BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

ALGUNOS IDEALES DE ÍNDICE FINITO EN EL ANILLO DE BURNSIDE $B_p(C_{p^n})$.

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA:

CRISTHIAN VÁZQUEZ ROSAS

DIRECTOR DE TESIS:

DR. DAVID VILLA HERNÁNDEZ

PUEBLA, PUEBLA.

Índice general

Introducción

A finales del siglo XIX, W. Burnside introdujo las ideas de lo que actualmente se conoce como el anillo de Burnside, pero fue Solomon en 1967 en su artículo "The Burnside algebra of a finite group" quien le da la estructura algebraica de anillo.

En 1977, L. Solomon introdujo una función Zeta para un orden; la cual requiere del conocimiento de todos sus ideales de índice finito, desde entonces C.J. Bushnell e I. Reiner han desarrollado aún más esta función y algunas de sus generalizaciones.

En 2009, D. Villa Hernández obtuvo la función Zeta del anillo de Burnside para grupos cíclicos de orden un primo p y p^2.

En 2016, J. M. Ramírez Contreras y D. Villa Hernández obtuvieron la función Zeta del anillo de Burnside para grupos cíclicos de orden un primo p^3.

En 2018, C. Vázquez Rosas y D. Villa Hernández determinaron de forma explícita los ideales de índice finito del anillo de Burnside $B_p(C_{p^4})$, asociados a los ideales de índice finito en $B_p(C_{p^3})$ de la forma $(p^{m_1}, p^{m_2}, p^{m_3}, p^{m_4})\mathbb{Z}_p^4$ donde $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3$ y $m_4 \geq 4$.

Capítulo 1

G-conjuntos

Definición 1.1. Sea G un grupo y X un conjunto. Una acción de G en X es una función $* : G \times X \to X$ tal que $(g, x) \longmapsto g * x$ que satisface:

i) $e * x = x$ para todo $x \in X$, donde e es la identidad de G.

ii) $(gh) * x = g * (h * x)$ para todo $g, h \in$ G y $x \in$X.

Si hay una acción de G en X se dice que X es un G-conjunto.

Observación 1.1. Sea X un $G-$conjunto, entonces la siguiente es una relación de equivalencia en X:

$$x \sim y \text{ si y solo si existe } g \in \text{G tal que } y = g * x \text{ con } x, y \in \text{X}.$$

Demostración. •) $x \sim x$ ya que para $e \in$G se tiene que x=$e * x$ (Reflexiva).

•) Si $x \sim y$, tenemos que $y = g * x$ para algún $g \in G$, luego $g^{-1} * y = g^{-1} * (g * x) = (g^{-1}g) * x = e * x = x$. Por tanto $y \sim x$ (Simétrica).

•) Si $x \sim y$ y $y \sim z$, entonces existen $g, g' \in G$ tal que $y = g * x$ y $z = g' * y$ para algunos $g, g' \in G$, luego $z = g' * (g * x) = (g'g) * x$ por tanto $x \sim z$ (Transitiva). ■

Definición 1.2. De acuerdo a la relación $\sim$, denotaremos a la clase de equivalencia de $x \in X$ por $\mathcal{O}_G(x)$ y la llamaremos órbita de x en G. Notemos que $\mathcal{O}_G(x) = \{y : y = g*x$ para algún $g \in G\} \subseteq X$.

Corolario 1.1. *Las órbitas son ajenas y además*

$$X = \bigcup \mathcal{O}_G(x)$$

donde la unión es sobre un conjunto de representantes de las órbitas.

Demostración. El resultado es directo de la Observacion 1.1. ■

Ejemplo 1.1. Sea G un grupo y X un conjunto no vacío, entonces G actúa en X con la acción trivial.

$$g * x = x \text{ para todo } x \in X \text{ y } g \in G.$$

Ejemplo 1.2. Sean G un grupo, $H \leq G$ y $\frac{G}{H} = \{aH : a \in G\}$. Entonces $\frac{G}{H}$ es un G-conjunto a través de:

$$* : G \times \tfrac{G}{H} \to \tfrac{G}{H} \text{ tal que } (g, aH) \longmapsto g * (aH) = (ga)H$$

Demostración. Veamos que $*$ está bien definida:
Dadas $aH, bH \in \frac{G}{H}$, tenemos que $aH = bH$ si y solo si $a = bh$ para algún $h \in H$. Luego, $gaH = g(bh)H = gbH$. Por lo tanto $*$ está bien definida.
Ahora veamos que $*$ satisface $i)$ e $ii)$ de la Definición 1.1.

i) $e * aH = (ea)H = aH$ para todo $a \in \frac{G}{H}$.

ii) $(g_1 g_2) * aH = ((g_1 g_2)a)H = (g_1(g_2 a))H = g_1 * (g_2 aH) = g_1 * (g_2 * aH)$.

Por lo tanto $*$ es una acción de G en $\frac{G}{H}$. ■

Definición 1.3. Sean X e Y dos G-conjuntos, definimos la unión disjunta de X e Y como sigue:

$$X \sqcup Y := X' \cup Y' \text{ donde } X' = X \times \{1\},\ Y' = Y \times \{2\} \text{ donde } 1 \notin Y \text{ y } 2 \notin X.$$

Notemos que $X' \cap Y' = \emptyset$.

De manera similar se define la unión ajena de una familia de G- conjuntos.

Ejemplo 1.3. Si $\{X_i\}_{i \in I}$ es una familia de G-conjuntos, entonces $\bigsqcup_{i \in I} X_i$ es un G-conjunto mediante:

$$* : G \times \bigsqcup_{i \in I} X_i \to \bigsqcup_{i \in I} X_i$$

tal que

$$(g, (x, i)) \mapsto g * (x, i) = (g *_i x, i)$$

donde $*_i$ es la acción de G en X_i con $x \in X_i$ para algún $i \in I$.

Demostración. Sólo basta ver $i)$ e $ii)$ de la Definición 1.1 ya que $*$ está bien definida.

i) $e * (x, i) = (e *_i x, i) = (x, i)$.

ii) $(g_1 g_2) * (x, i) = ((g_1 g_2) *_i x, i) = (g_1 *_i (g_2 *_i x), i) = g_1 * (g_2 * (x, i))$. ■

Ejemplo 1.4. Si $\{X_i\}_{i \in I}$ es una familia de G-conjuntos, entonces el producto cartesiano de la familia $\{X_i\}_{i \in I}$ (denotado por $\prod_{i \in I} X_i$) es un G-conjunto mediante:

$$* : G \times \prod_{i \in I} X_i \to \prod_{i \in I} X_i$$

tal que

$$(g, (x_i)_{i\in I}) \mapsto g * (x_i)_{i\in I} = (g *_i x_i)_{i\in I}$$

donde $*_i$ es la acción de G en X_i para cada $i \in I$.

Demostración. Sólo resta probar i) e ii) de la Definición 1.1 ya que $*$ está bien definida.

i) $e * (x_i)_{i\in I} = (e *_i x_i)_{i\in I} = (x_i)_{i\in I}$.

ii) $(g_1 g_2) * (x_i)_{i\in I} = (g_1 *_i (g_2 *_i x_i))_{i\in I} = g_1 * (g_2 *_i x_i)_{i\in I} = g_1 * (g_2 * (x_i)_{i\in I})$. ∎

Nota: En lo sucesivo denotaremos $g * x = gx$ para todo $x \in X$ y $g \in G$ donde X es un G-conjunto.

Ejemplo 1.5. Sea $H \leq G$ un subgrupo y X un H-conjunto, entonces $G \times X$ es un H-conjunto con la siguiente acción:

$$h(g, x) = (gh^{-1}, hx) \text{ para todo } h \in H,\ g \in G \text{ y } x \in X.$$

Definición 1.4. Sean X e Y dos G-conjuntos. Un homomorfismo de G-conjuntos es una función $f : X \to Y$ tal que $f(gx) \mapsto g(f(x))$ para cada $g \in G$.
Si además f es biyección, entonces f es llamada isomorfismo de G-conjuntos y se dice que X e Y son isomorfos como G-conjuntos, lo cual se denotará como $X \cong Y$.

Ejemplo 1.6. Sea X un G-conjunto y $\varphi : H \to G$ un homomorfismo de grupos, entonces X es un H-conjunto. Sea $h \in H$ y $x \in X$ definimos la acción de H en X como sigue:

$$hx = \varphi(h)x \text{ para todo } h \in H \text{ y } x \in X.$$

Definición 1.5. Diremos que un G-conjunto X es transitivo si X tiene una y solo una órbita, es decir , todos los elementos están relacionados de acuerdo a la Observación 1.1.

Ejemplo 1.7. Sean $H, K \leq G$, tales que $H \leq K$ subgrupos, entonces $\varphi : \frac{G}{H} \to \frac{G}{K}$ es un homomorfismo de G-conjuntos definido por la asignación:

$$aH \mapsto aK$$

.

Observación 1.2. Sean X, Y y Z G-conjuntos, $f_1 : X \to Y$ y $f_2 : Y \to Z$ homomorfismos de G-conjuntos, entonces $f_2 \circ f_1 : X \to Z$ es un homomorfismo de G-conjuntos.

Observación 1.3. Si $f : X \to Y$ es un isomorfismo de G-conjuntos, entonces $f^{-1} : Y \to X$ es un isomorfismo de G-conjuntos.

Definición 1.6. Sean G un grupo, X un G-conjunto y $x \in X$. Definimos y denotamos el estabilizador de x en G como sigue:

$$Stab_G(x) = \{g \in G : g * x = x\}$$

Proposición 1.1. *Sea X un G-conjunto, entonces:*

i) $Stab_G(gx) = g(Stab_G(x))g^{-1}$

ii) $\mathcal{O}(x) \cong \frac{G}{Stab_G(x)}$

iii) $\frac{G}{H}$ *es transitivo para todo* $H \leq G$

iv) *Si X es transitivo, entonces existe $H \leq G$ tal que* $X \cong \frac{G}{H}$

Demostración.

i) Dado $a \in G$, tenemos que

$$\begin{array}{rcl} a \in Stab_G(gx) & \Leftrightarrow & a(gx) = gx \\ & \Leftrightarrow & (g^{-1}ag)x = x \\ & \Leftrightarrow & g^{-1}ag \in Stab_G(x) \\ & \Leftrightarrow & a \in g(Stab_G(x))g^{-1}. \end{array}$$

Así $Stab_G(gx) = g(Stab_G(x))g^{-1}$.

ii) Sea $H = Stab_G(x)$, definimos $\varphi : \mathcal{O}(x) \to \frac{G}{H}$ tal que $gx \mapsto gH$. Veamos que φ es un isomorfismo. Notemos lo siguiente:

$$g_1x = g_2x \Leftrightarrow (g_2^{-1}g_1)x = x \Leftrightarrow g_2^{-1}g_1 \in H \Leftrightarrow g_1H = g_2H$$

Así, hemos probado que φ está bien definida y además es inyectiva.
Es claro que φ es sobreyectiva. Por último:

$$\varphi(a(gx)) = \varphi(agx) = a(gH) = a\varphi(gx) \text{ para todo } a, g \in G, x \in X.$$

Así, φ es un isomorfismo de G-conjuntos entre $\mathcal{O}(x)$ y $\frac{G}{H}$.

iii) En particular tenemos que $eH \in \frac{G}{H}$. Si $gH \in \frac{G}{H}$, entonces $gH = g(eH) \in \mathcal{O}(eH) = \mathcal{O}(H)$.
Por tanto $\frac{G}{H} = \mathcal{O}(eH)$.

iv) Si X es transitivo, entonces $X = \mathcal{O}(x) \cong \frac{G}{H}$, donde $H = Stab_G(x)$.

■

Definición 1.7. Sean $H \leq G$ un subgrupo y $g \in G$. Definimos el conjugado de H por g al subgrupo de G definido como sigue:

$$gHg^{-1} = \{ghg^{-1} : h \in H\}.$$

Observación 1.4. Sea $X = \{H \subseteq G : H \leq G \text{ es un subgrupo}\}$. Entonces X es un G-conjunto con la acción:

$$* : G \times X \to X \text{ tal que } (g, H) \mapsto g * H = gHg^{-1}.$$

Definición 1.8. Al conjunto de órbitas de $X = \{H \subseteq G : H \leq G\}$ bajo la acción de G lo denotaremos $\mathcal{C}(G)$ y lo llamaremos las clases de conjugación de subgrupos de G. Denotamos por $[H] \in \mathcal{C}(G)$ la órbita de $H \in X$ bajo la acción de la Observación 1.4, es decir, $[H] = \{gHg^{-1} : g \in G\}$. Además, $[K] = [H]$ si y solo si $K = gHg^{-1}$ para algún $g \in G$, i.e, H y K son subgrupos conjugados.

Lema 1.1. *Sean $H, K \leq G$ subgrupos. Entonces $\frac{G}{H} \cong \frac{G}{K}$ como G-conjuntos si y solo si $[H] = [K]$.*

Demostración. $\Rightarrow]$
Sea $\varphi : \frac{G}{H} \to \frac{G}{K}$ un isomorfismo de G-conjuntos tal que $eH \mapsto gK$ para algún $g \in G$. Luego, para todo $h \in H$, $gK = \varphi(H) = \varphi(hH) = hgK$, así $gK = hgK$, entonces $g^{-1}hg \in K$, de aquí $g^{-1}Hg \subseteq K$.
Tomemos ahora $\varphi^{-1} : \frac{G}{H} \to \frac{G}{K}$, el cual por la Observación 1.3 es un homomorfismo de G-conjuntos y note que para cada $k \in K, kg^{-1}H = k\varphi^{-1}(K) = \varphi^{-1}(kK) = \varphi^{-1}(K) = g^{-1}H$, así $gkg^{-1} \in H$ para todo $k \in K$, luego por tanto $gKg^{-1} \subseteq H$, en consecuencía $K \subseteq g^{-1}Hg$. Por tanto $K = g^{-1}Hg$.

$\Leftarrow]$
Si $H = g_0Kg_0^{-1}$. Mostremos que $\varphi : \frac{G}{H} \to \frac{G}{K}$ tal que $aH \mapsto ag_0K$ es un isomorfismo de G-conjuntos.

Veamos que φ está bien definida y que es inyectiva $aH = bH \Leftrightarrow a(g_0Kg_0^{-1}) = b(g_0Kg_0^{-1}) \Leftrightarrow ag_0K = bg_0K \Leftrightarrow \varphi(aH) = \varphi(bH)$. Por tanto φ está bien definida y es inyectiva.

Ahora $\varphi : \frac{G}{H} \to \frac{G}{K}$ es sobre. En efecto, sea $xK \in \frac{G}{K}$, luego $\varphi(xg_0^{-1}H) = xK$. Por tanto φ es sobre y así φ es una biyección.

φ es un homomorfismo de G-conjuntos porque :

$\varphi(g(aH)) = \varphi(gaH) = (gag_0)K = g(ag_0K) = g\varphi(aH)$. Por tanto φ es homomorfismo de G-conjuntos. Así, φ es isomorfismo de G-conjuntos. ■

Observación 1.5. Sea $\varphi : X \to Y$ un homomorfismo de G-conjuntos. Entones φ manda órbitas en órbitas.

Proposición 1.2. *Todo G-conjunto es isoformo como G-conjunto a la unión ajena de G-conjuntos de la forma $\frac{G}{H}$ donde $H \leq G$ es un subgrupo.*

Demostración. Si X es un G-conjunto, entonces $X = \dot{\bigcup\limits_{i \in I}} \mathcal{O}(x_i)$ con I un conjunto de índices. Además $\mathcal{O}(x_i) \cong \frac{G}{H_i}$ donde $H_i = Stab_G(x_i) \leq G$.

Sea $\varphi_i : \mathcal{O}(x_i) \to \frac{G}{H_i}$, definimos $\varphi : X \to \bigsqcup_{i\in I} \frac{G}{H_i}$ tal que $x \mapsto \varphi_i(x)$ siempre que $x \in \mathcal{O}(x_i)$. Notemos que φ es homomorfismo biyectivo de G-conjuntos, luego

$$X \cong \bigsqcup_{i\in I} \frac{G}{H_i}.$$

■

Definición 1.9. Sean $H, K \leq G$ subgrupos, H es subconjugado de K si existe $g \in G$ tal que $gHg^{-1} \leq K$ es subgrupo.

Notación: $Hom(X,Y) = \{\varphi : X \to Y : \varphi$ es homomorfismo de G-conjuntos $\}$.

Proposición 1.3. *$Hom(\frac{G}{H}, \frac{G}{K}) \neq \emptyset$ si y solo si H es subconjugado de K.*

Demostración. $\Rightarrow]$
Sea $\varphi : \frac{G}{H} \to \frac{G}{K}$, tal que $H \mapsto gK$, entonces $\varphi(eH) = gK$ para alguna $g \in G$. Para cada $h \in H$ tenemos que $hH = H$, luego $\varphi(hH) = \varphi(eH) = gK$, de lo anterior tenemos que $gK = \varphi(hH) = h\varphi(eH) = hgK$. Por lo tanto $g^{-1}hg \in K$. Así $(g^{-1})Hg \leq K$.

$\Leftarrow]$
Como H es subconjugado de K existe $g \in G$ tal que $gHg^{-1} \leq K$ entonces podemos definir

$$\psi : \frac{G}{gHg^{-1}} \to \frac{G}{K} \text{ tal que } a(gHg^{-1}) \mapsto aK$$

Además por el Lema 1.1 $\frac{G}{H} \cong \frac{G}{gHg^{-1}}$, entonces existe $\sigma : \frac{G}{H} \to \frac{G}{gHg^{-1}}$ un isomorfismo de G-conjuntos.
Por tanto $\psi \circ \sigma : \frac{G}{H} \to \frac{G}{K} \in Hom(\frac{G}{H}, \frac{G}{K})$. ■

Observación 1.6. Si H es subconjugado de K, entonces todo conjugado de H es subconjugado de cualquier conjugado de K.

Observación 1.7. Sean $[H], [K] \in \mathcal{C}(G)$, definimos $[H] \leq [K]$ si y solo si H es subconjugado de K. Entonces " $\leq$ " es un orden parcial.

Capítulo 2

La Marca

Definición 2.1. Sean G un grupo, $H \leq G$ un subgrupo y X un G-conjunto finito. Definimos X^H como el conjunto de todos los puntos de X que quedan fijos bajo la acción de H, es decir ,

$$X^H := \{x \in X : h * x = x \text{ para todo } h \in H\}.$$

Definimos la Marca de H en X como el número de elementos de X^H y la denotamos por

$$\varphi_H(X) = |X^H|.$$

Teorema 2.1. *Sean X, Y G-conjuntos finitos, entonces:*

i) $\varphi_H(X \sqcup Y) = \varphi_H(X) + \varphi_H(Y)$.

ii) $\varphi_H(X \times Y) = \varphi_H(X)\varphi_H(Y)$.

Demostración.

i)

$$\begin{aligned}
(X \sqcup Y)^H &= \{(z_i, i) \in (X \times \{1\}) \cup (Y \times \{2\}) : (h \cdot z_i, i) = (z_i, i) \quad \forall h \in H\} \\
&= \{(x, 1) \in X \times \{1\} : h \cdot x = x \quad \forall h \in H\} \cup \\
&\quad\ \{(y, 2) \in Y \times \{2\} : h \cdot y = y \quad \forall h \in H\} \\
&= (X^H \times \{1\}) \cup (Y^H \times \{2\}) \\
&= X^H \sqcup Y^H.
\end{aligned}$$

Por tanto $|(X \sqcup Y)^H| = |X^H \times \{1\}| + |Y^H \times \{2\}| = |X^H| + |Y^H|$.
Así $\varphi_H(X \sqcup Y) = \varphi_H(X) + \varphi_H(Y)$.

ii)

$$\begin{aligned}
(X \times Y)^H &= \{(x, y) \in X \times Y : h(x, y) = (x, y) \quad \forall h \in H\} \\
&= \{(x, y) \in X \times Y : (hx, hy) = (x, y) \quad \forall h \in H\} \\
&= \{(x, y) \in X \times Y : hx = x \wedge hy = y \quad \forall h \in H\} \\
&= \{(x, y) \in X \times Y : x \in X^H \wedge y \in Y^H\} \\
&= X^H \times Y^H.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $|(X \times Y)^H| = |X^H \times Y^H| = |X^H||Y^H|$.
Así $\varphi_H(X \times Y) = \varphi_H(X) \cdot \varphi_H(Y)$.

$\blacksquare$

Lema 2.1. *Si* $[H] = [K]$ *con* $H, K \leq G$ *subgrupos, entonces* $\varphi_H(X) = \varphi_K(X)$ *para todo* G*-conjunto* X*.*

Demostración. Como $[H] = [K]$, existe $a \in G$ tal que $K = aHa^{-1}$. Luego

$$\begin{aligned} X^K &= \{x \in X; k \cdot x = x \quad \forall k \in K\} \\ &= \{x \in X; aha^{-1}x = x \quad \forall h \in H\} \\ &= \{x \in X; h(a^{-1}x) = (a^{-1})x \quad \forall h \in H\} \\ &= \{x \in X; a^{-1}x \in X^H\} \\ &= \{x \in X; x \in aX^H\} \\ &= aX^H. \end{aligned}$$

Definimos $\gamma_a : X^H \to aX^H$ tal que $x \mapsto a \cdot x$ y además $\gamma_a^{-1} : aX^H \to X^H$ tal que $y \mapsto a^{-1}y$. Notemos que $\gamma_a \circ \gamma_a^{-1} = 1_{aX^H}$ y que $\gamma_a^{-1} \circ \gamma_a = 1_{X^H}$. Por tanto γ_a es una biyección, entonces $|X^H| = |aX^H| = |X^K|$. Así $\varphi_H(X) = \varphi_K(X)$ $\blacksquare$

Lema 2.2. *Sean* $H, K \leq G$ *subgrupos, entonces los siguientes conjuntos están en biyección.*

$$(\tfrac{G}{K})^H \longleftrightarrow Hom(\tfrac{G}{H}, \tfrac{G}{K})$$

Demostración.

$i)$ Sabemos que $Hom(\frac{G}{H}, \frac{G}{K}) \neq \emptyset$ si y solo si $[H] \leq [K]$. Supongamos que $[H] \not\leq [K]$, entonces $Hom(\frac{G}{H}, \frac{G}{K}) = \emptyset$.
Por otro lado tenemos que:

$$\begin{aligned} (\tfrac{G}{K})^H &= \{gK \in \tfrac{G}{K} : h(gK) = gK \quad \forall h \in H\} \\ &= \{gK \in \tfrac{G}{K} : hgK = gK \quad \forall h \in H\} \\ &= \{gK \in \tfrac{G}{K} : g^{-1}hgK = K \quad \forall h \in H\} \\ &= \{gK \in \tfrac{G}{K} : g^{-1}hg \in K \quad \forall h \in H\} \\ &= \{gK \in \tfrac{G}{K} : g^{-1}Hg \subset K\} \\ &= \emptyset. \end{aligned}$$

$ii)$ Consideremos ahora el caso cuando $[H] \leq [K]$, definimos

$$\Gamma : (\tfrac{G}{K})^H \to Hom(\tfrac{G}{H}, \tfrac{G}{K}) \text{ tal que } gK \mapsto \Gamma_g$$

donde

$$\Gamma_g : \tfrac{G}{H} \to \tfrac{G}{K} \text{ tal que } aH \mapsto agK$$

Veamos que Γ_g está bien definida.
Para toda $aH, bH \in \frac{G}{H}$, tenemos que $aH = bH \Leftrightarrow b = ah$ para algún $h \in H$. Mostremos que $agK = bgK$.
$bgK = (ah)gK = a(hgK) = a(h(gK)) = a(gK)) = agK$, ya que $gK \in (\frac{G}{K})^H$.
Por tanto Γ_g está bien definida.

Observemos que $\Gamma_g \in Hom(\frac{G}{H}, \frac{G}{K})$. En efecto, sea $aH \in \frac{G}{H}$ y $f \in G$, luego

$$\begin{aligned} \Gamma_g(f \cdot aH) &= \Gamma_g(faH) \\ &= fagK \\ &= f(agK) \\ &= f(\Gamma_g(aH)). \end{aligned}$$

Por tanto $\Gamma_g \in Hom(\frac{G}{H}, \frac{G}{K})$.

Notemos que Γ está bien definida. En efecto, para todo $gK, g'K \in \frac{G}{H}$, tenemos que $gK = g'K \Leftrightarrow g' = gk$ para algún $k \in K$. Veamos que $\Gamma_g = \Gamma_{g'}$.
$\Gamma_{g'}(aH) = ag'K = agkK = agK = \Gamma_g(aH) \quad \forall aH \in \frac{G}{H}$. Por tanto $\Gamma_g = \Gamma g'$. Así Γ está bien definida.

Ahora definamos $\Gamma' : Hom(\frac{G}{H}, \frac{G}{K}) \to (\frac{G}{K})^H$ tal que $\alpha \mapsto \alpha(H)$. $\vdash \alpha(H) \in (\frac{G}{K})^H$
Sea $h \in H, h\alpha(H) = \alpha(hH) = \alpha(H)$. Por tanto $\alpha(H) \in (\frac{G}{K})^H$.
Notemos que $\Gamma' \circ \Gamma = 1_{(\frac{G}{K})^H}$ ya que $(\Gamma' \circ \Gamma)(gK) = \Gamma'(\Gamma(gK)) = \Gamma'(\Gamma_g) = \Gamma_g(H) = gK$.
Por tanto $\Gamma' \circ \Gamma = 1_{(\frac{G}{K})^H}$.
Resta probar que $(\Gamma \circ \Gamma') = 1_{Hom(\frac{G}{H}, \frac{G}{K})}$. En efecto,

$$\begin{aligned} (\Gamma \circ \Gamma')(\alpha) &= \Gamma(\Gamma'(\alpha)) \\ &= \Gamma(\alpha(H)) \\ &= \Gamma(g_0K) \\ &= \Gamma_{g_0} \end{aligned}$$

donde $\alpha(H) = g_0K$. Veamos que $\Gamma_{g_0} = \alpha$. En efecto,

$$\begin{aligned} \Gamma_{g_0}(aH) &= a(g_0K) \\ &= a(\alpha(H)) \\ &= \alpha(aH) \quad \forall aH \in \frac{G}{H} \end{aligned}$$

Por tanto $\Gamma_{g_0} = \alpha$. Así $(\Gamma \circ \Gamma') = 1_{Hom(\frac{G}{H}, \frac{G}{K})}$.
Por lo tanto Γ es biyección.

$\blacksquare$

Corolario 2.1. *$\varphi_H(\frac{G}{K}) \neq 0$ si y solo si $[H] \leq [K]$.*

Definición 2.2. Dados G un grupo y $H \leq G$ subgrupo. Definimos el normalizador de H en G como:

$$N_G(H) := \{g \in G : gHg^{-1} = H\}.$$

Observación 2.1. $H \trianglelefteq N_G(H) \leq G$.

Definición 2.3. Dados G un grupo y $H \leq G$ subgrupo. Definimos el grupo de Weyl de H en G como sigue:

$$W(H) := \frac{N_G(H)}{H}.$$

Lema 2.3. *Sea G un grupo y $H \leq G$ un subgrupo, entonces $(\frac{G}{H})^H \cong W(H)$ como $N_G(H)$-conjuntos.*

Demostración. Sea G un grupo y $H \leq G$, entonces $\frac{G}{H}$ es un G-conjunto. Un caso particular es cuando $G = N_G(H)$, i.e, cuando $\frac{N_G(H)}{H} = W(H)$ es un $N_G(H)$-conjunto. Veamos que $(\frac{G}{H})^H$ es un $N_G(H)$-conjunto. Sea $g \in N_G(H)$ y $aH \in (\frac{G}{H})^H$. Ahora exhibiremos que $g \cdot aH = gaH \in (\frac{G}{H})^H$. Ahora sea $h \in H$ y notemos que $gHg^{-1} = H \Leftrightarrow gH = Hg$, por tanto $gh' = hg$ para algún $h' \in H$. Luego $h(gaH) = gh'aH = gaH$. Por tanto $g \cdot aH = gaH \in (\frac{G}{H})^H$. Definamos

$$\tau : (\tfrac{G}{H})^H \to W(H) \text{ tal que } aH \mapsto aH.$$

Notemos que τ es de $N_G(H)$- conjuntos por ser la identidad. Observemos

$$\begin{array}{rcl} aH \in (\frac{G}{H})^H & \Leftrightarrow & haH = aH \quad \forall h \in H \\ & \Leftrightarrow & a^{-1}haH = H \quad \forall h \in H \\ & \Leftrightarrow & a^{-1}ha \in H \quad \forall h \in H \\ & \Leftrightarrow & a^{-1}Ha \subset H \\ & \Leftrightarrow & a^{-1}Ha = H \\ & \Leftrightarrow & a \in N_G(H). \end{array}$$

Por tanto $aH \in (\frac{G}{H})^H \Leftrightarrow aH \in W(H) = \frac{N_G(H)}{H}$. En consecuencia $(\frac{G}{H})^H = W(H)$. Así $\tau = 1_{W(H)}$ es un isomorfismo. Por tanto $(\frac{G}{H})^H \cong W(H)$.

■

Lema 2.4. *(Cauchy-Frobenius-Burnside) Sea G un grupo finito, X un G-conjunto finito y N= el número de órbitas, entonces*

$$N = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |Fix(g)|$$

donde $Fix(g) = \{x \in X : gx = x\}$

Demostración. Definimos $\mathcal{A} = \{(g, x) \in G \times X : gx = x\}$. Sea $g \in G$ arbitrario pero fijo. Entonces

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{A}_g & := & \{(g, x) \in G \times X : g \cdot x = x\} \\ & = & \{(g, x) \in G \times X : x \in Fix(g)\} \\ & = & \{g\} \times Fix(g) \end{array}$$

Por tanto $|\mathcal{A}_g| = |Fix(g)|$.

Observemos que $\mathcal{A} = \dot{\bigcup\limits_{g\in G}} \mathcal{A}_g$, luego $|\mathcal{A}| = \sum\limits_{g\in G} |\mathcal{A}_g| = \sum\limits_{g\in G} |Fix(g)|$.

Definimos

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_x &= \{(g,x) \in G \times X : g \cdot x = x\} \\ &= \{(g,x) \in G \times X : g \in Stab_G(x)\} \\ &= (Stab_G(x)) \times \{x\} \end{aligned}$$

Entonces $|\mathcal{A}_x| = |Stab_G(x)|$ y observemos que $\mathcal{A} = \dot{\bigcup\limits_{x\in X}} \mathcal{A}_x$, luego como $X = \bigcup\limits_{i=1}^{N} \mathcal{O}(x_i)$ tenemos

$$|\mathcal{A}| = \sum_{x\in X} |Stab_G(x)| = \sum_{i=1}^{N} (\sum_{x\in \mathcal{O}(x_i)} |Stab_G(x)|) \qquad (\star)$$

Recordemos que $\mathcal{O}(x_i) \cong \frac{G}{Stab_G(x)}$, luego

$$|\mathcal{O}(x_i)| = \tfrac{|G|}{|Stab_G(x)|} \Leftrightarrow |Stab_G(x)| = \tfrac{|G|}{\mathcal{O}(x_i)}. \qquad (\star\star)$$

De $(\star)$ y $(\star\star)$ obtenemos

$$|\mathcal{A}| = \sum_{i=1}^{N} (\sum_{x\in \mathcal{O}(x_i)} \frac{|G|}{|\mathcal{O}(x_i)|}) = \sum_{i=1}^{N} (\frac{|\mathcal{O}(x_i)||G|}{|\mathcal{O}(x_i)|}) = \sum_{i=1}^{N} |G| = N|G|$$

Es decir, $|\mathcal{A}| = N|G|$. Así

$$N|G| = \sum_{g\in G} |Fix(g)| \Leftrightarrow N = \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} |Fix(g)|.$$

$\blacksquare$

Observación 2.2. Sean X, Y dos G-conjuntos finitos. La relación $Y \cong X$ como G-conjuntos, es una relación de equivalencia.

Lema 2.5. *Sean $H, K \leq G$ subgrupos, entonces*

$$\varphi_H\left(\frac{G}{K}\right) = \left(\frac{|N_G(K)|}{|K|}\right)\alpha(H,K) = \left(\frac{|N_G(H)|}{|K|}\right)\beta(H,K)$$

donde

$$\alpha(H,K) = |\{E \leq G : [E] = [K] \quad y \quad H \subseteq E\}|$$

y

$$\beta(H,K) = |\{E \leq G : [E] = [H] \quad y \quad E \subseteq K\}|$$

Demostración. Sea $\mathcal{A} = \{E \leq G : [E] = [K] \quad y \quad H \subseteq E\}$. Luego sabemos que

$$\begin{array}{rcl} \left(\frac{G}{K}\right)^H & = & \{aK : haK = aK \text{ para toda } h \in H\} \\ & = & \{aK : a^{-1}ha \in K \text{ para toda } h \in H\} \\ & = & \{aK : a^{-1}Ha \subseteq K\} \\ & = & \{aK : H \subseteq aKa^{-1}\}. \end{array}$$

Ahora, tomemos $f : \{aK : H \subseteq aKa^{-1}\} \to \mathcal{A}$ tal que $aK \mapsto aKa^{-1}$.

Veamos que f esta bien definida. Sean $aK = bK$, entonces existe $k \in K$ tal que $a = bk$, por tanto $aKa^{-1} = bkKk^{-1}b^{-1} = bKb^{-1}$. Por tanto f esta bien definida.

f es sobreyectiva. En efecto, sea $E \in \mathcal{A}$, así $[E] = [K]$ y $H \subseteq E$, i.e, existe $a \in G$ tal que $E = aKa^{-1}$, entonces $f(aK) = E$. Resta ver que $aK \in \left(\frac{G}{K}\right)^H$. Sea $h \in H \subseteq E$, entonces $h = ak'a^{-1}$ para algún $k' \in K$, por lo que $haK = ak'a^{-1}aK = aK$.

Por tanto, $\{aK : H \subseteq aKa^{-1}\} = \bigcup\limits_{E \in \mathcal{A}} f^{-1}(E)$, en donde $f^{-1}(E)$ es la imagen inversa de E bajo f.

Veamos que $f^{-1}(E) = \{abK : bK \in \frac{N_G(K)}{K}\}$.

($\subseteq$) Sea $gK \in \{aK : H \subseteq aKa^{-1}\}$ tal que $f(gK) = aKa^{-1}$, de aquí que $gKg^{-1} = aKa^{-1}$, así $a^{-1}gKg^{-1}a = K$, con lo cual $a^{-1}g \in N_G(K)$, de donde $a^{-1}g = b \in N_G(K)$, entonces $g = ab$ tal que $bK \in \frac{N_G(K)}{K}\}$.
($\supseteq$) Sea abK con $bK \in \frac{N_G(K)}{K}$, entonces $f(abK) = abKb^{-1}a^{-1} = aKa^{-1} = E$, entonces $abK \in f^{-1}(E)$.

Notemos que si $bK, b'K \in \frac{N_G}{K}$ entonces $bK = b'K$ si y solo si $abK = ab'K$ por lo que de la igualdad de conjuntos anterios obtenemos que $|f^{-1}(E)| = |\frac{N_G(K)}{K}|$. Por tanto

$$\varphi_H\left(\frac{G}{K}\right) = \frac{|N_G(K)|}{|K|}\alpha(H, K).$$

Ahora llamemos $A = \{a \in G : a^{-1}Ha \subseteq K\}$ y tomemos

$$f_1 : A \to \{aK : a^{-1}Ha \subseteq K\}$$

tal que

$$a \mapsto aK$$

Notemos que por la manera en la que se definio f_1 está bien definida y es sobreyectiva.

Ahora, tenemos que la imagen inversa de aK bajo f_1 es:

$$\begin{array}{rcl}(f_1)^{-1}(aK) & = & \{g\in A : f_1(g)=aK\}\\ & = & \{g\in A : gK=aK\}\\ & = & \{g\in A : a^{-1}g\in K\}\\ & = & \{g\in A : g=ak \quad \text{para algún} \quad k\in K\}\\ & = & \{ak : k\in K\}\\ & = & aK.\end{array}$$

Así, $|(f_1)^{-1}(aK)|=|aK|=|K|$, de aquí que $|A|=|K|\varphi_H\left(\frac{G}{K}\right)$.
Ahora, sea $\mathcal{B}=\{E\leq G : [E]=[H] \text{ y } E\subseteq K\}$ y veamos que

$$|A|=|N_G(H)|\beta(H,K).$$

Para esto, sea $f_2 : A\to\mathcal{B}$ tal que $a\mapsto a^{-1}Ha$. Notemos que f_2 está bien definida. Luego, sea $E\in\mathcal{B}$, así $[E]=[H]$, por lo que existe $a\in G$ tal que $E=a^{-1}Ha\subseteq K$, de donde $a\in A$, y por tanto f_2 es sobreyectiva.

Por otra parte, la imagen inversa de E bajo f_2 es:

$$\begin{array}{rcl}(f_2)^{-1}(E) & = & \{g\in A : f_2(g)=a^{-1}Ha\}\\ & = & \{g\in A : g^{-1}Hg=a^{-1}Ha\}\\ & = & \{g\in A : ag^{-1}Hga^{-1}=H\}\\ & = & \{g\in A : ga^{-1}\in N_G(H)\}\\ & = & \{g\in A : ga^{-1}=x \text{ para algún } x\in N_G(H)\}\\ & = & \{xa : x\in N_G(H)\}\\ & = & (N_G(H))a\end{array}$$

De lo anterior, $|(f_2)^{-1}(E)|=|N_G(H)a|=|N_G(H)|$. Por tanto,

$$|A|=|N_G(H)|\beta(H,K).$$

Y así

$$\varphi_H\left(\frac{G}{H}\right)=\left(\frac{|N_G(H)|}{|K|}\right)\beta(H,K).$$

■

Observación 2.3. En lo sucesivo consideraremos a G-finito y a X un G-conjunto finito.

Capítulo 3

Anillo de Burnside

En esta sección usaremos el homomorfismo marca, mismo que nos ayudará a estudiar el anillo de Burnside y algunas de sus propiedades en los G-conjuntos; además, observaremos el papel que juega el anillo fantasma del anillo de Burnside y lo extenderemos a los enteros p-ádicos, para así poder verlo como un producto tensorial. Por último, daremos dos caracterizaciones del anillo de Burnside de un grupo cíclico de orden p^n con p un número primo, para expresarlo como las $(n+1)$-adas, donde la primera caracterización depende de la diferencia entre las coordenadas consecutivas y la segunda caracterización depende de la diferencia entre la última coordenada y cada una de las anteriores.

Para un grupo finito G, el anillo de Burnside $B(G)$ es definido como el anillo de Grothendieck de las clases de isomorfismo de G-conjuntos con la suma dada por la unión disjunta y la multiplicación por el producto cartesiano. El anillo de Burnside $B(G)$ es libre como grupo abeliano, con base dada por las clases de isomorfismo de los G-conjuntos transitivos de la forma $\frac{G}{H}$ para subgrupos H de G; dos de los cuales se identifican si sus estabilizadores H son conjugados en G, es decir,

$$B(G) = \bigoplus_{H \in \mathcal{C}(G)} \mathbb{Z}\left(\frac{G}{H}\right)$$

donde $\mathcal{C}(G)$ es la familia de las clases de conjugación de subgrupos de G. Para más información sobre el anillo de Burnside ver [1] y [2].

Con frecuencia, se estudia el anillo de Burnside de un grupo finito G usando el homomorfismo marca $\varphi : B(G) \to \mathbb{Z}^{|\mathcal{C}(G)|}$. Para $K \leq G$, la $K-$ésima coordenada de φ es definida como $\varphi_K(X) = |X^K|$, para X un G-conjunto, extendiendo linealmente φ a $B(G)$.

El anillo $\widetilde{B}(G) := \mathbb{Z}^{|\mathcal{C}(G)|}$ es el anillo de las funciones de super clase $f : \mathcal{C}(G) \to \mathbb{Z}$ con la multiplicación dada coordenada a coordenada; el cual es llamado el *anillo fantasma* de G y juega un importante papel para explicar G-conjuntos utilizando sus puntos fijos dados. En particular, se puede mostrar que el homomorfismo marca es inyectivo.

Sea $p \in \mathbb{Z}$ un número primo y sea $\mathbb{Z}_p$ el anillo de los enteros p-ádicos. Denotamos los siguientes productos tensoriales por

$$B_p(G) = \mathbb{Z}_p \bigotimes_{\mathbb{Z}} B(G) = \bigoplus_{H \in \mathcal{C}(G)} \mathbb{Z}_p \left(\frac{G}{H}\right)$$

y

$$\widetilde{B}_p(G) = \mathbb{Z}_p \bigotimes_{\mathbb{Z}} \widetilde{B}(G) = \prod_{H \in \mathcal{C}(G)} \mathbb{Z}_p$$

donde tenemos que $B_p(G)$ es un $\mathbb{Z}_p$-orden y $\widetilde{B}_p(G)$ un $\mathbb{Z}_p$-orden máximo .

Observación 3.1. Sea $q \in \mathbb{Z}$ un número primo. Notemos que $B_q(G) \subseteq \widetilde{B}_q(G)$. Sabemos que para todo $x \in \widetilde{B}_q(G)$, se tiene que $|G|x \in B_q(G)$ por lo que si q no divide a $|G|$, entonces $|G|$ es unidad en $\mathbb{Z}_q$ y así tenemos que $x \in B_q(G)$, concluyendo que $B_q(G) = \widetilde{B}_q(G)$.

Ejemplo 3.1. (Caracterización de $B_p(C_{p^n}) \subseteq \mathbb{Z}_p^{n+1}$). Consideremos a $C_{p^n} =< a >$ un grupo cíclico generado por a de orden p^n. Sea

$$\mathcal{C}(C_{p^n}) = \{H_0 =< a >, H_1 =< a^p >, H_2 =< a^{p^2} >, \ldots, H_n =< a^{p^n} >\}$$

y sea $a_i = \frac{C_{p^n}}{H_i}$ para $i = 0, 1, \ldots, n$, entonces

$$B_p(C_{p^n}) = \bigoplus_{i=0}^{n} \mathbb{Z}_p a_i$$

luego, el homomorfismo marca φ induce la siguiente inclusión:

$$\begin{array}{ccc} B_p(C_{p^n}) & \to & \mathbb{Z}_p^{n+1} \\ X & \mapsto & (\varphi_{H_0}(X), \varphi_{H_1}(X), \ldots, \varphi_{H_n}(X)) \end{array}$$

puesto que C_{p^n} es abeliano, entonces

$$\varphi_H\left(\frac{C_{p^n}}{K}\right) = \left\{ \begin{array}{ccc} \left|\frac{C_{p^n}}{K}\right| & \text{si} & H \subseteq K \\ 0 & \text{si} & H \not\subseteq K \end{array} \right.$$

luego

$$\begin{array}{rcl} a_0 = \frac{C_{p^n}}{H_0} & \longmapsto & (1, 1, \ldots, 1) \\ a_1 = \frac{C_{p^n}}{H_1} & \longmapsto & (0, p, \ldots, p) \\ a_2 = \frac{C_{p^n}}{H_2} & \longmapsto & (0, 0, p^2, \ldots, p^2) \\ & \vdots & \\ a_n = \frac{C_{p^n}}{H_n} & \longmapsto & (0, 0, \ldots, p^n) \end{array}$$

Definición 3.1. Con base al ejemplo anterior, definimos y denotamos el anillo de Burnside de un grupo cíclico de orden p^n como sigue:

$$B_p(C_{p^n}) = \{(x_0, x_1, \cdots, x_n) : x_i - x_{i+1} \in p^{i+1}\mathbb{Z}_p \text{ con } i = 0, \cdots, n-1\}$$

o equivalentemente

$$B_p(C_{p^n}) = \{(x_0, x_1, \cdots, x_n) : x_n - x_i \in p^{i+1}\mathbb{Z}_p \text{ con } i = 0, \cdots, n-1\}.$$

donde $B_p(C_{p^n}) \subseteq \mathbb{Z}_p^{n+1}$ como subanillo.

En lo sucesivo utilizaremos la última caracterización por conveciencia.

Capítulo 4

Algunos ideales de índice finito en $B_p(C_{p^n})$.

Definición 4.1. Dados dos morfismos $f : B \to A$ y $g : C \to A$ en una categoría $\mathscr{C}$, una solución es una tripleta ordenada (D, α, β) que hace que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[d, "g"] \\ B \arrow[r, "f"'] & A \end{tikzcd}$$

Un producto fibrado es una solución (D, α, β) que es la mejor en el sentido que: para cada solución (X, α', β') existe un único morfismo $\theta : X \to D$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, dashed, "\theta"] \arrow[drr, bend left, "\alpha'"] \arrow[ddr, bend right, "\beta'"'] & & \\ & D \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[d, "g"] \\ & B \arrow[r, "f"'] & A \end{tikzcd}$$

El producto fibrado cuando existe es único hasta isomorfismo.

Observación 4.1. Consideremos el siguiente diagrama de producto fibrado

$$\begin{tikzcd}
(a_1, a_2) \arrow[rrr, dashed] \arrow[ddd, dashed] & & & a_2 \arrow[ddd, dashed] \\
& A \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "f_1"'] & A_2 \arrow[d, "g_2"] & \\
& A_1 \arrow[r, "g_1"'] & \bar{A} & \\
a_1 \arrow[rrr, dashed] & & & g_1(a_1) = g_2(a_2)
\end{tikzcd}$$

donde $A, A_1, A_2, \bar{A}$ son anillos conmutativos con unidad y f_1, f_2, g_1, g_2 son homomorfismos sobreyectivos de anillos, es decir ,

$$A = \{(a_1, a_2) \in A_1 \times A_2 : g_1(a_1) = g_2(a_2)\}$$

Veamos como caracterizar los ideales de A, en el caso de que A_2 es un D.I.P. Sea $I \leq A$ un ideal e $I_j = f_j(I)$ para $j = 1, 2$.
Es fácil ver que $I_j \leq A_j$ para $j = 1, 2$. Ahora, como A_2 es un D.I.P, entonces existe $\beta \in A_2$ tal que $I_2 = \beta A_2$, luego, como f_2 es sobreyectivo, existe $\alpha \in A_1$ tal que $(\alpha, \beta) \in I \leq A$ y $f_2(\alpha, \beta) = \beta$.
Dado que es un producto fibrado se cumple

$$g_1(\alpha) = g_2(\beta)$$

Ahora, sea $(x, y) \in I$, puesto que $y = f_2(x, y) \in I_2$, entonces existe $b_2 \in A_2$ tal que $y = \beta b_2$, como f_2 es sobreyectivo existe $b_1 \in A_1$ tal que $f_2(b_1, b_2) = b_2$. Además, $(\alpha, \beta)(b_1, b_2) = (\alpha b_1, \beta b_2) \in I$ y $(x, y) = (x, \beta b_2) \in I$, de donde $(x - \alpha b_1, 0) \in I$.
Definimos $J = \{\gamma \in A_1 : (\gamma, 0) \in I\}$. Es claro que J es un ideal en A_1.

Por lo anterior, tenemos que existe $\gamma \in J$ tal que $x - \alpha b_1 = \gamma$ entonces $x = \alpha b_1 + \gamma$ con $\gamma \in J$. Por lo tanto, $(x, y) = (\alpha b_1 + \gamma, \beta b_2) = (\alpha, \beta)(b_1, b_2) + (\gamma, 0)$. Así, $I \subseteq (\alpha, \beta)A + (J, 0) \subseteq I$, de donde es claro que se da la igualdad, $I = (\alpha, \beta)A + (J, 0)$

Proposición 4.1. *(Caracterización) Con la notación de la Observación 4.1 si A_2 es un D.I.P e $I \leq A$ es un ideal, entonces*

$$I = (\alpha, \beta)A + (J, 0)$$

donde:

i) $J \leq A_1$ *es un ideal tal que* $g_1(J) = \{0\}$

ii) $\beta \in A_2$ *es el generador del ideal principal* βA_2

iii) $\alpha \in A_1$ *es tal que* $g_1(\alpha) = g_2(\beta)$ *y* α *es único módulo* J

iv) *Si* $D = \{(a_1, a_2) \in A : a_2\beta = 0\}$*, entonces* $a_1\alpha \in J$ *para todo* $(a_1, a_2) \in D$*, esto es,* $f_1(D)\alpha \subseteq J$.

Demostración. (Unicidad de α) Sea $(\alpha, \beta) \in I$ y supongamos que $(\alpha', \beta) \in I$, entonces $(\alpha' - \alpha, 0) \in I$ luego $\alpha' - \alpha \in J$ si y solo si $\alpha' + J = \alpha + J$. Así α es único módulo J. Para *iv*) observemos que si $(a_1, a_2) \in D$ y $(\alpha, \beta) \in I$, entonces $(a_1, a_2)(\alpha, \beta) \in I$, i.e, $(a_1\alpha, a_2\beta) = (a_1\alpha, 0)$, entonces $a_1\alpha \in J$. Por lo tanto $f_1(D)\alpha \subseteq J$. Las demás implicaciones se tienen de la observación anterior. ■

Observación 4.2. Con base a lo anterior, podemos dar la siguiente estructura de producto fibrado con f_1, f_2, g_1 y g_2 homomorfismos sobreyectivos de anillos, para saber el comportamiento de los ideales de $B_p(C_{p^n})$ en términos de $B_p(C_{p^{n-1}})$

$$\begin{tikzcd}
(x_0, \ldots, x_n) \arrow[rrr, dashed] \arrow[ddd, dashed] & & & x_n \arrow[ddd, dashed] \\
& B_p(C_{p^n}) \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "f_1"'] & \mathbb{Z}_p \arrow[d, "g_2"] & \\
& B_p(C_{p^{n-1}}) \arrow[r, "g_1"'] & \frac{\mathbb{Z}_p}{p^n\mathbb{Z}_p} & \\
(x_0, \ldots, x_{n-1}) \arrow[rrr, dashed] & & & \bar{x}_{n-1} = \bar{x}_n
\end{tikzcd}$$

Los ideales de $\mathbb{Z}_p$ son principales, de la forma $p^t\mathbb{Z}_p$, con $0 \leq t \in \mathbb{Z}$ por lo que si $I \leq B_p(C_{p^n})$, entonces

$$I = (\alpha, p^t)B_p(C_{p^n}) + (\mathcal{J}, 0)$$

donde

I) $\mathcal{J} \leq B_p(C_{p^{n-1}})$ tal que $g_1(\mathcal{J}) = \bar{0}$.

II) $(\alpha, p^t) \in B_p(C_{p^n})$.

III) α es único módulo $\mathcal{J}$.

IV) Se cumple que $(p\mathbb{Z}_p \times p^2\mathbb{Z}_p \times \ldots \times p^n\mathbb{Z}_p)\alpha \in \mathcal{J}$

de donde

$$\begin{array}{rcl}
(p, 0, 0, \ldots, 0)\alpha & \in & \mathcal{J} \\
(0, p^2, 0, \ldots, 0)\alpha & \in & \mathcal{J} \\
& \vdots & \\
(0, 0, \ldots, 0, p^n)\alpha & \in & \mathcal{J}.
\end{array}$$

Capítulo 5

Ejemplos

Lista de ideales de C_p.

Nuestro primer caso a analizar es:

$$B_p(C_p) = \{(x, y) \in \mathbb{Z}_p : y - x \in p\mathbb{Z}_p\}$$

de donde su diagrama de producto fibrado sería:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{(x,y)} \arrow[rrr, dashed] \arrow[ddd, dashed] & & & \mathbf{y} \arrow[ddd, dashed] \\
& B_p(C_p) \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "f_1"'] & \mathbb{Z}_p \arrow[d, "g_2"] & \\
& \mathbb{Z}_p \arrow[r, "g_1"'] & \frac{\mathbb{Z}_p}{p\mathbb{Z}_p} & \\
\mathbf{x} \arrow[rrr, dashed] & & & \bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{y}}
\end{tikzcd}$$

Observación 5.1. Los ideales de $\mathbb{Z}_p$ son principales de la forma $p^t\mathbb{Z}_p$ con $0 \leq t \in \mathbb{Z}$. Luego, los ideales de $B_p(C_p)$ tienen la forma:

$$I = (x_o, p^t)B_p(C_p) + (p^m\mathbb{Z}_p, 0) \text{ con } 0 \leq m, t$$

Denotamos $F_p = \{0, 1, \ldots, p-1\}$ y $F_p^* = \{1, 2, \ldots, p-1\}$. De I) tenemos que $p^m\mathbb{Z}_p \subset p\mathbb{Z}_p$ entonces $m \geq 1$. De IV) observemos que $px_0 \in p^m\mathbb{Z}_p$ entonces $x_0 = p^{m-1}x_0'$ con $x_0' \in \mathbb{Z}_p$, notemos que $x_0' = s_0 + px''$ con $s_0 \in F_p,\ x'' \in \mathbb{Z}_p$, entonces $x_0 = p^{m-1}(s_0 + px'')$, además de III) x_0 es único módulo $p^m\mathbb{Z}_p$, se sigue sin pérdida de generalidad que $x_0 = p^{m-1}s_0$ con $s_0 \in F_p$.

De II) se tiene que

$$p^t - p^{m-1}s_0 \in p\mathbb{Z}_p \tag{5.1}$$

donde $0 \leq m-1$ y $0 \leq t$.

Por lo anterior,

$$I = \{(p^{m-1}(s_0x + pz), p^t y) \in \mathbb{Z}_p^2 : x, y, z \in \mathbb{Z}, y - x \in p\mathbb{Z}_p\}$$

($\star$) Si $s_0 \neq 0$ obtenemos los ideales:

$$I = (p^{m-1}s_0, p^t)B_p(C_p)$$

Para los casos siguientes de acuerdo con (1)

- $m-1 \geq 1, t \geq 1, s_0 \in F_p^*$.
- $m-1 = 0, t = 0, s_0 = 1$.

($\star\star$) Si $s_0 = 0$, entonces por (1) $I = (p^m, p^t)\mathbb{Z}_p^2$ para $m \geq 1, t \geq 1$.

En resumen, los ideales de $B_p(C_p)$ son de la forma:

$$(p^{m_1}s_0, p^{m_2})M_i \ \text{ con } \ i = 1, 2$$

donde

$M_1 = \{(x_0, x_1) \in \mathbb{Z}_p^2 : x_1 - x_0 \in p\mathbb{Z}_p\} = B_p(C_p)$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 1,\ s_0 \in \mathbb{F}_p^*$
- $m_1 = 0, m_2 = 0,\ s_0 = 1$

$M_2 = \mathbb{Z}_p^2$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 1,\ s_0 = 1$

Lista de ideales de C_{p^2}.

Sea

$$B_p(C_{p^2}) = \{(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{Z}_p^3 : x_2 - x_0 \in p\mathbb{Z}_p, x_2 - x_1 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$$

donde su diagrama de producto fibrado es como sigue:

$$\begin{tikzcd}
(x_0, x_1, x_2) \arrow[rrr, dashed] \arrow[ddd, dashed] & & & x_2 \arrow[ddd, dashed] \\
& B_p(C_{p^2}) \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "f_1"'] & \mathbb{Z}_p \arrow[d, "g_2"] & \\
& B_p(C_p) \arrow[r, "g_1"'] & \frac{\mathbb{Z}_p}{p^2\mathbb{Z}_p} & \\
(x_0, x_1) \arrow[rrr, dashed] & & & \bar{x}_1 = \bar{x}_2
\end{tikzcd}$$

Con base al diagrama anterior y de acuerdo con la Observación 4.2, para

$$\mathcal{J} = (p^{n_1}, p^{n_2})\mathbb{Z}_p^2 \leq B_p(C_p)$$

donde $n_1 \geq 1, n_2 \geq 1$, tenemos que los ideales de $B_p(C_{p^2})$ son de la forma

$$I = (p^{m_1}s_0, p^{m_2}(s_1 + ps_2), p^{m_3})M_i$$

con $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ y donde

$M_1 = \{(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{Z}_p^3 : x_0 - x_2 \in p\mathbb{Z}_p, x_1 - x_2 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 2, s_0 \in \mathbb{F}_p^*, s_1 \in \mathbb{F}_p^*, s_2 \in \mathbb{F}_p$.
- $m_1 \geq 1, m_2 = 1, m_3 = 1, s_0 \in \mathbb{F}_p^*, s_1 = 1, s_2 \in \mathbb{F}_p$.
- $m_1 = 0, m_2 = 0, m_3 = 0, s_0 = 1, s_1 = 1, s_2 = 0$.

$M_2 = \{(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{Z}_p^3 : x_1 - x_2 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 2, s_0 = 1, s_1 \in \mathbb{F}_p^*, s_2 \in \mathbb{F}_p$.
- $m_1 \geq 1, m_2 = 1, m_3 = 1, s_0 = 1, s_1 = 1, s_2 \in \mathbb{F}_p$.

$M_3 = \{(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{Z}_p^3 : x_0 - x_2 \in p\mathbb{Z}_p, x_1 - x_2 \in p\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 2, s_0 \in \mathbb{F}_p^*, s_1 \in \mathbb{F}_p^*, s_2 = 0$.
- $m_1 \geq 1, m_2 = 1, m_3 = 1, s_0 \in \mathbb{F}_p^*, s_1 = 1, s_2 = 0$.

$M_4 = \{(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{Z}_p^3 : x_1 - x_2 \in p\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 2, s_0 = 1, s_1 \in \mathbb{F}_p^*, s_2 = 0.$
- $m_1 \geq 1, m_2 = 1, m_3 = 1, s_0 = 1, s_1 = 1, s_2 = 0.$

$M_5 = \{(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{Z}_p^3 : x_0 - x_2 \in p\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 2, s_0 \in \mathbb{F}_p^*, s_1 = 1, s_2 = 0.$

$M_6 = \mathbb{Z}_p^3$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 2, s_0 = 1, s_1 = 1, s_2 = 0.$

Para más detalles ver [3].

Lista de ideales de C_{p^3}.

Sea

$$B_p(C_{p^3}) = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}_p^4 : x_3 - x_0 \in p\mathbb{Z}_p, x_3 - x_1 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_3 - x_2 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$$

donde su diagrama de producto fibrado es como sigue:

$$\begin{tikzcd}
(x_0, x_1, x_2, x_3) \arrow[rrr, dashed] \arrow[ddd, dashed] & & & x_3 \arrow[ddd, dashed] \\
& B_p(C_{p^3}) \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "f_1"'] & \mathbb{Z}_p \arrow[d, "g_2"] & \\
& B_p(C_{p^2}) \arrow[r, "g_1"'] & \frac{\mathbb{Z}_p}{p^3\mathbb{Z}_p} & \\
(x_0, x_1, x_2) \arrow[rrr, dashed] & & & \bar{x}_2 = \bar{x}_3
\end{tikzcd}$$

Del diagrama anterior y de acuerdo a la Observación 4.2, para

$$\mathcal{J} = (p^{n_1}, p^{n_2}, p^{n_3})\mathbb{Z}_p^3 \leq B_p(C_{p^2})$$

donde $n_1 \geq 1, n_2 \geq 2, n_3 \geq 2$, tenemos que los ideales de $B_p(C_{p^3})$ son de la forma:

$$(p^{m_1}s_0, p^{m_2}(s_1 + ps_2), p^{m_3}(s_3 + ps_4 + p^2 s_5), p^{m_4})M_i$$

con $i = 1, 2, \ldots, 24$ y donde

$M_1 = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}_p^4 : x_3 - x_0 \in p\mathbb{Z}_p, x_3 - x_1 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_3 - x_2 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 3, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p, s_5 \in F_p.$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 = 2, m_4 = 2, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 = 1, s_4 \in F_p, s_5 \in F_p.$
- $m_1 \geq 1, m_2 = 1, m_3 = 1, m_4 = 1, s_0 \in F_p^*, s_1 = 1, s_2 \in F_p, s_3 = 1, s_4 = 0, s_5 \in F_p.$
- $m_1 = 0, m_2 = 0, m_3 = 0, m_4 = 0, s_0 = 1, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 = 0, s_5 = 0$

$M_2 = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}_p^4 : x_3 - x_1 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_3 - x_2 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 3, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p, s_5 \in F_p.$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 = 2, m_4 = 2, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 = 1, s_4 \in F_p, s_5 \in F_p.$
- $m_1 \geq 1, m_2 = 1, m_3 = 1, m_4 = 1, s_0 = 1, s_1 = 1, s_2 \in F_p, s_3 = 1, s_4 = 0, s_5 \in F_p.$

$M_3 = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}_p^4 : x_3 - x_0 \in p\mathbb{Z}_p, x_3 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_3 - x_2 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 3, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p, s_5 \in F_p.$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 = 2, m_4 = 2, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 \in F_p, s_5 \in F_p.$
- $m_1 \geq 1, m_2 = 1, m_3 = 1, m_4 = 1, s_0 \in F_p^*, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 = 0, s_5 \in F_p.$

$M_4 = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}_p^4 : x_3 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_3 - x_2 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 3, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p, s_5 \in F_p.$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 = 2, m_4 = 2, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 \in F_p, s_5 \in F_p.$
- $m_1 \geq 1, m_2 = 1, m_3 = 1, m_4 = 1, s_0 = 1, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 = 0, s_5 \in F_p.$

$M_5 = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}_p^4 : x_3 - x_0 \in p\mathbb{Z}_p, x_3 - x_1 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_3 - x_2 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 3, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p, s_5 = 0.$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 = 2, m_4 = 2, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 = 1, s_4 \in F_p, s_5 = 0.$
- $m_1 \geq 1, m_2 = 1, m_3 = 1, m_4 = 1, s_0 \in F_p^*, s_1 = 1, s_2 \in F_p, s_3 = 1, s_4 = 0, s_5 = 0.$

$M_6 = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}_p^4 : x_3 - x_1 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_3 - x_2 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 3, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p, s_5 = 0.$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 = 2, m_4 = 2, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 = 1, s_4 \in F_p, s_5 = 0.$
- $m_1 \geq 1, m_2 = 1, m_3 = 1, m_4 = 1, , s_0 = 1, s_1 = 1, s_2 \in F_p, s_3 = 1, s_4 = 0, s_5 = 0.$

$M_7 = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}_p^4 : x_3 - x_0 \in p\mathbb{Z}_p, x_3 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_3 - x_2 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 3, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p, s_5 = 0.$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 = 2, m_4 = 2, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 \in F_p, s_5 = 0.$
- $m_1 \geq 1, m_2 = 1, m_3 = 1, m_4 = 1, s_0 \in F_p^*, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 = 0, s_5 = 0.$

$M_8 = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}_p^4 : x_3 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_3 - x_2 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 3, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p, s_5 = 0.$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 = 2, m_4 = 2, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 \in F_p, s_5 = 0.$
- $m_1 \geq 1, m_2 = 1, m_3 = 1, m_4 = 1, s_0 = 1, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 = 0, s_5 = 0.$

$M_9 = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}_p^4 : x_3 - x_0 \in p\mathbb{Z}_p, x_3 - x_2 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 3, s_0 \in F_p^*, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p, s_5 \in F_p.$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 = 2, m_4 = 2, s_0 \in F_p^*, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 \in F_p, s_5 \in F_p.$

$M_{10} = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}_p^4 : x_3 - x_2 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 3, s_0 = 1, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p, s_5 \in F_p$.
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 = 2, m_4 = 2, s_0 = 1, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 \in F_p, s_5 \in F_p$.

$M_{11} = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}_p^4 : x_3 - x_0 \in p\mathbb{Z}_p, x_3 - x_2 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 3, s_0 \in F_p^*, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p, s_5 = 0$.
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 = 2, m_4 = 2, s_0 \in F_p^*, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 \in F_p, s_5 = 0$.

$M_{12} = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}_p^4 : x_3 - x_2 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 3, s_0 = 1, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p, s_5 = 0$.
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 = 2, m_4 = 2, s_0 = 1, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 \in F_p, s_5 = 0$.

$M_{13} = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}_p^4 : x_3 - x_0 \in p\mathbb{Z}_p, x_3 - x_1 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_3 - x_2 \in p\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 3, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 \in F_p^*, s_4 = 0, s_5 = 0$.
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 = 2, m_4 = 2, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 = 1, s_4 = 0, s_5 = 0$.

$M_{14} = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}_p^4 : x_3 - x_1 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_3 - x_2 \in p\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 3, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 \in F_p^*, s_4 = 0, s_5 = 0$.
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 = 2, m_4 = 2, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 = 1, s_4 = 0, s_5 = 0$.

$M_{15} = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}_p^4 : x_3 - x_0 \in p\mathbb{Z}_p, x_3 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_3 - x_2 \in p\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 3, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 = 0, s_5 = 0$.
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 = 2, m_4 = 2, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 = 0, s_5 = 0$.

$M_{16} = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}_p^4 : x_3 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_3 - x_2 \in p\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 3, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 = 0, s_5 = 0$.
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 = 2, m_4 = 2, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 = 0, s_5 = 0$.

$M_{17} = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}_p^4 : x_3 - x_0 \in p\mathbb{Z}_p, x_3 - x_2 \in p\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 3, s_0 \in F_p^*, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 = 0, s_5 = 0$.
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 = 2, m_4 = 2, s_0 \in F_p^*, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 = 0, s_5 = 0$.

$M_{18} = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}_p^4 : x_3 - x_2 \in p\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 3, s_0 = 1, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 = 0, s_5 = 0$.
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 = 2, m_4 = 2, s_0 = 1, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 = 0, s_5 = 0$.

$M_{19} = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}_p^4 : x_3 - x_0 \in p\mathbb{Z}_p, x_3 - x_1 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 3, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 = 1, s_4 = 0, s_5 = 0.$

$M_{20} = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}_p^4 : x_3 - x_1 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 3, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 = 1, s_4 = 0, s_5 = 0.$

$M_{21} = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}_p^4 : x_3 - x_0 \in p\mathbb{Z}_p, x_3 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 3, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 = 0, s_5 = 0.$

$M_{22} = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}_p^4 : x_3 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 3, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 = 0, s_5 = 0.$

$M_{23} = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}_p^4 : x_3 - x_0 \in p\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 3, s_0 \in F_p^*, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 = 0, s_5 = 0.$

$M_{24} = \mathbb{Z}_p^4$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 3, s_0 = 1, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 = 0, s_5 = 0.$

Para más detalles, ver [4]

Lista de ideales de C_{p^4}.

Sea

$B_p(C_{p^4}) = \{(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_4 - x_0 \in p\mathbb{Z}_p, x_4 - x_1 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_4 - x_2 \in p^3\mathbb{Z}_p, x_4 - x_3 \in p^4\mathbb{Z}_p\}$

donde su diagrama de producto fibrado es como sigue:

$$\begin{tikzcd}
(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) \arrow[rrr, dashed] \arrow[ddd, dashed] & & & x_4 \arrow[ddd, dashed] \\
& B_p(C_{p^4}) \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "f_1"'] & \mathbb{Z}_p \arrow[d, "g_2"] & \\
& B_p(C_{p^3}) \arrow[r, "g_1"'] & \frac{\mathbb{Z}_p}{p^4\mathbb{Z}_p} & \\
(x_0, x_1, x_2, x_3) \arrow[rrr, dashed] & & & \bar{x}_3 = \bar{x}_4
\end{tikzcd}$$

Del diagrama anterior y de acuerdo a la Observación 4.2, para

$$\mathcal{J} = (p^{n_1}, p^{n_2}, p^{n_3}, p^{n_4})\mathbb{Z}_p^4 \leq B_p(C_{p^3})$$

donde $n_1 \geq 1, n_2 \geq 2, n_3 \geq 3, n_4 \geq 3$, tenemos que los ideales de $B_p(C_{p^4})$ son de la forma:

$$(p^{m_1}s_0, p^{m_2}(s_1 + ps_2), p^{m_3}(s_3 + ps_4 + p^2s_5), p^{m_4}(s_6 + ps_7 + p^2s_8 + p^3s_9), p^t)M_i$$

con $i = 1, 2, \ldots, 120$ y donde

$M_1 = \ \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p^3\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p,$ $s_5 \in F_p, s_6 \in F_p^*, s_7 \in F_p, s_8 \in F_p, s_9 \in F_p$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 = 3, = t = 3, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p,$ $s_5 \in F_p, s_6 = 1, s_7 \in F_p, s_8 \in F_p, s_9 \in F_p$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 = 2, m_4 = 2, t = 2, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 = 1, s_4 \in F_p,$ $s_5 \in F_p, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 \in F_p, s_9 \in F_p$
- $m_1 \geq 1, m_2 = 1, m_3 = 1, m_4 = 1, t = 1, s_0 \in F_p^*, s_1 = 1, s_2 \in F_p, s_3 = 1, s_4 = 0,$ $s_5 \in F_p, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 \in F_p$
- $m_1 = 0, m_2 = 0, m_3 = 0, m_4 = 0, t = 0, s_0 = 1, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 = 0,$ $s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 = 0s_8 = 0, s_9 = 0$

$M_2 = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p^3\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p,$ $s_5 \in F_p, s_6 \in F_p^*, s_7 \in F_p, s_8 \in F_p, s_9 \in F_p$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 = 3, t = 3, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p,$ $s_5 \in F_p, s_6 = 1, s_7 \in F_p, s_8 \in F_p, s_9 \in F_p$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 = 2, m_4 = 2, t = 2, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 = 1, s_4 \in F_p,$ $s_5 \in F_p, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 \in F_p, s_9 \in F_p$
- $m_1 \geq 1, m_2 = 1, m_3 = 1, m_4 = 1, t = 1, s_0 = 1, s_1 = 1, s_2 \in F_p, s_3 = 1, s_4 = 0,$ $s_5 \in F_p, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 \in F_p$

$M_3 = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_2 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p^3\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p,$ $s_5 \in F_p, s_6 \in F_p^*, s_7 \in F_p, s_8 \in F_p, s_9 \in F_p$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 = 3, t = 3, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p,$ $s_5 \in F_p, s_6 = 1, s_7 \in F_p, s_8 \in F_p, s_9 \in F_p$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 = 2, m_4 = 2, t = 2, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 \in F_p,$ $s_5 \in F_p, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 \in F_p, s_9 \in F_p$
- $m_1 \geq 1, m_2 = 1, m_3 = 1, m_4 = 1, t = 1, s_0 \in F_p^*, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 = 0,$ $s_5 \in F_p, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 \in F_p$

$M_4 = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_2 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p^3\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p,$ $s_5 \in F_p, s_6 \in F_p^*, s_7 \in F_p, s_8 \in F_p, s_9 \in F_p$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 = 3, t = 3, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p,$ $s_5 \in F_p, s_6 = 1, s_7 \in F_p, s_8 \in F_p, s_9 \in F_p$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 = 2, m_4 = 2, t = 2, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 \in F_p,$ $s_5 \in F_p, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 \in F_p, s_9 \in F_p$
- $m_1 \geq 1, m_2 = 1, m_3 = 1, m_4 = 1, t = 1, s_0 = 1, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 = 0,$ $s_5 \in F_p, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 \in F_p$

$M_5 = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p^3\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 \in F_p^*, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p,$ $s_5 \in F_p, s_6 \in F_p^*, s_7 \in F_p, s_8 \in F_p, s_9 \in F_p$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 = 3, t = 3, s_0 \in F_p^*, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p,$ $s_5 \in F_p, s_6 = 1, s_7 \in F_p, s_8 \in F_p, s_9 \in F_p$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 = 2, m_4 = 2, t = 2, s_0 \in F_p^*, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 \in F_p,$ $s_5 \in F_p, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 \in F_p, s_9 \in F_p$

$M_6 = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_3 \in p^3\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 = 1, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p,$ $s_5 \in F_p, s_6 \in F_p^*, s_7 \in F_p, s_8 \in F_p, s_9 \in F_p$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 = 3, t = 3, s_0 = 1, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p,$ $s_5 \in F_p, s_6 = 1, s_7 \in F_p, s_8 \in F_p, s_9 \in F_p$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 = 2, m_4 = 2, t = 2, s_0 = 1, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 \in F_p,$ $s_5 \in F_p, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 \in F_p, s_9 \in F_p$

$M_7 = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p,$ $s_5 = 0, s_6 \in F_p^*, s_7 \in F_p, s_8 \in F_p, s_9 \in F_p$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 = 3, t = 3, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p,$ $s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 \in F_p, s_8 \in F_p, s_9 \in F_p$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 = 2, m_4 = 2, t = 2, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 = 1, s_4 \in F_p,$ $s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 \in F_p, s_9 \in F_p$
- $m_1 \geq 1, m_2 = 1, m_3 = 1, m_4 = 1, t = 1, s_0 \in F_p^*, s_1 = 1, s_2 \in F_p, s_3 = 1, s_4 = 0,$ $s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 \in F_p$

$$M_8 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\}$$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p,$ $s_5 = 0, s_6 \in F_p^*, s_7 \in F_p, s_8 \in F_p, s_9 \in F_p$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 = 3, t = 3, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p,$ $s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 \in F_p, s_8 \in F_p, s_9 \in F_p$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 = 2, m_4 = 2, t = 2, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 = 1, s_4 \in F_p,$ $s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 \in F_p, s_9 \in F_p$
- $m_1 \geq 1, m_2 = 1, m_3 = 1, m_4 = 1, t = 1, s_0 = 1, s_1 = 1, s_2 \in F_p, s_3 = 1, s_4 = 0,$ $s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 \in F_p$

$$M_9 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_2 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\}$$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p,$ $s_5 = 0, s_6 \in F_p^*, s_7 \in F_p, s_8 \in F_p, s_9 \in F_p$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 = 3, t = 3, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p,$ $s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 \in F_p, s_8 \in F_p, s_9 \in F_p$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 = 2, m_4 = 2, t = 2, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 \in F_p,$ $s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 \in F_p, s_9 \in F_p$
- $m_1 \geq 1, m_2 = 1, m_3 = 1, m_4 = 1, t = 1, s_0 \in F_p^*, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 = 0,$ $s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 \in F_p$

$$M_{10} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_2 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\}$$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p,$ $s_5 = 0, s_6 \in F_p^*, s_7 \in F_p, s_8 \in F_p, s_9 \in F_p$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 = 3, t = 3, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p,$ $s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 \in F_p, s_8 \in F_p, s_9 \in F_p$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 = 2, m_4 = 2, t = 2, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 \in F_p,$ $s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 \in F_p, s_9 \in F_p$
- $m_1 \geq 1, m_2 = 1, m_3 = 1, m_4 = 1, t = 1, s_0 = 1, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 = 0,$ $s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 \in F_p$

$$M_{11} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\}$$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 \in F_p^*, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p,$ $s_5 = 0, s_6 \in F_p^*, s_7 \in F_p, s_8 \in F_p, s_9 \in F_p$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 = 3, t = 3, s_0 \in F_p^*, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p,$ $s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 \in F_p, s_8 \in F_p, s_9 \in F_p$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 = 2, m_4 = 2, t = 2, s_0 \in F_p^*, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 \in F_p,$ $s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 \in F_p, s_9 \in F_p$

$$M_{12} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\}$$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 = 1, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p,$ $s_5 = 0, s_6 \in F_p^*, s_7 \in F_p, s_8 \in F_p, s_9 \in F_p$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 = 3, t = 3, s_0 = 1, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p,$ $s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 \in F_p, s_8 \in F_p, s_9 \in F_p$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 = 2, m_4 = 2, t = 2, s_0 = 1, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 \in F_p,$ $s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 \in F_p, s_9 \in F_p$

$M_{13} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 \in F_p^*, s_4 = 0,$ $s_5 = 0, s_6 \in F_p^*, s_7 \in F_p, s_8 \in F_p, s_9 \in F_p$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 = 3, t = 3, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 \in F_p^*, s_4 = 0,$ $s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 \in F_p, s_8 \in F_p, s_9 \in F_p$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 = 2, m_4 = 2, t = 2, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 = 1, s_4 = 0,$ $s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 \in F_p, s_9 \in F_p$

$M_{14} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 \in F_p^*, s_4 = 0,$ $s_5 = 0, s_6 \in F_p^*, s_7 \in F_p, s_8 \in F_p, s_9 \in F_p$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 = 3, t = 3, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 \in F_p^*, s_4 = 0,$ $s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 \in F_p, s_8 \in F_p, s_9 \in F_p$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 = 2, m_4 = 2, t = 2, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 = 1, s_4 = 0,$ $s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 \in F_p, s_9 \in F_p$

$M_{15} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_2 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 = 0,$ $s_5 = 0, s_6 \in F_p^*, s_7 \in F_p, s_8 \in F_p, s_9 \in F_p$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 = 3, t = 3, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 = 0,$ $s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 \in F_p, s_8 \in F_p, s_9 \in F_p$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 = 2, m_4 = 2, t = 2, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 = 0,$ $s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 \in F_p, s_9 \in F_p$

$M_{16} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_2 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 = 0,$ $s_5 = 0, s_6 \in F_p^*, s_7 \in F_p, s_8 \in F_p, s_9 \in F_p$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 = 3, t = 3, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 = 0,$ $s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 \in F_p, s_8 \in F_p, s_9 \in F_p$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 = 2, m_4 = 2, t = 2, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 = 0,$ $s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 \in F_p, s_9 \in F_p$

$M_{17} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 \in F_p^*, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 = 0,$ $s_5 = 0, s_6 \in F_p^*, s_7 \in F_p, s_8 \in F_p, s_9 \in F_p$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 = 3, t = 3, s_0 \in F_p^*, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 = 0,$ $s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 \in F_p, s_8 \in F_p, s_9 \in F_p$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 = 2, m_4 = 2, t = 2, s_0 \in F_p^*, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 = 0,$ $s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 \in F_p, s_9 \in F_p$

$M_{18} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_3 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 = 1, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 = 0,$
  $s_5 = 0, s_6 \in F_p^*, s_7 \in F_p, s_8 \in F_p, s_9 \in F_p$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 = 3, t = 3, s_0 = 1, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 = 0,$
  $s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 \in F_p, s_8 \in F_p, s_9 \in F_p$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 = 2, m_4 = 2, t = 2, s_0 = 1, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 = 0,$
  $s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 \in F_p, s_9 \in F_p$

$M_{19} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 = 1, s_4 = 0,$
  $s_5 = 0, s_6 \in F_p^*, s_7 \in F_p, s_8 \in F_p, s_9 \in F_p$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 = 3, t = 3, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 = 1, s_4 = 0,$
  $s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 \in F_p, s_8 \in F_p, s_9 \in F_p$

$M_{20} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 = 1, s_4 = 0,$
  $s_5 = 0, s_6 \in F_p^*, s_7 \in F_p, s_8 \in F_p, s_9 \in F_p$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 = 3, t = 3, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 = 1, s_4 = 0,$
  $s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 \in F_p, s_8 \in F_p, s_9 \in F_p$

$M_{21} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_2 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 = 0,$
  $s_5 = 0, s_6 \in F_p^*, s_7 \in F_p, s_8 \in F_p, s_9 \in F_p$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 = 3, t = 3, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 = 0,$
  $s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 \in F_p, s_8 \in F_p, s_9 \in F_p$

$M_{22} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_2 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 = 0,$
  $s_5 = 0, s_6 \in F_p^*, s_7 \in F_p, s_8 \in F_p, s_9 \in F_p$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 = 3, t = 3, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 = 0,$
  $s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 \in F_p, s_8 \in F_p, s_9 \in F_p$

$M_{23} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 \in F_p^*, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 = 0,$
  $s_5 = 0, s_6 \in F_p^*, s_7 \in F_p, s_8 \in F_p, s_9 \in F_p$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 = 3, t = 3, s_0 \in F_p^*, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 = 0,$
  $s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 \in F_p, s_8 \in F_p, s_9 \in F_p$

$M_{24} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 = 1, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 = 0,$
  $s_5 = 0, s_6 \in F_p^*, s_7 \in F_p, s_8 \in F_p, s_9 \in F_p$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 = 3, t = 3, s_0 = 1, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 = 0,$
  $s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 \in F_p, s_8 \in F_p, s_9 \in F_p$

$M_{25} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p^3\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p,$
  $s_5 \in F_p, s_6 \in F_p^*, s_7 \in F_p, s_8 \in F_p, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 = 3, t = 3, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p,$
  $s_5 \in F_p, s_6 = 1, s_7 \in F_p, s_8 \in F_p, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 = 2, m_4 = 2, t = 2, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 = 1, s_4 \in F_p,$
  $s_5 \in F_p, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 \in F_p, s_9 = 0$

- $m_1 \geq 1, m_2 = 1, m_3 = 1, m_4 = 1, t = 1, s_0 \in F_p^*, s_1 = 1, s_2 \in F_p, s_3 = 1, s_4 = 0,$ $s_5 \in F_p, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 = 0$

$M_{26} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p^3\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p,$ $s_5 \in F_p, s_6 \in F_p^*, s_7 \in F_p, s_8 \in F_p, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 = 3, t = 3, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p,$ $s_5 \in F_p, s_6 = 1, s_7 \in F_p, s_8 \in F_p, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 = 2, m_4 = 2, t = 2, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 = 1, s_4 \in F_p,$ $s_5 \in F_p, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 \in F_p, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 = 1, m_3 = 1, m_4 = 1, t = 1, s_0 = 1, s_1 = 1, s_2 \in F_p, s_3 = 1, s_4 = 0,$ $s_5 \in F_p, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 = 0$

$M_{27} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_2 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p^3\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p,$ $s_5 \in F_p, s_6 \in F_p^*, s_7 \in F_p, s_8 \in F_p, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 = 3, t = 3, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p,$ $s_5 \in F_p, s_6 = 1, s_7 \in F_p, s_8 \in F_p, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 = 2, m_4 = 2, t = 2, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 \in F_p,$ $s_5 \in F_p, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 \in F_p, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 = 1, m_3 = 1, m_4 = 1, t = 1, s_0 \in F_p^*, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 = 0,$ $s_5 \in F_p, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 = 0$

$M_{28} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_2 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p^3\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p,$ $s_5 \in F_p, s_6 \in F_p^*, s_7 \in F_p, s_8 \in F_p, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 = 3, t = 3, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p,$ $s_5 \in F_p, s_6 = 1, s_7 \in F_p, s_8 \in F_p, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 = 2, m_4 = 2, t = 2, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 \in F_p,$ $s_5 \in F_p, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 \in F_p, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 = 1, m_3 = 1, m_4 = 1, t = 1, s_0 = 1, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 = 0,$ $s_5 \in F_p, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 = 0$

$M_{29} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p^3\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 \in F_p^*, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p,$ $s_5 \in F_p, s_6 \in F_p^*, s_7 \in F_p, s_8 \in F_p, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 = 3, t = 3, s_0 \in F_p^*, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p,$ $s_5 \in F_p, s_6 = 1, s_7 \in F_p, s_8 \in F_p, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 = 2, m_4 = 2, t = 2, s_0 \in F_p^*, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 \in F_p,$ $s_5 \in F_p, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 \in F_p, s_9 = 0$

$M_{30} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_3 \in p^3\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 = 1, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p,$ $s_5 \in F_p, s_6 \in F_p^*, s_7 \in F_p, s_8 \in F_p, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 = 3, t = 3, s_0 = 1, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p,$ $s_5 \in F_p, s_6 = 1, s_7 \in F_p, s_8 \in F_p, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 = 2, m_4 = 2, t = 2, s_0 = 1, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 \in F_p,$ $s_5 \in F_p, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 \in F_p, s_9 = 0$

$M_{31} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p,$ $s_5 = 0, s_6 \in F_p^*, s_7 \in F_p, s_8 \in F_p, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 = 3, t = 3, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p,$ $s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 \in F_p, s_8 \in F_p, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 = 2, m_4 = 2, t = 2, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 = 1, s_4 \in F_p,$ $s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 \in F_p, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 = 1, m_3 = 1, m_4 = 1, t = 1, s_0 \in F_p^*, s_1 = 1, s_2 \in F_p, s_3 = 1, s_4 = 0,$ $s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 = 0$

$M_{32} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p,$ $s_5 = 0, s_6 \in F_p^*, s_7 \in F_p, s_8 \in F_p, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 = 3, t = 3, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p,$ $s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 \in F_p, s_8 \in F_p, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 = 2, m_4 = 2, t = 2, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 = 1, s_4 \in F_p,$ $s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 \in F_p, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 = 1, m_3 = 1, m_4 = 1, t = 1, s_0 = 1, s_1 = 1, s_2 \in F_p, s_3 = 1, s_4 = 0,$ $s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 = 0$

$M_{33} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_2 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p,$ $s_5 = 0, s_6 \in F_p^*, s_7 \in F_p, s_8 \in F_p, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 = 3, t = 3, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p,$ $s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 \in F_p, s_8 \in F_p, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 = 2, m_4 = 2, t = 2, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 \in F_p,$ $s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 \in F_p, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 = 1, m_3 = 1, m_4 = 1, t = 1, s_0 \in F_p^*, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 = 0,$ $s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 = 0$

$M_{34} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_2 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p,$ $s_5 = 0, s_6 \in F_p^*, s_7 \in F_p, s_8 \in F_p, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 = 3, t = 3, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p,$ $s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 \in F_p, s_8 \in F_p, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 = 2, m_4 = 2, t = 2, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 \in F_p,$ $s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 \in F_p, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 = 1, m_3 = 1, m_4 = 1, t = 1, s_0 = 1, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 = 0,$ $s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 = 0$

$M_{35} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 \in F_p^*, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p,$ $s_5 = 0, s_6 \in F_p^*, s_7 \in F_p, s_8 \in F_p, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 = 3, t = 3, s_0 \in F_p^*, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p,$ $s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 \in F_p, s_8 \in F_p, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 = 2, m_4 = 2, t = 2, s_0 \in F_p^*, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 \in F_p,$ $s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 \in F_p, s_9 = 0$

$M_{36} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 = 1, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p,$ $s_5 = 0, s_6 \in F_p^*, s_7 \in F_p, s_8 \in F_p, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 = 3, t = 3, s_0 = 1, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p,$ $s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 \in F_p, s_8 \in F_p, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 = 2, m_4 = 2, t = 2, s_0 = 1, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 \in F_p,$ $s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 \in F_p, s_9 = 0$

$M_{37} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 \in F_p^*, s_4 = 0,$ $s_5 = 0, s_6 \in F_p^*, s_7 \in F_p, s_8 \in F_p, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 = 3, t = 3, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 \in F_p^*, s_4 = 0,$ $s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 \in F_p, s_8 \in F_p, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 = 2, m_4 = 2, t = 2, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 = 1, s_4 = 0,$ $s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 \in F_p, s_9 = 0$

$M_{38} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 \in F_p^*, s_4 = 0,$ $s_5 = 0, s_6 \in F_p^*, s_7 \in F_p, s_8 \in F_p, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 = 3, t = 3, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 \in F_p^*, s_4 = 0,$ $s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 \in F_p, s_8 \in F_p, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 = 2, m_4 = 2, t = 2, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 = 1, s_4 = 0,$ $s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 \in F_p, s_9 = 0$

$M_{39} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_2 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 = 0,$ $s_5 = 0, s_6 \in F_p^*, s_7 \in F_p, s_8 \in F_p, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 = 3, t = 3, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 = 0,$ $s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 \in F_p, s_8 \in F_p, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 = 2, m_4 = 2, t = 2, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 = 0,$ $s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 \in F_p, s_9 = 0$

$M_{40} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_2 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 = 0,$ $s_5 = 0, s_6 \in F_p^*, s_7 \in F_p, s_8 \in F_p, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 = 3, t = 3, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 = 0,$ $s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 \in F_p, s_8 \in F_p, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 = 2, m_4 = 2, t = 2, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 = 0,$ $s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 \in F_p, s_9 = 0$

$M_{41} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 \in F_p^*, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 = 0,$ $s_5 = 0, s_6 \in F_p^*, s_7 \in F_p, s_8 \in F_p, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 = 3, t = 3, s_0 \in F_p^*, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 = 0,$ $s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 \in F_p, s_8 \in F_p, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 = 2, m_4 = 2, t = 2, s_0 \in F_p^*, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 = 0,$ $s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 \in F_p, s_9 = 0$

$M_{42} = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_3 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 = 1, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 = 0,$ $s_5 = 0, s_6 \in F_p^*, s_7 \in F_p, s_8 \in F_p, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 = 3, t = 3, s_0 = 1, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 = 0,$ $s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 \in F_p, s_8 \in F_p, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 = 2, m_4 = 2, t = 2, s_0 = 1, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 = 0,$ $s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 \in F_p, s_9 = 0$

$M_{43} = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 = 1, s_4 = 0,$ $s_5 = 0, s_6 \in F_p^*, s_7 \in F_p, s_8 \in F_p, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 = 3, t = 3, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 = 1, s_4 = 0,$ $s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 \in F_p, s_8 \in F_p, s_9 = 0$

$M_{44} = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 = 1, s_4 = 0,$ $s_5 = 0, s_6 \in F_p^*, s_7 \in F_p, s_8 \in F_p, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 = 3, t = 3, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 = 1, s_4 = 0,$ $s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 \in F_p, s_8 \in F_p, s_9 = 0$

$M_{45} = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_2 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 = 0,$ $s_5 = 0, s_6 \in F_p^*, s_7 \in F_p, s_8 \in F_p, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 = 3, t = 3, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 = 0,$ $s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 \in F_p, s_8 \in F_p, s_9 = 0$

$M_{46} = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_2 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 = 0,$ $s_5 = 0, s_6 \in F_p^*, s_7 \in F_p, s_8 \in F_p, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 = 3, t = 3, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 = 0,$ $s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 \in F_p, s_8 \in F_p, s_9 = 0$

$M_{47} = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 \in F_p^*, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 = 0,$ $s_5 = 0, s_6 \in F_p^*, s_7 \in F_p, s_8 \in F_p, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 = 3, t = 3, s_0 \in F_p^*, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 = 0,$ $s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 \in F_p, s_8 \in F_p, s_9 = 0$

$M_{48} = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 = 1, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 = 0,$ $s_5 = 0, s_6 \in F_p^*, s_7 \in F_p, s_8 \in F_p, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 = 3, t = 3, s_0 = 1, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 = 0,$ $s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 \in F_p, s_8 \in F_p, s_9 = 0$

$M_{49} = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p^3\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p,$ $s_5 \in F_p, s_6 \in F_p^*, s_7 \in F_p, s_8 = 0, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 = 3, t = 3, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p,$ $s_5 \in F_p, s_6 = 1, s_7 \in F_p, s_8 = 0, s_9 = 0$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 = 2, m_4 = 2, t = 2, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 = 1, s_4 \in F_p,$ $s_5 \in F_p, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 = 0$

$M_{50} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p^3\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p,$ $s_5 \in F_p, s_6 \in F_p^*, s_7 \in F_p, s_8 = 0, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 = 3, t = 3, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p,$ $s_5 \in F_p, s_6 = 1, s_7 \in F_p, s_8 = 0, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 = 2, m_4 = 2, t = 2, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 = 1, s_4 \in F_p,$ $s_5 \in F_p, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 = 0$

$M_{51} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_2 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p^3\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p,$ $s_5 \in F_p, s_6 \in F_p^*, s_7 \in F_p, s_8 = 0, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 = 3, t = 3, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p,$ $s_5 \in F_p, s_6 = 1, s_7 \in F_p, s_8 = 0, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 = 2, m_4 = 2, t = 2, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 \in F_p,$ $s_5 \in F_p, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 = 0$

$M_{52} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_2 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p^3\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p,$ $s_5 \in F_p, s_6 \in F_p^*, s_7 \in F_p, s_8 = 0, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 = 3, t = 3, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p,$ $s_5 \in F_p, s_6 = 1, s_7 \in F_p, s_8 = 0, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 = 2, m_4 = 2, t = 2, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 \in F_p,$ $s_5 \in F_p, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 = 0$

$M_{53} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p^3\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 \in F_p^*, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p,$ $s_5 \in F_p, s_6 \in F_p^*, s_7 \in F_p, s_8 = 0, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 = 3, t = 3, s_0 \in F_p^*, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p,$ $s_5 \in F_p, s_6 = 1, s_7 \in F_p, s_8 = 0, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 = 2, m_4 = 2, t = 2, s_0 \in F_p^*, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 \in F_p,$ $s_5 \in F_p, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 = 0$

$M_{54} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_3 \in p^3\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 = 1, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p,$ $s_5 \in F_p, s_6 \in F_p^*, s_7 \in F_p, s_8 = 0, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 = 3, t = 3, s_0 = 1, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p,$ $s_5 \in F_p, s_6 = 1, s_7 \in F_p, s_8 = 0, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 = 2, m_4 = 2, t = 2, s_0 = 1, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 \in F_p,$ $s_5 \in F_p, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 = 0$

$M_{55} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p,$ $s_5 = 0, s_6 \in F_p^*, s_7 \in F_p, s_8 = 0, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 = 3, t = 3, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p,$ $s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 \in F_p, s_8 = 0, s_9 = 0$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 = 2, m_4 = 2, t = 2, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 = 1, s_4 \in F_p,$ $s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 = 0$

$M_{56} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p,$ $s_5 = 0, s_6 \in F_p^*, s_7 \in F_p, s_8 = 0, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 = 3, t = 3, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p,$ $s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 \in F_p, s_8 = 0, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 = 2, m_4 = 2, t = 2, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 = 1, s_4 \in F_p,$ $s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 = 0$

$M_{57} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_2 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p,$ $s_5 = 0, s_6 \in F_p^*, s_7 \in F_p, s_8 = 0, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 = 3, t = 3, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p,$ $s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 \in F_p, s_8 = 0, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 = 2, m_4 = 2, t = 2, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 \in F_p,$ $s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 = 0$

$M_{58} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_2 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p,$ $s_5 = 0, s_6 \in F_p^*, s_7 \in F_p, s_8 = 0, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 = 3, t = 3, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p,$ $s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 \in F_p, s_8 = 0, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 = 2, m_4 = 2, t = 2, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 \in F_p,$ $s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 = 0$

$M_{59} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 \in F_p^*, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p,$ $s_5 = 0, s_6 \in F_p^*, s_7 \in F_p, s_8 = 0, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 = 3, t = 3, s_0 \in F_p^*, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p,$ $s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 \in F_p, s_8 = 0, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 = 2, m_4 = 2, t = 2, s_0 \in F_p^*, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 \in F_p,$ $s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 = 0$

$M_{60} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 = 1, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p,$ $s_5 = 0, s_6 \in F_p^*, s_7 \in F_p, s_8 = 0, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 = 3, t = 3, s_0 = 1, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p,$ $s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 \in F_p, s_8 = 0, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 = 2, m_4 = 2, t = 2, s_0 = 1, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 \in F_p,$ $s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 = 0$

$M_{61} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 \in F_p^*, s_4 = 0,$ $s_5 = 0, s_6 \in F_p^*, s_7 \in F_p, s_8 = 0, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 = 3, t = 3, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 \in F_p^*, s_4 = 0,$ $s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 \in F_p, s_8 = 0, s_9 = 0$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 = 2, m_4 = 2, t = 2, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 = 1, s_4 = 0, s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 = 0$

$M_{62} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 \in F_p^*, s_4 = 0, s_5 = 0, s_6 \in F_p^*, s_7 \in F_p, s_8 = 0, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 = 3, t = 3, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 \in F_p^*, s_4 = 0, s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 \in F_p, s_8 = 0, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 = 2, m_4 = 2, t = 2, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 = 1, s_4 = 0, s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 = 0$

$M_{63} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_2 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 = 0, s_5 = 0, s_6 \in F_p^*, s_7 \in F_p, s_8 = 0, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 = 3, t = 3, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 = 0, s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 \in F_p, s_8 = 0, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 = 2, m_4 = 2, t = 2, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 = 0, s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 = 0$

$M_{64} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_2 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 = 0, s_5 = 0, s_6 \in F_p^*, s_7 \in F_p, s_8 = 0, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 = 3, t = 3, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 = 0, s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 \in F_p, s_8 = 0, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 = 2, m_4 = 2, t = 2, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 = 0, s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 = 0$

$M_{65} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 \in F_p^*, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 = 0, s_5 = 0, s_6 \in F_p^*, s_7 \in F_p, s_8 = 0, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 = 3, t = 3, s_0 \in F_p^*, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 = 0, s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 \in F_p, s_8 = 0, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 = 2, m_4 = 2, t = 2, s_0 \in F_p^*, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 = 0, s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 = 0$

$M_{66} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_3 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 = 1, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 = 0, s_5 = 0, s_6 \in F_p^*, s_7 \in F_p, s_8 = 0, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 = 3, t = 3, s_0 = 1, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 = 0, s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 \in F_p, s_8 = 0, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 = 2, m_4 = 2, t = 2, s_0 = 1, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 = 0, s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 = 0$

$M_{67} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 = 1, s_4 = 0, s_5 = 0, s_6 \in F_p^*, s_7 \in F_p, s_8 = 0, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 = 3, t = 3, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 = 1, s_4 = 0, s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 \in F_p, s_8 = 0, s_9 = 0$

$M_{68} = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 = 1, s_4 = 0, s_5 = 0, s_6 \in F_p^*, s_7 \in F_p, s_8 = 0, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 = 3, t = 3, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 = 1, s_4 = 0, s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 \in F_p, s_8 = 0, s_9 = 0$

$M_{69} = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_2 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 = 0, s_5 = 0, s_6 \in F_p^*, s_7 \in F_p, s_8 = 0, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 = 3, t = 3, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 = 0, s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 \in F_p, s_8 = 0, s_9 = 0$

$M_{70} = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_2 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 = 0, s_5 = 0, s_6 \in F_p^*, s_7 \in F_p, s_8 = 0, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 = 3, t = 3, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 = 0, s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 \in F_p, s_8 = 0, s_9 = 0$

$M_{71} = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 \in F_p^*, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 = 0, s_5 = 0, s_6 \in F_p^*, s_7 \in F_p, s_8 = 0, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 = 3, t = 3, s_0 \in F_p^*, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 = 0, s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 \in F_p, s_8 = 0, s_9 = 0$

$M_{72} = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 = 1, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 = 0, s_5 = 0, s_6 \in F_p^*, s_7 \in F_p, s_8 = 0, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 = 3, t = 3, s_0 = 1, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 = 0, s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 \in F_p, s_8 = 0, s_9 = 0$

$M_{73} = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p^3\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p, s_5 \in F_p, s_6 \in F_p^*, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 = 3, t = 3, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p, s_5 \in F_p, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 = 0$

$M_{74} = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p^3\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p, s_5 \in F_p, s_6 \in F_p^*, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 = 3, t = 3, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p, s_5 \in F_p, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 = 0$

$M_{75} = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_2 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p^3\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p, s_5 \in F_p, s_6 \in F_p^*, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 = 3, t = 3, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p, s_5 \in F_p, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 = 0$

$M_{76} = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_2 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p^3\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p,$
$s_5 \in F_p, s_6 \in F_p^*, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 = 3, t = 3, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p,$
$s_5 \in F_p, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 = 0$

$M_{77} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p^3\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 \in F_p^*, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p,$
$s_5 \in F_p, s_6 \in F_p^*, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 = 3, t = 3, s_0 \in F_p^*, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p,$
$s_5 \in F_p, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 = 0$

$M_{78} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_3 \in p^3\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 = 1, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p,$
$s_5 \in F_p, s_6 \in F_p^*, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 = 3, t = 3, s_0 = 1, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p,$
$s_5 \in F_p, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 = 0$

$M_{79} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p,$
$s_5 = 0, s_6 \in F_p^*, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 = 3, t = 3, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p,$
$s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 = 0$

$M_{80} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p,$
$s_5 = 0, s_6 \in F_p^*, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 = 3, t = 3, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p,$
$s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 = 0$

$M_{81} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_2 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p,$
$s_5 = 0, s_6 \in F_p^*, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 = 3, t = 3, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p,$
$s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 = 0$

$M_{82} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_2 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p,$
$s_5 = 0, s_6 \in F_p^*, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 = 3, t = 3, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p,$
$s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 = 0$

$M_{83} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 \in F_p^*, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p,$
$s_5 = 0, s_6 \in F_p^*, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 = 3, t = 3, s_0 \in F_p^*, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p,$
$s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 = 0$

$M_{84} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 = 1, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p,$
$s_5 = 0, s_6 \in F_p^*, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 = 0$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 = 3, t = 3, s_0 = 1, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p,$
  $s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 = 0$

$M_{85} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 \in F_p^*, s_4 = 0,$
  $s_5 = 0, s_6 \in F_p^*, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 = 3, t = 3, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 \in F_p^*, s_4 = 0,$
  $s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 = 0$

$M_{86} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 \in F_p^*, s_4 = 0,$
  $s_5 = 0, s_6 \in F_p^*, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 = 3, t = 3, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 \in F_p^*, s_4 = 0,$
  $s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 = 0$

$M_{87} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_2 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 = 0,$
  $s_5 = 0, s_6 \in F_p^*, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 = 3, t = 3, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 = 0,$
  $s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 = 0$

$M_{88} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_2 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 = 0,$
  $s_5 = 0, s_6 \in F_p^*, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 = 3, t = 3, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 = 0,$
  $s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 = 0$

$M_{89} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 \in F_p^*, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 = 0,$
  $s_5 = 0, s_6 \in F_p^*, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 = 3, t = 3, s_0 \in F_p^*, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 = 0,$
  $s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 = 0$

$M_{90} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_3 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 = 1, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 = 0,$
  $s_5 = 0, s_6 \in F_p^*, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 = 3, t = 3, s_0 = 1, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 = 0,$
  $s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 = 0$

$M_{91} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 = 1, s_4 = 0,$
  $s_5 = 0, s_6 \in F_p^*, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 = 3, t = 3, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 = 1, s_4 = 0,$
  $s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 = 0$

$M_{92} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 = 1, s_4 = 0,$
  $s_5 = 0, s_6 \in F_p^*, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 = 3, t = 3, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 = 1, s_4 = 0,$
  $s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 = 0$

$$M_{93} = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5-x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5-x_2 \in p\mathbb{Z}_p, x_5-x_4 \in p\mathbb{Z}_p\}$$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 = 0, s_5 = 0, s_6 \in F_p^*, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 = 3, t = 3, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 = 0, s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 = 0$

$$M_{94} = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5-x_2 \in p\mathbb{Z}_p, x_5-x_4 \in p\mathbb{Z}_p\}$$

- $m_1 \geq 1, = m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 = 0, s_5 = 0, s_6 \in F_p^*, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 = 3, t = 3, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 = 0, s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 = 0$

$$M_{95} = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5-x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5-x_4 \in p\mathbb{Z}_p\}$$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 \in F_p^*, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 = 0, s_5 = 0, s_6 \in F_p^*, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 = 3, t = 3, s_0 \in F_p^*, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 = 0, s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 = 0$

$$M_{96} = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5-x_4 \in p\mathbb{Z}_p\}$$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 = 1, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 = 0, s_5 = 0, s_6 \in F_p^*, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 = 0$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 = 3, t = 3, s_0 = 1, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 = 0, s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 = 0$

$$M_{97} = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5-x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5-x_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5-x_3 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p, s_5 \in F_p, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 = 0$

$$M_{98} = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5-x_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5-x_3 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p, s_5 \in F_p, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 = 0$

$$M_{99} = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5-x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5-x_2 \in p\mathbb{Z}_p, x_5-x_3 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p, s_5 \in F_p, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 = 0$

$$M_{100} = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5-x_2 \in p\mathbb{Z}_p, x_5-x_3 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p, s_5 \in F_p, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 = 0$

$$M_{101} = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5-x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5-x_3 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 \in F_p^*, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p, s_5 \in F_p, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 = 0$

$$M_{102} = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5-x_3 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 = 1, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p, s_5 \in F_p, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 = 0$

$$M_{103} = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5-x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5-x_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5-x_3 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p, s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 = 0$

$$M_{104} = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5-x_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5-x_3 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p,$
$s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 = 0$

$M_{105} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_2 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p,$
$s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 = 0$

$M_{106} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_2 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p,$
$s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 = 0$

$M_{107} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 \in F_p^*, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p,$
$s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 = 0$

$M_{108} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_3 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 = 1, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 \in F_p,$
$s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 = 0$

$M_{109} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 \in F_p^*, s_4 = 0,$
$s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 = 0$

$M_{110} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 \in F_p^*, s_4 = 0,$
$s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 = 0$

$M_{111} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_2 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 = 0,$
$s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 = 0$

$M_{112} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_2 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 = 0,$
$s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 = 0$

$M_{113} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 \in F_p^*, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 = 0,$
$s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 = 0$

$M_{114} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_3 \in p\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 = 1, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 \in F_p^*, s_4 = 0,$
$s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 = 0$

$M_{115} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_2 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 = 1, s_4 = 0,$
$s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 = 0$

$M_{116} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_2 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, s_3 = 1, s_4 = 0,$
$s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 = 0$

$M_{117} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_2 \in p\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 \in F_p^*, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 = 0,$
$s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 = 0$

$M_{118} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_2 \in p\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, , t \geq 4, s_0 = 1, s_1 \in F_p^*, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 = 0,$ $s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 = 0$

$M_{119} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 \in F_p^*, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 = 0,$ $s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 = 0$

$M_{120} = \mathbb{Z}_p^5$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 = 1, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 = 0,$ $s_5 = 0, s_6 = 1, s_7 = 0, s_8 = 0, s_9 = 0$

Para más información ver [5]

Capítulo 6

Caso General

Definición 6.1. Sea R un dominio entero, llamamos a R dominio de Dedekind si R es un anillo hereditario, esto es, que todo ideal de R es un R-módulo proyectivo.

Definición 6.2. Sea R un dominio de Dedekind con campo de cocientes K. Un R-ideal fraccional en K es un R-submódulo finitamente generado M contenido en K tal que $KM = K$.

Definición 6.3. Sea M un ideal fraccional de $B_p(C_{p^n})$, definimos y denotamos al conductor de M en $B_p(C_{p^n})$ como sigue:

$$\{M : B_p(C_{p^n})\} = \{\alpha \in \mathbb{Q}_p^{n+1} : \alpha M \subseteq B_p(C_{p^n})\}$$

Observación 6.1. Sea

$$B_p(C_{p^n}) = \{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}_p^{n+1} : x_n - x_i \in p^{i+1}\mathbb{Z}_p, i = 0, \ldots, n-1\}$$

de acuerdo con la Observación 4.2, los ideales de nuestro interés para este trabajo, son de la forma:

$$I = (\alpha, p^t)B_p(C_{p^n}) + (\mathcal{J}, 0)$$

con $t \geq 0$ y donde

$$\mathcal{J} = (p^{m_1'}, p^{m_2'}, \ldots, p^{m_n'})\mathbb{Z}_p^n \leq B_p(C_{p^{n-1}})$$

para $m_1' \geq 1, \ldots, m_{n-1}' \geq n-1, m_n' \geq n-1$. De I) tenemos que $g_1(\mathcal{J}) = 0 + p^n\mathbb{Z}_p$, entonces $p^{m_n'} + p^n\mathbb{Z}_p = 0 + p^n\mathbb{Z}_p$; luego $p^{m_n'} \in p^n\mathbb{Z}_p$ y así $m_n' \geq n$. De IV) tenemos:

$$\begin{array}{rcl} (p, 0, 0, \ldots, 0)\alpha & \in & \mathcal{J} \\ (0, p^2, 0, \ldots, 0)\alpha & \in & \mathcal{J} \\ & \vdots & \\ (0, 0, \ldots, 0, p^n)\alpha & \in & \mathcal{J}. \end{array}$$

Sea $\alpha = (y_0, \ldots, y_{n-1}) \in B_p(C_{p^{n-1}})$, entonces

$$\begin{array}{rcl}(py_0,0,0,\ldots,0) & \in & \mathcal{J}\\ (0,p^2y_1,0,\ldots,0) & \in & \mathcal{J}\\ & \vdots & \\ (0,0,\ldots,0,p^ny_{n-1}) & \in & \mathcal{J}.\end{array}$$

entonces $py_0 \in p^{m'_1}\mathbb{Z}_p, p^2y_1 \in p^{m'_2}\mathbb{Z}_p, \ldots, p^ny_{n-1} \in p^{m'_n}\mathbb{Z}_p$, de aquí

$$\begin{array}{rcl}y_0 & = & p^{m'_1-1}(s_{0,0}+py'_0) \text{ con } y'_0 \in \mathbb{Z}_p.\\ y_1 & = & p^{m'_2-2}(s_{1,0}+ps_{1,1}+p^2y'_1) \text{ con } y'_1 \in \mathbb{Z}_p.\\ & \vdots & \\ y_i & = & p^{m'_{i+1}-(i+1)}(s_{i,0}+ps_{i,1}+\cdots+p^is_{i,i}+p^{i+1}y'_i) \text{ con } y'_i \in \mathbb{Z}_p.\\ & \vdots & \\ y_{n-1} & = & p^{m'_n-n}(s_{n-1,0}+ps_{n-1,1}+\cdots+p^{n-1}s_{n-1,n-1}+p^ny'_n) \text{ con } y'_n \in \mathbb{Z}_p.\end{array}$$

De III), puesto que α es único módulo $\mathcal{J}$, sin pérdida de generalidad, consideramos

$$\alpha = (p^{m'_1-1}s_{0,0},\ p^{m'_2-2}(s_{1,0}+ps_{1,1}),\ldots,p^{m'_n-n}(s_{n-1,0}+ps_{n-1,1}+\cdots+p^{n-1}s_{n-1,n-1})).$$

con $s_{i,j} \in F_p \quad i=0,\ldots,n-1$ y $j=0,\ldots,i$. De II) obtenemos

$$p^{m'_n-n}(s_{n-1,0}+ps_{n-1,1}+\cdots+p^{n-1}s_{n-1,n-1})+p^n\mathbb{Z}_p = p^t+p^n\mathbb{Z}_p.$$

por lo que para el caso $t \geq n$ se tiene

$$p^{m'_n-n}(s_{n-1,0}+ps_{n-1,1}+\cdots+p^{n-1}s_{n-1,n-1}) \in p^n\mathbb{Z}_p. \tag{6.1}$$

de donde obtenemos las siguientes $(n+1)!$ clases de isomorfismo de ideales fraccionales de índice finito en $B_p(C_{p^n})$, a saber:

$$M_j = \{(x_0,\ldots,x_n) \in \mathbb{Z}_p^{n+1} : x_n - x_0 \in p^{i_1}\mathbb{Z}_p, x_n - x_1 \in p^{i_2}\mathbb{Z}_p, \ldots, x_n - x_{n-1} \in p^{i_n}\mathbb{Z}_p\}$$

donde $i_1 = 0,1; i_2 = 0,1,2; \cdots ; i_n = 0,1,\ldots,n$. Observe que los valores de j van desde 1 hasta $(n+1)!$ de acuerdo con los distintos valores de i_l para $l = 1,\ldots,n$.

Notación: Denotemos por

$$\begin{array}{rcl}\mathcal{M}_0 & = & B_p(C_{p^n})\\ \mathcal{M}_i & = & \mathbb{Z}_p^i \times B_p(C_{p^{n-i}}) \text{ para } i=1,\ldots,n-1\\ \mathcal{M}_n & = & \mathbb{Z}_p^{n+1}.\end{array}$$

De acuerdo a [6] los únicos conductores de los ideales fraccionales de índice finito son:

1) $\mathcal{N}_0 = \mathcal{M}_0 = \{\mathcal{M}_0 : B_p(C_{p^n})\}$.

2) $\mathcal{N}_1 = (p, p^2, \ldots, p^{i-1}, p^i, \underbrace{p^i, \ldots, p^i}_{(n-i+1)-veces})\mathcal{M}_i = \{\mathcal{M}_i : B_p(C_{p^n})\}$
para $i = 1, \ldots, n-1$

3) $\mathcal{N}_n = (p, p^2, \ldots, p^n, p^n)\mathcal{M}_n = \{\mathcal{M}_n : B_p(C_{p^n})\}$

Conjetura 6.1.

Con base a la Observación 3.4 y considerando el ideal

$$\mathcal{J} = (p^{m'_1}, p^{m'_2}, \ldots, p^{m'_n})\mathbb{Z}_p^n \leq B_p(C_{p^{n-1}})$$

con $m'_1 \geq 1, \ldots, m'_{n-1} \geq n-1, m'_n \geq n-1$ se obtienen los siguientes ideales de índice finito en $B_p(C_{p^n})$.

$$(p^{m_1}s_{0,0}, p^{m_2}(s_{1,0} + ps_{1,1}), \ldots, p^{m_n}(s_{n-1,0} + ps_{n-1,1} + \cdots + p^{n-1}s_{n-1,n-1}), p^{m_{n+1}})M_j$$

a) En el caso $i_1 = 1, i_2 = 2, \ldots, i_n = n$, es decir, $M_j = B_p(C_{p^n})$ donde:

- $m_1 \geq 1, \ldots, m_n \geq n, m_{n+1} \geq n$.
  $s_{l,0} \in F_p^* \quad l = 0, \ldots, n-1; s_{k,t} \in F_p \quad k = 1, \ldots, n-1$ y $t = 1, \ldots, k$.

- $m_1 \geq 1, \ldots, m_{n-1} \geq n-1, m_n = m_{n+1} = n-1$.
  $s_{l,0} \in F_p^* \quad l = 0, \ldots, n-2; s_{n-1,0} = 1; s_{k,t} \in F_p \quad k = 1, \ldots, n-1$ y $t = 1, \ldots, k$.

- $m_1 \geq 1, \ldots, m_{n-2} \geq n-2, m_{n-1} = m_n = m_{n+1} = n-2$.
  $s_{l,0} \in F_p^* \quad l = 0, \ldots, n-3; s_{n-2,0} = s_{n-1,0} = 1;$
  $s_{k,t} \in F_p \begin{cases} k = 1, \ldots, n-2 & \text{y} \quad t = 1, \ldots, k. \\ k = n-1 & \text{y} \quad t = 2, \ldots k; s_{n-1,1} = 0. \end{cases}$

- $m_1 \geq 1, \ldots, m_{n-3} \geq n-3, m_{n-2} = m_{n-1} = m_n = m_{n+1} = n-3$.
  $s_{l,0} \in F_p^* \quad l = 0, \ldots, n-4; s_{n-3,0} = s_{n-2,0} = s_{n-1,0} = 1;$
  $s_{k,t} \in F_p \begin{cases} k = 1, \ldots, n-3 & \text{y} \quad t = 1, \ldots, k. \\ k = n-2 & \text{y} \quad t = 2, \ldots, k; s_{n-2,1} = 0. \\ k = n-1 & \text{y} \quad t = 3, \ldots, k; s_{n-1,1} = s_{n-1,2} = 0. \end{cases}$

  $\vdots$

- $m_1 = m_2 = \cdots = m_n = m_{n+1} = 0$.
  $s_{l,0} = 1 \quad l = 0, \ldots, n-1; s_{k,t} = 0 \quad k = 1, \ldots, n-1$ y $t = 1, \ldots, k$.

b) En el caso $i_1 = \ldots = i_n = 0$, es decir, $M_j = \mathbb{Z}_p^{n+1}$ donde:

- $m_1 \geq 1, \ldots, m_n \geq n, m_{n+1} \geq n$.
  $s_{l,0} = 1 \quad l = 0, \ldots, n-1; s_{k,t} = 0 \quad k = 1, \ldots, n-1$ y $t = 1, \ldots, k$.

c) En el caso

$$M_j = \{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}_p^{n+1} : x_n - x_{l-1} \in p^{i_l}\mathbb{Z}_p, l = 1, \ldots, n\}$$

para $0 \leq i_l \leq l$, salvo los dos casos anteriores, si

$$\{M_j : B_p(C_{p^n})\} = (p, p^2, \ldots, p^{i-1}, p^i, \underbrace{p^i, \ldots, p^i}_{(n-i+1)-veces})(\mathbb{Z}_p^i \times B_p(C_{p^{n-i}}))$$

entonces tenemos que :

- $m_1 \geq 1, \ldots, m_n \geq n, m_{n+1} \geq n$.
- $m_1 \geq 1, \ldots, m_{n-1} \geq n-1, m_n = m_{n+1} = n-1$.

  $\vdots$
- $m_1 \geq 1, \ldots, m_i \geq i, m_{i+1} = \cdots = m_{n+1} = i$.

Además, se pueden calcular los $s_{k,t}$ para $k = 0, \ldots, n-1$ y $t = 0, \ldots, k$ para los $n+1-i$ puntos anteriores, de la siguiente manera:
Para cada $l \in \{1, \ldots, n\}$ consideramos los tres casos posibles:

* Si $i_l = 0$, entonces $s_{l-1,0} = 1$ y $s_{l-1,t} = 0 \quad t = 1 \ldots, l-1$, en cada uno de los $n+1-i$ puntos.

* Si $i_l = l$, entonces los $s_{l-1,t}$ se comportan igual que en los primeros $n+1-i$ puntos del caso a) para $t = 0, \ldots, l-1$.

* Si $0 < i_l < l$, entonces los $s_{l-1,t}$ se comportan igual que en los primeros $n+1-i$ puntos del caso a) para $t = 0, \ldots, i_l - 1$ y $s_{l-1,t} = 0$ para $t = i_l, \ldots, l-1$.

Capítulo 7

Conclusiones

A manera de conclusion aplicaremos la Conjetura 6.1 para el caso $B_p(C_{p^5})$. Denotemos por:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{M}_0 & = & B_p(C_{p^5}) \\ \mathcal{M}_1 & = & \mathbb{Z}_p \times B_p(C_{p^4}) \\ \mathcal{M}_2 & = & \mathbb{Z}_p^2 \times B_p(C_{p^3}) \\ \mathcal{M}_3 & = & \mathbb{Z}_p^3 \times B_p(C_{p^2}) \\ \mathcal{M}_4 & = & \mathbb{Z}_p^4 \times B_p(C_p) \\ \mathcal{M}_5 & = & \mathbb{Z}_p^6. \end{array}$$

Veamos ahora de manera explícita las expresiones de los $\mathcal{M}_i$ para $i = 0, \ldots, 5$. Con base en la Observación 4.2 y considerando el ideal

$$\mathcal{J} = (p^{n_1}, p^{n_2}, p^{n_3}, p^{n_4}, p^{n_5})\mathbb{Z}_p^5 \leq B_p(C_{p^4})$$

donde $n_1 \geq 1, n_2 \geq 2, n_3 \geq 3, n_4 \geq 4, n_5 \geq 4$, se obtienen los siguientes ideales de índice finito de $B_p(C_{p^5})$

$$(p^{m_1}s_{0,0}, p^{m_2}(s_{1,0}+ps_{1,1}), p^{m_3}(s_{2,0}+ps_{2,1}+p^2s_{2,2}), p^{m_4}(s_{3,0}+ps_{3,1}+p^2s_{3,2}+p^3s_{3,3}), p^{m_5}(s_{4,0}+ps_{4,1}+p^2s_{4,2}+p^3s_{4,3}+p^4s_{4,4}), p^t))\mathcal{M}_i$$

donde $i = 0, \ldots, 5$.

Estudiemos $\mathcal{M}_0 = B_p(C_{p^5})$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, m_5 \geq 5, t \geq 5$

  $s_{0,0} \in F_p^*, s_{1,0} \in F_p^*, s_{1,1} \in F_p, s_{2,0} \in F_p^*, s_{2,1} \in F_p, s_{2,2} \in F_p, s_{3,0} \in F_p^*,$
  $s_{3,1} \in F_p, s_{3,2} \in F_p, s_{3,3} \in F_p, s_{4,0} \in F_p^*, s_{4,1} \in F_p, s_{4,2} \in F_p, s_{4,3} \in F_p, s_{4,4} \in F_p.$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, m_5 = 4, t = 4$

  $s_{0,0} \in F_p^*, s_{1,0} \in F_p^*, s_{1,1} \in F_p, s_{2,0} \in F_p^*, s_{2,1} \in F_p, s_{2,2} \in F_p, s_{3,0} \in F_p^*,$
  $s_{3,1} \in F_p, s_{3,2} \in F_p, s_{3,3} \in F_p, s_{4,0} = 1, s_{4,1} \in F_p, s_{4,2} \in F_p, s_{4,3} \in F_p, s_{4,4} \in F_p.$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 = 3, m_5 = 3, t = 3$

  $s_{0,0} \in F_p^*, s_{1,0} \in F_p^*, s_{1,1} \in F_p, s_{2,0} \in F_p^*, s_{2,1} \in F_p, s_{2,2} \in F_p, s_{3,0} = 1,$
  $s_{3,1} \in F_p, s_{3,2} \in F_p, s_{3,3} \in F_p, s_{4,0} = 1, s_{4,1} = 0, s_{4,2} \in F_p, s_{4,3} \in F_p, s_{4,4} \in F_p.$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 = 2, m_4 = 2, m_5 = 2, t = 2$

  $s_{0,0} \in F_p^*, s_{1,0} \in F_p^*, s_{1,1} \in F_p, s_{2,0} = 1, s_{2,1} \in F_p, s_{2,2} \in F_p, s_{3,0} = 1,$
  $s_{3,1} = 0, s_{3,2} \in F_p, s_{3,3} \in F_p, s_{4,0} = 1, s_{4,1} = 0, s_{4,2} = 0, s_{4,3} \in F_p, s_{4,4} \in F_p.$

- $m_1 \geq 1, m_2 = 1, m_3 = 1, m_4 = 1, m_5 = 1, t = 1$

  $s_{0,0} \in F_p^*, s_{1,0} = 1, s_{1,1} \in F_p, s_{2,0} = 1, s_{2,1} = 0, s_{2,2} \in F_p, s_{3,0} = 1,$
  $s_{3,1} = 0, s_{3,2} = 0, s_{3,3} \in F_p, s_{4,0} = 1, s_{4,1} = 0, s_{4,2} = 0, s_{4,3} = 0, s_{4,4} \in F_p.$

- $m_1 = 0, m_2 = 0, m_3 = 0, m_4 = 0, m_5 = 0, t = 0$

  $s_{0,0} = 1, s_{1,0} = 1, s_{1,1} = 0, s_{2,0} = 1, s_{2,1} = 0, s_{2,2} = 0, s_{3,0} = 1,$
  $s_{3,1} = 0, s_{3,2} = 0, s_{3,3} = 0, s_{4,0} = 1, s_{4,1} = 0, s_{4,2} = 0, s_{4,3} = 0, s_{4,4} = 0.$

Consideremos ahora $\mathcal{M}_1 = \mathbb{Z}_p \times B_p(C_{p^4})$, notemos que

$\mathcal{M}_1 = \{(x_0, \ldots, x_5) \in \mathbb{Z}_p^6 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p^3\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\}$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, m_5 \geq 5, t \geq 5$

  $s_{0,0} = 1, s_{1,0} \in F_p^*, s_{1,1} = 0, s_{2,0} \in F_p^*, s_{2,1} \in F_p, s_{2,2} = 0, s_{3,0} \in F_p^*,$
  $s_{3,1} \in F_p, s_{3,2} \in F_p, s_{3,3} = 0, s_{4,0} \in F_p^*, s_{4,1} \in F_p, s_{4,2} \in F_p, s_{4,3} \in F_p, s_{4,4} = 0.$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, m_5 = 4, t = 4$

  $s_{0,0} = 1, s_{1,0} \in F_p^*, s_{1,1} = 0, s_{2,0} \in F_p^*, s_{2,1} \in F_p, s_{2,2} = 0, s_{3,0} \in F_p^*,$
  $s_{3,1} \in F_p, s_{3,2} \in F_p, s_{3,3} = 0, s_{4,0} = 1, s_{4,1} \in F_p, s_{4,2} \in F_p, s_{4,3} \in F_p, s_{4,4} = 0.$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 = 3, m_5 = 3, t = 3$

  $s_{0,0} = 1, s_{1,0} \in F_p^*, s_{1,1} = 0, s_{2,0} \in F_p^*, s_{2,1} \in F_p, s_{2,2} = 0, s_{3,0} = 1,$
  $s_{3,1} \in F_p, s_{3,2} \in F_p, s_{3,3} = 0, s_{4,0} = 1, s_{4,1} = 0, s_{4,2} \in F_p, s_{4,3} \in F_p, s_{4,4} = 0.$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 = 2, m_4 = 2, m_5 = 2, t = 2$

  $s_{0,0} = 1, s_{1,0} \in F_p^*, s_{1,1} = 0, s_{2,0} = 1, s_{2,1} \in F_p, s_{2,2} = 0, s_{3,0} = 1,$
  $s_{3,1} = 0, s_{3,2} \in F_p, s_{3,3} = 0, s_{4,0} = 1, s_{4,1} = 0, s_{4,2} = 0, s_{4,3} \in F_p, s_{4,4} = 0.$

- $m_1 \geq 1, m_2 = 1, m_3 = 1, m_4 = 1, m_5 = 1, t = 1$

  $s_{0,0} = 1, s_{1,0} = 1, s_{1,1} = 0, s_{2,0} = 1, s_{2,1} = 0, s_{2,2} = 0, s_{3,0} = 1,$
  $s_{3,1} = 0, s_{3,2} = 0, s_{3,3} = 0, s_{4,0} = 1, s_{4,1} = 0, s_{4,2} = 0, s_{4,3} = 0, s_{4,4} = 0.$

Sea $\mathcal{M}_2 = \mathbb{Z}_p^2 \times B_p(C_{p^4})$, notemos que

$$\mathcal{M}_2 = \{(x_0, \ldots, x_5) \in \mathbb{Z}_p^6 : x_5 - x_2 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, m_5 \geq 5, t \geq 5$

  $s_{0,0} = 1, s_{1,0} = 1, s_{1,1} = 0, s_{2,0} \in F_p^*, s_{2,1} = 0, s_{2,2} = 0, s_{3,0} \in F_p^*,$
  $s_{3,1} \in F_p, s_{3,2} = 0, s_{3,3} = 0, s_{4,0} \in F_p^*, s_{4,1} \in F_p, s_{4,2} \in F_p, s_{4,3} = 0, s_{4,4} = 0.$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, m_5 = 4, t = 4$

  $s_{0,0} = 1, s_{1,0} = 1, s_{1,1} = 0, s_{2,0} \in F_p^*, s_{2,1} = 0, s_{2,2} = 0, s_{3,0} \in F_p^*,$
  $s_{3,1} \in F_p, s_{3,2} = 0, s_{3,3} = 0, s_{4,0} = 1, s_{4,1} \in F_p, s_{4,2} \in F_p, s_{4,3} = 0, s_{4,4} = 0.$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 = 3, m_5 = 3, t = 3$

  $s_{0,0} = 1, s_{1,0} = 1, s_{1,1} = 0, s_{2,0} \in F_p^*, s_{2,1} = 0, s_{2,2} = 0, s_{3,0} = 1,$
  $s_{3,1} \in F_p, s_{3,2} = 0, s_{3,3} = 0, s_{4,0} = 1, s_{4,1} = 0, s_{4,2} \in F_p, s_{4,3} = 0, s_{4,4} = 0.$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 = 2, m_4 = 2, m_5 = 2, t = 2$

  $s_{0,0} = 1, s_{1,0} = 1, s_{1,1} = 0, s_{2,0} = 1, s_{2,1} = 0, s_{2,2} = 0, s_{3,0} = 1,$
  $s_{3,1} = 0, s_{3,2} = 0, s_{3,3} = 0, s_{4,0} = 1, s_{4,1} = 0, s_{4,2} = 0, s_{4,3} = 0, s_{4,4} = 0.$

Ahora sea $\mathcal{M}_3 = \mathbb{Z}_p^3 \times B_p(C_{p^3})$, notemos que

$$\mathcal{M}_3 = \{(x_0, \ldots, x_5) \in \mathbb{Z}_p^6 : x_5 - x_3 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, m_5 \geq 5, t \geq 5$

  $s_{0,0} = 1, s_{1,0} = 1, s_{1,1} = 0, s_{2,0} = 1, s_{2,1} = 0, s_{2,2} = 0, s_{3,0} \in F_p^*,$
  $s_{3,1} = 0, s_{3,2} = 0, s_{3,3} = 0, s_{4,0} \in F_p^*, s_{4,1} \in F_p, s_{4,2} = 0, s_{4,3} = 0, s_{4,4} = 0.$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, m_5 = 4, t = 4$

  $s_{0,0} = 1, s_{1,0} = 1, s_{1,1} = 0, s_{2,0} = 1, s_{2,1} = 0, s_{2,2} = 0, s_{3,0} \in F_p^*,$
  $s_{3,1} = 0, s_{3,2} = 0, s_{3,3} = 0, s_{4,0} = 1, s_{4,1} \in F_p, s_{4,2} = 0, s_{4,3} = 0, s_{4,4} = 0.$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 = 3, m_5 = 3, t = 3$

  $s_{0,0} = 1, s_{1,0} = 1, s_{1,1} = 0, s_{2,0} = 1, s_{2,1} = 0, s_{2,2} = 0, s_{3,0} = 1,$
  $s_{3,1} = 0, s_{3,2} = 0, s_{3,3} = 0, s_{4,0} = 1, s_{4,1} = 0, s_{4,2} = 0, s_{4,3} = 0, s_{4,4} = 0.$

Consideremos $\mathcal{M}_4 = \mathbb{Z}_p^4 \times B_p(C_p)$, notemos que

$$\mathcal{M}_4 = \{(x_0, \ldots, x_5) \in \mathbb{Z}_p^6 : x_5 - x_4 \in p\mathbb{Z}_p\}$$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, m_5 \geq 5, t \geq 5$

  $s_{0,0} = 1, s_{1,0} = 1, s_{1,1} = 0, s_{2,0} = 1, s_{2,1} = 0, s_{2,2} = 0, s_{3,0} = 1,$
  $s_{3,1} = 0, s_{3,2} = 0, s_{3,3} = 0, s_{4,0} \in F_p^*, s_{4,1} = 0, s_{4,2} = 0, s_{4,3} = 0, s_{4,4} = 0.$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, m_5 = 4, t = 4$

  $s_{0,0} = 1, s_{1,0} = 1, s_{1,1} = 0, s_{2,0} = 1, s_{2,1} = 0, s_{2,2} = 0, s_{3,0} = 1,$
  $s_{3,1} = 0, s_{3,2} = 0, s_{3,3} = 0, s_{4,0} = 1, s_{4,1} = 0, s_{4,2} = 0, s_{4,3} = 0, s_{4,4} = 0.$

Por último, sea $\mathcal{M}_5 = \mathbb{Z}_p^6$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, m_5 \geq 5, t \geq 5$
  $s_{0,0} = 1, s_{1,0} = 1, s_{1,1} = 0, s_{2,0} = 1, s_{2,1} = 0, s_{2,2} = 0, s_{3,0} = 1,$
  $s_{3,1} = 0, s_{3,2} = 0, s_{3,3} = 0, s_{4,0} = 1, s_{4,1} = 0, s_{4,2} = 0, s_{4,3} = 0, s_{4,4} = 0.$

De acuerdo a [6] los únicos conductores de los ideales fraccionales de índice finito son:

1) $\mathcal{N}_0 = \mathcal{M}_0 = \{\mathcal{M}_0 : B_p(C_{p^5})\}$.

2) $\mathcal{N}_1 = (p, p, p, p, p, p)\mathcal{M}_1 = \{\mathcal{M}_1 : B_p(C_{p^5})\}$

3) $\mathcal{N}_2 = (p, p^2, p^2, p^2, p^2, p^2)\mathcal{M}_2 = \{\mathcal{M}_2 : B_p(C_{p^5})\}$

4) $\mathcal{N}_3 = (p, p^2, p^3, p^3, p^3, p^3)\mathcal{M}_3 = \{\mathcal{M}_3 : B_p(C_{p^5})\}$

5) $\mathcal{N}_5 = (p, p^2, p^3, p^4, p^4, p^4)\mathcal{M}_4 = \{\mathcal{M}_4 : B_p(C_{p^5})\}$

6) $\mathcal{N}_5 = (p, p^2, p^3, p^4, p^5, p^5)\mathcal{M}_5 = \{\mathcal{M}_5 : B_p(C_{p^5})\}$

Hemos decidido dejar la demostración de la Conjetura 6.1 para un trabajo posterior de investigación.

El trabajar con los conductores nos permite simplificar muchos cálculos para el analisis de $B_p(C_{p^n})$.

Referencias

[1] S. Bouc, *Burnside rings*, Handbook of algebra, North-Holland, Amsterdam, Vol $2, 2000, 739 - 804$.

[2] C. Cejudo Castilla, J. M. Ramírez Contreras, D. Villa Hernández, *El Anillo de Burnside*, Matemáticas y sus aplicaciones 7, 2016, 31-52.

[3] D. Villa Hernández, *Zeta functions of Burnside rings of groups of order p and* p^2, Communications in Algebra, 37 (2009), 1758-1786 .

[4] J. M. Ramírez-Contreras and D. Villa-Hernández, *Solomon's Zeta function of* $B_p(C_{p^3})$. Int. Electron. J. Algebra, 20 (2016), 1-27.

[5] C. Vázquez Rosas, Tesis de Licenciatura, *Algunos ideales de índice finito en el anillo de Burnside* $B_p(C_{p^4})$*, un primer acercamiento a la función zeta* $\zeta_{B_p(C_{p^4})}(s)$, 2018.

[6] J. M. Ramírez Contreras, Tesis de Doctorado, *Función zeta, anillo de Burnside y sus generalizaciones*, 2018.