticidad,  $\gamma$ , en la figura 2.1. Para ambos casos se tienen eigenvalores reales para  $\gamma < \kappa$  y a medida que  $\gamma$  crece, los eigenvalores empiezan a converger hasta alcanzar su respectivo punto crítico ( $\gamma = 1, 0.5$ ) donde el espectro se vuelve degenerado y así se da paso al rompimiento espontáneo de la fase  $\mathcal{PT}$  simétrica, teniendo como resultado energías imaginarias. Como se mencionó anteriormente, los eigenvectores pueden ser o no compartidos por los operadores  $\mathcal{H}$  y  $\mathcal{PT}$  dependiendo del parámetro crítico  $\gamma_{\mathcal{PT}}$ . Los eigenvectores para el ejemplo de este dímero tienen la forma:

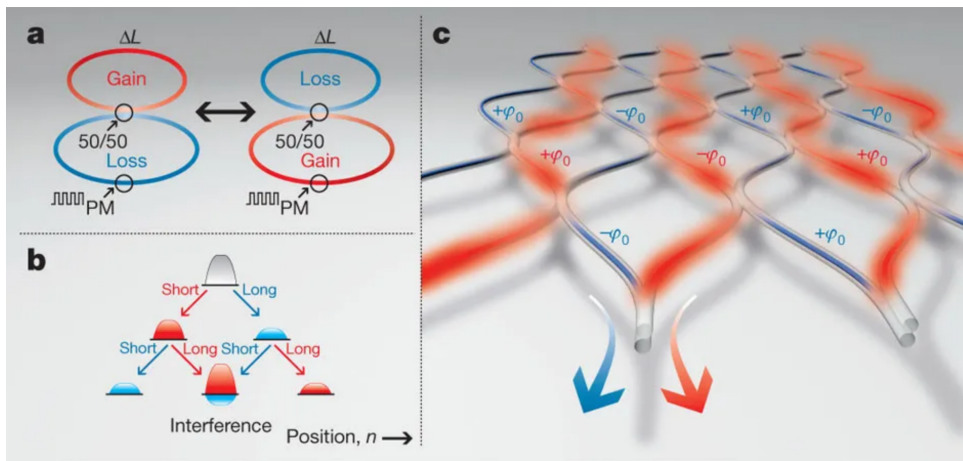
$$|\beta_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2 \cos \varphi}} \begin{pmatrix} e^{i\frac{\varphi}{2}} \\ e^{-i\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix}, \quad |\beta_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2 \cos \varphi}} \begin{pmatrix} i e^{-i\frac{\varphi}{2}} \\ -i e^{i\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix}, \quad (2.13)$$

donde  $\gamma/\kappa = \sin(\varphi)$  (en el recuadro gris se muestran los cálculos completos). Debido al comportamiento de la función seno, podemos tener la posibilidad de que  $\sin(\varphi) < 1$ , lo que implica que  $\varphi$  sea real y por consecuencia  $\beta_1$  y  $\beta_2$  son eigenvectores también del operador  $\mathcal{PT}$ ; ya que al cambiar las filas (operación  $\mathcal{P}$ ) y tomar el complejo conjugado (operación  $\mathcal{T}$ ) se multiplican  $|\beta_1\rangle$  y  $|\beta_2\rangle$  por un factor  $\pm 1$ . Por el contrario, cuando  $\sin(\varphi) > 1$ , tenemos que  $\varphi$  es imaginario y en este caso los eigenvectores dejan de ser invariantes bajo  $\mathcal{PT}$ , dejando de ser eigenfunciones del operador  $\mathcal{PT}$ . Por último, el caso  $\gamma_{\mathcal{PT}} = \kappa$ , implica que  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  donde el sistema tiene degeneración tanto en los eigenvalores como en los eigenvectores. Este notable colapso del espacio de Hilbert resulta ser una firma de la ruptura de la simetría  $\mathcal{PT}$  y es característico de los sistemas con singularidades de punto excepcional (PE).

## 2.2 Aplicaciones de la simetría $\mathcal{PT}$

Una de las aplicaciones más importantes de sistemas  $\mathcal{PT}$  simétricos, surge en la teoría de difracción discreta de ondas electromagnéticas. Esta teoría es de gran importancia en la física experimental actual ya que provee un banco de pruebas para examinar procesos y propiedades de sistemas cuánticos discretos, abarcando fenómenos como oscilaciones de Bloch [63, 71], tunelamiento de Landau-Zenner [88], localización de Anderson [48], solitones discretos [24], oscilaciones de Rabi [80] y localización dinámica [86], por mencionar algunos. Las ecuaciones que describen la dinámica de la luz en estas estructuras son idénticas (en el límite lineal) a las ecuaciones que describen la evolución temporal de un electrón en una red bajo la aproximación de enlace fuerte [24], esto es, un conjunto de ecuaciones de Schrödinger discretas. Lo que permite esta dualidad entre mecánica cuántica y óptica es la naturaleza isomórfica de las ecuaciones de onda consideradas. Particularmente arreglos de guías de onda acopladas han sido utilizados experimentalmente para observar efectos relacionados con la simetría  $\mathcal{PT}$ . En donde por ejemplo se ha demostrado la dinámica no recíproca (alterando la simetría izquierda-derecha) y el rompimiento espontáneo de simetría  $\mathcal{PT}$  [73].

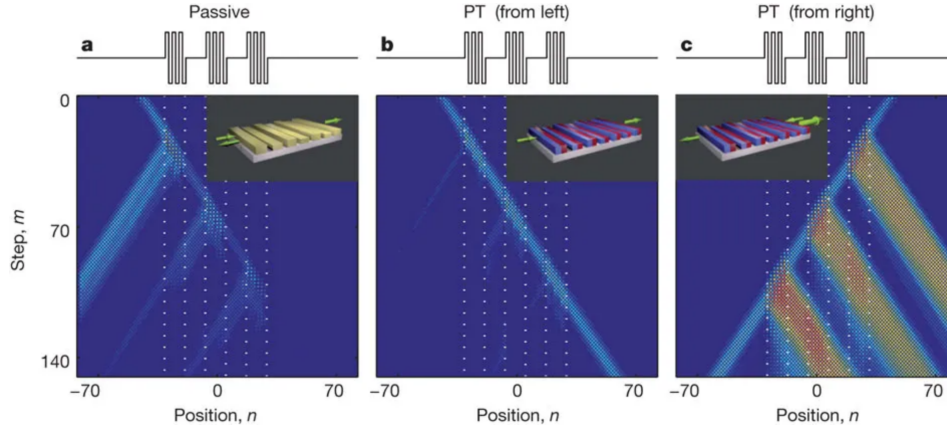
Si bien todos los resultados teóricos de la simetría  $\mathcal{PT}$  son ciertamente revolucionarios, la realización práctica de estos arreglos fotónicos de ganancia y pérdida de donde pueden observarse intrigantes



**Fig. 2.2.:** Redes de fibras ópticas  $\mathcal{PT}$  simétricas. a) Dos bucles de fibras ópticas acopladas cambian periódicamente entre ganancia y pérdida. b) Evolución de los pulsos en las redes en donde se indica la propagación a través de los bucles cortos y largos. c) Red  $\mathcal{PT}$  simétrica equivalente. Los canales de ganancia (rojos) y canales de pérdida (azules) están posicionados anti simétricamente y están acoplados periódicamente. Figura tomada de la referencia [73].

fenómenos previamente mencionados, pasan por diferentes obstáculos. Hasta hace poco, la simetría  $\mathcal{PT}$  solo se había demostrado en sistemas elementales que constaban de dos bloques de construcción acoplados. La primera realización de la simetría  $\mathcal{PT}$  fue lograda por Guo et al. en 2009 [38] al acoplar una guía de onda óptica de alta pérdida a una de baja pérdida. Traducir estas ideas a redes  $\mathcal{PT}$  simétricas de mayor escala (figura 2.2) [73] se ha visto obstaculizada por los estrictos requisitos impuestos por la relación de simetría  $n(x) = n^*(-x)$ . En un medio óptico continuo, la matriz  $\mathcal{PT}$  debe cumplir simultáneamente tres condiciones: la parte real del índice de refracción o del potencial tiene que ser exactamente simétrica. Además, los canales discretos de dicha red tienen que estar muy cerca el uno del otro para proporcionar una tasa suficiente de acoplamiento evanescente entre los vecinos cercanos y por último debe presentar una distribución antisimétrica de absorción y amplificación óptica sin ninguna inhomogeneidad significativa. Si bien estos requisitos estrictos hacen que la realización de redes  $\mathcal{PT}$  simétricas continuas sea algo desafiante, pueden eludirse con elegancia en redes ópticas [62, 73]. En las figura 2.2 y 2.3, se muestra el estudio experimental de la dinámica de modos ópticos en redes  $\mathcal{PT}$  simétricas, es decir, combina una distribución de ganancia y pérdida en cantidades iguales con una simetría de reflexión izquierda-derecha exacta de todas las demás características de la guía de ondas. Los cambios de fase  $\pm\varphi_0$  proporcionan la modulación necesaria en la parte real del potencial óptico. En estos montajes experimentales se reporta la observación experimental de fenómenos como la invisibilidad unidireccional, oscilaciones de Bloch, etc. También se demuestra la realización de configuraciones de gran utilidad para el estudio de los procesos de dispersión a través de estructuras discretas (ver figura 2.3). Estos desarrollos experimentales otorgan mucha importancia al análisis de sistemas  $\mathcal{PT}$  simétricos tipo enlace fuerte, así como también de sistemas no hermíticos sin simetrías particulares.

En un arreglo de guías de ondas acopladas débilmente, la luz salta de sitio en sitio mediante tunelamiento óptico, alterando profundamente las características de difracción del sistema [24, 36]. Aquí existen dos enfoques complementarios para el estudio de estas redes fotónicas: la descripción de modos acoplados, que considera a la red como un conjunto de guías de ondas acopladas, mientras que el



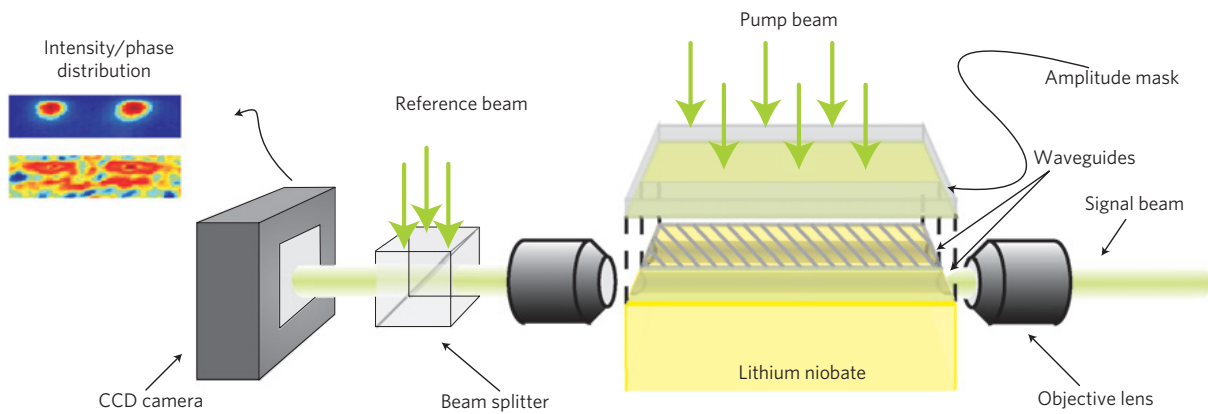
**Fig. 2.3.:** Observación experimental de la invisibilidad unidireccional para dispersores  $\mathcal{PT}$  simétricos. Se muestran los casos de dispersores pasivos  $\mathcal{PT}$  simétricos con pulsos incidentes desde la izquierda y pulsos incidentes desde la derecha, respectivamente. Figura tomada de la referencia [73].

análisis de Floquet-Bloch trata a la red como un tipo general de estructura periódica. El interés en estos sistemas radica en la posible manipulación de la difracción discreta, en comparación con sistemas continuos, donde la magnitud de difracción está determinada por la longitud de onda. En el primer enfoque, la propagación de ondas electromagnéticas en el arreglo de guías de ondas, está caracterizada principalmente por el acoplamiento debido al traslape entre los modos fundamentales de las guías de ondas vecinas. Por lo tanto se puede modelar efectivamente el proceso de intercambio de energía en el sistema mediante el uso de la teoría de modos acoplados [23, 43, 82], la cual se conoce también con el nombre de *aproximación de enlace fuerte*. En este caso la propagación de ondas electromagnéticas en el arreglo unidimensional puede ser descrito por un conjunto de ecuaciones discretas para las amplitudes de los modos  $E_n(z)$ ,

$$i \frac{dE_n}{dz} + \rho_n E_n + \kappa_{n,n+1} E_{n+1} + \kappa_{n,n-1} E_{n-1} = 0, \quad (2.14)$$

donde  $\rho_n$  representa al perfil del índice de refracción y  $\kappa$  a la magnitud de acoplamiento entre guías de ondas vecinas, la cual será dependiente de la frecuencia. En esta ecuación el primer término describe la propagación a lo largo de la dirección  $z$ ; la cual en el caso cuántico corresponde a la dinámica del sistema, mientras que el tercer y cuarto término representan al acoplamiento entre guías de ondas vecinas. A diferencia del caso cuántico, la ecuación (2.14) puede ser utilizada para cualquier periodicidad en el índice de refracción (ver por ejemplo las referencias [27, 73]), y por lo tanto del acoplamiento entre guías de ondas vecinas no está restringido al caso simétrico.

Otra realización experimental, la cual fue investigada por C. E. Rüter et al [75], siendo la primera estructura  $\mathcal{PT}$  elemental con ganancia y pérdida óptica equilibrada realizada experimentalmente, muestra propiedades características de los sistemas  $\mathcal{PT}$  simétricos como oscilaciones de intensidad/potencia y propagación de luz no recíproca. La configuración experimental (Fig. 2.4) se basa en un láser variable de  $Ar^+$  que se hace incidir sobre guías de ondas de niobato de litio ( $LiNbO_3$ )



**Fig. 2.4.:** Montaje experimental del dímero óptico  $\mathcal{PT}$  simétrico descrito por la ecuación (2.11). La figura muestra un rayo láser de  $Ar^+$  que está acoplado a los brazos de la estructura fabricada sobre un sustrato fotorrefractivo de  $LiNbO_3$ . La ganancia es experimentada por la guía de onda 1 y la máscara de amplitud provoca que el haz de la guía de onda 2 sólo experimente pérdida. La cámara CCD al final monitorea la intensidad y las fases en la salida. La figura se tomó de la referencia [75].

dopadas con hierro, Fe. La razón principal por la cual usaron este material no lineal y fotorrefractivo, es porque permite ganancias y pérdidas dentro de la estructura. La pérdida aparece dentro de la estructura debido a la excitación óptica de los electrones de Fe, mientras que la ganancia óptica se introduce a través de la mezcla no lineal de dos ondas entre un láser externo sobre una de las guías de ondas y el haz de entrada del láser de  $Ar^+$  [44]. Esto se logra con una máscara que cubre una de las guías de ondas de la muestra mientras que la otra permanece descubierta y sobre ella se incide el láser adicional, de modo que la amplificación se proporciona solo a una guía de ondas. El hamiltoniano de este sistema corresponde a la ecuación (2.11) donde ahora  $v_0$  corresponde a la parte real del índice de refracción, mientras que  $\gamma$  representa a la parte imaginaria y  $\kappa$  es el acoplamiento entre las dos guías de ondas. Cada una de las guías de ondas admite un modo de propagación. Una de estas guías de ondas está siendo bombeada ópticamente para proporcionar ganancia,  $\gamma_G$ , para la luz guiada, mientras que la guía de ondas vecina experimenta una cantidad igual de pérdida, denominada  $\gamma_L$ . Los resultados de la dinámica del haz para este experimento empatan con las predicciones teóricas discutidas brevemente en la sección 2.1.2. Para monitorear la intensidad de salida y la relación de fase entre los dos canales (usando la interferencia con una onda plana de referencia), se usa una cámara con un dispositivo de carga acoplada (CCD). Sus resultados demuestran oscilaciones no recíprocas en la intensidad del haz de salida, así como la característica ruptura de simetría espontánea de las estructuras  $\mathcal{PT}$  [75]. Estas características espectrales analizadas anteriormente no son inherentes sólo a los sistemas ópticos o cuánticos. De hecho, la universalidad de la simetría  $\mathcal{PT}$  se ve corroborada aún más en [76] donde los autores logran demostrar teórica y experimental las mismas características de la simetría  $\mathcal{PT}$  en circuitos RLC activos descritos por ecuaciones de frecuencia Liouvillianas completamente diferentes a las usadas en el campo de la óptica.

## 2.3 Matriz de Transferencia y Matriz de Dispersión

El método de la matriz de transferencia es un método simple para el análisis estático y dinámico de la propagación de ondas a través de un sistema unidimensional. Nos permite expresar la relación entre las amplitudes de la onda a la derecha de la muestra en términos de las amplitudes de la onda a la izquierda de la muestra en forma matricial [25, 49, 58]. Esta técnica se puede aplicar a cualquier problema de ondas, entre los más comunes tenemos ondas de partículas cuánticas, como los electrones [3, 7, 45, 46], ondas electromagnéticas [58, 70, 95], acústicas [1, 6, 84] y elásticas [31, 81].

Partamos del problema más elemental, la propagación de una partícula cuántica, un electrón, en presencia de un potencial unidimensional  $V(x)$  localizado. La ecuación que rige este modelo es la ecuación de Schrödinger,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x)}{\partial x^2} + [V(x) - E] \Psi(x) = 0. \quad (2.15)$$

La energía del electrón esta dada por  $E$  y  $\Psi(x)$  es la función de onda. El potencial unidimensional será diferente de cero sólo en una cierta región del espacio,

$$V(x) = \begin{cases} V(x) & \text{for } 0 \leq x \leq \ell \\ 0 & \text{for } x < 0 \text{ and } x > \ell. \end{cases} \quad (2.16)$$

El electrón se acerca desde la izquierda o derecha del potencial  $V(x)$ , siendo dispersado por él. Cuando se habla de dispersión, se refiere a que el electrón se refleja o se transmite a través de la muestra. Es posible medir las amplitudes de transmisión y reflexión,  $t$  y  $r$ , respectivamente (las cuales definiremos más adelante) y a partir de ellas podemos extraer información sobre las propiedades físicas del sistema representado por el potencial  $V(x)$ . La forma de resolver este problema es suponer que la ecuación de Schrödinger fuera de la región en donde el potencial es diferente de cero es conocida y que se puede escribir como una superposición de ondas planas,

$$\begin{aligned} \Psi_L(x) &= \Psi_L^+(x) + \Psi_L^-(x), & x \leq 0, \\ \Psi_R(x) &= \Psi_R^+(x) + \Psi_R^-(x), & x \geq \ell. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Los subíndices  $L$  y  $R$  indican la posición de la partícula con respecto a la región potencial, ya sea a la izquierda o a la derecha del potencial respectivamente. Los superíndices  $+$ ( $-$ ) determinan la dirección de propagación: el signo  $+$  significa que el electrón se propaga en la dirección positiva (de izquierda a derecha) y el signo  $-$  significa que la partícula se propaga en dirección negativa (de derecha a izquierda). De esta forma,  $\Psi_L^+(x)$  es la función de onda del electrón a la izquierda del potencial, propagándose hacia la derecha, también conocida como onda incidente. Por otro lado,  $\Psi_L^-(x)$  representa la función de onda del electrón que se propaga alejándose del potencial hacia el lado izquierdo.

Usualmente las componentes de la función de onda 2.17 se expresan como sigue,

$$\begin{aligned}\Psi_L^+(x) &= Ae^{+ikx}, & \Psi_L^-(x) &= Be^{-ikx}, \\ \Psi_R^+(x) &= Ce^{+ikx}, & \Psi_R^-(x) &= De^{-ikx}.\end{aligned}\quad (2.18)$$

El vector de onda es representado por  $k$ , él cual está relacionado con la energía mediante la relación de dispersión,  $E = E(k)$ . Con ella se determinan las propiedades físicas del electrón en la región fuera del potencial ( $x < 0$  y  $x > \ell$ ), región que denotaremos como guías de ondas perfectas (las ondas planas pasan por estas regiones). La forma de garantizar la propagación de la onda plana, es que ambas guías de ondas sean invariantes ante translaciones. Por simplicidad ambas guías de ondas se consideran como espacio vacío, haciendo que la relación de dispersión sea la de una partícula libre,  $E = \hbar^2 k^2 / 2m$ .

Para la solución de la ecuación de Schrödinger (2.15), se considera que la función de onda debe ser continua respecto a las posiciones, al igual que la primera derivada de la misma,  $\partial\Psi/\partial x$ . Estos requerimientos de continuidad en las fronteras de la región de interacción del potencial  $V(x)$ , se expresan analíticamente como,

$$\Psi_L(x = 0^-) = \Phi(x = 0^+), \quad \left. \frac{\partial \Psi_L(x)}{\partial x} \right|_{x=0^-} = \left. \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x} \right|_{x=0^+} \quad (2.19)$$

para el lado derecho, mientras que para la frontera a la izquierda de la region de interacción, quedan como,

$$\Psi_R(x = \ell^+) = \Phi(x = \ell^-), \quad \left. \frac{\partial \Psi_R(x)}{\partial x} \right|_{x=\ell^+} = \left. \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x} \right|_{x=\ell^-} . \quad (2.20)$$

$\Phi(x)$  es la solución de la ecuación de Schrödinger dentro de la región del potencial  $0 \leq x \leq \ell$ . Y por lo general,  $\Phi(x)$  no puede expresarse como una simple superposición de ondas que se están propagando dentro del potencial.

Al resolver la ecuacion Schrödinger (2.4), en principio, se encuentran soluciones explícitas para cualquier posición  $x$ , incluyendo a la región de dispersión. No obstante, esto es posible en casos muy especiales, ya que para una forma general del potencial  $V(x)$  no es posible solucionar analíticamente la ecuación de Schrödinger. Sin embargo, en muchos casos es suficiente conocer solamente la forma de la función de onda fuera de la región del potencial. Dado que la función de onda consiste de una superposición de ondas planas, el problema se reduce a estimar los coeficientes  $A - D$  definidos en la ecuación (2.18). Esto se logra al conocer la parte derecha de las cuatro ecuaciones (2.19) y (2.20). De esta manera la función de onda fuera de la region de interacción está completamente determinada por los cuatro parámetros que describen las propiedades de dispersion del potencial.

Las relaciones lineales que existen entre las ondas entrantes y salientes, se expresan en general como,

$$\begin{pmatrix} \Psi_L^-(x=0) \\ \Psi_R^+(x=\ell) \end{pmatrix} = \mathbf{S} \begin{pmatrix} \Psi_L^+(x=0) \\ \Psi_R^-(x=\ell) \end{pmatrix}, \quad (2.21)$$

donde el operador  $\mathbf{S}$  es conocido como la *matriz de dispersión*,

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

Esta matriz relaciona a las ondas salientes con las ondas entrantes al potencial, y sus elementos caracterizan completamente las propiedades de dispersión de  $V(x)$ .

En la misma forma en que se definió a la matriz de dispersión podemos definir a la *matriz de transferencia*  $\mathbf{M}$ , mediante la relación,

$$\begin{pmatrix} \Psi_R^+(x=\ell) \\ \Psi_R^-(x=\ell) \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} \Psi_L^+(x=0) \\ \Psi_L^-(x=0) \end{pmatrix}. \quad (2.23)$$

La matriz  $\mathbf{M}$  expresa a los coeficientes de la función de onda en la frontera derecha de una muestra en términos de los coeficientes de la función de onda a la izquierda de la misma estructura, tal como lo muestra la ecuación (2.23). Si bien la representación en términos de la matriz de dispersión  $\mathbf{S}$  puede generalizarse fácilmente a los sistemas tridimensionales, el enfoque de la matriz de transferencia es más apropiado para el análisis de los sistemas unidimensionales, como es el caso del modelo que trataremos en este trabajo.

Una de las ventajas de estas matrices antes definidas es que guardan relación entre ellas, esta se obtiene comparando las ecuaciones (2.21) y (2.23). Así los elementos de la matriz de transferencia  $\mathbf{M}$ , en términos de los elementos de la matriz de dispersión se escriben como

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} S_{21} - \frac{S_{22}S_{11}}{S_{12}} & \frac{S_{22}}{S_{12}} \\ -\frac{S_{11}}{S_{12}} & \frac{1}{S_{12}} \end{pmatrix}. \quad (2.24)$$

Análogamente, podemos expresar a los elementos de la matriz  $\mathbf{S}$  en términos de los elementos de la matriz de transferencia de la siguiente forma

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} M_{11} - \frac{M_{12}M_{21}}{M_{22}} & \frac{M_{12}}{M_{22}} \\ -\frac{M_{21}}{M_{22}} & \frac{1}{M_{22}} \end{pmatrix}. \quad (2.25)$$

La matriz de dispersión  $\mathbf{S}$  contiene cuatro parámetros complejos. En general, esta matriz está completamente determinada por ocho parámetros reales. Cabe mencionar que al resolver un problema físico dado, podemos explotar sus simetrías físicas para reducir el número de parámetros independientes. Las simetrías como la conservación de corriente y la simetría de reversión temporal traen consigo importantes implicaciones para la matriz de dispersión.

La conservación de corriente implica que la matriz de dispersion es unitaria, es decir,

$$\mathbf{S}^\dagger \mathbf{S} = 1. \quad (2.26)$$

Una implicación de la ecuación anterior es,  $|\det \mathbf{S}| = 1$ . Mientras que la invarianza ante reversiones temporales implica,

$$\mathbf{S}^* \mathbf{S} = 1. \quad (2.27)$$

## 2.4 Amplitudes de Reflexión y Transmisión

Los elementos de la matriz de dispersión  $\mathbf{S}$  tienen un significado físico, el cual detallaremos en seguida. Retomando la configuración de dispersión previamente definida (Sección 2.3), consideremos una partícula aproximándose a la estructura desde la guía de ondas de la derecha, cuya función de onda se encuentra normalizada, i.e.  $|\Psi_R^-| = 1$ . Como ninguna partícula viene del lado izquierdo de la estructura, ya que así lo suponemos, tendremos  $\Psi_L^+ = 0$ . De la expresión (2.21), obtenemos que la onda transmitida  $\Psi_L^-$  esta dada por,

$$\Psi_L^-(x=0) = S_{12} \Psi_R^-(x=\ell), \quad (2.28)$$

mientras que la onda reflejada  $\Psi_L^+$  está dada por

$$\Psi_R^+(x=\ell) = S_{22} \Psi_R^-(x=\ell). \quad (2.29)$$

De las ecuaciones previas, el elemento  $S_{12}$  es la amplitud de transmisión  $t$  y el elemento  $S_{22}$  corresponde a la amplitud de reflexión  $r$ :

$$t = S_{22}, \quad r = S_{12}. \quad (2.30)$$

Si bien ahora consideramos la dispersión de la partícula proveniente del lado izquierdo del potencial, obtenemos  $r' = S_{11}$  como la amplitud de reflexión, y  $t' = S_{21}$  como la amplitud de transmisión, para el proceso de izquierda a derecha. Finalmente, en términos de amplitudes de transmisión y reflexión,

podemos escribir la matriz de dispersión  $\mathbf{S}$  en la forma

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} r' & t \\ t' & r \end{pmatrix}. \quad (2.31)$$

Tomando ventaja de la relación que existe entre la matriz de dispersión  $\mathbf{S}$  y la matriz de transferencia  $\mathbf{M}$ , expresada en la ecuación (2.24), podemos escribir a la matriz de transferencia en la forma,

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} t' - \frac{rr'}{t} & \frac{r}{t} \\ -\frac{r'}{t} & \frac{1}{t} \end{pmatrix}. \quad (2.32)$$

Los coeficientes de transmisión y reflexión se definen, respectivamente, como la probabilidad de que la partícula que estamos mandando a través de alguna guía de ondas se transmita o se refleje:

$$\begin{aligned} T_R = |t|^2 &= \frac{1}{|\mathbf{M}_{22}|^2}, & T_L = |t'|^2 &= \left| \mathbf{M}_{11} - \frac{\mathbf{M}_{12}\mathbf{M}_{21}}{\mathbf{M}_{22}} \right|^2, \\ R_R = |r|^2 &= \left| \frac{\mathbf{M}_{12}}{\mathbf{M}_{22}} \right|^2, & R_L = |r'|^2 &= \left| \frac{\mathbf{M}_{21}}{\mathbf{M}_{22}} \right|^2. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Usando las propiedades de simetría de la matriz de dispersión, (2.26), podemos llegar a demostrar que las entradas de la matriz de dispersión satisfacen,

$$|t|^2 + |r|^2 = 1, \quad |t'|^2 + |r'|^2 = 1. \quad (2.34)$$

La interpretación física de las ecuaciones (2.34) es simple. En el caso donde la muestra no contiene pérdidas ni ganancias, el electrón puede ser reflejado o transmitido a través de la muestra. Cabe mencionar que otras de las relaciones que satisfacen estas entradas son,

$$|t| = |t'| \quad \text{y} \quad |r| = |r'|. \quad (2.35)$$

En el caso en que el sistema además de conservar la densidad de corriente también posea simetría ante reversiones temporales, se tiene

$$\det \mathbf{M} = 1. \quad (2.36)$$

La propiedad mostrada previamente (ec. 2.36) para la matriz de transferencia, no es exclusiva de sistemas que además de conservar la densidad de probabilidad también son invariantes ante la operación de reversión temporal. En efecto como se mostrará en secciones posteriores, para sistemas que poseen efectos de absorción, amplificación o bien una combinación de ambos (como es el caso de sistemas con simetría  $\mathcal{PT}$ ), las matrices de transferencia cumplen con dicha propiedad, incluso cuando estos no poseen las simetrías antes mencionadas.

## 2.5 Definiciones alternativas de la matriz de dispersión

La matriz de dispersión relaciona a las ondas que viajan hacia la región de interacción (ondas entrantes) con las que se alejan de ella (ondas salientes). La forma de cuantificar al operador de dispersión es mediante una matriz cuadrada  $2 \times 2$  representada por  $\mathbf{S}$  (ec. (2.31)) que conecta a las amplitudes  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$ . Pero claramente, esto puede hacerse de cuatro formas diferentes, es decir,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \Psi_R^+ \\ \Psi_L^- \end{pmatrix} &= \mathbf{S}_1 \begin{pmatrix} \Psi_L^+ \\ \Psi_R^- \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} \Psi_L^- \\ \Psi_R^+ \end{pmatrix} &= \mathbf{S}_2 \begin{pmatrix} \Psi_L^+ \\ \Psi_R^- \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \Psi_R^+ \\ \Psi_L^- \end{pmatrix} &= \mathbf{S}_3 \begin{pmatrix} \Psi_R^- \\ \Psi_L^+ \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} \Psi_L^- \\ \Psi_R^+ \end{pmatrix} &= \mathbf{S}_4 \begin{pmatrix} \Psi_R^- \\ \Psi_L^+ \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Cada una de las ecuaciones anteriores, corresponde a una convención diferente para definir la matriz  $\mathbf{S}$  en una dimensión. Es fácil ver que,

$$\mathbf{S}_2 = \sigma_1 \mathbf{S}_1, \quad \mathbf{S}_3 = \mathbf{S}_1 \sigma_1, \quad \mathbf{S}_4 = \sigma_1 \mathbf{S}_1 \sigma_1. \quad (2.38)$$

donde  $\sigma_1$  es la primera matriz de Pauli,  $\sigma_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Cada una de las matrices de dispersión mostradas en (2.37) pueden ser expresadas en términos de las amplitudes de reflexión y transmisión. Siguiendo el formalismo mostrado en la sección 2.4 para la obtención de (2.31), podemos obtener que,

$$\mathbf{S}_1 = \begin{pmatrix} t' & r \\ r' & t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_2 = \begin{pmatrix} r' & t \\ t' & r \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_3 = \begin{pmatrix} r & t' \\ t & r' \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_4 = \begin{pmatrix} t & r' \\ r & t' \end{pmatrix}. \quad (2.39)$$

De acuerdo con las ecuaciones (2.39), podemos usar cualquiera de las matrices dadas allí,  $\mathbf{S}_1$ ,  $\mathbf{S}_2$ ,  $\mathbf{S}_3$  y  $\mathbf{S}_4$  para codificar la información sobre las propiedades de dispersión del sistema. Por lo tanto, son físicamente equivalentes. Adoptamos la convención de identificar la matriz  $\mathbf{S}$  con  $\mathbf{S}_2$  obtenida en la sección 2.4, dada por la ecuación (2.31). Más adelante (capítulo 4) se tratará la diferencia entre dos de las matrices definidas en (2.39), con el fin de explorar la diferencia que se obtiene de seguir dos definiciones diferentes de la matriz de dispersión y las implicaciones que conlleva. Tanto la matriz de transferencia  $\mathbf{M}$  como la matriz  $\mathbf{S}$  contienen información completa sobre los datos de dispersión, pero a diferencia de

la matriz de transferencia, la matriz  $\mathbf{S}$  no obedece a una regla de composición que es bastante útil para el estudio de sistemas unidimensionales. Una ventaja de la matriz  $\mathbf{S}$  es la simplicidad que presenta al aplicarse a sistemas en dimensiones superiores.

## 2.6 Ley de composición de la matriz de transferencia

El formalismo de la matriz de transferencia aplicado a una cadena unidimensional, se aplica mediante la llamada ley de composición que cumplen estas matrices. En nuestro caso se refiere a la multiplicación de matrices de transferencia de cada dímero individual que compone a la estructura, de esta forma se obtiene una matriz de transferencia total que describe al sistema. Para explicar esta propiedad, empezamos tomando la ecuación de Schrödinger, (2.61), la cual puede reescribirse en la forma matricial,

$$\begin{pmatrix} \psi_{n+1} \\ \Psi_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E - \varepsilon_n & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_n \\ \Psi_{n-1} \end{pmatrix} = \mathcal{M}_n \begin{pmatrix} \psi_n \\ \Psi_{n-1} \end{pmatrix}. \quad (2.40)$$

En donde hemos considerado a los acoplamientos entre sitios como iguales a  $\nu$ , y además se ha considerado el escalamiento de los parámetros:  $E/\nu \rightarrow E$  y  $\varepsilon_n/\nu \rightarrow \varepsilon_n$ . Notamos que la forma de la expresión (2.40), considera a la matriz  $\mathcal{M}_n$ , como un tipo de matriz de transferencia. Sin embargo esta difiere de la definición de matriz de transferencia usada en secciones anteriores. En efecto, el operador en (2.40), establece una relación entre los vectores cuyos componentes expresan el valor de la función de onda en dos sitios adyacentes. Para derivar a la matriz de transferencia, para ondas planas moviéndose hacia la derecha e izquierda, en un sitio dado  $n$ , debemos expresar a los vectores en la ecuación (2.40) en términos de ondas planas, esto es

$$\psi_n = Ae^{ink} + Be^{-ink}. \quad (2.41)$$

Puede verificarse fácilmente que los vectores en la ecuación (2.40), pueden ser expresados en la forma [69]

$$\begin{pmatrix} \psi_n \\ \psi_{n-1} \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} Ae^{i kn} \\ Be^{-i kn} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} \psi_{n+1} \\ \psi_n \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} Ae^{i (n+1) k} \\ Be^{-i (n+1) k} \end{pmatrix}. \quad (2.42)$$

En donde la matriz  $Q$  y su inversa están dadas respectivamente por,

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{-ik} & e^{ik} \end{pmatrix}, \quad Q^{-1} = \frac{1}{2i \operatorname{sen}(k)} \begin{pmatrix} e^{ik} & -1 \\ -e^{-ik} & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.43)$$

Sustituyendo las ecuaciones anteriores en la ecuación (2.40) se obtiene

$$\begin{pmatrix} Ae^{i(n+1)k} \\ Be^{-i(n+1)k} \end{pmatrix} = Q^{-1} \mathcal{M}_n Q \begin{pmatrix} Ae^{in k} \\ Be^{-in k} \end{pmatrix} = M_n \begin{pmatrix} Ae^{in k} \\ Be^{-in k} \end{pmatrix}. \quad (2.44)$$

En donde  $M_n$ , es la matriz de transferencia, definida por,

$$M_n = Q^{-1} \mathcal{M}_n Q = Q^{-1} \begin{pmatrix} E - \varepsilon_n & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} Q. \quad (2.45)$$

Es importante notar que, a partir de la definición (2.45), y usando el hecho de que [61],

$$\det(M_n) = \det(Q^{-1}) \cdot \det(\mathcal{M}_n) \cdot \det(Q), \quad (2.46)$$

podemos establecer que independientemente de la forma del potencial, en la aproximación de enlace fuerte tendremos  $\det(M_n) = 1$  y por lo tanto  $t' = t$  (ver ecuación (2.32)). Ahora consideramos un sistema en donde, para los sitios  $n \leq 0$  y  $n > N$ , se tiene  $\varepsilon_n = 0$ , mientras que en los sitios  $n = 0 \dots 2N$  el potencial  $\varepsilon_n$  puede tomar cualquier forma arbitraria. Como podemos notar el potencial está localizado en una región del espacio, la cual está conectada a guías de ondas perfectas, las cuales, debido al desvanecimiento del potencial, soportan la propagación de ondas planas; esto hace que sea posible el estudio de la dispersión en esta configuración. Asumimos que en la región a la derecha del potencial, existe una superposición de ondas planas propagándose de izquierda a derecha y viceversa, lo cual sirve para modelar una partícula incidente desde la derecha del potencial, así como también la reflexión de la misma. A la izquierda de la región de interacción, consideramos la existencia, solamente, de una onda plana propagándose hacia la izquierda, es decir una onda saliente, lo cual implica que en esta región existe sólo una onda transmitida después del proceso de dispersión. De esta forma podemos establecer las condiciones iniciales para el estado de dispersión como  $\psi_{-1} = e^{+ik}$  y  $\psi_0 = 1$ ; en donde  $k$  es el número de onda correspondiente a un modelo de enlace fuerte perfecto ( $\varepsilon_n = 0$ ), el cual se encuentra asociado a la energía mediante la relación de dispersión  $E = 2 \cos k$  (ver ecuación (2.58)). Podemos hacer uso de la forma matricial de la ecuación de Schrödinger (2.40), para expresar la función de onda en el extremo derecho de la estructura,  $n = N$  y  $n = N + 1$ , en términos de las condiciones iniciales, de la siguiente forma

$$\begin{pmatrix} \psi_{N+1} \\ \psi_N \end{pmatrix} = \mathcal{M}_N \mathcal{M}_{N-1} \dots \mathcal{M}_1 \mathcal{M}_0 \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_{-1} \end{pmatrix} = \mathcal{M}^{(N+1)} \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_{-1} \end{pmatrix}. \quad (2.47)$$

Multiplicando ambos lados de esta ecuación por la matriz  $Q^{-1}$  y con la ayuda de la relación,

$$\begin{pmatrix} Ae^{i(n+1)k} \\ Be^{-i(n+1)k} \end{pmatrix} = Q^{-1} \begin{pmatrix} \psi_{n+1} \\ \psi_n \end{pmatrix} = \frac{1}{2i \operatorname{sen} k} \begin{pmatrix} e^{ik}\psi_{n+2} - \psi_{n+1} \\ -e^{ik}\psi_{n+2} + \psi_{n+1} \end{pmatrix}, \quad (2.48)$$

la cual sigue de la ecuación (2.42), podemos obtener,

$$\begin{pmatrix} e^{ik}\psi_{N+1} - \psi_N \\ -e^{-ik}\psi_{N+1} + \psi_N \end{pmatrix} = \mathbf{M}_{(N+1)} \begin{pmatrix} e^{ik}\psi_0 - \psi_{-1} \\ -e^{-ik}\psi_0 + \psi_{-1} \end{pmatrix}. \quad (2.49)$$

El lado derecho de la ecuación anterior puede ser simplificado, si se consideran las condiciones iniciales antes mencionadas. De esta forma obtenemos

$$\begin{aligned} e^{ik}\psi_0 - \psi_{-1} &= 0 \\ -e^{-ik}\psi_0 + \psi_{-1} &= 2i \operatorname{sen} k. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Insertando estas expresiones en (2.49) podemos escribir

$$\frac{1}{2i \operatorname{sen} k} \begin{pmatrix} e^{ik}\psi_{N+1} - \psi_N \\ -e^{-ik}\psi_{N+1} + \psi_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{12}^{(N+1)} \\ M_{22}^{(N+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rt^{-1} \\ t^{-1} \end{pmatrix}. \quad (2.51)$$

De acuerdo a las ecuaciones (2.32) y (2.33), el coeficiente de transmisión está dado por  $T = |t|^2 = 1/|M_{22}^{(N+1)}|^2$ , por lo tanto tenemos que  $T$  se escribe en términos de los estados de dispersión en la forma [83]

$$T = \frac{4 \operatorname{sen}^2 k}{|e^{-ik}\psi_{N+1} - \psi_N|}. \quad (2.52)$$

De esta forma podemos ver que el proceso de iteración establecido por las ecuaciones (2.40) y (2.47), permiten calcular a los estados de dispersión y a partir de estos calcular al coeficiente de transmisión. Cabe remarcar que de acuerdo a la ecuación (2.32), la determinación de las amplitudes de probabilidad de los estados de dispersión no es totalmente necesaria, debido a que el cálculo de los componentes de la matriz de transferencia o dispersión, sería suficiente para la determinación de las propiedades de transporte. Sin embargo la ecuación (2.52), nos ayuda a entender la conexión entre la estructura de la función de onda, y las propiedades de transporte del sistema.

## 2.7 Modelo de Enlace Fuerte

Abordemos un modelo muy sencillo, el cual es de gran utilidad en el estudio, principalmente, del movimiento de electrones en una red cristalina unidimensional. Así pues consideraremos la dinámica de partículas cuánticas en una cadena formada por iones positivos con un espaciamiento periódico. Debido a la configuración de estos iones el electrón estará sujeto a la acción de un potencial periódico en el espacio de coordenadas. Este potencial puede ser visto como una secuencia de barreras, las cuales poseen máximos precisamente en la posición de los iones. En el caso cuando estas barreras son infinitas, como en el caso de barreras tipo delta, el estado base del sistema puede ser tomado como el orbital atómico para el ion ubicado en el  $n$ -ésimo sitio, al cual denotamos como,  $|n\rangle$ ; el cual será infinitamente degenerado. Considerando una situación más realista en donde las barreras no son infinitas, pero si lo suficientemente grandes, podemos esperar una interacción entre orbitales atómicos vecinos. En este caso los elementos diagonales del hamiltoniano del sistema,  $\mathcal{H}$ , en la base de orbitales atómicos  $|n\rangle$ , son todos iguales,

$$\langle n | \mathcal{H} | n \rangle = E_0, \quad (2.53)$$

cuya representación matricial no es diagonal. Considerando que la interacción entre orbitales atómicos se da solamente entre primeros vecinos, a lo cual se le conoce como *aproximación de enlace fuerte*, podemos establecer a los elementos fuera de la diagonal como,

$$\langle n | \mathcal{H} | n + 1 \rangle = \nu_{n+1}, \quad \langle n | \mathcal{H} | n - 1 \rangle = \nu_{n-1}. \quad (2.54)$$

De esta forma el hamiltoniano de enlace fuerte con interacción a primeros vecinos, tendrá la forma,

$$\mathcal{H} = \sum_n \left\{ \varepsilon_n |n\rangle \langle n| + \nu_{n,n+1} |n\rangle \langle n+1| + \nu_{n,n-1} |n\rangle \langle n-1| \right\}. \quad (2.55)$$

Cuyas variables generalmente son consideradas como reales. Esta expresión es válida siempre y cuando la base formada por los orbitales atómicos  $|n\rangle$ , sea ortogonal. De la expresión (2.55) es fácil ver que la representación matricial de  $\mathcal{H}$  será,

$$\langle m | \mathcal{H} | n \rangle = \varepsilon_n \delta_{mn} + \nu_{n,n+1} \delta_{m,n+1} + \nu_{n,n-1} \delta_{m,n-1}. \quad (2.56)$$

Es obvio que en esta aproximación no es de esperarse que los orbitales atómicos  $|n\rangle$  sean eigenfunciones del sistema, debido a que no son eigenfunciones del operador de traslación,  $\tau$ , incluso cuando estos son eigenfunciones de  $\mathcal{H}$ . Debido a esto construimos una combinación lineal de orbitales atómicos en la forma,

$$|\Psi\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{ikan} |n\rangle, \quad (2.57)$$

en donde  $k$  es un parámetro real con  $-\pi/a \leq k \leq \pi/a$  y " $a$ " denota la periodicidad del potencial. Notamos que este es un eigenestado simultaneo de  $\mathcal{H}$  y  $\tau$ , el cual esta parametrizado por  $k$ . Como podemos ver fácilmente al aplicar el operador  $\mathcal{H}$  a la expresión (2.57), de donde obtenemos,

$$\mathcal{H} |\Psi\rangle = (E_0 + 2\nu \cos(ka)) |\Psi\rangle, \quad (2.58)$$

en donde se han considerado acotamientos entre sitios simétricos; esto es,  $\nu_{n,n\pm 1} = \nu$ . De esta forma tenemos una distribución continua de eigenvalores de energía entre  $E_0 - 2\nu$  y  $E_0 + 2\nu$ .

Para entender el significado físico del parámetro  $k$ , aplicamos al operador de traslación  $\tau$  en la función de onda  $\langle x' | \Psi \rangle$ , obteniendo,

$$\langle x' | \tau(a) | \Psi \rangle = \langle x' - a | \Psi \rangle = e^{-ika} \langle x' | \Psi \rangle. \quad (2.59)$$

La ecuación (2.59) se resuelve mediante,

$$\langle x' | \Psi \rangle = e^{ikx'} u_k(x'), \quad (2.60)$$

con  $u_k(x')$  siendo una función con la misma periodicidad que el potencial. La ecuación (2.60) manifiesta al bien conocido teorema de Bloch. La ecuación de Schrödinger correspondiente al hamiltoniano (2.55), se obtiene fácilmente mediante el uso de la combinación lineal (2.57) y teniendo en cuenta la interacción restringida a primeros vecinos. Esta se escribe como,

$$i \frac{d\Psi_n}{dt} = \varepsilon_n \Psi_n + \nu_{n,n+1} \Psi_{n+1} + \nu_{n,n-1} \Psi_{n-1}, \quad (2.61)$$

en donde  $\Psi_n = \langle n | \Psi \rangle$ . Como es bien sabido la dependencia temporal de la solución de esta ecuación se puede escribir en la forma,  $\Psi_n = e^{-iEt} \psi_n$ . Usando esta expresión en la ecuación (2.61) obtenemos a la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo,

$$(E - \varepsilon_n) \psi_n = \nu_{n,n+1} \psi_{n+1} + \nu_{n,n-1} \psi_{n-1}. \quad (2.62)$$

Esta ecuación ha sido ampliamente usada, no solo para describir sólidos regulares unidimensionales [47, 50, 56], si no también, se puede demostrar la equivalencia de ésta con la ecuación que describe el movimiento de una cadena de osciladores en mecánica clásica, ver por ejemplo [28, 56]. La ecuación (2.61), también ha sido aplicada ampliamente al estudio de sistemas desordenados unidimensionales (ver

por ejemplo [26, 30, 45, 87] y las referencias ahí mencionadas), en donde ha sido de gran utilidad para establecer propiedades de localización en sistemas discretos, así como también facilitar el análisis de estos sistemas, particularmente, en la obtención de expresiones analíticas para la longitud de localización en diferentes puntos de la banda de energías (ver por ejemplo [42] y las referencias ahí mencionadas).

Como ya se mencionó, la ecuación (2.62) no es exclusivamente utilizada para el estudio del movimiento de un electrón en una cadena de iones regularmente espaciados. Debido a la naturaleza discreta de este modelo podemos establecer una ecuación del tipo (2.62) para cualquier potencial discreto. De esta forma consideramos primeramente una discretización del potencial y la función de onda en el espacio de coordenadas, dada por

$$V_n = V(x = n\Delta), \quad \psi_n = \Psi(x = n\Delta). \quad (2.63)$$

Para discretizar la ecuación de Schrödinger, utilizamos la forma aproximada de la definición de la segunda derivada parcial de la función de onda con respecto a la posición,

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \approx \frac{\Psi(x - \Delta) + \Psi(x + \Delta) - 2\Psi(x)}{\Delta^2} = \frac{\psi_{n+1} + \psi_{n-1} - 2\psi_n}{\Delta^2}. \quad (2.64)$$

Introduciendo las expresiones (2.63) y (2.64) en la ecuación independiente del tiempo (2.62), obtenemos

$$\psi_{n+1} + \psi_{n-1} = \left[ 2 + \frac{2m\Delta^2}{\hbar^2} (V_n - E) \right] \psi_n. \quad (2.65)$$

Implementando las siguientes sustituciones

$$\tilde{E} = 2 - \frac{2m\Delta^2}{\hbar^2} E, \quad \tilde{V}_n = \frac{2m\Delta^2}{\hbar^2} V_n, \quad (2.66)$$

la expresión (2.65) puede ser reescrita en la forma

$$\psi_{n+1} + \psi_{n-1} = (\tilde{E} + \tilde{V}_n) \psi_n. \quad (2.67)$$

Como podemos notar esta expresión es igual a aquella dada por el hamiltoniano de enlace fuerte (2.62); siempre y cuando se tengan en cuenta los correspondientes escalamientos en la energía y el potencial. También se debe notar que esta equivalencia es sólo para el caso con acoplamientos entre orbitales atómicos simétricos.

## 2.8 Antecedentes

## 2.8.1 Caso Simétrico

En trabajos previos [90], se hizo el análisis de una cadena unidimensional en la aproximación de amarre fuerte, el cual está descrito por el hamiltoniano estándar,

$$H_{mn} = \epsilon_n \delta_{mn} + \nu(\delta_{n,n+1} + \delta_{n,n-1}), \quad (2.68)$$

donde  $\nu$  es la amplitud de "salto" que conecta a los sitios cercanos, cuyo valor se fija igual a  $\nu = 1$ . El potencial en sitio, que por supuesto es imaginario,  $\epsilon_n$  se define de la siguiente manera

$$\epsilon_n = \begin{cases} -i\gamma & \text{para } n \text{ impar} \\ i\gamma & \text{para } n \text{ par} \end{cases}, \quad (2.69)$$

para  $n = 1, \dots, 2N$ , donde  $N$  representa el número total de celdas básicas. Se asume además que el modelo está unido a conductores semi-infinitos perfectos por los cuales puede entrar o salir una onda plana, en los cuales el potencial en sitio es cero, es decir, para los sitios  $n > 2N$  y  $n \leq 0$ . El parámetro  $\gamma > 0$  representa la pérdida (para  $n$  par) o la ganancia (para  $n$  impar). De esta forma se crea una cadena unidimensional con pérdida y ganancia de manera alternante y equilibrada, la cual pertenece a la clase de modelos  $\mathcal{PT}$ .

Mediante el enfoque de la matriz de transferencia, ellos encontraron la forma de relacionar las funciones de onda del extremo derecho de la estructura con las funciones de onda del extremo izquierdo incluyendo el acoplamiento que se tiene con los conductores semi-infinitos perfectos, obteniendo la matriz de transferencia total para su modelo

$$\begin{pmatrix} \psi_{2N+1} \\ \psi_{2N} \end{pmatrix} = M^{(N)} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_0 \end{pmatrix}; \quad M^{(N)} = Q^{-1} \mathcal{M}^{(N)} Q. \quad (2.70)$$

Las matrices  $Q$  y  $Q^{-1}$  son la representación matricial de una onda plana y su inversa, respectivamente, dadas por la ecuación (2.42). Las entradas de la matriz de transferencia total de este sistema tienen la forma,

$$\begin{aligned} M_{1,1}^{(N)} &= \frac{1}{\sin k \sin \mu} \{ \cos(2\mu N) \sin \mu \sin k - i \sin(2\mu N) [\cos \mu \cos k - \sin \beta] \} \\ M_{1,2}^{(N)} &= \frac{1}{\sin k \sin \mu} \{ i e^{ik} \sin(2\mu N) [\sin(\beta + k) - \cos \mu] \} \\ M_{2,1}^{(N)} &= \frac{1}{\sin k \sin \mu} \{ i e^{-ik} \sin(2\mu N) [\cos \mu - \sin(\beta - k)] \} \end{aligned}$$

$$M_{2,2}^{(N)} = \frac{1}{\sin k \sin \mu} \{ \cos(2\mu N) \sin \mu \sin k - i \sin(2\mu N) [\sin \beta - \cos \mu \cos k] \}. \quad (2.71)$$

Además obtuvieron la relación de dispersión para el sistema no acotado y con acoplamientos simétricos; ésta relaciona al índice tipo Bloch  $\mu$  que es el que se encuentra dentro de la estructura con la energía de la onda incidente  $E = 2 \cos k$ ,

$$4 \cos^2 \mu = E^2 + \gamma^2. \quad (2.72)$$

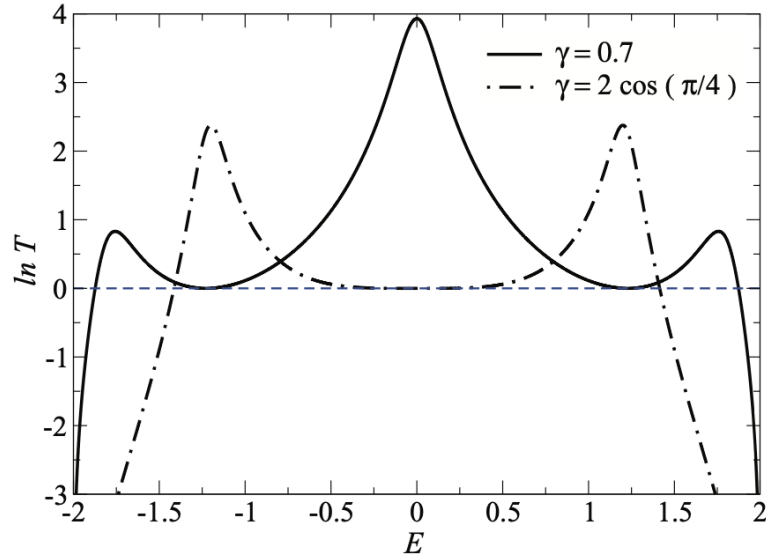
Donde  $\mu$  es un *índice tipo Bloch* que está dentro de la estructura. Además de la expresión (2.72), este parámetro  $\mu$  puede ser real, imaginario o cero dependiendo de los parámetros restantes que se involucran en la ecuación

$$\mu = \begin{cases} \text{real} & \text{para } E^2 + \gamma^2 < 4 \\ \text{cero} & \text{para } E^2 + \gamma^2 = 4 \\ \text{imaginario} & \text{para } E^2 + \gamma^2 > 4 \end{cases}. \quad (2.73)$$

Las propiedades de transporte para este modelo que llamamos *simétrico* por tener acoplamientos entre sitios constantes e iguales, pueden obtenerse mediante las relaciones (2.33). Mediante un poco de álgebra se llega a las expresiones finales:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{1 - \frac{\gamma^2}{4 \sin^2 k \cos^2 \mu} \sin^2(2\mu N)}, \\ R_R &= \frac{[\cos \mu - \sin(\beta + k)]^2}{(\sin \beta - \cos \mu \cos k)^2 + [\cot(2\mu N) \sin \mu \sin k]^2}, \\ R_L &= \frac{[\cos \mu - \sin(\beta - k)]^2}{(\sin \beta - \cos \mu \cos k)^2 + [\cot(2\mu N) \sin \mu \sin k]^2}. \end{aligned} \quad (2.74)$$

A partir de la ecuación (2.74) podemos notar que, el coeficiente de transmisión  $T$  es igual a la unidad para  $N \approx n\pi/2\mu$  donde  $n$  es cualquier número entero, la relación de aproximación se debe a que  $N$  es un valor entero. La figura 2.5 muestra el valor del  $\ln T$  en la banda de energía definida por las guías de ondas perfectas; considerando un tamaño fijo de la región de interacción de  $N = 2$ . Esta figura describe perfectamente las principales propiedades del coeficiente de transmisión, contenidas en la ecuación (2.74). En primer lugar podemos observar que cerca de los bordes de la banda,  $|E| = 2$ , tenemos un desvanecimiento del coeficiente de transmisión. A partir de la ecuación de dispersión podemos obtener los valores de la energía que conllevan a una transmisión perfecta, estos están definidos por la expresión,



**Fig. 2.5.:**  $\ln T$  en función de la energía para  $N = 2$  con  $\gamma = 0.7$  y  $\gamma = 2 \cos(\pi/4)$  para el modelo simétrico. En la región alrededor de  $E = 0$  podemos notar que  $T \approx 1$ . Imagen tomada de la referencia [90].

$$E_r = \pm \sqrt{a \cos^2\left(\frac{m\pi}{2N}\right) - \gamma^2}, \quad m = 0, 1, \dots, N. \quad (2.75)$$

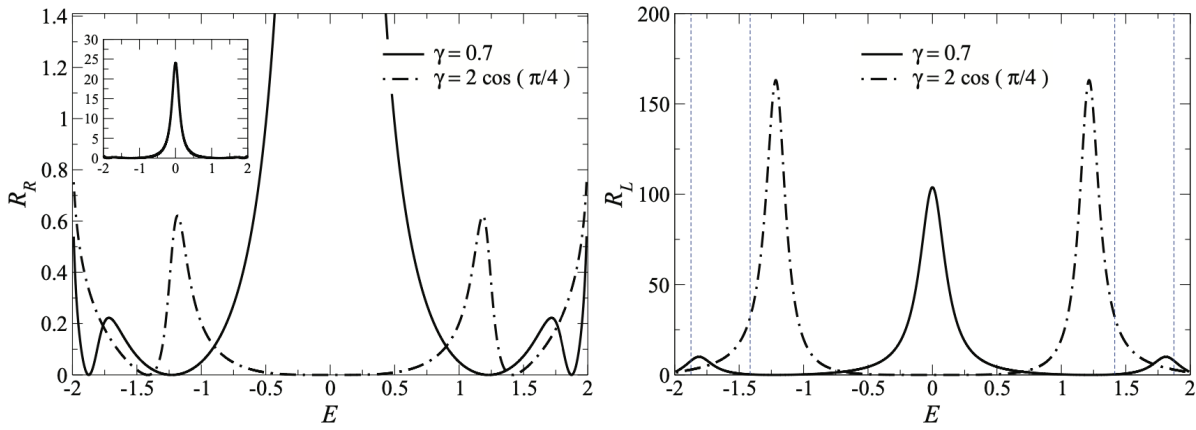
Debido a que  $E_r$  es un parámetro estrictamente real, el número de valores de la energía en donde  $T = 1$  está acotado por la condición  $4 \cos^2\left(\frac{m\pi}{2N}\right) > \gamma^2$ . Hacemos notar que el par de valores  $E_r$  correspondientes a  $m = 0$ , indican el valor de la energía en donde el logaritmo natural del coeficiente de transmisión cambia de signo. De esta forma podemos deducir que el aumento en la magnitud de pérdida y ganancia en el sistema conlleva a una reducción en el número de valores de la energía con transmisión perfecta; específicamente en el centro de la banda  $E = 0$  donde se suprime la resonancia.

La primera resonancia emergente para  $m = 0$  corresponde a  $\mu = 0$ . Como se mencionó en el párrafo anterior, si además fijamos el valor de la energía obtenemos una relación que define el valor crítico de  $\gamma$ ,

$$\gamma_{cr} = \sqrt{4 - E^2}. \quad (2.76)$$

De tal manera que si  $\gamma < \gamma_{cr}$ ,  $\mu$  es un parámetro real y por lo tanto la dependencia de  $\ln T$  corresponde a una función periódica de  $N$  y el coeficiente de transmisión es mayor que uno. Para  $\gamma > \gamma_{cr}$ , el valor de  $\mu$  es imaginario, haciendo que el coeficiente  $T$  decrezca al incrementar el tamaño de  $N$ . Por último el coeficiente de transmisión desaparece para cualquier  $N$  si  $\gamma = \gamma_{cr}$ .

Por otro lado tenemos a las expresiones de los coeficientes de reflexión dados por (2.74). Lo más importante que se debe notar de estas expresiones, es la no reciprocidad en la reflexión; esto es  $R_R \neq R_L$ . Esta no reciprocidad en la reflexión se da a pesar de la reciprocidad en la transmisión. A partir de las



**Fig. 2.6.:** Coeficientes de reflexión derecha e izquierda en función de la energía  $E$  para  $N = 2$  con  $\gamma = 0.7$  y  $\gamma = 2 \cos(\pi/4)$ . Imagen tomada de la referencia [90].

expresiones analíticas se puede mostrar que cuando  $\gamma = 0$  se anulan ambos coeficientes de reflexión,  $R_R = R_L = 0$ , lo cual es el resultado esperado para una estructura perfecta.

Ahora procedemos con el estudio del comportamiento de los coeficientes de reflexión como función de los parámetros del sistema en los casos cuando  $\gamma$  es menor, igual y mayor que el valor crítico  $\gamma_{cr}$  definido en la ecuación (2.76). Los coeficientes de reflexión serán funciones periódicas de  $N$  cuando  $\gamma < \gamma_{cr}$  y por lo tanto  $\mu$  es un parámetro real. Los tamaños del sistema para los cuales  $R_{R,L} = 0$  están determinados por la condición  $N = n\pi/2\mu$ , esta condición corresponde también a una transmisión perfecta. Es importante destacar que la condición en el tamaño del sistema para el desvanecimiento de las reflexiones puede no ser cumplida exactamente debido a que  $N$  toma valores enteros. En el caso cuando  $\gamma > \gamma_{cr}$ ,  $\mu$  es un parámetro imaginario ( $\mu = i\phi$ ) y por lo tanto los coeficientes de reflexión obtendrán un valor constante para  $N = 1/\phi$ , este valor es del mismo orden que el tamaño crítico. El comportamiento de los coeficientes de reflexión en el caso cuando  $\gamma = \gamma_{cr}$  no puede ser analizado a partir de las ecuaciones (2.74), debido a que en este caso la matriz  $M$  es no diagonalizable. Sin embargo podemos analizar el caso cuando  $\gamma \approx \gamma_{cr}$ , a partir de la ecuación (2.76),  $\gamma \approx 2 \sin k$ , y por lo tanto es posible demostrar que  $R_R \approx 0$  y  $R_L \propto N^2$ . Este efecto se denominó *reflectividad unidireccional* en la referencia [24], donde los autores han estudiado el modelo  $\mathcal{PT}$  simétrico con barreras de ancho finito.

El comportamiento de la reflexión como función de la energía de las ondas incidentes  $E = 2 \cos k$ , se muestra en las figura 2.6. Podemos deducir de las ecuaciones (2.74) que cuando  $|E| \rightarrow 2$  ambos coeficientes de reflexión tienden al mismo valor; esto es  $R_{R,L} \rightarrow 1$ . Debido a que la dependencia en la energía difiere para ambos coeficientes, estos diferirán también en el número de puntos en donde son iguales a cero. En efecto,  $R_R$  será igual a cero en los valores de energía correspondientes a una transmisión perfecta, dados en la ecuación (2.75). Mientras que  $R_L$  será igual a cero en los puntos de transmisión perfecta sólo cuando  $E^2 + \gamma^2 < 4$ , como se puede observar claramente comparando las figuras 2.6.

Para el valor de la energía donde  $E^2 + \gamma^2 = 4$  tenemos, a partir de las ecuaciones (2.74), que  $R_R$  es igual a cero, mientras que  $R_L$  poseerá un valor diferente de los valores de resonancia y de cero. Hacemos notar que cuando  $\gamma \neq 2 \cos(\frac{m\pi}{2N})$ , con  $m$  dado en la expresión (2.75), ambas reflexiones poseerán una resonancia en el centro de la banda al igual que la transmisión. Otro punto que es importante destacar se da cuando  $\gamma = 2 \cos(\frac{m\pi}{2N})$ ; para esta situación tendremos una transmisión perfecta en el centro de la banda y por lo tanto ambas reflexiones se desvanecerán en el mismo punto. Observando las figuras 2.5 y 2.6, podemos destacar que en una región relativamente grande alrededor del centro de la banda, la transmisión es perfecta y ambas reflexiones son cero, por lo tanto podemos manifestar que para esta región de frecuencias la estructura será invisible para ambas incidencias.



# Modelo de enlace fuerte $\mathcal{PT}$ -simétrico con acoplamientos diferentes entre sitios

En este capítulo nos enfocaremos en el problema de dispersión de ondas planas en un sistema unidimensional con aproximación a primeros vecinos, que además satisface la simetría de paridad e inversión temporal, mejor conocida como simetría  $\mathcal{PT}$ . El modelo que proponemos (Fig. 3.1) y que satisface las características antes mencionadas está formado por una cadena unidimensional de  $N$  iones (sitios) equidistantes con acoplamientos a primeros vecinos,  $\nu_{n,n\pm 1}$ , con  $n = 1, \dots, 2N$ . Este modelo está caracterizado por el hamiltoniano,

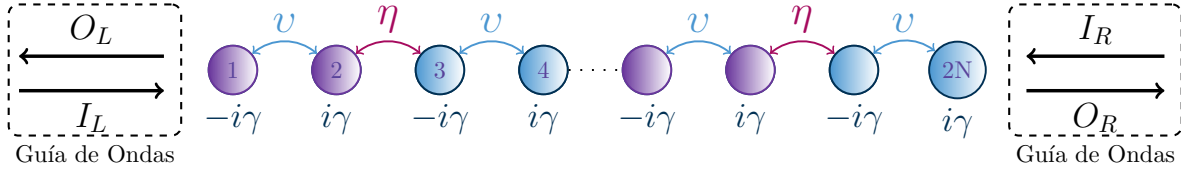
$$H = \sum_n \left\{ \varepsilon_n |n\rangle \langle n| + \nu_{n,n+1} |n\rangle \langle n+1| + \nu_{n,n-1} |n\rangle \langle n-1| \right\}. \quad (3.1)$$

Donde  $|n\rangle$  representa al orbital atómico,  $\varepsilon_n$  corresponde al valor del potencial en el  $n$ -ésimo sitio de la estructura con la forma

$$\varepsilon_n = (-1)^n i\gamma. \quad (3.2)$$

$\gamma > 0$  es un parámetro adimensional que controla el grado de no-hermeticidad que, dependiendo del signo que tome la energía de sitio, representa pérdida ( $\varepsilon_n < 0$ ) o ganancia ( $\varepsilon_n > 0$ ) en la cadena. El eje respecto del cual puede notarse que el modelo propuesto es  $\mathcal{PT}$  simétrico se encuentra justo a la mitad de la cadena, sin importar el número de dímeros que la conformen, esto se representa como  $\varepsilon_n = \varepsilon_{2N+1-n}^*$ . La magnitud del acoplamiento está dado por dos valores constantes dados de manera alternada entre los orbitales vecinos:

$$\nu_{n,n+1} = \begin{cases} v & \text{si } n \text{ impar} \\ \eta & \text{si } n \text{ par} \end{cases} \quad \nu_{n,n-1} = \begin{cases} v & \text{si } n \text{ par} \\ \eta & \text{si } n \text{ impar} \end{cases}. \quad (3.3)$$



**Fig. 3.1.:** Representación gráfica del sistema a estudiar. La imagen muestra una cadena unidimensional finita con acoplamientos entre dímeros dados por  $\eta$  y acoplamientos intra-dímeros  $v$ ; en cada sitio el potencial tiene la forma  $\varepsilon_n = (-1)^n i\gamma$ .

De esta forma se define una estructura a base de dímeros compuestos por dos sitios adyacentes con ganancia y pérdida; por lo que el acoplamiento intra dímeros estará denotado por  $v$ , mientras que el acoplamiento entre dos dímeros contiguos estará dado por  $\eta$ . Todos estos parámetros y características que se han definido previamente conforman a nuestra región de dispersión o lo que llamaremos, *sistema cerrado*. En el caso en que se acopla esta región previamente definida a dos guías de ondas, nos referiremos a él como un *sistema abierto*. De esta manera asumimos que una onda plana incide por una de las guías de ondas perfectas y la otra es ocupada solamente por la onda transmitida. El objetivo es estudiar las propiedades de transporte de el sistema abierto y comparar con el caso simétrico explicado en la sección 2.8.1, en el cual se asume un único valor constante para el acoplamiento dentro de la zona de dispersión ( $v = \eta = 1$ ).

### 3.1 Matriz de transferencia del sistema asimétrico

Para el análisis de propagación de ondas en sistemas unidimensionales se introduce el método de la matriz de transferencia, ya que expresa los coeficientes de la función de onda que se encuentran en el lado derecho de la muestra en términos de los coeficientes de la función de onda del lado izquierdo.

El sistema a estudiar es de longitud finita, de tipo enlace fuerte, donde el potencial tiene la forma (3.2) con acoplamientos dados por la expresión (3.3). Suponemos que en la región derecha del potencial, existe una superposición de ondas planas propagándose de izquierda a derecha y viceversa; lo cual nos sirve para modelar una partícula incidente desde la parte derecha del potencial, donde también se tiene la onda reflejada. A la izquierda de la región de interacción se considera solamente ondas planas propagándose, es decir la onda saliente; implicando que en esta región existen sólo ondas transmitidas después del proceso de dispersión. Es decir, dicho sistema se encuentra acoplado en ambos extremos a guías de ondas perfectas semi-infinitas por donde inciden y transmiten ondas (ver figura 3.1). Las guías tienen potenciales igual a cero en los sitios  $n \leq 0$  y  $n > 2N$  y con acoplamientos entre sitios iguales a uno. Para llegar a la expresión de la matriz de transferencia total del sistema partimos de la ecuación de Schrödinger aplicandola a un sólo dímero del sistema antes propuesto,

$$i \frac{d\Psi_n}{dt} = v\Psi_{n+1} + \eta\Psi_{n-1} - i\gamma\Psi_n, \quad i \frac{d\Psi_{n+1}}{dt} = \eta\Psi_{n+2} + v\Psi_n + i\gamma\Psi_{n+1}, \quad (3.4)$$

con  $\Psi_n = \langle n | \Psi \rangle$ . Este tipo de ecuaciones tiene soluciones de la forma,  $\Psi_n = e^{-iEt} \psi_n$ , donde  $E$  es la energía de la onda plana incidente dada por la relación  $E = 2 \cos(k)$  con un número de onda  $k$ . Haciendo uso de estas soluciones en (3.4), se llega al siguiente par de ecuaciones:

$$\begin{aligned} E e^{-iEt} \psi_n &= v e^{-iEt} \psi_{n+1} + \eta e^{-iEt} \psi_{n-1} - i\gamma e^{-iEt} \psi_n, \\ E e^{-iEt} \psi_{n+1} &= \eta e^{-iEt} \psi_{n+2} + v e^{-iEt} \psi_n + i\gamma e^{-iEt} \psi_{n+1}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Agrupando y multiplicando ambas ecuaciones por el coeficiente  $e^{iEt}$ , se obtiene

$$\begin{aligned} (E + i\gamma) \psi_n &= v\psi_{n+1} + \eta\psi_{n-1}, \\ (E - i\gamma) \psi_{n+1} &= v\psi_n + \eta\psi_{n+2}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Para que los cálculos y análisis posteriores se faciliten, dividiremos a las ecuaciones entre  $\eta$ ,

$$\begin{aligned} \left(\frac{E}{\eta} + i\frac{\gamma}{\eta}\right) \psi_n &= \frac{v}{\eta}\psi_{n+1} + \psi_{n-1}, \\ \left(\frac{E}{\eta} - i\frac{\gamma}{\eta}\right) \psi_{n+1} &= \frac{v}{\eta}\psi_n + \psi_{n+2}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Así hemos añadido un escalamiento de los parámetros del sistema dado por el acoplamiento entre dímeros contiguos:  $E \rightarrow E/\eta$ ,  $\gamma \rightarrow \gamma/\eta$ ,  $\alpha \rightarrow v/\eta$ . Por lo que finalmente la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo para un dímero del modelo propuesto tiene la forma,

$$\begin{aligned} (E + i\gamma) \psi_n &= \alpha\psi_{n+1} + \psi_{n-1}, \\ (E - i\gamma) \psi_{n+1} &= \alpha\psi_n + \psi_{n+2}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Dado que aplicaremos el método de matriz de transferencia para analizar las propiedades de transporte del modelo, llevaremos a la ecuación (3.8) a una forma matricial conveniente:

$$\begin{aligned} \psi_{n+1} &= \frac{(E + i\gamma)}{\alpha} \psi_n - \frac{1}{\alpha} \psi_{n-1}, \\ \psi_{n+2} &= -\alpha \psi_n + (E - i\gamma)\psi_{n+1}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

El lado derecho de la segunda ecuación del par de ecuaciones anterior, contiene un término en función de  $\psi_{n+1}$ ; para que ambas funciones de onda dependan de las mismas variables sustituimos la primera ecuación en la segunda, dando como resultado:

$$\psi_{n+1} = \frac{(E + i\gamma)}{\alpha} \psi_n - \frac{1}{\alpha} \psi_{n-1},$$

$$\psi_{n+2} = \left( \frac{(E+i\gamma)(E-i\gamma)}{\alpha} - \alpha \right) \psi_n - \frac{(E-i\gamma)}{\alpha} \psi_{n-1}. \quad (3.10)$$

El arreglo matricial de (3.10) es por lo tanto,

$$\begin{pmatrix} \psi_{n+2} \\ \psi_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (E-i\gamma) & -\alpha \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{E+i\gamma}{\alpha} & -\frac{1}{\alpha} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_n \\ \psi_{n-1} \end{pmatrix} = \mathcal{M} \begin{pmatrix} \psi_n \\ \psi_{n-1} \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

$\mathcal{M}$  representa la matriz de transferencia de una celda unitaria o de un dímero, la cual establece la relación entre los vectores cuyas componentes expresan el valor de la función de onda en dos sitios adyacentes. Además esta matriz puede expresarse en términos de sus eigenvectores y eigenvalores mediante la relación

$$\mathcal{M} = V\Lambda V^{-1}. \quad (3.12)$$

Esto se conoce en la literatura como *eigendecomposición*, donde  $\Lambda$  es la matriz diagonal formada por los eigenvalores de  $\mathcal{M}$ , mientras que  $V$  se forma con sus eigenvectores; ambas matrices se obtienen aplicando el proceso de diagonalización y tienen la forma

$$\lambda_{1,2} = e^{\pm i2\mu}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} e^{i2\mu} & 0 \\ 0 & e^{-i2\mu} \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

y

$$V = \begin{pmatrix} \frac{E-i\gamma}{1+\alpha\lambda_2} & \frac{E-i\gamma}{1+\alpha\lambda_1} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad V^{-1} = \frac{1}{2\alpha \operatorname{sen}(2\mu)} \begin{pmatrix} -(E+i\gamma) & -i(1+\alpha\lambda_2) \\ (E+i\gamma) & i(1+\alpha\lambda_1) \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

La utilidad y aplicabilidad del método de la matriz de transferencia radica en el hecho de que para los sistemas con multi-sitios o multicapa unidimensionales, la reflexión y la transmisión se representan como un producto de matrices, haciendo que las propiedades de una estructura extendida a  $N$  sitios o capas estén esencialmente determinadas por la  $N$ -ésima potencia de la matriz de transferencia de dos sitios  $\mathcal{M}$ , es decir,

$$\mathcal{M}^N = V \left( V^{-1} \mathcal{M} V \right)^N V^{-1}. \quad (3.15)$$

### Eigenvalores de $\mathcal{M}$

$$\begin{vmatrix} \frac{E^2 + \gamma^2}{\alpha} - \alpha - \lambda & -\frac{(E - i\gamma)}{\alpha} \\ \frac{(E + i\gamma)}{\alpha} & -\frac{1}{\alpha} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 + \left[ (1 - \alpha)^2 - E^2 - \gamma^2 + 2\alpha \right] \frac{\lambda}{\alpha} + 1 = 0$$

Usando la relación de dispersión  $4\alpha \cos^2(\mu) = E^2 + \gamma^2 - \delta^2$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lambda &= \frac{1}{2} \left[ (4 \cos^2 \mu - 2) \pm \sqrt{(4 \cos^2 \mu - 2)^2 - 4} \right] \\ &= (2 \cos^2 \mu - 1) \pm \frac{1}{2} \sqrt{[(4 \cos^2 \mu - 2) - 2][(4 \cos^2 \mu - 2) + 2]} \\ &= (2 \cos^2 \mu - 1) \pm \frac{1}{2} \sqrt{4 \cos^2 \mu (4 \cos^2 \mu - 4)} \\ &= (2 \cos^2 \mu - 1) \pm 2 \cos \mu \sqrt{\cos^2 \mu - 1} \\ &= (2(1 - \sin^2 \mu) - 1) \pm 2 \cos \mu \sqrt{-\sin^2 \mu} \\ &= (1 - 2 \sin^2 \mu) \pm i 2 \cos \mu \sin \mu \\ &= \cos(2\mu) \pm i \sin(2\mu) \end{aligned}$$

$$\boxed{\lambda = e^{\pm i 2\mu}}$$

La ecuación anterior es simplemente una extensión de (3.12) aplicada a toda nuestra cadena de  $N$  sitios. Las entradas de la matriz  $\mathcal{M}^N$  se obtienen mediante las ecuaciones (3.12) - (3.14), cuyas expresiones analíticas son

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{1,1}^N &= \frac{\sin(2N\mu) + \alpha \sin[2\mu(1+N)]}{\alpha \sin(2\mu)}, & \mathcal{M}_{1,2}^N &= -\frac{\sin(2N\mu)(E - i\gamma)}{\alpha \sin(2\mu)}, \\ \mathcal{M}_{2,2}^N &= \frac{-\sin(2N\mu) + \alpha \sin[2\mu(1-N)]}{\alpha \sin(2\mu)}, & \mathcal{M}_{2,1}^N &= -\frac{\sin(2N\mu)(E + i\gamma)}{\alpha \sin(2\mu)}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Nótese que la ecuaciones (3.16) representan al sistema cerrado que ha sido propuesto con anterioridad. Para obtener la matriz que representa al sistema abierto, i.e., el sistema acoplado en ambos extremos a dos guías de ondas, debe incluirse de forma matricial y posicionarlas a la derecha e izquierda de la matriz  $\mathcal{M}^N$ . Este acoplamiento se obtiene expresando a la guía de ondas,  $\psi_n$ , como la superposición de ondas planas que son, con número de onda  $k$ ,

$$\begin{pmatrix} \psi_{n+2} \\ \psi_{n+1} \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} Ae^{ik(n+2)} \\ Be^{-ik(n+2)} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} \psi_n \\ \psi_{n-1} \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} Ae^{ikn} \\ Be^{-ikn} \end{pmatrix}, \quad (3.17)$$

donde las matrices  $Q$  y  $Q^{-1}$  son

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{-ik} & e^{ik} \end{pmatrix}, \quad Q^{-1} = \frac{1}{2i\text{Sen}(k)} \begin{pmatrix} e^{ik} & -1 \\ -e^{-ik} & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.18)$$

Sustituyendo estas ecuaciones en la expresión (3.11), se llega a

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} Ae^{ik(n+2)} \\ Be^{-ik(n+2)} \end{pmatrix} &= Q^{-1} \mathcal{M}^N Q \begin{pmatrix} Ae^{ikn} \\ Be^{-ikn} \end{pmatrix} \\ &= M \begin{pmatrix} Ae^{ikn} \\ Be^{-ikn} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

$M$  es la matriz de transferencia total del sistema abierto que estamos considerando y cuyas entradas pueden obtenerse mediante un poco de álgebra, dando como resultado las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} M_{11} &= \cos(2N\mu) + i \frac{\text{sen}(2N\mu)}{\text{sen}(2\mu)} \left[ \frac{1}{\alpha} \text{sen}(2k) + \frac{3}{2} \cos(k) (F_+ + F_-) \right] \\ M_{12} &= ie^{ik} \frac{\text{sen}(2N\mu)}{\text{sen}(2\mu)} F_+(\gamma, \alpha, k) \\ M_{21} &= -ie^{-ik} \frac{\text{sen}(2N\mu)}{\text{sen}(2\mu)} F_-(\gamma, \alpha, k) \\ M_{22} &= \cos(2N\mu) - i \frac{\text{sen}(2N\mu)}{\text{sen}(2\mu)} \left[ \frac{1}{\alpha} \text{sen}(2k) + \frac{3}{2} \cos(k) (F_+ + F_-) \right]. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Los cálculos para llegar a las expresiones (3.20) en términos de esta función  $F_{\pm}$  se muestran a detalle en el apéndice A. Se introdujo una nueva función característica  $F_{\pm}(\gamma, \alpha, k)$ , la cual depende de los parámetros que controlan al modelo, con excepción de la longitud de la cadena, dicha función está dada por

$$F_{\pm}(\gamma, \alpha, k) = \frac{\pm\gamma \text{sen}(k) + \frac{1}{2}(\alpha^2 - \gamma^2 - 1)}{\alpha \text{sen}(k)}. \quad (3.21)$$

La matriz de transferencia puede brindarnos información sobre las propiedades de transporte del sistema en cuestión, en el capítulo anterior (Cap. 2) se mostró que las entradas de la matriz de transferencia pueden estar dadas en términos de las amplitudes de transmisión y reflexión dependiendo de la dirección de donde provenga la onda incidente. Tomaremos el caso siguiente,

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} t_L - \frac{r_L r_R}{t_R} & \frac{r_L}{t_R} \\ -\frac{r_R}{t_R} & \frac{1}{t_R} \end{pmatrix}. \quad (3.22)$$

Las cantidades que involucra la matriz de transferencia se definen como,

$$\begin{aligned} t_L &= \text{coeficiente de transmisión efectiva para incidencia izquierda,} \\ r_L &= \text{coeficiente de reflexión efectiva para incidencia izquierda,} \\ t_R &= \text{coeficiente de transmisión efectiva para incidencia derecha,} \\ r_R &= \text{coeficiente de reflexión efectiva para incidencia derecha.} \end{aligned} \quad (3.23)$$

En el caso en que la dispersión sea simétrica con respecto a la inversión temporal o la estructura sea recíproca, se puede lograr una reducción adicional en la matriz  $\mathbf{M}$  en función de la reciprocidad de los coeficientes de transmisión izquierdos y derechos,  $t_L = t_R$ . De esta manera la matriz de transferencia obtiene la forma

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} t - \frac{r_L r_R}{t} & \frac{r_L}{t} \\ -\frac{r_R}{t} & \frac{1}{t} \end{pmatrix}. \quad (3.24)$$

Una vez que tenemos ambas matrices, la matriz de celda unitaria  $\mathcal{M}$  y la matriz de transferencia total  $\mathbf{M}$ , es razonable asegurar que satisfacen las propiedades inherentes a las simetrías que exhibe el modelo, o las propias de una matriz de transferencia. Comencemos por notar que el determinante para ambas matrices es igual a la unidad como es de esperarse:

$$\begin{aligned} \det \mathcal{M} &= \mathcal{M}_{11}\mathcal{M}_{22} - \mathcal{M}_{12}\mathcal{M}_{21} = 1, \\ \det \mathbf{M} &= M_{11}M_{22} - M_{12}M_{21} = 1. \end{aligned} \quad (3.25)$$

## Determinante de $M$

Para obtener el determinante de la matriz de transferencia total usaremos la ecuación (3.19), para calcular los determinantes de las matrices individuales para finalmente multiplicarlos y obtener el deseado:

$$\det M = \det Q^{-1} \det \mathcal{M}^n \det Q.$$

Comenzando con las matrices  $Q^{-1}$  y  $Q$ , se obtiene,

$$\det Q = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{-ik} & e^{ik} \end{vmatrix} = e^{ik} - e^{-ik} = 2i \operatorname{sen}(k),$$

$$\det Q^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{e^{ik}}{2i \operatorname{sen}(k)} & \frac{-1}{2i \operatorname{sen}(k)} \\ -e^{-ik} & 1 \end{vmatrix} = \frac{e^{ik} - e^{-ik}}{(2i \operatorname{sen}(k))^2} = \frac{1}{2i \operatorname{sen}(k)},$$

$$\begin{aligned} \det \mathcal{M}^N &= \begin{vmatrix} \mathcal{M}_{11}^N & \mathcal{M}_{12}^N \\ \mathcal{M}_{21}^N & \mathcal{M}_{22}^N \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{\alpha^2 \operatorname{sen}^2(2\mu)} \left[ \left( \operatorname{sen}(2N\mu) + \alpha \operatorname{sen}(2\mu + 2N\mu) \right) \left( -\operatorname{sen}(2N\mu) + \alpha \operatorname{sen}(2\mu - 2N\mu) \right) \right. \\ &\quad \left. - (i\gamma - E)^2 \operatorname{sen}^2(2N\mu) \right] \\ &= \frac{1}{\alpha^2 \operatorname{sen}^2(2\mu)} \left[ -\operatorname{sen}^2(2N\mu) - 2\alpha \operatorname{sen}^2(2N\mu) \cos(2\mu) + \alpha^2 \operatorname{sen}^2(2\mu) \cos^2(2N\mu) \right. \\ &\quad \left. - \alpha^2 \cos^2(2\mu) \operatorname{sen}^2(2N\mu) + E^2 \operatorname{sen}^2(2N\mu) + \gamma^2 \operatorname{sen}^2(2N\mu) \right] \\ &= \frac{1}{\alpha^2 \operatorname{sen}^2(2\mu)} \left[ -\operatorname{sen}^2(2N\mu) - 2\alpha \operatorname{sen}^2(2N\mu) \cos(2\mu) + \alpha^2 \operatorname{sen}^2(2\mu) [1 - \operatorname{sen}^2(2N\mu)] \right. \\ &\quad \left. - \alpha^2 \cos^2(2\mu) \operatorname{sen}^2(2N\mu) + E^2 \operatorname{sen}^2(2N\mu) + \gamma^2 \operatorname{sen}^2(2N\mu) \right] \\ &= \frac{1}{\alpha^2 \operatorname{sen}^2(2\mu)} \left[ -\operatorname{sen}^2(2N\mu) - 2\alpha \operatorname{sen}^2(2N\mu) \cos(2\mu) + \alpha^2 \operatorname{sen}^2(2\mu) - \alpha^2 \operatorname{sen}^2(2N\mu) \right. \\ &\quad \left. + E^2 \operatorname{sen}^2(2N\mu) + \gamma^2 \operatorname{sen}^2(2N\mu) \right] \\ \det \mathcal{M}^N &= 1 + \frac{\operatorname{sen}^2(2N\mu)}{\alpha^2 \operatorname{sen}^2(2\mu)} \left[ -1 - 2\alpha \cos(2\mu) - \alpha^2 + E^2 + \gamma^2 \right] \\ &= 1 + \frac{\operatorname{sen}^2(2N\mu)}{\alpha^2 \operatorname{sen}^2(2\mu)} \left[ -1 - 4\alpha \cos^2(\mu) + 2\alpha - \alpha^2 + E^2 + \gamma^2 \right] \\ &= 1 + \frac{\operatorname{sen}^2(2N\mu)}{\alpha^2 \operatorname{sen}^2(2\mu)} \left[ -4\alpha \cos^2(\mu) + E^2 + \gamma^2 - (1 - \alpha)^2 \right] \\ &= 1 + \frac{\operatorname{sen}^2(2N\mu)}{\alpha^2 \operatorname{sen}^2(2\mu)} \left[ 4\alpha \cos^2(\mu) - 4\alpha \cos^2(\mu) \right] \\ \det \mathcal{M}^N &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \det \mathbf{M} &= \det Q^{-1} \det \mathcal{M}^n \det Q \\ &= \frac{1}{2i \operatorname{sen}(k)} (1)(2i \operatorname{sen}(k)) \\ \boxed{\det \mathbf{M} = 1} \end{aligned}$$

Explotando este hecho y debido a que nuestro sistema presenta simetría ante inversión temporal, observamos que las entradas de la matriz (3.23) obedece las siguientes relaciones

$$\mathbf{M}_{22} = \mathbf{M}_{11}^*, \quad \mathbf{M}_{21}(\gamma) = \mathbf{M}_{12}^*(-\gamma), \quad \operatorname{Re}[\mathbf{M}_{12}] = \operatorname{Re}[\mathbf{M}_{12}] \equiv 0. \quad (3.26)$$

Además los hamiltonianos que satisfacen la simetría  $\mathcal{PT}$  presentan estas propiedades singulares que difieren claramente de la que es distintiva de la simetría de inversión temporal debido al parámetro adicional de ganancia y pérdida  $\gamma$ . El hamiltoniano que rige el modelo que hemos propuesto no es hermítico, así que no satisface la conservación de densidad de corriente. De hecho por presentar la simetría  $\mathcal{PT}$ , este tipo de sistemas obedece una relación de conservación generalizada en términos de las amplitudes de transmitancia  $T = |t|^2$  y reflectancia  $R_{R,L} = |r_{R,L}|^2$ , formulada como

$$|1 - T|^2 = \sqrt{R_R R_L}. \quad (3.27)$$

Esta relación trae consigo tres implicaciones:

- Cuando  $T < 1$ , la ecuación (3.27) se reduce a  $T + \sqrt{R_R R_L} = 1$ . Donde el término  $R_R R_L$  reemplaza al convencional  $R$  en el caso de un sistema ortogonal. Se deduce que cuando  $T < 1$  la dispersión de una única onda incidente desde un lado de la estructura es *sub-unitaria* (se pierde flujo) y la dispersión desde el otro lado es *super-unitaria* (se gana flujo). Como excepción, puede ocurrir una degeneración accidental en la cual ambas reflexiones coinciden,  $R_R = R_L$ ; en cuyo caso la dispersión de ambos lados conserva el flujo. Estos casos especiales ocurren cuando un parámetro continuo como la frecuencia se varía para sistemas de  $\mathcal{PT}$  no triviales [37].
- Cuando  $T > 1$  la ecuación (3.27) se reduce a  $T - \sqrt{R_R R_L} = 1$ ; ocurre que los procesos de dispersión son super-unitarios. La degeneración de coeficientes de reflexión es posible en este régimen, dando como resultado la relación de conservación pseudounitaria usual,  $T - R = 1$ .
- Finalmente si  $T = 1$ , la ecuación (3.27) se reduce a  $\sqrt{R_R R_L} = 0$ , lo que implica que el producto de las reflexiones izquierda y derecha debe ser cero. Dicha operación se logra típicamente al no tener onda reflejada desde un lado de la estructura. A este efecto particular se le conoce como invisibilidad unidireccional, de la cual hablaremos más adelante.

## 3.2 Relación de dispersión

Derivemos la relación de dispersión del modelo. Si la función de onda se encuentra constrañida en el potencial periódico propuesto (3.2), aplicaremos condiciones de frontera mediante el teorema de Bloch,

$$\psi_{n-1} = e^{-2ik} \psi_{n+1}, \quad \psi_{n+2} = e^{2ik} \psi_n. \quad (3.28)$$

La periodicidad que se ha considerado es igual a dos. Típicamente al buscar una solución distinta de la trivial que resuelva el sistema de ecuaciones para un dímero (3.8), se obtiene la relación de dispersión

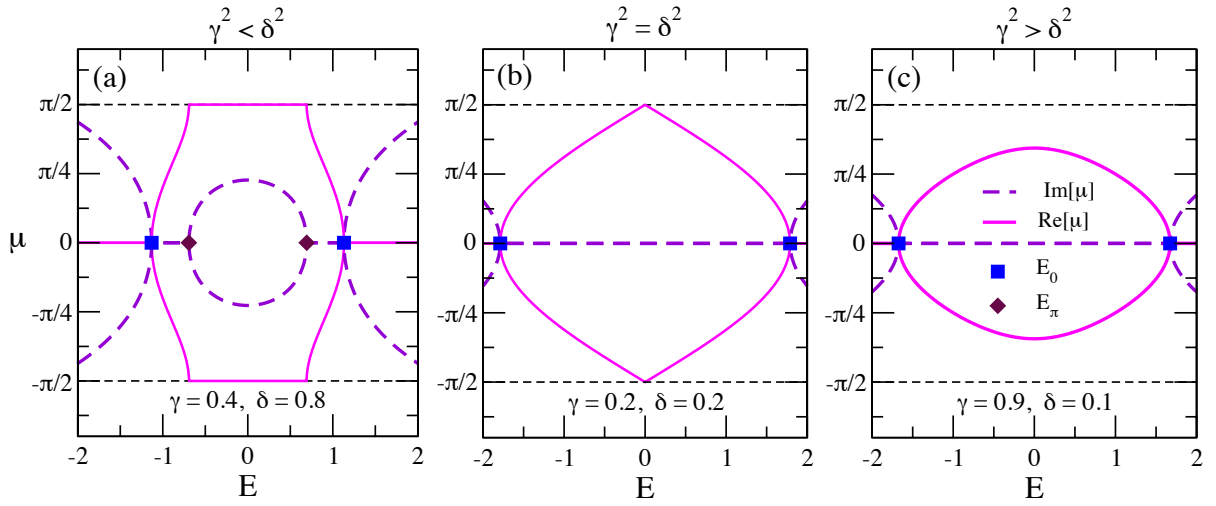
$$4\alpha \cos^2(\mu) = E^2 + \gamma^2 - \delta^2, \quad \delta = (1 - \alpha). \quad (3.29)$$

Esta expresión relaciona el número de onda  $k$  de la onda plana que incide por uno de los extremos de la cadena con el número de onda  $\mu$  dentro de la cadena. De esta manera podemos conocer el efecto que ejerce el potencial sobre la onda incidente. Se introduce un parámetro nuevo al sistema representado por  $\delta$ , el cual define el grado de asimetría; ya que toma un valor distinto de cero cuando los dos acoplamientos presentan valores diferentes entre sí,  $\delta \neq 0$ , implicando que el sistema presenta cierta asimetría. Por lo cual, cuando el valor de los dos acoplamientos es idéntico para toda la cadena,  $v = \eta$ . El parámetro de asimetría pasa a ser igual a cero, dando lugar a un sistema al cual nos referimos como *simétrico*.

A partir de la expresión (3.29), el número de onda  $\mu$  dentro de la zona de dispersión, puede tomar distintos valores dependiendo de los parámetros restantes que rigen al modelo; este número de onda puede ser real, complejo o imaginario. Dichas posibilidades se encuentran definidas a continuación:

$$\mu = \begin{cases} \text{complejo} & \text{para } E^2 + \gamma^2 < \delta^2 \\ \text{real} & \text{para } \delta^2 \leq E^2 + \gamma^2 \leq (1 + \alpha)^2 \\ \text{imaginario} & \text{para } E^2 + \gamma^2 > (1 + \alpha)^2 \end{cases}. \quad (3.30)$$

Empezando el análisis del comportamiento de la variable  $\mu$  para un sistema simétrico ( $\delta = 0$ ), se tiene que los únicos valores posibles que puede tomar son valores reales o imaginarios. Este hecho puede notarse a partir de la ecuación (3.30), ya que no es posible tener valores complejos, para ello se necesita que la suma de los cuadrados de la energía de la onda incidente y el parámetro que caracteriza al potencial  $\gamma$  sea menor a cero. Es entonces el cambio en la periodicidad del sistema el que induce la aparición de valores complejos para  $\mu$ , esto es con parte real e imaginaria diferentes de cero. El comportamiento del número de onda  $\mu$  en función de la energía de la onda incidente se presenta en la figura 3.2. Se ha dividido el comportamiento para tres casos diferentes, donde el parámetro de asimetría  $\delta$  se compara con el parámetro de no-hermeticidad  $\gamma$ , ya que puede ser menor, mayor o igual que él. Para los tres casos se puede notar que alrededor de los bordes de la banda de energía,  $E = \pm 2$ , el número de onda es



**Fig. 3.2.:** Número de onda  $\mu$  dentro de la zona de dispersión en función de la energía de las ondas incidentes  $E$ . Las líneas continuas corresponden a la parte real de  $\mu$ , mientras que las líneas punteadas representan la parte imaginaria. (a)  $\gamma = 0.4$ ,  $\alpha = 0.2$ ,  $\delta = 0.8$ ; (b)  $\gamma = 0.2$ ,  $\alpha = 0.8$ ,  $\delta = 0.2$  y (c)  $\gamma = 0.9$ ,  $\alpha = 0.9$  y  $\delta = 0.1$ . Los cuadrados azules etiquetan a los puntos excepcionales  $E_0$ , ellos caracterizan la transición de  $\mu$  al pasar de imaginario a puramente complejo y los diamantes corresponden a  $E_\pi$ , donde  $\mu$  pasa de real a complejo.

puramente imaginario. Este comportamiento también surge de igual manera para el caso simétrico. Estas regiones imaginarias se encuentran delimitadas por el rango de energía,  $E_0^2 < E^2 < 4$ , donde definimos a  $E_0$  como *punto excepcional* o *borde externo de la banda*, analíticamente estos puntos excepcionales están definidos mediante la relación

$$E_0^2 = (1 + \alpha)^2 - \gamma^2. \quad (3.31)$$

Aquí existe una degeneración para  $\mu = 0$ ; este hecho lo comprueba la ecuación (3.13) al sustituir el valor de  $\mu$  y encontrar que ambos eigenvalores coinciden en  $\lambda_{1,2} = 1$ . Dichos puntos definen la transición de fase de valores imaginarios a reales para  $\mu$  o viceversa. Existen también puntos excepcionales entre las regiones con valores complejos y reales de  $\mu$ , los cuales designamos como *bordes internos de la banda*, con degeneración de eigenvalores  $\lambda_{1,2} = -1$  y que serán etiquetados por  $E_\pi$ , cuya expresión analítica es

$$E_\pi^2 = \delta^2 - \gamma^2. \quad (3.32)$$

Un hecho interesante de la figura 3.2 es la desaparición de la región que contiene valores complejos de  $\mu$ , la cual se encuentra en el centro de la banda de energía. Esto puede explicarse mediante la ecuación que define los bordes internos de la banda, (3.32), a medida que el parámetro de no-hermeticidad alcanza al de asimetría, ambos puntos excepcionales comienzan a ser desplazados hacia el centro de la banda de energía ( $E_\pi = 0$ ). Por lo tanto podemos observar las propiedades de transporte distintivas de los puntos excepcionales en una amplia región de la banda de energía con magnitudes de ganancia y pérdida relativamente pequeñas; hecho que es imposible en el modelo simétrico, donde los puntos

excepcionales se encuentran restringidos a zonas cercanas a los bordes de banda para valores de  $\gamma$  relativamente pequeños. Esta característica particular del modelo asimétrico puede ser de gran importancia en aplicaciones experimentales debido a los efectos que presenta. La importancia de los puntos excepcionales definidos mediante las relaciones (3.31) y (3.32), radica en la manifestación de diferentes efectos interesantes en las propiedades de transporte del sistema, dependiendo de la asimetría presente y del grado de ganancia y pérdida; manifestando así un comportamiento no trivial de las propiedades de transporte en puntos excepcionales.

### 3.3 Propiedades de Transporte

El interés principal es el estudio de la dispersión de una onda plana a través del modelo  $\mathcal{PT}$  simétrico anteriormente propuesto. El método que se implementará es el de la matriz de transferencia, descrito anteriormente en la sección 2.3, tomando ventaja de la relación que guardan las propiedades de transporte con las entradas de la matriz de transferencia mediante las expresiones:

$$T = |\mathbf{M}_{22}|^{-2} = [1 + \mathbf{M}_{12}\mathbf{M}_{21} + \mathbf{M}_{22}(\mathbf{M}_{22}^* - \mathbf{M}_{11})]^{-1},$$

$$\frac{R_L}{T} = |\mathbf{M}_{21}|^2, \quad \frac{R_R}{T} = |\mathbf{M}_{12}|^2. \quad (3.33)$$

En la sección 3.1 se obtuvieron de forma detallada las entradas de la matriz de transferencia total del sistema, ecuación (3.20), a partir de ellas y mediante un poco de álgebra se obtienen las expresiones analíticas exactas (cabe destacar que ninguna aproximación se ha impuesto en los cálculos antes mostrados) para los coeficientes de transmisión y reflexión de una onda plana que interactúa con la región de dispersión con el potencial dado por la ecuación (3.2):

$$T = \frac{1}{1 + \frac{\text{sen}^2(2N\mu)}{\text{sen}^2(2\mu)} F_+(\gamma, \alpha, k) F_-(-\gamma, \alpha, k)},$$

$$\frac{R_R}{T} = \frac{\text{sen}^2(2N\mu)}{\text{sen}^2(2\mu)} F_+^2(\gamma, \alpha, k), \quad \frac{R_L}{T} = \frac{\text{sen}^2(2N\mu)}{\text{sen}^2(2\mu)} F_-^2(-\gamma, \alpha, k). \quad (3.34)$$

La expresión analítica de  $F_{\pm}$  está dada por  $F_{\pm}(\gamma, \alpha, k) = \frac{\pm\gamma \text{sen}(k) + \frac{1}{2}(\alpha^2 - \gamma^2 - 1)}{\alpha \text{sen}(k)}$ . Dicha función (definida previamente en la sección 3.1) tiene una forma analítica estratégica para descartar la dependencia del número de dímeros que conforman a la cadena unidimensional. La finalidad de esto es facilitar el análisis de las expresiones de los coeficientes de transmisión y reflexión.

### Obtención de los coeficientes de transmisión y reflexión.

$$\begin{aligned} \frac{R_R}{T} &= |M_{12}|^2 & \frac{R_L}{T} &= |M_{21}|^2 \\ &= \left| i e^{ik} \frac{\text{sen}(2N\mu)}{\text{sen}(2\mu)} F_+(\gamma, \alpha, k) \right|^2 & &= \left| -i e^{-ik} \frac{\text{sen}(2N\mu)}{\text{sen}(2\mu)} F_-(-\gamma, \alpha, k) \right|^2 \\ &= \left| i (\cos(k) + i \text{sen}(k)) \frac{\text{sen}(2N\mu)}{\text{sen}(2\mu)} F_+(\gamma, \alpha, k) \right|^2 & &= \left| -i (\cos(k) - i \text{sen}(k)) \frac{\text{sen}(2N\mu)}{\text{sen}(2\mu)} F_-(-\gamma, \alpha, k) \right|^2 \\ &= \left| (i \cos(k) - \text{sen}(k)) \frac{\text{sen}(2N\mu)}{\text{sen}(2\mu)} F_+(\gamma, \alpha, k) \right|^2 & &= \left| (-i \cos(k) - \text{sen}(k)) \frac{\text{sen}(2N\mu)}{\text{sen}(2\mu)} F_-(-\gamma, \alpha, k) \right|^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{R_R}{T} = \frac{\text{sen}^2(2N\mu)}{\text{sen}^2(2\mu)} F_+^2(\gamma, \alpha, k)} \quad \boxed{\frac{R_L}{T} = \frac{\text{sen}^2(2N\mu)}{\text{sen}^2(2\mu)} F_-^2(-\gamma, \alpha, k)}$$

$$\begin{aligned} |1 - T| &= \sqrt{R_R R_L} \\ &= \sqrt{\frac{\text{sen}^4(2N\mu)}{\text{sen}^4(2\mu)} F_+^2(\gamma, \alpha, k) F_-^2(-\gamma, \alpha, k) T^2} \\ &= \frac{\text{sen}^2(2N\mu)}{\text{sen}^2(2\mu)} F_+(\gamma, \alpha, k) F_-(-\gamma, \alpha, k) T \end{aligned}$$

$$\boxed{T = \frac{1}{1 + \frac{\text{sen}^2(2N\mu)}{\text{sen}^2(2\mu)} F_+(\gamma, \alpha, k) F_-(-\gamma, \alpha, k)}}$$

### 3.3.1 Coeficiente de Transmisión

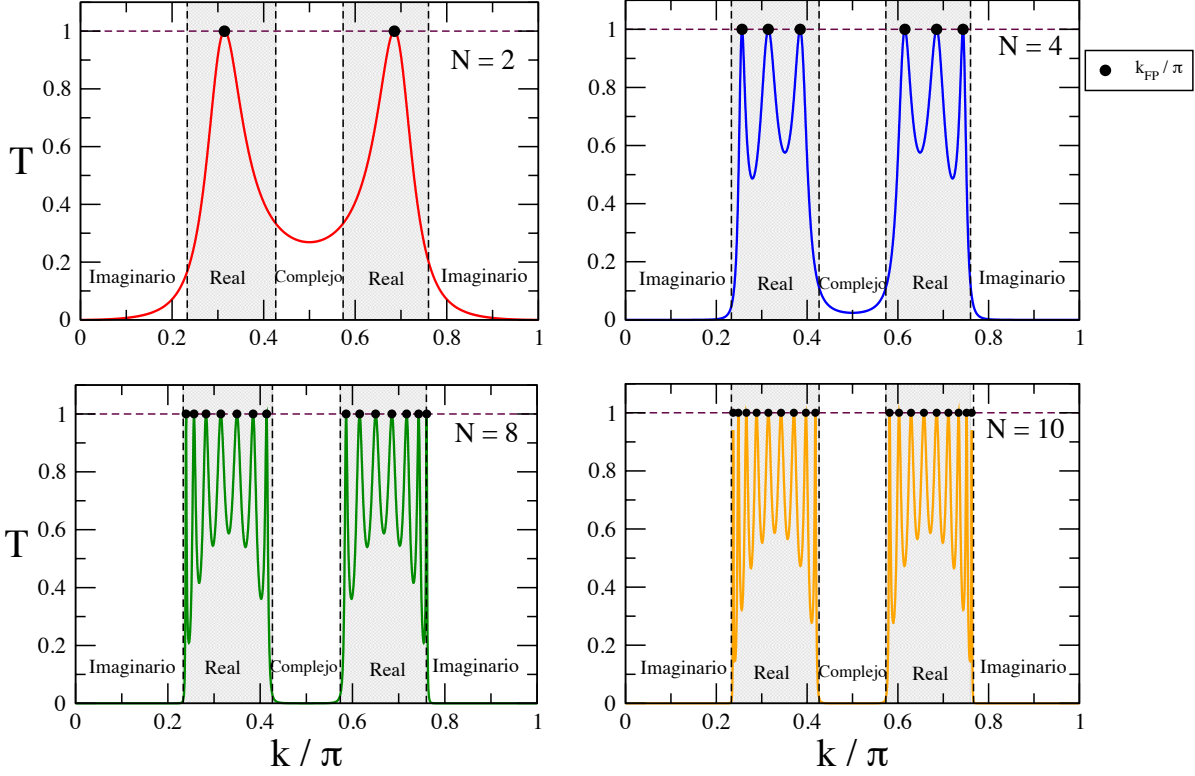
El coeficiente de transmisión se define como la fracción de energía incidente transmitida a través de cierta estructura. El coeficiente correspondiente al modelo previamente propuesto se obtuvo a través de la relación que se tiene con la entrada  $M_{22}$  de la matriz de transferencia y se encontró una expresión analítica compacta:

$$T = \frac{1}{1 + \frac{\text{sen}^2(2N\mu)}{\text{sen}^2(2\mu)} F_+(\gamma, \alpha, k) F_-(-\gamma, \alpha, k)} \quad (3.35)$$

La relación anterior es válida para cualquier rango de los parámetros que caracterizan el sistema, presenta una dependencia con la energía de las ondas incidentes  $E$  mediante el número de onda  $k$ . Dividiremos el análisis en tres casos, los cuales están condensados en la expresión (3.30); la cual muestra que dependiendo del valor de los parámetros, el número de onda dentro de la zona de dispersión  $\mu$  se verá afectado y podrá tomar valores reales, imaginarios o complejos.

La figura 3.3 muestra a la transmisión en función de la energía de la onda incidente donde los tres distintos casos para  $\mu$  están presentes, para valores fijos de los parámetros  $\alpha$  y  $\gamma$ , variando el número de dímeros que conforma a la cadena de iones. Las zonas que se encuentran en los extremos de cada una de las gráficas corresponden a un número de onda interno  $\mu$  imaginario, donde podemos ver que

$$\alpha = 0.5, \quad \gamma = 0.2$$



**Fig. 3.3.:** Coeficiente de transmisión,  $T$  para diferentes tamaños  $N$ , con parámetros fijos con valores  $\alpha = 0.5$  y  $\gamma = 0.2$ . Para cada caso se muestran los números de onda  $k_{FP}/\pi$  donde la transmisión es perfecta, además de las diferentes regiones donde el índice  $\mu$  puede ser imaginario, complejo o real.

para los casos en que el número de dímeros es pequeño ( $N < 6$ ), éste decae con  $|E|$ . Conforme va aumentando el tamaño del sistema, la tasa de decaimiento también lo hace, creando bordes bien definidos de la banda de energía para dar paso a la región de energías correspondientes a un número de onda  $\mu$  real, delimitadas por la relación

$$(1 - \alpha)^2 - \gamma^2 \leq E^2 \leq (1 + \alpha)^2 - \gamma^2. \quad (3.36)$$

Esta ecuación define dos regiones simétricas en el rango de energías respecto al centro de la banda ( $E = 0$ ), las cuales son las regiones sombreadas de la figura 3.3. En estas regiones la transmisión es menor o igual a uno; los casos para los cuales los valores de energía de las ondas incidentes resulten en una transmisión perfecta ( $T = 1$ ) están determinados por la anulación del término  $\sin^2(2N\mu)$ , presente en la expresión para el coeficiente de transmisión (3.35); lo cual implica que  $\mu = m\pi/2N$  para  $m = 1, \dots, N - 1$ . La expresión analítica para estas energías particulares es

$$E_{FP}^2 = 4 \alpha \cos\left(\frac{m\pi}{2N}\right) - \gamma^2 + \delta^2. \quad (3.37)$$

La energía de una onda plana incidente es  $E = 2 \cos(k)$ , por lo tanto la expresión (3.37) expresada en

términos del vector de onda  $k$  es

$$k_{FP}^2 = \cos^{-1} \left[ \frac{1}{2} \sqrt{4\alpha \cos(\mu) - \gamma^2 + \delta^2} \right]. \quad (3.38)$$

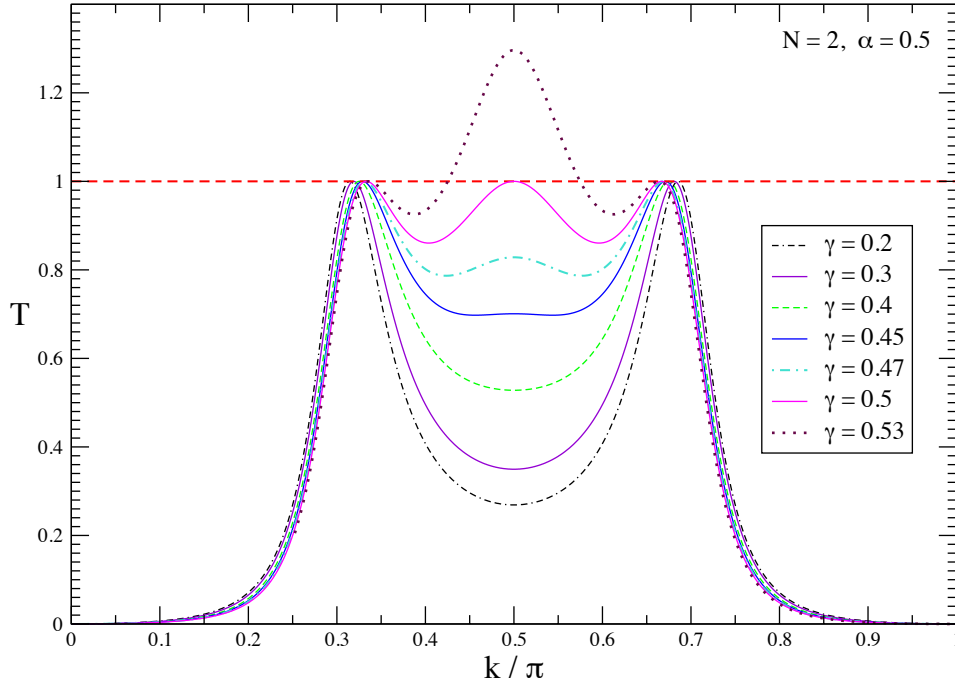
El subíndice  $FP$  de las expresiones (3.37) y (3.38) denota que nos referimos a resonancias de *Fabry-Pérot*, donde la transmisión es igual a la unidad y dependen del tamaño del sistema. El número de resonancias  $E_{FP}$  se encuentra restringido por los parámetros  $\gamma$  y  $\delta$ , debido a que debe ser estrictamente real.

Las regiones sombreadas presentes en la figura 3.3 están delimitadas por puntos que llamamos *bordes externos e internos* de la banda de energías, los cuales muestran transiciones para los diferentes casos que puede tomar el parámetro  $\mu$  (imaginario, real o complejo). Estos bordes tanto externos como internos, se definen mediante  $E = E_0$  y  $E = E_\pi$ , respectivamente; donde los subíndices indican el valor que toma el parámetro  $\mu$ , es decir, cero y  $\pi/2$  en la ecuación de dispersión (3.29), dando como resultado las ecuaciones  $E_0^2 = (1 + \alpha)^2 - \gamma^2$  (Ec. (3.31)) y  $E_\pi^2 = (1 - \alpha)^2 - \gamma^2 = \delta^2 - \gamma^2$  (Ec. (3.32)). La expresión para la transmisión (3.35) se indefinire en ambos casos, sin embargo podemos obtener el valor del coeficiente de transmisión en estos puntos excepcionales mediante la expansión de la expresión (3.35) cerca de estos puntos. Dando como resultado,

$$T \approx \begin{cases} \frac{1}{1 + [N \frac{1+\alpha}{\alpha} \cot(k)]^2} & \text{para } \mu \approx \pi/2 \\ \frac{1}{1 + [N \frac{1-\alpha}{\alpha} \cot(k)]^2} & \text{para } \mu \approx 0 \end{cases}. \quad (3.39)$$

La región de energías donde el número de onda interno  $\mu$  es complejo es una región simétrica al centro de la banda, delimitada por la relación  $E^2 < \delta^2 - \gamma^2$  ó lo que es lo mismo por los bordes internos  $E = E_\pi$ . Al incrementar el valor del parámetro  $\gamma$ , estos bordes tienden a moverse hacia el centro, dando como resultado que para el caso  $\gamma^2 = \delta^2$  los bordes coalescen justo en el centro de la banda ( $E_\pi = 0$ ); justo como lo muestra la ecuación (3.32), provocando la desaparición de la región para  $\mu$  complejo con una transmisión igual a la unidad, tal como lo indica la ecuación (3.39) y la curva rosa correspondiente a  $\gamma = 0.5$  de la figura 3.4.

La evolución del coeficiente de transmisión, a medida que al parámetro que define el grado de no-hermeticidad  $\gamma$  aumenta, se muestra en la figura 3.4; donde se ha considerado un valor fijo para  $\alpha$  (este valor indica que el acoplamiento entre dos dímeros es el doble del acoplamiento intra-dímero) y una cadena de cuatro sitios ( $n = 4$ ) o lo que es lo mismo dos dímeros ( $N = 2$ ). Una vez que la asimetría es superada por la pérdida y ganancia dentro del sistema, i.e. ( $\delta^2 < \gamma^2$ ), el perfil de la transmisión pasa a ser mayor que la unidad. Las funciones  $F_\pm$  definidas previamente en (3.21), determinan la posición de los cruces de la curva  $T = 1$  mediante la expresión,



**Fig. 3.4.:** Evolución del perfil del coeficiente de transmisión en función del número de onda  $k$  para  $N = 2$ ,  $\alpha = 0.5$  y diferentes valores de  $\gamma$  con respecto a  $\delta$ .

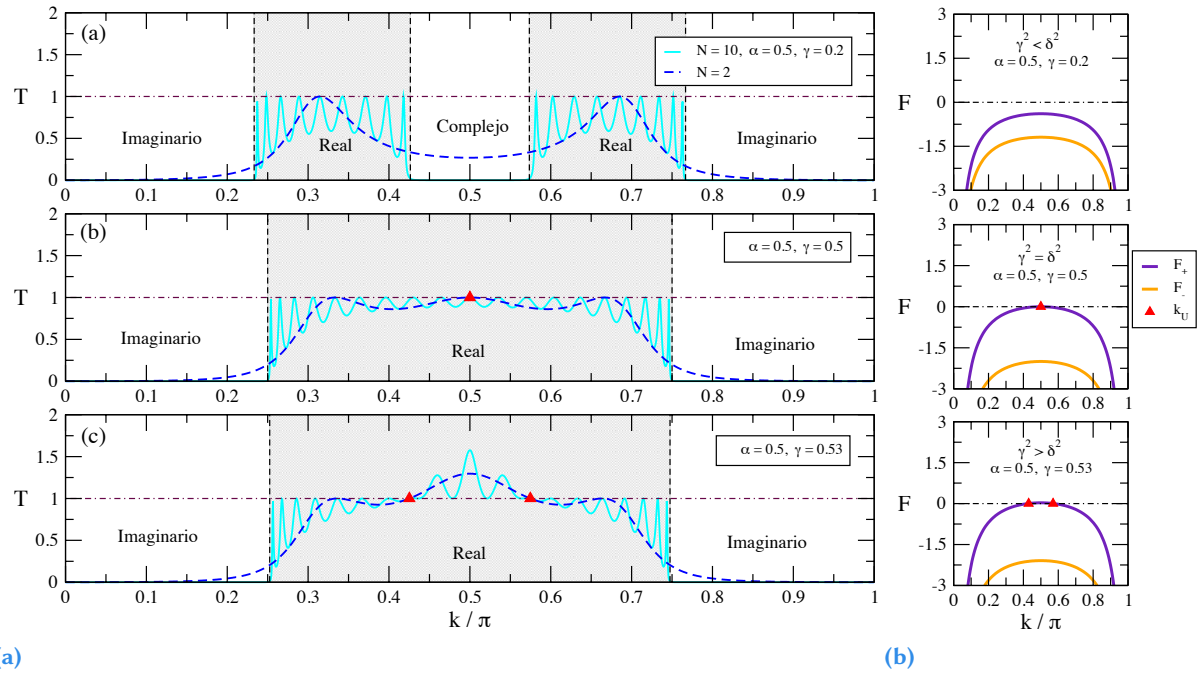
$$E_U^2 = \frac{1}{\gamma^2} [\gamma^2 - \delta^2] [(1 + \alpha^2) - \gamma^2], \quad (3.40)$$

o en términos del vector de onda

$$k_U = \cos^{-1} \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\gamma^2} (\gamma^2 - \delta^2) ((1 + \alpha^2) - \gamma^2)} \right]. \quad (3.41)$$

Estas nuevas resonancias que denominaremos *resonancias U*, son diferentes de las mostradas en (3.37) debido a la forma en que se definió el coeficiente de transmisión (3.35). La causa de una transmisión perfecta, a primera vista, puede deberse a la eliminación de dos términos; ya hemos analizado uno de ellos, el cual corresponde al término  $\sin(2N\mu)$  de donde emergieron las resonancias Fabry-Pérot. La siguiente posibilidad pertenece a la función  $F_+$ , la cual para el caso  $\alpha < 1$  presenta cruces con el eje  $F_+ = 0$ , mientras que la función  $F_-$  nunca cruza dicho eje y es siempre menor que cero a medida que  $\gamma$  crece; esto puede comprobarse en la figura 3.5(b) donde se presenta el comportamiento de las funciones  $F_{\pm}$ .

Las resonancias  $U$  no dependen del tamaño del sistema, debido a la dependencia de la función  $F_{\pm}$ , la cual no involucra el número de dímeros que conforman la cadena, por lo cual estas resonancias estarán presentes para cualquier número de dímeros que conforme a la cadena unidimensional, siempre y cuando  $\delta^2 \leq \gamma^2$ . Cuando la igualdad se cumple, una resonancia  $U$  se encuentra justo en el centro de la banda,



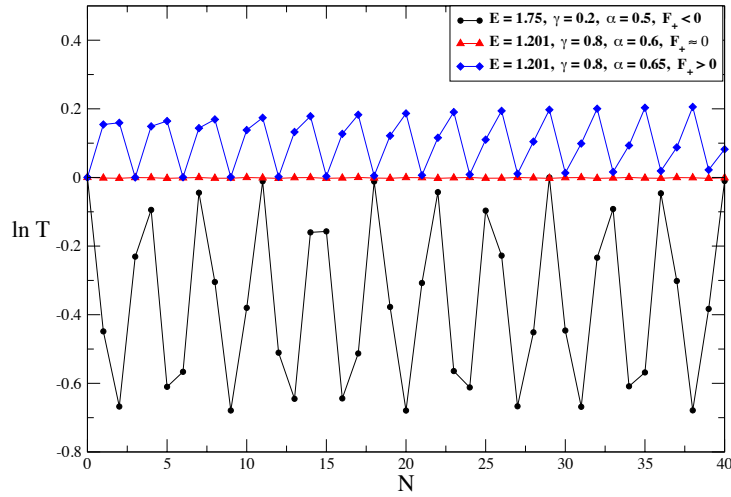
**Fig. 3.5.:** (a) Coeficiente de transmisión para cadenas de dos tamaños diferentes,  $N = 2$  y  $N = 10$ . Los valores de los parámetros son los mismos que en la figura 3.2. Los triángulos rojos corresponden a las resonancias  $U$  para cada caso, además se han añadido las tres diferentes regiones correspondientes a los valores que  $\mu$  puede tomar. (b) Funciones  $F_{\pm}$  correspondientes a los casos mostrados en (a), donde puede observarse que  $F_+$  es la responsable de la aparición de las resonancias  $U$ .

pero cuando la inequación se cumpla, se obtendrán sólo dos de ellas y no más, para cualquier  $N$  y sus posiciones estarán dadas por (3.41).

Además de la ecuación (3.35), debido a la dependencia del coeficiente de transmisión en base al número de dímeros  $N$ , nos dice que tratamos con una función periódica de  $N$  con periodicidad de  $\pi/2\mu$ . Debido a los valores enteros positivos que sólo puede tomar  $N$ , ocasiona que la función  $T$  no sea estrictamente periódica tal y como se muestra en la figura 3.6, aunque para  $N = m\pi/2\mu$ , donde  $m$  es entero positivo, se tiene que  $T \approx 1$ .

A diferencia del modelo simétrico ( $\alpha = 1$ ), en el cual la transmisión siempre es menor que uno para valores reales de  $\mu$  sin importar el número de dímeros que se consideren, para un sistema con acoplamientos no-homogéneos ( $\alpha \neq 1$ ) la transmisión toma valores menores, iguales o mayores a la unidad. Además en los puntos excepcionales correspondientes a los bordes internos y externos de la banda, dados por las ecuaciones (3.32) y (3.31), respectivamente, se tiene una transmisión perfecta independiente del tamaño del sistema; caso contrario de las resonancias  $FP$  del sistema dadas por (3.37) en el que la posición de los puntos de transmisión perfecta en la banda de energías dependen de  $N$ .

Al analizar la estructura de los estados de dispersión del sistema tanto en los puntos excepcionales o resonancias  $U$  como en las resonancias  $FP$ , se nota una clara diferencia entre ellas. Dicho análisis parte de las ecuaciones (3.11) y (3.19), donde puede obtenerse el comportamiento de la función de onda en



**Fig. 3.6.:** Logaritmo del coeficiente de transmisión  $T$  en función del tamaño de dímeros  $N$  que conforman la estructura, para valores reales de  $\mu$ . (a) Se muestra el perfil del  $\ln T$  dependiendo de la función  $F_+$ , la cual puede tomar valores iguales, mayores o menores a cero.

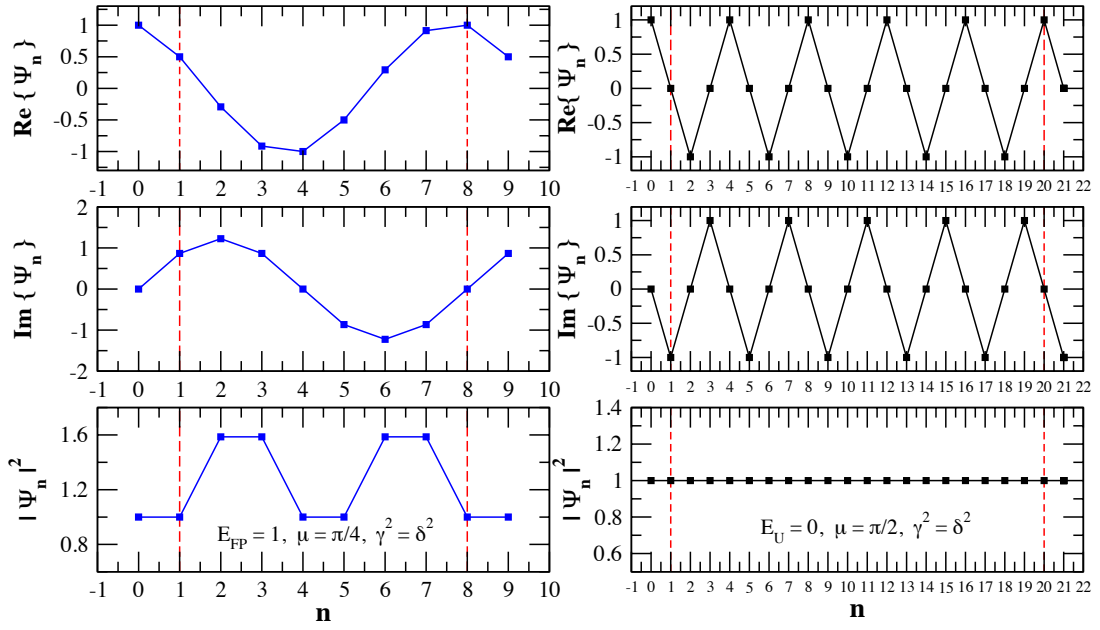
base al número de sitios que conforman la estructura. En la figura 3.7 contrastamos las estructuras de los estados de dispersión para una resonancia  $FP$  en el caso de una cadena de 8 sitios y para una resonancia  $U$  correspondiente al borde interno para una cadena de 20 sitios; en ambos casos se consideró que los cuadrados de los parámetros de no-hermiticidad y el de asimetría son iguales ( $\gamma^2 = \delta^2$ ).

La periodicidad en ambos casos es diferente, para la resonancia  $FP$  es de  $n = 2N$ , mientras que para el punto excepcional o resonancia  $U$  es de  $n = 4$  tanto en la parte real como en la parte imaginaria del estado de dispersión; esto lo exhibe la figura 3.7, mientras que la probabilidad permanece invariante sin importar el tamaño del sistema. Una estructura análoga a la presentada por el punto excepcional anterior es de esperarse para el caso donde  $F_+ = 0$ , lo cual sucede para  $\gamma^2 \geq \delta^2$ ; la razón de esto proviene de la ausencia de  $N$  en la función  $F_+$ .

Analicemos ahora al número de onda interno  $\mu$  en función del tamaño del sistema  $N$ , cuando este es imaginario. Como se mencionó anteriormente, el coeficiente de transmisión es menor que la unidad sin importar el tamaño de la cadena que se este considerando, el origen de esto es el producto de las funciones  $F_+F_-$  que es mucho mayor que uno en las regiones donde  $\mu$  es imaginario, estas regiones son los bordes de la banda de energía que pueden observarse en la figura 3.5(b). Además a medida que el tamaño del sistema crece la transmisión decae rápidamente. Esto es apoyado por la forma que toma el coeficiente  $T$  para  $\mu$  imaginario,

$$T = \frac{1}{1 + \frac{\sinh^2(2\varphi N)}{\sinh^2(2\varphi)} \left[ \sinh^2(2\varphi) + \frac{1}{\alpha} \left( 1 - \alpha \cosh(2\varphi) \right)^2 \cot^2(k) \right]}. \quad (3.42)$$

En esta ecuación para el coeficiente de transmisión se ha definido al número de onda como  $\mu = i\varphi$ , donde  $\varphi$  tiene un valor mayor que cero. La última posibilidad sobre los valores que puede tomar el



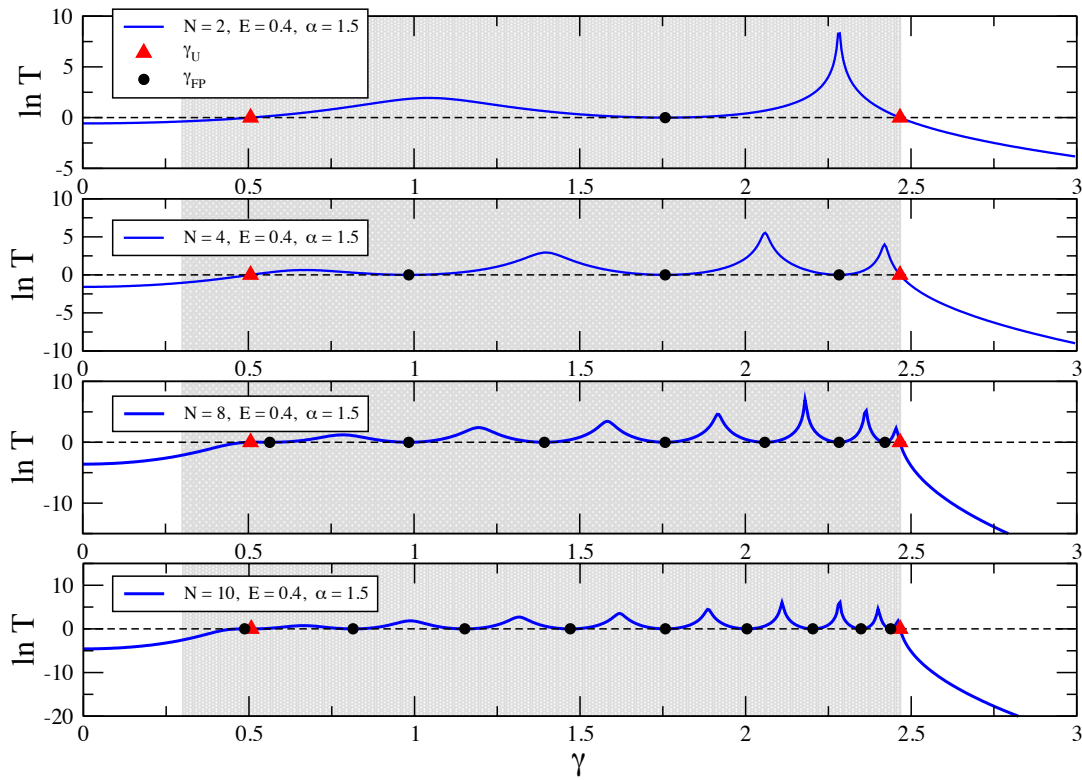
**Fig. 3.7.:** Estados de dispersión para el modelo  $\mathcal{PT}$ -simétrico con  $\gamma^2$  y  $\alpha^2$  tales que  $\gamma^2 = \delta^2$ . La columna izquierda corresponde a una cadena de 3 dímeros, para un valor de energía igual a 1, el cual viene de la ecuación (3.37) para  $m = 2$ . En las gráficas de la columna derecha se tiene el estado de dispersión para 10 dímeros en el punto excepcional para  $\mu = \pi/2$ ; justo en el centro de la banda de energía.

parámetro  $\mu$  recae en el dominio de los números complejos. La forma analítica para el coeficiente de transmisión (3.35) cambia de forma, ya que ahora consideramos que  $\mu = \pi/2 - i\varphi$ , dando como resultado

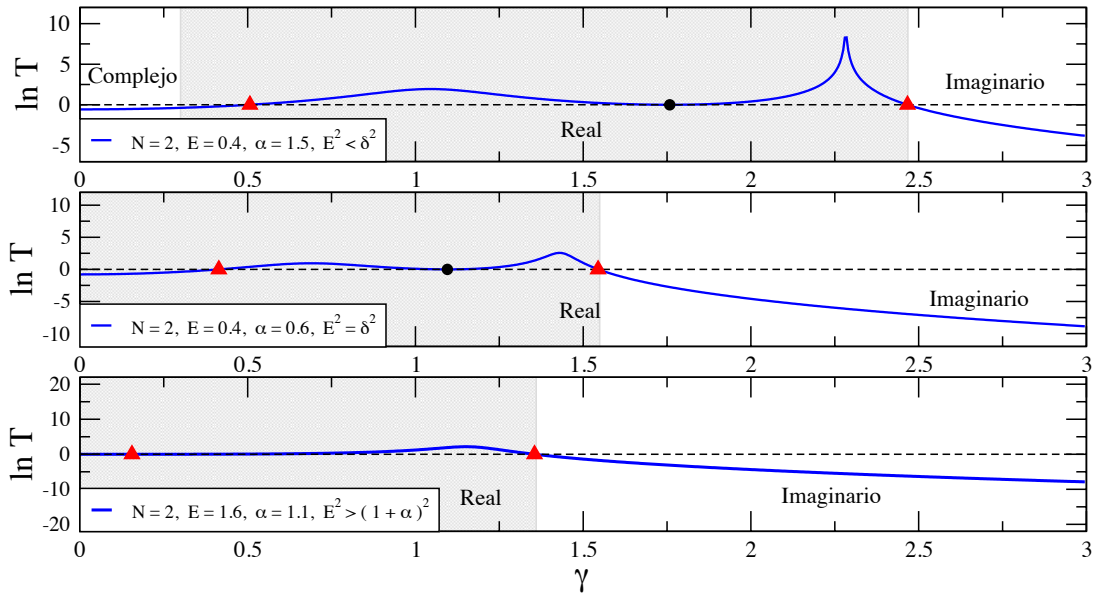
$$T = \frac{1}{1 + \frac{\sinh^2(2\varphi N)}{\sinh^2(2\varphi)} \left[ \sinh^2(2\varphi) + \frac{1}{\alpha} \left( 1 + \alpha \cosh(2\varphi) \right)^2 \cot^2(k) \right]}. \quad (3.43)$$

Otro de los parámetros de los que depende el coeficiente de transmisión, es el parámetro que determina el grado de no-hermiticidad del sistema,  $\gamma$ . El análisis del parámetro  $\mu$  nos proporciona el comportamiento del coeficiente  $T$  con respecto a  $\gamma$  conforme la energía cambia. A partir de la ecuación (3.30) podemos decir que para  $E^2 < \gamma^2$  están presentes las tres regiones de  $\mu$ , i.e., valores reales, complejos e imaginarios. Estas regiones están delimitadas por los puntos excepcionales, donde el número de onda dentro de la cadena toma valores específicos,  $\mu = 0, \pi/2$ . Es posible definir las siguientes regiones de valores para  $\mu$

$$\text{Región para valores: } \begin{cases} \text{imaginarios} & \text{si } \gamma^2 > (1 + \alpha)^2 - E^2 \\ \text{complejos} & \text{si } \gamma^2 < \delta^2 - E^2 \\ \text{real} & \text{si } \delta^2 - E^2 \leq \gamma^2 \leq (1 + \alpha)^2 - E^2 \end{cases} \quad (3.44)$$



**Fig. 3.8.:** Coeficiente de transmisión para un sistema de tamaño  $N = 2$ . Los valores de los parámetros son los mismos que se tomaron en la figura 3.2, los triángulos rojos corresponden a las resonancias  $U$  para cada caso. Se añadieron las tres diferentes regiones a los valores que  $\mu$  puede tomar; valores complejos, reales o completamente imaginarios.



**Fig. 3.9.:** Coeficiente de transmisión para un sistema de tamaño  $N = 10$ . Los valores de los parámetros son los mismos que se tomaron en la figura 3.2, los triángulos rojos corresponden a las resonancias  $U$  para cada caso. Se añadieron las tres diferentes regiones a los valores que  $\mu$  puede tomar; valores complejos, reales o completamente imaginarios.

Este parámetro de no-hermiticidad, es un parámetro estrictamente positivo, dejando como resultado una región de valores reales y de valores imaginarios para  $\mu$ ; como se muestra en la figura 3.8. Notar que la

única región en donde podemos tener una transmisión mayor que uno ( $T \geq 1$ ) corresponde a  $\mu$  real, lo cual corresponde a  $\gamma^2 > \delta^2$  (figuras 3.4 y 3.5). Mientras que en las regiones correspondientes a valores imaginarios de  $\mu$  la transmisión es menor que la unidad,  $T < 1$ . Los valores de transmisión perfecta en el espacio de  $\gamma$  tienen expresiones análogas a aquellas correspondientes al espacio de energías; recordemos que tenemos dos situaciones, las primeras son resonancias que dependen del tamaño del sistema y la forma analítica es,

$$\gamma_{FP}^2 = 4\alpha \cos^2\left(\frac{n\pi}{2N}\right) - E^2 + \delta^2, \quad n = 1, \dots, N-1. \quad (3.45)$$

Mientras que la expresión para el caso de las resonancias  $U$ , cuyo origen se debe a la anulación de la función  $F_+$ , en términos del parámetro  $\gamma$  es,

$$\gamma_U^2 = 1 + \alpha^2 - \frac{E^2}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(E^2 - 4)(E^2 - 4\alpha^2)}. \quad (3.46)$$

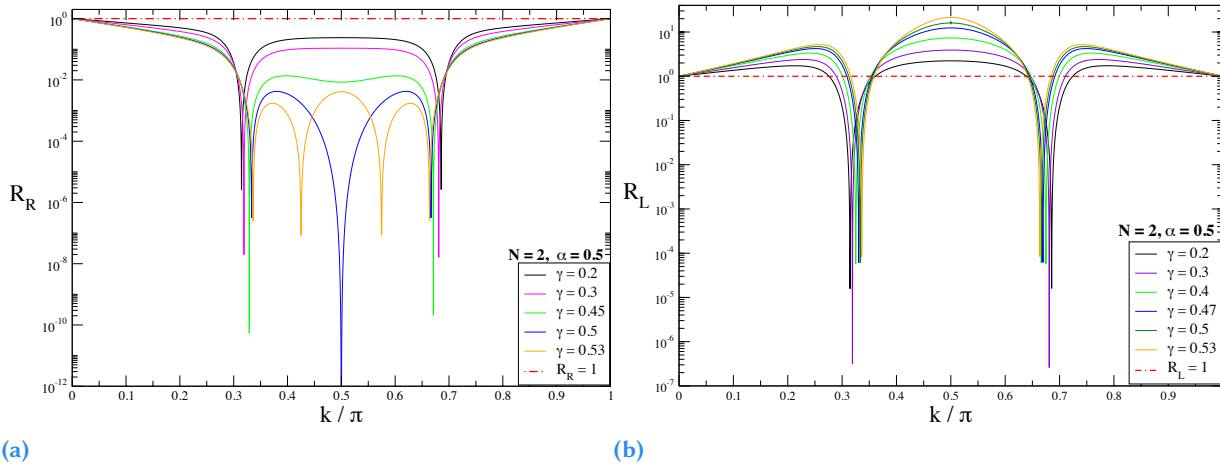
Para resumir, en el caso  $E^2 < \delta^2$  se tienen las tres regiones posibles para valores de  $\mu$ . La región de valores complejos desaparece cuando el valor de la energía es igual al del parámetro de asimetría,  $E^2 = \delta^2$ , mientras que para  $E^2 = (1 + \alpha)^2$  es la región de valores reales la que desaparece, por último sólo se tendrán valores imaginarios siempre y cuando  $E^2 > (1 + \alpha)^2$ . Todos estos casos son mostrados en la figura 3.9, para respaldar las conclusiones antes mencionadas.

### 3.3.2 Reflexión izquierda y derecha

Las cantidades de transporte a analizar ahora son los coeficientes de reflexión por la izquierda y derecha. La expresión analítica obtenida para ambas reflexiones se presentó al inicio de la sección, donde podemos ver que dichas expresiones se componen de dos términos, uno que depende del tamaño del sistema y el otro son las funciones  $F_{\pm}(\gamma, \alpha, k) = \left[\pm\gamma \sin(k) + \frac{1}{2}(\alpha^2 - \gamma^2 - 1)\right] / [\alpha \sin(k)]$  que se introdujeron anteriormente:

$$\frac{R_R}{T} = \frac{\sin^2(2N\mu)}{\sin^2(2\mu)} F_+^2(\gamma, \alpha, k), \quad \frac{R_L}{T} = \frac{\sin^2(2N\mu)}{\sin^2(2\mu)} F_-^2(-\gamma, \alpha, k). \quad (3.47)$$

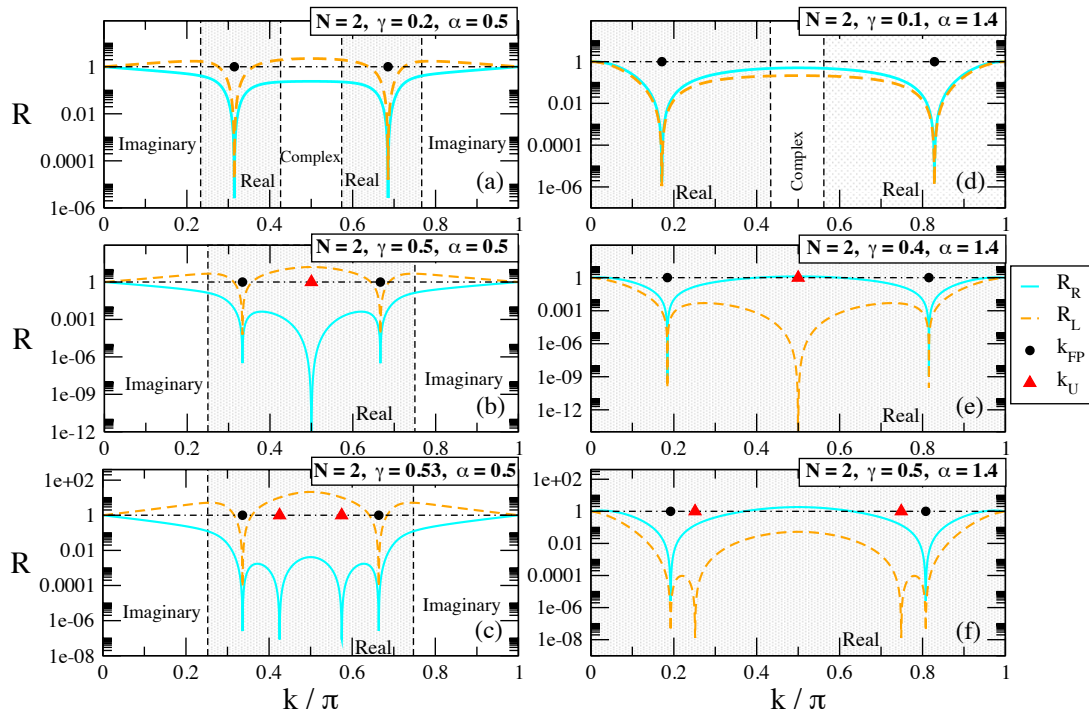
Comparando con los gráficos para el coeficiente de transmisión de la figura 3.4 donde se varía el parámetro  $\gamma$ , en la figura 3.10 puede observarse que en el caso de un dímero, ambos coeficientes de reflexión se comparten de manera similar. La diferencia entre ellos aparece cuando la relación  $\gamma^2 \geq \delta^2$  se satisface y es cuando el coeficiente de reflexión para incidencia por la derecha se anula para ciertos valores de energía. El origen de dichos puntos proviene de las resonancias  $U$ , expliquemos esto más a fondo. Para el caso  $\alpha < 1$  que es el que muestran las figuras 3.10, es la función  $F_+$  quien tiene ciertos puntos donde se anula a diferencia de la función  $F_-$  cuyo valor es siempre menor a cero (ver figura 3.5b). Por lo cual, debido a la forma analítica del coeficiente de reflexión por la derecha que depende sólo



**Fig. 3.10.:** (a) Coeficiente de reflexión por la derecha para  $N = 2$ ,  $\alpha = 0.5$  y diferentes valores de  $\gamma$  de tal manera que se consideran los tres casos mostrados en la figura 3.2. (b) Coeficiente de reflexión izquierda para los mismos parámetros del caso (a).

de la función  $F_+$ , es de esperar que se anule en ciertas energías, las cuales hemos caracterizado como resonancias  $U$ ; a diferencia de la reflexión izquierda que muestra un valor diferente de cero para las mismas energías. Otra diferencia apreciable, ocurre en la región central respecto al centro de la banda de energías, la figura 3.47 muestra como el coeficiente de transmisión derecha nunca sobrepasa valores mayores a uno, mientras que cuando se tiene una transmisión proveniente del lado izquierdo del modelo, la reflexión correspondiente sobrepasa la unidad.

Haciendo un análisis similar al del coeficiente de transmisión  $T$ , estudiaremos el comportamiento de los coeficientes  $R_R$  y  $R_L$  a medida el vector de onda interno  $\mu$  cambia, ver (3.30). Dicho comportamiento se muestra en la figura 3.11, para valores de parámetros que satisfacen los casos mostrados en la figura 3.2, los cuales son  $\gamma^2 < \delta^2$ ,  $\gamma^2 = \delta^2$  y  $\gamma^2 > \delta^2$ . En todos los casos podemos ver que ambos coeficientes de reflexión se anula en los puntos donde la transmisión es perfecta,  $T = 1$ , dados por la ecuación (3.37). Además para los casos en que se cumple la condición  $\gamma^2 \geq \delta^2$ , surgen las resonancias  $U$ , como lo vimos para el caso de la transmisión, las cuales recordemos no dependen del tamaño del sistema; sus posiciones se muestran en la figura 3.11(b) y 3.11(c) representados por los triángulos rojos que se encuentran dentro de la zona donde  $\mu$  toma valores reales. Notar que la posición de estas resonancias es simétrica respecto al centro de la banda de energías y lo importante es la diferencia de valores que toman ambos coeficientes de reflexión en estas resonancias. La reflexión por la derecha,  $R_R$ , se anula tanto en las resonancias de Fabry-Perot como en las resonancias  $U$ . El caso contrario sucede con el coeficiente por la izquierda  $R_L$ , el cual toma valores diferentes de cero dependiendo de los parámetros que caracterizan la cadena. A este fenómeno se le conoce como invisibilidad unidireccional y es característico de los sistemas que presentan simetría  $\mathcal{PT}$ . A partir de las ecuaciones y simulaciones que se han presentado para los coeficientes de reflexión y transmisión, puede notarse que si hacemos incidir una onda plana por alguno de los extremos de la estructura se tendrá como resultado, ya conocido, que parte de la onda plana es reflejada y otra es transmitida; el resultado ahora interesante es cuando tomamos el lado contrario al elegido para hacer incidir la onda plana, dando como resultado que toda la onda es transmitida sin



**Fig. 3.11.:** Coeficiente de reflexión derecha e izquierda para el caso  $N = 2$ , donde se han usado los parámetros de la figura 3.2. Se han incluido ambas resonancias (Fabry-Pérot y  $U$ ) donde la transmisión es perfecta y las regiones de  $\mu$  dadas por (3.30). Los casos (a)-(c) corresponden a  $\alpha < 1$  y las figuras (d)-(e) a  $\alpha > 1$ .

perder una parte en la reflexión, es decir, el arreglo con acoplamientos asimétricos le es invisible a la onda plana en la posición de las resonancias  $U$ .

El comportamiento de los coeficientes de reflexión en la columna derecha de la figura 3.11 es contraria a la mostrada en los casos (a)-(c) de esta misma figura, ya que es ahora  $R_L$  la que se anula en las resonancias  $U$ . La diferencia entre ambos casos radica en el parámetro  $\alpha$ , el cual puede ser mayor, menor o igual a la unidad; la columna derecha corresponde al caso  $\alpha > 1$ , es decir, el valor del acoplamiento intra-dímero  $v$  es mayor que el acoplamiento que existe entre dos dímeros consecutivos  $\eta$ . A partir de la expresión analítica para la reflexión izquierda (3.47), la función  $F_-$  se anula en las resonancias  $U$  mientras que  $R_R$  es ahora quien tiene un valor finito, debido a que la función  $F_+$  será siempre mayor que cero sin importar el valor de  $\gamma$  y debido a la forma de la función  $F_-$  sólo podrán tenerse una o dos resonancias  $U$ , todo esto se muestra en la figura 3.11.

#### Valor crítico de $\gamma$

Las funciones  $F_{\pm}$  depende de tres variables,  $\gamma$ ,  $\alpha$  y  $k$ ; las cuales están definidas por los re-escalamientos  $\gamma \rightarrow \gamma/\eta$  y  $\alpha \rightarrow v/\eta$ , donde  $v$  y  $\eta$  son los acoplamientos entre los sitios que forma la cadena;  $\gamma$  es la magnitud de pérdidas y ganancias,  $\epsilon_n = (-1)^n i\gamma$ , con  $\gamma \geq 0$  y el vector de onda  $k > 0$ . En los casos donde  $F_+(\gamma, \alpha, k) = 0$  debe cumplirse que

$$F_{\pm} = 0 = \frac{\gamma \sin(k) + \frac{1}{2}(\alpha^2 - \gamma^2 - 1)}{\alpha \sin(k) \sin(2\mu)} \Rightarrow \sin(k) = -\frac{1}{2\gamma} (\alpha^2 - \gamma^2 - 1).$$

Etiquetando a cada lado de la ecuación anterior con las funciones  $f_1$  y  $f_2$ ,

$$f_1 = \text{sen}(k) \quad \text{y} \quad f_2 = -\frac{1}{2\gamma} (\alpha^2 - \gamma^2 - 1).$$

La función  $f_1$  es la función seno del número de onda, de ella se sabe el dominio y rango de acuerdo a los parámetros que caracterizan a la cadena. La relación entre  $k$  y la energía se da a través de  $E = 2 \cos(k)$ , por lo que el rango de la función  $f_1$  está definido en el intervalo  $[0, \pi]$ ; fuera de ese intervalo no nos importa como se comporte la función  $f_1$ , ya que ahí no se tienen soluciones. Esto implica además que la  $f_2$  debe ser estrictamente positiva, es decir:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\gamma} (\alpha^2 - \gamma^2 - 1) &> 0 \\ \Rightarrow \gamma^2 &> \alpha^2 - 1 \\ \Rightarrow \boxed{\gamma_{cr} > \sqrt{\alpha^2 - 1}}. \end{aligned}$$

Podemos concluir que la reflexión derecha se anula cuando  $\alpha$  y  $\gamma$  satisfacen (3.48). Similarmente, el coeficiente de reflexión por la izquierda se anula cuando  $F_-(-\gamma, \alpha, k) = 0$ , por lo tanto,

$$\text{sen}(k) = \frac{1}{2\gamma} (\alpha^2 - \gamma^2 - 1).$$

El intervalo de interés es el mismo que en el caso anterior,  $[0 \leq k \leq \pi]$ , por lo que podemos decir que el coeficiente de reflexión izquierda se anula siempre y cuando

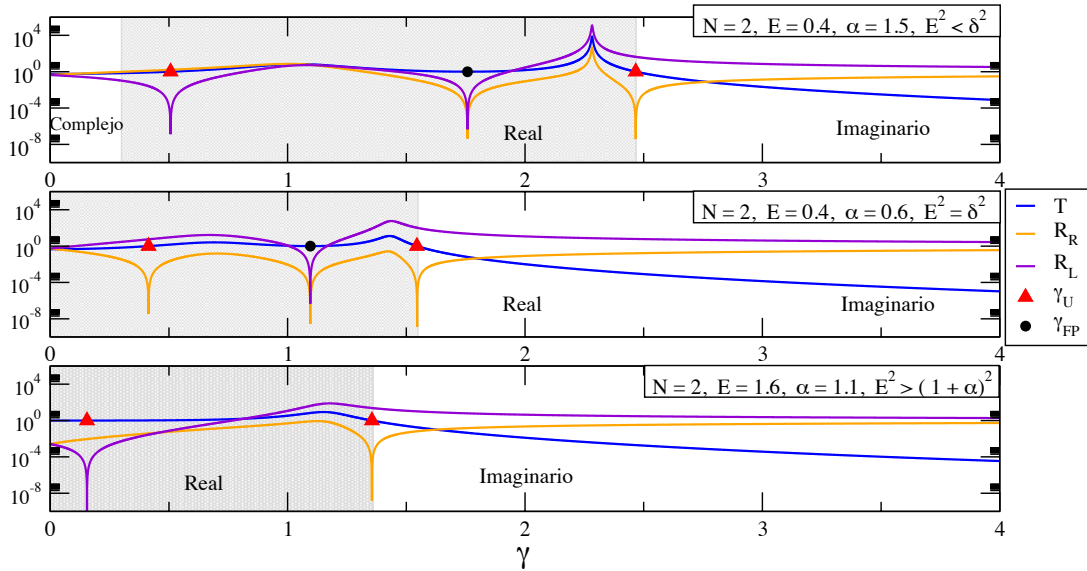
$$\boxed{\sqrt{\alpha^2 - 1} > \gamma_{cr}}.$$

Debido a que  $\gamma$  se definió como una cantidad estrictamente mayor que cero,  $\alpha > 1$ . De esta forma se ha determinado el valor crítico para  $\gamma$  en función de  $\alpha$ .

El parámetro  $\gamma$  se ha definido como la ganancia y pérdida que el sistema presenta, la cual va a estar acotada por cierto valor crítico que delimita el punto en que una de las dos reflexiones sea nula. Para empezar este análisis partimos de la función  $F_{\pm}$  dada por la ecuación (3.21). El coeficiente de reflexión derecha puede anularse debido a dos causas diferentes, ya que está conformada por un término que depende del tamaño del sistema y otro que es la función  $F_+$  que involucra la dependencia de los términos restantes que caracterizan al sistema. El caso que nos interesa es cuando la función  $F_+(\gamma, \alpha, k)$  se anula y a partir de ello el parámetro  $\gamma$  tiene los siguientes valores críticos (ver recuadro gris anterior):

$$\gamma_{cr} = \begin{cases} \sqrt{1 - \alpha^2} & \text{para } \alpha < 1 \\ 0 & \text{para } \alpha = 1; \\ \sqrt{\alpha^2 - 1} & \text{para } \alpha > 1 \end{cases} \quad (3.48)$$

tal que para  $\gamma < \gamma_{cr}$  el coeficiente de reflexión izquierda  $R_L$  es el coeficiente que se anula en los puntos



**Fig. 3.12.:** Coeficientes de transmisión, reflexión derecha e izquierda en función del parámetro  $\gamma$ . Donde los parámetros toman los valores:  $N = 2, E = 0.2$  y  $\alpha = 1.1$ . Se han etiquetado los puntos donde se presentan resonancias de Fabry-Pérot ( $\gamma = 1.473$ ) y resonancias debidas a la función  $F$ , en el caso de reflexión derecha ( $\gamma = 2.090427$ ) y reflexión izquierda ( $\gamma = 0.1$ ).

donde  $F_- = 0$ ; mientras que para  $\gamma > \gamma_{cr}$  los ceros corresponden al coeficiente de reflexión para incidencia derecha  $R_R$ .

Al graficar los coeficientes de transmisión y reflexión en términos del parámetro  $\gamma$  para dos dimeros en el cual la energía toma diferentes valores al igual que  $\alpha$  (figura 3.12); notamos que el término de pérdidas y ganancias se encuentra acotado de acuerdo con la ecuación (3.30). En base al parámetro  $\gamma$  puede determinarse la región donde  $\mu$  es real, el intervalo para esta región real es  $\sqrt{(1 - \alpha)^2 - E^2} \leq \gamma \leq \sqrt{(1 + \alpha)^2 - E^2}$ . Además se presentan resonancias de Fabry-Pérot en los puntos que dicta la ecuación (3.45), en este punto ambas reflexiones se anulan mientras que la transmisión es perfecta, como es de esperarse. A medida que el valor de  $\gamma$  crece se llega a cumplir  $\gamma^2 > \delta^2$ , por lo cual aparece otra resonancia  $U$  para la cual el coeficiente de reflexión por la izquierda tiene un valor distinto de cero, algo similar ocurre para el caso  $\gamma^2 = \delta^2$ . Estas resonancias aparecen cuando alguna de las funciones  $F_{\pm}$  se anula; la posición de estas resonancias están dadas por la ecuación (3.46). Además la ecuación (3.48) establece el límite donde ambas reflexiones se anulan, para el caso  $\alpha = 1.1$  y se tiene que para  $\gamma < 0.458 = \gamma_{cr}$  la reflexión izquierda es quien se hace cero, mientras que para  $\gamma > 0.458$  es el coeficiente  $R_R$  quien es igual a cero. Otro aspecto interesante que podemos observar de la figura 3.12, es el valor máximo que presentan las propiedades de transporte en función de  $\gamma$  correspondiente a  $k = \pi/8$ .

### 3.3.3 Valores para el parámetro $\gamma$

Como hemos mencionado las resonancias de este modelo provienen de dos circunstancias distintas, ya sea por la anulación de la función  $F_{\pm}$  o del parámetro  $\mu$  dentro de la región de interacción que satisfice

$\mu = m\pi/2N$ , con  $m = 1, \dots, N - 1$ . Estas resonancias están definidas en puntos específicos dados por las ecuaciones (3.37) y (3.40), lo que haremos es estudiar la región en la cual se encuentran estas resonancias para cualquier valor de  $\gamma$  al tomar diferentes valores para la razón entre acoplamientos  $\alpha$ . Partamos de la expresión para  $F_+$  definida previamente e igualandola a cero:

$$F_+(\gamma, \alpha, k) = \frac{\pm\gamma \operatorname{sen}(k) + \frac{1}{2}(\alpha^2 - \gamma^2 - 1)}{\alpha \operatorname{sen}(k)} = 0,$$

$$\Rightarrow \gamma^2 - 2\gamma \operatorname{sen}(k) - (\alpha^2 - 1) = 0.$$

Dando como resultado una ecuación de segundo grado para  $\gamma$ , que tiene por solución,

$$\gamma_U = \operatorname{sen}(k) \pm \sqrt{\alpha^2 - \cos^2(k)}. \quad (3.49)$$

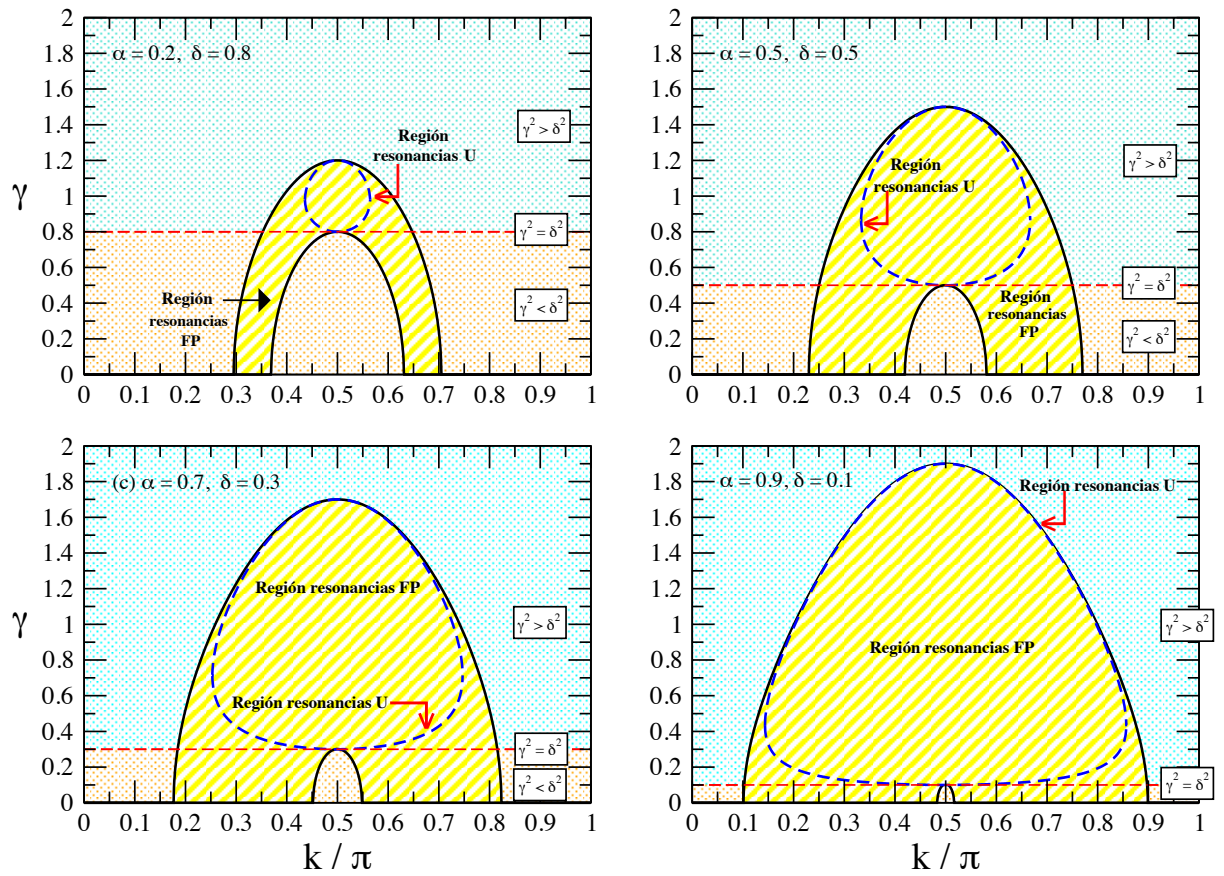
Esto nos da la posición de las resonancias  $U$  para cualquier cantidad de pérdida y ganancia dentro del sistema, además se puede obtener a partir de ella el rango de los valores que la variable  $\gamma$  puede tomar,

$$\gamma_{min} = 1 - \alpha \leq \gamma_U \leq 1 + \alpha = \gamma_{max}, \quad \text{para } \alpha < 1. \quad (3.50)$$

Donde hemos considerado  $k = \pi/2$ , es donde  $\gamma$  toma el máximo valor. Para encontrar las resonancias Fabry-Pérot partimos de la relación de dispersión, despejando  $\gamma$  en términos de  $k$  y aplicando el hecho de que  $\mu = \frac{m\pi}{2N}$ , de esta manera se obtiene:

$$\gamma_{FP} = \sqrt{4\alpha \cos^2\left(\frac{m\pi}{2N}\right) - 4\cos^2(k) + (1 - \alpha)^2}, \quad m = 1, \dots, N - 1. \quad (3.51)$$

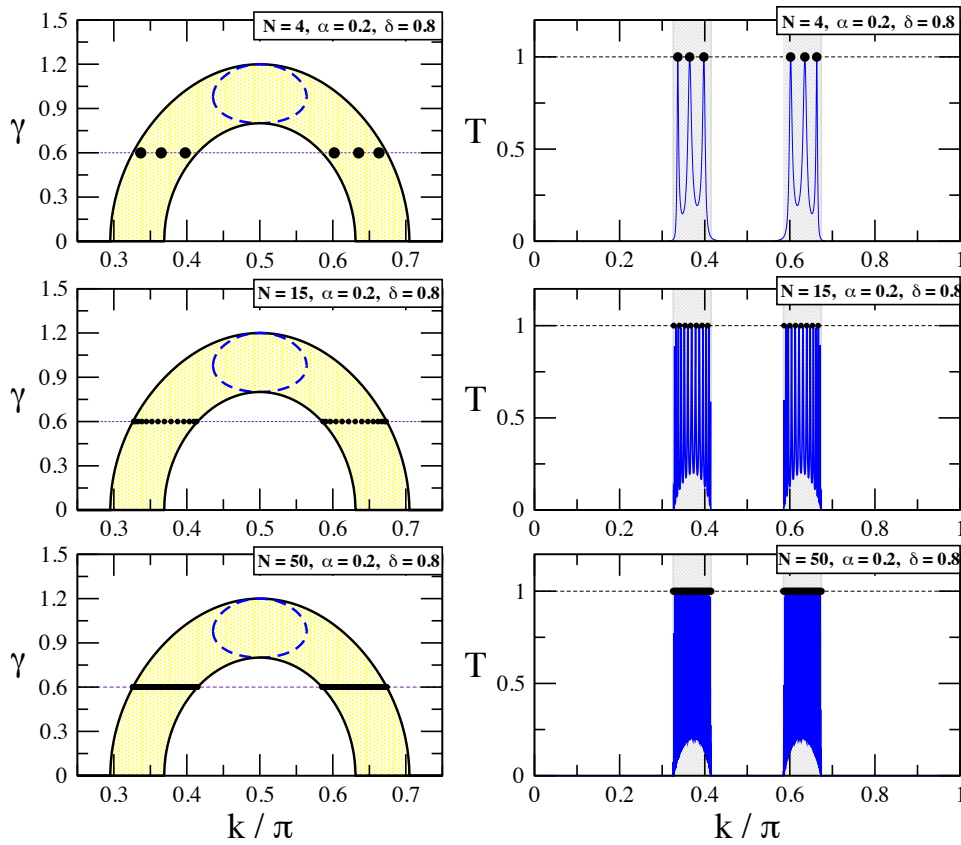
El comportamiento del parámetro  $\gamma$  dado por las ecuaciones (3.49) y (3.51) en función de la energía se muestra en la figura 3.13. En ella podemos observar la región donde las resonancias Fabry-Pérot (zona amarilla) se encuentran para cualquier valor de  $\gamma$ . Empezamos con el caso donde la razón entre acoplamientos tiene un valor "pequeño", por ejemplo tomemos el caso  $\alpha = 0.2$  para los casos estudiados previamente de la figura 3.2 para  $\gamma^2$  menor, igual y mayor que  $\delta^2$ . Puede apreciarse para cuando la desigualdad  $\gamma^2 < \delta^2$  se cumple, hay una región vacía simétrica respecto a la banda de energía donde no existen resonancias  $FP$  y corresponde a la región donde  $\mu$  tiene valores complejos, es por ello que esta zona no presenta dichas resonancias tal y como lo predicen las ecuaciones y la figura 3.3. El coeficiente de transmisión muestra valores distintos de cero sólo en las zonas donde  $\mu$  es real, a medida que se incrementa el valor de esta razón de acoplamientos  $\alpha$ , el parámetro  $\delta$  disminuye ocasionando que la zona de valores complejos colapse en el centro de la banda y desaparezca.



**Fig. 3.13.:** Región de las resonancias Fabry-Pérot (3.51) y  $U$  (3.49) para cualquier tamaño de sistema. Además en cada gráfica se delimita al parámetro  $\gamma$  al incrementar el valor de los acoplamientos o lo que es lo mismo, cambiando la asimetría del sistema.

La posición del siguiente tipo de resonancias que surgen en este modelo, son las resonancias  $U$ ; en la figura 3.13 están representadas por la línea punteada azul en cada gráfica. Esto corresponde a las ecuaciones que hemos analizado previamente, la aparición de estas resonancias empieza justo en el centro de la banda de energía cuando  $\gamma^2 = \delta^2$ , además de que para cada valor que el parámetro que mide la no-hermiticidad del sistema tome, aparecen sólo dos resonancias  $U$  y no más. Esta variable  $\gamma$  se encuentra delimitada por un valor máximo  $\gamma_{max}$  y uno mínimo  $\gamma_{min}$ , determinados por la ecuación (3.50). Una vez que este valor se ha sobrepasado  $\gamma_{max}$ , el coeficiente de transmisión decae rápidamente tendiendo a cero.

La utilidad de ésta figura 3.13 radica en la detección de resonancias al escoger cierto valor de  $\gamma$ , para cualquier tamaño del sistema que estemos considerando, ya que entre mayor sea el número de dímeros, mayor será el número de resonancias de Fabry-Pérot y por consiguiente llenarán por completo la región amarilla correspondiente, sin pasar los límites establecidos por las líneas continuas negras. Se incluyó en cada caso una línea roja punteada que indica cuando las pérdidas y ganancias son iguales a la asimetría del sistema. No debemos olvidar que la función  $F_+$  es la que origina las resonancias  $U$  para el caso  $\alpha < 1$ .



**Fig. 3.14.:** Número de onda  $\mu$  en función de la energía incidente correspondiente a los casos analizados anteriormente donde  $\delta^2 > \gamma^2$ ,  $\delta^2 = \gamma^2$  y  $\delta^2 < \gamma^2$ .

Para entender con mayor claridad el gráfico 3.13 consideremos un ejemplo específico. Supongamos que las variables que caracterizan al sistema tienen los valores  $\alpha = 0.2$  y  $\gamma = 0.6$ , empezando con una cadena de 8 sitios o bien 4 dímeros; de acuerdo con la ecuación (3.37) se tendrán 6 resonancias Fabry-Pérot, las cuales se encuentran dentro de la zona amarilla dada por la ecuación (3.51). Al aumentar el tamaño del sistema a 15 dímeros éstas resonancias aumentan a 28 y seguirán aumentando en número a medida que el sistema lo haga también, teniendo como consecuencia que la zona amarilla correspondiente a  $\gamma = 0.6$  se irá poblando cada vez más de resonancias; tal y como se muestra en la imagen 3.14, donde se incluye como soporte el comportamiento del coeficiente de transmisión  $T$  para cada uno de los casos. Con esto hemos determinado los valores que  $\gamma$  puede tomar, pero inmediatamente surge la pregunta sobre la región donde  $\gamma > \gamma_{max}$ , es decir donde el parámetro de pérdida y ganancia sobrepasa esta zona amarilla; esto puede contestarse graficando la expresión para la transmitancia (3.35) y notar que en estos casos la transmisión decae bastante rápido hasta el punto en que se desvanece.

### 3.3.4 Caso $\delta^2 = \gamma^2$

Un caso que nos parece importante es cuando el parámetro que mide el grado de no-hermeticidad se iguala al parámetro de asimetría presente en el sistema, es decir,  $\delta^2 = \gamma^2$ ; sin dejar de tener en cuenta que el parámetro  $\gamma$  se definió estrictamente positivo a diferencia del parámetro  $\delta$ , el cual puede tomar

valores tanto positivos como negativos dependiendo del valor de  $\alpha$ . En este caso, la relación de dispersión (3.29) se reduce a la expresión,

$$4 \alpha \cos^2(\mu) = E^2. \quad (3.52)$$

Esta ecuación es muy similar a la relación de dispersión correspondiente a una onda plana, pero la influencia de los acoplamientos asimétricos que presenta la estructura interviene en dicha ecuación mediante el parámetro  $\alpha$ , ocasionando una variación el rango para la energía  $E$ . También podemos notar que no depende del parámetro de ganancia/pérdida; sin embargo, no significa que las propiedades de transporte no dependan de él.

**$F_{\pm}$  para el caso  $\delta^2 = \gamma^2$**

La forma de la función  $F_{\pm}$  es la siguiente,

$$F_{\pm} = \frac{\pm\gamma \operatorname{sen}(k) + \frac{1}{2}(\alpha^2 - \gamma^2 - 1)}{\alpha \operatorname{sen}(k)}$$

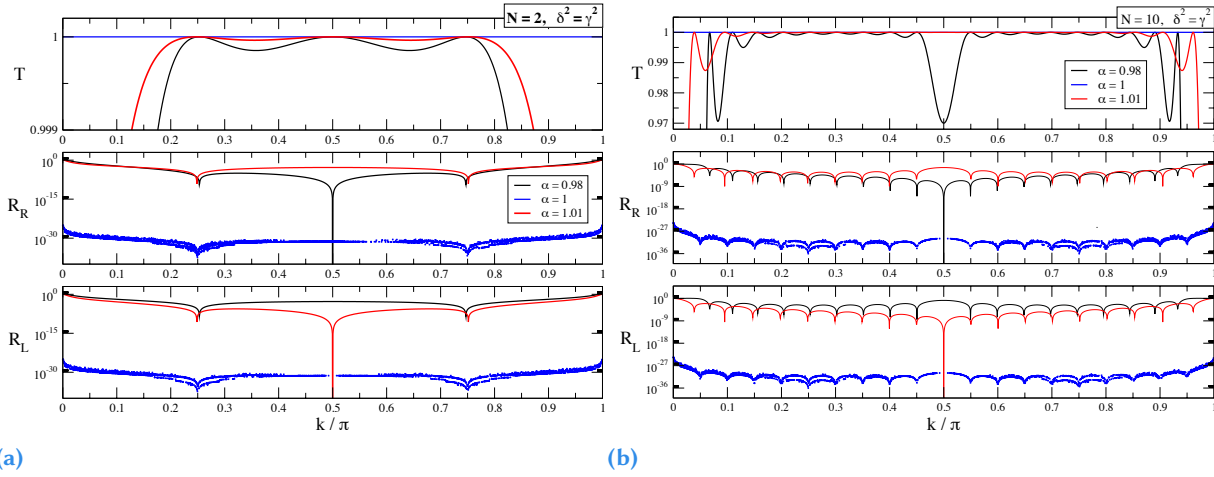
Al considerar que  $\gamma^2 = \delta^2$ , se tiene

$$\begin{aligned} F_{\pm} &= \frac{\pm\gamma \operatorname{sen}(k) + \frac{1}{2}(\alpha^2 - \delta^2 - 1)}{\alpha \operatorname{sen}(k)}, \\ &= \frac{\pm\gamma \operatorname{sen}(k) + \frac{1}{2}(\alpha^2 - (1 - \alpha)^2 - 1)}{\alpha \operatorname{sen}(k)} \\ &= \frac{\pm\gamma \operatorname{sen}(k) + \frac{1}{2}(\alpha^2 - 1 + 2\alpha - \alpha^2 - 1)}{\alpha \operatorname{sen}(k)} \\ &= \frac{\pm\gamma \operatorname{sen}(k) - (1 - \alpha)}{\alpha \operatorname{sen}(k)} \\ F_{\pm} &= \frac{\pm\gamma \operatorname{sen}(k) - \delta}{\alpha \operatorname{sen}(k)} \end{aligned}$$

Las expresiones para las funciones  $F_{\pm}(\alpha, \gamma, k)$  que se definieron previamente en (3.21) se simplifican llegando a,

$$F_{\pm}(\alpha, \gamma, k) = \frac{\pm\gamma \operatorname{sen}(k) - \delta}{\alpha \operatorname{sen}(k)}. \quad (3.53)$$

Las propiedades de transporte para este caso también se ven afectadas al hacer esta suposición, así que en base a la ecuación (3.53) se obtiene,



**Fig. 3.15.:** Comportamiento del coeficiente de transmisión y de los coeficientes de reflexión derecha e izquierda en función del número de onda, en el caso específico  $\delta^2 = \gamma^2$ , en el caso (a) se muestra  $N = 2$ , donde  $\alpha$  toma los valores 0.98, 1 y 1.01; mientras que el caso (b) corresponde a  $N = 10$ .

$$F_+ F_- = \frac{\delta^2 - \gamma^2 \sin^2(k)}{\alpha^2 \sin^2(k)} = \frac{\delta^2 (1 - \sin^2(k))}{\alpha^2 \sin^2(k)} = \frac{\delta^2}{\alpha^2} \cot^2(k). \quad (3.54)$$

Dando como resultado que el coeficiente de transmisión y de reflexión dados por la ecuación (3.34) se modifican para llegar a,

$$T = \frac{1}{1 + \frac{\sin^2(2N\mu)}{\sin^2(2\mu)} \frac{\delta^2}{\alpha^2} \cot^2(k)},$$

$$\frac{R_R}{T} = \frac{\sin^2(2N\mu)}{\sin^2(2\mu)} \frac{1}{\alpha^2} \left[ \gamma - \frac{\delta}{\sin(k)} \right]^2, \quad \frac{R_L}{T} = \frac{\sin^2(2N\mu)}{\sin^2(2\mu)} \frac{1}{\alpha^2} \left[ \gamma + \frac{\delta}{\sin(k)} \right]^2. \quad (3.55)$$

En vista de que  $\gamma$  puede ser tanto un parámetro positivo (para  $\alpha < 1$ ) como negativo (si  $\alpha > 1$ ), la ecuaciones (3.55) pueden simplificarse aún más. Retomando la expresión algebraica que define al parámetro  $\delta$  puede notarse que,

$$\gamma = |\delta| = |1 - \alpha| = \begin{cases} 1 - \alpha & \text{para } \alpha < 1 \\ \alpha - 1 & \text{para } \alpha > 1 \end{cases}. \quad (3.56)$$

Tomando el caso donde el acoplamiento inter-dímero ( $\eta$ ) es mayor que el acoplamiento intra-dímero ( $\varepsilon$ ), es decir,  $\alpha < 1$ , se tiene que,

$$F_{\pm}(\alpha, \gamma, k) = \frac{\gamma}{\alpha} (\pm 1 - \csc(k)). \quad (3.57)$$

El comportamiento de estas propiedades de transporte se representa en la figura 3.15 para tamaños de cadena  $N = 2$  y  $N = 10$  dímeros. Ambas estructuras presentan una resonancia de Fabry-Pérot y una resonancia tipo  $U$ , cuyas posiciones están dadas por las ecuaciones (3.37) y (3.40) que bajo nuestra suposición  $\gamma^2 = \delta^2$  se reducen a

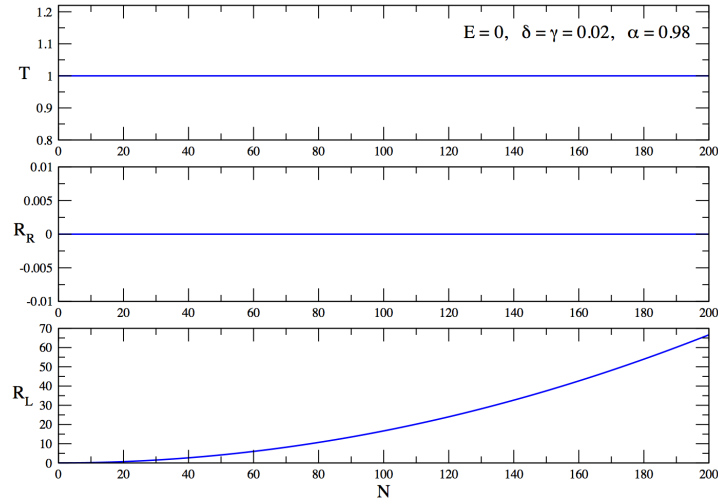
$$E_{FP}^2 = 4\alpha \cos\left(\frac{m\pi}{2N}\right) \quad \text{y} \quad E_U = 0, \quad (3.58)$$

respectivamente. Como lo confirma la figura 3.15, la resonancia  $U$  aparece justo en el centro de la banda y ya que  $E_U = 0$ , además se presenta invisibilidad unidireccional en este punto ya que la reflexión izquierda se anula mientras que la reflexión por la derecha tiene un valor finito. Otro aspecto importante que podemos notar de la figura 3.15 es el caso  $\alpha = 1$ , considerado el caso simétrico; esto nos lleva a que  $\delta = 0$  por lo tanto implica que  $\gamma$  sea cero, lo que nos diría que no hay potencial en sitio dentro de la estructura, por lo que se espera que al hacer incidir una onda plana sobre dicha estructura, esta onda pasará como si no existiera cadena. Es por ello que la transmisión es perfecta y ambos coeficientes de reflexión son cero, tal y como lo muestra la línea azul de la figura 3.15.

En el caso  $\alpha = 0.98$ , tenemos determinados valores para el número de onda  $k$  donde se desvanecen los coeficientes de reflexión y se tiene transmisión perfecta; por ejemplo la reflexión izquierda se anula sólo en los puntos  $k = \pi/4$  y  $3\pi/4$ , mientras que para  $k = \pi/2$  aunque se tiene un valor finito en cuanto a la reflexión por la izquierda, no sucede lo mismo con el coeficiente de reflexión derecha, el cual tiende a cero, nótese que la diferencia entre estos puntos y la transmisión perfecta es mínima. Cuando el parámetro  $\alpha$  toma el valor 1.01 ocurre exactamente lo contrario, siendo ahora en el coeficiente de reflexión por la izquierda el que se anula, mientras que la reflexión derecha se mantiene con un valor finito.

Otro punto de interés es analizar lo que ocurre con las expresiones obtenidas de las propiedades de transporte en los puntos excepcionales de este sistema definidos por  $E_\pi^2 = \delta^2 - \gamma^2$  con  $\mu = \pi/2$  y  $E_0^2 = (1 + \alpha)^2 - \gamma^2$  para  $\mu = 0$  bajo la condición  $\gamma^2 = \delta^2$ . Empecemos con el valor del número de onda para el centro de la banda de energías,  $\mu = \pi/2$ , donde desde la expresión para la relación de dispersión se encuentra que la energía es igual a cero,  $E_\pi = 0$  implicando que el número de onda  $k$  coincide con el parámetro tipo Bloch  $\mu$ , además la función  $F_+$  se anula y por consiguiente también el coeficiente de reflexión por la derecha. Se realiza una expansión alrededor de  $E_\pi = 0$ , para obtener una expresión que no se invalide para el coeficiente de reflexión izquierda, ésta depende del cuadrado del tamaño del sistema con una constante de proporcionalidad que proviene de la función:  $F_- = -\frac{2\gamma}{\alpha}$ , simplificando las propiedades de transporte

$$T \approx \frac{1}{1 - \left[N\frac{(1+\alpha)}{\alpha} \cot(k)\right]^2}, \quad R_R = 0, \quad R_L \approx N^2 \left[\frac{2\gamma}{\alpha}\right]. \quad (3.59)$$



**Fig. 3.16.:** Coeficientes de transmisión por derecha e izquierda en función del número de dímeros,  $N$ , en el punto excepcional correspondiente a  $\mu = \pi/2$  y  $\delta^2 = \gamma^2$  ubicado en el centro de la banda  $E = 0$ .

La figura 3.16 muestra el comportamiento de las propiedades de transporte en el punto excepcional  $\mu = \pi/2$  para  $\delta^2 = \gamma^2$ , donde los coeficientes de transmisión y de reflexión por la derecha no dependen del número de dímeros y siendo  $T$  una transmisión perfecta; mientras que el coeficiente de reflexión por la izquierda es proporcional a  $N^2$ . En otras palabras, al tomar una onda incidente que viaje de derecha a izquierda, el modelo propuesto pareciera invisible ante dicha onda, ya que no presenta reflexión,  $R_R = 0$ ; al intercambiar la dirección de la onda incidente se obtiene que cierta parte de ella se refleja aunque la transmisión sigue siendo perfecta para ambos casos.

# Matriz de dispersión

Lo que se pretende en este capítulo es obtener la matriz de dispersión que caracteriza al sistema previamente propuesto para contrastar con los resultados obtenidos en el capítulo 3 donde se aplicó el formalismo de la matriz de transferencia. La matriz de transferencia total del sistema, la cual relaciona las ondas incidentes y salientes de una zona de dispersión, está definida mediante la expresión (ver imagen 4.1),

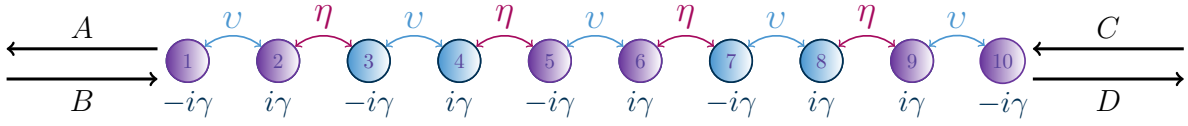
$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

Las entradas de la matriz  $M$  tienen una forma dada por (3.20), para tener un fácil manejo de los cálculos que realizaremos posteriormente se renombrarán de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} M_{11} &= a^* = \cos(2N\mu) + i \frac{\sin(2N\mu)}{\sin(2\mu)} \left[ \frac{1}{\alpha} \sin(2k) + \frac{3}{2} \cos(k) (F_+ + F_-) \right], \\ M_{12} &= i b(\gamma) = i e^{ik} \frac{\sin(2N\mu)}{\sin(2\mu)} F_+(\gamma, \alpha, k), \\ M_{21} &= -i b^*(-\gamma) = -i e^{-ik} \frac{\sin(2N\mu)}{\sin(2\mu)} F_-(\gamma, \alpha, k), \\ M_{22} &= a = \cos(2N\mu) - i \frac{\sin(2N\mu)}{\sin(2\mu)} \left[ \frac{1}{\alpha} \sin(2k) + \frac{3}{2} \cos(k) (F_+ + F_-) \right]. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Bajo la consideración hecha en (4.2), la forma que toma de la matriz de transferencia total  $M$  es

$$M = \begin{pmatrix} a^* & ib(\gamma) \\ -ib^*(-\gamma) & a \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$



**Fig. 4.1.:** Esquema del sistema unidimensional  $\mathcal{PT}$  simétrico con acoplamientos asimétricos donde se indican las ondas incidente, reflejadas y transmitidas.

Teniendo en cuenta que las entradas de la matriz de transferencia pueden expresarse en términos de las amplitudes de los coeficientes de transmisión y reflexión (3.22), debido a las etiquetas que se introdujeron para redefinir las entradas de  $M$ , las amplitudes quedan ahora definidas como,

$$\begin{aligned}
 M_{22} = \frac{1}{t} = a &\Rightarrow t = \frac{1}{a}, \\
 M_{12} = \frac{r_R}{t} = ib(\gamma) &\Rightarrow r_R = \frac{ib(\gamma)}{a}, \\
 M_{21} = -\frac{r_L}{t} = -ib^*(-\gamma) &\Rightarrow r_L = \frac{ib^*(-\gamma)}{a}.
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

De las ecuaciones anteriores se obtiene la matriz de dispersión  $S$  correspondiente a la cadena que se ha propuesto. La diferencia entre  $S$  y  $M$  es la manera en como aborda la relación entre las ondas que participan en el problema de dispersión, lo que se espera de  $S$  es una ecuación que explique como cambian las ondas entrantes respecto a las salientes, como se mencionó en el capítulo 2,

$$\begin{pmatrix} A \\ D \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} r_L & t_R \\ t_L & r_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix}; \tag{4.5}$$

donde  $r_L$  ( $r_R$ ) es el coeficiente de reflexión para una onda incidente desde la izquierda (derecha). Los términos fuera de la diagonal de la matriz de dispersión son los coeficientes  $t_R$  y  $t_L$ , los cuales están definidos por la misma expresión analítica dado que el determinante de la matriz de transferencia es igual a la unidad (3.25), en efecto

$$t_L = M_{11} - \frac{M_{12}M_{21}}{M_{22}} = \frac{\det M}{M_{22}} = \frac{1}{M_{22}} = t_R = t. \tag{4.6}$$

$t$  representa a la amplitud de la transmisión, la cual como hemos comprobado, es independiente de la dirección de incidencia. Por lo que la matriz de dispersión es

$$S = \begin{pmatrix} r_L & t \\ t & r_R \end{pmatrix} = \frac{1}{a} \begin{pmatrix} ib^*(-\gamma) & 1 \\ 1 & ib(\gamma) \end{pmatrix}. \tag{4.7}$$

Para una estructura que no presenta pérdidas ni ganancias, la matriz de dispersión  $\mathbf{S}$  es unitaria,

$$\mathbf{S}^\dagger = \mathbf{S}^{-1}, \quad (4.8)$$

donde  $\dagger$  es la transpuesta conjugada. El hecho de que sea unitaria impone una condición a sus eigenvalores  $s_\pm$ , los cuales deben ser *unimodulares*, es decir,

$$|s_\pm| = 1. \quad (4.9)$$

Por lo tanto, para este tipo de estructuras, la potencia se conserva sin amplificación o disipación. Sin embargo, cuando introducimos al sistema la misma cantidad de pérdida y ganancia, como es el caso de las estructuras  $\mathcal{PT}$  simétricas, el comportamiento espectral de la matriz de dispersión  $\mathbf{S}$  no es trivial. Se probará que la estructura  $\mathcal{PT}$  pasa por transiciones de fase, una de ellas donde se tienen autovalores reales y se cumple una conservación de energía característica los sistemas  $\mathcal{PT}$  simétricos, sin amplificación o disipación neta, pasando a un sistema no conservador con eigenvalores complejos. La forma de los autovalores de  $\mathbf{S}$  es la siguiente:

$$s_\pm = \frac{i}{2a} \left[ (b(\gamma) + b^*(-\gamma)) \pm \sqrt{(b(\gamma) - b^*(-\gamma))^2 - 4} \right]. \quad (4.10)$$

### Eigenvalores de $\mathbf{S}$

$$\begin{vmatrix} \frac{ib^*(-\gamma)}{a} - s_\pm & \frac{1}{a} \\ \frac{1}{a} & \frac{ib(\gamma)}{a} - s_\pm \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \left( \frac{ib^*(-\gamma)}{a} - s_\pm \right) \left( \frac{ib(\gamma)}{a} - s_\pm \right) - \frac{1}{a^2} = 0$$

$$\Rightarrow s_\pm^2 - \frac{i}{a} (b(\gamma) + b^*(-\gamma)) s_\pm - \frac{1}{a^2} (b^*(-\gamma) b(\gamma) + 1) = 0$$

$$\Rightarrow s_\pm = \frac{i}{2a} (b(\gamma) + b^*(-\gamma)) \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left( \frac{i}{a} (b(\gamma) + b^*(-\gamma)) \right)^2 - \frac{4}{a^2} (b^*(-\gamma) b(\gamma) + 1)}$$

$$\Rightarrow s_\pm = \frac{i}{2a} (b(\gamma) + b^*(-\gamma)) \pm \frac{i}{2a} \sqrt{b^2(\gamma) + b^{*2}(-\gamma) - 2b(\gamma) b^*(-\gamma) - 4}$$

$$\Rightarrow \boxed{s_\pm = \frac{i}{2a} \left[ (b(\gamma) + b^*(-\gamma)) \pm \sqrt{(b(\gamma) - b^*(-\gamma))^2 - 4} \right]}$$

De acuerdo con la expresión (4.10), se derivan tres casos posibles dependiendo de los parámetros del sistema:

$$\text{i) } (b(\gamma) - b^*(-\gamma))^2 < 4, \quad \text{ii) } (b(\gamma) - b^*(-\gamma))^2 > 4, \quad \text{iii) } (b(\gamma) - b^*(-\gamma))^2 = 4.$$

i. Empecemos con el caso  $(b(\gamma) - b^*(-\gamma))^2 < 4$ . Basados en esta suposición los eigenvalores toman la forma,

$$s_{\pm} = \frac{i}{2a} \left[ (b(\gamma) + b^*(-\gamma)) \pm i \sqrt{4 - (b(\gamma) - b^*(-\gamma))^2} \right]. \quad (4.11)$$

Mediante cálculos directos encontramos que dichos eigenvalores son unimodulares, es decir, su valor absoluto es 1.

$$\begin{aligned} |s_{\pm}| &= \left| \frac{1}{2a} \left[ i (b(\gamma) + b^*(-\gamma)) \mp \sqrt{4 - (b(\gamma) - b^*(-\gamma))^2} \right] \right| \\ &= \frac{1}{2a} \sqrt{(b(\gamma) + b^*(-\gamma))^2 + 4 - (b(\gamma) - b^*(-\gamma))^2} \\ &= \frac{1}{a} \sqrt{1 + b(\gamma) b^*(-\gamma)} \\ &= \frac{1}{a} \sqrt{1 - a^2 r_R r_L}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Donde en este último paso se ha expresado a “b” y “b\*” en términos de los coeficientes de reflexión,

$$\left. \begin{aligned} r_R = \frac{ib(\gamma)}{a} &\rightarrow b(\gamma) = -iar_R \\ r_L = \frac{ib^*(-\gamma)}{a} &\rightarrow b^*(-\gamma) = -iar_L \end{aligned} \right\} \Rightarrow b(\gamma) b^*(-\gamma) = -a^2 r_R r_L. \quad (4.13)$$

Por lo tanto, de ésta última ecuación el valor absoluto de los eigenvalores  $s_{\pm}$  es

$$\begin{aligned} |s_{\pm}| &= \frac{1}{a} \sqrt{1 - 1 + \frac{1}{t^2}} \\ &= t \sqrt{\frac{1}{t^2}} \\ |s_{\pm}| &= 1. \end{aligned} \quad (4.14)$$

**Producto**  $b(\gamma) b^*(-\gamma)$ 

Usando la entrada  $M_{11}$  de la matriz de transferencia y la expresión (4.3):

$$\begin{aligned}
 b(\gamma) b^*(-\gamma) &= -a^2 r_R r_L \\
 &= -\frac{1}{t^2} r_R r_L \\
 &= -\frac{1}{t^2} t (t - M_{11}) \\
 &= -\frac{1}{t^2} t (t - a) \\
 &= -\frac{1}{t} \left( t - \frac{1}{t} \right)
 \end{aligned}$$

$$b(\gamma) b^*(-\gamma) = -1 + \frac{1}{t^2}$$

Hemos probado que para este caso los eigenvalores son *unimodulares*, esto implica que se conserva la energía, no hay pérdidas ni ganancia en el sistema. Los eigenvectores para este caso tienen la forma

$$|\psi_{\pm}\rangle = \begin{pmatrix} 2 + i \left[ (b(\gamma) - b^*(-\gamma)) \pm i \sqrt{4 - (b(\gamma) - b^*(-\gamma))^2} \right] \\ 2 + i \left[ (b^*(-\gamma) - b(\gamma)) \pm i \sqrt{4 - (b(\gamma) - b^*(-\gamma))^2} \right] \end{pmatrix}. \quad (4.15)$$

Estos eigenvectores son  $\mathcal{PT}$  simétricos, ya que al aplicar el operador  $\mathcal{PT}$  se transforman en sí mismos,  $|\psi_{\pm}\rangle \xrightarrow{\mathcal{PT}} |\psi_{\pm}\rangle$ . En este caso en particular se considera que nos encontramos en la *fase  $\mathcal{PT}$  simétrica*.

- ii. El siguiente caso que puede ocurrir corresponde a la suposición  $(b(\gamma) - b^*(-\gamma))^2 > 4$ , donde la forma de los eigenvalores y eigenvectores es

$$s_{\pm} = \frac{i}{2a} \left[ (b(\gamma) + b^*(-\gamma)) \pm i \sqrt{(b(\gamma) - b^*(-\gamma))^2 - 4} \right], \quad (4.16)$$

$$|\psi_{\pm}\rangle = \begin{pmatrix} 2 + i \left[ (b^*(-\gamma) - b(\gamma)) \pm i \sqrt{(b(\gamma) - b^*(-\gamma))^2 - 4} \right] \\ 2 + i \left[ (b(\gamma) - b^*(-\gamma)) \pm i \sqrt{(b(\gamma) - b^*(-\gamma))^2 - 4} \right] \end{pmatrix}. \quad (4.17)$$

En este caso los eigenvectores no son  $\mathcal{PT}$  simétricos, ya que no regresan a ser ellos mismos después de aplicarles el operador  $\mathcal{PT}$ ; lo que sucede es que  $|\psi_{\pm}\rangle \xrightarrow{\mathcal{PT}} |\psi_{\mp}\rangle$ . Además, podemos agregar que la matriz de dispersión satisface la siguiente transformación

$$\mathcal{PTSP}\mathcal{T} = \mathbf{S}^{-1}. \quad (4.18)$$

De ella podemos deducir que los eigenvalores son recíprocos conjugados,  $s_{\mp}^* s_{\pm} = 1$ , implicando que si  $|s_{+}| > 1$  entonces  $|s_{-}| < 1$ . Esto es característico de la *fase  $\mathcal{PT}$  simétrica rota*.

iii. Por último, si  $(b(\gamma) - b^*(-\gamma))^2 = 4$ , se tienen eigenvalores degenerados

$$s_{+} = s_{-} = \frac{i}{2a} \left[ (b(\gamma) + b^*(-\gamma)) \right]. \quad (4.19)$$

Para simplificar esto aún más, podemos notar que debido a la forma general de los eigenvalores dada por la ecuación (4.10) se satisface,  $s_{+} s_{-} = -|a|^2/a^2$ ; por lo que, los eigenvalores y eigenvectores toman la forma

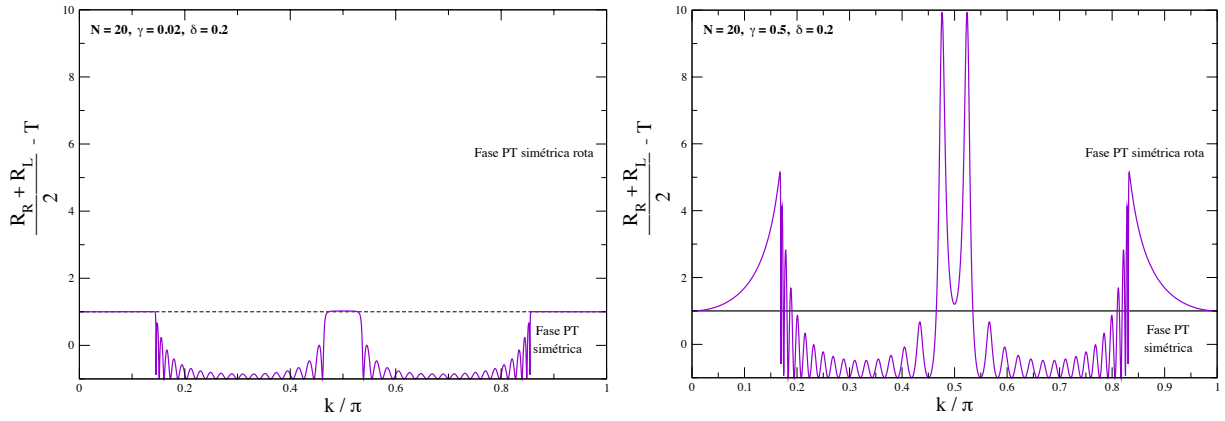
$$s_{+} = s_{-} = \pm i \frac{|a|}{a}, \quad |\psi_{\pm}\rangle = \begin{pmatrix} 1 \pm i \\ 1 \mp i \end{pmatrix}. \quad (4.20)$$

Este caso nos encontramos en el punto excepcional donde la simetría  $\mathcal{PT}$  sufre una transición de fase, ya sea de valores imaginarios a reales o complejos o viceversa.

En resumen, los eigenvalores de la matriz de dispersión  $\mathbf{S}$  caracterizan las fases  $\mathcal{PT}$  del sistema; sin embargo un criterio más simple puede obtenerse en términos de los coeficientes de transmisión y reflexión:

$$\frac{R_L + R_R}{2} - T \begin{cases} < 1, & \text{para fase } \mathcal{PT} \text{ simétrica} \\ = 1, & \text{punto de ruptura para } \mathcal{PT}. \\ > 1, & \text{para fase } \mathcal{PT} \text{ simétrica rota} \end{cases} \quad (4.21)$$

La expresión (4.21) indica las transiciones de fase de la simetría  $\mathcal{PT}$  en términos de las propiedades de transporte, la figura 4.2 contrasta dos casos muy diferentes dependiendo del valor del parámetro  $\gamma$  respecto a la asimetría del sistema  $\delta$ . Como antes se explicó, para el caso  $\gamma^2 < \delta^2$  la transmisión es siempre menor que uno y se tienen dos regiones simétricas con respecto al centro de la banda donde el sistema se encuentra en la fase  $\mathcal{PT}$  simétrica, debido a que al graficar la ecuación (4.21), ésta se encuentra por debajo de la unidad y los extremos de la banda junto con la región del centro de la banda muestra la ruptura de la simetría  $\mathcal{PT}$  (ver figura 4.2a). Para el siguiente caso, 4.2b muestra a un parametro  $\gamma$  mayor



**Fig. 4.2.:** Comportamiento de la ecuación (4.21) para a)  $\gamma^2 < \delta^2$  y b)  $\gamma^2 > \delta^2$ . En ambos casos se considera una cadena de 20 dímeros.

que  $\delta$ , puede notarse que las regiones de los extremos y el centro de la banda toman valores que son considerablemente mayores a uno, indicando que ahí no hay simetría  $\mathcal{PT}$ ; la región del centro de la banda es característica ya que la transmisión es mayor que uno, sin embargo aún se tienen regiones donde podemos encontrar que el sistema sigue satisfaciendo la simetría  $\mathcal{PT}$ .

Partiendo de la matriz de dispersión  $\mathbf{S}$  podemos analizar la ruptura de la simetría  $\mathcal{PT}$ , la simetría no se rompe durante el proceso de dispersión ya que no depende del tiempo.

#### 4.0.1 Matriz de dispersión $\mathbf{S}_c$

Existe cierta libertad en la definición de la matriz de dispersión  $\mathbf{S}$  para modelos unidimensionales, una de ellas corresponde a la permutación de los canales de salida; dando lugar a una matriz de dispersión alternativa que denotaremos por  $\mathbf{S}_c$ :

$$\begin{pmatrix} D \\ A \end{pmatrix} = \mathbf{S}_c \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} t & r_L \\ r_R & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix}. \quad (4.22)$$

Esta matriz de dispersión alterna, no preserva la forma de los eigenvalores obtenidos para la matriz  $\mathbf{S}$  (4.10) debido a la permutación que se ha realizado. Dando lugar a dos diferentes criterios para las fases  $\mathcal{PT}$ -simétrica y  $\mathcal{PT}$ -simétrica rota, tanto como para los puntos excepcionales. Llevando así a diferentes preguntas sobre cuales de los eigenvalores y eigenvectores de ambas matrices de dispersión son físicamente significativos, al igual para las transiciones.

Lo primero que diremos es que ambas matrices nos llevan a las mismas definiciones de las amplitudes de los coeficientes  $t$ ,  $r_L$  y  $r_R$ , dando el mismo estado dispersado para el mismo estado de entrada. La forma analítica de los eigenvalores de la matriz  $\mathbf{S}_c$  están dados por la siguiente expresión,

$$s_{1,2} = t \pm \sqrt{r_L r_R} = \frac{1}{a} \left( 1 \pm \sqrt{-b(\gamma)b^*(-\gamma)} \right). \quad (4.23)$$

Usando la propiedad de la matriz de transferencia (2.27) ( $S^* = S^{-1}$ ), mediante un poco de álgebra se llega a la expresión,  $r_L = -\frac{t}{t^*} r_L^*$ . Con esto la expresión analítica de los eigenvalores queda expresada sólo en términos de la amplitud y del coeficiente de transmisión,

$$s_{1,2} = t \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{1}{T}} \right). \quad (4.24)$$

La forma del coeficiente de transmisión se determinó en la sección 3.3, ver la ecuación (3.35), la cual podemos sustituir para mostrar la forma final de los eigenvalores de la matriz de dispersión:

$$s_{1,2} = t \left( 1 \pm \sqrt{-\frac{\sin^2(2N\mu)}{\sin^2(2\mu)} F_+(\gamma, \alpha, k) F_-(-\gamma, \alpha, k)} \right). \quad (4.25)$$

**Obtención de la ecuación**  $r_L = -\frac{t}{t^*} r_L^*$

$$\begin{aligned} S^* &= S^{-1} \\ \begin{pmatrix} t^* & r_R^* \\ r_L^* & t^* \end{pmatrix} &= \frac{1}{t^2 - r_L r_R} \begin{pmatrix} t & -r_R \\ -r_L & t \end{pmatrix} \\ \Rightarrow r_L^* &= -\frac{r_L}{t^2 - r_L r_R} \end{aligned}$$

La entrada  $S_{11}$  está dada por la expresión

$$t^* = \frac{t}{t^2 - r_L r_R} \quad \Rightarrow \quad \frac{t}{t^*} = t^2 - r_L r_R$$

sustituyendo en la ecuación para  $r_L^*$  se obtiene finalmente

$$r_L = -\frac{t}{t^*} r_L^*$$

El análisis de los eigenvalores pertenecientes a la matriz  $S_c$  (4.25) empieza teniendo en consideración el valor del parámetro  $\alpha$ . Este puede ser mayor ( $v > \eta$ ) o menor ( $v < \eta$ ) que la unidad; teniendo implicaciones diferentes en cada caso, ya que alguna de las funciones  $F_{\pm}$  que se introdujeron en el capítulo 3 es siempre menor cero dependiendo del valor de  $\alpha$ . Por ejemplo, en el caso  $\alpha < 1$ , la función  $F_-(-\gamma, \alpha, k)$  es siempre menor que cero sin importar el valor de los demás parámetros de los

cuales depende el sistema, esto se mostró en la figura 3.5b. En base a esto se tienen los siguientes casos para el argumento de la raíz cuadrada de la ecuación (4.25).

$$\text{Para } \alpha < 1 : s_{1,2} = t \left( 1 \pm \sqrt{\Delta F_-(-\gamma, \alpha, k)} \right),$$

$$\Delta = -\frac{\sin^2(2N\mu)}{\sin^2(2\mu)} F_+(\gamma, \alpha, k) \begin{cases} > 0 & \Rightarrow F_+ < 0 \\ < 0 & \Rightarrow F_+ > 0 \\ = 0 & \Rightarrow F_+ = 0 \quad \text{ó} \quad \mu = \frac{m\pi}{2N} \end{cases}. \quad (4.26)$$

Se introduce la variable  $\Delta$ , formada por los términos que pueden hacerse nulos, mayores o menores que cero y en base a ella, el modulo de los eigenvalores pertenecerá a alguno de los tres casos mostrados anteriormente. Los eigenvalores son unimodulares cuando  $\Delta > 0$ , es decir,

$$|s_{1,2}| = 1, \quad (4.27)$$

correspondiente a la fase  $\mathcal{PT}$  simétrica, donde los eigenvectores son también  $\mathcal{PT}$  simétricos y por lo tanto los eigenvalores son unitarios. Mientrás que el caso  $\Delta < 0$  corresponde a la fase  $\mathcal{PT}$  simétrica rota, donde los eigenvectores no son  $\mathcal{PT}$  simétricos y se transforman el uno en el otro al aplicarles el operador  $\mathcal{PT}$ . Como consecuencia los eigenvalores tienen modulos recíprocos,

$$|s_1| = 1/|s_2|. \quad (4.28)$$

Por último,  $\Delta = 0$  es un criterio que marca la transición de fase donde se rompe espontáneamente la simetría  $\mathcal{PT}$ , cumpliendo con las características de un punto excepcional donde dos eigenvalores de la matriz de dispersión  $\mathbf{S}$  coinciden,

$$s_1 = s_2. \quad (4.29)$$

Las fases que presenta la simetría  $\mathcal{PT}$  y los puntos excepcionales también pueden ser determinados en términos del coeficiente de transmisión  $T$  cuando este sea menor, mayor o igual a uno. El procedimiento para llegar a ello es igualar las ecuaciones (4.24) y (4.26):

$$\begin{aligned} s_{1,2} &= t \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{1}{T}} \right) = t \left( 1 \pm \sqrt{\Delta F_-} \right) \\ \Rightarrow \sqrt{1 - \frac{1}{T}} &= \sqrt{\Delta F_-} \\ \Rightarrow 1 - \frac{1}{T} &= \Delta F_- \end{aligned}$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{1 - \Delta F_-}. \quad (4.30)$$

A partir de esta última expresión es posible decir si nos encontramos en la fase  $\mathcal{PT}$  o no, dependiendo del valor que tome la transmisión  $T$  en base a como se comporte la variable  $\Delta$ , cuyos casos se encuentran dados por la ecuación (4.26), llegando a las siguientes tres posibilidades:

$$T \begin{cases} < 1 \rightarrow \text{Fase } \mathcal{PT} \text{ simétrica} \\ > 1 \rightarrow \text{Fase } \mathcal{PT} \text{ simétrica rota} \\ = 1 \rightarrow \text{Punto excepcional} \end{cases} \quad (4.31)$$

#### Fases $\mathcal{PT}$ simétricas en función de $T$

• Fase  $\mathcal{PT}$  simétrica

$$\Delta > 0$$

$$\Rightarrow \Delta F_- < 0$$

$$\Rightarrow 1 - \Delta F_- > 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{T} > 0$$

$$\Rightarrow \boxed{T < 1}$$

• Fase  $\mathcal{PT}$  simétrica rota

$$\Delta < 0$$

$$\Rightarrow -\Delta > 0$$

$$\Rightarrow -\Delta F_- < 0$$

$$\Rightarrow 1 - \Delta F_- < 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{T} > 1$$

$$\Rightarrow \boxed{T > 1}$$

• Punto Excepcional

$$\Delta = 0$$

$$\Rightarrow \Delta F_- = 0$$

$$\Rightarrow 1 - \Delta F_- = 1$$

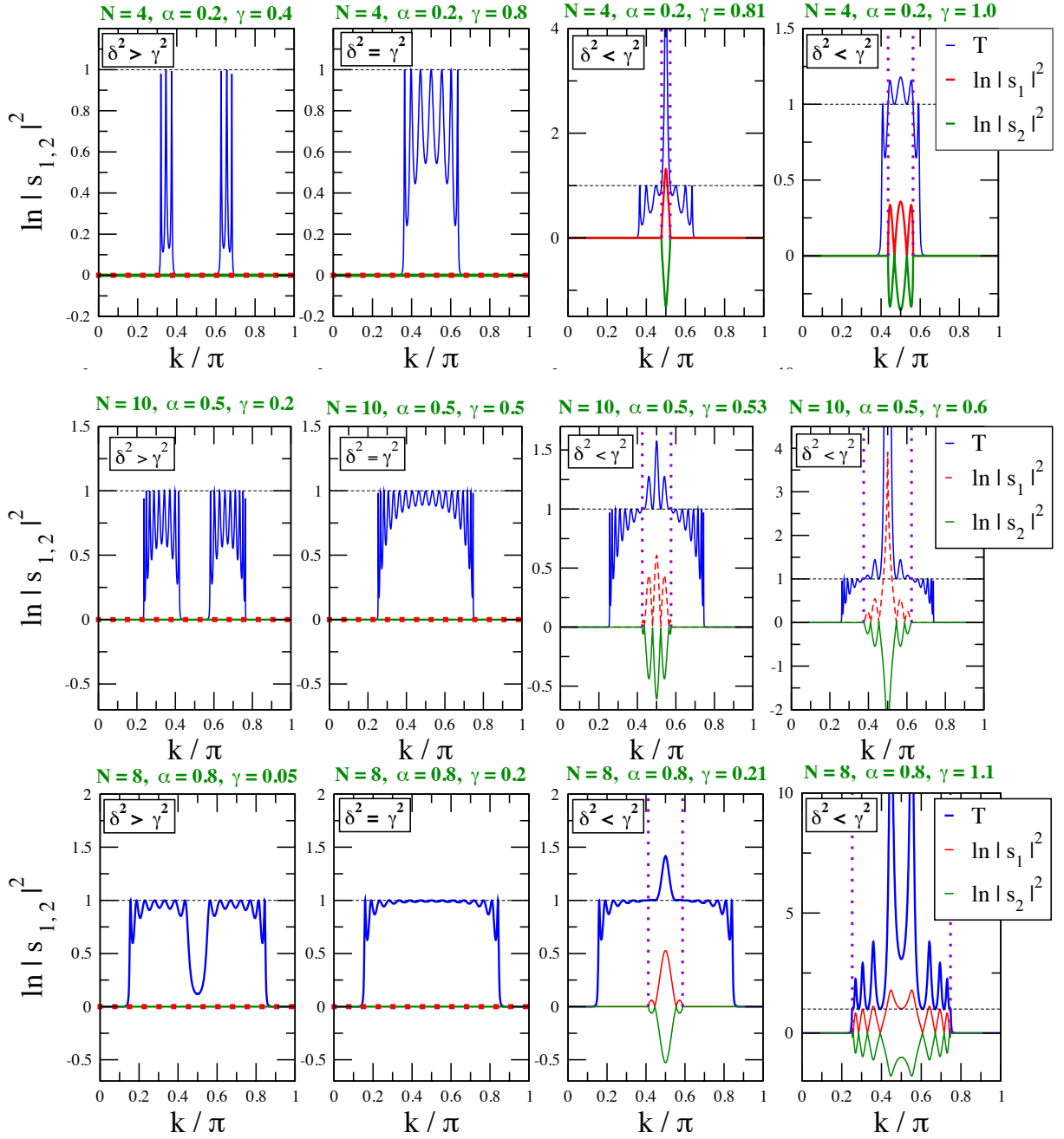
$$\Rightarrow \frac{1}{T} = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{T = 1}$$

El caso en el cual nos enfocaremos es cuando la transmisión es mayor que uno, es decir, cuando nos encontramos en la fase de simetría  $\mathcal{PT}$  rota; ya que como se mostró en la sección 3.3.3, para un cierto rango de valores del parámetro de no-hermiticidad del sistema ( $\gamma$ ) se tiene una transmisión mayor que la unidad y comienza la aparición de las resonancias  $U$ , causadas por la intersección de la función  $F_+(\gamma, \alpha, k)$  con el eje  $x = 0$ , siempre y cuando  $\alpha < 1$ . Ese rango está acotado por la razón de los acoplamientos definida como  $\alpha$ ,

$$T > 1: \quad 1 - \alpha < \gamma < 1 + \alpha. \quad (4.32)$$

De esta manera podemos afirmar que cuando se tomen valores para el coeficiente de no-hermiticidad ( $\gamma$ ) menores a  $1 - \alpha = \delta$ , nos encontraremos en la fase  $\mathcal{PT}$  simétrica, tal y como lo muestra la figura 4.3 donde se grafica el  $\ln |s_{1,2}|^2$  para los casos  $\alpha = 0.2, 0.5$  y  $0.8$  con un tamaño de sistema de 4, 10 y 8 dímeros respectivamente; mientras que si  $\gamma$  rebasa el valor de  $\delta$  aparece cierta región donde la simetría



**Fig. 4.3.:** Logaritmo de los eigenvalores de la matriz  $S$  en función del número de onda  $k$ .  $\ln |s_1|^2$  ( $\ln |s_2|^2$ ) está representado por la línea roja (verde) y la línea azul representa la transmisión  $T$ . Las líneas moradas punteadas muestran la posición de los puntos excepcionales.

$\mathcal{PT}$  se rompe, lo cual se traduce en que los eigenvalores tienen módulo recíproco y analíticamente esta región está delimitada por las resonancias  $U$ ,

$$k_{U_{\pm}} = \cos^{-1} \left[ \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\gamma^2} (\gamma^2 - \delta^2) \left( (1 + \alpha)^2 - \gamma^2 \right)} \right]. \quad (4.33)$$

El sistema estará dentro de la fase  $\mathcal{PT}$  simétrica rota cuando el vector de onda  $k_{U_-} < k < k_{U_+}$ , lo cual se traduce en que los eigenvalores tienen módulos recíprocos. Como lo muestra la figura 4.3(b), las líneas rojas y verdes representan el  $\ln |s_1|^2$  y  $\ln |s_2|^2$  respectivamente, las cuales son definitivamente cero cuando  $k < k_{U_-}$  y  $k > k_{U_+}$ , indicando que el sistema se encuentra en la fase  $\mathcal{PT}$  simétrica.

Al realizar una permutación de los canales de salida a la matriz  $\mathbf{S}$ , nos brinda la aparición de las resonancias  $U$ , las posiciones y ecuaciones coinciden con las antes obtenidas (ecuación (3.41)). Cuando se tiene la aparición de dos resonancia  $U$ , estas delimitan cierta región donde la simetría  $\mathcal{PT}$  se rompe espontáneamente y el coeficiente de transmisión es superior a uno. Las regiones fuera de este rango, pertenecen al régimen  $\mathcal{PT}$  simétrico donde los eigenvalores son unimodulares.

Este capítulo se analiza la dinámica de una cadena unidimensional en la aproximación de amarre fuerte mediante el estudio de los eigenvalores y eigenvectores. Para ello vamos a considerar el hamiltoniano que caracteriza a nuestro modelo.

$$H = \sum_n \left\{ \varepsilon_n c_n^\dagger c_n + \nu_{n,n+1} c_n^\dagger c_{n+1} + \nu_{n,n-1} c_n^\dagger c_{n-1} \right\}, \quad (5.1)$$

donde  $c_n^\dagger$  y  $c_n$  son los operadores de creación y aniquilación de una partícula en el  $n$ -ésimo sitio, respectivamente. La partícula puede saltar de un sitio a otro debido al término de acoplamiento de primeros vecinos  $\nu_{n,n\pm 1}$  dado por (3.3). Considere a una sola partícula propagándose a través de toda la cadena, cuya dinámica puede describirse en la base de posición - ocupación, denotada por  $\{|n\rangle, n = 1, \dots, 2N\}$ , de tal manera que

$$\{|n\rangle = |00 \dots 1_n \dots\rangle\}, \quad (5.2)$$

donde  $n$  denota un sitio particular ocupado por una excitación y  $2N$  es el número total de sitios en la cadena. La acción de los operadores de creación y aniquilación en la base de ocupación es la siguiente:

$$\begin{aligned} c_n^\dagger |0\rangle &= |1\rangle, \\ c_n^\dagger |n\rangle &= |0\rangle, \\ c_n^\dagger |j\rangle &= 0, \quad n \neq j, \end{aligned} \quad (5.3)$$

considerando sólo estados ocupados; el vacío lo denotamos por  $|0\rangle$ . El hamiltoniano también puede representarse en esta base de ocupación, la forma que toma es

$$H = \sum_n \left\{ \varepsilon_n |n\rangle\langle n| + \nu_{n,n+1} |n\rangle\langle n+1| + \nu_{n,n-1} |n\rangle\langle n-1| \right\}. \quad (5.4)$$

La ecuación (5.4) es un hamiltoniano de enlace fuerte simplificado, cuya representación es una matriz tridiagonal en la base de estados ocupados individualmente,

$$H = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \nu_{1,2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \nu_{2,1} & \varepsilon_2 & \nu_{2,3} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \nu_{3,2} & \varepsilon_3 & \nu_{3,4} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & \varepsilon_{2N-1} & \nu_{2N-1,2N} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & \nu_{2N,2N-1} & \varepsilon_{2N} \end{pmatrix}. \quad (5.5)$$

El hamiltoniano está representado en un subconjunto de los estados del espacio de Fock, el cual está conformado por estados que están múltiplemente ocupados; en estos momentos sólo consideramos estados ocupados individualmente pero podríamos pensar en la dinámica de dos excitaciones en una cadena.

Los elementos de la diagonal de la matriz (5.5) corresponde a las energías de los sitios, cuya forma es dada por la ecuación (3.2) y las amplitudes de salto que se encuentran en las subdiagonales inferior y superior obedecen la ecuación (3.3); por lo cual la representación matricial del hamiltoniano de nuestro modelo es:

$$H = \begin{pmatrix} -i\gamma & v & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ v & i\gamma & \eta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \eta & -i\gamma & v & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & -i\gamma & v \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & v & i\gamma \end{pmatrix}. \quad (5.6)$$

## 5.1 Dependencia Temporal

Supongamos que el sistema se encuentra al tiempo  $t = 0$  en un estado conocido  $|\Psi(t = 0)\rangle$ , además conocemos los eigenvalores  $\varepsilon_k$  y eigenvectores  $|\xi_k\rangle$  del hamiltoniano  $H$ . El estado  $|\Psi(t = 0)\rangle$  puede ser proyectado en la base de los eigenvectores del hamiltoniano,

$$|\Psi(t = 0)\rangle = \sum_k a_k |\xi_k\rangle, \quad a_k = \langle \xi_k | \Psi(t = 0) \rangle. \quad (5.7)$$

Al aplicar el operador de evolución temporal  $U(t)$  sobre un estado arbitrario  $|\Psi(t=0)\rangle$  lo evoluciona a un estado  $|\Psi(t)\rangle$ ,

$$U(t) |\Psi(t=0)\rangle = |\Psi(t)\rangle. \quad (5.8)$$

Al actuar dicho operador sobre los eigenvectores se obtiene,  $U(t) |\xi_k\rangle = \exp(-i\epsilon_k t/\hbar) |\xi_k\rangle$ , tal que

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle &= \sum_k a_k \exp(-i\epsilon_k t/\hbar) |\xi_k\rangle, \\ &= \sum_k \langle \xi_k | \Psi(t=0) \rangle \exp(-i\epsilon_k t/\hbar) |\xi_k\rangle. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Asumiremos que la función de onda (o el estado vector) se encuentra localizada inicialmente en un sitio  $l$ -ésimo particular de la cadena, es decir,  $|\Psi(t=0)\rangle = |l\rangle$ . Lo que nos interesa es la probabilidad de que un tiempo  $t$  después la excitación se encuentre en un sitio  $m$ -ésimo; entonces proyectaremos el estado vector  $|\Psi(t)\rangle$  en la base de ocupación, por lo cual calcularemos  $2N$  proyecciones  $b_{m,l}(t)$ , cuya forma esta dada por:

$$b_{m,l}(t) \langle m | \xi_k \rangle = \sum_k \langle \xi_k | l \rangle \langle m | \xi_k \rangle \exp(-i\epsilon_k t/\hbar). \quad (5.10)$$

De donde la probabilidad al tiempo  $t$  es  $|b_{m,l}(t)|^2$ , el subíndice  $l$  indica el lugar de la excitación inicial y  $m$  es el sitio donde se encuentra la excitación al tiempo  $t$ .

## 5.2 Análisis Analítico

Para estudiar la dinámica de una excitación dentro de la cadena unidimensional en la aproximación de amarre fuerte, lo haremos mediante el análisis de los eigenvalores y eigenvectores correspondientes a la matriz hamiltoniana (5.6). Los cuales se obtienen mediante el proceso de diagonalización. Se realizará el análisis teórico de la dependencia temporal partiendo del caso más sencillo, es decir, considerar que la cadena se compone de dos sitios. Por lo cual la matriz Hamiltoniana que representa a este dímero es,

$$H_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} -i\gamma & v \\ v & i\gamma \end{pmatrix}. \quad (5.11)$$

La forma de los eigenvalores está dada por la siguiente ecuación:

$$\epsilon_{1,2} = \pm \sqrt{v^2 - \gamma^2}. \quad (5.12)$$

Con eigenestados asociados

$$\begin{aligned}
 |\xi_1\rangle &= \frac{-i\gamma + \sqrt{v^2 - \gamma^2}}{v} |1\rangle + |2\rangle = \begin{pmatrix} \frac{-i\gamma + \sqrt{v^2 - \gamma^2}}{v} \\ 1 \end{pmatrix}, \\
 |\xi_2\rangle &= \frac{-i\gamma - \sqrt{v^2 - \gamma^2}}{v} |1\rangle + |2\rangle = \begin{pmatrix} \frac{-i\gamma - \sqrt{v^2 - \gamma^2}}{v} \\ 1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{5.13}$$

### Eigenvalores y eigenvectores de $H_{2 \times 2}$

Eigenvalores :

$$\begin{aligned}
 \det H_{2 \times 2} &= \begin{vmatrix} -i\gamma - \epsilon & v \\ v & i\gamma - \epsilon \end{vmatrix} = 0 \\
 \Rightarrow &(-i\gamma - \lambda)(i\gamma - \epsilon) - v^2 = 0 \\
 \Rightarrow &-i^2 \gamma^2 + i\gamma \epsilon - i\gamma \epsilon + \lambda^2 - v^2 = 0 \\
 \Rightarrow &\epsilon^2 + \gamma^2 - v^2 = 0 \\
 \Rightarrow &\boxed{\epsilon_{1,2} = \pm \sqrt{v^2 - \gamma^2}}
 \end{aligned}$$

Eigenvectores :

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} -i\gamma - \sqrt{v^2 - \gamma^2} & v \\ v & i\gamma - \sqrt{v^2 - \gamma^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 \Rightarrow &\begin{cases} (-i\gamma \pm \sqrt{v^2 - \gamma^2})a + vb = 0 \\ va + (i\gamma \pm \sqrt{v^2 - \gamma^2})b = 0 \end{cases} \\
 \Rightarrow &a = \frac{(-i\gamma \pm \sqrt{v^2 - \gamma^2})b}{v} \\
 \boxed{\xi_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{v^2 - \gamma^2} - i\gamma}{v} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{v^2 - \gamma^2} + i\gamma}{v} \\ 1 \end{pmatrix}}.
 \end{aligned}$$

Reconociendo a los eigenestados de energía como la base para los estados del dímero, podemos suponer que el sistema está preparado en algún estado inicial  $|\psi(0)\rangle$ ,

$$|\psi(0)\rangle = C_1 |\epsilon_1\rangle + C_2 |\epsilon_2\rangle, \tag{5.14}$$

de tal manera que el estado evolucionado en el tiempo es

$$|\psi(t)\rangle = C_1 e^{-i\sqrt{v^2 - \gamma^2} t/\hbar} |\epsilon_1\rangle + C_2 e^{i\sqrt{v^2 - \gamma^2} t/\hbar} |\epsilon_2\rangle. \tag{5.15}$$

Donde se han implementado los valores de energía (5.12) para los respectivos eigenestados de energía. Haciendo uso de la condición inicial, donde suponemos que el electrón se encuentra inicialmente en el lugar  $|\psi(0)\rangle = |1\rangle$ , podremos determinar las constantes  $C_{1,2}$  de la ecuación (5.14), por lo que tenemos

$$|1\rangle = C_1 |\epsilon_1\rangle + C_2 |\epsilon_2\rangle \quad (5.16)$$

y por lo tanto,

$$C_1 = \langle \epsilon_1 | 1 \rangle, \quad C_2 = \langle \epsilon_2 | 1 \rangle. \quad (5.17)$$

Partiendo de la definición de los estados  $|\lambda_{1,2}\rangle$ , notamos que

$$\langle \epsilon_1 | = \frac{i\gamma + \sqrt{v^2 - \gamma^2}}{v} \langle 1 | + \langle 2 |, \quad \langle \epsilon_2 | = \frac{i\gamma - \sqrt{v^2 - \gamma^2}}{v} \langle 1 | + \langle 2 |. \quad (5.18)$$

Sustituyendo en (5.16), obtenemos

$$C_1 = \frac{i\gamma + \sqrt{v^2 - \gamma^2}}{v}, \quad C_2 = \frac{i\gamma - \sqrt{v^2 - \gamma^2}}{v}. \quad (5.19)$$

Regresando al estado evolucionado (5.15) y haciendo uso de las ecuaciones anteriores, llegamos a la expresión final

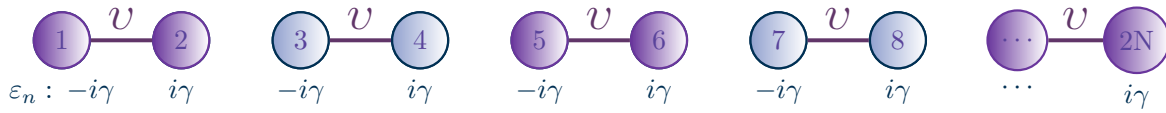
$$|\psi(t)\rangle = \frac{i\gamma + \sqrt{v^2 - \gamma^2}}{v} e^{-i\sqrt{v^2 - \gamma^2}t/\hbar} |\epsilon_1\rangle + \frac{i\gamma - \sqrt{v^2 - \gamma^2}}{v} e^{i\sqrt{v^2 - \gamma^2}t/\hbar} |\epsilon_2\rangle. \quad (5.20)$$

Nos interesa conocer la probabilidad de encontrar al electrón en  $|2\rangle$ , que está dada por

$$P_{|2\rangle}(t) = |\langle 2 | \psi(t) \rangle|^2 = |C(t)|^2. \quad (5.21)$$

Lo cual requiere que se calcule

$$\begin{aligned} C(t) &= \langle 2 | \psi(t) \rangle, \\ &= \frac{i\gamma + \sqrt{v^2 - \gamma^2}}{v} e^{-i\sqrt{v^2 - \gamma^2}t/\hbar} \langle 2 | \lambda_1 \rangle + \frac{i\gamma - \sqrt{v^2 - \gamma^2}}{v} e^{i\sqrt{v^2 - \gamma^2}t/\hbar} \langle 2 | \lambda_2 \rangle, \\ &= \frac{i\gamma + \sqrt{v^2 - \gamma^2}}{v} e^{-i\sqrt{v^2 - \gamma^2}t/\hbar} + \frac{i\gamma - \sqrt{v^2 - \gamma^2}}{v} e^{i\sqrt{v^2 - \gamma^2}t/\hbar}, \\ &= \frac{i\gamma}{v} \left[ e^{i\sqrt{v^2 - \gamma^2}t/\hbar} + e^{-i\sqrt{v^2 - \gamma^2}t/\hbar} \right] - \frac{\sqrt{v^2 - \gamma^2}}{v} \left[ e^{i\sqrt{v^2 - \gamma^2}t/\hbar} - e^{-i\sqrt{v^2 - \gamma^2}t/\hbar} \right], \\ &= \frac{i2\gamma}{v} \cos\left(\frac{\sqrt{v^2 - \gamma^2}t}{\hbar}\right) - \frac{i2\sqrt{v^2 - \gamma^2}}{v} \sin\left(\frac{\sqrt{v^2 - \gamma^2}t}{\hbar}\right), \end{aligned}$$



**Fig. 5.1.:** Cadena unidimensional con  $\eta = 0$ .

$$C(t) = \frac{i2}{v} \left[ \gamma \cos\left(\frac{\sqrt{v^2 - \gamma^2} t}{\hbar}\right) - \sqrt{v^2 - \gamma^2} \sin\left(\frac{\sqrt{v^2 - \gamma^2} t}{\hbar}\right) \right]. \quad (5.22)$$

Por lo tanto

$$P_{|2\rangle}(t) = \frac{2}{v} \left[ \gamma \cos\left(\frac{\sqrt{v^2 - \gamma^2} t}{\hbar}\right) - \sqrt{v^2 - \gamma^2} \sin\left(\frac{\sqrt{v^2 - \gamma^2} t}{\hbar}\right) \right]. \quad (5.23)$$

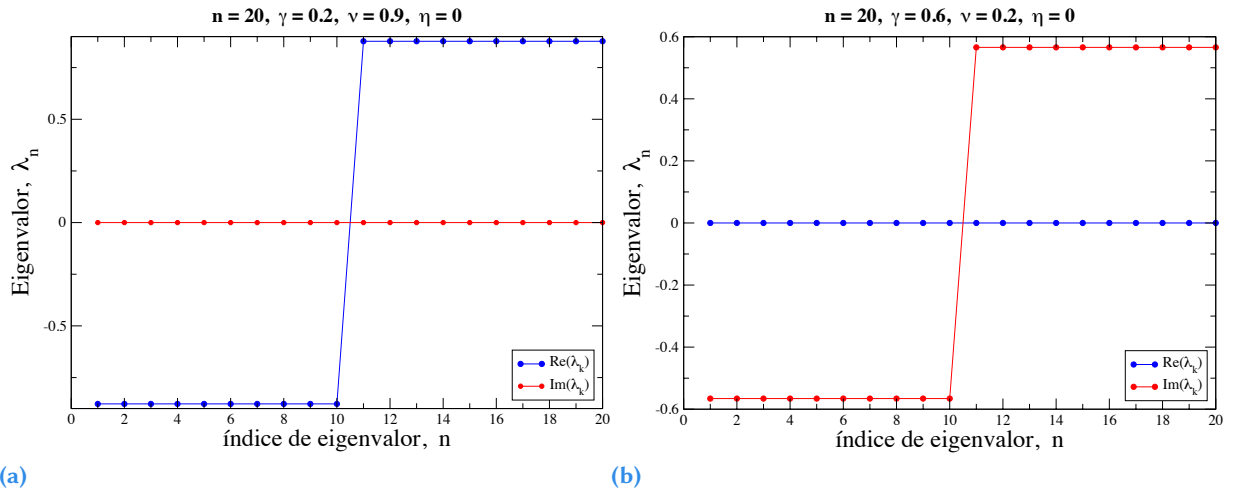
Esta última ecuación es la probabilidad de encontrar a la excitación inicial en el sitio  $|2\rangle$  al evolucionar el tiempo dentro de un dímero. La idea de explorar este caso radica en la correspondencia al caso extremo en que uno de los acoplamientos asimétricos que se han introducido desde el principio tome un valor nulo, es decir  $\eta = 0$ , este modelo se muestra esquemáticamente en la figura 5.1,

De acuerdo con la ecuación (5.12) los eigenvalores para una cadena de 20 sitios serán reales mientras el valor del acoplamiento no sea rebazado por el parámetro  $\gamma$  que caracteriza al potencial en sitio, una vez que este valor es superado los eigenvalores son completamente imaginarios. Podemos ver que cuando un acoplamiento es cero, cada dímero consiste en dos osciladores lineales con acoplamiento lineal; este caso ha sido ampliamente estudiado en la literatura y se conoce que las amplitudes aumentan exponencialmente respecto al tiempo. Esto es algo trivial, pero la verdadera pregunta es que pasa cuando se tienen acoplamientos diferentes de cero.

### 5.2.1 Dinámica en una cadena simétrica

Una cadena simétrica, se caracteriza por un potencial con la forma  $E_n = (-1)^n i\gamma$  y el hamiltoniano en representación matricial que lo describe es:

$$H = \begin{pmatrix} -i\gamma & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & i\gamma & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -i\gamma & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & -i\gamma & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 & i\gamma \end{pmatrix}_{n \times n}. \quad (5.24)$$



**Fig. 5.2.:** Eigenvalores para una cadena conformada por 20 sitios donde uno de los acoplamientos es nulo ( $\eta = 0$ ), mientras que el otro acoplamiento tiene un valor diferente de cero; dados por la ecuación (5.12). Se muestran dos casos a) caso donde se cumple que  $v > \gamma$  dando lugar a eigenvalores completamente reales y b) caso con eigenvalores imaginarios ya que  $v < \gamma$ .

Independientemente del tamaño de la cadena que se considere, este tipo de problemas puede resolverse de manera numérica. La solución implica conocer los eigenvalores y eigenvectores del sistema, ya que en base a ellos se obtiene el comportamiento de una excitación inicial en cualquier sitio de la estructura en función del tiempo al proyectar el estado vector  $|\Psi(t)\rangle$  en la base de ocupación.

La razón por la cual se reporta este caso es para hacer una comparación con el caso asimétrico y comparar tanto los eigenvalores como la evolución de la excitación inicial dentro de la estructura. Las figuras de estos cálculos están dados en las figuras 5.3 y 5.4 donde puede verse como el estado inicialmente localizado se delocaliza hacia los sitios adyacentes al lugar de la excitación inicial para después extenderse sobre todos los demás sitios que conforman la estructura. El eje horizontal de los gráficos es el índice de los sitios.

La figura 5.3 muestra los eigenvalores del hamiltoniano (5.24) para 200 sitios en función del índice de los eigenvalores. Presentándose dos casos donde varía el parámetro  $\gamma$ , se observa que al ir incrementando este parámetro también lo hace la cantidad de eigenvalores imaginarios representados por los puntos rojos en la imagen. La expresión analítica de los eigenvalores para el caso de la estructura simétrica es,

$$\epsilon_n = \sqrt{4 \cos^2 \left( \frac{n \pi}{2N} \right) - \gamma^2}, \quad n = 1, \dots, N - 1. \quad (5.25)$$

En el caso  $n > \frac{2N}{\pi} \cos^{-1} \left( \frac{\gamma}{2} \right)$  los eigenvalores son completamente complejos; en el caso contrario los eigenvalores son completamente reales.

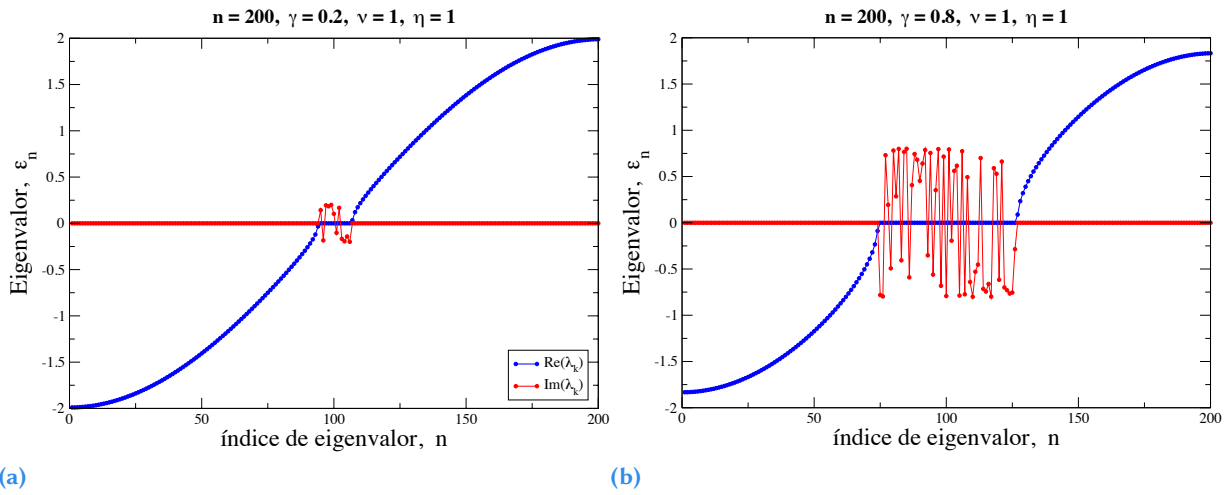


Fig. 5.3.: Eigenvalores obtenidos de manera numérica para una cadena simétrica de 200 sitios con  $\eta = 1 = v$ . a)  $\gamma = 0.2$  y b)  $\gamma = 0.9$ .

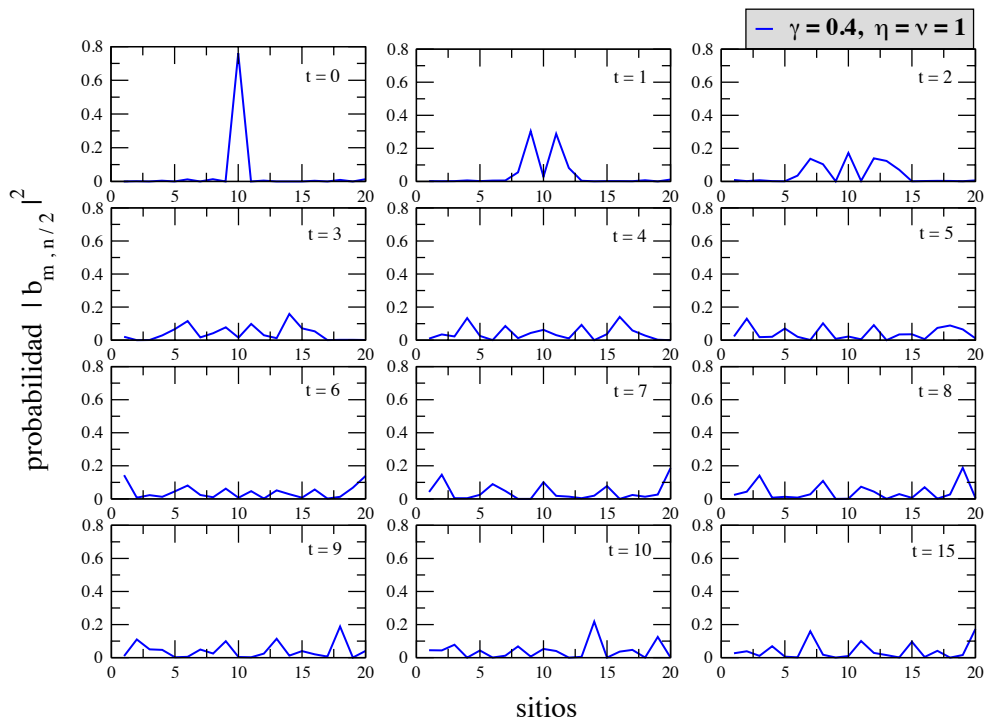


Fig. 5.4.: Dependencia temporal de la distribución de la probabilidad para una cadena simétrica donde la excitación inicial comienza a la mitad de la cadena,  $n = 10$ .

## 5.2.2 Dinámica en una cadena $\mathcal{PT}$ simétrica

Consideraremos que nuestro modelo está formado por dos dímeros, es decir cuatro sitios; este es el caso más pequeño que podemos considerar para mostrar asimetría en los acoplamientos resultando en un modelo  $\mathcal{PT}$  simétrico. El hamiltoniano correspondiente a este caso tiene la forma

$$H_{4 \times 4} = \begin{pmatrix} -i\gamma & v & 0 & 0 \\ v & i\gamma & \eta & 0 \\ 0 & \eta & -i\gamma & v \\ 0 & 0 & v & i\gamma \end{pmatrix}. \quad (5.26)$$

Los eigenvalores de dicha son

$$\epsilon_j = \begin{cases} \pm i\gamma, \\ \pm \sqrt{\frac{1}{2}\eta \left( \eta + \sqrt{4v^2 + \eta^2} \right) - v^2 - \gamma^2}. \end{cases} \quad (5.27)$$

La expresión de los eigenvalores se complica a medida que incrementamos el tamaño de la cadena. Además la diferencia que tiene con el caso simétrico es la presencia de sólo dos eigenvalores imaginarios,  $\pm i\gamma$  para cualquier tamaño de la cadena que se considere. Esto tiene que ver con el tipo de condiciones de frontera que se le imponen al sistema, en este caso se impusieron condiciones de frontera no periódicas, es decir, las entradas de la matriz hamiltoniana  $H_{1,n}$  y  $H_{n,1}$  para  $n$  sitios son iguales cero.

La matriz (5.26) y matrices correspondientes a estructuras con un número mayor de sitios puede diagonalizarse numéricamente. La forma en la cual aquí se abordó el problema es empleando un programa en fortran para diagonalizar una matriz de cualquier tamaño bajo las condiciones mencionadas anteriormente. El resultado de este análisis numérico es un arreglo de  $n$  eigenvalores  $\epsilon_k$  del hamiltoniano  $H$  y un arreglo  $2D$  de eigenvectores  $|\xi_k\rangle$ , dando la solución completa del problema, incluyendo la dependencia temporal. Para el caso donde se incrementa el tamaño del sistema a un total de 20 sitios y considerando dos acoplamientos distintos posicionados de manera alternante dentro de ella, el análisis se encuentra dividido en los tres casos que se han venido estudiando a lo largo del trabajo (ver Fig. 3.2). La figura 5.5 muestra los eigenvalores para estos tres casos, donde puede observarse que se tienen al menos dos eigenvalores imaginarios dados por  $\pm i\gamma$  y el resto es completamente real cuando se cumpla  $\gamma^2 \leq \delta^2$ ; el este número de valores propios imaginarios se incrementa cuando  $\delta^2 > \gamma^2$ .

En cuanto a la dependencia temporal de una excitación inicial en cualquier sitio de la estructura, los resultados se muestran en la figura 5.6 donde se toma una excitación inicial al principio, en medio y casi al final de la cadena para un intervalo de tiempo de 100; la unidad de tiempo en este caso es  $\hbar/\epsilon_n$ , tal y como lo indica la ecuación (5.10).

La figura 5.6 condensa los tres casos básicos que nos interesan: la primera línea horizontal de gráficos corresponde al caso simétrico para excitaciones iniciales en la posición  $n = 3, 10$  y  $15$ , en todos los casos esta excitación se expande a todos los demás sitios en un tiempo muy corto en comparación con las imágenes de la segunda y tercera línea. Al considerar un segundo acoplamiento dentro de la cadena la dinámica cambia notablemente. Podemos ver que para el caso  $\alpha < 1$  (fila del centro de la Fig. 5.6) donde  $\eta = 1$  y  $v = 0.02$ , la excitación al pasar un corto tiempo se encuentra ahora en el sitio contiguo,

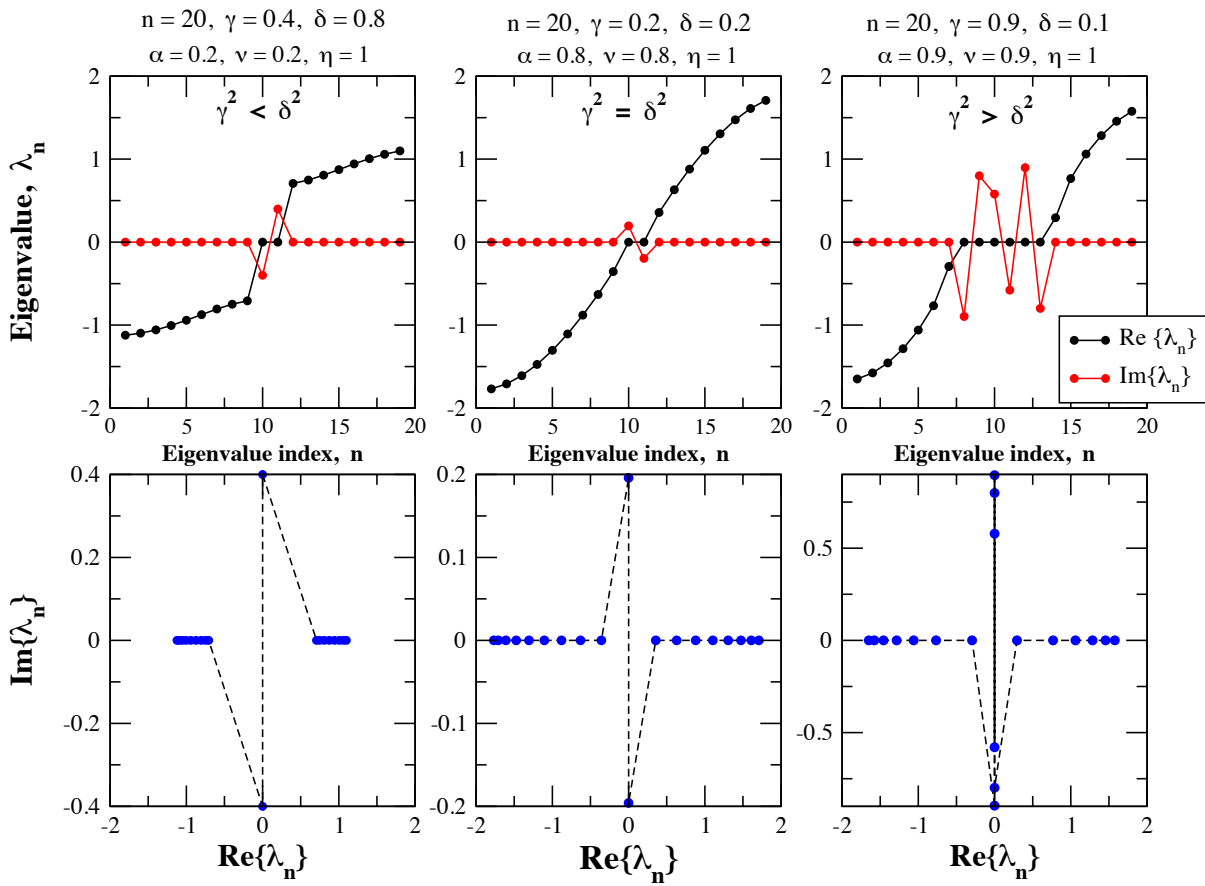
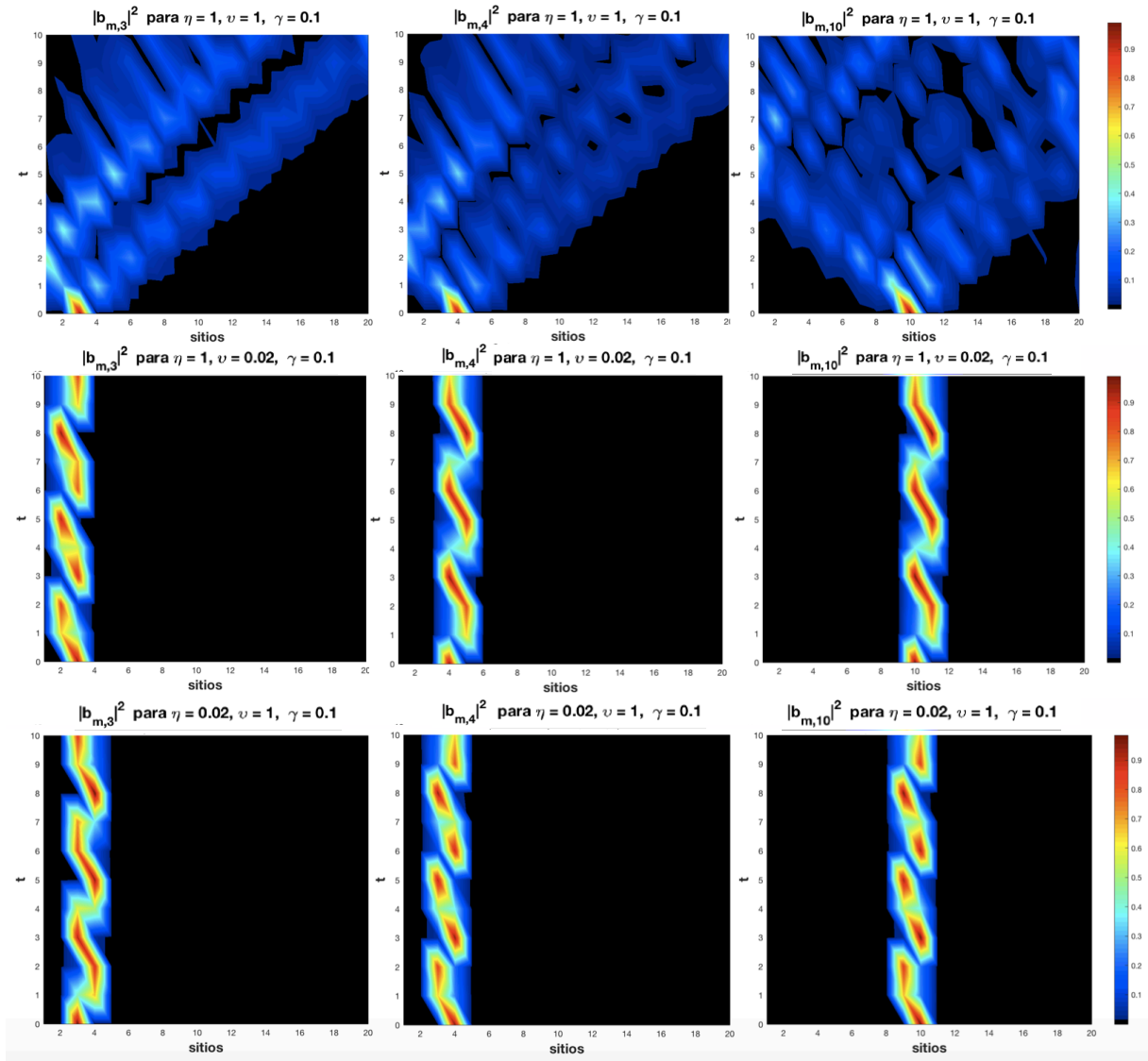


Fig. 5.5.: Eigenvalores para una estructura de 20 sitios para tres casos diferentes donde se comparan los parámetros  $\gamma^2$  y  $\delta^2$ .

el cual presenta un acoplamiento mayor; al transcurrir aún más el tiempo, la posición de esta excitación se restringe sólo a estos dos sitios. Un comportamiento similar se muestra al intercambiar los valores de los acoplamientos  $\eta = 0.002$  y  $v = 1$  (última fila de la Fig. 5.6), donde también puede apreciarse que la excitación se mantiene dentro del dímero donde se ha iniciado la excitación en un tiempo mayor en comparación con el caso simétrico.

La dinámica para modelos asimétricos se mantiene dentro del dímero donde comienza la perturbación, en la figura 5.7 puede notarse esta influencia débil de la asimetría durante un período de tiempo corto. Después de un tiempo, se nota el acoplamiento entre los dímeros de la cadena, ya que la excitación que al inicio pareciera restringida a uno sólo de ellos, comienza ahora a extenderse lentamente a los demás sitios. También debe tenerse en cuenta que al ir aumentando el número de eigenvalores imaginarios, tarde o temprano se tendrá un aumento exponencial de las amplitudes de onda, este crecimiento exponencial puede evitarse aniquilando dichos eigenvalores y obligamos a ser cero a los eigenvectores correspondientes, con el fin de observar dinámicas no exponenciales durante un tiempo mayor a comparación de tomar en cuenta estos eigenvalores imaginarios.



**Fig. 5.6.:** Dependencia temporal de la distribución de probabilidad obtenida de manera numérica para una cadena simétrica de 20 sitios. La primera fila corresponde al caso simétrico ( $\eta = \nu = 1$ ), las siguientes filas representan a una estructura asimétrica  $\alpha < 1$  (fila de en medio) y  $\alpha > 1$  (fila inferior). Los tres casos abarcan el mismo intervalo de tiempo para poder comparar entre ellas.

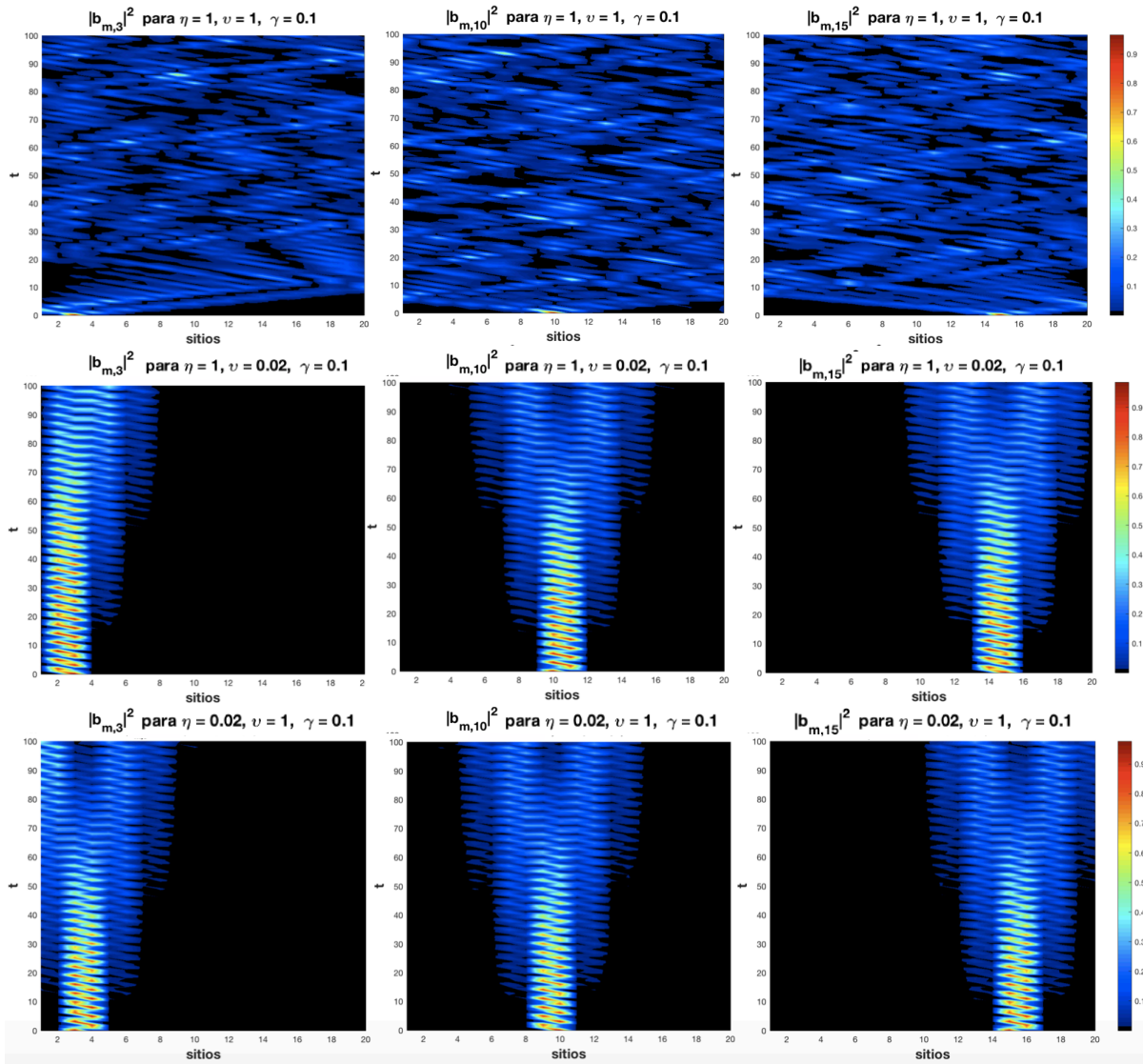


Fig. 5.7.: Dependencia temporal de la distribución de probabilidad correspondientes a los casos mostrados en la figura 5.6 pero para un tiempo mayor,  $t = 100$ .

# Conclusiones

En este trabajo el interés principal se fijó en sistemas cuyos hamiltonianos son no-hermíticos; en este tipo de sistemas el principal efecto en las propiedades de transporte se manifiesta como la no conservación de la densidad de corriente, mientras que la dinámica del sistema resulta ser no unitaria. De esta forma, los sistemas incluyen efectos de pérdidas o ganancias, lo cual es una característica fundamental de todos los sistemas físicos reales. Hemos analizado expresiones exactas para los coeficientes de transmisión y reflexión de un modelo unidimensional  $\mathcal{PT}$  simétrico, válido para cualquier valor de los parámetros del modelo. Las expresiones se presentan en una forma muy transparente que permite analizar de manera efectiva todas las propiedades de transporte. El interés principal se da en el papel desempeñado de la asimetría en los acoplamientos izquierda/derecha entre sitios vecinos. Hemos demostrado que los acoplamientos asimétricos resultan en la aparición de una región donde los valores propios tienen partes reales e imaginarias, ubicadas alrededor del centro de la banda de energía. Esta región está ausente para el modelo con acoplamientos simétricos previamente estudiados en las Refs. [89, 90].

Nuestros resultados han revelado un nuevo efecto que manifiesta que para el acoplamiento asimétrico entre sitios vecinos, la degeneración de los valores propios de la matriz de transferencia (puntos excepcionales) no proporciona propiedades de transporte asimétricas  $\mathcal{PT}$  específicas, como la reflexión unidireccional. En cambio, las últimas propiedades surgen para los valores de energía  $E_U$  (denominados anteriormente como los puntos  $U$ ) en los que la degeneración está ausente. Estos puntos  $U$ , que emergen en el enfoque de matriz de transferencia, son diferentes de las resonancias de Fabry-Perot, ya que no dependen del número  $N$  de células periódicas (dímeros) que forman nuestras cadenas unidimensionales. En cambio, están definidos por las funciones  $F_{\pm}$ , ver Eq. (3.21), que hemos introducido. Estas funciones absorben propiedades específicas de células individuales y determinadas completamente por las propiedades de transporte  $\mathcal{PT}$  simétricas. Nuestros resultados manifiestan que las propiedades de transporte de cualquier estructura periódica con  $N$  dímeros pueden obtenerse considerando las propiedades particulares de un sólo dímero, por lo tanto, la influencia de los  $N$  períodos puede incorporarse fácilmente en expresiones finales para todas las características de transporte.

También hemos demostrado que en el enfoque estándar de la matriz  $\mathbf{S}$ , la degeneración de los valores propios de la matriz  $\mathbf{S}$  está directamente relacionada con las propiedades  $\mathcal{PT}$  simétricas del modelo, tanto para acoplamientos simétricos como asimétricos entre sitios vecinos, en contraste con el enfoque de la matriz de transferencia. Además, hemos mostrado como expresar las amplitudes de reflexión y transmisión, definidas a través de la matriz  $\mathbf{S}$ , en términos de las funciones  $F_{\pm}$  y la dependencia del tamaño del sistema junto con el índice de tipo Bloch  $\mu$ , que incorpora la influencia estándar de  $N$  celdas periódicas .

Se comprobó que la dinámica de una perturbación inicial en cualquier sitio de una cadena unidimensional en la aproximación de amarre fuerte  $\mathcal{PT}$  simétrica con acoplamiento cero entre dímeros consiste en dos osciladores lineales, donde para ciertos valores críticos las amplitudes aumentan exponencialmente. Mientras que al introducir asimetría en los acoplamientos, el estado inicialmente localizado se delocaliza inicialmente hacia los sitios adyacentes al lugar de la excitación inicial para después extenderse sobre todos los demás sitios que conforman la estructura; conforme el tiempo transcurre, la dinámica explota de manera exponencial extendiéndose a todos los sitios de la cadena, pero al omitir ciertos eigenvalores imaginarios puede analizarse para un mayor tiempo la dinámica dentro de la estructura.

En esta tesis, las estructuras  $\mathcal{PT}$  simétricas se han estudiado dentro de un escenario material realista, es decir, incluyendo la dispersión y su dinámica. Se estableció que la dispersión de ganancia/pérdida es una propiedad material importante que no debe ignorarse ya que trae consigo efectos interesantes que necesitan estudio. La simetría  $\mathcal{PT}$  en fotónica es un tema de investigación relativamente joven, pero ya ha ganado popularidad en la comunidad con más de una nueva publicación publicada diariamente desde 2014. Nuestro enfoque analítico se puede extender a otras estructuras unidimensionales periódicas con términos de ganancia/pérdida. Además, el modelo que hemos estudiado aquí puede implementarse experimentalmente con el uso de un conjunto de guías de onda de un modo con acoplamientos no simétricos entre guías de onda más cercanas, en una configuración similar a la estudiada en la Ref. [73]. Sin embargo, personalmente creo que todavía hay mucho espacio para explorar en fotónica  $\mathcal{PT}$  simétrica que puede conducir a descubrimientos físicos emocionantes.

# Publicaciones

---

Moreno-Rodríguez L.A., Izrailev F.M., Méndez-Bermúdez J.A., " $\mathcal{PT}$ -symmetric tight-binding model with asymmetric couplings ", Phys. Lett. A 384, 2020.

# Congresos

---

- Scattering and dynamics in 1-D  $\mathcal{PT}$  symmetric tight-binding models, L. Moreno-Rodríguez, F. M. Izrailev. J. A. Méndez-Bermúdez, Chaos, scattering and semi-classics: A symposium in honor of Eric-Heller on the occasion of his 70th birthday), CIC UNAM, Cuernavaca, México (2017).
- Dispersión en sistemas de enlace fuerte unidimensionales  $\mathcal{PT}$  simétricos, L. Moreno-Rodríguez, F. M. Izrailev. J. A. Méndez-Bermúdez, Octavo Congreso de Física y Matemáticas, Universidad de las Américas Puebla, México (2018).
- Scattering properties in one dimensional  $\mathcal{PT}$  symmetric tight-binding models, L. Moreno-Rodríguez, F. M. Izrailev. J. A. Méndez-Bermúdez, Chaos, quantum chaos and more (gathering in memory of Boris Chirinkov on his 90th birthday), CIC UNAM, Cuernavaca, México (2018).
- Propiedades de dispersión en modelos de enlace fuerte unidimensional  $\mathcal{PT}$  simétricos, L. Moreno-Rodríguez, F. M. Izrailev. J. A. Méndez-Bermúdez, LXI CONGRESO NACIONAL DE FÍSICA, CCU BUAP, Puebla, México (2018).
- Scattering Properties and Dynamics in a One-dimensional  $\mathcal{PT}$ -symmetric Tight-binding Model, L. Moreno-Rodríguez, F. M. Izrailev. J. A. Méndez-Bermúdez, Photonics & Electromagnetics Research Symposium (PIERS), Sapienza University of Rome, Roma, Italia (2019).
- Estancia de investigación en Department of Mathematics and Physics, Catholic University of Sacred Heart con el Dr. Fausto Borgonovi, Brescia, Italia (2019).





## OBTENCIÓN DE LAS ENTRADAS DE LA MATRIZ $M$ EN TÉRMINOS DE LA FUNCIÓN $F_{\pm}$

Las expresiones (3.20) se obtienen llevando a cabo un proceso algebraico extenso. A continuación se mostrará como expresar a la entrada  $M_{12}$  en términos de la función  $F_{\pm}$  que hemos definido. Dicha entrada tiene originalmente la forma:

$$M_{12} = i \frac{e^{ik} \operatorname{sen}(2N\mu)}{\alpha \operatorname{sen}(2\mu) \operatorname{sen}(k)} [\gamma \operatorname{sen}(k) + \cos(2k) - \alpha \cos(2\mu)].$$

Se obtiene realizando las correspondientes multiplicaciones matriciales indicadas en la ecuación (3.15) y (3.19). Para obtener la expresión final, usamos la relación  $4\alpha \cos^2(\mu) = \gamma^2 + E^2 - \delta^2$ , conocida como la ecuación de dispersión del modelo que se tratará con mayor detalle posteriormente,

$$\begin{aligned} \cos(2k) - \alpha \cos(2\mu) &= 2 \cos^2(k) - 1 - 2\alpha \cos^2(\mu) + \alpha \\ &= \frac{1}{2} [4 \cos^2(k) - 2 - 4\alpha \cos^2(\mu) + 2\alpha] \\ &= \frac{1}{2} [E^2 - 2 - \gamma^2 - E^2 + \delta^2 + 2\alpha] \\ &= \frac{1}{2} [-2 - \gamma^2 + (1 - \alpha)^2 + 2\alpha] \\ &= \frac{1}{2} [\alpha^2 - \gamma^2 - 1]. \end{aligned}$$

Además de la relación de dispersión, se usó la energía de la onda plana incidente  $E = 2 \cos(k)$ . De esta manera surge la definición de la función  $F_{\pm}$ , separando la dependencia del tamaño del sistema del resto de las variables,

$$\mathbf{M}_{12} = i e^{ik} \frac{\text{sen}(2N\mu)}{\text{sen}(2\mu)} \frac{\gamma \text{sen}(k) + \frac{1}{2}(\alpha^2 - \gamma^2 - 1)}{\alpha \text{sen}(k)}$$

$$\mathbf{M}_{12} = i e^{ik} \frac{\text{sen}(2N\mu)}{\text{sen}(2\mu)} F_+(\gamma, \alpha, k).$$

Procediendo de igual manera para la entrada  $\mathbf{M}_{21}$  llegamos a la expresión mostrada en el grupo de ecuaciones (3.20). La entrada  $\mathbf{M}_{22}$  necesita un poco más de desarrollo algebraico, ya que originalmente su forma es

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{22} &= \frac{\alpha \cos(2N\mu) \text{sen}(2\mu) \text{sen}(k) - i \text{sen}(2N\mu) \cos(k) [1 - \alpha \cos(2\mu)]}{\alpha \text{sen}(k) \text{sen}(2\mu)} \\ &= \cos(2N\mu) - i \frac{\text{sen}(2N\mu) \cos(k)}{\alpha \text{sen}(k) \text{sen}(2\mu)} [1 - 2\alpha \cos(2\mu) + \alpha \cos(2\mu) + 2 \cos(2k) - 2 \cos(2k)]. \end{aligned}$$

A partir de la definición (3.21) se obtiene  $2 \cos(2k) - 2\alpha \cos(2\mu) = \alpha \text{sen}(k) (F_+ + F_-)$  y

$$\mathbf{M}_{22} = \cos(2N\mu) - i \frac{\text{sen}(2N\mu) \cos(k)}{\alpha \text{sen}(k) \text{sen}(2\mu)} \left[ 1 + \alpha \text{sen}(k) (F_+ + F_-) + \alpha \cos(2\mu) - 2 \cos(2k) \right].$$

La manera en la cual introducimos a la función  $F_{\pm}$  es mediante el producto de ambas funciones, el cual da como resultado:

$$F_+ F_- = \frac{1}{\alpha^2 \text{sen}^2 k} \left[ \left( \alpha \cos(2\mu) - \cos(2k) \right)^2 - \gamma^2 \text{sen}^2 k \right].$$

Despejando el término que nos interesa,

$$\alpha \cos(2\mu) - \cos(2k) = \alpha \text{sen}(k) \left[ F_+ F_- + \frac{\gamma^2}{\alpha^2} \right]^{1/2}.$$

Aquí introduciremos el hecho de que  $F_+ - F_- = 2 \frac{\gamma}{\alpha}$ , por lo tanto

$$\alpha \cos(2\mu) - \cos(2k) = \alpha \operatorname{sen}(k) \left[ F_+ F_- + \frac{1}{4} (F_+ - F_-)^2 \right]^{1/2}$$

$$\alpha \cos(2\mu) - \cos(2k) = \frac{1}{2} \alpha \operatorname{sen}(k) (F_+ + F_-).$$

Sustituyendo esta última expresión en la entrada  $M_{22}$ , tenemos

$$\begin{aligned} M_{22} &= \cos(2N\mu) - i \frac{\operatorname{sen}(2N\mu) \cos(k)}{\alpha \operatorname{sen}(k) \operatorname{sen}(2\mu)} \left[ 1 - \cos(2k) + \alpha \operatorname{sen}(k) (F_+ + F_-) + \frac{1}{2} \alpha \operatorname{sen}(k) (F_+ + F_-) \right] \\ &= \cos(2N\mu) - i \frac{\operatorname{sen}(2N\mu) \cos(k)}{\alpha \operatorname{sen}(k) \operatorname{sen}(2\mu)} \left[ 2 \operatorname{sen}^2(k) + \frac{3}{2} \alpha \operatorname{sen}(k) (F_+ + F_-) \right] \end{aligned}$$

$$\boxed{M_{22} = \cos(2N\mu) - i \frac{\operatorname{sen}(2N\mu)}{\operatorname{sen}(2\mu)} \left[ \frac{1}{\alpha} \operatorname{sen}(2k) + \frac{3}{2} (F_+ + F_-) \cos(k) \right].}$$





---

---

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] E. L. Adler. “Matrix methods applied to acoustic waves in multilayers”. In: *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control* 37.6 (1990), pp. 485–490 (cit. on p. 21).
- [2] P. Ambichl, K. G. Makris, L. Ge, et al. “Breaking of  $\mathcal{PT}$  Symmetry in Bounded and Unbounded Scattering Systems”. In: *Phys. Rev. X* 3 (4 2013), p. 041030 (cit. on p. 4).
- [3] T. Ando. “Numerical study of symmetry effects on localization in two dimensions”. In: *Phys. Rev. B* 40.8 (1989), p. 5325 (cit. on p. 21).
- [4] A. A. Andrianov. “The large N expansion as a local perturbation theory”. In: *Ann. Phys.* 140 (1982), pp. 82–100 (cit. on p. 10).
- [5] N. W. Ashcroft and N. D. Mermin. *Solid state physics*. Holt, Rinehart and Winston, 1977 (cit. on p. 1).
- [6] V. Baluni and J. Willemsen. “Transmission of acoustic waves in a random layered medium”. In: *Phys. Rev. A* 31 (5 1985), pp. 3358–3363 (cit. on p. 21).
- [7] C. W. J. Beenakker. “Random-matrix theory of quantum transport”. In: *Rev. Mod. Phys.* 69 (1997), p. 731 (cit. on p. 21).
- [8] C. M. Bender. “Introduction to  $\mathcal{PT}$ -symmetric quantum theory”. In: *Contemporary Physics* 46.4 (2005), pp. 277–292 (cit. on pp. 11, 13).
- [9] C. M. Bender. “Making sense of non-Hermitian Hamiltonians”. In: *Reports Prog. Phys.* 70 (2007), pp. 947–1018 (cit. on pp. 11, 13).
- [10] C. M. Bender and S. Boettcher. “Real Spectra in Non-Hermitian Hamiltonians Having  $\mathcal{PT}$  Symmetry”. In: *Phys. Rev. Lett.* 80 (24 1998), pp. 5243–5246 (cit. on pp. 2, 9–11, 13).
- [11] C. M. Bender and A. Turbinder. “Analytic continuation of eigenvalue problems”. In: *Phys. Lett. A.* 173 (6 1993), pp. 442–446 (cit. on p. 11).
- [12] C. M. Bender and T. T. Wu. “Analytic Structure of Energy Levels in a Field-Theory Model”. In: *Phys. Rev. Lett.* 21 (6 1968), pp. 406–409 (cit. on p. 11).
- [13] C. M. Bender and T. T. Wu. “Anharmonic Oscillator”. In: *Phys. Rev.* 184 (5 1969), pp. 1231–1260 (cit. on p. 11).
- [14] C. M. Bender, K. A. Milton, S. S. Pinsky, and L. M. Simmons. “A new perturbative approach to nonlinear problems”. In: *J. Math. Phys.* 30.7 (1989), pp. 1447–1455 (cit. on p. 11).
- [15] M. V. Berry. “Mode degeneracies and the Petermann excess-noise factor”. In: *J. Mod. Phys.* 50 (2003) (cit. on p. 2).

- [16] D. Bessis and J. Zinn-Justin. In: *circa* (1992) (cit. on p. 10).
- [17] D. C. Brody. “Biorthogonal quantum mechanics”. In: *J. Phys. A* 47 (2013) (cit. on p. 2).
- [18] E. Caliceti, S. Graffi, and M. Maioli. “Perturbation theory of odd anharmonic oscillators”. In: *Commun.Math. Phys.* 75 (1980), pp. 51–66 (cit. on p. 10).
- [19] F. Cannata, J. P. Dedonder, and A. Ventura. “Scattering in  $\mathcal{PT}$ -symmetric quantum mechanics”. In: *Annals of Physics* 322.2 (2007), pp. 397–433 (cit. on p. 11).
- [20] E. S. C. Ching. “Quasinormal-mode expansion for waves in open systems”. In: *Rev. Mod. Phys.* 70 (1998) (cit. on p. 2).
- [21] Y. Chong, L. Ge, H. Cao, and A. D. Stone. “Coherent Perfect Absorbers: Time-Reversed Lasers”. In: *Physical review letters* 105 (July 2010), p. 053901 (cit. on p. 10).
- [22] Y. D. Chong, L. Ge, and A. D. Stone. “ $\mathcal{PT}$ -Symmetry Breaking and Laser-Absorber Modes in Optical Scattering Systems”. In: *Phys. Rev. Lett.* 106 (9 2011), p. 093902 (cit. on pp. 9, 11).
- [23] D. N. Christodoulides and R. I. Joseph. “Discrete self-focusing in nonlinear arrays of coupled waveguides”. In: *Opt. Lett.* 13.9 (1988), pp. 794–796 (cit. on p. 19).
- [24] D.N. Christodoulides, F. Lederer, and Y. Silberberg. “Discretizing light behaviour in linear and nonlinear waveguide lattices”. In: *Nature* 424 (6950 2003), pp. 817–823 (cit. on pp. 1, 17, 18).
- [25] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Lalce. *Quantum Mechanics*. John Wiley & Sons, 1977 (cit. on p. 21).
- [26] B. Derrida and E. Gardner. “Lyapounov exponent of the one dimensional Anderson model : weak disorder expansions”. In: *J. Phys. France* 45.8 (1984), pp. 1283–1295 (cit. on p. 32).
- [27] S. V. Dmitriev, A. A. Sukhorukov, and Y. S. Kivshar. “Binary parity-time-symmetric nonlinear lattices with balanced gain and loss”. In: *Opt. Lett.* 35.17 (2010), pp. 2976–2978 (cit. on p. 19).
- [28] E.N. Economou. *Green’s Functions in Quantum Mechanics*. Springer, 1984 (cit. on p. 31).
- [29] T. Eichelkraut. “Mobility transition from ballistic to diffusive transport in non-Hermitian lattices”. In: *Nat. Commun.* 4 (2013) (cit. on p. 2).
- [30] P. Erdős and R.C. Herndon. “Theories of electrons in one-dimensional disordered systems”. In: *Advances in Physics* 31.2 (1982), pp. 65–163 (cit. on p. 32).
- [31] R. Esquivel-Sirvent and G. H. Coccoletzi. “Band structure for the propagation of elastic waves in superlattices”. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* 95.1 (1994), pp. 86–90 (cit. on p. 21).
- [32] L. Feng, Y. L. Xu, W. S. Fegadolli, et al. In: *Nat. Mater* 108.12 (2013) (cit. on p. 3).
- [33] L. Feng, M. Ayache, J. Huang, et al. “Nonreciprocal Light Propagation in a Silicon Photonic Circuit”. In: *Science (New York, N.Y.)* 333 (Aug. 2011), pp. 729–33 (cit. on p. 10).
- [34] L. Feng, Z. J. Wong, R. M. Ma, Y. Wang, and X. Zhang. “Single-mode laser by parity-time symmetry breaking”. In: *Science* 346 (2014) (cit. on p. 2).
- [35] S. A. H. Gangaraj and F. Monticone. “Topological waveguiding near an exceptional point: defect-immune, slow-light and loss-immune propagation”. In: *Phys. Rev. Lett.* 121 (2018) (cit. on pp. 2, 5).
- [36] I. L. Garanovich, S. Longhi, A. A. Sukhorukov, and Y. S. Kivshar. “Light propagation and localization in modulated photonic lattices and waveguides”. In: *Physics Reports* 518.1-2 (2012), 1–79 (cit. on p. 18).

- [37] L. Ge, Y. D. Chong, and A. D. Stone. “Conservation relations and anisotropic transmission resonances in one-dimensional  $\mathcal{PT}$ -symmetric photonic heterostructures”. In: *Phys. Rev. A* 85 (2 2012), p. 023802 (cit. on pp. 4, 10, 11, 47).
- [38] A. Guo, G. J. Salamo, D. Duchesne, et al. “Observation of  $\mathcal{PT}$ -Symmetry Breaking in Complex Optical Potentials”. In: *Phys. Rev. Lett.* 103 (9 2009), p. 093902 (cit. on pp. 10, 18).
- [39] W. D. Heiss. “The physics of exceptional points”. In: *J. Phys. A* 45 (2012) (cit. on pp. 2, 5).
- [40] W. D. Heiss and W. H. Steeb. “Avoided level crossing and Riemann sheet structure”. In: *J. Math. Phys.* 32 (1991) (cit. on pp. 2, 5).
- [41] T. Hollowood. “Solitons in affine Toda field theories”. In: *Nucl. Phys. B* 384 (1992), pp. 523–540 (cit. on p. 10).
- [42] F.M. Izrailev, A.A. Krokhnin, and N.M. Makarov. “Anomalous localization in low-dimensional systems with correlated disorder”. In: *Physics Reports* 512.3 (2012), 125–254 (cit. on p. 32).
- [43] a. L. Jones. “Coupling of Optical Fibers and Scattering in Fibers\*”. In: *J. Opt. Soc. Am.* 55.3 (1965), pp. 261–271 (cit. on p. 19).
- [44] D. Kip and Krätzig E. “Anisotropic four-wave mixing in planar LiNbO3 optical waveguides”. In: *Opt. Lett.* 17.22 (1992), pp. 1563–1565 (cit. on p. 20).
- [45] P. D. Kirkman and J. B. Pendry. “The statistics of one-dimensional resistances”. In: *Journal of Physics C: Solid State Physics* 17.24 (1984), pp. 4327–4344 (cit. on pp. 21, 32).
- [46] P. D. Kirkman and J. B. Pendry. “The statistics of the conductance of one-dimensional disordered chains”. In: *J. Phys. C: Solid State Phys.* 17 (1984), p. 5707 (cit. on p. 21).
- [47] C. Kittel. *Introduction to Solid State Physics*. (Wiley, 2005 (cit. on p. 31).
- [48] Y. Lahini, A. Avidan, F. Pozzi, et al. “Anderson Localization and Nonlinearity in One-Dimensional Disordered Photonic Lattices”. In: *Phys. Rev. Lett.* 100 (1 2008), p. 013906 (cit. on p. 17).
- [49] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *Quantum Mechanics*. Pergamon, Oxford, 1984 (cit. on p. 21).
- [50] I.M. Lifshits, S.A. Gredeskul, and L.A. Pastur. *Introduction to the Theory of Disordered Systems*. Wiley, 1988 (cit. on p. 31).
- [51] Z. Lin, H. Ramezani, T. Eichelkraut, et al. “Unidirectional Invisibility Induced by  $\mathcal{PT}$ -Symmetric Periodic Structures”. In: *Phys. Rev. Lett.* 106 (21 2011), p. 213901 (cit. on pp. 3, 10).
- [52] S. Longhi. “Bloch Oscillations in Complex Crystals with  $\mathcal{PT}$  Symmetry”. In: *Phys. Rev. Lett.* 103 (12 2009), p. 123601 (cit. on pp. 3, 10).
- [53] S. Longhi. “ $\mathcal{PT}$ -symmetric laser absorber”. In: *Phys. Rev. A* 82 (3 2010), p. 031801 (cit. on pp. 3, 10).
- [54] S. Longhi. “Optical Realization of Relativistic Non-Hermitian Quantum Mechanics”. In: *Phys. Rev. Lett.* 105 (1 2010), p. 013903 (cit. on p. 10).
- [55] K. G. Makris, R. El-Ganainy, D. N. Christodoulides, and Z. H. Musslimani. “Beam Dynamics in  $\mathcal{PT}$  Symmetric Optical Lattices”. In: *Phys. Rev. Lett.* 100 (10 2008), p. 103904 (cit. on pp. 3, 9, 10).
- [56] P. Markos and C. M. Soukoulis. *Wave Propagation From Electrons to Photonic Crystals and Left-Handed Materials*. Princeton University Press, 2008 (cit. on pp. 3–5, 31).
- [57] P. A. Mello and N. Kumar. “Quantum Transport in Mesoscopic Systems: Complexity and Statistical Fluctuations”. In: *Oxford University Press, Oxford* (2004) (cit. on pp. 1, 3).
- [58] E. Merzbacher. *Quantum Mechanics*. 3rd ed. (cit. on p. 21).

- [59] T. J. Milburn. “General description of quasiadiabatic dynamical phenomena near exceptional points”. In: *Phys. Rev. A* 92 (2015) (cit. on pp. 2, 5).
- [60] M. . A. Miri and A. Alu. “Exceptional points in optics and photonics”. In: *Science* 363 (2019) (cit. on pp. 2, 5).
- [61] M. A. Miri, P. LiKamWa, and D. N. Christodoulides. In: *Opt. Lett.* 37 (2012), pp. 764–766 (cit. on p. 3).
- [62] Mohammad-Ali Miri, A. Regensburger, U. Peschel, and D. N. Christodoulides. “Optical mesh lattices with  $\mathcal{PT}$  symmetry”. In: *Phys. Rev. A* 86 (2 2012), p. 023807 (cit. on p. 18).
- [63] R. Morandotti, U. Peschel, J. S. Aitchison, H. S. Eisenberg, and Y. Silberberg. “Experimental Observation of Linear and Nonlinear Optical Bloch Oscillations”. In: *Phys. Rev. Lett.* 83 (23 1999), pp. 4756–4759 (cit. on p. 17).
- [64] O. Morsch and M. Oberthaler. “Dynamics of Bose-Einstein condensates in optical lattices”. In: *Rev. Mod. Phys.* 78 (1 2006), pp. 179–215 (cit. on p. 1).
- [65] A. Mostafazadeh. “Spectral Singularities of Complex Scattering Potentials and Infinite Reflection and Transmission Coefficients at Real Energies”. In: *Phys. Rev. Lett.* 102 (22 2009), p. 220402 (cit. on p. 10).
- [66] Ali Mostafazadeh. “Invisibility and  $\mathcal{PT}$  symmetry”. In: *Phys. Rev. A* 87 (1 2013), p. 012103 (cit. on p. 11).
- [67] M. Müller and Rotter I. “Exceptional points in open quantum systems”. In: *J. Phys. A: Math. Theor.* 41 (2008), p. 244018 (cit. on p. 2).
- [68] Z. H. Musslimani, K. G. Makris, R. El-Ganainy, and D. N. Christodoulides. “Optical Solitons in  $\mathcal{PT}$  Periodic Potentials”. In: *Phys. Rev. Lett.* 100 (3 2008), p. 030402 (cit. on pp. 2, 10).
- [69] J. B. Pendry. “The evolution of waves in disordered media”. In: *Journal of Physics C: Solid State Physics* 15.16 (1982), pp. 3493–3511 (cit. on p. 27).
- [70] J. B. Pendry and A. MacKinnon. “Calculation of photon dispersion relations”. In: *Phys. Rev. Lett.* 69 (1992), p. 2772 (cit. on p. 21).
- [71] T. Pertsch, P. Dannberg, W. Elflein, A. Bräuer, and F. Lederer. “Optical Bloch Oscillations in Temperature Tuned Waveguide Arrays”. In: *Phys. Rev. Lett.* 83 (23 1999), pp. 4752–4755 (cit. on p. 17).
- [72] H. Ramezani, T. Kottos, R. El-Ganainy, and D. N. Christodoulides. “Unidirectional nonlinear  $\mathcal{PT}$ -symmetric optical structures”. In: *Phys. Rev. A* 82 (4 2010), p. 043803 (cit. on pp. 3, 10).
- [73] A. Regensburger, C. Bersch, M. A. Miri, et al. In: () (cit. on pp. 4, 17–19, 96).
- [74] A. Regensburger, M. A. Miri, C. Bersch, et al. “Observation of Defect States in  $\mathcal{PT}$ -Symmetric Optical Lattices”. In: *Phys. Rev. Lett.* 110 (22 2013), p. 223902 (cit. on p. 3).
- [75] C. E. Rüter, K. G. Makris, R. El-Ganainy, D. N. Christodoulides, and D. Segev M.and Kip. “Observation of parity-time symmetry in optics”. In: *Nature Physics* 6 (2010), p. 192 (cit. on pp. 2, 3, 9, 10, 19, 20).
- [76] J. Schindler, A. Li, M. C. Zheng, F. M. Ellis, and T. Kottos. “Experimental study of active LRC circuits with  $\mathcal{PT}$  symmetries”. In: *Phys. Rev. A* 84 (4 2011), p. 040101 (cit. on p. 20).
- [77] F. G. Scholtz, H. B. Geyer, and F. J. W. Hahne. “Quasi-Hermitian operators in quantum mechanics and the variational principle”. In: *Ann. Phys.* 213 (1992), p. 74 (cit. on p. 10).
- [78] H. Schomerus. “From scattering theory to complex wave dynamics in non-Hermitian  $\mathcal{PT}$ -symmetric resonators”. In: *Trans. R. Soc. A* 371 (2013), p. 20120194 (cit. on p. 4).
- [79] H. Schomerus. “Quantum Noise and Self-Sustained Radiation of  $\mathcal{PT}$ -Symmetric Systems”. In: *Phys. Rev. Lett.* 104 (23 2010), p. 233601 (cit. on pp. 4, 10).

- [80] K. Shandarova, C. E. Rüter, D. Kip, et al. “Experimental Observation of Rabi Oscillations in Photonic Lattices”. In: *Phys. Rev. Lett.* 102 (12 2009), p. 123905 (cit. on p. 17).
- [81] M. M. Sigalas and C. M. Soukoulis. “Elastic-wave propagation through disordered and/or absorptive layered systems”. In: *Phys. Rev. B* 51 (5 1995), pp. 2780–2789 (cit. on p. 21).
- [82] S. Somekh, E. Garmire, A. Yariv, H. L. Garvin, and R. G. Hunsperger. “Channel optical waveguide directional couplers”. In: *Applied Physics Letters* 22.1 (1973), pp. 46–47 (cit. on p. 19).
- [83] C. M. Soukoulis, M. J. Velgakis, and E. N. Economou. “One-dimensional localization with correlated disorder”. In: *Phys. Rev. B* 50 (8 1994), pp. 5110–5118 (cit. on p. 29).
- [84] J. T. Stewart and Y. Yong. “Exact analysis of the propagation of acoustic waves in multilayered anisotropic piezoelectric plates”. In: (1993), pp. 476–501 (cit. on p. 21).
- [85] A. A. Sukhorukov, Z. Xu, and Y. S. Kivshar. “Nonlinear suppression of time reversals in  $\mathcal{PT}$ -symmetric optical couplers”. In: *Phys. Rev. A* 82 (4 2010), p. 043818 (cit. on p. 10).
- [86] A. Szameit, Y. V. Kartashov, M. Heinrich, et al. “Observation of two-dimensional defect surface solitons”. In: *Opt. Lett.* 34.6 (2009), pp. 797–799 (cit. on p. 17).
- [87] D. J. Thouless. “Electrons in disordered systems and the theory of localization”. In: *Phys. Rep.* 13.3 (1974), p. 95 (cit. on p. 32).
- [88] H. Trompeter, W. Krolikowski, D. N. Neshev, et al. “Bloch Oscillations and Zener Tunneling in Two-Dimensional Photonic Lattices”. In: *Phys. Rev. Lett.* 96 (5 2006), p. 053903 (cit. on p. 17).
- [89] Vázquez-Candanedo, F. M. Izrailev, and D. N. Christodoulides. “Spectral and transport properties of the  $\mathcal{PT}$ -symmetric dimer model”. In: *Physica E* 72 (2015), pp. 7–16 (cit. on p. 95).
- [90] O. Vázquez-Candanedo, J. C. Hernández-Herrejón, F. M. Izrailev, and D. N. Christodoulides. “Gain- or loss-induced localization in one-dimensional  $\mathcal{PT}$ -symmetric tight-binding models”. In: *Phys. Rev. A* 89 (2014), p. 013832 (cit. on pp. 33, 35, 36, 95).
- [91] S. Weimann. “Topologically protected bound states in photonic  $\mathcal{PT}$ -symmetric crystals”. In: *Nat. Mater.* 16 (2017) (cit. on p. 2).
- [92] E. Yablonovitch, T. J. Gmitter, R. D. Meade, et al. “Donor and acceptor modes in photonic band structure”. In: *Phys. Rev. Lett.* 67 (24 1991), pp. 3380–3383 (cit. on p. 1).
- [93] J. M. Zeuner. “Observation of a topological transition in the bulk of a non-Hermitian system”. In: *Phys. Rev. Lett.* 115 (2015) (cit. on p. 2).
- [94] M. C. Zheng, D. N. Christodoulides, R. Fleischmann, and T. Kottos. “ $\mathcal{PT}$  optical lattices and universality in beam dynamics”. In: *Phys. Rev. A* 82 (1 2010), p. 010103 (cit. on pp. 4, 10).
- [95] L. Zhi-Yuan and L. Lan-Lan. “Photonic band structures solved by a plane-wave-based transfer-matrix method”. In: *Phys. Rev. E* 67 (4 2003), p. 046607 (cit. on p. 21).



# List of Figures

2.1	<p>Paneles superiores: parte real de los eigenvalores <math>E_{\pm}</math> en función del parámetro <math>\gamma</math>. Para <math>\gamma &lt; \kappa</math> nos encontramos en la fase <math>\mathcal{PT}</math>-simétrica donde los eigenvalores corresponden a valores reales. En el punto excepcional donde se rompe espontáneamente la simetría <math>\gamma = \kappa</math> los eigenvalores se vuelven degenerados. Paneles inferiores: parte imaginaria de los eigenvalores <math>E_{\pm}</math> en función del parámetro <math>\gamma</math>, siendo <math>\gamma &gt; \kappa</math> donde la simetría <math>\mathcal{PT}</math> se ha roto y los eigenvalores son imaginarios. . . . .</p>	16
2.2	<p>Redes de fibras ópticas <math>\mathcal{PT}</math> simétricas. a) Dos bucles de fibras ópticas acopladas cambian periódicamente entre ganancia y pérdida. b) Evolución de los pulsos en las redes en donde se indica la propagación a través de los bucles cortos y largos. c) Red <math>\mathcal{PT}</math> simétrica equivalente. Los canales de ganancia (rojos) y canales de pérdida (azules) están posicionados anti simétricamente y están acoplados periódicamente. Figura tomada de la referencia [73]. . . . .</p>	18
2.3	<p>Observación experimental de la invisibilidad unidireccional para dispersores <math>\mathcal{PT}</math> simétricos. Se muestran los casos de dispersores pasivos <math>\mathcal{PT}</math> simétricos con pulsos incidentes desde la izquierda y pulsos incidentes desde la derecha, respectivamente. Figura tomada de la referencia [73]. . . . .</p>	19
2.4	<p>Montaje experimental del dímero óptico <math>\mathcal{PT}</math> simétrico descrito por la ecuación (2.11). La figura muestra un rayo láser de <math>Ar^+</math> que está acoplado a los brazos de la estructura fabricada sobre un sustrato fotorrefractivo de <math>LiNbO_3</math>. La ganancia es experimentada por la guía de onda 1 y la máscara de amplitud provoca que el haz de la guía de onda 2 sólo experimente pérdida. La cámara CCD al final monitorea la intensidad y las fases en la salida. La figura se tomó de la referencia [75]. . . . .</p>	20
2.5	<p><math>\ln T</math> en función de la energía para <math>N = 2</math> con <math>\gamma = 0.7</math> y <math>\gamma = 2 \cos(\pi/4)</math> para el modelo simétrico. En la región alrededor de <math>E = 0</math> podemos notar que <math>T \approx 1</math>. Imagen tomada de la referencia [90]. . . . .</p>	35
2.6	<p>Coefficientes de reflexión derecha e izquierda en función de la energía <math>E</math> para <math>N = 2</math> con <math>\gamma = 0.7</math> y <math>\gamma = 2 \cos(\pi/4)</math>. Imagen tomada de la referencia [90]. . . . .</p>	36
3.1	<p>Representación gráfica del sistema a estudiar. La imagen muestra una cadena unidimensional finita con acoplamientos entre dímeros dados por <math>\eta</math> y acoplamientos intra-dímeros <math>v</math>; en cada sitio el potencial tiene la forma <math>\varepsilon_n = (-1)^n i\gamma</math>. . . . .</p>	40
3.2	<p>Número de onda <math>\mu</math> dentro de la zona de dispersión en función de la energía de las ondas incidentes <math>E</math>. Las líneas continuas corresponden a la parte real de <math>\mu</math>, mientras que las líneas punteadas representan la parte imaginaria. (a) <math>\gamma = 0.4, \alpha = 0.2, \delta = 0.8</math>; (b) <math>\gamma = 0.2, \alpha = 0.8, \delta = 0.2</math> y (c) <math>\gamma = 0.9, \alpha = 0.9</math> y <math>\delta = 0.1</math>. Los cuadrados azules etiquetan a los puntos excepcionales <math>E_0</math>, ellos caracterizan la transición de <math>\mu</math> al pasar de imaginario a puramente complejo y los diamantes corresponden a <math>E_{\pi}</math>, donde <math>\mu</math> pasa de real a complejo. . .</p>	49
3.3	<p>Coefficiente de transmisión, <math>T</math> para diferentes tamaños <math>N</math>, con parámetros fijos con valores <math>\alpha = 0.5</math> y <math>\gamma = 0.2</math>. Para cada caso se muestran los números de onda <math>k_{FP}/\pi</math> donde la transmisión es perfecta, además de las diferentes regiones donde el índice <math>\mu</math> puede ser imaginario, complejo o real. . . . .</p>	52

3.4	Evolución del perfil del coeficiente de transmisión en función del número de onda $k$ para $N = 2$ , $\alpha = 0.5$ y diferentes valores de $\gamma$ con respecto a $\delta$ . . . . .	54
3.5	(a) Coeficiente de transmisión para cadenas de dos tamaños diferentes, $N = 2$ y $N = 10$ . Los valores de los parámetros son los mismos que en la figura 3.2. Los triángulos rojos corresponden a las resonancias $U$ para cada caso, además se han añadido las tres diferentes regiones correspondientes a los valores que $\mu$ puede tomar. (b) Funciones $F_{\pm}$ correspondientes a los casos mostrados en (a), donde puede observarse que $F_{+}$ es la responsable de la aparición de las resonancias $U$ . . . . .	55
3.6	Logaritmo del coeficiente de transmisión $T$ en función del tamaño de dímeros $N$ que conforman la estructura, para valores reales de $\mu$ . (a) Se muestra el perfil del $\ln T$ dependiendo de la función $F_{+}$ , la cual puede tomar valores iguales, mayores o menores a cero. . . . .	56
3.7	Estados de dispersión para el modelo $\mathcal{PT}$ -simétrico con $\gamma^2$ y $\alpha^2$ tales que $\gamma^2 = \delta^2$ . La columna izquierda corresponde a una cadena de 3 dímeros, para un valor de energía igual a 1, el cual viene de la ecuación (3.37) para $m = 2$ . En las gráficas de la columna derecha se tiene el estado de dispersión para 10 dímeros en el punto excepcional para $\mu = \pi/2$ ; justo en el centro de la banda de energía. . . . .	57
3.8	Coeficiente de transmisión para un sistema de tamaño $N = 2$ . Los valores de los parámetros son los mismos que se tomaron en la figura 3.2, los triángulos rojos corresponden a las resonancias $U$ para cada caso. Se añadieron las tres diferentes regiones a los valores que $\mu$ puede tomar; valores complejos, reales o completamente imaginarios. . . . .	58
3.9	Coeficiente de transmisión para un sistema de tamaño $N = 10$ . Los valores de los parámetros son los mismos que se tomaron en la figura 3.2, los triángulos rojos corresponden a las resonancias $U$ para cada caso. Se añadieron las tres diferentes regiones a los valores que $\mu$ puede tomar; valores complejos, reales o completamente imaginarios. . . . .	58
3.10	(a) Coeficiente de reflexión por la derecha para $N = 2$ , $\alpha = 0.5$ y diferentes valores de $\gamma$ de tal manera que se consideran los tres casos mostrados en la figura 3.2. (b) Coeficiente de reflexión izquierda para los mismos parámetros del caso (a). . . . .	60
3.11	Coeficiente de reflexión derecha e izquierda para el caso $N = 2$ , donde se han usado los parámetros de la figura 3.2. Se han incluido ambas resonancias (Fabry-Pérot y $U$ ) donde la transmisión es perfecta y las regiones de $\mu$ dadas por (3.30). Los casos (a)-(c) corresponden a $\alpha < 1$ y las figuras (d)-(e) a $\alpha > 1$ . . . . .	61
3.12	Coeficientes de transmisión, reflexión derecha e izquierda en función del parámetro $\gamma$ . Donde los parámetros toman los valores: $N = 2$ , $E = 0.2$ y $\alpha = 1.1$ . Se han etiquetado los puntos donde se presentan resonancias de Fabry-Pérot ( $\gamma = 1.473$ ) y resonancias debidas a la función $F$ , en el caso de reflexión derecha ( $\gamma = 2.090427$ ) y reflexión izquierda ( $\gamma = 0.1$ ). . . . .	63
3.13	Región de las resonancias Fabry-Pérot (3.51) y $U$ (3.49) para cualquier tamaño de sistema. Además en cada gráfica se delimita al parámetro $\gamma$ al incrementar el valor de los acoplamientos o lo que es lo mismo, cambiando la asimetría del sistema. . . . .	65
3.14	Número de onda $\mu$ en función de la energía incidente correspondiente a los casos analizados anteriormente donde $\delta^2 > \gamma^2$ , $\delta^2 = \gamma^2$ y $\delta^2 < \gamma^2$ . . . . .	66
3.15	Comportamiento del coeficiente de transmisión y de los coeficientes de reflexión derecha e izquierda en función del número de onda, en el caso específico $\delta^2 = \gamma^2$ , en el caso (a) se muestra $N = 2$ , donde $\alpha$ toma los valores 0.98, 1 y 1.01; mientras que el caso (b) corresponde a $N = 10$ . . . . .	68

3.16	Coefficientes de transmisión por derecha e izquierda en función del número de dímeros, $N$ , en el punto excepcional correspondiente a $\mu = \pi/2$ y $\delta^2 = \gamma^2$ ubicado en el centro de la banda $E = 0$ . . . . .	70
4.1	Esquema del sistema unidimensional $\mathcal{PT}$ simétrico con acoplamientos asimétricos donde se indican las ondas incidente, reflejadas y transmitidas. . . . .	72
4.2	Comportamiento de la ecuación (4.21) para a) $\gamma^2 < \delta^2$ y b) $\gamma^2 > \delta^2$ . En ambos casos se considera una cadena de 20 dímeros. . . . .	77
4.3	Logaritmo de los eigenvalores de la matriz $\mathbf{S}$ en función del número de onda $k$ . $\ln  s_1 ^2$ ( $\ln  s_2 ^2$ ) está representado por la línea roja (verde) y la línea azul representa la transmisión $T$ . Las líneas moradas punteadas muestran la posición de los puntos excepcionales. . . . .	81
5.1	Cadena unidimensional con $\eta = 0$ . . . . .	88
5.2	Eigenvalores para una cadena conformada por 20 sitios donde uno de los acoplamientos es nulo ( $\eta = 0$ ), mientras que el otro acoplamiento tiene un valor diferente de cero; dados por la ecuación (5.12). Se muestran dos casos a) caso donde se cumple que $v > \gamma$ dando lugar a eigenvalores completamente reales y b) caso con eigenvalores imaginarios ya que $v < \gamma$ . . . . .	89
5.3	Eigenvalores obtenidos de manera numérica para una cadena simétrica de 200 sitios con $\eta = 1 = v$ . a) $\gamma = 0.2$ y b) $\gamma = 0.9$ . . . . .	90
5.4	Dependencia temporal de la distribución de la probabilidad para una cadena simétrica donde la excitación inicial comienza a la mitad de la cadena, $n = 10$ . . . . .	90
5.5	Eigenvalores para una estructura de 20 sitios para tres casos diferentes donde se comparan los parámetros $\gamma^2$ y $\delta^2$ . . . . .	92
5.6	Dependencia temporal de la distribución de probabilidad obtenida de manera numérica para una cadena simétrica de 20 sitios. La primera fila corresponde al caso simétrico ( $\eta = v = 1$ ), las siguientes filas representan a una estructura asimétrica $\alpha < 1$ (fila de en medio) y $\alpha > 1$ (fila inferior). Los tres casos abarcan el mismo intervalo de tiempo para poder comparar entre ellas. . . . .	93
5.7	Dependencia temporal de la distribución de probabilidad correspondientes a los casos mostrados en la figura 5.6 pero para un tiempo mayor, $t = 100$ . . . . .	94