BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE

PUEBLA FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO

MATEMÁTICAS

Familias de superficies nulas en el espacio-tiempo tridimensional de Minkowski y sus ecuaciones diferenciales asociadas

TESIS QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE MAESTRÍA EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)

PRESENTA

Patricia García Godínez

Asesor: Dr. Gilbeto Silva Ortigoza

Enero de 2003

Resumen

El objetivo central de nuestro trabajo es describir el procedimiento que se tiene que realizar para obtener toda la clase de quivalencia de ecuaciones diferenciales ordinarias de tercer orden conectadas mediante una transformación de contacto tal que en su espacio de soluciones se encuentra definida una métrica conforme a la metrica tridimensional de Minkowski. Para este propósito, se parte de una métrica conforme a la métrica tridimensional de Minkowski, la cual es regular en $\mathbf{I}^+$ y se demuestra que la función que describe la intersección, C_{x^a}, del cono de luz de un punto arbitrario, x^a, del espacio-tiempo, con $\mathbf{I}^+$, está dada por $u = x^a l_a(\phi)$, donde u y ϕ son coordenas sobre $\mathbf{I}^+$ y $l_a(\phi)$ es un vector luxoide. Usando este resultado se muestra como esta familia de superficies nulas se transforma ante una transforamción de contacto general en otra familia de superficies nulas. Finalmente, se describe como obtener las ecuaciones diferenciales ordinarias de tercer orden asociadas con estas familas de superficies nulas.

Índice

Capítulo 1

Introducción

En la última década E. T. Newman y colaboradores han concluido, en forma satisfactoria, una reformulación de la relatividad general en términos de superficies nulas [ ]. En esta reformulación los objetos fundamentales de estudio son dos funciones, $Z(x^a, \zeta, \bar{\zeta})$ y $\Omega(x^a, \zeta, \bar{\zeta})$, donde x^a denota las coordenadas del espacio-tiempo y ζ es la coordenada estereográfica. La función, $Z(x^a, \zeta, \bar{\zeta})$, proporciona la estructura conforme del espacio-tiempo, es decir, define nueve de las diez componentes del tensor métrico, mientreas que $\Omega(x^a, \zeta, \bar{\zeta})$ define la última componente; es decir, en esta formulación de la relativadad general la métrica es un objeto secundario. Este par de funciones satisface un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales no lineales acoplado, el caul es más complicado de resolver que las ecuaciones de Einstein en términos de la métrica. Por tal motivo, se ha estudiado el caso tridimensional [ ]. Recientemente, se encontró que el caso tridimensional ya había sido estudiado, con motivaciones completamente diferentes, por Cartan y Chern [ ]. Más específicamente, Cartan y Chern estudiaron el problema siguiente: bajo que condiciones dos ecuaciones diferenciales ordinarias de tercer orcer son equivalentes ante cierto tipo de transformaciones, tales como las tranformaciones de contacto. En particular de sus resultados generales se desprende que mediante una transformación de contacto la ecuación diferencial ordinario de tercer orden

$$y''' + y' = 0, \tag{1.1}$$

se puede transformar en la ecuación diferencial

$$\bar{y}''' = 6\frac{\bar{y}'(\bar{y}'')^2}{1 + 2(\bar{y}')^2}. \tag{1.2}$$

En trabajos recientes [ ], el grupo de Newman ha demostrado, usando los resultados de Cartan y Chern, que en el espacio de soluciones de ciertas ecuaciones diferenciales ordinarias de tercer orden se puede definir una métrica Lorenziana conforme. Además, demostraron que esta estructura es ivariante ante transformaciones de contacto[ ]. Un resumen de estos resultados sera presentado a continuación.

Una ecuación diferencial ordinaria de tercer orden tiene la forma

$$u''' = F(s, u, u', u''), \tag{1.3}$$

donde u es una función real de s y la prima denota la derivada ordinaria de u con respecto a s. Estaremos interesados en la Ec.(1.) cuando F es una función suave en todos sus argumentos y su invariante de Wunschmann asociadoes cero; esto es, $F(s, u, u', u'')$ satisface la siguiente condición

$$I[F] \equiv F_y - a[F]F_{u''} + \dot{a}[F] - a[F]b[F] = 0, \tag{1.4}$$

donde

$$\begin{aligned} 2a[F] &= -F_{u'} - \frac{2}{9}(F_{u''})^2 + \frac{1}{3}\frac{d}{ds}(F_{u''}), \\ b[F] &= -\frac{1}{3}F_{u''}, \end{aligned} \tag{1.5}$$

con

$$\frac{d}{ds}\Gamma(s, u, u', u'') \equiv \dot{\Gamma} = \Gamma_s + \Gamma_u u' + \Gamma_{u'} u'' + \Gamma_{u''} F. \tag{1.6}$$

Para nuestras aplicaciones al espacio-tiempo tridimensional de Minkowski la variable independiente s será tomada como el ángulo ϕ en el círculo. Este círculo es el círculo de direcciones nulas en cada punto del espacio-tiempo. Bajo la condición (1.4) la métrica o mejor dicho la familia uniparamétrica de métricas Lorentzianas conformes asociadas con la Ec. (1.3) se obtiene de la siguiente manera. Supongamos que la solucion general de la Ec. (1.3) se puede escribir como

$$u = z(x^a, s), \tag{1.7}$$

donde $x^a = (x^1, x^2, x^3)$ son las constantes de integracion las cuales defienen localmente el espacio de soluciones. Ahora se usa la solución general (1.7) para las siguientes tres uno formas

$$\begin{aligned} \beta^1 &= \partial_a u dx^a, \\ \beta^2 &= \partial_a u' dx^a, \\ \beta^3 &= \partial_a u'' dx^a, \end{aligned} \tag{1.8}$$

y las tres combinaciones lineales

$$\omega^1 = \beta^1,$$

$$\begin{aligned}\omega^2 &= \beta^2,\\ \omega^3 &= \beta^3 + a[F]\beta^1 + b[H]\beta^2,\end{aligned} \tag{1.9}$$

donde las funciones $a[F]$ y $b[F]$ estan dadas por las Ecs. (1.5). La familia de métricas está definida por

$$g(x^a, s) \equiv g_{ij}\omega^i\omega^j = 2\omega^{(1} \otimes \omega^{3)} - \omega^2 \otimes \omega^2. \tag{1.10}$$

Esta familia de metricas es tal que

$$\dot{g} = \frac{2}{3}F_{u''}g. \tag{1.11}$$

Esto significa que en el espacio de soluciones de cualquier ecuación diferencial ordinaria de tercer orden que satisface la condición (1.4) se puede construir una familia de métricas Lorenzianas conformes. Ademas, se ha demostrados que esta estructra conforme es invariante ante una transformación de contacto. Es decir, se ha demostrado que en el espacio de soluciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias

$$u_{sss} = F(u, u_s, u_{ss}, s), \tag{1.12}$$

$$\bar{u}_{\bar{s}\bar{s}\bar{s}} = \bar{F}(\bar{u}, \bar{u}_{\bar{s}}, \bar{u}_{\bar{s}\bar{s}}, \bar{s}), \tag{1.13}$$

puede ser definida una métrica conforme cuando (s, u, u') y $(\bar{s}, \bar{u}, \bar{u}')$ estan conectadas mediante una transformación conforme.

Una tranforamción de contacto es determinada en términos de una función generadora $H(s, u, \bar{s}, \bar{u}')$ resolviendo las siguientes relaciones implícitas para $\bar{s}$, $\bar{u}$, $\bar{u}'$ en términos de s, u, u'

$$H(s, u, \bar{s}, \bar{u}') = 0, \qquad H_s + u'H_u = 0, \qquad H_{\bar{s}} + \bar{u}'H_{\bar{u}} = 0. \tag{1.14}$$

La función generadora $H(s, u, \bar{s}, \bar{u}')$ es una función suave tal que las Ecs. ( ) se pueden resolver para $\bar{s}$, $\bar{u}$, $\bar{u}'$. Sin pérdida de genralidad se puede tomar[]

$$H = \bar{u} - \bar{V}(u, s, \bar{s}), \tag{1.15}$$

de tal forma que las transformaciones de contacto se pueden escribir como

$$\begin{aligned}\bar{u} &= \bar{V}(u, s, I(s, u, u')), & (1.16)\\ \bar{s} &= I(s, u, u') & (1.17)\\ \bar{u}' &= \bar{V}_{\bar{s}}(u, s, I(s, u, u')), & (1.18)\end{aligned}$$

donde $I(s, u, u')$ se obtiene resolviendo

$$\bar{V}_{s} + u'\bar{V}_{u} = 0, \tag{1.19}$$

para $\bar{s}$ en términos de s, u and u'.

El objetivo central de nuestro trabajo es describir el procedimiento que se tiene que realizar para obtener toda la clase de quivalencia de ecuaciones diferenciales ordinarias de tercer orden conectadas mediante una transformación de contacto tal que en su espacio de soluciones se encuentra definida una métrica conforme a la metrica tridimensional de Minkowski. Para este propósito, en el capítulo 2 se parte de una métrica conforme a la métrica tridimensional de Minkowski la cual es regular en $\mathbf{I}^+$ y se demuestra que la función que describe la intersección, C_{x^a}, del cono de luz de un punto arbitrario, x^a, del espacio-tiempo, con $\mathbf{I}^+$, está dada por $u = x^a l_a(\phi)$, donde u y ϕ son coordenas sobre $\mathbf{I}^+$ y $l_a(\phi)$ es un vector luxoide. Usando este resultado en el capítulo 3 se muestra como esta familia de superficies nulas se transforma ante una transforamción de contacto general. Finalmente, en el capítulo 4 se describe como obtener las ecuaciones diferenciales ordinarias de tercer orden asociadas con estas familas de superficies nulas.

Capítulo 2

El cono de luz y la función C_{x^a} de un punto arbitrario del espacio-tiempo

Con el objeto de obtener la función, C_{x^a}, que describe la intersección del cono de luz de un punto arbitrario del espacio-tiempo x_0^a con I^+, necesitamos integrar las ecuaciones de las geodésicas nulas en una métrica conforme a la métrica de Minkowski, la cual sea regular en I^+; es decir, en infinito nulo futuro. Para este fin comenzaremos con la métrica de Minkowski en coordenadas Minkowskianas; es decir,

$$ds^2 = \eta_{ab}dx^a dx^b = dt^2 - (dx^2 + dy^2), \tag{2.1}$$

y realizaremos una serie de transformaciones de coordenadas: primero tomaremos $x = r\cos\vartheta$ y $y = r\sin\vartheta$, así que la métrica toma la siguiente forma $ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\vartheta^2$; ahora tomamos $r = r'$ y $t = u' + r'$, entonces $ds^2 = du'^2 + 2du'dr' - r'^2 d\vartheta^2$. Finalmente tomando $u' = \sqrt{2}u$, $r' = \frac{r}{\sqrt{2}}$; y $l = 1/r$, obtenemos que $ds^2 = \frac{1}{2l^2}d\tilde{s}^2$, donde

$$d\tilde{s}^2 = 4l^2 du^2 - 4du\,dl - d\vartheta^2, \tag{2.2}$$

es una métrica conforme (conforme a la métrica de Minkowski dada en la Ec. (2.1)), la cual es regular en inifinto nulo futuro dado por $l = 0$. Así, una lagrangiana que describe las geodésicas nulas de la métrica (2.2) esta dada por

$$\mathrm{L} = 2l^2\dot{u}^2 - 2\dot{u}\dot{l} - \frac{\dot{\vartheta}^2}{2}, \tag{2.3}$$

donde el punto indica diferenciación con respecto a un parámetro afín, τ, a lo largo de la geodésica nula, por ejemplo $\dot{u} = \frac{du}{d\tau}$.

Recordemos que dada la lagrangiana de un sistema mecánico con n grados de libertad, $\mathrm{L} = \mathrm{L}(q_j, \dot{q}_j, t)$, (donde las q_j son las coordenadas generalizadas, las $\dot{q}_j$ son las velocidades generalizadas y t edenota al tiempo con $j = 1, \ldots, n$), las ecuaciones de movimiento están dadas por las ecuaciones de Euler-Lagrange; que son

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{2.4}$$

Entonces, para obtener las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas con la función lagrangiana dada por la Ec. (2.3), necesitamos calcular $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ y $\frac{\partial L}{\partial q_i}$, donde $q_1 = u, q_2 = l$, $q_3 = \vartheta$ y $t = \tau$. Un cálculo sencillo muestra que

$$\frac{\partial L}{\partial u} = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} = 4l^2 \dot{u} - 2\dot{l} \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial L}{\partial l} = 4\dot{u}^2 l, \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{l}} = -2\dot{u}, \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \vartheta} = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} = -\dot{\vartheta}. \tag{2.7}$$

De estos resultados obtenemos que las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas con la función lagrangiana (2.3) están dadas por

$$\frac{d}{d\tau}\left(2l^2\dot{u} - \dot{l}\right) = 0, \tag{2.8}$$

$$\frac{d\dot{u}}{d\tau} + 2l\dot{u}^2 = 0, \tag{2.9}$$

$$\frac{d\dot{\vartheta}}{d\tau} = 0, \tag{2.10}$$

y la condición para buscar las geodésicas nulas está dada por

$$2l^2\dot{u}^2 - 2\dot{u}\dot{l} - \frac{\dot{\vartheta}^2}{2} = 0. \tag{2.11}$$

De las Ecs. (2.8) y (2.10) obtenemos que

$$\dot{u} = \frac{c_1 + \dot{l}}{2l^2}, \tag{2.12}$$

$$\dot{\vartheta} = b, \tag{2.13}$$

donde c_1 y b son constantes de integración.

Un cálculo directo muestra que si (u, l, ϑ) satisface las Ecs. (2.11)-(2.13) entonces la Ec. (2.9) es una identidad; esto significa que solo tres de las cuatro Ecs. (2.8)-(2.11) son independientes. Además, usando estas ecuaciones, no es difícil mostrar que la única constante importante en la integración de las ecuaciones diferenciales que describen las geodésicas nulas es $\frac{b}{c_1}$. Por tanto, sin perdida de generalidad, tomaremos $c_1 = 1$; de esta manera, la única constante importante es b, la cual parametriza la dirección inicial de la geodésica, ver el apéndice. De estos resultados obtenemos que las ecuaciones que describen las geodésicas nulas en el espacio-tiempo tridimensional de Minkowski son:

$$
\begin{aligned}
\dot{\vartheta} &= b, && (2.14)\\
\dot{u} &= \frac{1+\dot{l}}{2l^2}, && (2.15)\\
\dot{l} &= \pm\sqrt{1-l^2b^2}. && (2.16)
\end{aligned}
$$

De la Ec. (16) observamos que $\dot{l}$ puede ser positivo, negativo o cero. Si $\dot{l} < 0$ entonces el rayo de luz se moverá alejándose del origen de coordenadas; para ver esto recordemos que $l = \frac{1}{r}$, entonces $\dot{l} = \frac{-\dot{r}}{r^2}$. De esta manera, $\dot{l} < 0$ cuando $\dot{r} > 0$ esto significa que la posición final del rayo de luz es mayor que su posición inicial. Si inicialmente $\dot{l} > 0$ entonces el rayo de luz se moverá hacia el origen del sistema coordenado ($r = 0, l = \infty$) y después de acercarse hasta una distancia mínima r_m donde $\dot{l} = \sqrt{1-l_m^2 b^2} = 0$; es decir, hasta que l toma el valor $l_m = \frac{1}{b}$, el rayo de luz comensará a alejarse del origen y nuevamente $\dot{l} < 0$.

Usando el parámetro l en lugar del parámetro afín τ; es decir, $dl = \pm\sqrt{1-l^2b^2}\,d\tau$, las Ecs. (2.14)-(2.16) se puden rescribir de la siguiente forma

$$
\begin{aligned}
du &= \pm\left(\frac{1\pm\sqrt{1-b^2l^2}}{2l^2\sqrt{1-b^2l^2}}\right)dl, && (2.17)\\
d\vartheta &= \pm\frac{b\,dl}{\sqrt{1-b^2l^2}}, && (2.18)\\
l &= l. && (2.19)
\end{aligned}
$$

Si inicialmente $\dot{l} < 0$, de las Ecs. (2.17)-(2.19), encontramos que la geodésica del cono de luz que conecta el punto inicial (el vértice) $x_0^a = (u_0, l_0, \vartheta_0)$con el punto final $x^a = (u, l, \vartheta)$, está dada por

$$
\begin{aligned}
u^{(-)} &= u_0 + \left(\frac{1-\sqrt{1-b^2l_0^2}}{2l_0}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{1-b^2l^2}}{2l}\right),\\
\vartheta^{(-)} &= \vartheta_0 + \operatorname{arcsen}(bl_0) - \operatorname{arcsen}(bl), && (2.20)
\end{aligned}
$$

En el caso de que inicialmente $\dot{l} > 0$ entonces

$$
\begin{aligned}
u^{(+)} &= u_0 + \left(\frac{1+\sqrt{1-b^2 l_0^2}}{2l_0} \right) - \begin{cases} \frac{1+\sqrt{1-b^2l^2}}{2l}, & \text{si } l \in (l_0, l_m), \\ \frac{1-\sqrt{1-b^2l^2}}{2l}, & \text{si } l \in (l_m, 0), \end{cases} \\
\vartheta^{(+)} &= \vartheta_0 - \operatorname{arcsen}(b l_0) + \begin{cases} \operatorname{arcsen}(bl), & \text{si } l \in (l_0, l_m), \\ \pi - \operatorname{arcsen}(bl), & \text{si } l \in (l_m, 0). \end{cases}
\end{aligned}
\tag{2.21}
$$

Tomando el límite cuando $l \to 0$; es decir cuando el rayo de luz se aleja a infinito, en las Ecs. (2.20) y (2.21) obtenemos la intersección del cono de luz futuro del punto del espacio-tiempo (u_0, l_0, ϑ_0) con I^+; que es

$$
\begin{aligned}
u^{(-)} &= u_0 + \left(\frac{1-\sqrt{1-l_0^2 b^2}}{2l_0} \right), \\
\phi^{(-)} &= \vartheta_0 + \operatorname{arcsen}(b l_0), \\
u^{(+)} &= u_0 + \left(\frac{1+\sqrt{1-l_0^2 b^2}}{2l_0} \right), \\
\phi^{(+)} &= \vartheta_0 + \pi - \operatorname{arcsen}(b l_0),
\end{aligned}
\tag{2.22}
$$

donde $\phi^{(\pm)} = \vartheta^{(\pm)}_{\infty} \equiv \vartheta(l = 0)$. Un cálculo directo, usando las Ecs. (2.22), muestra que:

$$
\begin{aligned}
u^{(+)} &= u_0 + \frac{1 - \cos(\phi^{(+)} - \vartheta_0)}{2l_0}, \\
u^{(-)} &= u_0 + \frac{1 - \cos(\phi^{(-)} - \vartheta_0)}{2l_0}.
\end{aligned}
\tag{2.23}
$$

Así, de las Ecs. (2.23) se obtiene que la función que describe la intersección del cono de luz futuro del punto del espacio-tiempo, $x_0^a = (u_0, l_0, \vartheta_0)$, con I^+ se puede escribir de la siguiente forma

$$
u = u_0 + \frac{1 - \cos(\phi - \vartheta_0)}{2l_0}, \tag{2.24}
$$

donde (u, ϕ) son coordenadas en I^+ y $0 \le \phi \le 2\pi$. Ahora rescribiremos la Ec. (2.24); para este fin, introduciremos los siguientes vectores luxoides

$$
\begin{aligned}
\tilde{l}^a &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1, \cos\vartheta_0, \operatorname{Sen}\vartheta_0), \\
l^a &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1, \cos\phi, \operatorname{Sen}\phi).
\end{aligned}
\tag{2.25}
$$

Usando las Ecs. (2.25) encontramos que la Ec. (2.24) puede ser escrita como

$$u = u_0 + \frac{\tilde{l}^a l_a}{l_0}, \tag{2.26}$$

o, usando coordenadas Minkowskianas, $x_0^a = (t_0, x_0, y_0)$, las cuales están relacionadas con las coordenadas (u_0, l_0, ϑ_0) por

$$x_0^a = u_0 t^a + \frac{\tilde{l}^a}{l_0}, \tag{2.27}$$

donde $t^a = \sqrt{2}(1, 0, 0)$, entonces la función C_{x^a} asociada con el punto del espacio-tiempo, x_0^a, puede ser escrita como

$$u = Z(x_0^a, \phi) = x_0^a l_a(\phi). \tag{2.28}$$

En la introducción mencionamos que para un espacio-tiempo asintóticamente plano de dimensión cuatro la función, $Z(x^a, \zeta, \bar{\zeta})$, tiene doble significado: para x^a fijo, como hemos mostrado, esta representa la intersección del cono de luz futuro del punto en el espacio-tiempo, x^a con I$^+$, mientras que para $u = constante$, $\zeta = constante$ y x^a variable esta describe todos los puntos en el espacio-tiempo que están conectados por geodésicas nulas con el punto ($u = constante, \zeta = constante, \bar{\zeta} = constante$) de I$^+$. Esto es, esta describe el cono de luz pasado del punto ($u = constante, \zeta = constante, \bar{\zeta} = constante$). Para el espacio-tiempo tridimensional de Minkowski esta función está dada por la Ec. (2.28) y como hemos visto esta describe la intersección del cono de luz futuro del punto del espacio-tiempo, x_0^a con I$^+$. Ahora mostraremos que para $u = constante$, $\phi = constante$ y x_0^a variable esta representa el cono de luz pasado del punto ($u = constante, \phi = constante$) de I$^+$. Para este fin, necesitamos calcular el cono de luz pasado de un punto arbitrario, $x^a_0 = (u_0, l_0, \vartheta_0)$, del espacio-tiempo. Esto puede lograrse a través de las mismas transformaciones de coordenadas en la métrica de Minkowski, $ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2$, que fueron realizadas para calcular el cono de luz futuro de un punto arbitrario x_0^a del espacio-tiempo. La única diferencia es que, en este caso, necesitamos tomar $t = u' - r'$ en lugar de $t = u' + r'$. Entonces, obtenemos que la métrica conforme está dada por $d\tilde{s}^2 = 4l^2 du^2 + 4du dl - d\vartheta^2$. De donde, la función lagrangiana, para este caso, está dada por

$$\mathrm{L} = 2l^2 \dot{u}^2 + 2\dot{u}\dot{l} - \frac{\dot{\vartheta}^2}{2}. \tag{2.29}$$

Observe que remplazando $\dot{u}$ por $-\dot{u}$, en la Ec. (2.29), obtenemos la Ec. (2.3). Esto significa que las ecuaciones diferenciales que describen las geodésicas nulas del cono de luz pasado del punto $x_0^a =$

(u_0, l_0, ϑ_0) quedan dadas por

$$
\begin{aligned}
\dot{\vartheta} &= b, && (2.30)\\
\dot{u} &= -\left(\frac{1+\dot{l}}{2l^2}\right), && (2.31)\\
\dot{l} &= \pm\sqrt{1-l^2b^2}. && (2.32)
\end{aligned}
$$

Puesto que el cono de luz pasado de un punto en $\mathbf{I}^+$ con coordenadas (u_0, ϑ_0), es obtenido de las Ecs. (2.30)-(2.32) tomando el límite cuando l_0 tiende a infinito entonces necesitamos probar que las ecuaciones obtenidas de esta manera pueden ser escritas en la forma dada por la Ec. (2.28). Probaremos esto solo para el signo $(-)$, el otro caso puede ser probado de forma similar.

Usando el parámetro l, en lugar del parámetro afín τ, de las Ecs. (2.30)-(2.32) obtenemos que

$$
\begin{aligned}
u &= u_0 - \left(\frac{1-\sqrt{1-b^2l_0^2}}{2l_0}\right) + \left(\frac{1-\sqrt{1-b^2l^2}}{2l}\right),\\
\vartheta &= \vartheta_0 + \operatorname{arcsen}(bl_0) - \operatorname{arcsen}(bl). && (2.33)
\end{aligned}
$$

Con el fín de obtener la porción del cono de luz pasado, que se genera cuando tomamos el signo $(-)$ en las Ecs. (30)-(32), de un punto arbitrario con coordenadas (u_0, ϑ_0) en $\mathbf{I}^+$, necesitamos tomar el límite cuando $l_0 \to 0$ en las Ecs. (2.33). Haciendo esto, obtenemos que:

$$
\begin{aligned}
u_0 &= u - \left(\frac{1-\sqrt{1-b^2l^2}}{2l}\right),\\
\vartheta_0 &= \vartheta + \operatorname{arcsen}(bl). && (2.34)
\end{aligned}
$$

Usando las Ecs. (2.25), encontramos que, las Ecs. (2.34) pueden ser escritas como:

$$
u_0 = u - \frac{\tilde{l}^a l_a}{l}, \qquad (2.35)
$$

o si usamos coordenadas Minkowskianas $x^a = (t, x, y)$, las cuales están relacionadas con las coordenadas (u, l, ϑ) por $x^a = ut^a - l^a/l$, entonces el cono de luz pasado del punto con coordenadas (u_0, ϑ_0) en $\mathbf{I}^+$ está dado por

$$
u_0 = x^a \tilde{l}_a(\vartheta_0), \qquad (2.36)
$$

que es el resultado deseado.

Capítulo 3

Familias de superficies nulas y sus singularidades

En el capítulo anterior demostramos que la función,

$$u = x^a l_a(\phi), \tag{3.1}$$

tinen los siguientes significados: a) si $x^a = x^a{}_0$es un punto fijo del espacio-tiempo entonces esta representa la intersección del cono de luz de $x^a{}_0$ con $\mathbf{I}^+$ y b) para ($u = u_0$, $\phi = \phi_0$) fijos esta representa el cono de luz pasado del punto (u_0, ϕ_0) de $\mathbf{I}^+$. El segundo significado es equivalente al hecho de que la función, $u = u(x^a, \phi)$, para $0 \leq \phi \leq 2\pi$, satisface la ecuación iconal en el espacio-tiempo tridimensional de Minkowski; es decir,

$$\eta^{ab}\partial_a u \partial_b u = l_a(\phi) l^a(\phi) = 0, \tag{3.2}$$

donde $\partial_a u = \partial u/\partial x^a$. Observe que las superficies de nivel de la función $u = x^a l_a(\phi_0)$, con $\phi_0 = constante$, son planos paralelos nulos (debido a que su vector normal es $l_a(\phi_0)$ el cual es luxoide) en el espacio-tiempo físico tridimensional de Minkowski dado por la métrica (2.1). Estos planos paralelos nulos corresponden a los conos de luz pasados de los puntos (u, ϕ_0) de $\mathbf{I}^+$ en el espacio-tiempo descrito por la métrica (2.2).

El objetivo de este capítulo es mostrar como de la familia de superficies nulas dada por las superficies de nivel de la función $u = x^a l_a(\phi)$ se pueden construir nuevas familias de superficies nulas. Además se muestra como localizar sus singularidades. Para este fin comenzaremos con el caso más simple; es decir, primero mostraremos como generar una sola superficie nula y posteriormete generalizaremos este proceso.

Si $u = u_0 = constante$ entonces, usando la Ec. (3.1), la envolvente de los conos de luz pasados de los puntos (u_0, ϕ) de $\mathbf{I}^+$ está dada por

$$u_0 = x^a l_a, \quad (3.3)$$

$$0 = x^a \partial_\varphi l_a \equiv x^a m_a, \quad (3.4)$$

$$\frac{r}{2} = x^a \partial^2_\varphi l_a \equiv x^a n_a, \quad (3.5)$$

donde

$$l_a = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -\cos\varphi, -\mathrm{sen}\,\varphi), \quad (3.6)$$

$$m_a = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, \mathrm{sen}\,\varphi, -\cos\varphi), \quad (3.7)$$

$$n_a = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, \cos\varphi, \mathrm{sen}\,\varphi). \quad (3.8)$$

Dado que el determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -\cos\phi & -\mathrm{sen}\,\phi \\ 0 & \mathrm{sen}\,\phi & -\cos\phi \\ 0 & \cos\phi & \mathrm{sen}\,\phi \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

es igual a uno, entonces los vectores l^a, m^a, n^a son independientes y por tanto podemos escribir

$$x^a = Al^a + Bn^a + Cm^a, \quad (3.10)$$

donde A, B y C pueden ser determinadas usando las Ecs. (3.3)-(3.5) y el hecho de que los vectores (l^a, m^a, n^a) satisface las siguientes relaciones

$$l^a l_a = 0; \quad m^a m_a = -\frac{1}{2}; \quad n^a n_a = -\frac{1}{2}; \quad m^a l_a = 0; \quad n^a l_a = \frac{1}{2}; \quad m^a n_a = 0. \quad (3.11)$$

Por ejemplo, para determinar B contraemos la Ec. (3.10) con l_a, con lo cual se obtiene $l_a x^a = Al_a l^a + Bl_a n^a + Cl_a m^a$. Usando las Ecs. (3.3) y (3.11) encontramos que $B = 2u_0$. Realizando cálculos similares para determinar A y C se encuentra que las Ecs. (3.3)-(3.5) son equivalentes a

$$x^a = 2u_0(l^a + n^a) + rl^a, \quad (3.12)$$

o usando el hecho de que $t^a = 2(l^a + n^a)$, obtenemos que

$$x^a = u_0 t^a + rl^a(\phi). \quad (3.13)$$

Usando las Ecs. (3.6) y (3.8), y el hecho de que $x^a = (t, x, y)$ encontramos que la Ec. (3.12) es equivalente a

$$x^2 + y^2 - (t - \sqrt{2}u_0)^2 = 0. \tag{3.14}$$

Esta superficie es el cono de luz del punto del espacio-tiempo con coordenadas $(\sqrt{2}u_0, 0{,}0)$. Por tanto, si u puede tomar todos sus valores permitidos entonces la Ec. (3.13) describe los conos de luz de los puntos del espacio-tiempo con coordenadas $(\sqrt{2}u, 0{,}0)$. De la Ec. (3.14) encontramos que esta familia de conos de luz corresponden a las superficies de nivel de la función

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}}(t \pm \sqrt{x^2 + y^2}), \tag{3.15}$$

la cual, como se puede mostrar, es una solución de la ecuación iconal en el espacio-tiempo tridimensional de Minkowski. De esto concluimos que mediante la técnica de envolventes, dada la familia (3.1) de soluciones de la ecuación iconal, se puede obtener una nueva solución. Antes de mostrar como generar superficies nulas más generales, mostraremos como localizar las singularidades asociadas con las curvas de nivel de la función dada en (3.15). Para fin, primero remplacemos a u_0 por u en la Ec. (3.13), obteniendo asi una forma equivalente de la Ec. (3.15), dada por

$$\begin{aligned} t &= \frac{2u + r}{\sqrt{2}}, \\ x &= \frac{r\cos\phi}{\sqrt{2}}, \\ y &= \frac{r\sin\phi}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Desde un punto de vista matemático las Ecs. (3.16) representan un mapeo entre dos espacios tridimensionales donde (u, r, ϕ) son coordenadas del espacio dominio y (t, x, y) son coordenadas del espacio codominio. Este mapeo representara una transformación de coordenadas si su jacobiano asociado es diferente de cero. El conjuto de puntos del espacio dominio tal que el jacobiano es igual a cero se llama conjunto crítico y la imagen del conjunto crítico se llama conjunto cáustico[ ]. Usando estas definiciones, encontramos que el conjunto crítico del mapeo (3.16) está dado por $\{r = 0, u \in \mathbb{R}, 0 \leq \phi \leq 2\pi\}$, mientras que su conjunto cáustico por $(\sqrt{2}u, 0, 0)$.

Para ver el significado geométrico de los resultados obtenidos hasta el momento supongamos que el cono de luz de un punto arbitrario del espacio-tiempo tridimensional de Minkowski lo intersectamos con superficies $t = constante$, lo que se obtiene es una descomposición del cono de luz en curvas cerradas unidimensionales las cuales normalmente reciben el nombre de frentes de onda. Asi que, el cono de luz de un punto arbitrario del espacio-tiempo se puede ver como la evolución de un frente de onda unidimensional. Desde este punto de vista, la intersección del cono de luz de un punto arbitrario con $\mathbf{I}^+$ dada por la función (3.1) corresponde al ultimo frente de onda. Cuando tomamos la envolvente de los conos de luz pasados de los puntos (u_0, ϕ) de $\mathbf{I}^+$, lo que estamos haciendo es construir la evolución del ultimo frente de onda, dado por los puntos (u_0, ϕ) de $\mathbf{I}^+$, hacia su interior. La cáustica asociada con la evolución de este frente de onda es el punto del espacio-tiempo con coordenadas $(\sqrt{2}u_0, 0, 0)$. Esto significa que si construimos todas las envolventes de todos los conos de luz padasados de los puntos (u, ϕ) de $\mathbf{I}^+$ con $u \in \mathbb{R}$ lo que generamos son todos los conos de luz de los puntos del espacio-tiempo con coordenadas $(\sqrt{2}u, 0, 0)$. Por tanto, la única singularidad asociada con un cono de luz es su vértice.

Ahora mostraremos como construir superficies que no son conos de luz. Para esto, recordemos que $u = conatante = x^a l_a(\phi)$, representa la intersección del cono de luz del punto del espacio-tiempo $(\sqrt{2}u, 0, 0)$ con $\mathbf{I}^+$. Ahora realizaremos una deformación de esta intersección, o ultimo frente de onda, y calcularemos su evolucion hacia su interior. La deformación que estudiaremos es la siguiente:

$$\tilde{u} = x^a l_a(\phi) + \frac{1}{2}\alpha(\phi), \tag{3.17}$$

donde $\alpha(\phi)$ es una función arbitraria del ángulo ϕ, tal que no es una combinación lineal de $\operatorname{sen}\varphi$ and $\cos\varphi$; porque en ese caso la Ec. (3.17) se reduce a la Ec. (3.1). Como en el caso previo obtenemos la envolvente de los conos de luz pasados de los puntos$(\tilde{u} = constante, \varphi)$. Dicha envolvente, en forma paramétrica, está dada por

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= x^a l_a + \frac{1}{2}\alpha(\phi), && (3.18)\\ 0 &= x^a m_a + \frac{1}{2}\partial_\phi\alpha(\phi), && (3.19)\\ \frac{\tilde{r}}{2} &\equiv x^a n_a + \frac{1}{2}\partial_\phi^2\alpha(\phi). && (3.20) \end{aligned}$$

Como en el caso previo, usando las Ecs. (3.11) y las Ecs. (3.18)-(3.20), encontramos que la envolvente está dada por

$$x^a = 2\left(\tilde{u} - \frac{\alpha}{2}\right)(n^a + l^a) + (\partial_\varphi\alpha)m^a + (\tilde{r} - \partial_\phi^2\alpha)l^a, \tag{3.21}$$

o equivalentemente

$$x^a = (\tilde{u} - \frac{\alpha}{2})t^a + (\partial_\varphi \alpha)m^a + (\tilde{r} - \partial^2_\phi \alpha)l^a. \tag{3.22}$$

Observe que cuando $\alpha(\phi) = 0$, entonces la Ec. (3.22) se reduce a la Ec. (3.13). Para este caso, un cálculo directo muestra que, el conjunto crítico asociado con el mapeo (3.22) es $\{\tilde{r} = 0, u \in \mathbb{R}, 0 \leq \phi \leq 2\pi\}$ y el conjuto cáustico es:

$$x^a_c = (\tilde{u} - \frac{\alpha}{2})t^a + (\partial_\phi \alpha)m^a - (\partial^2_\phi \alpha)l^a. \tag{3.23}$$

Usando las expresiones para t^a, l^a y m^a, encontramos que la Ec. (3.22) es equivalente a

$$\begin{aligned}
t &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(2\tilde{u} - \alpha + \tilde{r} - \partial^2_\phi \alpha\right),\\
x &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left((\tilde{r} - \partial^2_\phi \alpha)\cos\phi - (\partial_\phi \alpha)\mathrm{Sen}\,\phi\right),\\
y &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left((\tilde{r} - \partial^2_\phi \alpha)\mathrm{Sen}\,\phi + (\partial_\phi \alpha)\cos\phi\right).
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Entonces, la forma del frenet de onda al tiempo $t = 0$, está dada por

$$\begin{aligned}
t &= t_0,\\
x &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(\sqrt{2}t_0 - 2\tilde{u} + \alpha)\cos\phi - (\partial_\phi \alpha)\mathrm{Sen}\,\phi\right],\\
y &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(\sqrt{2}t_0 - 2\tilde{u} + \alpha)\mathrm{Sen}\,\phi + (\partial_\phi \alpha)\cos\phi\right].
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Un cálculo similar muestra que el conjunto cáustico es equivalente a

$$\begin{aligned}
t_c &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(2\tilde{u} - \alpha - \partial^2_\phi \alpha\right),\\
x_c &= \frac{-1}{\sqrt{2}}\left((\partial_\phi \alpha)\mathrm{Sen}\,\phi + (\partial^2_\phi \alpha)\cos\phi\right),\\
y_c &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left((\partial_\phi \alpha)\cos\phi - (\partial^2_\phi \alpha)\mathrm{Sen}\,\phi\right).
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Ahora aplicaremos nuestros resultados a dos casos especiales:

a) Primero tomaremos $\tilde{u} = 0$ y $\alpha = 0$. En este caso la superficie nula está dada por las Ecs. (3.16) con $u = 0$, miemtras que el frente de onda al tiempo $t = t_0$ está dado por:

$$\begin{aligned}
t &= t_0,\\
x &= t_0 \cos\phi,\\
y &= t_0\,\mathrm{sen}\,\phi.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

En la figura 1 mostramos la superficie nula para este caso.

b) Ahora tomamos $\tilde{u} = 0$ y $\alpha(\phi) = \cos^5\phi + \cos^4\phi + \cos^3\phi + \cos^2\phi + \cos\phi$. De las Ecs. (3.24) se encuentra que la superficie nula, para este caso, está dada por:

$$
\begin{aligned}
t &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\tilde{r} - 6\cos\phi - 9\cos^2\phi + 8\cos^3\phi + 15\cos^4\phi - 2\right\},\\
x &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\tilde{r}\cos\phi - 3\cos^2\phi - 6\cos^3\phi + 6\cos^4\phi + 12\cos^5\phi + 1\right\},\\
y &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{(\tilde{r} - 6\cos\phi - 10\cos^2\phi + 6\cos^3\phi + 12\cos^4\phi - 2)\,\mathrm{sen}\,\phi\right\}.
\end{aligned}
\tag{3.28}
$$

Usando las Ecs. (3.25) encontramos que la forma del frente de onda para el tiempo $t = t_0$ es:

$$
\begin{aligned}
t &= t_0,\\
x &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{(\sqrt{2}\,t_0 - 2 + 3\cos\phi + 3\cos^2\phi - 2\cos^3\phi - 3\cos^4\phi)\cos\phi + 1\right\},\\
y &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{(\sqrt{2}\,t_0 - \cos^2\phi - 2\cos^3\phi - 3\cos^4\phi)\,\mathrm{sen}\,\phi\right\}.
\end{aligned}
\tag{3.29}
$$

Mientras que el conjunto cáustico está dado por:

$$
\begin{aligned}
t_c &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{-6\cos\phi - 9\cos^2\phi + 8\cos^3\phi + 15\cos^4\phi - 2\right\},\\
x_c &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{-3\cos^2\phi - 6\cos^3\phi + 6\cos^4\phi + 12\cos^5\phi + 1\right\},\\
y_c &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{(-6\cos\phi - 10\cos^2\phi + 6\cos^3\phi + 12\cos^4\phi - 2)\,\mathrm{sen}\,\phi\right\}.
\end{aligned}
\tag{3.30}
$$

En las figuras ....

Hasta el momento hemos mostrado como de la familia de soluciones (3.1) de la ecuación iconal se puede obtener una nueva solución de la ecuación iconal. Ahora mostraremos como de (3.1) podemos generar familias de soluciones de la ecuación iconal. Con este propósito tomaremos

$$
\tilde{u} = x^a l_a(\phi) + \frac{1}{2}\beta(\phi, \tilde{\phi}),
\tag{3.31}
$$

donde $\beta(\phi, \tilde{\phi})$ es una función diferenciable en cada uno de sus argumentos, ϕ y $\tilde{\phi}$ toman valores entre cero y 2π. Para valores dados de $\tilde{u}$ y $\tilde{\phi}$ la Ec. (3.31) corresponde a una deformación de la intersección del cono de luz del punto del espacio-tiempo $(\sqrt{2}u, 0, 0)$ con I^+. Ahora para cada valor de $\tilde{\phi}$ tomarenos la envolvente de los conos de luz pasados de los puntos ($\tilde{u} = constante, \tilde{\phi}$) de I^+ para construir una famila de superficies nulas. De la Ec. (3.31) se obtiene que en forma paramétrica está dada por:

$$
\begin{aligned}
\tilde{u}(\tilde{\phi}) &= x^a l_a(\phi) + \frac{1}{2}\beta(\phi, \tilde{\phi}), \\
0(\tilde{\phi}) &= x^a m_a(\phi) + \frac{1}{2}\partial_\phi \beta(\phi, \tilde{\phi}), \\
\frac{\tilde{r}(\tilde{\phi})}{2} &\equiv x^a n_a(\phi) + \frac{1}{2}\partial_\phi^2 \beta(\phi, \tilde{\phi}),
\end{aligned}
\tag{3.32}
$$

o equivalentemente por

$$
x^a(\tilde{\phi}) = [\tilde{u} - \frac{\beta(\phi, \tilde{\phi})}{2}]t^a + [\partial_\varphi \beta(\phi, \tilde{\phi})]m^a(\phi) + [\tilde{r}(\tilde{\phi}) - \partial_\varphi^2 \beta(\phi, \tilde{\phi})]l^a(\phi). \tag{3.33}
$$

Si $\tilde{u}$ toma todos sus valores permitidos entonces la Ec. (3.33) proporciona una familia de soluciones de la ecuación iconal en el espacio-tiempo de Minkowsi. Observemos que esta familia de soluciones contiene como casos especiales a las descritas por las Ecs. (3.13) y (3.22). Para ver esto, tomemos $\beta(\phi, \tilde{\phi}) = \tilde{\phi}\, \alpha(\phi)$. La Ec. (3.13) se obtiene cuando $\tilde{\phi} = 0$ y la Ec. (3.22) cuando $\tilde{\phi} = 1$. Dada la famila de soluciones de la ecuación iconal (3.1), aun podemos generar familas de soluciones más generales que las dadas por las Ec. (3.33). Para esto tamaremos

$$
\tilde{u} = V(u, \phi, \tilde{\phi}), \tag{3.34}
$$

donde V es una función diferenciable en cada uno de sus argumentos, u está dada por la Ec. (3.1), ϕ y $\tilde{\phi}$ toman valores entre 0 y 2π. Para $\tilde{u}$ y $\tilde{\phi}$ dados la Ec. (3.34) representa una deforación general de la intersección del cono de luz del punto ($\sqrt{2}u$, 0, 0) con I^+. Si $\tilde{u}$ y $\tilde{\phi}$ pueden tomar todos sus valores permitidos entonces la nueva familia de soluciones de la ecuaión iconal en el espacio-tiempo de Minkowski, enforma paramétrica estará dada por

$$
\tilde{u} = V(u, \phi, \tilde{\phi}), \tag{3.35}
$$

$$
0 = [\partial_u V]x^a m_a + \partial_\phi V, \tag{3.36}
$$

$$
\frac{\tilde{r}}{2} = [\partial_u^2 V](x^a m_a)^2 + [\partial_u V]x^a n_a + 2[\partial_{u\phi}^2 V]x^a m_a + \partial_{\phi\phi}^2 V. \tag{3.37}
$$

Concluiremos este capítulo mostrando explícitmaente que las Ecs. (3.35)-(3.37) describen una famila de soluciones de la ecuación iconal en el espacio-tiempo de Minkowski. Para este fin, de la Ec. (3.36) resolvemos para ϕ obteniendo

$$
\phi = \phi(x^a, \tilde{\phi}), \tag{3.38}
$$

que sustituyendo en la Ec. (3.35) se obtiene

$$\bar{u}(x^a, \tilde{\phi}) \equiv V(u(x^a, \phi(x^a, \tilde{\phi})), \phi(x^a, \tilde{\phi}), \tilde{\phi}), \tag{3.39}$$

Un cálculo directo muestra que

$$\partial_b \bar{u} = (\partial_u V) l_b + [(\partial_u V) x^a m_a + \partial_\phi V] \partial_b \phi. \tag{3.40}$$

Finalmente, usando la Ec. (3.36) se obtiene el resultado deseado; es decir,

$$\eta^{ab} \partial_a \bar{u} \partial_b \bar{u} = 0. \tag{3.41}$$

De esta manera concluimos con la demostración de como a partir de la familia de soluciones (3.1) de la ecuación iconal en el espacio-tiempo de Minkowski se puede generar una nueva familia de soluciones de la ecuación iconal en el espacio-tiempo de Minkowski.

FALTA DESCRIBER COMO SE OBTIENEN LAS CAUSTICAS DE ESTAS SUPERFICIES.

Capítulo 4

Las ecuaciones diferenciales ordinarias de tercer orden asociadas con las familias de superficies nulas

En el capítulo anterior mostramos como a partir de la familia des soluciones de la ecuación iconal, $u = x^a l_a(\phi)$, se pude generar una nueva familia de soluciones dada por

$$\tilde{u} = V(u, \phi, \tilde{\phi}), \quad (4.1)$$

$$0 = [\partial_u V] x^a m_a + \partial_\phi V, \quad (4.2)$$

o equivalentemente por

$$\bar{u}(x^a, \tilde{\phi}) \equiv V(u(x^a, \phi(x^a, \tilde{\phi})), \phi(x^a, \tilde{\phi}), \tilde{\phi}). \quad (4.3)$$

El objetivo del presente capítulo es mostrar que con cada una de estas familias de soluciones de la ecuación iconal se encuentra asociada una ecuación diferencial ordinaria de tercer orden, donde las x^a juegan el papel de las constanes de integración de la solución de esa ecuación diferencial ordinaria de tercer orden.

Dada una familia de soluciones, $u = u(x^a, \phi)$ de la ecuación iconal en el espacio-tiempo de Minkowski, la ecuación diferencial ordinaria de tercer orden será obtenida de la siguiente forma: a) se obtienen las tres primeras derivadas de u con respecto a ϕ, b) de u y sus dos primeras derivadas con respecto a ϕ se resuelve para $x^a = (t, x, y)$ y finalmente c) estas soluciones para x^a se sustituyen en la tercera derivada de u con respecto a ϕ, obetiendo asi la ecuación diferencial ordinaria de tercer orden asociada con esa familia de soluciones de la ecuación iconal en el espacio-tiempo de Minkowski. Para mostrar esto, comenzaremos con el caso más simple; es decir, cuando la familia de soluciones está dada por:

$$u = x^a l_a(\phi), \quad (4.4)$$

donde $l^a = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, \cos\phi, \operatorname{sen}\phi)$. Un cáculo directo muestra que

$$
\begin{aligned}
u &= \frac{1}{\sqrt{2}}(t - x\cos\phi - y\operatorname{sen}\phi)\,, && (4.5)\\
\frac{du}{d\phi} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x\operatorname{sen}\phi - y\cos\phi)\,, && (4.6)\\
\frac{d^2u}{d\phi^2} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x\cos\phi + y\operatorname{sen}\phi)\,, && (4.7)\\
\frac{d^3u}{d\phi^3} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-x\operatorname{sen}\phi + y\cos\phi)\,. && (4.8)
\end{aligned}
$$

De las Ecs. (4.5)-(4.7), se obtiene que

$$
\begin{aligned}
t &= \sqrt{2}\; u + \frac{d^2u}{d\phi^2}\,, && (4.9)\\
x &= \sqrt{2}\; \operatorname{sen}\phi\frac{du}{d\phi} + \cos\phi\frac{d^2u}{d\phi^2}\,, && (4.10)\\
y &= -\sqrt{2}\; \cos\phi\frac{du}{d\phi} - \operatorname{sen}\phi\frac{d^2u}{d\phi^2}\,. && (4.11)
\end{aligned}
$$

Usando las Ecs. (4.10) y (4.11) en la Ec. (4.8) se obtiene que para x^a dado, $u = x^a\, l_a(\phi)$, satisface la siguiente ecuación diferencial ordinaria de tercer orden

$$\frac{d^3u}{d\phi^3} + \frac{du}{d\phi} = 0. \qquad (4.12)$$

Ahora veamos el caso en el cual

$$\bar{u}(x^a, \phi, \bar{\phi}) = x^a\, l_a + \frac{1}{2}\alpha(\phi, \bar{\phi}), \qquad (4.13)$$

con la condición de que $\partial_\phi\, \bar{u} = 0$; esto es,

$$x^a\, m_a\,(\phi) + \frac{1}{2}\partial_\phi\, \alpha(\phi, \bar{\phi}) = 0. \qquad (4.14)$$

Puesto que de la Ec. (4.14) se puede obtener $\phi = \phi(x^a, \bar{\phi})$, entonces la familia de soluciones de la ecuaión iconal en el espacio-tiempo de Minkowski, en este caso, estará dada por

$$\bar{u}(x^a, \bar{\phi}) = x^a\, l_a[\phi(x^a, \bar{\phi})] + \frac{1}{2}\alpha[\phi(x^a, \bar{\phi})]. \qquad (4.15)$$

Usando la Ec. (4.15), un cálulo directo muestra que

$$
\begin{aligned}
\frac{d\bar{u}}{d\bar{\phi}} &= x^a(\partial_\phi\, l_a)\,(\partial_{\bar{\phi}}\,\phi) + \frac{1}{2}(\partial_\phi\, \alpha\, \partial_{\bar{\phi}}\,\phi + \partial_{\bar{\phi}}\,\alpha)\\
&= (x^a\, m_a + \frac{1}{2}\,\partial_\phi\,\alpha)\,\partial_{\bar{\phi}}\,\phi + \frac{1}{2}\,\partial_{\bar{\phi}}\,\alpha. && (4.16)
\end{aligned}
$$

En la última igualdad hemos usado el hecho de que $\partial_\phi l_a = m_a$. Finalmente, usando la Ec. (4.14), la Ec. (4.16) se reduce a

$$\frac{d\bar{u}}{d\bar{\phi}} = \frac{1}{2}\partial_{\bar{\phi}}\alpha(\phi(x^a,\bar{\phi}),\bar{\phi}). \tag{4.17}$$

Un cálculo similar muestra que

$$\frac{d^2\bar{u}}{d\bar{\phi}^2} = \frac{1}{2}(\partial^2_{\phi\bar{\phi}}\alpha)\,\partial_{\bar{\phi}}\phi + \partial^2_{\bar{\phi}\bar{\phi}}\alpha. \tag{4.18}$$

Tomando la derivada total con respecto a $\bar{\phi}$ a la Ec. (4.14) se obtiene que

$$\partial_{\bar{\phi}}\phi = \frac{-\partial^2_{\phi\bar{\phi}}\alpha}{J}, \tag{4.19}$$

donde

$$J = 2x^a n_a + \partial^2_{\phi\phi}\alpha. \tag{4.20}$$

Por tanto, usando la Ec. (4.19) se encuentra que

$$\frac{d^2\bar{u}}{d\bar{\phi}^2} = \frac{\partial^2_{\bar{\phi}\bar{\phi}}\alpha}{2} - \frac{(\partial^2_{\phi\bar{\phi}}\alpha)^2}{2J}. \tag{4.21}$$

En forma similar, usando las Ecs. (4.14), (4.19)-(4.21), se puede mostrar que

$$\begin{aligned}\frac{d^3\bar{u}}{d\bar{\phi}^3} = {} & \frac{1}{2}\partial^3_{\bar{\phi}\bar{\phi}\bar{\phi}}\alpha - \frac{5}{2J}(\partial^2_{\phi\bar{\phi}}\alpha)(\partial^3_{\bar{\phi}\bar{\phi}\phi}\alpha) + \frac{3}{J^2}(\partial^2_{\phi\bar{\phi}}\alpha)^2(\partial^3_{\phi\phi\bar{\phi}}\alpha) \\ & - \frac{1}{J^3}\left[(\partial^2_{\phi\bar{\phi}}\alpha)^2(\partial_{\phi}\alpha)(\partial^2_{\phi\bar{\phi}}\alpha) + (\partial^3_{\phi\phi\phi}\alpha)(\partial^2_{\phi\bar{\phi}}\alpha)^3\right].\end{aligned} \tag{4.22}$$

Para encontrar la familia de ecuaciones diferenciales ordinarias de tercer orden asociadas con $\bar{u}(x^a,\bar{\phi})$, dada por la Ec.(4.15), debemos de resolver las Ecs. (4.15), (4.17) y (4.21) para t, x y y; y sustituirlas en el miembro derecho de la Ec.(4.22). Haciendo esto, se obtiene que

$$\frac{d^3\bar{u}}{d\bar{\phi}^3} = F\left(\bar{\phi},\bar{u},\frac{d\bar{u}}{d\bar{\phi}},\frac{d^2\bar{u}}{d\bar{\phi}^2}\right). \tag{4.23}$$

Para el caso general dado por las Ecs. (4.1)-(4.3) se encuentra que

$$\frac{d\bar{u}}{d\bar{\phi}} = V_{\bar{\phi}}, \tag{4.24}$$

$$\frac{d^2\bar{u}}{d\bar{\phi}^2} = V_{\bar{\phi}\bar{\phi}} - \left(\frac{d^2V}{d\phi^2}\right)^{-1}\left(\frac{dV_{\bar{\phi}}}{d\phi}\right)^2, \tag{4.25}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^3\bar{u}}{d\bar{\phi}^3} = {} & V_{\bar{\phi}\bar{\phi}\bar{\phi}} - 3\left(\frac{d^2V}{d\phi^2}\right)^{-1}\left(\frac{dV_{\bar{\phi}\bar{\phi}}}{d\phi}\right)\left(\frac{dV_{\bar{\phi}}}{d\phi}\right) \\ & + 3\left(\frac{d^2V}{d\phi^2}\right)^{-2}\left(\frac{dV_{\bar{\phi}}}{d\phi}\right)^2\left(\frac{d^2V_{\bar{\phi}}}{d\phi^2}\right) \\ & - \left(\frac{d^2V}{d\phi^2}\right)^{-3}\left(\frac{dV_{\bar{\phi}}}{d\phi}\right)^3\left(\frac{d^3V}{d\phi^3}\right),\end{aligned} \tag{4.26}$$

donde $V_{\bar{\phi}} = \partial_{\bar{\phi}} V$ y

$$\frac{dV}{d\phi} = V_\phi + V_u \partial_\phi u = V_\phi + V_u x^a\, m_a. \tag{4.27}$$

En este caso la familia de ecuaciones diferenciales de tercer orden asociadas con la familia de soluciones de la ecuación iconal en el espacio-tiempo de Minkowski dada por la Ec. (4.3) se obtiene resolviendo las Ecs. (4.3), (4.24) y (4.25) para t, x, y y. Posteriormente, estas soluciones se sustituyen en el miembro derecho la Ec. (4.26). Haciendo esto, se obtiene que

$$\frac{d^3\bar{u}}{d\bar{\phi}^3} = G\left(\bar{\phi}, \bar{u}, \frac{d\bar{u}}{d\bar{\phi}}, \frac{d^2\bar{u}}{d\bar{\phi}^2}\right). \tag{4.28}$$

De esta manera se puede obtener la familia de ecuaciones diferenciales ordinarias de tercer orden asociadas con familias de soluciones de la ecuacion iconal en el espacio-tiempo de Minkowski tales que las coordenasdas, x^a, del espacio-tiempo aparecen como constantes de integración. Para clarificar lo antes expuesto presentaremos el siguiente ejemplo: Sea

$$\bar{u} = V(u, \phi, \bar{\phi}) = \frac{u}{\operatorname{sen}\phi} - \frac{\bar{\phi}\cot\phi}{\sqrt{2}}, \tag{4.29}$$

donde u está dada por la Ec. (4.4). La condición (4.2), en este caso, se reduce a

$$\frac{d\bar{u}}{d\phi} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{t\cos\phi}{\operatorname{sen}^2\phi} + \frac{x}{\operatorname{sen}^2\phi} + \frac{\bar{\phi}}{\operatorname{sen}^2\phi}\right) = 0, \tag{4.30}$$

la cual es equivalente a

$$-t\cos\phi + x + \bar{\phi} = 0. \tag{4.31}$$

De esta última ecuación se obtiene que

$$\cos\phi = \frac{x+\bar{\phi}}{t}, \tag{4.32}$$

$$\operatorname{sen}\phi = \pm\sqrt{1 - \left(\frac{x+\bar{\phi}}{t}\right)^2}. \tag{4.33}$$

Tomando el signo (+) en la Ec. (4.33) y sustituyéndola, al igual que las Ecs. (4.4) y (4.32), en la Ec. (4.29), obtenemos una rama de la nueva familia de soluciones de la ecuación iconal dada por:

$$\bar{u}(x_a, \bar{\phi}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{t}{\sqrt{1-\left(\frac{x+\bar{\phi}}{t}\right)^2}} - x\frac{\frac{x+\bar{\phi}}{t}}{\sqrt{1-\left(\frac{x+\bar{\phi}}{t}\right)^2}} - y\right] - \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\phi}\left[\frac{\frac{x+\bar{\phi}}{t}}{\sqrt{1-\left(\frac{x+\bar{\phi}}{t}\right)^2}}\right], \tag{4.34}$$

o, implícitamente por

$$t^2 - (x+\bar{\phi})^2 - (y + \sqrt{2}\,\bar{u})^2 = 0. \tag{4.35}$$

Al tomar el signo $(-)$ en la Ec. (4.33) obtenemos que la otra rama de la nueva familia de soluciones también está dada implícitamente por la Ec. (4.35). La Ec. (4.35) representa el cono de luz del punto en el espacio-tiempo con coordenadas $(0, -\bar{\phi}, -\sqrt{2\bar{u}})$.

Un cálculo directo muestra que en este caso $\bar{u}(\bar{\phi})$ dada por la Ec. (4.34) satisface la siguiente ecuación diferencial ordinaria de tercer orden:

$$\frac{d^3\bar{u}}{d\bar{\phi}^3} = F\left(\bar{\phi}, \bar{u}, \frac{d\bar{u}}{d\bar{\phi}}, \frac{d^2\bar{u}}{d\bar{\phi}^2}\right) = 6\,\frac{\frac{d\bar{u}}{d\bar{\phi}}\left(\frac{d^2\bar{u}}{d\bar{\phi}^2}\right)^2}{1+2\left(\frac{d\bar{u}}{d\bar{\phi}}\right)^2}. \tag{4.36}$$

Para concluir este capítulo obtendremos la metrica conforme asociada a la Ec. (4.13). Para este fin, seguiremos el procedimiento descrito en la introducción. En este caso

$$\theta^1 = \partial_a u dx^a = l_a dx^a, \tag{4.37}$$

$$\theta^2 = \partial_a u' dx^a = m_a dx^a, \tag{4.38}$$

$$\theta^3 = \partial_a u'' dx^a = n_a dx^a, \tag{4.39}$$

$$\tag{4.40}$$

mientra que $a =$ y $b =$. De esto se tiene que

$$\omega^1 = l_a dx^a, \tag{4.41}$$

$$\omega^2 = m_a dx^a, \tag{4.42}$$

$$\omega^3 = n_a dx^a + \frac{1}{2} l_a dx^a. \tag{4.43}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} g &= \omega^1 \otimes \omega^3 + \omega^3 \otimes \omega^1 - \omega^2 \otimes \omega^2 \\ &= l_a dx^a \otimes (n_b dx^b + \frac{1}{2} l_b dx^b) + (n_a dx^a + \frac{1}{2} l_a dx^a) \otimes l_b dx^b - (m_a dx^a \otimes m_b dx^b) \\ &= (l_a n_b + l_a l_b + n_a l_b - m_a m_b) dx^a \otimes dx^b \\ &= g_{ab} dx^a \otimes dx^b, \end{aligned} \tag{4.44}$$

donde

$$g_{ab} = (l_a n_b + l_a l_b + n_a l_b - m_a m_b). \tag{4.45}$$

Usando las Ecs. (3.6)-(3.8) se encuentra que

$$(g_{ab}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\eta_{ab}).$$

Por tanto, la métrica asociada con la Ec. (4.12) está dada por

$$ds^2 = \frac{1}{2}\eta_{ab}dx^a dx^b = \frac{1}{2}(dt^2 - dx^2 - dy^2). \tag{4.46}$$

Conclusiones

Las contribuciones de este trabajo son las siguientes: a) en el capítulo dos, se ha presentado una deducción detallada de la función que describe la intersección del cono de luz de un punto arbitrario del espacio-tiempo tridimensional de Minkowski con I^+. De esta manera hemos completado la deducción de esta función reporatada en la referencia []; b) en el capítulo tres hemos descrito como dada ésta función, la cual describe una familia de soluciones de la ecuación iconal en el espacio-tiempo tridimensional de Minkowski, se pueden obtener nuevas familias de superficies nulas con singularidades y se han presentado ejemplos y finalmente c) en el capítulo cuatro hemos descrito como obtener las ecuaciones diferenciales ordinarias de tercer orden asociadas con estas familias de superficies nulas. Es importante remarcar que estos resultados son muy modestos; sin embargo, aqui se describe en detalle el procedimiento que se tiene que seguir para cualquier espacio-tiempo.

Bibliografía

1 S. Frittelli, C. Kozameh and E. T. Newman, *Commun. Math. Phys.* **223** (2001) 383-408.
2 S. Frittelli, N. Kamran and E. T. Newman, *J. Math. Phys.* **36** (1995) 4984.
3 S. Frittelli, C. Kozameh and E. T. Newman, *J. Math. Phys.* **36** (1995) 4975.
4 S. Frittelli, C. Kozameh and E. T. Newman, *J. Math. Phys.* **36** (1995) 4984.
5 S. Frittelli, C. Kozameh and E. T. Newman, *J. Math. Phys.* **36** (1995) 5005.

6 M. Tinamoto *O*n the Null Surface Formulation *gr-qc/9703003*
7 D. Forni, M. Iriondo and C. Kozameh *J. Math. Phys.* **41** (2000) 5517.
8 E. Cartan, *C. R. Acad. Sci.* **206** (1938) 1425.
9 E. Cartan *Rev. Mat. Hispano-Amer.* **4** (1941) 1.
10 E. Cartan, *Ann. Sc. Ec. Norm. Sup., 3e serie* **60** (1943) 1.
11 S-S. Chern , *Selected Papers, Springer-Verlag* (1978), origonal (1940).
12 Peter J. O. Olver, *Equivalence, Invariants and Symmetry* Cambridge University Press, (1995).
13 V. I. Arnold, *Catastrophe Theory* (Springer, Berlin, 1986).
14 V. I. Arnold, S. M. Gusein-Zade, A. N. Varchencko, *Singularities of Diflerentiable Maps* (Birkhauser, Boston, 1985), Vol. I.
15 V. I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics* (Springer, Berlin, 1980).
16 T. P. Kling and E. T. Newman, *Phys. Rev. D* **59** (1999) 124002.
17 Gilberto Silva-OIrtigoza, *General Relativity and Gravitation* **32** (2000) 2243.
18 S. Frittelli, E. T. Newman and G. Silva-Ortigoza, *J. Math. Phys.* **40** (1999) 383.
19 V. I. Arnold *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Diflerential Equations* (Springer, Berlin, 1983).