



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

Obtención de las relaciones de
incertidumbre mediante el cálculo de
la entropía de Shannon.

Tesis Presentada al

Colegio de Física

como requisito para la obtención del grado de

Licenciado en Física

por

Daniel Alberto Patiño Villagómez

asesorado por

Dr. Luis Manuel Arévalo Aguillar

Puebla, Pue.

Junio 2017

Obtención de las relaciones de incertidumbre mediante el cálculo de la entropía de Shannon.

Tesis

Daniel Alberto Patiño Villagómez
Luis Manuel Arévalo Aguilar



*Con amor para mis mejores maestros,
mis padres.*

Agradecimientos

Este trabajo realizado en la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla es un esfuerzo en el cual, directa e indirectamente, participaron distintas personas, opinando, corrigiendo, dando animo, apoyando, teniendo paciencia, acompañando en momentos de crisis y felicidad.

En primer lugar a mi asesor de tesis, Dr. Luis Manuel Arevalo, a quien agradezco por su gran paciencia, su dirección y apoyo en la elaboración de esta tesis. Especialmente por despertar mi curiosidad en lo maravilloso y desconocido de la cuántica.

A mi tutora, Dr Martha Palomino, quien siempre me ayudo y guió ante cualquier duda en la toma de decisiones y en la realización de tramites; pero especialmente por sus consejos, paciencia, apoyo y ánimos que me brindo durante mi estancia en esta institución.

A todos mis amigos y compañeros, que sin importar donde están les agradezco por compartir juntos aquellas horas de trabajo en clase, laboratorios, bibliotecas y en especial por aquellos incontables momentos del cafe en los que hubo desde silencios incomodos hasta excelentes momentos en los que nadie paraba de carcajear, lo cual no tiene igual. Por el tiempo compartido, por todas aquellas conversaciones banales y científicas, por los buenos y malos momentos, por escucharme y soportar mi ser. Dándonos ánimos y siempre cuidándonos el uno a los otros. A todos gracias

Muy agradecido estoy de Ada, Beto, Chetes, Chachapa, Cuello, Eli, Isa, Juan, Marco, Mafias, Mish, Mauro, Mon, Negro, Omar, Pablo, Richi, Roy, Roboc, Tacho, SkyNet , Zule y los que faltan, pues ellos hicieron que todo me pareciera mas natural, que el paso del tiempo y mi estancia fuera agradable. Especialmente a Eli, Marco y Roy, quienes son como mi familia.

Por supuesto que todo esto, lo que soy y sere, no seria posible sin el amor, apoyo y cariño de mis padres y hermanos, quienes, de forma incondicional entendieron mis faltas, malos momentos y a pesar de la distancia siempre los tuve a mi lado. Las palabras nunca serían suficientes para expresar mi aprecio, amor y agradecimiento hacia ellos.

A todos ustedes, gracias!

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Estructura de la tesis	1
1.2. Nota Historica	2
1.3. Quantum Bits	10
1.3.1. Bits cuánticos	10
2. Herramientas Matemáticas	13
2.1. Espacio de Hilbert	13
2.2. Notación de Dirac	15
2.3. Operadores	16
2.3.1. Propiedades Generales	16
2.3.2. Vectores y Matrices	18
2.3.3. Eigenvalores y eigenvectores	19
2.3.4. Operador traza	20
2.3.5. Operador Hermitiano	21
2.3.6. Conmutador y Anticonmutador	22
2.3.7. Operador Unitario	22

3. Entropía e información	23
3.1. Entropía e información	23
3.1.1. Entropía	23
3.1.2. Entropía union y Entropía Condicional	24
3.1.3. Entropía de Relativa e Información Mutua	25
3.1.4. Relación entre entropía e información	26
4. Breve descripción clásica de la polarización	29
4.1. Polarización	29
4.1.1. Vector de Polarización	29
4.1.2. Polarización Lineal	31
4.1.3. Polarización circular	31
4.1.4. Polarización Elíptica	32
5. Postulados de la Mecánica Cuántica	33
5.1. Introducción	33
5.2. Estado de un Sistema Cuántico	35
5.2.1. Vector de estado	35
5.2.2. Estado base	35
5.2.3. Otros estados polarizados	37
5.2.4. Interpretación física del estado	39
5.2.5. Estados con amplitudes complejas	40
5.2.6. Interferencia	42
5.3. Operadores	43

5.3.1. Operadores	43
5.3.2. Operador de Rotación	44
5.3.3. Operador Adjunto	44
5.3.4. Operadores Unitarios	45
5.3.5. Operador Proyección	46
5.4. Medición	46
5.4.1. Qué es una medición?	47
5.4.2. Mediciones Cuánticas	48
5.4.3. Mediciones Proyectivas	48
5.4.4. Medición de Polarización	50
5.4.5. Operadores y mediciones	51
5.5. Evolución de un Sistema Cuántico	51
5.5.1. Operador de evolución	51
5.6. Principio de Incertidumbre de Heisenberg.	53
5.6.1. Principio de incertidumbre de Heisenberg	53
5.6.2. Relaciones de Incertidumbre	54
6. POVM	57
6.1. POVM's	57
6.2. Operador densidad	58
6.2.1. Conjunto de estados	59
6.3. Reformulación de los postulados	60
7. Implementación y Cálculos	63

7.1. Implementación	63
7.1.1. Qubit fotónico	63
7.1.2. Implementación del POVM	64
7.2. Cálculos	65
7.2.1. Relaciones de Incertidumbre	65
7.2.2. Pruebas de la implementación	70
7.3. Resultados y Conclusiones	75

Resumen

El operador positivo de medición evaluada (POVM) por sus siglas del inglés, positive/probability operator valued measure, resulta muy útil en múltiples aplicaciones de la cuántica. El POVM es un conjunto positivo de operadores Hermitianos que suman uno. Gracias a la reformulación de los postulados de la mecánica cuántica, la probabilidad de que un sistema se encuentre en un estado está dada por el valor esperado del operador POVM correspondiente a ese estado, que es representado por la matriz de densidad ρ . El uso de un POVM genera cierta incertidumbre en los resultados de la medición del sistema el cual puede ser determinado por medio de las relaciones de incertidumbre de Heisenberg o mediante el cálculo de la entropía de Shannon de los resultados del POVM. Se presenta una implementación de un POVM con elementos ópticos.

Capítulo 1

Introducción

La intención de este capítulo introductorio es mencionar la estructura de los temas abarcados por esta tesis, mostrar la perspectiva general sobre cómo se ha desarrollado la mecánica cuántica a través de la historia y presentar brevemente uno de los conceptos principales, el qubit.

1.1. Estructura de la tesis

El énfasis de este primer capítulo introductorio está en dar el panorama general, con los detalles para ser enriquecidos en los capítulos posteriores.

El trabajo inicia en la Sección 1.2 con la reseña histórica en el que se ha desarrollado la mecánica cuántica, así como la computación cuántica y la información cuántica. La sección restante de este capítulo ofrece una breve introducción a uno de los conceptos fundamentales del campo: bits cuánticos (Sección 1.3).

A lo largo de la introducción, se mencionan algunos conceptos matemáticos básicos, que serán explicados con más detalle en capítulos posteriores tales como los qubits y matrices de estados. Primero se da información más detallada de los conceptos matemáticos necesarios para el desarrollo de la mecánica cuántica en el capítulo 2; en el capítulo 4 se presenta una breve descripción clásica de la polarización; mientras que en el capítulo 5 la polarización es vista desde el punto de vista de la cuántica presentando simultáneamente los postulados

de la mecánica cuántica así como el principio de incertidumbre; profundizando más, en el capítulo 6 se introduce la matriz de densidad y se presenta una reformulación de los postulados en términos de ésta; en el capítulo 3 se definen los conceptos de entropía e información y se muestran algunas relaciones importantes entre estos; en el capítulo 7.2 se aplican los conceptos presentados en este trabajo y se implementan en un arreglo experimental realizado por Brandt en [13], aquí se realiza el cálculo de la relación de incertidumbre para las mediciones de esta implementación; finalmente en el capítulo 7.2.2 se hace una comparación entre ambos resultados, así como un breve análisis y el posible trabajo a futuro en el área

1.2. Nota Historica

En esta sección revisaremos brevemente como han ido evolucionando nuestras ideas sobre el fotón y en general como surgió la mecánica, computación e información cuántica[1][2][4].

Antiguamente ya se trataba de explicar la naturaleza de la luz mediante rayos. Para el siglo XVII los conceptos de onda y cuerpo son bien establecidos. Posteriormente, Maxwell, en la segunda mitad del siglo XIX, dejó los fundamentos de la teoría moderna de campos, con una explicación detallada de la luz como ondas electromagnéticas.

A finales del siglo XIX, la física consistió esencialmente en la mecánica clásica, la teoría del electromagnetismo y la termodinámica. La mecánica clásica se utilizó para predecir la dinámica de los cuerpos materiales, y el electromagnetismo de Maxwell proporcionó el marco adecuado para estudiar la radiación; materia y radiación se describieron en términos de partículas y ondas, respectivamente. En cuanto a las interacciones entre la materia y la radiación, fueron bien explicadas por la fuerza de Lorentz o por la termodinámica. El éxito de la física clásica (del electromagnetismo y la termodinámica) hizo creer que la última descripción de la naturaleza había sido alcanzada. Parecía que todos los fenómenos físicos conocidos podían explicarse en el marco de las teorías generales de la materia y la radiación. Sin embargo, a comienzos del siglo XX, la física clásica, que había sido imposible de clasificar, se vio seriamente cuestionada en dos grandes frentes:

Dominio relativista: La teoría de la relatividad de Einstein de 1905 mostró que la validez de la mecánica newtoniana cesa a velocidades muy altas.

Dominio microscópico: Tan pronto como se desarrollaron nuevas técnicas experimentales hasta el punto de explorar estructuras atómicas y subatómicas, resultó que la física clásica falla al proporcionar la explicación adecuada de varios fenómenos. Por lo tanto, se hizo evidente que la validez de la física clásica no funcionaba a nivel microscópico y que se debían invocar nuevos conceptos para describir, por ejemplo, la estructura de átomos y moléculas y cómo la luz interactúa con ellos, fenómenos que dieron la entrada a la cuántica.

El primer gran avance se produjo en 1900 cuando Max Planck introdujo el concepto de cuanto de energía. En sus esfuerzos por explicar el fenómeno de la radiación de cuerpo negro, logró reproducir los resultados experimentales sólo después de postular que el intercambio de energía entre la radiación y su entorno tiene lugar en cantidades discretas o cuantificadas. Argumentó que el intercambio de energía entre una onda electromagnética de frecuencia ν y materia ocurre sólo en múltiplos enteros de $h\nu$, a los que llamó la energía de un cuanto, donde h es una constante fundamental llamada constante de Planck. La cuantificación de la radiación electromagnética resultó ser una idea con consecuencias de largo alcance.

La idea de Planck, que dio una explicación exacta de la radiación del cuerpo negro, provocó nuevos pensamientos y desencadenó una avalancha de nuevos descubrimientos que dieron soluciones a los problemas más destacados de la época.

En 1905, Einstein proporcionó una poderosa consolidación al concepto cuántico de Planck. Al tratar de entender el efecto fotoeléctrico, Einstein reconoció que la idea de Planck de cuantificar las ondas electromagnéticas debe ser válida también para la luz. Así, siguiendo el enfoque de Planck, él postuló que la luz misma está hecha de cuantos de energía discretos (o partículas minúsculas), llamados fotones, cada uno de energía $h\nu$. La introducción del concepto de fotones permitió a Einstein dar una explicación elegantemente precisa al problema fotoeléctrico, que había estado esperando una solución desde su primera observación experimental por Hertz en 1887.

Otro gran avance fue debido a Niels Bohr. Justo después del descubrimiento

experimental de Rutherford del núcleo atómico en 1911, y combinando el modelo atómico de Rutherford, el concepto cuántico de Planck y los fotones de Einstein, Bohr introdujo en 1913 su modelo del átomo de hidrógeno.

En 1913 Bohr aplicó las ideas de la cuántica para predecir posiciones de líneas espectrales atómicas.

Luego en 1923 Compton hizo un descubrimiento importante que dio la confirmación más concluyente para el aspecto corpuscular de la luz. Al dispersar los rayos X con electrones, confirmó que los fotones de rayos X se comportan como partículas con momento hc .

De Broglie introdujo en 1923 otro poderoso concepto nuevo que la física clásica no podía conciliar: postulaba que no sólo la radiación exhibe un comportamiento similar a una partícula, sino que, a la inversa, las partículas materiales mismas muestran la onda como el comportamiento. Este concepto fue confirmado experimentalmente en 1927 por Davisson y Germer; mostraron que los patrones de interferencia, una propiedad de las ondas, se pueden obtener con partículas materiales como los electrones.

De Broglie generalizó lo que sabíamos acerca de los cuantos de luz, exhibiendo las propiedades de las ondas y las partículas.

Fue la insatisfacción con la naturaleza arbitraria de la idea de Planck y los postulados de Bohr, así como la necesidad de encajarlos en el contexto de una teoría coherente que había llevado a Heisenberg y Schrödinger a buscar los fundamentos teóricos subyacentes a estas nuevas ideas. Hacia 1925 sus esfuerzos valieron la pena: consolidaron hábilmente los diversos hallazgos experimentales, así como los postulados de Bohr, en una nueva y refinada teoría: la mecánica cuántica.

Heisenberg, Schrödinger y Dirac sentaron las bases de la mecánica cuántica en un período realmente corto (de 1925 a 1926). Dieron la maquinaria que actualmente se utiliza: representaciones, evolución del estado cuántico, transformaciones unitarias, teoría de la perturbación, etc.

Históricamente, había dos formulaciones independientes de la mecánica cuántica. La primera formulación, llamada mecánica de la matriz, fue desarrollada por Heisenberg

(1925) para describir la estructura atómica a partir de las líneas espectrales observadas. Inspirado en la cuantificación de las ondas de Planck y en el modelo de hidrógeno de Bohr.

La segunda formulación, llamada mecánica ondulatoria, se debió a Schrödinger (1926); es una generalización del postulado De Broglie. Este método, más intuitivo que la mecánica de la matriz, describe la dinámica de la materia microscópica por medio de una ecuación de onda, llamada ecuación de Schrödinger; en lugar del problema del eigenvalor de la matriz de Heisenberg, Schrödinger obtuvo una ecuación diferencial. Las soluciones de esta ecuación proporcionan el espectro de energía y la función de onda del sistema considerado.

Estas dos formulaciones diferentes la formulación de la onda de Schrödinger y el enfoque matricial de Heisenberg se mostraron equivalentes.

No fue hasta 1926, que el cuanto de luz acuñó el nombre de fotón, tras ser propuesto por Gilbert Lewis.

En 1927, Max Born propuso su interpretación probabilística de la mecánica ondulatoria: tomó los módulos cuadrados de las funciones de onda que son soluciones a la ecuación de Schrödinger y las interpretó como densidades de probabilidad que permitían un tratamiento completamente cuántico de la interferencia.

Fermi y Dirac, pioneros de la mecánica cuántica, también fueron los primeros en abordar la pregunta de cómo la luz cuantizada interactúa con las fuentes atómicas y cómo se propaga. Dirac sugirió entonces una formulación más general de la mecánica cuántica que se ocupa de objetos abstractos tales como kets (vectores de estado), bras y operadores.

Combinando la relatividad especial con la mecánica cuántica, Dirac derivó en 1928 una ecuación que describe el movimiento de los electrones. Esta ecuación, conocida como la ecuación de Dirac, predijo la existencia de una antipartícula, el positrón, que tiene propiedades similares, pero carga opuesta, con el electrón; El positrón fue descubierto en 1932, cuatro años después de su predicción por la mecánica cuántica.

Los láseres sintonizables se pusieron a disposición a principios de los años setenta, y el láser de color en particular transformó los estudios de precisión en óptica cuántica y espectroscopia láser.

Durante la década de 1970, varios experimentos exploraron la naturaleza de los fotones:

su indivisibilidad y la acumulación de interferencias en el nivel de fotón único.

El enfriamiento por láser se desarrolló rápidamente en los años ochenta y noventa y permitió la preparación de estados de materia bajo un control preciso.

Hasta la década de 1980, esencialmente todos los campos de luz investigados tenían ruido independiente de la fase; esto cambió con la producción de fuentes de luz comprimida con ruido sensible a la fase. Estas fuentes de luz comprimida nos permitieron investigar las relaciones de incertidumbre de Heisenberg para los campos de luz.

Cambemos nuestra atención de la mecánica cuántica a la informática. Los orígenes de la informática se pierden en las profundidades de la historia. Por ejemplo, las tabletas cuneiformes indican que en tiempos de Hammurabi (alrededor del año 1750 a. C.) los babilonios habían desarrollado algunas ideas algorítmicas bastante sofisticadas, y es probable que muchas de esas ideas daten hasta épocas anteriores.

La incarnación moderna de la informática fue anunciada por el gran matemático Alan Turing en un notable artículo de 1936. Turing desarrolló en detalle una noción abstracta de lo que ahora llamaríamos una computadora programable, un modelo para la computación ahora conocido como la máquina de Turing, en su honor. Turing demostró que existe una máquina universal de Turing que se puede utilizar para simular cualquier otra máquina de Turing. Además, afirmó que la máquina universal de Turing captura completamente lo que significa realizar una tarea por medios algorítmicos. Es decir, si un algoritmo puede ser realizado en cualquier pieza de hardware (por ejemplo, una computadora personal moderna), entonces hay un algoritmo equivalente para una máquina de Turing universal que realiza exactamente la misma tarea que el algoritmo que se ejecuta en el ordenador personal.

Esta afirmación, conocida como la tesis de Church-Turing en honor de Turing y otro pionero de la informática, Alonzo Church, afirma la equivalencia entre el concepto físico de qué clase de algoritmos se puede realizar en algún dispositivo físico con el concepto matemático riguroso de un Máquina universal de Turing. La amplia aceptación de esta tesis sentó las bases para el desarrollo de una rica teoría de la informática.

El teorema de no-clonación, descubierto a principios de los 80, es uno de los primeros resultados de la computación cuántica y la información cuántica.

En los años de los ochenta, Feynman, Benioff, Deutsch, Jozsa, Bennett, Ekert y otros desarrollan nuevos conceptos fundamentales en el procesamiento de la información que conducen a la criptografía cuántica y a la computación cuántica. En lugar de utilizar bits clásicos que pueden representar los valores 0 o 1, la unidad básica de un ordenador cuántico es un sistema cuántico de dos niveles (qubit) que puede existir en superposiciones coherentes de los valores lógicos 0 y 1. Un conjunto de N qubits pueden entonces estar en una superposición de hasta 2^N estados diferentes, cada uno representando un número binario. Si pudiéramos controlar y manipular, digamos 1500 qubits, podríamos tener acceso a más estados que partículas en el universo visible

El uso de las superposiciones y el enredamiento de la mecánica cuántica da lugar a un alto grado de paralelismo, que puede aumentar la velocidad de la computación exponencial. Una serie de problemas que no pueden abordarse de manera factible en una computadora clásica puede ser resuelto eficientemente en una computadora cuántica.

En 1985, David Deutsch se preguntó si las leyes de la física podrían utilizarse para obtener una versión aún más fuerte de la tesis de Turing. En lugar de adoptar hipótesis ad hoc, Deutsch miró a la teoría física para proporcionar una base para la tesis de Church-Turing que sería tan segura como el estatus de esa teoría física. En particular, Deutsch intentó definir un dispositivo computacional que sería capaz de simular eficientemente un sistema físico arbitrario. Debido a que las leyes de la física son en última instancia mecánica cuántica, Deutsch fue llevado naturalmente a considerar los dispositivos de computación basados en los principios de la mecánica cuántica. Estos dispositivos, análogos cuánticos de las máquinas definidas cuarenta y nueve años antes por Turing, condujeron finalmente a la concepción moderna de una computadora cuántica.

Lo que el modelo de Deutsch de una computadora cuántica permitió fue un desafío a la forma fuerte de la tesis de Church-Turing. Deutsch preguntó si es posible que una computadora cuántica resuelva eficientemente problemas computacionales que no tienen solución eficiente en una computadora clásica, incluso una máquina probabilística de Turing. él entonces construyó un ejemplo simple que sugiere que, de hecho, los ordenadores cuánticos podrían tener poderes computacionales que exceden los de las computadoras clásicas.

Este notable primer paso adoptado por Deutsch fue mejorado en la década posterior por muchas personas, culminando en la demostración de 1994 de Peter Shor de que dos problemas enormemente importantes -el problema de encontrar los factores primos de un entero y el llamado problema del "logaritmo discreto podría ser resuelto eficientemente en un ordenador cuántico. Esto atrajo un gran interés porque estos dos problemas fueron y todavía se cree que no tienen una solución eficiente en una computadora clásica.

Los resultados de Shor son una indicación poderosa de que los ordenadores cuánticos son más potentes que las máquinas de Turing, incluso las máquinas Turing probabilísticas.

Otra evidencia del poder de los ordenadores cuánticos vino en 1995 cuando Lov Grover mostró que otro problema importante -el problema de realizar una búsqueda a través de algún espacio de búsqueda no estructurado- también podría acelerarse en un ordenador cuántico. Mientras que el algoritmo de Grover no proporcionó una velocidad tan espectacular como los algoritmos de Shor, la amplia aplicación de metodologías basadas en la búsqueda ha despertado un interés considerable en el algoritmo de Grover.

Aproximadamente al mismo tiempo que los algoritmos de Shor y Grover fueron descubiertos, muchas personas estaban desarrollando una idea que Richard Feynman había sugerido en 1982. Feynman había señalado que parecía haber dificultades esenciales en la simulación de sistemas mecánicos cuánticos en ordenadores clásicos y sugirió que construir computadoras basadas en los principios de la mecánica cuántica nos permitiría evitar esas dificultades.

En la década de 1990 varios equipos de investigadores comenzaron a sacar esta idea, mostrando que es posible utilizar computadoras cuánticas para simular eficientemente sistemas que no tienen una simulación eficiente conocida en una computadora clásica.

Posteriormente, se han propuesto posibles realizaciones experimentales de un ordenador cuántico, por ejemplo en trampas de iones lineales y esquemas de resonancia magnética nuclear. Actualmente se está en una etapa en la que se han demostrado puertas cuánticas en estas dos implementaciones.

La computación cuántica está estrechamente relacionada con la criptografía cuántica y la comunicación cuántica. La trampa de iones lineales es uno de los sistemas más prometedores para la computación cuántica.

Habiendo llegado a la frontera de la computación cuántica, cambiemos a la teoría de la información. Al mismo tiempo que la informática estaba explotando en la década de 1940, otra revolución estaba teniendo lugar en nuestra comprensión de la comunicación. En 1948 Claude Shannon publicó un notable par de artículos sentando las bases de la moderna teoría de la información y la comunicación.

Tal vez el paso clave que tomó Shannon fue definir matemáticamente el concepto de información.

En 1995, Ben Schumacher proporcionó un análogo al teorema de codificación de Shannon, y en el proceso definió el 'bit cuántico' o 'qubit' como un recurso físico tangible.

Finalmente pasando a la criptografía. En términos generales, la criptografía es el problema de hacer comunicación o computación que involucra a dos o más partes que pueden no confiar unas en otras.

El entrelazamiento es un recurso exclusivamente mecánico cuántico que desempeña un papel clave en muchas de las aplicaciones más interesantes de la computación cuántica y la información cuántica.

Los estados entrelazados son el ingrediente clave para ciertas formas de criptografía cuántica y para la teletransportación cuántica. El entrelazamiento también es responsable de la potencia de la computación cuántica.

Las primeras ideas criptográficas cuánticas fueron propuestas por Stephen Wiesner a finales de la década de 1960, pero lamentablemente no fueron aceptadas para su publicación. En 1984 Charles Bennett y Gilles Brassard, basándose en el trabajo anterior de Wiesner, propusieron un protocolo usando la mecánica cuántica para distribuir las claves entre los extremos de un canal(Alice y Bob), sin posibilidad de compromiso alguno.

1.3. Quantum Bits

1.3.1. Bits cuánticos

El bit es el concepto fundamental de la computación clásica y la información clásica. La computación cuántica y la información cuántica se basan en un concepto análogo, el bit cuántico, o qubit (por su nombre en inglés quantum bit) para abreviar. En esta sección presentamos brevemente algunas de las propiedades de los qubits simples, comparando y contrastando sus propiedades con las de los bits clásicos.

Los qubits son objetos matemáticos abstractos. La importancia de tratar qubits como entidades abstractas es que nos da la libertad de construir una teoría general de computación cuántica e información cuántica que no depende de un sistema específico para su realización.

Así como un bit clásico tiene un estado 0 o 1 un qubit también tiene un estado. Dos estados posibles para un qubit son los estados $|0\rangle$ y $|1\rangle$, que como se podría suponer corresponden a los estados 0 y 1 para un bit clásico. A la notación $| \rangle$ se llama la notación de Dirac, y la veremos más adelante a detalle en el capítulo 2, ya que es la notación estándar para los estados en la mecánica cuántica. La diferencia entre bits y qubits es que un qubit puede estar en un estado distinto de $|0\rangle$ y $|1\rangle$. También es posible formar combinaciones lineales de estados, a menudo llamados superposiciones [6]:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle. \tag{1.1}$$

Los números α y β son números complejos. Dicho de otra manera, el estado de un qubit es un vector en un espacio vectorial complejo bidimensional. Los estados especiales $|0\rangle$ y $|1\rangle$ se conocen como estados de base computacional, y forman una base ortonormal para este espacio vectorial.

En el caso clásico del bit, podemos determinar si su estado es 0 o 1. Por otro lado, no podemos examinar un qubit para determinar su estado cuántico, es decir, los valores de α y β . En cambio, la mecánica cuántica nos dice que sólo podemos adquirir información restringida sobre el estado cuántico. Cuando medimos un qubit obtenemos el

resultado 0, con probabilidad $|\alpha|^2$, o el resultado 1, con probabilidad $|\beta|^2$. Naturalmente, $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, ya que las probabilidades deben sumar la unidad. Geométricamente, esto puede ser interpretado como la condición de que el estado del qubit sea normalizado a la longitud 1. Así, en general, un estado de qubit es un vector unitario en un espacio vectorial complejo bidimensional.

Los estados de qubit pueden ser manipulados y transformados de manera que conduzcan a resultados de medición que dependen claramente de las diferentes propiedades del estado. Por lo tanto, estos estados cuánticos tienen consecuencias reales, verificables experimentalmente, que veremos que son esenciales para el poder de la computación cuántica y la información cuántica.

La capacidad de un qubit para estar en un estado de superposición va en contra de nuestra comprensión del "sentido común" del mundo físico que nos rodea. Un ejemplo clásico es como una moneda: o cara o cruz. Por el contrario, un qubit puede existir en un continuo de estados entre $|0\rangle$ y $|1\rangle$ hasta que sea observado. Cuando se mide un qubit, da probabilísticamente como resultado de la medición "0" o "1".

A pesar de lo raro que esto suene, los qubits son reales, su existencia y comportamiento son validados por experimentos, y muchos sistemas físicos diferentes pueden ser usados para realizar qubits. Para obtener una idea concreta de cómo se puede realizar un qubit, puede ser útil enumerar algunas de las formas en que puede darse esta realización: como las dos polarizaciones diferentes de un fotón (que será visto en capítulo 5); la alineación de un spin nuclear en un campo magnético uniforme; dos estados de un electrón que orbitan un solo átomo.

Una imagen útil en el pensamiento sobre los qubits es la siguiente representación geométrica. Como $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, podemos reescribir la ecuación 1.2 como [6]

$$|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\psi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle, \quad (1.2)$$

Donde θ y ψ son números reales y definen un punto en la esfera tridimensional de la unidad, como se muestra en la figura 1.1. Esta esfera se le llama la esfera de Bloch; proporciona un medio útil para visualizar el estado de un solo qubit. Debe tenerse en

cuenta que esta intuición es limitada porque no existe una generalización simple de la esfera de Bloch conocida por múltiples qubits.

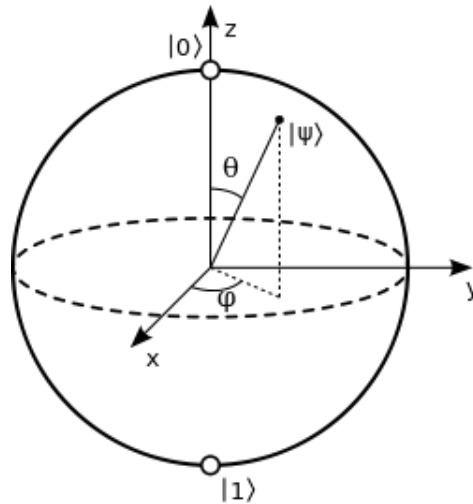


Figura 1.1: Esfera de Bloch

Puesto que hay un número infinito de puntos en la esfera unidad, en principio se podría almacenar una cantidad infinita de información en un qubit, sin embargo, debido al comportamiento de un qubit cuando se observa esto es falso. Además, la medición cambia el estado de un qubit, colapsando su superposición de $|0\rangle$ y $|1\rangle$ al estado específico de acuerdo al resultado de la medición. Por ejemplo, si la medición del estado da 0, entonces el estado post-medición del qubit será $|0\rangle$ y nadie lo sabe por que. Como se mas adelante en el capítulo 5, este comportamiento es simplemente uno de los postulados fundamentales de la mecánica cuántica. Lo que es relevante por ahora es que a partir de una sola medición se obtiene un solo bit de información sobre el estado del qubit, resolviendo así la paradoja aparente. Resulta que sólo si se midieran infinitamente muchos qubits preparados de forma idéntica se podría determinar α y β para un qubit en el estado dado en la ecuación 1.2.

Capítulo 2

Herramientas Matemáticas

La mecánica cuántica es la mas acertada y completa descripción del mundo conocido. Además de ser la base de la computación e información cuántica. En este capítulo se proveen las bases necesarias que principalmente es el álgebra lineal.

En particular, se introduce la notación de Dirac para describir sistemas cuánticos. Muchas áreas de la mecánica cuántica pueden ser descritas sin la necesidad de utilizar la notación de Dirac, y no queda clara su importancia. Sin embargo, en otras areas como la información cuántica, es la notación que se utiliza y su uso se debe a las facilidades que brinda.

La notación de Dirac es utilizada para describir espacios vectoriales abstractos conocidos como espacios de Hilbert, y muchos argumentos acerca de las propiedades de los sistemas cuánticos son en realidad propiedades de los espacios de Hilbert.

En este capítulo no se pretende demostrar los resultados de las propiedades, en cambio en cómo estos son utilizados.

2.1. Espacio de Hilbert

Un espacio de Hilbert es un espacio vectorial abstracto. Este tiene algunas diferencias con los vectores ordinarios[6].

1. Puede tener cualquier numero de dimensiones, incluso infinito
2. Cuando los vectores son multiplicados por números escalares complejos
3. Cuando dos vectores hacen su producto escalar, el resultado de este, depende del orden en que se tomen los vectores, es decir:

$$v \cdot u = (u \cdot v)^* \tag{2.1}$$

donde el asterisco indica complejo conjugado. De lo anterior es fácil deducir que el producto escalar de cualquier vector consigo mismo es real, pues

$$u \cdot u = (u \cdot u)^*. \tag{2.2}$$

De Algebra, la norma de u, $|u| = \sqrt{u \cdot u}$ se puede ver como la longitud de u(magnitud).

Es conveniente describir a los vectores tomando combinaciones lineales de un conjunto de vectores base

$$v = \sum_i \alpha_i u_i \tag{2.3}$$

donde las α_i son coeficientes complejos y las u_i tienen la propiedad de

$$u_i \cdot u_j = \delta_{ij} \tag{2.4}$$

donde δ_{ij} , es la delta de Kronecker. Dicha base se le llama ortonormal. Los coeficientes α_i pueden ser encontrados mediante

$$u_i \cdot v = \alpha_i \tag{2.5}$$

2.2. Notación de Dirac

La esencia de la notación de Dirac es que el estado de un sistema cuántico está completamente descrito por un vector en un espacio de Hilbert asociado a este sistema. La notación hace sencilla la distinción entre los vectores que aparecen del lado derecho y los del lado izquierdo de los productos escalares, llamados kets y bras y son escritos como $|\psi\rangle$ y $\langle\psi|$ respectivamente. El producto escalar de un bra y un ket se le llama producto interior y es representado por

$$\langle\phi|\psi\rangle \tag{2.6}$$

así la ecuación 2.1 se escribe como

$$\langle\phi|\psi\rangle = \langle\psi|\phi\rangle^* . \tag{2.7}$$

Los bras y kets pueden representar convenientemente a una base ortonormal como

$$\langle i|j\rangle = \delta_{ij} . \tag{2.8}$$

Cualquier ket ψ se puede escribir como

$$|\psi\rangle = \sum_i \alpha_i |i\rangle , \tag{2.9}$$

donde

$$\langle i|\psi\rangle = \alpha_i . \tag{2.10}$$

El bra correspondiente se escribe

$$\langle \psi | = \sum_i \alpha_i^* \langle i | \quad (2.11)$$

con

$$\langle \psi | i \rangle = \alpha_i^* \quad (2.12)$$

por lo que el conjunto de bras $\langle i |$ forma una base ortonormal para los bras. El producto interno entre $\langle \phi |$ y $|\psi\rangle$ ahora se puede escribir como:

$$\langle \phi | \psi \rangle = \sum_i \sum_j \beta_i^* \langle i | \alpha_j | j \rangle = \sum_{i,j} \beta_i^* \alpha_j \langle i | j \rangle = \sum_{i,j} \beta_i^* \alpha_j \delta_{ij} = \sum_i \beta_i^* \alpha_i \quad (2.13)$$

2.3. Operadores

2.3.1. Propiedades Generales

Un operador \hat{A} es una regla de asociación matemática que cuando es aplicado a un ket $|\psi\rangle$ lo transforma en otro ket $|\psi'\rangle$ de el mismo espacio, de forma análoga sucede con los bras:

$$\hat{A} |\psi\rangle = |\psi'\rangle \quad (2.14)$$

$$\langle \phi | \hat{A} = \langle \phi' | . \quad (2.15)$$

La relación entre estas dos operaciones esta definida por

$$\langle \phi | \psi' \rangle = \langle \phi' | \psi \rangle . \quad (2.16)$$

El producto interior se escribe como

$$\langle \phi | A | \psi \rangle . \quad (2.17)$$

Estos operadores son lineales, por lo que

$$A(| \phi \rangle + | \psi \rangle) = A | \phi \rangle + A | \psi \rangle \quad (2.18)$$

y

$$(A + B) | \phi \rangle = A | \phi \rangle + B | \phi \rangle \quad (2.19)$$

El producto de dos operadores actuando sobre un ket se define por actuar primero el inmediato junto al ket, esto es

$$AB | \phi \rangle = A(B | \phi \rangle). \quad (2.20)$$

Como se menciono anteriormente un operador puede actuar sobre un ket o un bra, sin embargo no son idénticas, es decir, $A | \phi \rangle = | \phi' \rangle$ en general no implica que $\langle \phi | A = \langle \phi' |$. Lo que si se cumple en general es

$$\langle \psi | A^\dagger = \langle \psi' |, \quad (2.21)$$

donde A^\dagger , es el operador llamado adjunto de o Conjugado Hermitiano de A .

El operador de proyección $P_i = | i \rangle \langle i |$ proyecta $| \psi \rangle$ en la base del ket $| i \rangle$, es decir, contiene la componente de ψ paralela a $| i \rangle$, de lo anterior se tiene:

$$| \psi \rangle = \sum_i | i \rangle \langle i | \psi \rangle = \sum_i P_i | \psi \rangle . \quad (2.22)$$

De la misma forma

$$\langle \psi | = \sum_i \langle \psi | i \rangle \langle i | = \sum_i \langle \psi | P_i. \quad (2.23)$$

Dos importantes grupos de operadores son los *Hermitianos* y *unitarios*. Los operadores Hermitianos son aquellos que son iguales a su adjunto:

$$H = H^\dagger, \quad (2.24)$$

mientras que los operadores unitarios tienen su inversa igual a su adjunto:

$$UU^\dagger = U^\dagger U = \mathbb{I}, \quad (2.25)$$

2.3.2. Vectores y Matrices

Como se menciono anteriormente, cualquier ket puede ser visto como combinación lineal de un conjunto de vectores base ortonormal. Por lo que para cualquier ket en el espacio de Hilbert 3-d podemos escribir

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}. \quad (2.26)$$

donde los coeficientes forman un vector columna. Similarmente un bra puede ser escrito como:

$$\langle \phi| = (\alpha_1^* \alpha_2^* \alpha_3^*), \quad (2.27)$$

mientras que ahora los coeficientes forman un vector fila.

Tambien es posible describir operadores utilizando matrices,

$$A|\psi\rangle = \sum_{i,j} \langle i|A|j\rangle \langle j|\psi\rangle |i\rangle \quad (2.28)$$

$$= \sum_{i,j} A_{i,j} \alpha_j |i\rangle, \quad (2.29)$$

donde lo anterior es posible gracias a que $\langle j|\psi\rangle = \alpha_j$ y $\langle i|A|j\rangle = A_{i,j}$.

Dado que una matriz puede describir a un operador, es conveniente tener la descripción del producto de dos operadores:

$$\langle i|BA|j\rangle = \langle i|B|k\rangle \langle k|A|j\rangle \quad (2.30)$$

o

$$(BA)_{ij} = \sum_k B_{ik}A_{kj}, \quad (2.31)$$

es decir que la matriz que describe el producto de dos operadores es la matriz resultante del producto de sus matrices individuales.

Resulta importante conocer la descripción matricial entre la relación de un operador A y su adjunto a^\dagger , la cual es descrita mediante

$$\langle i|A^\dagger|j \rangle = \langle j|A|i \rangle^* \quad (2.32)$$

o

$$(A^\dagger)_{ij} = A_{ji}^*. \quad (2.33)$$

De lo anterior se deduce que $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$.

2.3.3. Eigenvalores y eigenvectores

Consiremos un operador A y un ket $|\psi \rangle$ tales que

$$A|\psi \rangle = \lambda|\psi \rangle \quad (2.34)$$

donde λ es un numero. Se dice que el ket $|\psi \rangle$ es el eigenket del operador A , con eigenvalor λ . Además, de forma equivalente, la representación vectorial de $|\psi \rangle$ es un eigenvector de la matriz A con eigenvalor λ .

Resulta conveniente utilizar el formalismo matricial para determinar los eigenvalores. En un espacio de Hilbert n-d, la ecuación 2.34 resulta equivalentte a n ecuaciones simultaneas de la forma

$$\sum_j A_{ij}a_j = \lambda a_i \quad (2.35)$$

o

$$\sum_j (A_{ij} - \lambda\delta_{ij})a_j = 0. \quad (2.36)$$

Estas n ecuaciones tienen solución no trivial solo si el determinante de los coeficientes del primer miembro de la ecuación 2.36 es zero, así que

$$\begin{vmatrix} (A_{11} - \lambda) & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ (A_{21} & (A_{22} - \lambda) & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (A_{n1} & A_{n2} & \dots & (A_{nn} - \lambda) \end{vmatrix} = 0. \quad (2.37)$$

Resulta que la ecuación anterior es polinomial de orden n en λ , donde las n raíces son los n eigenvalores de la matriz A .

El proceso de encontrar los eigenvalores y eigenvectores de una matriz es equivalente a diagonalizar la matriz: la matriz A puede ser escrita de la forma

$$A = S\Lambda S^{-1} \quad (2.38)$$

donde Λ es una matriz diagonal con los eigenvalores de A a lo largo de la diagonal y S es formada por los eigenvectores de A . Además, Podemos escribir cualquier operador como combinación lineal de sus eigenket $|\psi_i\rangle$, balanceados por los correspondientes eigenvalores λ_j ,

$$A = \sum_i \lambda_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|. \quad (2.39)$$

2.3.4. Operador traza

La traza de un operador es una importante propiedad, que es descrita más fácilmente con formalismo matricial de la forma:

$$tr(A) = \sum_i \langle i|A|i\rangle = \sum_i A_{ii}, \quad (2.40)$$

dicho valor, no depende de la base que se elija para su representación, pues si la matriz A es escrita en su forma diagonal y usando el hecho de que el producto de matrices es

invariante bajo permutaciones cíclicas del producto, tenemos

$$\text{tr}(A) = \text{tr}(SAS^{-1}) = \text{tr}(AS^{-1}S) = \text{tr}(A), \quad (2.41)$$

por lo que la traza de un operador es la suma de sus eigenvalores.

2.3.5. Operador Hermitiano

Como ya se menciona anteriormente, un operador A es hermitiano si es igual a su adjunto $A = A^\dagger$. Operadores hermitianos toman un rol muy importante en mecánica cuántica, además de tener propiedades útiles.

Primero, los operadores hermitianos tienen eigenvalores reales, es decir,

$$A|a\rangle = a|a\rangle, \quad (2.42)$$

o equivalentemente,

$$\langle a|A|a\rangle = \langle a|a|a\rangle = a \langle a|a\rangle. \quad (2.43)$$

Luego,

$$\langle a|A^\dagger|a\rangle = (\langle a|a|a\rangle)^* = a^* \langle a|a\rangle \quad (2.44)$$

y dado que $A = A^\dagger$ se deduce que $a = a^*$. Por lo que a debe ser real.

Además, los eigenkets de un operador Hermitiano son mutuamente ortogonales. Para mostrar esto, considere dos eigenket, tales que

$$A|a_1\rangle = a_1|a_1\rangle \text{ y } A|a_2\rangle = a_2|a_2\rangle. \quad (2.45)$$

Puesto que A es hermitiano, es equivalente a escribir

$$\langle a_1|A = \langle a_1|a_1 \text{ y } \langle a_2|A = \langle a_2|a_2, \quad (2.46)$$

y el producto interior $\langle a_2|A|a_1\rangle$ puede ser escrito de dos formas diferentes,

$$\langle a_2|A|a_1\rangle = a_1 \langle a_2|a_1\rangle = a_2 \langle a_2|a_1\rangle \quad (2.47)$$

o

$$(a_1 - a_2) \langle a_2 | a_1 \rangle = 0. \quad (2.48)$$

2.3.6. Conmutador y Anticonmutador

El conmutador de dos operadores \hat{A} y \hat{B} , denotado por $[\hat{A}, \hat{B}]$, está dado por

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}, \quad (2.49)$$

y el anticonmutador $\{\hat{A}, \hat{B}\}$ por

$$\{\hat{A}, \hat{B}\} = \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}. \quad (2.50)$$

Se dice que dos operadores conmutan si su conmutador es cero.

2.3.7. Operador Unitario

Como ya se definió anteriormente, un operador unitario U , es aquel que su inversa es igual a su adjunta. Junto con los operadores hermitianos, los operadores unitarios juegan un papel importante en la mecánica cuántica y posee propiedades interesantes. Por ejemplo, el producto de dos operadores unitarios U y V es unitario, pues

$$UV(UV)^\dagger = UVV^\dagger U^\dagger = UU^\dagger = \mathbb{I} \quad (2.51)$$

Capítulo 3

Entropía e información

3.1. Entropía e información

En esta sección se definen los conceptos de entropía e información mutua y se muestran algunas relaciones entre estos.

El concepto de información es muy amplio, sin embargo, para una distribución de probabilidades, definiremos la cantidad llamada *entropía*, que coincide en muchos aspectos con lo que la medición de la información es (debería ser). El concepto de entropía es extendido hasta la definición de la *información mutua*, que es la medición de la cantidad de información que una variable aleatoria tiene sobre otra.

3.1.1. Entropía

El concepto de *entropía*, es la medición de la incertidumbre de una variable aleatoria. Sea X una variable discreta aleatoria que pertenece a X y una función de probabilidad $p(x) = Pr\{X = x\}, x \in X$.

Definición 1. [7] La entropía $H(X)$ de una variable aleatoria discreta X es definida por

$$H(X) = - \sum_{x \in X} p(x) \log(p(x)) \quad (3.1)$$

La cantidad anterior es expresada en bits si el logaritmo es en base 2, si su base es e , se les llama *nats*. Un detalle importante a notar es que la entropía es una funcional de la distribución de X . No depende de los valores que tome la variable aleatoria, solo sus probabilidades.

3.1.2. Entropía union y Entropía Condicional

Anteriormente se definió la entropía de una variable aleatoria. A continuación se amplía la definición para un par de variables aleatorias, las cuales, serán consideradas como un vector aleatorio.

Definición 2. [7] La entropía union $H(X, Y)$ de un par de variables aleatorias discretas (X, Y) con su respectiva distribución de probabilidad $p(x, y)$ se define como

$$H(X, Y) = - \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} p(x, y) \log p(x, y), \quad (3.2)$$

También se define la entropía condicional de una variable dada otra, como el valor esperado de las entropías de una distribución condicional, promediado sobre la variable aleatoria condicional.

Definición 3. [7] Si el par (X, Y) $p(x, y)$, la entropía condicional $H(Y|X)$ es

$$H(X|Y) = \sum_{x \in X} p(x) H(Y|X = x) \quad (3.3)$$

$$= - \sum_{x \in X} p(x) \sum_{y \in Y} p(y|x) \log p(y|x), \quad (3.4)$$

$$= - \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} p(x, y) \log p(y|x) \quad (3.5)$$

La relación que existe entre la entropía union y condicional es tal que la entropía de un par de variables aleatorias es la entropía de una mas la entropía condicional de la otra, a este resultado se le llama *Regla de la cadena*[7]

Teorema 1 (Regla de la cadena).

$$H(X, Y) = H(X) + H(Y|X). \quad (3.6)$$

3.1.3. Entropía de Relativa e Información Mutua

Como se menciona antes, la entropía de una variable aleatoria es la medición en la incertidumbre de una variable aleatoria; es decir, mide la cantidad de información requerida en promedio para describir la variable aleatoria. A continuación se define la entropía relativa y la información mutua.

La entropía relativa es la medición de la distancia entre dos distribuciones. La entropía relativa $D(p||q)$ es la medición de la ineficiencia de asumir que la distribución es q , cuando en realidad es p .

Definición 4. [7] La entropía relativa o *distancia de Kullback-Leibler* entre dos funciones de probabilidad $p(x)$ y $q(x)$ es definida como

$$D(p||q) = \sum_{x \in X} p(x) \log \frac{p(x)}{q(x)} \quad (3.7)$$

Ahora, la información mutua, es la medición de la cantidad de información que una variable aleatoria contiene acerca de la otra. Es la reducción en la incertidumbre de una variable aleatoria debido al conocimiento de la otra.

Definición 5. [7] La entropía relativa o *distancia de Kullback-Leibler* entre dos funciones de probabilidad $p(x)$ y $q(x)$ es definida como

$$I(X; Y) = \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} p(x, y) \log \frac{p(x, y)}{p(x)p(y)} \quad (3.8)$$

$$= D(p(x, y)||p(x)p(y)) \quad (3.9)$$

3.1.4. Relación entre entropía e información

La definición de información mutua 5 puede reescribirse como

$$I(X; Y) = \sum_{x,y} p(x,y) \log \frac{p(x,y)}{p(x)p(y)} \quad (3.10)$$

$$= \sum_{x,y} p(x,y) \log \frac{p(x|y)}{p(x)} \quad (3.11)$$

$$= - \sum_{x,y} p(x,y) \log p(x) + \sum_{x,y} p(x,y) \log p(x|y) \quad (3.12)$$

$$= - \sum_x p(x) \log p(x) - \left(- \sum_{x,y} p(x,y) \log p(x|y) \right) \quad (3.13)$$

$$H(X) - H(X|Y). \quad (3.14)$$

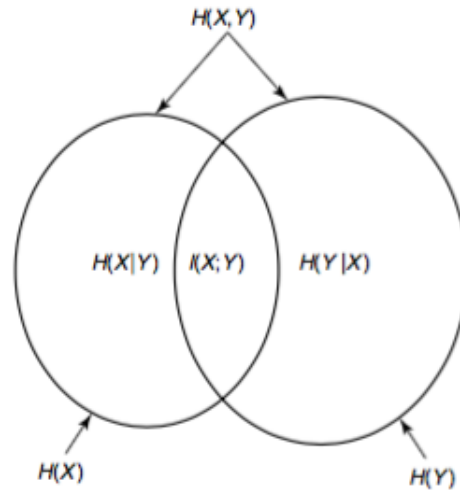


Figura 3.1: Diagrama de Venn

Así, la información mutua $I(X; Y)$ es la reducción en la incertidumbre de X dado el conocimiento de Y .

Análogamente se tiene que

$$I(X; Y) = H(Y) - H(Y|X). \quad (3.15)$$

Es decir, la variable X nos da tanta información sobre Y , como Y nos brinda acerca de X . A continuación se muestran algunas relaciones entre la información mutua $I(X; Y)$ y la

CAPÍTULO 3 ENTROPÍA E INFORMACIÓN
3.1. ENTROPÍA E INFORMACIÓN

entropía, las cuales, son mostradas en el diagrama 3.1 de Venn

Teorema 2.

$$I(X; Y) = H(X) - H(X|Y) \quad (3.16)$$

$$I(X; Y) = H(Y) - H(Y|X) \quad (3.17)$$

$$I(X; Y) = H(X) + H(Y) - H(X, Y) \quad (3.18)$$

$$I(X; Y) = I(Y; X) \quad (3.19)$$

$$I(X; X) = H(X) \quad (3.20)$$

$$(3.21)$$

CAPÍTULO 3 ENTROPÍA E INFORMACIÓN
3.1. ENTROPÍA E INFORMACIÓN

Capítulo 4

Breve descripción clásica de la polarización

En este capítulo se describe la teoría clásica de la polarización de una onda electromagnética con un vector en el plano. Se revisa de forma muy superficial la polarización clásica pues en el próximo capítulo los Postulados de la mecánica cuántica son establecidos desde el punto de la polarización.

4.1. Polarización

4.1.1. Vector de Polarización

Una onda electromagnética, consta de campos eléctricos y magnéticos. La polarización de una onda es determinada por la dirección del vector del campo eléctrico. El campo electromagnético es una onda transversa, por lo que el campo eléctrico E es perpendicular a la dirección de propagación. Si tenemos una onda que se propaga en el vacío en dirección z , su vector de onda estará dado por $\mathbf{k} = k\mathbf{u}_z$, su magnitud esta relacionada con la longitud de onda λ , frecuencia f , y frecuencia angular ω mediante:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi f}{c} = \frac{\omega}{c}, \quad (4.1)$$

CAPÍTULO 4 BREVE DESCRIPCIÓN CLÁSICA DE LA POLARIZACIÓN

4.1. POLARIZACIÓN

donde c es la velocidad de la luz en el vacío. El campo eléctrico está descrito por:

$$\mathbf{E} = E_x \mathbf{u}_x + E_y \mathbf{u}_y \quad (4.2)$$

donde

$$E_x = E_{0x} \cos(kz - \omega t) \text{ y } E_y = E_{0y} \cos(kz - \omega t + \phi). \quad (4.3)$$

Los coeficientes E_{0x} y E_{0y} representan a las amplitudes de los campos en las direcciones x y y . La fase ψ nos indica que las componentes del campo pueden o no oscilar con la misma fase. La polarización está determinada por la relación entre las magnitudes de E_{0x} y E_{0y} , y su fase.

Sin embargo las ecuaciones 4.3 pueden ser escritas de una forma más general utilizando exponenciales complejos, así las componentes del campo serían:

$$E_x = E_{0x} e^{i(kz - \omega t)} \mathbf{u}_x \text{ y } E_y = E_{0y} e^{i(kz - \omega t + \phi)} \mathbf{u}_y. \quad (4.4)$$

y con ello el campo total estaría expresado por

$$\mathbf{E} = E_{0x} e^{i(kz - \omega t)} + E_{0y} e^{i(kz - \omega t + \psi)}. \quad (4.5)$$

La amplitud total E_0 del campo \mathbf{E} es

$$E_0 = (E_{0x}^2 + E_{0y}^2)^{1/2}. \quad (4.6)$$

Así, en términos de la amplitud E_0 , el campo es

$$\mathbf{E} = E_0 e^{i(kz - \omega t)} \left[\frac{E_{0x}}{E_0} \mathbf{u}_x + \frac{E_{0y}}{E_0} e^{i\psi} \mathbf{u}_y \right]. \quad (4.7)$$

De donde se define al vector de polarización $\boldsymbol{\epsilon}$ a [8]

$$\boldsymbol{\epsilon} = \left[\frac{E_{0x}}{E_0} \mathbf{u}_x + \frac{E_{0y}}{E_0} e^{i\psi} \mathbf{u}_y \right], \quad (4.8)$$

en términos del vector de polarización, el campo eléctrico es

$$\mathbf{E} = E_0 e^{i(kz - \omega t)} \boldsymbol{\epsilon}. \quad (4.9)$$

Siendo $\boldsymbol{\epsilon}$ un vector unitario, pues

$$|\boldsymbol{\epsilon}| = [\boldsymbol{\epsilon}^* \cdot \boldsymbol{\epsilon}]^{1/2} = \left[\left(\frac{E_{0x}}{E_0} \right)^2 + \left(\frac{E_{0y}}{E_0} \right)^2 \right]^{1/2} = 1. \quad (4.10)$$

Definimos a la intensidad I , como el cuadrado de la magnitud del campo \mathbf{E} :

$$I = |\mathbf{E}^2| = \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{E} = \left(E_0 e^{-i(kz - \omega t)} \boldsymbol{\epsilon}^* \right) \cdot \left(E_0 e^{i(kz - \omega t)} \boldsymbol{\epsilon} \right) = E_0^2 \quad (4.11)$$

4.1.2. Polarización Lineal

Analicemos el caso en el que la fase es cero ($\phi = 0$). En este caso el vector de polarización $\boldsymbol{\epsilon}$ es [8]

$$\boldsymbol{\epsilon} = \left[\frac{E_{0x}}{E_0} \mathbf{u}_x + \frac{E_{0y}}{E_0} \mathbf{u}_y \right]. \quad (4.12)$$

Dicho vector describe una línea que forma un ángulo θ con respecto al eje x ,

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{E_{0y}}{E_{0x}} \right) \quad (4.13)$$

Dado que el vector de polarización describe una línea, se dice que el campo es linealmente polarizado.

4.1.3. Polarización circular

Ahora veamos el caso en el que $\psi = \pi/2$, y además $E_{0x} = E_{0y} = E_0/\sqrt{2}$. Con estas condiciones, el vector de polarización es [8]

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{u}_x + i\mathbf{u}_y). \quad (4.14)$$

Con el fin de obtener información para dar una interpretación física de esta ecuación, es necesario utilizar las ecuaciones 4.4, las cuales nos dan los coeficientes de como varían las amplitudes del campo,

$$E_x = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \cos(kz - \omega t) \quad (4.15)$$

$$E_y = -\frac{E_0}{\sqrt{2}} \cos(kz - \omega t + \frac{\pi}{2}) = -\frac{E_0}{\sqrt{2}} \operatorname{sen}(kz - \omega t) \quad (4.16)$$

Notemos que los coeficientes de las direcciones del campo tienen la misma amplitud $\frac{E_0}{\sqrt{2}}$ y oscilan sinusoidalmente con la misma frecuencia. Con el fin de observar como se comporta el campo en el tiempo, tomemos un plano perpendicular a la dirección de propagación, por ejemplo $z = 0$, así, las ecuaciones 4.15 y 4.16 se simplifican a

$$E_x = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \cos(-\omega t) = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \cos(\omega t) \quad (4.17)$$

$$E_y = -\frac{E_0}{\sqrt{2}} \operatorname{sen}(-\omega t) = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \operatorname{sen}(\omega t) \quad (4.18)$$

De las ecuaciones anteriores se deduce que el campo eléctrico recorre un círculo con un período de $T = 2\pi/\omega$, por lo que se le llama polarización circular.

La polarización circular puede ser tanto izquierda como derecha. La izquierda gira en sentido opuesto a las manecillas de un reloj y la polarización circular derecha gira en sentido a las manecillas del reloj.

4.1.4. Polarización Elíptica

Para el caso en el que no se cumplan ninguno de los dos tipos de polarización mencionados anteriormente, y se tiene una polarización definida, se dice que la polarización es elípticamente polarizada, donde la diferencia de fase, y las amplitudes de sus componentes x e y determinan la orientación y la excentricidad de la elipse.

Si no la polarización no está definida, la polarización fluctúa aleatoriamente en el tiempo, para este caso se dice que la polarización es aleatoria o que el campo no está polarizado.

Capítulo 5

Postulados de la Mecánica Cuántica

En este capítulo iniciaremos con los postulados fundamentales de la mecánica cuántica, los cuales son formulados para sistemas aislados. Dado que en la mayoría de los casos se trabaja con sistemas que interactúan con el universo, revisaremos herramientas que nos permiten describir estados, mediciones, y operaciones de sistemas no aislados de una forma apropiada. Mientras que es posible describir un campo electromagnético usando la mecánica cuántica, no es posible describir un campo puramente cuántico utilizando el electromagnetismo clásico. Aquí se tratará el comportamiento de fotones individuales, por lo que no es posible describirlos usando las ecuaciones de Maxwell, en cambio se utilizarán sus estados cuánticos. Veremos que papel juega la regla de Born y como el operador de densidad emerge. Posteriormente en el próximo capítulo se da una reformulación de los postulados de la mecánica cuántica lo que nos lleva a la introducción de mediciones generales, los POVMs.

5.1. Introducción

Usando pocas palabras, los postulados de la mecánica cuántica nos dicen:

1. Como describir los estados de un sistema físico;
2. Como describimos las mediciones realizadas en un sistema físico;
3. Como describimos la evolución de un sistema físico, ya sea por la dinámica o debido a una medición.

Postulado 1 (Estados de un sistema cuántico). Asociado a cualquier sistema físico aislado, existe un espacio vectorial complejo con producto interior, es decir, un espacio de Hilbert, conocido como el espacio de estado del sistema. El sistema esta completamente descrito por sus vectores de estado, el cual es un vector el espacio asociado al sistema.

El sistema cuántico mas simple es el qubit. Un qubit tiene un espacio de estados de 2D. Llamémosle $|0\rangle$ y $|1\rangle$, entonces un vector de estado estará descrito por [8]

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \quad (5.1)$$

con α y β complejos. La condición de normalización, $\langle\psi|\psi\rangle = 1$ nos permite saber que $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

Postulado 2 (Mediciones cuánticas). Cantidades observables son descritas por operadores Hermitianos M_m . Estos operadores actúan en el espacio de Hilbert del sistema medido. El indice m representa el resultado que pueda ocurrir de la medición . Si el estado del sistema antes de la medición es $|\psi\rangle$, entonces la probabilidad de que el resultado obtenido sea m es [8]

$$p(m) = \langle\psi|M_m^\dagger M_m|\psi\rangle \quad (5.2)$$

La *regla de Born*, nos brinda una receta para conectar la descripción matemática de un estado cuántico con la predicción de la teoría cuántica sobre el resultado de un experimento. El estado de el sistema después de la medición es la proyección de el estado antes de la medición sobre el eigenspacio del eigenvalor esperado, es decir,

$$|\psi_m\rangle = \frac{M_m|\psi\rangle}{\sqrt{p(m)}}. \quad (5.3)$$

Postulado 3 (Dinámica de un sistema cuántico). La evolución de un sistema

físico cerrado es descrito o por operadores unitarios [8]. El estado $|\psi\rangle$ al tiempo t_1 esta relacionado con el estado $|\psi'\rangle$ al tiempo t_2 por un operador unitario U , que depende de estos dos valores temporales,

$$|\psi'\rangle = U|\psi\rangle. \tag{5.4}$$

Así como la cuántica no nos dice el estado de un sistema, tampoco nos dice cual U describe la dinámica. Solo nos dice que de esta forma evolucionara el sistema.

5.2. Estado de un Sistema Cuántico

En esta sección se describe la polzarización desde el punto de la mecánica cuántica mediante un estado cuántico, el cual se representa por un vector de estado que es diferente al de la física clásica. Los vectores de estado que se tratan aquí pertenecen al espacio de Hilbert y representan haces de fotones individuales; mientras que en el capítulo anterior eran ondas electromagéticas descritas en términos del campo eléctrico \mathbf{E} .

5.2.1. Vector de estado

En mecánica clásica, las ondas de polarización horizontal y vertical se expresan en términos de los vectores de polarización ϵ_H y ϵ_V . Cuanticamente, un fotón verticalmente polarizado se encuentra en el estado $|V\rangle$, mientras que un foton horizontalmente polarizado se encuentra en el estado $|H\rangle$. Se le llama vector de estado(también referido como ket) $|\Psi\rangle$ a los estados cuánticos arbitrarios.

5.2.2. Estado base

Sabemos que clásicamente el vector de polarización ϵ se escribe en términos de los vectores ϵ_H y ϵ_V como 4.8. Desde el punto de vista cuántico, un estado de polarización se puede escribir como combinación lineal de los estados $|H\rangle$ y $|V\rangle$ como

$$|\Psi\rangle = c_H|H\rangle + c_V|V\rangle, \quad (5.5)$$

con c_H y c_V son números complejos. Los estados con esta forma se dice que están en superposición de los estados $|H\rangle$ y $|V\rangle$.

Como ya se revisó podemos calcular el producto interior mediante 2.13, obteniendo

$$\langle\Psi_1|\Psi_2\rangle = c, \quad (5.6)$$

con c número complejo. Además para los vectores base $|H\rangle$ y $|V\rangle$ que son ortonormales, utilizando 2.8 sabemos que

$$\langle H|V\rangle = \langle V|H\rangle = 0 \quad (5.7)$$

y

$$\langle V|V\rangle = \langle H|H\rangle = 1 \quad (5.8)$$

Mientras que para vectores no ortonormales se tiene que

$$\langle u|v\rangle = \cos(\theta), \quad (5.9)$$

siendo θ el ángulo entre los estados $|u\rangle$ y $|v\rangle$.

Según 5.5, un estado de polarización puede escribirse como $|\Psi\rangle = c_H|H\rangle + c_V|V\rangle$ y utilizando 2.11, su correspondiente bra es

$$\langle\Psi| = c_H^*\langle H| + c_V^*\langle V|. \quad (5.10)$$

Generalmente se trabajan con vectores normalizados, para los cuales, la suma del cuadrado de las magnitudes de los coeficientes en una base ortonormal es 1, es decir,

$$\langle \Psi | \Psi \rangle = (c_H^* \langle H | + c_V^* \langle V |)(c_H | H \rangle + c_V | V \rangle) \quad (5.11)$$

$$= c_H^* c_H \langle H | H \rangle + c_V^* c_V \langle V | V \rangle \quad (5.12)$$

$$= |c_H|^2 + |c_V|^2 = 1, \quad (5.13)$$

más adelante se le dará un significado a este último resultado.

5.2.3. Otros estados polarizados

Utilizando la existencia de vectores base y su propiedad de ortogonalidad se definen otros estados; y por medio de elementos ópticos como polarizadores, espejos, separadores de haz, etc.

Estados $|+45\rangle$

Clásicamente, una onda polarizada sobre ϵ_V , puede ser separada en dos de iguales componentes, con vectores de polarización ϵ_{45} y ϵ_{-45} . Lo que lleva a pensar que $|V\rangle$ puede ser escrito como combinación lineal de $|45\rangle$ y $|-45\rangle$

$$|+45\rangle = c_H |H\rangle + c_V |V\rangle \quad (5.14)$$

Con fin de determinar los coeficientes c_H y c_V , consideremos el experimento pensado que consiste en determinar si las componentes a lo largo de $+45$ son independientes a las componentes $|H\rangle$ y $|V\rangle$. Lo anterior es posible utilizando polarizadores PO que dividen el haz en sus dos componentes base; por ejemplo, PO_{HV} divide el haz en dos haces $|H\rangle$ y $|V\rangle$ con mismas componentes; de forma análoga PO_{45} en $|+45\rangle$ y $|-45\rangle$. De esta forma, tomado un estado $|\Psi\rangle$ y utilizando un PO_{HV} se obtienen dos estados, $|H\rangle$ y $|V\rangle$, luego tomando uno de los resultantes, supongamos $|V\rangle$, y utilizando PO_{45} surgen los estados

$|+45\rangle$ y $|-45\rangle$ y finalmente haciendo pasar por PO_{HV} a $|+45\rangle$ se obtienen los estados horizontal y vertical.

El arreglo experimental para preparar haces en estado $|H\rangle$ y $|V\rangle$ como se mencionó arriba se muestra en 5.1, donde podemos ver claramente que las componentes de un fotón a lo largo de ± 45 no son independientes de las componentes vertical y horizontal; además de que el estado $+45$ es dividido en partes iguales de $|H\rangle$ y $|V\rangle$. Suponiendo que $|+45\rangle$ está normalizado, entonces, utilizando 2.13 tenemos:

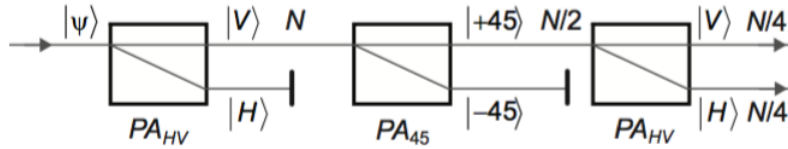


Figura 5.1: Preparación de estados $|V\rangle$ y $|H\rangle$ a partir de $|+45\rangle$ y $|-45\rangle$

$$|c_H| = |c_V| = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (5.15)$$

Los estados $|+45\rangle$ y $|-45\rangle$ son expresados en términos de $|H\rangle$ y $|V\rangle$ más adelante en 5.2.4.

Estados $|L\rangle$ y $|R\rangle$

Utilizando el arreglo 5.2, similar a 5.1, pero en esta ocasión se sustituye PO_{45} por un polarizador circular PO_C , se divide el haz en los estados de polarización circular izquierdo y polarización circular derecha. Del arreglo se obtiene que el estado emergente $|L\rangle$ esta compuesto tanto de $|H\rangle$ como $|V\rangle$ con la misma probabilidad.

Más adelante en 5.2.5 se determina la expresión explícita de los estados $|L\rangle$ y $|R\rangle$

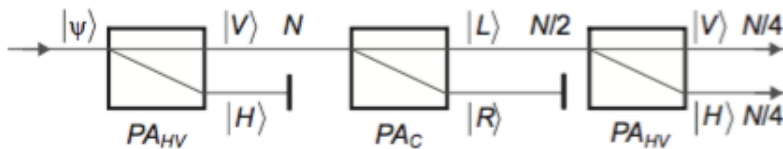


Figura 5.2: Preparación de estados $|V\rangle$ y $|H\rangle$ a partir de $|L\rangle$ y $|R\rangle$

5.2.4. Interpretación física del estado

Las ecuaciones de estado, además de representar objetos matemáticos se le da una interpretación a los valores de sus coeficientes. Se dice que el cuadrado de la magnitudes de el coeficientes asociado al estado de polarización es la probabilidad de que el fotón a medir tenga esa polarización. Motivo por el cual, a los coeficientes se les suele llamar "amplitudes de probabilidad". Mas adelante en 5.4 se discute el concepto de medición desde el punto de vista cuántico.

Puesto que los coeficientes son cantidades complejas, para tener bien expresado el estado, es necesario determinar sus fases. Utilizando 5.15 y 5.16, tenemos:

$$|+45\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\phi_H}|H\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\phi_V}|V\rangle, \quad (5.16)$$

puesto que $e^{i\phi_H}$ y $e^{i\phi_V}$ son factores de fase constantes y con magnitud 1 podemos tomar $\phi_H = 0$, para así tener

$$|+45\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle + e^{i\phi_V}|V\rangle) \quad (5.17)$$

y de forma analoga

$$|+45\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle + e^{i\phi'_V}|V\rangle), \quad (5.18)$$

Siendo $\phi \neq \phi'$, pues de otra forma $|+45\rangle = |-45\rangle$.

Tomando su producto interior

$$\langle +45|-45\rangle = \frac{1}{2}(\langle H| + e^{-i\phi_V}\langle V|)(|H\rangle + e^{i\phi'_V}|V\rangle) \quad (5.19)$$

$$= \frac{1}{2}(\langle H|H\rangle + e^{i\phi'_V}\langle H|V\rangle + e^{-i\phi_V}\langle V|H\rangle + e^{i(\phi'_V-\phi_V)}\langle V|V\rangle) \quad (5.20)$$

$$= \frac{1}{2}(1 + e^{i(\phi'_V-\phi_V)}) = 0, \quad (5.21)$$

notamos que $|+45\rangle$ y $|-45\rangle$ son ortogonales si se cumple

$$\phi_V - \phi'_V = \pi. \quad (5.22)$$

Así, utilizando 5.17, 5.18 y 5.22 se expresan los estados $|+45\rangle$ y $|-45\rangle$ en combinación lineal de $|H\rangle$ y $|V\rangle$ como

$$|+45\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle + |V\rangle) \quad (5.23)$$

y

$$|-45\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle - |V\rangle) \quad (5.24)$$

5.2.5. Estados con amplitudes complejas

Como ya se observó en 5.2.3, los estados $|L\rangle$ y $|R\rangle$ emergen del arreglo experimental 5.2 con forma de los estados $|H\rangle$ y $|V\rangle$ con mismas probabilidades, por lo que al igual que los estados $|+45\rangle$ y $|-45\rangle$ deben ser combinación lineal de $|L\rangle$ y $|R\rangle$ con mismas probabilidades se concluye que los coeficientes de los vectores de polarización circular deben ser de $\frac{1}{\sqrt{2}}$. De esta forma, los vectores $|L\rangle$ y $|R\rangle$ se pueden escribir como

$$|L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle + e^{i\varphi_V} |V\rangle) \quad (5.25)$$

y

$$|R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle + e^{i\varphi'_V} |V\rangle) \quad (5.26)$$

Aplicando el producto interior a 5.25 y 5.26 tenemos

$$\langle L|R \rangle = \frac{1}{2} (\langle H| + e^{i\varphi_V} \langle V|) (|H\rangle + e^{i\varphi'_V} |V\rangle) \quad (5.27)$$

$$= \frac{1}{2} (\langle H|H\rangle + e^{i\varphi'_V} \langle H|V\rangle + e^{-i\varphi_V} \langle V|H\rangle + e^{i(\varphi'_V - \varphi_V)} \langle V|V\rangle) \quad (5.28)$$

$$= \frac{1}{2} (1 + e^{i(\varphi'_V - \varphi_V)}) = 0, \quad (5.29)$$

lo anterior se cumple cuando

$$\varphi_V - \varphi'_V = \pi. \quad (5.30)$$

Para determinar el valor de φ_V se calcula el producto interior entre 5.25 y 5.23

$$\langle +45|L \rangle = \frac{1}{2} (\langle H| + \langle V|) (|H\rangle + e^{i\varphi_V} |V\rangle) \quad (5.31)$$

$$= \frac{1}{2} (1 + e^{i\varphi_V}) \quad (5.32)$$

por lo que su magnitud al cuadrado es

$$|\langle +45|L \rangle|^2 = \frac{1}{4} (1 + e^{i\varphi_V}) (1 + e^{-i\varphi_V}) \quad (5.33)$$

$$= \frac{1}{4} (2 + 2\cos\varphi_V) \quad (5.34)$$

Sabemos además que su probabilidad es de 1/2, pues la imagen 5.3 nos indica que para un haz preparado en estado $|L\rangle$ las probabilidades de obtener $+ - 45$ son las mismas.

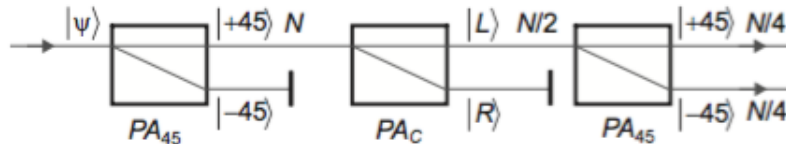


Figura 5.3: Preparación de estados $|+45\rangle$ y $|-45\rangle$ con estados $|L\rangle$ y $|R\rangle$

Por lo que $\varphi = + - \pi/2$. Utilizando al valor positivo de φ con el fin de que $|L\rangle$ y $|R\rangle$ tengan la forma de ϵ_L y ϵ_L en la forma clásica se obtiene

$$|+45\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle + |V\rangle) \quad (5.35)$$

y

$$|-45\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle - |V\rangle). \quad (5.36)$$

5.2.6. Interferencia

Para mostrar el efecto de interferencia, supongamos ahora que tenemos un arreglo como el que se muestra en la figura 5.4, en el cual se tiene un haz de fotones preparado en el estado $+45\rangle$ y es separado de igual forma por un PO_{HV} en los estados $|V\rangle$ y $|H\rangle$, posteriormente uno de estos dos estados emergentes es bloqueado, mientras que el otro no, supongamos que es bloqueado $|V\rangle$ y $|H\rangle$ pasa a travez de un plato de media onda con su eje orientado a 45° y se convierte en un has de fotones en el estado $|V\rangle$. Este has ($|V\rangle$) resultante es desviado por un polarizador PO_{HV} , pero no es alterado. Finalmente el has $|V\rangle$ es dividido de manera igual por un polarizador PO_{45} , por lo que emergen dos haces, uno en estado $|+45\rangle$ y otro en $|-45\rangle$.

El resultado del procedimiento anterior es el mismo si en un inicio bloqueamos el estado $|H\rangle$ en cambio de $|V\rangle$.

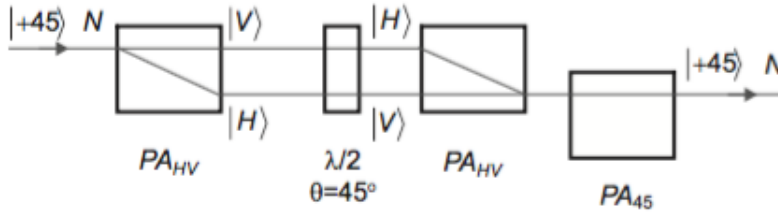


Figura 5.4: Interferómetro para un fotón

El resultado "curioso" aparece cuando ninguno de los estados $|V\rangle$ o $|H\rangle$ es bloqueado, pues haciendo esto, al final solo se obtiene un estado emergente, el estado $|+45\rangle$. Aquí lo importante es que ocurre interferencia incluso cuando solo se hace pasar un fotón por el interferómetro y la única forma de explicar este fenómeno de interferencia es asumir que

cada fotón, toma ambos caminos a lo largo del interferómetro.

5.3. Operadores

Ya se vió que hay objetos como los polarizadores que pueden cambiar la polarización de la onda, y que se puede describir la operación matemática utilizando matrices. Pero como se mencionó en el capítulo 2, los objetos matemáticos que cambian un estado en otro se les llama operadores.

5.3.1. Operadores

Como se ha mencionado ya, en mecánica cuántica, objetos como los polarizadores transforman un estado de polarización en otro, y se les conoce como operadores pues hacen una transformación de estado. Matemáticamente se describen como

$$O|\psi_1\rangle = c|\psi_2\rangle, \tag{5.37}$$

donde O es un operador que cambia al estado $|\psi_1\rangle$ en el estado $|\psi_2\rangle$ y c es una constante compleja. Por convención, los operadores son colocados junto a la barra vertical.

Supongamos que al estado $|\psi_i\rangle$ es operado secuencialmente por una serie de operadores O_1, O_2, \dots, O_n . Después de la primera operación, el estado $|\psi_i\rangle$ emerge en

$$|\psi_1\rangle = O_1|\psi_i\rangle. \tag{5.38}$$

Después de la segunda en

$$|\psi_2\rangle = O_2|\psi_1\rangle = O_2(O_1|\psi_i\rangle) = O_2O_1|\psi_i\rangle \tag{5.39}$$

Y después de la N -ésima en

$$|\psi_n\rangle = O_n|\psi_{n-1}\rangle = O_n \dots O_1|\psi_i\rangle. \quad (5.40)$$

Lo que se trata de mostrar en 5.38, 5.39 y 5.40 es que el orden correcto para los operadores cuánticos es de derecha a izquierda y es muy importante que el primero operado sea el inmediato a la izquierda del ket. Y en general $O_2O_1 \neq O_1O_2$, es decir, en general los operadores no conmutan, pero si son distributivos, por lo que se cumple

$$(O_1 + O_2)|\psi\rangle = O_1|\psi\rangle + O_2|\psi\rangle, \quad (5.41)$$

y

$$O(|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle) = O|\psi_1\rangle + O|\psi_2\rangle. \quad (5.42)$$

5.3.2. Operador de Rotacion

El operador de rotación de polarización es denotado por $R(\theta)$. Por lo que una rotación en 45° a un estado $|V\rangle$ es expresado por

$$R(45^\circ)|V\rangle = | + 45\rangle. \quad (5.43)$$

5.3.3. Operador Adjunto

Cualquier operador adjunto (o regular) puede operar en un ket o un bra, es decir, a la derecha o a la izquierda. Si $O|\psi_1\rangle = |\psi_2\rangle$, entonces sabemos que $\langle\psi_1|O^\dagger = \langle\psi_2|$, pero no es información suficiente para conocer $\langle\psi_1|O$ o $O^\dagger|\psi_1\rangle$.

El adjunto de un producto es

$$(O_1O_2)^\dagger = O_2^\dagger O_1^\dagger. \quad (5.44)$$

5.3.4. Operadores Unitarios

Los operadores unitarios son especiales y usualmente son denotados por U . La definición de un operador unitario es

$$U^\dagger U = U U^\dagger = 1 \quad (5.45)$$

Los operadores unitarios preservan la normalización de un estado, es decir,

$$U|\psi_1\rangle = e^{i\phi}|\psi_2\rangle \quad (5.46)$$

Un operador unitario cambia el estado, pero la constante compleja es siempre de magnitud 1.

La inversa de O es denotada por O^{-1} y es definida por

$$O^{-1}O = OO^{-1} = 1 \quad (5.47)$$

Para operadores unitarios $U^{-1} = U^\dagger$, pero en general la inversa de adjunta no son equivalentes.

Cabe mencionar que el operador de rotación es un operador unitario

$$R^\dagger(\theta)R(\theta) = 1, \quad (5.48)$$

y además se cumple que el adjunto de el operador de rotación es equivalente a el operador de rotación en la dirección opuesta

$$R^\dagger(\theta) = R^{-1}(\theta) = R(-\theta). \quad (5.49)$$

5.3.5. Operador Proyección

Una componente óptica PO_{HV} separa un haz en sus componentes $|V\rangle$ y $|H\rangle$, junto con un bloqueador de haz en alguno de los haces emergentes funciona para preparar fotones en alguno de los estados $|V\rangle$ y $|H\rangle$, dependiendo de cual sea bloqueado. Se define el operador proyección en el estado $|H\rangle$ como

$$P_H|\psi\rangle = c_H|H\rangle = |H\rangle c_H = |H\rangle\langle H|\psi\rangle = (|H\rangle\langle H|)|\psi\rangle, \quad (5.50)$$

el cual proyecta cualquier estado en $|H\rangle$. En general el operador de proyección en cualquier estado arbitrario $|\psi\rangle$ se expresa

$$P_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|. \quad (5.51)$$

La suma de los operadores de proyección en los estados base es igual al operador identidad; si los estados $|\psi_j\rangle$ forman una base ortonormal, entonces

$$\mathbb{I} = \sum_j P_{\psi_j} = \sum_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j| \quad (5.52)$$

La relación anterior es una forma de mostrar que los estados $|\psi_j\rangle$ forman una base ortonormal completa

5.4. Medición

Iniciemos esta sección por hacer la distinción entre preparación, prueba y medición. Una preparación es un procedimiento experimental que está completamente especificado, de preferencia con instrucciones o reglas que no sean ambiguas.

Una prueba inicia como una preparación, pero incluye un paso extra, en el que se le provee a un observador cierta información antes desconocida. Esta información no es trivial, pues

las pruebas que siguen preparaciones idénticas no siempre proveen la misma información. Uno es libre de elegir las preparaciones y pruebas que guste realizar, Peres en [4] define el alcance de la teoría cuántica como: el conjunto de reglas que permiten el cálculo de probabilidades para las salidas de pruebas que siguen de preparaciones específicas.

La teoría cuántica trata sobre el resultado de mediciones; no dice nada acerca de que pueda pasar en el mundo físico fuera del contexto de medición. He ahí el énfasis en la medición.

5.4.1. Qué es una medición?

Nosotros(los humanos) adquirimos conocimiento acerca de la realidad por medio de mediciones, que son procesos en los cuales un aparato interactúa con el sistema físico bajo estudio, de cierta forma una propiedad del sistema afecta una propiedad del aparato. Gracias a esta interacción sistema-aparato, medir una propiedad del sistema causa una perturbación en algunas otras. Esto es cierto incluso en sistemas clásicos, aunque la física clásica asume que la propiedad medida existe objetivamente previamente a la interacción del aparato con el sistema.

Por otro lado, la mecánica cuántica no está de acuerdo con esto. Una medición no es una adquisición pasiva de conocimiento, es un proceso activo, que hace uso de equipos complejos que normalmente involucran procesos irreversibles. Además se deben interpretar las salidas que de el equipo de medición, para lo cual es necesario construir un modelo teórico del comportamiento macroscópico del equipo interactuando con el sistema microscópico. Por un razonamiento como el anterior es que Kemble dijo : “No tenemos una razón satisfactoria para atribuirle una existencia objetiva a las cantidades físicas como distintiva de los números obtenidos cuando realizamos mediciones... Por lo que sería más exacto si hablamos de hacer mediciones de esta , a cambio de decir medimos esto o aquella cantidad física ”.

5.4.2. Mediciones Cuánticas

Como se mencionó en 5.1 y se verá en 5.5, un sistema cuántico cerrado (o aislado) evoluciona de acuerdo a una evolución unitaria, pero hay ocasiones en las que un sistema físico externo (un aparato) interactúa con el sistema, es decir, cuando se observa el sistema para averiguar que ocurre dentro de él, una interacción que hace que el sistema no sea cerrado, por lo que no necesariamente está sujeto a una evolución unitaria. Para explicar esto se utiliza el tercer postulado que nos provee de los medios para describir los efectos de las mediciones en sistemas cuánticos.

Las mediciones cuánticas son descritas por una colección M_m de operadores de medición. Estos operadores actúan sobre el espacio de estado del sistema. El índice m refiere a los resultados de la medición que pueden ocurrir en el experimento. Si un sistema se encuentra en el estado $|\psi\rangle$ justo antes de la medición, entonces la probabilidad de que ocurra el resultado m es

$$p(m) = \langle \psi | M_m^\dagger M_m | \psi \rangle, \quad (5.53)$$

y el estado del sistema después de la medición será

$$\frac{M_m |\psi\rangle}{\sqrt{\langle \psi | M_m^\dagger M_m | \psi \rangle}}. \quad (5.54)$$

Los operadores de medición son un conjunto completo, es decir, satisfacen

$$\sum_m M_m^\dagger M_m = I \quad (5.55)$$

5.4.3. Mediciones Proyectivas

A continuación se mostrarán las mediciones proyectivas. Son muy importantes para muchas aplicaciones de la cuántica.

Una medición proyectiva es descrita por un observable. M , un operador Hermitiano en el espacio de estados del sistema. Este observable tiene descomposición espectral

$$M = \sum_m m P_m, \quad (5.56)$$

donde a los P_m se les conoce como proyectores en el eigenspacio de M con eigenvalor m . Los posibles resultados a obtener de la medición corresponden a los eigenvalores, m , del observable. La probabilidad de obtener el resultado m es

$$p(m) = \langle \psi | P_m | \psi \rangle. \quad (5.57)$$

Si el resultado obtenido fue m , el estado del sistema inmediatamente luego de la medición es

$$\frac{P_m | \psi \rangle}{\sqrt{p(m)}}. \quad (5.58)$$

Una facilidad que brindan las mediciones proyectivas es el calculo de los valores promedio para las mediciones. Por definición, el valor promedio de una medición es

$$E(M) = \sum_m m p(m) \quad (5.59)$$

$$= \sum_m m \langle \psi | P_m | \psi \rangle \quad (5.60)$$

$$= \langle \psi | \sum_m m P_m | \psi \rangle \quad (5.61)$$

$$= \langle \psi | M | \psi \rangle. \quad (5.62)$$

este resultado es muy útil, simplifica muchos cálculos y es mas común escribir el valor promedio de un observable como

$$[\Delta(M)]^2 = \langle (M - \langle M \rangle)^2 \rangle \quad (5.63)$$

$$= \langle M^2 \rangle - \langle M \rangle^2 \quad (5.64)$$

esta última ecuación nos permite obtener la desviación estándar asociada a las observaciones de M mediante

$$\Delta(M) = \sqrt{\langle M^2 \rangle - \langle M \rangle^2}. \quad (5.65)$$

La desviación estándar es la medición de que tan esparcidos son los valores observados de la medición de M . Gracias a esta relación de medición y desviación estándar en términos de observables emergen resultados importantes como el Principio de incertidumbre 5.6.

5.4.4. Medición de Polarización

Supongamos que se tiene un fotón en el estado $|\psi\rangle$, y queremos saber sobre su polarización. es necesario hacer pasar a los fotones por un analizador de polarización vertical/horizontal(R,L; +45, -45; etc), y después por un detector. Los detectores deben ser no destructivos,

La medición descrita anteriormente tiene dos posibles resultados. El fotón es observado en polarización horizontal o vertical. Para calcular las estadísticas es conveniente asignar valores numéricos a cada uno de los posibles resultados de la medición. Normalmente se asignan los valores +1 y -1 a las mediciones que producen un fotón horizontalmente polarizado y un fotón verticalmente polarizado respectivamente.

Si se realizan muchas mediciones, cuando el estado de entrada es $|H\rangle$, el resultado es una serie de +1, con promedio +1. Análogamente, si el estado de entrada es $|V\rangle$, el resultado es una serie de -1, con promedio -1. Un estado de entrada general es una combinación lineal, $|\psi\rangle = c_H|H\rangle + c_V|V\rangle$. Los resultados de las mediciones para este estado son aleatorias y las probabilidades de obtener +1 y -1 son

$$P(+1||\psi\rangle) = P(H||\psi\rangle) = |\langle H|\psi\rangle|^2 = |c_H|^2 \quad (5.66)$$

y

$$P(-1||\psi\rangle) = P(V||\psi\rangle) = |\langle V|\psi\rangle|^2 = |c_V|^2 \quad (5.67)$$

5.4.5. Operadores y mediciones

Las mediciones corresponden a operadores Hermitianos; los operadores cambian un estado a otro; después de una medición el estado del sistema cambia. Con estos hechos, uno se podría ver tentado a afirmar que el estado resultante de la medición puede ser obtenido matemáticamente aplicando el correspondiente operador Hermitiano al estado inicial. Sin embargo, en general esto no es cierto. Aplicar un operador a un estado es un proceso determinístico, siempre se obtiene el mismo resultado; mientras que las mediciones son probabilísticas, en general una medición puede tener muchos posibles resultados y cada uno de ellos es obtenido con una probabilidad diferente. En otras palabras, no hay manera de predecir con exactitud que estado tendrá el sistema después de una medición.

5.5. Evolución de un Sistema Cuántico

5.5.1. Operador de evolución

La evolución de un sistema cuántico cerrado está descrito por un operador unitario. El estado $|\psi\rangle$ de un sistema al tiempo t_1 está relacionado con el estado $|\psi'\rangle$ del sistema al tiempo t_2 por un operador unitario U el cual depende solamente de los tiempos t_1 y t_2 ,

$$|\psi'(t_2)\rangle = U(t_2, t_1)|\psi(t_1)\rangle, \quad (5.68)$$

a $U(t_2, t_1)$ se le conoce como el operador de evolución temporal o propagador.

Así como la mecánica cuántica no nos dice el espacio de estados o el estado particular del sistema, tampoco dice cuáles operadores unitarios U describen la dinámica del sistema. La cuántica solo nos asegura que la evolución de cualquier sistema cerrado puede ser descrito de cierta manera. En realidad, todos los sistemas (excepto quizá el universo completo) interactúan de alguna forma con algún otro sistema; sin embargo, hay sistemas que pueden ser descritos con una buena aproximación a sistemas cerrados, y estos son descritos por evoluciones unitarias. Además, en principio todo sistema abierto puede ser descrito como parte de un sistema abierto.

CAPÍTULO 5 POSTULADOS DE LA MECÁNICA CUÁNTICA
5.5. EVOLUCIÓN DE UN SISTEMA CUÁNTICO

La evolución en el tiempo del estado de un sistema cuántico cerrado esta descrita por la ecuación de Scrodinger,

$$ih \frac{\partial |\psi\rangle}{\partial t} = H|\psi\rangle. \quad (5.69)$$

En esta ecuación, h es una cantidad física constante conocida como la constante de Planck. H es un operador Hermitiano que se le llama Hamiltoniano del sistema(cerrado).

El problema ahora es encontrar $U(t_2, t_1)$. Para el cual, simplemente se sustituye 5.68 en la ecuación 5.69 dependiente del tiempo de Schrodinger:

$$ih \frac{\partial}{\partial t} (U(t_2, t_1) |\psi(t_1)\rangle) = H(U(t_2, t_1) |\psi(t_1)\rangle). \quad (5.70)$$

o

$$\frac{\partial U(t_2, t_1)}{\partial t} = -\frac{i}{h} H U(t_2, t_1) \quad (5.71)$$

La integración de esta ecuación diferencial depende de si el Hamiltoniano depende o no del tiempo. Suponiendo que no lo hace, entonces la ecuación 5.71 nos conduce a

$$U(t_2, t_1) = e^{-1(t_2-t_1)H/h} \quad (5.72)$$

y

$$|\psi(t)\rangle = e^{-1(t_2-t_1)H/h} |\psi(t_1)\rangle \quad (5.73)$$

Por otro lado, si H depende del tiempo, la integración resulta mas complicada.

Si se conoce el Hamiltoniano del sistema, entonces en principio se puede determinar la dinámica completa del sistema. En general, obtener el Hamiltoniano necesario para

describir cierto sistema físico en particular no es tarea fácil, sin embargo a para el trabajo realizado no será necesario profundizar mucho mas en este tema.

5.6. Principio de Incertidumbre de Heisenberg.

Según la física clásica, dadas las condiciones iniciales y las fuerzas actuando sobre un sistema, el comportamiento del sistema puede ser predecido con exactitud, es decir, si se conocen las coordenadas iniciales $r(t)$, la velocidad $v(t)$ y las fuerzas actuando, entonces la posición y la velocidad son únicamente determinadas por medio de las leyes de Newton, por lo que la física clásica es completamente determinista.

Este punto de vista determinista no es aplicable al mundo microscópico. Dado que las partículas son representadas en el contexto de la mecánica cuántica por medio de una función de onda, y como estas funciones no pueden ser ‘ubicadas’, entonces, la partícula está ‘esparcida’ sobre el espacio, por lo que no puede ser localizada. Los conceptos clásicos de posición exacta, momento exacto y camino único de una partícula no tienen sentido en la escala microscópica. En esencia eso es el principio de incertidumbre de Heisenberg.

5.6.1. Principio de incertidumbre de Heisenberg

El principio de incertidumbre de Heisenberg nos dice que : Si la componente x del momento de una partícula es medida con una incertidumbre de Δp_x , entonces su posición en x no puede, simultáneamente, ser medida mas con mayor precisión que $\Delta x = h/(2\Delta p_x)$. Las relaciones de incertidumbre para la posición y momento en 3-D pueden ser representadas por [4]:

$$\Delta i \Delta p_i \geq \frac{h}{2}, \quad (5.74)$$

donde $i = x, y, z$.

El principio de incertidumbre de Heisenberg puede ser generalizado a cualquier par de variables u observables, no es posible observar un experimento que pueda medir simultáneamente dos variables complementarias con precisión arbitraria. De esto ser logrado, la teoría de la Mecánica Cuántica se derrumbaría.

5.6.2. Relaciones de Incertidumbre

Anteriormente se mencionó que los operadores en general no conmutan, $AB \neq BA$. El conmutador de A y B esta definido como

$$[A, B] = AB - BA, \quad (5.75)$$

y es un operador. Si $[A, B] = 0$, se dice que los operadores conmutan, y el orden de las operaciones no importa.

Sean dos operadores Hermitianos A y B . Si Realizamos una serie de mediciones de A , sobre un ensamble de muchas copias del sistema, todas en el estado $|\psi\rangle$. La incertidumbre de dicha medición es expresada como la desviación estándar ΔA . Por lo que la incertidumbre es

$$\Delta A^2 = \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle \quad (5.76)$$

$$= \langle \psi (A - \langle A \rangle)^\dagger (A - \langle A \rangle) \psi \rangle, \quad (5.77)$$

Si definimos

$$|a\rangle = (A - \langle A \rangle) \psi \quad (5.78)$$

entonces tendremos $\Delta A^2 = \langle a|a\rangle$. Análogamente para mediciones de B se define

$$|b\rangle = (B - \langle B \rangle) \psi \quad (5.79)$$

la varianza de estas mediciones es $\Delta B^2 = \langle b|b\rangle$. Utilizando la desigualdad de Schwartz se obtiene

$$\Delta A \Delta B \geq |\langle a|b\rangle|, \quad (5.80)$$

Dado que $\langle a|b\rangle$ es complejo,

CAPÍTULO 5 POSTULADOS DE LA MECÁNICA CUÁNTICA
5.6. PRINCIPIO DE INCERTIDUMBRE DE HEISENBERG.

$$|\langle a|b\rangle|^2 = \left[\frac{1}{2i}(\langle a|b\rangle - \langle b|a\rangle)\right]^2. \quad (5.81)$$

Donde

$$\langle a|b\rangle = \langle AB\rangle - \langle A\rangle\langle B\rangle \quad (5.82)$$

y

$$\langle b|a\rangle = \langle BA\rangle - \langle B\rangle\langle A\rangle \quad (5.83)$$

Por lo que

$$\Delta A \Delta B \geq \left|\frac{1}{2i}(\langle a|b\rangle - \langle b|a\rangle)\right| \quad (5.84)$$

$$= \frac{1}{2}|\langle AB - BA\rangle| \quad (5.85)$$

$$= \frac{1}{2}|\langle [A, B]\rangle| \quad (5.86)$$

Resultado que nos dice que existe una cota inferior al producto de las incertidumbres de las mediciones de dos observables, el cual está relacionado con el valor promedio del conmutador.

La interpretación correcta de las relaciones de incertidumbre nos dice que: si preparamos un gran número de sistemas cuánticos en estados idénticos, $|\psi\rangle$, y luego se realizan mediciones de C en algunos de los sistemas, y de D en otros, entonces la desviación ΔC de los resultados de C multiplicado por la desviación ΔD de los resultados de D , la relación se satisface.

Aunque esta relación no expresa propiamente el principio de incertidumbre para casos diferentes al caso de los observables canónicos conjugados. En [9] se busca una expresión de la forma

$$U(A, B, |\psi\rangle) \geq C(A, B). \quad (5.87)$$

Donde $U(A, B, |\psi\rangle)$ es la incertidumbre en el resultado de la medición de A y B , $C(A, B)$ es

CAPÍTULO 5 POSTULADOS DE LA MECÁNICA CUÁNTICA
5.6. PRINCIPIO DE INCERTIDUMBRE DE HEISENBERG.

una cota inferior irreducible; A y B son los observables que son simultáneamente medidos. Ahí se concluye que la medición de la incertidumbre para un observable A no puede depender en sus eigenvalores, por lo que $U(A, B, |\psi\rangle)$ depende únicamente de $|\psi\rangle$ y de los conjuntos de los eigenestados de A y B , $|a\rangle$ y $|b\rangle$. Por lo que C puede depender solamente del conjunto de productos internos entre los eigenestados, $\langle a|b\rangle$. Se propone a la entropía, como la forma más natural de medir la incertidumbre en el resultado de una medición,

$$S_A(|\psi\rangle) = \sum_a |\langle a|\psi\rangle|^2 \ln |\langle a|\psi\rangle|^2 \quad (5.88)$$

siendo $S_A(|\psi\rangle)/\ln(2)$ la deficiencia en la información que da el resultado $|\psi\rangle$ acerca de mediciones posteriores que ese le podrían hacer sobre A , por lo que se sugiere a la incertidumbre como

$$U(A, B, |\psi\rangle) = S_A(|\psi\rangle) + S_B(|\psi\rangle). \quad (5.89)$$

Razón por la cual se propone que $C(A, B)$ tenga la expresión

$$C(A, B) = \inf_{|\psi\rangle} \{U(A, B, |\psi\rangle)\} \quad (5.90)$$

Donde

$$S_A(|\psi\rangle) + S_B(|\psi\rangle) = - \sum_{ab} |\langle \psi|a\rangle|^2 |\langle \psi|b\rangle|^2 (\ln |\langle \psi|a\rangle|^2 + \ln |\langle \psi|b\rangle|^2). \quad (5.91)$$

Entonces la $U(A, B, |\psi\rangle)$ queda acotado inferiormente por

$$- 2 \sum_{ab} |\langle \psi|a\rangle|^2 |\langle \psi|b\rangle|^2 (\ln [\frac{1}{2}(1 + |\langle a|b\rangle|)]). \quad (5.92)$$

O visto de otra forma, se obtiene que

$$U(A, B, |\psi\rangle) = S_A(|\psi\rangle) + S_B(|\psi\rangle) \geq C(A, B) \geq 2 \ln \frac{2}{1 + \sup\{|\langle a|b\rangle|\}} \quad (5.93)$$

Por lo que se considera a $U(A, B, |\psi\rangle)$ como expresión satisfactoria para el principio de incertidumbre.

Capítulo 6

POVM

6.1. POVM's

El postulado de la medición cuántica nos da una regla para describir la estadística de la medición y una regla para describir el estado postmedición del sistema. Sin embargo para muchas aplicación es conocer el estado posterior a la medición no es de mucho interés, en cambio siendo el foco de atención las probabilidades de los respectivos resultados de la medición. Por lo que no estamos interesados en preservar el estado del fotón, lo desechamos. Siendo el caso en el que la medición se realiza una sola vez y se obtienen conclusiones. En estos casos se tiene una herramienta matemática que es un tipo más generalizado de medición, conocida como el formalismo de los POVM, que está adaptado al análisis de las mediciones. El acrónimo proviene del inglés "Positive(Probability) Operator-Valued Measure". Los operadores de medición no son necesariamente conmutativos u ortogonales. Y la principal diferencia entre un POVM y una PVM (projective valued measure) es que el número de resultados disponible difiere del número disponible de preparaciones y de dimensiones del espacio de Hilbert asociado. Además de que los POVM permiten la posibilidad de medir resultados asociados a estados no ortogonales. La ventaja principal de los POVM es que permite la extracción de más información mutua de la que usualmente nos permite extraer una medición proyectiva. Lo que hace que muchos consideren a los POVM como la prueba más general a la que un sistema cuántico puede ser puesto a

prueba.

Sean M_m operadores de alguna medición que se aplican a un estado $|\psi\rangle$, entonces la probabilidad de que el resultado m sea obtenido es $p(m) = \langle\psi|M_m^\dagger M_m|\psi\rangle$, se define

$$E_m \doteq M_m^\dagger M_m. \quad (6.1)$$

E_m satisface: $E_m > 0$, $\sum_m E_m = I$ y $p(m) = \langle\psi|E_m|\psi\rangle$. De esta forma el conjunto de los operadores es suficiente para determinar las probabilidades de los diferentes posibles resultados. A estos operadores E_m se les conoce como elementos de los POVM asociados a la medición. Al $\{E_m\}$ se le conoce como POVM.

Con la finalidad de mostrar la utilidad de este elegante formalismo consideremos los estados $|\psi_1\rangle = |V\rangle$ y $|\psi_2\rangle = (|H\rangle + |V\rangle)/\sqrt{2}$ un POVM con estos elementos

$$F_1 = \frac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} |H\rangle\langle H|, \quad (6.2)$$

$$F_2 = \frac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \frac{(|V\rangle - |H\rangle)(\langle V| - \langle H|)}{2}, \quad (6.3)$$

$$F_3 = I - F_1 - F_2 \quad (6.4)$$

los cuales cumplen con la relación $\sum_m F_m = I$. Dado un estado $|\psi_1\rangle = |V\rangle$, al cual se le realiza la medición descrita por el POVM F_1, F_2, F_3 . Hay probabilidad cero de que se observe el resultado de F_1 pues $\langle\psi|F_1|\psi\rangle = 0$. Además, si el resultado de la medición fuera F_1 , entonces se concluye que el estado recibido debió ser $|\psi_2\rangle$. De manera similar, se determina que si el resultado de la medición es F_2 , entonces el estado debió haber sido $|\psi_1\rangle$, aunque del resultado F_3 no se puede inferir nada. De cualquier forma el punto del ejemplo es mostrar como nunca se comete el error al momento de identificar el estado, claro aunque algunas ocasiones no se pueda obtener información del estado.

6.2. Operador densidad

Una herramienta alterna a los vectores de estado es el operador de densidad o matriz de densidad.

6.2.1. Conjunto de estados

Suponga muchos estados de la forma $|\psi_i\rangle$, con sus respectivas probabilidades. Se le llama conjunto o ensamble de estados puros a $p_i||p_s\psi_i\rangle$. El operador de densidad para el sistema queda definido por

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|, \quad (6.5)$$

La evolución del operador de densidad esta descrita por

$$\sum_i p_i U |\psi_i\rangle\langle\psi_i| U^\dagger = U \rho U^\dagger. \quad (6.6)$$

Si se realizan mediciones descritas por operadores de medición M_m y si el estado inicial era $|\psi_i\rangle$, entonces la probabilidad de obtener m es

$$p(m|i) = \text{tr}(M_m^\dagger M_m |\psi_i\rangle\langle\psi_i|), \quad (6.7)$$

Ademas la probabilidad de todo el sistema de obtener m es

$$p(m) = \text{tr}(M_m^\dagger M_m \rho), \quad (6.8)$$

SI el estado inicial era $|\psi_i\rangle$, el estado después de obtener el resultado m es

$$|\psi_i^m\rangle = \frac{M_m |\psi_i\rangle}{\sqrt{\langle\psi_i| M_m^\dagger M_m |\psi_i\rangle}} \quad (6.9)$$

Entonces, después de la medición con resultado m, se tiene el ensamble $p(i|m), |\psi_i^m\rangle$ al cual se le asocia un operador de densidad ρ_m

$$\rho_m = \frac{M_m \rho M_m^\dagger}{\text{tr}(M_m^\dagger M_m \rho)}. \quad (6.10)$$

La caracterizacion de operadores de densidad no da el forma de determinar si un operador ρ es el operador de densidad asociado al ensamble $\{p_i, |\psi_i\rangle\}$ si y solo si el operador es positivo y tiene traza igual uno.

6.3. Reformulación de los postulados

La caracterización de los operadores de densidad, nos permite definir un operador de densidad ρ , operador positivo, el cual tiene traza uno. Con esta definición se reformulan los postulados [2]

Postulado 1. A cualquier sistema físico aislado se le asocia un espacio de Hilbert. El sistema está completamente descrito por su operador de densidad, ρ , positivo, con traza uno actuando en el espacio de Hilbert asociado al sistema. Si el estado del sistema es ρ_i con probabilidad p_i , entonces el operador de densidad del sistema es

$$\sum_i p_i \rho_i \quad (6.11)$$

El espacio de estado de un sistema compuesto es el producto tensorial de los espacios de estado de cada componente del sistema.

Postulado 2. La evolución de un sistema cuántico está descrita por transformación unitaria. Es decir, el estado ρ de el sistema al tiempo t_1 está relacionada con el estado ρ' del sistema al tiempo t_2 por un operador unitario U el cual depende solamente de los tiempos t_1 y t_2

$$\rho' = U\rho U^\dagger \quad (6.12)$$

Postulado 3. Las mediciones cuánticas están descritas por una colección M_m de operadores de medición. Estos son operadores actuando en el espacio de Hilbert del sistema. La m es el resultado de la medición que pueda ocurrir. Si el estado del sistema es ρ justo antes de la medición, entonces la probabilidad de que el resultado m suceda es

$$p(m) = \text{tr}(M_m^\dagger M_m \rho), \quad (6.13)$$

y el estado del sistema después de la medición es

$$\frac{M_m \rho M_m^\dagger}{\text{tr}(M_m^\dagger M_m \rho)}, \quad (6.14)$$

siendo los operadores M_m un conjunto completo:

$$\sum_m M_m^\dagger M_m = I \tag{6.15}$$

Capítulo 7

Implementación y Cálculos

7.1. Implementación

7.1.1. Qubit fotónico

Un estado general de una superposición de estados $|u\rangle$ y $|v\rangle$ de un qubit esta dado por

$$|\psi\rangle = \alpha|u\rangle + \beta|v\rangle, \quad (7.1)$$

donde α y β son números complejos y los estados $|u\rangle$ y $|v\rangle$ no son necesariamente ortogonales, por lo que

$$\langle u|v\rangle = \cos\theta, \quad (7.2)$$

donde θ es el ángulo entre los dos vectores de polarización.

Definiendo al operador de medición $M(u, u)$ como

$$M(u, u) = |u\rangle\langle u| \quad (7.3)$$

y análogamente para v

$$M(v, v) = |v\rangle\langle v| \quad (7.4)$$

uno se puede plantear la pregunta de cual es su relación de incertidumbre para estas mediciones proyectivas

7.1.2. Implementación del POVM

Las mediciones proyectivas no pueden distinguir el estado de un fotón con dos posibles estados no ortogonales, por lo que si uno quiere lograr esta tarea es mucho mas útil considerar un POVM, como el que presenta [13].

El POVM es el conjunto de operadores Hermitianos positivos

$$A_u = (1 + \langle u|v \rangle)^{-1}[1 - |v\rangle\langle v|], \quad (7.5)$$

$$A_v = (1 + \langle u|v \rangle)^{-1}[1 - |u\rangle\langle u|], \quad (7.6)$$

y

$$A_? = 1 - A_u - A_v, \quad (7.7)$$

en donde los kets de estado $|u\rangle$ y $|v\rangle$ representan dos estados de polarización no ortogonales para un fotón.

La implementación de este POVM se muestra en la figura 7.1. Uno se cuestiona si este

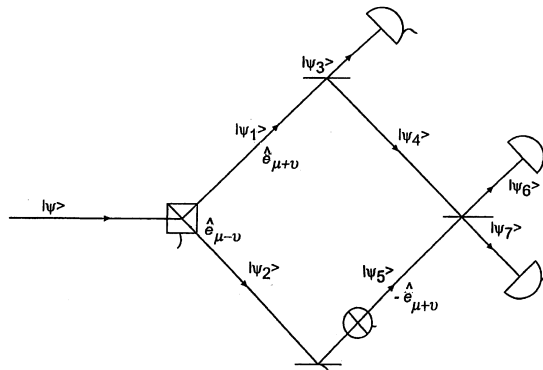


Figura 7.1: Implementación del POVM

conjunto de operadores de medición $\{A_i\}$ es un POVM y si este aparato satisface todas las estadísticas necesarias para que sea la implementación apropiada al POVM $\{A_i\}$

7.2. Cálculos

7.2.1. Relaciones de Incertidumbre

Se calculará la relación de incertidumbre mediante dos métodos, el primero es el mayormente conocido que relaciona las varianzas de dos operadores $\Delta M(u, u)$ y $\Delta M(v, v)$ medidos en el estado $|\psi\rangle$. La relación esta dada por 5.84

$$\Delta M(u, u)\Delta M(v, v) \geq \frac{1}{2}|\langle\psi|[M(u, u), M(v, v)]|\psi\rangle|, \quad (7.8)$$

donde

$$\Delta M(u, u) = M(u, u) - \langle\psi|M(u, u)|\psi\rangle, \quad (7.9)$$

y

$$\Delta M(v, v) = M(v, v) - \langle\psi|M(v, v)|\psi\rangle. \quad (7.10)$$

Sin embargo, aunque esta relación(7.8) sea suficiente para muchos casos, este no es uno de ellos, en 7.2.1 se hará un cálculo más preciso.

Por otro lado se tiene la relación de incertidumbre entrópica, dada por 5.93, que nos brinda cotas inferiores en los resultados de las mediciones de A y B

$$U(A, B, |\psi\rangle) = S_A(|\psi\rangle) + S_B(|\psi\rangle) \geq C(A, B) \geq 2\ln \frac{2}{1 + \sup\{|\langle a|b\rangle|\}}, \quad (7.11)$$

aquí , S_A y S_B , son las entropías de Shannon vistas en capítulo 3 están dadas por 5.88 :

$$S_A(|\psi\rangle) = \sum_a p_A(a)\ln(p_A(a)) \quad (7.12)$$

donde

$$p_A(a) = |\langle a|\psi\rangle|^2 \quad (7.13)$$

es la probabilidad de la distribución.

Principio de Incertidumbre

Como se mencionó anteriormente la eq. 7.8 ,

$$\Delta M(u, u)\Delta M(v, v) \geq \frac{1}{2}|\langle \psi|[M(u, u), M(v, v)]|\psi \rangle|, \quad (7.14)$$

resulta insuficiente debido a la no ortogonalidad de $|u\rangle$ y $|v\rangle$.

La desigualdad de Cauchy-Shwartz

$$\langle \psi|(\Delta M(u, u))^2|\psi \rangle \langle \psi|(\Delta M(v, v))^2|\psi \rangle \geq \langle \psi|\Delta M(u, u)\Delta M(v, v)|\psi \rangle^2 \quad (7.15)$$

sugiere el cálculo de $\langle \psi|\Delta M(u, u)\Delta M(v, v)|\psi \rangle$ y dado que es un número complejo, en principio puede ser escrito como

$$\langle \psi|\Delta M(u, u)\Delta M(v, v)|\psi \rangle = x + iy, \quad (7.16)$$

Por lo que

$$\langle \psi|[\Delta M(u, u), \Delta M(v, v)]|\psi \rangle = 2iy \quad (7.17)$$

y

$$\langle \psi|\{\Delta M(u, u), \Delta M(v, v)\}|\psi \rangle = 2x \quad (7.18)$$

Utilizando las ecuaciones 7.16, 7.17 y 7.18 se obtiene

$$4|\langle \psi|\Delta M(u, u)\Delta M(v, v)|\psi \rangle|^2 = |\langle \psi|[\Delta M(u, u), \Delta M(v, v)]|\psi \rangle|^2 + |\langle \psi|\{\Delta M(u, u), \Delta M(v, v)\}|\psi \rangle|^2. \quad (7.19)$$

Sustituyendo 7.19 en 7.15

$$\langle \psi|(\Delta M(u, u))^2|\psi \rangle \langle \psi|(\Delta M(v, v))^2|\psi \rangle \geq \frac{1}{4}|\langle \psi|[\Delta M(u, u), \Delta M(v, v)]|\psi \rangle|^2 + \frac{1}{4}|\langle \psi|\{\Delta M(u, u), \Delta M(v, v)\}|\psi \rangle|^2. \quad (7.20)$$

Calculando el conmutador

$$[\Delta M(u, u), \Delta M(v, v)] = (\Delta M(u, u)\Delta M(v, v) - \Delta M(v, v)\Delta M(u, u)), \quad (7.21)$$

donde utilizando ecuaciones 7.9 y 7.10 el primer termino es

$$\Delta M(u, u)\Delta M(v, v) = (M(u, u) - \langle \psi | M(u, u) | \psi \rangle)(M(v, v) - \langle \psi | M(v, v) | \psi \rangle) \quad (7.22)$$

$$\begin{aligned} &= M(u, u)M(v, v) - M(u, u)\langle \psi | M(v, v) | \psi \rangle \\ &\quad - \langle \psi | M(u, u) | \psi \rangle M(v, v) + \langle \psi | M(u, u) | \psi \rangle \langle \psi | M(v, v) | \psi \rangle \end{aligned} \quad (7.23)$$

análogamente el segundo término resulta

$$\Delta M(v, v)\Delta M(u, u) = M(v, v)M(u, u) - M(v, v)\langle \psi | M(u, u) | \psi \rangle \quad (7.24)$$

$$- \langle \psi | M(v, v) | \psi \rangle M(u, u) + \langle \psi | M(v, v) | \psi \rangle \langle \psi | M(u, u) | \psi \rangle$$

Utilizando las ecuaciones 7.22 y 7.24 en la ecuación 7.21 obtenemos

$$[\Delta M(u, u), \Delta M(v, v)] = M(u, u)M(v, v) - M(v, v)M(u, u) \quad (7.25)$$

$$= [M(u, u), M(v, v)] \quad (7.26)$$

por lo que 7.20 cambia ligeramente su expresión por

$$\begin{aligned} \langle \psi | (\Delta M(u, u))^2 | \psi \rangle \langle \psi | (\Delta M(v, v))^2 | \psi \rangle &\geq \frac{1}{4} |\langle \psi | [M(u, u), M(v, v)] | \psi \rangle|^2 \\ &\quad + \frac{1}{4} |\langle \psi | \{ \Delta M(u, u), \Delta M(v, v) \} | \psi \rangle|^2. \end{aligned} \quad (7.27)$$

De las ecuaciones 7.3 , 7.4 y 7.2

$$\begin{aligned} M(u, u)M(v, v) &= |u\rangle\langle u|v\rangle\langle v| \\ &= \cos\theta |u\rangle\langle v| \\ &= \cos\theta M(u, v), \end{aligned} \quad (7.28)$$

donde se define al operador

$$M(u, v) = |u\rangle\langle v| \quad (7.29)$$

De acuerdo con [13] la relación 7.27 es equivalente a

$$\begin{aligned} (\langle \psi | (\Delta M(u, u))^2 | \psi \rangle)^{1/2} (\langle \psi | (\Delta M(v, v))^2 | \psi \rangle)^{1/2} &\geq |\cos^2\theta \operatorname{Im}(\langle \psi | M(u, v) | \psi \rangle)|^2 \\ &\quad + |\cos\theta \operatorname{Re}(|\langle \psi | M(v, v) | \psi \rangle|) - \langle \psi | M(u, u) | \psi \rangle \times \langle \psi | M(v, v) | \psi \rangle|^2|^{1/2}. \end{aligned} \quad (7.30)$$

Con la finalidad de continuar los cálculos se considera un estado $|\psi\rangle = \alpha|u\rangle + \beta|v\rangle$ tal que $\alpha = \beta = \frac{1}{\sqrt{(|u\rangle+|v\rangle)}}$, es decir,

$$|\psi\rangle = \frac{|u\rangle + |v\rangle}{\sqrt{(|u\rangle + |v\rangle)}}, \quad (7.31)$$

por lo que

$$\begin{aligned} \langle\psi|u\rangle &= \frac{\langle u| + \langle v|}{\sqrt{(|u\rangle + |v\rangle)}} |u\rangle \\ &= \frac{1 + \cos\theta}{\sqrt{(\langle u| + \langle v|)(|u\rangle + |v\rangle)}} \\ &= \frac{1 + \cos\theta}{\sqrt{2(1 + \cos\theta)}} \\ &= \frac{\sqrt{1 + \cos\theta}}{\sqrt{2}} \\ &= \cos\frac{\theta}{2}, \end{aligned} \quad (7.32)$$

en el ultimo paso de 7.32 se hace uso de la identidad trigonométrica del coseno de medio argumento

$$\cos\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{1 + \cos\theta}}{\sqrt{2}}. \quad (7.33)$$

Haciendo uso de la ecuación 7.32, 7.29,7.4, 7.3 y 7.34

$$(\langle\psi|(\Delta M(u, u))^2|\psi\rangle)^{1/2}(\langle\psi|(\Delta M(v, v))^2|\psi\rangle)^{1/2} \geq \frac{1}{4} \text{sen}^2\theta \quad (7.34)$$

Relación de Incertidumbre Entrópica

De acuerdo con las ecuaciones 5.87 y 7.35, la incertidumbre en el resultado de la medición de $\Delta M(u, u)$ y $\Delta M(v, v)$ es

$$S_{\Delta M(u, u)}(|\psi\rangle) + S_{\Delta M(v, v)}(|\psi\rangle) \geq C(\Delta M(u, u), \Delta M(u, u)), \quad (7.35)$$

del lado izquierdo de la desigualdad tenemos que $S_{\Delta M(u, u)}(|\psi\rangle)$ y $S_{\Delta M(v, v)}(|\psi\rangle)$ son determinados por las ecuaciones 7.12 y 7.13

$$S_{\Delta M(u, u)} = \sum_u p_{\Delta M(u, u)} \ln(p_{\Delta M(u, u)}), \quad (7.36)$$

y

$$S_{\Delta M(v,v)} = \sum_v p_{\Delta M(v,v)} \ln(p_{\Delta M(v,v)}), \quad (7.37)$$

con

$$p_{\Delta M(u,u)} = |\langle u|\psi\rangle|^2 \quad (7.38)$$

y

$$p_{\Delta M(v,v)} = |\langle v|\psi\rangle|^2. \quad (7.39)$$

Mientras que del lado derecho de la desigualdad tenemos

$$C(\Delta M(u, u), \Delta M(v, v)) = \inf_{|\psi\rangle} \{U(\Delta M(u, u), \Delta M(v, v), |\psi\rangle)\}. \quad (7.40)$$

Mediante la sustitución de las ecuaciones 7.36, 7.37, 7.38, 7.39 y 7.32 y como los vectores $|u\rangle$ y $|v\rangle$ son eigenestados de $\Delta M(u, u)$ y $\Delta M(v, v)$ se obtiene la suma de las entropías mediante

$$\begin{aligned} S_{\Delta M(u,u)} + S_{\Delta M(v,v)} &= - \sum_u |\langle \psi|u\rangle|^2 \ln|\langle \psi|u\rangle|^2 - \sum_v \langle \psi|v\rangle|^2 \ln|\langle \psi|u\rangle|^2 \\ &= - \sum_{u,v} |\langle \psi|u\rangle|^2 |\langle \psi|v\rangle|^2 (\ln|\langle \psi|u\rangle|^2 + \ln|\langle \psi|u\rangle|^2) \\ &= -\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)(\ln(\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)) + \ln(\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right))) \\ &= -\cos^4\left(\frac{\theta}{2}\right)(2\ln(\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right))) \\ &= -\left(\frac{1 + \cos\theta}{2}\right)^2 \ln\left(\frac{1 + \cos\theta}{2}\right)^2. \end{aligned} \quad (7.41)$$

Gráficando la ecuación 7.41 y 7.34.

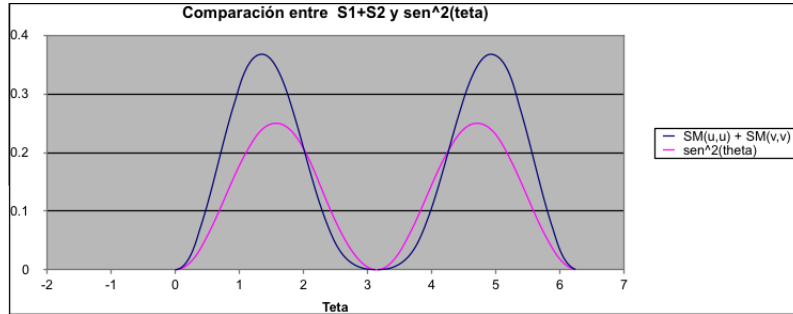


Figura 7.2: Comparación entre los resultados de los cálculos 7.41 y 7.34 de la incertidumbre de las mediciones

7.2.2. Pruebas de la implementación

$\{A_i\}$ es POVM

Puesto que los estados $|u\rangle$ y $|v\rangle$ son estados no ortogonales, se tiene que

$$\langle u|v\rangle = \cos\theta, \quad (7.42)$$

Además el estado general para la polarización de un fotón es

$$|\psi\rangle = \alpha|u\rangle + \beta|v\rangle, \quad (7.43)$$

Por lo que las respectivas probabilidades de los resultados de que un estado $|\psi\rangle$ que es medido por el POVM son

$$P_u = \langle\psi|A_u|\psi\rangle = |\alpha|^2(1 - \cos\theta), \quad (7.44)$$

$$P_v = \langle\psi|A_v|\psi\rangle = |\beta|^2(1 - \cos\theta), \quad (7.45)$$

y

$$P_? = \langle\psi|A_?|\psi\rangle = |\alpha + \beta|^2(\cos\theta), \quad (7.46)$$

Es claro que de el conjunto de operadores $\{A_i\}$ cada elemento es positivo y la suma de sus elementos es la unidad.

Luego utilizando la condición de normalización

$$1 = \langle\psi|\psi\rangle = |\alpha|^2 + |\beta|^2 + (\alpha^*\beta + \alpha\beta^*). \quad (7.47)$$

Se tiene que la suma de las probabilidades es la unidad

$$P_v + P_u + P_? = 1 \quad (7.48)$$

Para terminar de mostrar que el conjunto $\{A_i\}$ distingue de forma efectiva a dos estados $|u\rangle$ y $|v\rangle$ no ortogonales, consideremos al fotón incidente en dos distintos estados, los estado $|u\rangle$ y $|v\rangle$; cuando es $|u\rangle$, se tiene que $\alpha\psi|A_v|\psi\rangle = 0$, por otro lado cuando el fotón incidente

es $|v\rangle$, $\alpha\psi|A_u|\psi\rangle = 0$, lo cual no es casualidad, es por la forma en que los elementos de un POVM son elegidos. Además, cuando el resultado de la medición es A_u , la probabilidad de que el estado incidente haya sido $|v\rangle$ es de cero, por lo que un fotón en estado $|v\rangle$ no puede dar como resultado A_u . De forma análoga se tiene con el resultado A_v y el estado $|u\rangle$. Mientras que para el estado A_v , el estado incidente no es concluyente, no se puede decir nada al respecto del estado, sin embargo se tiene la certeza de que no se está cometiendo error al identificar el estado, es decir, los estados $|u\rangle$ y $|v\rangle$ son bien identificados, al menos en algunos casos.

El aparato representa al POVM

El sistema mostrado en la figura 7.1. Tiene los fotodetectores D_i que son representados por los operadores de medición A_i . Tiene además dos separadores de haz BS_1 y BS_2 , el primero de ellos tiene coeficientes de transmisión [17]

$$T_1 = 1 - \tan^2(\theta/2) \quad (7.49)$$

y reflexión

$$R_1 = 1 - T_1 = \tan^2(\theta/2). \quad (7.50)$$

Mientras que para BS_2 sus coeficientes son $1/2$. Un rotador de polarización R que toma al vector $|u - v\rangle$ y lo transforma en $-|u + v\rangle$, es decir, $R|u - v\rangle = -|u + v\rangle$. Un espejo M y un prisma de Wollaston, W , cuando es correctamente alineado su función es tomar el fotón incidente y lo hace tomar un camino específico que se etiqueta con su estado, es decir, si se alinea correctamente para los estados $|u + v\rangle$ y $|u - v\rangle$, un fotón incidente con polarización $|u + v\rangle$, tomará el camino etiquetado con $u + v$ y su estado será $|\psi_1\rangle$ mientras que si el estado de polarización es $|u - v\rangle$ su estado será $|\psi_2\rangle$ y tomará el camino $u - v$. Aquí nuestro propósito es obtener la expresión de los términos $|\psi_i\rangle$ para calcular las probabilidades P_i y verificar si satisfacen las características estadísticas necesarias para que el aparato sea una implementación confiable de un POVM.

Recordemos que

$$|\psi\rangle = \alpha|u\rangle + \beta|v\rangle, \quad (7.51)$$

y que los estados $|u + v\rangle$ y $|u - v\rangle$ son los estados normalizados

$$|u + v\rangle = \frac{|u\rangle + |v\rangle}{[(\langle u| + \langle v|)(|u\rangle + |v\rangle)]^2} \quad (7.52)$$

y

$$|u - v\rangle = \frac{|u\rangle - |v\rangle}{[(\langle u| - \langle v|)(|u\rangle - |v\rangle)]^2}. \quad (7.53)$$

Cuando el fotón pasa a través del prisma de Wollaston, su estado es proyectado al estado $|u + v\rangle$ o $|u - v\rangle$ y toma los caminos $|\psi_1\rangle$ y $|\psi_2\rangle$ respectivamente. Entonces

$$|\psi_1\rangle = |u + v\rangle\langle u + v|\psi\rangle \quad (7.54)$$

$$= 2^{-1/2}(\alpha + \beta)(1 + \cos\theta)^{1/2}|u + v\rangle \quad (7.55)$$

y

$$|\psi_2\rangle = |u - v\rangle\langle u - v|\psi\rangle \quad (7.56)$$

$$= 2^{-1/2}(\alpha - \beta)(1 - \cos\theta)^{1/2}|u - v\rangle \quad (7.57)$$

Dado que

$$\langle\psi_3|\psi_3\rangle = T_1\langle\psi_1|\psi_1\rangle \quad (7.58)$$

y

$$\langle\psi_4|\psi_4\rangle = R_1\langle\psi_1|\psi_1\rangle, \quad (7.59)$$

donde $T_1 = 1 - \tan^2(\theta/2)$ y $R_1 = 1T_1 = \tan^2(\theta/2)$ y con la finalidad de facilitar cálculos se utiliza la identidad

$$\tan(\theta/2) = \sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta}}, \quad (7.60)$$

obteniendo así

$$\langle\psi_3|\psi_3\rangle = |\alpha + \beta|^2(\cos\theta) \quad (7.61)$$

y

$$\langle\psi_4|\psi_4\rangle = \frac{1}{2}|\alpha + \beta|^2(1 - \cos\theta) \quad (7.62)$$

Por lo que

$$|\psi_3\rangle = |\alpha + \beta|(\cos\theta)^{1/2}|u + v\rangle \quad (7.63)$$

y como $|\psi_4\rangle$ es resultado de una reflexión, su estado tiene un desplazamiento de fase en un factor de i [18], por lo que

$$|\psi_4\rangle = i\frac{1}{2} |\alpha + \beta|(1 - \cos\theta)^{1/2}|u - v\rangle. \quad (7.64)$$

Puesto que operador de rotación es $R|u - v\rangle = -|u + v\rangle$, $|\psi_5\rangle$ es

$$|\psi_5\rangle = R|\psi_2\rangle \quad (7.65)$$

$$= (R)2^{-1/2}(\alpha - \beta)(1 - \cos\theta)^{1/2}|u - v\rangle = -2^{-1/2}(\alpha - \beta)(1 - \cos\theta)^{1/2}|u + v\rangle \quad (7.66)$$

Los coeficientes del segundo separador de haz son de $1/2$, por lo que $|\psi_6$ sera la superposición de el estado reflejado por $|\psi_4$ y el transmitido por $|\psi_5$; mientras que $|\psi_7$ será la superposición de el estado reflejado por $|\psi_5$ y el transmitido por $|\psi_6$, es decir

$$|\psi_5\rangle = R|\psi_2\rangle \quad (7.67)$$

$$= (R)2^{-1/2}(\alpha - \beta)(1 - \cos\theta)^{1/2}|u - v\rangle = -2^{-1/2}(\alpha - \beta)(1 - \cos\theta)^{1/2}|u + v\rangle \quad (7.68)$$

y

$$|\psi_5\rangle = R|\psi_2\rangle \quad (7.69)$$

$$= (R)2^{-1/2}(\alpha - \beta)(1 - \cos\theta)^{1/2}|u - v\rangle = -2^{-1/2}(\alpha - \beta)(1 - \cos\theta)^{1/2}|u + v\rangle. \quad (7.70)$$

Finalmente utilizando las expresiones de los estados $|\psi_3$, $|\psi_6$ y $|\psi_7$ se prueba que

$$\langle\psi_7|\psi_7\rangle = |\beta|^2(1 - \cos\theta) = \langle\psi|A_v|\psi\rangle, \quad (7.71)$$

$$\langle\psi_5|\psi_5\rangle = |\alpha|^2(1 - \cos\theta) = \langle\psi|A_u|\psi\rangle, \quad (7.72)$$

y

$$\langle\psi_3|\psi_3\rangle = |\alpha + \beta|^2(\cos\theta) = \langle\psi|A_z|\psi\rangle, \quad (7.73)$$

Por lo que podemos concluir que el dispositivo de la figura 7.1 es una implementación confiable de el POVM $\{A_i\}$, ecuaciones 7.5, 7.6 y 7.7.

Conclusiones

7.3. Resultados y Conclusiones

Se presentó de forma breve la historia de como ha evolucionado la mecánica cuántica desde antes de su origen los cuales ayudan a entender un poco más. Se presentaron los fundamentos para revisar los postulados de la mecánica cuántica seguido de la reformulación de los postulados con la matriz de densidad que es utilizada por los POVM y como funcionan. Las aplicaciones más inmediatas de los POVM están directamente relacionadas con la criptografía. Se presentaron dos cálculos diferentes de la incertidumbre asociados a dos operadores de medición para fotones polarizados no ortogonalmente; el producto de las incertidumbres presenta tener mínimos en múltiplos de π y máximos en múltiplos de π más $\pi/2$; mientras que la relación entrópica de la incertidumbre, además de mostrar mayor incertidumbre, no muestra su máximo en múltiplos de π más $\pi/2$, aunque si sus mínimos con entropía cero cuando θ es múltiplo de π . Por último se mostró que el aparato mostrado representa una implementación fiable de POVM para medición de fotones.

CAPÍTULO 7 IMPLEMENTACIÓN Y CÁLCULOS
7.3. RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Bibliografía

- [1] Nouredine Zettili Quantum Mechanics Concepts and Applications Wiley 2nd ed.
- [2] Michael A. Nielsen, Isaac I. Chuang. Quantum Computation and Quantum Information. Cambridge, University Press, 2010.
- [3] C. Gerry, P. Knight. Introductory Quantum Optics. Cambridge, University Press, 2005.
- [4] Asher Peres. Quantum Theory: Concepts and methods. KLUWER ACADEMIC PUBLISHERS, 2002.
- [5] T. Heinosaari, M. Ziman. Guide to mathematical concepts of quantum theory. aca physica slovacica vol 58 No 4, 487-674.
- [6] Jonathan A. Jones, Dieter Jaksch. Quantum Information and Communication, Cambridge, University Press, 2012.
- [7] Thomas M. Cover, Joy A. Thomas. Elements of information theory. Wiley, 2da ed, 2005.
- [8] Mark Beck. Quantum Mechanics Theory and Experiment. Oxford, University Press, 2012.
- [9] David Deutsch. Uncertainty in Quantum Measurements. Physical Review Letters, 28 Feb 1983.
- [10] Juan Carlos Paniagua. Operador de densidad. Operadores producto. Universitat de Barcelona, 2012.

- [11] Adriano Barenco. Quantum Physics and Computers. Clarendon Laboratory, Oxford, 2012.
- [12] Juha-Pekka. Complete measurement of quantum observables. Turku Centre for Quantum Physics, Department of Physics and Astronomy, University of Turku, Jun 2012.
- [13] Howard E. Brandt. Positive operator valued measure in quantum information processing. U.S. Army Research Laboratory, Adelphi, Maryland, 1998.
- [14] Howard E. Brandt. Quantum measurement with a positive operator-valued measure. U.S. Army Research Laboratory, Adelphi, 2003.
- [15] Serge Massar. Uncertainty relations for positive-operator-value measures
- [16] M.G.A. Paris. The modern tools of quantum mechanics. The European Physical Journal Special Topics, 203, 61-86, 2012.
- [17] Myers J M and Brandt H E. Converting a positive operator valued measure to a design for a measuring instrument on the laboratory bench. Meas. Sci. Technol. 8. 1997.
- [18] V. Degiorgio. Phase Shift Between the Transmitted and the Reflected Optical Fields if a Semireflecting Lossless Mirror is $\pi/2$. Am. J. Phys. 48, 81,82 1980.
- [19] E. Hecht, Optics, 4th ed. (Addison Wesley, San Francisco, 2002).
- [20] <http://quantumphysics.iop.org/>.
- [21] <https://es.wikipedia.org/>.