

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
POSTGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

“Rigidez del n -ésimo hiperespacio de un continuo”

Tesis que para obtener el grado de

Maestro en Ciencias Matemáticas

Presenta

Germán Montero Rodríguez

Directores de Tesis

**Dr. David Herrera Carrasco
Dr. Fernando Macías Romero**

Puebla Pue.

Junio de 2015.

I

A *Yasmine*.....

.....

Yasmine
vida
coraxén.

Agradecimientos

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, CONACYT, por el apoyo económico que me proporcionó durante mis estudios de maestría.

.....

Introducción

Un *continuo* es un espacio métrico no vacío compacto y conexo. Un *hiperespacio de un continuo* X es una familia de subconjuntos de X que cumplen una cierta característica en particular. Dados un continuo X y $n \in \mathbb{N}$, consideramos los siguientes hiperespacios de X :

$$2^X = \{A \subset X : A \neq \emptyset \text{ y } A \text{ es cerrado en } X\},$$

$$C_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes}\},$$

$$F_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos}\}.$$

Todos los hiperespacios son considerados con la métrica de Hausdorff [43, Observación 0.4]. Notemos que $F_1(X) = \{\{x\} : x \in X\}$. Los hiperespacios $F_n(X)$ y $C_n(X)$ son conocidos como el *n-ésimo producto simétrico de X* y el *n-ésimo hiperespacio de X* , respectivamente. Un hiperespacio $K(X)$ de X , donde $K(X) \in \{2^X, C_n(X), F_n(X)\}$, es *rígido* si para cualquier homeomorfismo $h : K(X) \rightarrow K(X)$, se tiene que $h(F_1(X)) = F_1(X)$. En este trabajo estudiamos condiciones bajo las cuales un continuo X tiene hiperespacio rígido $C_n(X)$. Entre otros, consideramos familias de continuos como, dendroides, continuos localmente conexos, continuos indescomponibles tales que todos sus subcontinuos propios no degenerados son arcos, continuos hereditariamente indescomponibles y abanicos suaves.

La aportación en esta tesis consiste en dar una presentación, en cuanto al tema relacionado con el concepto de rigidez de hiperespacios, de los artículos de Rodrigo Hernández Gutiérrez, Alejandro Illanes y Verónica Martínez de la Vega [26] y [29], con demostración detallada de los resultados ahí encontrados.

Este trabajo de tesis se divide en dos partes. En el Capítulo 1 se proporciona el material necesario y suficiente de los conceptos que se requieren a lo largo de este trabajo (hiperespacio rígido, hiperespacio único, conexidad local, continuos indescomponibles, dimensión) y resultados relacionados con los conceptos mencionados que nos ayudan a demostrar los resultados principales en el capítulo siguiente. En el Capítulo 2 enunciamos y desarrollamos con detalle la prueba de los teoremas principales, en [26] y [29], que tratan

sobre rigidez del hiperespacio $C_n(X)$.

El n -ésimo hiperespacio de un continuo para continuos indescomponibles tales que todos sus subcontinuos propios no degenerados son arcos, es rígido:

Teorema 1. Si X es un continuo indescomponible tal que todos sus subcontinuos propios no degenerados son arcos y $n \in \mathbb{N} - \{2\}$, entonces el hiperespacio $C_n(X)$ es rígido (vea Teorema 2.38 de este trabajo).

Dentro de la familia de los continuos localmente conexos probamos que cuando no son casi enrejados, entonces el n -ésimo hiperespacio no es rígido para todo n número natural, como lo afirma el siguiente resultado.

Teorema 2. Si X es un continuo localmente conexo que no es casi enrejado y $n \in \mathbb{N}$, entonces $C_n(X)$ no es rígido (vea Teorema 2.47 de este trabajo).

También se proporciona una caracterización de la rigidez de $C(X)$.

Teorema 3. Sea X un continuo localmente conexo casi enrejado. Entonces $C(X)$ es rígido si y solo si X no contiene pelos (vea Teorema 2.53 de este trabajo).

Para teminar la sección probamos que para los continuos X localmente conexos casi enrejados y sin pelos, si $n \in \mathbb{N} - \{2\}$, entonces el hiperespacio $C_n(X)$ es rígido.

Teorema 4. Si X es un continuo localmente conexo casi enrejado sin pelos y $n \in \mathbb{N} - \{2\}$, entonces $C_n(X)$ es rígido (vea Teorema 2.54 de este trabajo).

Otra familia de continuos que se estudia en este trabajo son los abanicos suaves. Se prueba el siguiente resultado que relaciona la rigidez de $C(X)$ con $C_n(X)$.

Teorema 5. Si X es un abanico suave tal que $C(X)$ es rígido y $n \in \mathbb{N} - \{2\}$, entonces $C_n(X)$ es rígido (vea Teorema 2.78 de este trabajo).

En la última sección se da un resultado que garantiza la rigidez del n -ésimo hiperespacio de un continuo para todo número natural.

Teorema 6. Si X es un continuo hereditariamente indescomponible y $n \in \mathbb{N}$, entonces $C_n(X)$ es rígido (vea Teorema 2.83 de este trabajo).

Índice general

Introducción	III
1. Preliminares	1
1.1. Continuos	1
1.2. Hiperespacios	5
2. Rigidez	17
2.1. Continuos alambrados	17
2.2. Arco continuos indescomponibles	32
2.3. Continuos localmente conexos	46
2.4. Abanicos suaves	56
2.5. Continuos hereditariamente indescomponibles	70
Conclusión	71
Bibliografía	77
Índice alfabético	82

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se enuncian algunos resultados que son necesarios para el desarrollo de esta tesis.

1.1. Continuos

En todo este trabajo, si X es un espacio topológico y A un subconjunto de X , los símbolos $cl(A)$, $fr(A)$ e $int(A)$ denotan la **cerradura** de A , la **frontera** de A y el **interior** de A en X , respectivamente. También, si $A \subset Y \subset X$, los símbolos $cl_Y(A)$, $fr_Y(A)$ e $int_Y(A)$ denotan la cerradura de A , la frontera de A y el interior de A en el subespacio Y de X , respectivamente. La cardinalidad de un conjunto A se representa por $|A|$. Como es usual, los símbolos \emptyset , \mathbb{N} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{R}^+ y \mathbb{R}^2 , representan el conjunto vacío, los números naturales, los números racionales, los números reales, los números reales positivos y el plano euclidiano, respectivamente; el símbolo \aleph_0 , denota la cardinalidad de los números naturales. Un espacio topológico es **no degenerado** si tiene más de un punto. Si A y B son dos conjuntos, entonces $A - B$ es la colección de los elementos de A que no están en B . Citamos los teoremas que no tengan demostración.

Definición 1.1. Sean X un espacio topológico y $p \in X$; un subconjunto V de X es una **vecindad** de p si existe un conjunto abierto U en X tal que $p \in U \subset V$.

Definición 1.2. Sean X un espacio métrico con métrica d ; $p \in X$ y $\varepsilon > 0$, la **bola abierta** en X con centro en p y radio ε , denotada por

$B(p, \varepsilon)$, es el conjunto $B(p, \varepsilon) = \{x \in X : d(p, x) < \varepsilon\}$. Escribimos $B_X(p, \varepsilon)$ cuando el espacio X necesita ser mencionado.

A lo largo de este trabajo los subconjuntos de \mathbb{R}^n , con $n \in \mathbb{N}$, están dotados con la topología usual.

Uno de los conceptos más importantes en nuestro estudio es el siguiente:

Definición 1.3. *Un espacio métrico X es un **continuo** si X es no vacío, compacto y conexo. Un subconjunto Y de un espacio topológico Z es un **subcontinuo** de Z si el subespacio Y es un continuo. El continuo X es **descomponible** si existen dos subcontinuos propios U y V de X tales que $X = U \cup V$. En caso contrario, el continuo X es **indescomponible**.*

Definición 1.4. *Sean X un continuo y $p \in X$. La **composante** de p en X , la cual denotamos por $K(p)$, se define como:*

$$K(p) = \{x \in X : \text{existe un subcontinuo propio } M \text{ de } X \text{ tal que } p, x \in M\}.$$

Note que $K(p)$ es la unión de todos los subcontinuos propios de X que contienen a p . Cuando hablemos de una composante de X pensaremos en la composante de algún punto de X .

A continuación definimos el concepto de localmente conexo. Este concepto nos será de gran ayuda en el Capítulo 2.

Definición 1.5. *Sean X un espacio topológico y $p \in X$. El espacio topológico X es **localmente conexo en el punto p** si para cada conjunto abierto U en X tal que $p \in U$, existe un conjunto abierto y conexo V en X tal que $p \in V \subset U$. Si X es localmente conexo en cada uno de sus puntos decimos que X es **localmente conexo**.*

Definición 1.6. *Sean X un espacio topológico y $p \in X$. El espacio topológico X es **conexo en pequeño en el punto p** si para cualquier vecindad U de p en X , existe una vecindad conexa V de p en X tal que $V \subset U$. Si X es conexo en pequeño en cada uno de sus puntos decimos que X es **conexo en pequeño**.*

Observación 1.7. De acuerdo a las definiciones de espacio localmente conexo y conexo en pequeño se puede observar que si un espacio topológico X es localmente conexo en un punto $p \in X$, entonces X es conexo en pequeño en p . Vea el continuo en la figura 5.22 de nuestra referencia [44] página 84.

Definición 1.8. Un **arco** es un espacio topológico homeomorfo al intervalo cerrado $[0, 1]$. Si $f : [0, 1] \rightarrow A$ es un homeomorfismo y denotamos $x = f(0)$ y $y = f(1)$, entonces los puntos x y y son llamados los **puntos extremos del arco** A . Un arco de x a y significa un arco con puntos extremos x y y .

Definición 1.9. Sea $n \in \mathbb{N}$. Una **n-celda** es un espacio homeomorfo a la bola unitaria $B_n(0, 1) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, 0) \leq 1\}$. Una **curva cerrada simple** es un espacio topológico homeomorfo a la circunferencia unitaria $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

Otro concepto imprescindible en nuestro estudio es el siguiente.

Definición 1.10. Un espacio topológico X es **arco conexo**, si para cualesquiera $x, y \in X$ con $x \neq y$, existe un arco en X de x a y .

Definición 1.11. Una **gráfica finita** es un continuo que puede escribirse como la unión de una cantidad finita de arcos, tales que cualesquiera dos de ellos son ajenos o bien se intersectan en uno o en sus dos puntos extremos, únicamente.

Definición 1.12. Sea $n \in \mathbb{N}$. Un **n-odo simple** es una gráfica finita G que es la unión de n arcos emanados de un punto singular, v , y disjuntos entre sí. El punto v es llamado el **vértice** de G . Un 3-odo simple es llamado **triodo simple**.

Definición 1.13. Un **arco libre** en el continuo X es un arco A con puntos extremos x y y tal que $A - \{x, y\}$ es abierto en X . Un **punto extremo** en un continuo X es un punto $x \in X$ tal que x es un punto extremo de cualquier arco que lo contenga.

Definición 1.14. Sea X un continuo. Un **pelo** en X es un arco A con un punto extremo x tal que $A - \{x\}$ es abierto en X .

Ejemplo 1.15. (a) Un **arco libre** en el continuo $X = [0, 1]$ es el intervalo $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$.

(b) Sea el continuo $X = [0, 1]$. Un **pelo** en X es el intervalo $[0, \frac{1}{2}]$.

Definición 1.16. Dado un continuo X , sean

$$\mathcal{G}(X) = \{p \in X : p \text{ pertenece al interior de una gráfica finita contenida en } X\} \text{ y } \mathcal{P}(X) = X - \mathcal{G}(X).$$

Un continuo X es **casi enrejado** (vea [27, Pág. 2583 y 1584]) si el conjunto $\mathcal{G}(X)$ es denso en X , es decir, si $\overline{\mathcal{G}(X)} = X$.

Note las siguientes dos observaciones respecto a la definición de continuo casi enrejado.

- (1) Un continuo X es casi enrejado si y solo si $\overline{\mathcal{G}(X)} = X = \overline{X - \mathcal{P}(X)}$ si y solo si para todo U abierto de X , $U \cap \mathcal{G}(X) \neq \emptyset$ si y solo si para todo U abierto de X , se tiene que $U \not\subset \mathcal{P}(X)$.
- (2) El continuo X no es casi enrejado si y solo si existe un abierto no vacío U en X tal que $U \subset \mathcal{P}(X)$.

Algunos ejemplos de continuos casi enrejados son:

- (a) Sean los puntos en \mathbb{R}^2 de la forma $a_n = (1, \frac{1}{n})$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Definimos $Z = \bigcup \{va_n : v = (0, 0) \text{ y } va_n \text{ denota el segmento de recta que une a } v \text{ con } a_n \text{ para cada } n \in \mathbb{N}\}$. El espacio \overline{Z} es conocido como el abanico armónico.
- (b) El continuo $sen(\frac{1}{x})$ es la cerradura del conjunto $W = \{(x, \frac{1}{x}) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1\}$.
- (c) Sean los puntos en \mathbb{R}^2 de la forma $b_n = (1, \frac{1}{n^2})$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Definimos $F_\omega = \bigcup \{vb_n : v = (0, 0) \text{ y } vb_n \text{ denota el segmento de recta que une } v \text{ con } b_n \text{ para cada } n \in \mathbb{N}\}$.
- (d) La dendrita D_3 (vea [8, Sección 3]) no es casi enrejado

1.2. Hiperespacios

En esta sección estudiamos los conceptos de hiperespacio, métrica de Hausdorff, topología de Vietoris y mencionamos también resultados que usaremos durante el desarrollo los resultados principales.

Definición 1.17. *Dado un continuo X , con métrica d , los hiperespacios del continuo X son familias de subconjuntos de X , con alguna característica especial. Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideraremos los siguientes hiperespacios de X :*

$$2^X = \{A \subset X : A \text{ es no vacío y cerrado en } X\},$$

$$C_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes}\},$$

$$F_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos}\}.$$

Todos los hiperespacios son considerados con la métrica de **Hausdorff** H , vea [43, Observación (0.4)], definida como

$$H(A, B) = \max\{\max\{d(a, B) : a \in A\}, \max\{d(b, A) : b \in B\}\},$$

donde $d(a, B) = \min\{d(a, b) : b \in B\}$.

El hiperespacio $F_n(X)$ es conocido como el **n -ésimo producto simétrico** de X . El hiperespacio $F_1(X)$ es una copia isométrica de X encajada en cada uno de los hiperespacios definidos antes. Al hiperespacio $C_n(X)$, con la métrica de Hausdorff heredada de 2^X , se le conoce como el **n -ésimo hiperespacio** de X . Extendemos la definición de $C_n(X)$ definiendo $C_0(X) = \emptyset$. Para el caso en que $n = 1$ pensaremos en $C(X) = C_1(X)$ y se conoce como el **hiperespacio de los subcontinuos** del continuo X .

Supongamos que d es una métrica para X . Dados $\epsilon > 0$, $p \in X$ y $A \in 2^X$, sean $N(\epsilon, A) = \{p \in X : \text{existe } a \in A \text{ tal que } d(p, a) < \epsilon\}$ y $B^H(\epsilon, A) = \{B \in 2^X : H(A, B) < \epsilon\}$ (escribimos $N_X(\epsilon, A)$ cuando el espacio X necesita ser mencionado).

A continuación exponemos que todos los hiperespacios de un continuo los podemos considerar ya sea con la topología de Vietoris o con la topología inducida por la métrica de Hausdorff, indistintamente.

Definición 1.18. Sean X un continuo, $n \in \mathbb{N}$ y U_1, U_2, \dots, U_n subconjuntos de X , no vacíos. El **vietórico** de U_1, U_2, \dots, U_n , denotado por $\langle U_1, U_2, \dots, U_n \rangle$, es el conjunto

$$\left\{ A \in 2^X : A \subset \bigcup_{i=1}^n U_i \text{ y } A \cap U_i \neq \emptyset, \text{ para cada } i \in \{1, 2, \dots, n\} \right\}.$$

Dado un continuo X , el siguiente resultado dota de una topología al hiperespacio 2^X .

Teorema 1.19. [13, Teorema 2.20] Si X es un continuo y $\mathcal{B} = \{\langle U_1, U_2, \dots, U_n \rangle : n \in \mathbb{N} \text{ y } U_1, U_2, \dots, U_n \text{ son conjuntos abiertos en } X\}$, entonces \mathcal{B} es una base para una topología del hiperespacio 2^X .

La topología generada por \mathcal{B} , denotada por τ_V es conocida como la **Topología de Vietoris**.

Teorema 1.20. [13, Teorema 2.22] Sea X un continuo. La Topología de Vietoris, τ_V , y la topología inducida por la métrica de Hausdorff, τ_H , en 2^X son iguales.

Ahora, si X es un continuo, $m, n \in \mathbb{N}$ y U_1, U_2, \dots, U_m son subconjuntos de X , entonces consideramos la siguiente subcolección de $C_n(X)$,

$$\langle U_1, U_2, \dots, U_m \rangle_n = \left\{ A \in C_n(X) : A \subset \bigcup_{i=1}^m U_i \text{ y } A \cap U_i \neq \emptyset, \text{ para cada } i \in \{1, 2, \dots, m\} \right\}.$$

El concepto principal de nuestro trabajo es el siguiente.

Definición 1.21. Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$. Un hiperespacio $K(X) \in \{2^X, C_n(X), F_n(X)\}$, es **rígido** si para cualquier homeomorfismo $h : K(X) \rightarrow K(X)$, se tiene que $h(F_1(X)) = F_1(X)$.

Definición 1.22. Sean continuo X y $n \in \mathbb{N}$. El continuo X tiene **hiperespacio único** $K(X) \in \{2^X, C_n(X), F_n(X)\}$, si se cumple la siguiente implicación: si Y es un continuo tal que $K(X)$ es homeomorfo al hiperespacio $K(Y)$, entonces X es homeomorfo a Y .

La unicidad de hiperespacios ha sido ampliamente estudiada (vea [3], [7], [16] al [23], [25] al [29], [36] y [37]).

Sean X un continuo $n \in \mathbb{N}$ y $K(X) \in \{2^X, C_n(X), F_n(X)\}$. Una técnica útil es encontrar una propiedad que caracterice los elementos de $F_1(X)$ en el hiperespacio $K(X)$. Cuando es posible encontrar tal caracterización, el hiperespacio $K(X)$ es rígido. Esta técnica ha sido usada en el estudio de unicidad de hiperespacios, por lo que ambos temas están relacionados. Por otro lado, los temas en este trabajo nos conducen a nuevos resultados sobre la unicidad de hiperespacios.

Dados un continuo X y $n \in \mathbb{N} - \{2\}$, en este trabajo estudiamos la rigidez de los hiperespacios $C_n(X)$. En [29] se introdujo el estudio de rigidez de hiperespacios. En [28] se investigó la rigidez del producto simétrico $F_n(X)$.

Uno de los resultados principales que desarrollamos a lo largo de este trabajo es que si X es un arco continuo indescomponible (vea la Definición 2.6) y si $n \in \mathbb{N} - \{2\}$, entonces X tiene hiperespacio único $C_n(X)$ y además $C_n(X)$ es rígido.

Problema 1.23. *Sea X un arco continuo indescomponible. ¿El hiperespacio $C_2(X)$ es rígido?*

Entre otros, consideramos las familias de continuos como; dendroides, continuos localmente conexos, continuos indescomponibles tal que todos sus subcontinuos propios no degenerados son arcos, continuos hereditariamente indescomponibles y abanicos suaves.

Ahora mencionamos algunos resultados que vamos a hacer uso de ellos a lo largo del trabajo.

Teorema 1.24. *Si X un espacio topológico, Y y A son subconjuntos de X , entonces*

- (a) $fr_Y(A \cap Y) \subset fr_X(A)$,
- (b) si $cl_X(A) \subset int_X(Y)$, entonces $fr_Y(A) = fr_X(A)$.

Demostración. (a) $fr_Y(A \cap Y) = cl_Y(A) \cap cl_Y(Y - A) \subset cl_X(A) \cap cl_X(Y - A) \subset cl_X(A) \cap cl_X(X - A) = fr_X(A)$.

(b) $fr_X(A) = cl_X(A) \cap cl_X(X - A) = cl_X(A) \cap [cl_X(X - Y) \cup cl_X(Y - A)] = [cl_X(A) \cap (X - int_X(Y))] \cup [cl_X(A) \cap cl_X(Y - A)] =$

$$[cl_X(A) \cap cl_X(Y-A)] = Y \cap cl_X(A) \cap cl_X(Y-A) = cl_Y(A) \cap cl_Y(Y-A) = fr_Y(A). \quad \square$$

También un concepto indispensable dentro del desarrollo de nuestro trabajo es el de dimensión el cual definimos a continuación.

Definición 1.25. *Dado cualquier número entero n mayor o igual que -1 , vamos a definir recursivamente cuándo un espacio métrico separable X tiene **dimensión** menor o igual que n , lo cual denotamos por $\dim[X] \leq n$, de la siguiente forma:*

- (a) *Para cualquier espacio métrico separable X , $\dim[X] \leq -1$ si y solo si $X = \emptyset$.*
- (b) *Dada $n \geq 0$, supongamos que hemos definido cuándo un espacio métrico separable tiene dimensión menor o igual que $n-1$. Entonces, para cualquier espacio métrico separable X y cualquier $p \in X$, $\dim_p[X] \leq n$ si X tiene una base local de vecindades de p cuyas fronteras tienen dimensión menor o igual a $n-1$. Además, si para cada $p \in X$ se satisface que $\dim_p[X] \leq n$, entonces $\dim[X] \leq n$.*

Definimos también lo siguiente:

- (a) *Para cualquier espacio métrico separable X y cualesquiera $p \in X$ y $n \geq 0$, $\dim_p[X] = n$ si $\dim_p[X] \leq n$ y es falso que $\dim_p[X] \leq n-1$.*
- (b) *Para cualquier espacio métrico separable X y cualquier $n \geq 0$, la dimensión de X es n , denotada por $\dim[X] = n$, si $\dim[X] \leq n$ y es falso que $\dim[X] \leq n-1$.*
- (c) *Para cualquier espacio métrico separable X , la dimensión de X es ∞ , denotada por $\dim[X] = \infty$, si $\dim[X] \leq n$ es falso para cada $n \in \mathbb{N}$.*

El siguiente resultado refleja cómo se comporta la dimensión con respecto a subespacios.

Teorema 1.26. *Si X es un espacio topológico, A un subespacio de X y $p \in A$, entonces*

- (a) $\dim[A] \leq \dim[X]$

(b) $\dim_p[A] \leq \dim_p[X]$

(c) Si X es regular y $p \in \text{int}_X(A)$, entonces $\dim_p[A] = \dim_p[X]$.

Demostración. Para la prueba de (a) y (b) vea [5, Teorema 1.68].

Veamos que se cumple (c). Por el inciso (b), es suficiente probar que $\dim_p[X] \leq \dim_p[A]$. Note que si $\dim_p[A] = \infty$, entonces ya terminamos. Vamos a suponer que $\dim_p[A]$ es finita. Sea U un conjunto abierto en X tal que $p \in U \subset A$. Así, U es una vecindad de p en A . Sea V una vecindad de p en A de modo que $V \subset U$, y también $\dim[\text{fr}_A(V)] \leq \dim_p[A] - 1$. Note que V es vecindad de p en X . Ahora, como X es regular, podemos suponer que $\text{cl}_X(V) \subset \text{int}_X(A)$. Entonces, por el Teorema 1.24 (b), tenemos que $\text{fr}_X(V) = \text{fr}_A(V)$. Así, $\dim[\text{fr}_X(V)] \leq \dim_p[A] - 1$. Por tanto, $\dim_p[X] \leq \dim_p[A]$. Luego $\dim_p[A] = \dim_p[X]$. \square

El siguiente resultado es conocido como “teorema de golpes en la frontera”.

Teorema 1.27. [43, Teorema 20.3] Si X es un continuo, E un subconjunto propio no vacío de X y K una componente de \overline{E} , entonces $\overline{K} \cap \text{fr}(E) \neq \emptyset$ (Equivalentemente, como $\overline{K} \subset \overline{E}$, $\overline{K} \cap (X - E) \neq \emptyset$).

El siguiente resultado lo vamos a utilizar con frecuencia en uno de los resultados principales de nuestro trabajo.

Teorema 1.28. Sean X un continuo, $n \in \mathbb{N}$ y $\mathcal{A} \subset 2^X$ conexo tal que $A \cap C_n(X) \neq \emptyset$. Si $A_0 = \bigcup \{A : A \in \mathcal{A}\}$, entonces

(a) A_0 tiene a lo más n componentes,

(b) si \mathcal{A} es cerrado en 2^X , entonces $A_0 \in C_n(X)$,

(c) para cada $A \in \mathcal{A}$, cada componente de A_0 intersecciona a A .

Demostración. (a) Supongamos que A_0 tiene más de n componentes. Entonces existen $n + 1$ subconjuntos separados dos a dos y no vacíos, A_1, \dots, A_{n+1} , tal que $A_0 = A_1 \cup \dots \cup A_{n+1}$. Sea $B \in \mathcal{A} \cap C_n(X)$. Se tiene que B tiene a lo más n componentes y además $B \subset A_1 \cup \dots \cup A_{n+1}$. Supongamos que A_1, \dots, A_m son tal que $A_i \cap B \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, \dots, m\}$ y $A_i \cap B = \emptyset$ para cada $i \in \{m + 1, \dots, n + 1\}$. Así, $m \leq n$. Sean

$$\mathcal{K} = \{C \in \mathcal{A}: C \subset A_1 \cup \cdots \cup A_m\}$$

y

$$\mathcal{L} = \{C \in \mathcal{A}: C \cap (A_{m+1} \cup \cdots \cup A_{n+1}) \neq \emptyset\}.$$

Observaciones.

- (1) Note que $B \in \mathcal{K}$, por lo que $\mathcal{K} \neq \emptyset$.
- (2) Sea $p \in A_{n+1} \subset A_0$. Entonces existe un elemento C de \mathcal{A} tal que $p \in C$. Luego, $C \cap (A_{m+1} \cup \cdots \cup A_{n+1}) \neq \emptyset$. Es decir, $C \in \mathcal{L}$. Por tanto, $\mathcal{L} \neq \emptyset$.

Como $A_0 = (A_1 \cup \cdots \cup A_m) \cup (A_{m+1} \cup \cdots \cup A_{n+1})$, se tiene que $\mathcal{A} = \mathcal{K} \cup \mathcal{L}$.

Veamos que los conjuntos \mathcal{K} y \mathcal{L} son separados.

Primero, supongamos que existe $D \in cl_{2^X}(\mathcal{K}) \cap \mathcal{L}$. Definimos el conjunto $\mathcal{Z} = \{E \in 2^X: E \subset cl_{2^X}(A_1 \cup \cdots \cup A_m)\}$. Note que \mathcal{Z} es cerrado en 2^X (De acuerdo a la definición de la topología de Vietoris) y además, $\mathcal{K} \subset \mathcal{Z}$. Por tanto, $cl_{2^X}(\mathcal{K}) \subset \mathcal{Z}$, de donde $D \in \mathcal{Z}$. Por otra parte, como $D \in \mathcal{L}$, se tiene que $D \cap (A_{m+1} \cup \cdots \cup A_{n+1}) \neq \emptyset$. Por tanto tenemos que $cl_{2^X}(A_1 \cup \cdots \cup A_m) \cap (A_{m+1} \cup \cdots \cup A_{n+1}) \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción por que los conjuntos $A_1 \cup \cdots \cup A_m$ y $A_{m+1} \cup \cdots \cup A_{n+1}$ están separados.

Segundo, supongamos que existe $D \in \mathcal{K} \cap cl_{2^X}(\mathcal{L})$. Definimos el conjunto $\mathcal{Z} = \{E \in 2^X: E \cap cl_{2^X}(A_{m+1} \cup \cdots \cup A_{n+1}) \neq \emptyset\}$. Note que \mathcal{Z} es cerrado en 2^X (De acuerdo con la definición de la topología de Vietoris) y además, $\mathcal{L} \subset \mathcal{Z}$. Por tanto, $cl_{2^X}(\mathcal{L}) \subset \mathcal{Z}$, de donde $D \in \mathcal{Z}$, es decir, $D \cap cl_{2^X}(A_{m+1} \cup \cdots \cup A_{n+1}) \neq \emptyset$. Por otro lado, como $D \in \mathcal{K}$, implica que $D \subset (A_1 \cup \cdots \cup A_m)$. Por tanto, $(A_1 \cup \cdots \cup A_m) \cap cl_{2^X}(A_{m+1} \cup \cdots \cup A_{n+1}) \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción.

Por tanto, los conjuntos \mathcal{K} y \mathcal{L} están separados, contradiciendo la conexidad de \mathcal{A} . Así, se tiene que A_0 tiene a lo más n componentes.

(b) Veamos que $cl_X(A_0) \subset A_0$. Sea $p \in cl_X(A_0)$. Para cada vecindad cerrada, M , de p en X sea el conjunto $\mathcal{A}_M = \{A' \in \mathcal{A}: A' \cap M \neq \emptyset\}$. Note que \mathcal{A}_M es cerrado en \mathcal{A} y por tanto compacto en \mathcal{A} . Si M y N son vecindades cerradas de p en X tal que $M \subset N$, entonces $\mathcal{A}_M \subset \mathcal{A}_N$.

Por otro lado, cada $\mathcal{A}_M \neq \emptyset$ porque para cualquier vecindad, M , de p en X se tiene que $M \cap A_0 \neq \emptyset$, y como $A_0 = \bigcup\{A : A \in \mathcal{A}\}$, existe al menos un $A' \in \mathcal{A}$ tal que $M \cap A' \neq \emptyset$, es decir, que $A' \in \mathcal{A}_M$. Así, el conjunto $H = \{\mathcal{A}_M : M \text{ es vecindad cerrada de } p \text{ en } X\}$ es una familia de subconjuntos compactos de \mathcal{A} con la propiedad de la intersección finita. Así, existe un elemento $B_0 \in \mathcal{A}$ tal que $B_0 \in \mathcal{A}_M$ para cada vecindad, M , de p en X . Así, tenemos que $p \in cl_X(B_0) = B_0$. Por tanto, tenemos que $p \in A_0$, de donde A_0 es cerrado en X .

Ahora, por el inciso (a) tenemos que A_0 tiene a lo más n componentes. Así, se tiene que $A_0 \in C_n(X)$.

(c) Sean $m \in \mathbb{N}$ tal que $m \leq n$ y A_1, \dots, A_m las componentes de A_0 . Supongamos lo contrario a (c). Es decir, supongamos que existe un $A \in \mathcal{A}$ y A_i componente de A_0 para algún $i \in \{1, \dots, m\}$ tal que $A_1 \cap A = \emptyset$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que A_1, \dots, A_k son tales que $A_i \cap A \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, \dots, k\}$ y que A_{k+1}, \dots, A_m son tales que $A_i \cap A = \emptyset$ para cada $i \in \{k+1, \dots, m\}$. Definimos los conjuntos \mathcal{K} y \mathcal{L} como:

$$\mathcal{K} = \{C \in \mathcal{A} : C \subset A_1 \cup \dots \cup A_k\}$$

y

$$\mathcal{L} = \{C \in \mathcal{A} : C \cap (A_{k+1} \cup \dots \cup A_m) \neq \emptyset\}.$$

Al igual que en el inciso (a) se llega que $\mathcal{A} = \mathcal{K} \cup \mathcal{L}$, con \mathcal{K} y \mathcal{L} separados. Luego, \mathcal{A} no conexo lo cual es una contradicción. Por tanto, para cada $A \in \mathcal{A}$ cada componente de A_0 intersecciona a A . \square

Definición 1.29. Sean X un continuo y $m \in \mathbb{N}$. Un **m-odo** en X es un subcontinuo B de X para el cual existe $A \in C(B)$ tal que $B - A$ tiene por lo menos **m** componentes.

Teorema 1.30. [38, Theorem 70.1] Sean X un continuo y $m \in \mathbb{N} - \{1, 2\}$. Entonces el hiperespacio $C(X)$ contiene $m - celdas$ si y solo si el continuo X contiene **m-odos**.

A continuación presentamos el concepto de arco ordenado en los hiperespacios 2^X y $C(X)$ que lo usamos a lo largo de todo este trabajo.

Definición 1.31. Sean X un continuo y $A, B \in 2^X$ tales que $A \subsetneq B$. Un **arco ordenado** de A a B en 2^X es una función continua $\alpha : [0, 1] \rightarrow 2^X$ tal que cumple lo siguiente.

- (a) $\alpha(0) = A$ y $\alpha(1) = B$,
- (b) si $t, s \in [0, 1]$ son tales que $t < s$, entonces $\alpha(t) \subsetneq \alpha(s)$.

Por lo regular un arco ordenado α , de A a B , se identifica con su imagen y decimos que $\Gamma = \alpha([0, 1])$ es el arco ordenado de A a B . De manera que para cada $C \in \Gamma$, tenemos que $A \subset C \subset B$.

Los siguientes teoremas nos garantizan la existencia de arcos ordenados en el hiperespacio 2^X .

Teorema 1.32. [43, Theorem 1.25] Si X es un continuo y $A, B \in 2^X$, tales que $A \subsetneq B$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- (a) existe un arco ordenado de A a B en 2^X ,
- (b) para cada componente C de B , tenemos que $C \cap A \neq \emptyset$.

Como consecuencia del Teorema 1.32 tenemos que existen arcos ordenados en el hiperespacio $C(X)$.

Teorema 1.33. Si X es un continuo y $A, B \in C(X)$, son tales que $A \subsetneq B$, entonces existe un arco ordenado de A a B en $C(X)$.

Los siguientes resultados nos serán de gran utilidad dentro de la prueba de uno de nuestros teoremas principales.

Teorema 1.34. Sean X un continuo y Y un subcontinuo indescomponible de X . Sea $A_0 \in C_n(Y) - \{Y\}$. Sea \mathcal{A} la arco-componente de $C_n(X) - \{Y\}$ tal que $A_0 \in \mathcal{A}$. Sean K_1, \dots, K_r las componentes de Y que intersectan a A_0 . Si $X \notin \mathcal{A}$, entonces $\mathcal{A} = \langle K_1, \dots, K_r \rangle_n$.

Demostración. Primero observemos lo siguiente.

Observación 1.35. Sea $A \in \mathcal{A}$. Si $A \not\subset Y$, podemos tomar un arco ordenado $\alpha: [0, 1] \rightarrow C_n(X)$ de A a X . Entonces para cada $t \in [0, 1]$, tenemos que $A \subset \alpha(t)$. Así, $Y \not\subset \alpha([0, 1])$. Esto implica que A y X pertenecen a la misma arco-componente de $C_n(X) - \{Y\}$, pero esto es una contradicción ya que $A \in \mathcal{A}$ y $X \notin \mathcal{A}$. Por tanto, tenemos que $A \subset Y$ para cada $A \in \mathcal{A}$.

Como cada componente de A_0 es un subcontinuo propio de Y , cada una de ellas esta contenida en alguna componente de Y , esto justifica la existencia de un número finito de componentes K_1, \dots, K_r de Y que intersectan a A_0 .

Veamos que $\mathcal{A} = \langle K_1, \dots, K_r \rangle_n$.

Sea $A \in \langle K_1, \dots, K_r \rangle_n$. Dado $i \in \{1, \dots, r\}$, los conjuntos $A_0 \cap K_i$ y $A \cap K_i$ son subconjuntos cerrados y no vacíos con un número finito de componentes. Por lo que, existe un subcontinuo propio C_i de Y tal que $(A_0 \cap K_i) \cup (A \cap K_i) \subset C_i$. Sea $C = C_1 \cup \dots \cup C_r$. Como cada componente de A esta contenida en algún K_i y $A \in C_n(X)$, tenemos que $r \leq n$. Así, $C \in C_n(X)$ y C es un subconjunto propio de Y , es decir, $C \in C_n(X) - \{Y\}$. Tomando arcos ordenados α de A_0 a C y β de A a C es posible construir un arco, γ , de A_0 a A en $C_n(X) - \{Y\}$. Como $A_0 \in \mathcal{A}$ y \mathcal{A} es arco-conexo maximal, tenemos que $A \in \mathcal{A}$. Así, $\langle K_1, \dots, K_r \rangle_n \in \mathcal{A}$.

Sea $A \in \mathcal{A}$. Sea $\alpha: [0, 1] \rightarrow \mathcal{A} \subset C_n(X) - \{Y\}$ una función continua tal que $\alpha(0) = A_0$ y $\alpha(1) = A$. Sea $\beta: [0, 1] \rightarrow C_n(X)$ dada por $\beta(t) = \bigcup \{\alpha(s) : 0 \leq s \leq t\}$. Note que $\beta(t) \in C_n(X)$ para cada $t \in [0, 1]$ (ver [42, Lema 7.2]), que β es continua y que $\beta(0) = A_0$. Por la observación 1.35, tenemos que $\beta(t) \subset Y$ para cada $t \in [0, 1]$.

Sea $C = \beta(1)$. Mostremos que $C \neq Y$. Supongamos que $C = Y$. Sea $t_0 = \min\{t \in [0, 1] : \beta(t) = Y\}$. Entonces $\beta(t_0) = Y$. Como $A_0 \neq Y$, tenemos que $0 < t_0$. Sea $\gamma: [0, t_0] \rightarrow C_n(X)$ dada por $\gamma(t) = \bigcup \{\alpha(s) : t \leq s \leq t_0\}$. Así, γ es continua y $\gamma(0) = Y$. Sea $s_0 = \max\{t \in [0, t_0] : \gamma(t) = Y\}$. Entonces $\gamma(s_0) = Y$. Como $\gamma(t_0) = \alpha(t_0) \neq Y$, entonces $s_0 < t_0$. Fijamos un número $s_0 < r_0 < t_0$. Sean los conjuntos $D = \bigcup \{\alpha(s) : s_0 \leq s \leq r_0\}$ y $E = \bigcup \{\alpha(s) : r_0 \leq s \leq t_0\}$. Note que $D, E \in C_n(X)$, que $Y = D \cup E$ y que $D \neq Y \neq E$. Como cada uno de los conjuntos D y E es unión finita de subcontinuos propios de Y , cada uno de ellos esta contenido en una unión finita de componentes de Y . Así, $Y = D \cup E$ intersecta unicamente un número finito de componentes de Y . Esto contradice el hecho de que Y tiene una cantidad no numerable de componentes (vea [44, Teorema 11.15]). Por tanto, $C \neq Y$.

Como β es un arco ordenado de A_0 a C , cada componente de C intersecta a A_0 (vea [38, Teorema 15.3]). Similarmente, cada componente de C intersecta a A . Dado $i \in \{1, \dots, r\}$, tenemos que $\emptyset \neq A_0 \cap K_i \subset C \cap K_i$. Así, existe una componente G de C tal que $G \cap K_i \neq \emptyset$. Como G es un subcontinuo propio de Y , tenemos que $G \subset K_i$. Como $G \cap A \neq \emptyset$,

entonces $A \cap K_i \neq \emptyset$. Por tanto, A interseca a cada uno de los conjuntos K_i . Dado un punto $p \in A$, existe una componente L de C tal que $p \in L$. Como L es un subcontinuo propio de Y y $L \cap A_0 \neq \emptyset$, tenemos que L está contenida en una composante de Y que es intersectada por A_0 . Esto es, que $L \subset K_j$ para algún $j \in \{1, \dots, r\}$. Así, tenemos que $p \in K_1 \cup \dots \cup K_r$. Así, se tiene que $A \subset K_1 \cup \dots \cup K_r$. Por tanto, $A \in \langle K_1, \dots, K_r \rangle_n$. Así, $\mathcal{A} \in \langle K_1, \dots, K_r \rangle_n$.

Por tanto, tenemos que $\mathcal{A} = \langle K_1, \dots, K_r \rangle_n$. \square

Como consecuencia del Teorema 1.34 tenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.36. *Si X es un continuo indescomponible, entonces las arco-componentes de $C_n(X) - \{X\}$ son los conjuntos de la forma $\langle K_1, \dots, K_r \rangle_n$, donde $r \in \mathbb{N}$ tal que $r \leq n$ y K_1, \dots, K_r son composantes de X .*

Teorema 1.37. *Si X es un continuo, $k \in \mathbb{N}$ tal que X no contiene k -odos, Y un subcontinuo propio indescomponible de X y \mathcal{B} la arco-componente de $C_n(X) - \{Y\}$ tal que $X \in \mathcal{B}$, entonces el conjunto $\mathcal{H} = \{K \subset Y : K \text{ es composante de } Y \text{ y } \langle K \rangle_n \cap \mathcal{B} \neq \emptyset\}$ contiene a lo más $k - 1$ elementos.*

Demostración. Supongamos que K_1, \dots, K_k son composantes diferentes disjuntas dos a dos de Y tales que $\langle K_i \rangle_n \cap \mathcal{B} \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, \dots, k\}$.

Para cada $i \in \{1, \dots, k\}$, fijamos un elemento $A_i \in \langle K_i \rangle_n \cap \mathcal{B}$. Sea $\alpha_i: [0, 1] \rightarrow C_n(X) - \{Y\}$ una función continua tal que $\alpha_i(0) = A_i$ y $\alpha_i(1) = X$. Sea $\beta_i: [0, 1] \rightarrow C_n(X)$ dada por $\beta_i(t) = \bigcup \{\alpha_i(s) : 0 \leq s \leq t\}$. Entonces β_i es continua, $\beta_i(0) = A_i \subset Y$ y $\beta_i(1) = X$. Sea $t_i = \max\{t \in [0, 1] : \beta_i(t) \subset Y\}$. Así, tenemos que $\beta_i(t_i) \subset Y$. De acuerdo al lema 6 se puede probar que $\beta_i(t_i) \neq Y$. Como $\beta_i \upharpoonright [0, t_i]$ es un arco ordenado de A_i a $\beta_i(t_i)$, cada componente de $\beta_i(t_i)$ interseca a $A_i \subset K_i$. Como las componentes de $\beta_i(t_i)$ son subcontinuos propios de Y , tenemos que $\beta_i(t_i) \subset K_i$. Así, tenemos que los conjuntos $\beta_1(t_1), \dots, \beta_k(t_k)$ son disjuntos dos a dos. Así, existen números $s_1 \in (t_1, 1], \dots, s_k \in (t_k, 1]$ tales que $\beta_1(s_1), \dots, \beta_k(s_k)$ son disjuntos dos a dos. Por la definición de t_i , tenemos que $\beta_i(s_i) - Y \neq \emptyset$. Como la restricción $\beta_i \upharpoonright [0, s_i]$ es un arco ordenado de A_i a $\beta_i(s_i)$, cada componente de $\beta_i(s_i)$ interseca a $A_i \subset Y$. Por tanto, el conjunto $C = Y \cup \beta_1(s_1) \cup \dots \cup \beta_k(s_k)$ es un

subcontinuo de X tal que $C - Y$ tiene al menos k componentes. Así, C es un $k - \text{odo}$ lo cual es una contradicción. Por tanto, el conjunto \mathcal{H} tiene a lo más $k - 1$ elementos. \square

Teorema 1.38. *Si X es un continuo y Y un subcontinuo de X descomponible, entonces $C_n(X) - \{Y\}$ tiene a lo más dos arco-componentes.*

Demostración. Por [42, Teorema 6.3], tenemos que $C_n(Y) - \{Y\}$ es arco-conexo. Dado $A \in C_n(X) - C_n(Y)$, sea $\alpha: [0, 1] \rightarrow C_n(X)$ un arco ordenado de A a X . Entoces $\alpha(t) \in C_n(X) - C_n(Y)$ para cada $t \in [0, 1]$. Así, se tiene que $C_n(X) - C_n(Y)$ es arco-conexo. Como $C_n(X) - \{Y\} = (C_n(X) - C_n(Y)) \cup (C_n(Y) - \{Y\})$, entonces $C_n(X) - \{Y\}$ tiene a lo más dos arco-componentes. \square

Capítulo 2

Rigidez

En este capítulo se encuentran los resultados que tratan sobre la rigidez del hiperespacio $C_n(X)$.

2.1. Continuos alambrados

En esta sección presentamos algunos resultados técnicos, al igual que también algunas otras definiciones que necesitamos, que serán usados después para probar que algunos hiperespacios son rígidos.

Definición 2.1. *Sea X un continuo. Un **alambre** en X es un subconjunto α de X tal que α es homeomorfo a uno de los espacios $(0, 1)$, $[0, 1)$, $[0, 1]$ o S^1 y α es una componente de un subconjunto abierto de X .*

Por el Teorema 1.27 resulta que cuando un alambre es compacto en un continuo X , entonces X es un arco o una curva cerrada simple. Como lo afirma el siguiente resultado.

Teorema 2.2. *Si X es un continuo y α un alambre en X compacto, entonces $\alpha = X$.*

Demostración. Supongamos que α es un alambre en X compacto, es decir, que α es homeomorfo a uno de los espacios $[0, 1]$ o S^1 . Entonces existe un subconjunto abierto U de X tal que α es una componente de U . Note que α es cerrado en X . Si $\alpha \subsetneq U$, entonces por el Teorema 1.27, se tiene que $\overline{\alpha} \cap (X - U) \neq \emptyset$. Pero α es cerrado y U abierto, entonces $\alpha \cap (X - U) \neq \emptyset$. Como $\alpha \subset U$, entonces $U \cap (X - U) \neq \emptyset$. Lo

cual es una contradicción. Por tanto no puede ser que $\alpha \subsetneq U$. Entonces $\alpha = U$. Luego α es abierto, cerrado y no vacío en el conexo X . Por tanto $\alpha = X$.

□

Observación 2.3. *Si un alambre α en un continuo X es homeomorfo a $[0, 1]$ o S^1 , entonces X es un arco o una curva cerrada simple.*

Definición 2.4. *Si X es un continuo, definimos el subconjunto $W(X)$ de X como:*

$$W(X) = \bigcup \{ \alpha \subset X : \alpha \text{ es un alambre en } X \}.$$

*El continuo X es **alambrado** si $W(X)$ es denso en X , es decir, si $\overline{W(X)} = X$.*

Observación 2.5. *Note que si α es un arco libre en un continuo X , donde a y b son los puntos extremos de α , entonces $\alpha - \{a, b\}$ es un alambre en X . Así, un continuo en el cual la unión de sus arcos libres es denso es un continuo alambrado.*

Por lo tanto, las clases de continuos alambrados incluye gráficas finitas, dendritas cuyo conjunto de puntos extremos es cerrado, continuos casi enrejados (vea [27]), compactificaciones del rayo $[0, \infty)$, compactificaciones de la línea real y continuos indescomponibles cuyos subcontinuos propios no degenerados son arcos (ver Lema 2.7).

Definición 2.6. *Un continuo X es **arco continuo indescomponible** si X es indescomponible y todos sus subcontinuos propios no degenerados son arcos.*

El siguiente resultado nos muestra que en efecto los arco continuos indescomponibles son continuos alambrados.

Teorema 2.7. *Si X es un arco continuo indescomponible, entonces X es un continuo alambrado.*

Demostración. Sea $U \subset X$ abierto tal que $\overline{U} \neq X$. Sean $p \in U$ y D la componente de U tal que $p \in D$. Por el Teorema 1.27, se tiene que $\overline{D} \cap (X - U) \neq \emptyset$. Como U es abierto se tiene que

$$\overline{D} \cap (X - U) \neq \emptyset$$

Además, $\overline{D} \cap U \neq \emptyset$. Entonces \overline{D} es un subcontinuo propio no degenerado de X y por tanto \overline{D} es un arco.

Por otro lado, si $D = \overline{D}$, entonces por lo anterior $D \cap (X - U) = \overline{D} \cap (X - U) \neq \emptyset$ y de $D \subset U$ se tiene $D \cap (X - U) \subset U \cap (X - U)$, entonces $U \cap (X - U) \neq \emptyset$. Lo cual es una contradicción. Por tanto, $D \subsetneq \overline{D}$.

Además, D es conexo. Entonces $D = \{p\}$ o D es homeomorfo a uno de los siguientes espacios $[0, 1]$, $[0, 1)$, o $(0, 1)$. Como $D \neq \overline{D}$ se tiene que D no es compacto lo cual implica que D es homeomorfo a $[0, 1)$ o $(0, 1)$. Así, D es un alambre.

Por tanto, $D \subset W(X)$. Luego, $W(X) \cap U \neq \emptyset$. Así, $W(X)$ es denso en X . Por tanto, X es un continuo alambrado. \square

Definición 2.8. Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$. Sean los conjuntos

- (a) $\mathcal{W}_n(X) = \{A \in C_n(X) : \text{cada componente de } A \text{ está contenida en un alambre de } X\}$,
- (b) $\mathcal{Z}_n(X) = \{A \in \mathcal{W}_n(X) : \text{existe una vecindad, } \mathcal{M}, \text{ de } A \text{ en } C_n(X) \text{ tal que la componente } \mathcal{C} \text{ de } \mathcal{M} \text{ que contiene a } A \text{ es una } 2n\text{-celda}\}$.

Definición 2.9. Sea $n \in \mathbb{N}$. Un continuo X **preserva n -alambrados** si para cualquier homeomorfismo $h : C_n(X) \rightarrow C_n(X)$, se cumple que $h(\mathcal{W}_n(X)) = \mathcal{W}_n(X)$.

Definición 2.10. Sean X una gráfica finita, $p \in X$ y β un número cardinal. El **orden de p en X** , denotado por $\text{Ord}_X(p)$, se define como $\text{Ord}_X(p) \leq \beta$ si para cualquier $\epsilon > 0$, existe un conjunto abierto U en X tal que $p \in U$, $\text{diam}(U) < \epsilon$ y $\text{card}(\text{fr}(U)) \leq \beta$. El $\text{Ord}_X(p) = \beta$ si $\text{Ord}_X(p) \leq \beta$ y $\text{Ord}_X(p) \not\leq \eta$, para cualquier número cardinal $\eta < \beta$. Los conjuntos $E(X) = \{x \in X : \text{Ord}_X(x) = 1\}$, $O(X) = \{x \in X : \text{Ord}_X(x) = 2\}$ y $R(X) = \{x \in X : \text{Ord}_X(x) \geq 3\}$ se llaman el conjunto de puntos extremos de X , el conjunto de puntos ordinarios de X y el conjunto de puntos de ramificación de X , respectivamente.

Los siguientes resultados los utilizamos en el Teorema 2.13 y el Teorema 2.18.

Teorema 2.11. [40, Teorema 2.4] Si X es una gráfica finita y A un elemento de $C_n(X)$, entonces

- (a) $\dim_A[C_n(X)] = 2n + \sum_{p \in (R(X) \cap A)} (\text{Ord}_X(p) - 2)$
- (b) $\dim[C_n(X)] = \dim_X[C_n(X)]$ y
- (c) $\dim[C_n(X)] = 2n + \dim[C(X)]$.

Teorema 2.12. [27, Teorema 4] Si X es un continuo localmente conexo, $n \in \mathbb{N}$ y $A \in C_n(X)$, entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones.

- (a) $\dim_A[C_n(X)]$ es finita,
- (b) existe una gráfica finita, G , en X tal que $A \subset \text{int}_X(G)$,
- (c) $A \cap \mathcal{P}(X) = \emptyset$.

El siguiente resultado nos ayuda a demostrar el Teorema 2.19.

Teorema 2.13. Si X es un continuo localmente conexo y $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\mathcal{W}_n(X) = \{A \in C_n(X) : \dim_A[C_n(X)] = 2n\}.$$

Demostración. Supongamos que X es un arco o una curva cerrada simple. Note que siempre $\mathcal{W}_n(X) \subset C_n(X)$.

Sea $A \in C_n(X)$. Como $A \subset X$, para cada componente C de A tenemos que $C \subset X$ y como X es un alambre, tenemos que $A \in \mathcal{W}_n(X)$. Por tanto, tenemos que $\mathcal{W}_n(X) = C_n(X)$.

Por otro lado, si $A \in C_n(X)$, por el Teorema 2.11, tenemos que $\dim_A[C_n(X)] = 2n + \sum_{p \in (R(X) \cap A)} (\text{Ord}_X(p) - 2)$, ya que X es una gráfica finita. Pero X no tiene puntos de ramificación ($R(X) = \emptyset$). Por lo que $\dim_A[C_n(X)] = 2n$. Así, $C_n(X) = \{A \in C_n(X) : \dim_A[C_n(X)] = 2n\}$. Por tanto, $\mathcal{W}_n(X) = \{A \in C_n(X) : \dim_A[C_n(X)] = 2n\}$.

Supongamos que X no es arco ni una curva cerrada simple. Sea $A \in \mathcal{W}_n(X)$, es decir, cada componente de A está contenida en un alambre en X . Supongamos que \mathcal{C} es una componente de A . Entonces existe un alambre W en X tal que $\mathcal{C} \subset W$. Si W es compacto, es decir, homeomorfo a $[0, 1]$ o S^1 , entonces por el Teorema 2.2, $W = X$, de donde X es un arco o una curva cerrada simple lo cual es una

contradicción. Así, tenemos que W es homeomorfo a $(0, 1)$ o a $[0, 1)$ y además W es la componente de un subconjunto abierto U de X . Como X es un continuo localmente conexo, por el tenemos que W es abierto en X .

Como $\mathcal{C} \subset W$, con W abierto y además homeomorfo a $(0, 1)$ o $[0, 1)$, es posible encontrar un arco que contenga a \mathcal{C} en su interior y contenido en W . Es decir, sea B un arco tal que $\mathcal{C} \subset \text{int}_X(B) \subset B \subset W$. Entonces cada punto de \mathcal{C} tiene una vecindad en X que es un arco. Por tanto, cada punto de A tiene una vecindad en X que es un arco, es decir, $A \subset \mathcal{G}(X)$, de donde, $A \cap \mathcal{P}(X) = \emptyset$. Entonces por el Teorema 2.12, se tiene que $\dim_A[C_n(X)]$ es finita y existe una gráfica finita G contenida en X tal que $A \subset \text{int}_X(G)$, de donde, $A \in \langle \text{int}_X(G) \rangle \subset \langle G \rangle_n = C_n(G)$. Así, $C_n(G)$ es una vecindad de A en $C_n(X)$. Como cada punto de A tiene una vecindad en X que es un arco, entonces A no tiene puntos de ramificación de G , de modo que por el Teorema 2.11, tenemos que $2n = \dim_A[C_n(G)]$ y por el Teorema 1.26 (c) se tiene que $\dim_A[C_n(G)] = \dim_A[C_n(X)]$. Por tanto, tenemos que $\dim_A[C_n(X)] = 2n$. Por tanto, tenemos que $\mathcal{W}_n(X) \subset \{A \in C_n(X) : \dim_A[C_n(X)] = 2n\}$.

Ahora, sea $A \in \{A \in C_n(X) : \dim_A[C_n(X)] = 2n\}$. Por el Teorema 2.12, existe una gráfica finita G contenida en X tal que $A \subset \text{int}_X(G)$, de donde, $A \in \langle \text{int}_X(G) \rangle \subset \langle G \rangle_n = C_n(G)$. Es decir, $C_n(G)$ es una vecindad de A en $C_n(X)$. Luego por el Teorema 1.26 (c), tenemos que $\dim_A[C_n(G)] = \dim_A[C_n(X)] = 2n$. Así, si $R(G)$ denota el conjunto de todos los puntos de ramificación de G , entonces $A \cap R(G) = \emptyset$, de acuerdo al Teorema 2.11. Si \mathcal{C} es la componente de A , entonces \mathcal{C} esta contenida en un borde J de G . Sea W la componente $\text{int}_X(G) \cap (X - R(G))$ que contiene a \mathcal{C} , entonces W es subconjunto conexo de J . Como J es un arco o una curva cerrada simple y X no es arco ni curva cerrada simple, tenemos que W es homeomorfo a $(0, 1)$ o a $[0, 1)$, es decir, que W es un alambre en X . Por tanto, tenemos que $A \in \mathcal{W}_n(X)$. Por tanto, tenemos que $\{A \in C_n(X) : \dim_A[C_n(X)] = 2n\} \subset \mathcal{W}_n(X)$.

Así, tenemos que $\mathcal{W}_n(X) = \{A \in C_n(X) : \dim_A[C_n(X)] = 2n\}$. \square

Recordemos el concepto de espacio conexo por trayectorias.

Definición 2.14. Sean X un espacio topológico y $x, y \in X$. Una **trayectoria** en X de x a y es una función continua $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ tal

que $\gamma(0) = x$ y $\gamma(1) = y$. El espacio X es **conexo por trayectorias** si para cualesquiera dos elementos $x, y \in X$, existe una trayectoria $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ de x a y .

Definición 2.15. Un continuo X es **unicoherente**, si para cualesquiera dos subcontinuos A y B de X tales que $A \cup B = X$, la intersección $A \cap B$ es conexa; X es **hereditariamente unicoherente** si todos sus subcontinuos son unicoherentes.

Notemos que la circunferencia S^1 no es unicoherente. Para ver esto tomemos $A = \{(x, y) \in S^1 : y \geq 0\}$ y $B = \{(x, y) \in S^1 : y \leq 0\}$. Entonces $S^1 = A \cup B$, $A, B \in C(S^1)$ y $A \cap B = \{(1, 0), (-1, 0)\}$ no es conexo. Como consecuencia de lo anterior, tenemos que las curvas cerradas simples no son unicoherentes.

Definición 2.16. Un **dendroide** es un continuo hereditariamente unicoherente y arco conexo.

Definición 2.17. Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$. Definimos el conjunto \mathcal{V} como:

$$\mathcal{V} = \{A \in C_n(X) : \text{existe una vecindad } \mathcal{M} \text{ de } A \text{ en } C_n(X) \text{ tal que si } \mathcal{C} \text{ es la componente de } \mathcal{M} \text{ que contiene a } A, \text{ entonces } \dim[\mathcal{C}] = 2n\}.$$

El siguiente resultado nos ayuda demostrar el Teorema 2.20.

Teorema 2.18. Si X es un continuo, $n \in \mathbb{N}$ y \mathcal{V} como en la Definición 2.17, entonces

- (a) $\mathcal{W}_n(X) \subset \mathcal{V}$,
- (b) si X es un dendroide, entonces $\mathcal{W}_n(X) = \mathcal{V}$.

Demostración. Supongamos que X es un arco o una curva cerrada simple. Note que siempre $\mathcal{W}_n(X) \subset C_n(X)$.

Sea $A \in C_n(X)$. Como $A \subset X$, para cada componente C de A tenemos que $C \subset X$ y como X es un alambre, tenemos que $A \in \mathcal{W}_n(X)$. Por tanto, tenemos que $\mathcal{W}_n(X) = C_n(X)$.

Por otro lado, si $A \in C_n(X)$, por el Teorema 2.11, tenemos que $\dim_A[C_n(X)] = 2n + \sum_{p \in (R(X) \cap A)} (\text{Ord}_X(p) - 2)$, ya que X es una gráfica finita. Pero X no tiene puntos de ramificación ($R(X) = \emptyset$). Por lo que

$\dim_A[C_n(X)] = 2n$. Así, $C_n(X) = \{A \in C_n(X) : \dim_A[C_n(X)] = 2n\}$. Luego, se tiene que $C_n(X) = \mathcal{V}$. Por tanto, tenemos que $\mathcal{W}_n(X) = C_n(X) = \mathcal{V}$.

Supongamos que X no es arco ni una curca cerrada simple.

(a) Sean $A \in \mathcal{W}_n(X)$, $m \in \mathbb{N}$ con $m \leq n$ y A_1, \dots, A_m las componentes de A . Cada componente de A está contenida en un alambre de X , es decir, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, existe W_i alambre de X que contiene a A_i y además W_i es componente de un subconjunto abierto U_i de X . Como X no es arco ni una curva cerrada simple, por el Teorema 2.2, tenemos que cada W_i es homeomorfo a $[0, 1)$ o $(0, 1)$.

Sean V_1, \dots, V_m subconjuntos abiertos de X tales que $cl_X(V_1), \dots, cl_X(V_m)$ son disjuntos dos a dos y para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, $A_i \subset V_i \subset U_i$. Sea Z_i la componente de V_i que contiene a A_i . Entonces Z_i es subconjunto conexo no degenerado de W_i . Así, Z_i es homeomorfo a $(0, 1)$ o $[0, 1)$. Tomamos el conjunto \mathcal{M} como

$$\mathcal{M} = \langle V_1, \dots, V_m \rangle \cap C_n(X).$$

Sea \mathcal{D} la componente de \mathcal{M} que contiene a A . Entonces \mathcal{M} es vecindad de A en $C_n(X)$.

Veamos que $\mathcal{D} = \langle Z_1, \dots, Z_m \rangle \cap C_n(X)$.

Sea $\mathcal{C} = \langle Z_1, \dots, Z_m \rangle \cap C_n(X)$. Veamos que $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$.

Como $A_i \subset V_i$, entonces $A \subset \bigcup_{i=1}^m V_i$ y $A \cap V_i \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, 2, \dots, m\}$. Luego, $A \in \mathcal{C}$.

Para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, fijamos un punto $z_i \in Z_i$ y tomamos un $B \in \mathcal{C}$. Para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, $(B \cap Z_i) \cup \{z_i\} = (B \cap cl_X(V_i)) \cup \{z_i\}$ es un subconjunto compacto de Z_i , por lo que existe un arco $L_i \subset Z_i$ tal que $(B \cap Z_i) \cup \{z_i\} \subset L_i$. Sea α un arco ordenado de B a $L = L_1 \cup \dots \cup L_m$ y sea β un arco ordenado de $\{z_1, \dots, z_m\}$ a L . Entonces $Im(\alpha) \cup Im(\beta)$ define una trayectoria en \mathcal{C} que une a B con $\{z_1, \dots, z_m\}$.

Si $H_1, H_2 \in \mathcal{C}$, por el párrafo anterior podemos encontrar un arco ordenado, α_1 , de H_1 a $\{z_1, \dots, z_m\}$ y un arco ordenado, α_2 , de H_2 a $\{z_1, \dots, z_m\}$. Así, se puede construir un arco ordenado de H_1 a H_2 . Esto prueba que \mathcal{C} es un subconjunto conexo de \mathcal{M} . Como $A \in \mathcal{C}$, tenemos que $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ ya que \mathcal{D} es conexo maximal.

Veamos que $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$. Sea $D = \bigcup\{E: E \in \mathcal{D}\}$. Como $A \in \mathcal{D}$, por el Teorema 1.28, D tiene a lo más m componentes y cada una de estas intersecta a A . Para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, sea D_i la componente de D que contiene a A_i . Como $\mathcal{D} \subset \mathcal{M}$, entonces $D \subset V_1 \cup \dots \cup V_m$, de donde, $A_i \subset D_i \subset V_i$. Así, $D_i \subset Z_i$. Esto prueba que $D \subset \mathcal{C}$.

Dado $E \in \mathcal{D}$, se tiene que $E \subset D$ y cada componente, D_i , de D intersecta a E . Como $D_i \subset Z_i$, tenemos que cada Z_i intersecta a E . También, como la unión $D_1 \cup \dots \cup D_m \subset Z_1 \cup \dots \cup Z_m$, tenemos que $E \subset Z_1 \cup \dots \cup Z_m$. Así, $E \in \langle Z_1, \dots, Z_m \rangle \cap C_n(X) = \mathcal{C}$, es decir, $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$. Pot tanto, la afirmación es verdadera.

Para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, sean J_1, \dots, J_m subintervalos de $I = [0, 1]$ tal que $cl_I(J_1), \dots, cl_I(J_m)$ son disjuntos dos a dos. Luego existen homeomorfismos $f_i: Z_i \rightarrow J_i$.

Definimos $f: \mathcal{D} \rightarrow \langle J_1, \dots, J_m \rangle \cap C_n(I)$ como $f(B) = f_1(B \cap Z_1) \cup \dots \cup f_m(B \cap Z_m)$. Note que f es un homomorfismo. Por lo que $dim_{\mathcal{D}}[C_n(X)] = dim_{\langle J_1, \dots, J_m \rangle \cap C_n(I)}[C_n(I)]$. Por el Teorema 2.11, tenemos que

$$dim_{\langle J_1, \dots, J_m \rangle \cap C_n(I)}[C_n(I)] = 2n + \sum_{p \in (R(I) \cap \langle J_1, \dots, J_m \rangle \cap C_n(I))} (Ord_I(p) - 2).$$

Como $R(I) = \emptyset$, entonces $dim_{\langle J_1, \dots, J_m \rangle \cap C_n(I)}[C_n(I)] = 2n$. Así, $dim[\mathcal{D}] = 2n$. Por tanto, $A \in \mathcal{V}$. Luego, tenemos que $\mathcal{W}_n(X) \subset \mathcal{V}$.

(b) Supongamos que X es un dendroide. Por el inciso (a), tenemos que $\mathcal{W}_n(X) \subset \mathcal{V}$. Veamos que $\mathcal{W}_n(X) \supset \mathcal{V}$.

Sea $A \in \mathcal{V}$. Es decir, sean $A \in C_n(X)$ y \mathcal{M} una vecindad de A en $C_n(X)$ tal que si \mathcal{C} es la componente de \mathcal{M} que contiene a A , entonces $dim[\mathcal{C}] = 2n$. Sean $m \in \mathbb{N}$ tal que $m \leq n$ y A_1, \dots, A_m las componentes de A . Sea $\epsilon > 0$ tal que $B^H(2\epsilon, A) \cap C_n(X) \subset \mathcal{M}$ y los conjuntos $N(2\epsilon, A_1), \dots, N(2\epsilon, A_m)$ son disjuntos. Para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, sea D_i la componente de $cl_X(N(\epsilon, A_i))$ que contiene a A_i . Sea $D = D_1 \cup \dots \cup D_m \in C_n(X)$. Note que $H(A, D) \leq 2\epsilon$. Sea $\alpha: [0, 1] \rightarrow C_n(X)$ un arco ordenado de A a D . Entonces para cada $t \in [0, 1]$, $H(\alpha(t), A) \leq H(D, A) < 2\epsilon$. Esto implica que $D \in \mathcal{C}$.

Afirmamos que D no contiene triodos simples.

Supongamos que D contiene un triodo simple T y sea v el vértice de T . Para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, D_i es un dendroide. Entonces D_i es el límite de sus subárboles por lo que existe un árbol $S_i \subset D_i$ tal que si $S = S_1 \cup \dots \cup S_m$, entonces $T \subset S$ y además $H(A, S) < 2\epsilon$. Usando un arco ordenado de S a D , tenemos que $S \in \mathcal{C}$. Como X es arco conexo, podemos unir las diferentes componentes de S por arcos y obtener una gráfica finita $G \subset X$ tal que $S \in G$. Como $C_n(G)$ es localmente conexo, existen vecindades conexas y compactas \mathcal{N} de S en $C_n(G)$ tal que $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$. Así, $\mathcal{N} \subset \mathcal{C}$. Por el Teorema 2.11, $2n < \dim_S[C_n(G)] = \dim_S[\mathcal{N}] \leq \dim_S[\mathcal{C}] \leq \dim[\mathcal{C}]$ pero esto contradice la elección de \mathcal{M} . Por tanto, D no contiene triodos simples.

Usando que cada arco en un dendroide está contenido en uno maximal respecto a la inclusión de conjuntos (esto se sigue de [45, Teorema 3.3]), es posible probar que un dendroide sin triodos simples es un arco. Así, D_1, \dots, D_m son arcos. Para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, sea W_i la componente de $N(\epsilon, A_i)$ que contiene a A_i . Entonces W_i es un subconjunto conexo, compacto y no degenerado de D_i . Así, W_i es un alambre. Por tanto, $A \in \mathcal{W}_n(X)$. Así, $\mathcal{W}_n(X) \supset \mathcal{V}$.

Por tanto, tenemos que $\mathcal{W}_n(X) = \mathcal{V}$. \square

Cuando un continuo X es localmete conexo y $n \in \mathbb{N}$, el Teorema 2.13 proporciona una caracterización topológica de $\mathcal{W}_n(X)$. Como una consecuencia, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.19. *Si $n \in \mathbb{N}$ y X es un continuo localmete conexo, entonces X preserva n -alambrados.*

Demostración. Supongamos que X es un continuo localmente conexo, $n \in \mathbb{N}$ y $h: C_n(X) \rightarrow C_n(X)$ es un homeomorfismo. Por el Teorema 2.13, tenemos que

$$\mathcal{W}_n(X) = \{A \in C_n(X) : \dim_A[C_n(X)] = 2n\}. \quad (2.1.1)$$

Si $A \in \mathcal{W}_n(X)$, por la ecuación (2.1.1), tenemos que $\dim_A[C_n(X)] = 2n$. Como h es un homeomorfismo, tenemos que $h(A) \in C_n(X)$ y $\dim_{h(A)}[C_n(X)] = 2n$. Por la ecuación (2.1.1), tenemos que $h(A) \in \mathcal{W}_n(X)$. Por tanto, $h(\mathcal{W}_n(X)) = \mathcal{W}_n(X)$. Así, X preserva n -alambrados. \square

Cuando un continuo X es un dendroide y $n \in \mathbb{N}$, el Teorema 2.18 proporciona una caracterización topológica de $\mathcal{W}_n(X)$. Como una consecuencia, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.20. *Si $n \in \mathbb{N}$ y X es dendroide, entonces X preserva n -alambrados.*

Demostración. Supongamos que X es un dendroide, $n \in \mathbb{N}$ y $h: C_n(X) \rightarrow C_n(X)$ es un homeomorfismo. Por el Teorema 2.18, tenemos que

$$\mathcal{W}_n(X) = \mathcal{V}. \quad (2.1.2)$$

Si $A \in \mathcal{W}_n(X)$, por la ecuación (2.1.2), existe una vecindad \mathcal{M} de A en $C_n(X)$ tal que la componente \mathcal{C} de \mathcal{M} que contiene a A tiene dimensión $2n$ ($\dim[\mathcal{C}] = 2n$). Como h es un homeomorfismo, tenemos que $h(\mathcal{M})$ es una vecindad de $h(A)$ en $C_n(X)$ y que $h(\mathcal{C})$ es la componente de $h(\mathcal{M})$ que contiene a $h(A)$ con dimensión $2n$ ($\dim[h(\mathcal{C})] = 2n$). Luego, $h(A) \in \mathcal{V}$. Por la ecuación (2.1.2), tenemos que $h(A) \in \mathcal{W}_n(X)$. Por tanto, $h(\mathcal{W}_n(X)) = \mathcal{W}_n(X)$. Así, X preserva n -alambrados. \square

Otro concepto que utilizamos es el de n -variedades el cual definimos a continuación.

Definición 2.21. *Sea $n \in \mathbb{N}$. Una n -variedad es un espacio métrico separable M tal que todo $p \in M$ tiene una vecindad V homeomorfa a $I^n = [0, 1]^n$. El interior como variedad de una n -variedad M , denotado por $\text{intv}(M)$ es:*

$$\text{intv}(M) = \{p \in M : p \text{ tiene una vecindad en } M \text{ homeomorfa a } \mathbb{R}^n\}.$$

La frontera como variedad de M , que denotamos por ∂M es:

$$\partial M = \{p \in M : p \notin \text{intv}(M)\}.$$

Para imaginar las n -variedades mencionamos unos ejemplos.

Ejemplo 2.22. *Sea*

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 \text{ y } -1 \leq z \leq 1\}.$$

El conjunto C es una 2-variedad tal que

$$\begin{aligned} \text{intv}(C) &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 \text{ y } -1 < z < 1\} \\ \partial C &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 \text{ y } |z| = 1\} \end{aligned}$$

Ejemplo 2.23. [38, Ejemplo 5.1] Si X es un arco con puntos extremos p, q , entonces $C(X)$ es variedad y

$$\partial C(X) = F_1(X) \cup \{A \in C(X) : p \in A\} \cup \{A \in C(X) : q \in A\}.$$

Ejemplo 2.24. [38, Ejemplo 5.2] Si X es una curva cerrada simple, entonces $C(X)$ es variedad y

$$\partial C(X) = F_1(X).$$

Terminamos esta sección generalizando resultados que se usan en el estudio de la unicidad de hiperespacios en otros trabajos (ver [27] para desarrollos más recientes). Aquí consideramos componentes de vecindades en lugar de vecindades, en esta manera, podemos usar nuestros resultados para continuos más generales.

Teorema 2.25. Si X es un continuo y $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$(a) \mathcal{W}_n(X) \cap (C_n(X) - C_{n-1}(X)) \subset \mathcal{Z}_n(X),$$

$$(b) \text{ si } n \geq 3, \text{ entonces } \mathcal{W}_n(X) \cap (C_n(X) - C_{n-1}(X)) = \mathcal{Z}_n(X).$$

Demostración. (a) En el caso cuando $n = 1$ y X es un arco o una curva cerrada simple, se tiene que $C(X)$ es una 2-celda, de modo que $\mathcal{W}_n(X) = C(X) = \mathcal{Z}_n(X)$.

Supongamos que $n > 1$ o que X no es ni un arco ni una curva cerrada simple. Sea $A \in \mathcal{W}_n(X) \cap (C_n(X) - C_{n-1}(X))$ y sean A_1, \dots, A_n las componentes de A . Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, sea W_i subconjunto abierto de X tal que $A_i \subset W_i$ y la componente C_i de W_i contiene a A_i es homeomorfo a $(0, 1)$ o $[0, 1)$. Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, sea V_i subconjunto abierto de X tal que $A_i \subset V_i \subset cl_X(V_i) \subset W_i$ y los conjuntos $cl_X(V_1), \dots, cl_X(V_n)$ son disjuntos. Sea D_i la componente de $cl_X(V_i)$ que contiene a A_i . Entonces D_i es un subcontinuo no degenerado de C_i . Así, D_i es un arco. Sea $\mathcal{M} = \langle cl_X(V_1), \dots, cl_X(V_n) \rangle \cap C_n(X)$ y $\mathcal{C} = \langle D_1, \dots, D_n \rangle \cap C_n(X)$. Entonces \mathcal{M} es una vecindad de A en $C_n(X)$ y \mathcal{C} es compacto y conexo. En efecto, la función continua $\varphi: C(D_1) \times \dots \times C(D_n) \rightarrow \mathcal{C}$ dada por $\varphi(B_1, \dots, B_n) = B_1 \cup \dots \cup B_n$ es un homeomorfismo. Así, \mathcal{C} es una $2n$ -celda (vea [38, Ejemplo 5.1]). Afirmamos que \mathcal{C} es una componente de \mathcal{M} . Como \mathcal{C} es conexa, tomamos la componente \mathcal{D} de \mathcal{M} que contiene a A . Entonces $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$. Sea $E = \bigcup \{F : F \in \mathcal{D}\}$. Por el Teorema 1.28, $E \in C_n(X)$. Note que

$A \subset E \subset cl_X(V_1) \cup \dots \cup cl_X(V_n)$. Esto implica que E tiene exactamente n componentes las cuales son $E_1 = E \cap cl_X(V_1), \dots, E_n = E \cap cl_X(V_n)$. Como $A_1 \subset E_1, \dots, A_n \subset E_n$ y $D_1 \cup \dots \cup D_n \in \mathcal{C} \subset \mathcal{D}$, tenemos que $E_1 = D_1, \dots, E_n = D_n$. Así, para cada $G \in \mathcal{D}, G \subset E$ y por el Teorema 1.28 cada E_i intersecciona a G , por lo que $G \in \mathcal{M}$ y $G \cap cl_X(V_1) \subset D_1, \dots, G \cap cl_X(V_n) \subset D_n$. Esto implica que $G \in \mathcal{C}$. Por tanto, tenemos que $\mathcal{C} = \mathcal{D}$. Así, $A \in \mathcal{Z}_n(X)$.

(b) Sean $A \in \mathcal{Z}_n(X)$ y \mathcal{M} una vecindad de A en $C_n(X)$ tal que la componente \mathcal{C} de \mathcal{M} que contiene a A es una $2n - celda$. Sean A_1, \dots, A_m las componentes de A . Para cada $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, sea W_i un subconjunto abierto de X tal que $A_i \subset W_i$ y la componente C_i de W_i que contiene a A_i es homeomorfo a uno de los espacios $(0, 1)$ o $[0, 1)$ (o $[0, 1]$ o S^1 en el caso de que X sea un arco o una curva cerrada simple). Sea $\epsilon > 0$ tal que $B^H(3\epsilon, A) \cap C_n(X) \subset \mathcal{M}$, los conjuntos $N(3\epsilon, A_1), \dots, N(3\epsilon, A_m)$ son disjuntos dos a dos y $N(3\epsilon, A_i) \subset W_i$ para cada $i \in \{1, \dots, m\}$.

Veamos que $m = n$. Supongamos que $m < n$. En caso de que $m < n - 1$, si X no es ni un arco ni una curva cerrada simple, como $A_1 \neq C_1$, existen subarcos A_{m-1}, \dots, A_{n-1} de C_1 tal que A_1, \dots, A_{n-1} son disjuntos dos a dos. Sea $B = A_1 \cup \dots \cup A_{n-1}$. Entonces $B \in \mathcal{M}$ y $B \in \mathcal{C}$. Si $A = X$ y X es un arco o una curva cerrada simple, entonces se pueden encontrar subarcos disjuntos dos a dos digamos A_1, \dots, A_{n-1} tal que el conjunto $B = A_1 \cup \dots \cup A_{n-1} \in \mathcal{M}$ y $B \in \mathcal{C}$. En el caso de que $m = n - 1$, se define $B = A$. En cualquier caso, cambiando A por B si es necesario, podemos suponer que A tiene exactamente $n - 1$ componentes (de donde $A \neq X$).

Para cada $i \in \{1, \dots, n-1\}$, sea D_i la componente de $cl_X(N(2\epsilon, A_i))$ que contiene a A_i . Como $D_i \subset C_i$, tenemos que D_i es un arco. Sea $\xi = \langle D_1, \dots, D_{n-1} \rangle \cap C_n(X)$. Para cada $i \in \{1, \dots, n-1\}$, sea $\varphi_i: C(D_1) \times \dots \times C(D_{i-1}) \times C_2(D_i) \times C(D_{i+1}) \times \dots \times C(D_{n-1}) \rightarrow \xi$ dada por $\varphi_i(E_1, \dots, E_{n-1}) = E_1 \cup \dots \cup E_{n-1}$. Como $C_2([0, 1])$ es una $4 - celda$ (vea [34, Lema 2.2]), $C([0, 1])$ es una $2 - celda$ y φ_i es un encaje, se tiene que $\text{Im } \varphi_i$ es una $2n - celda$. Note que $\xi = \text{Im } \varphi_1 \cup \dots \cup \text{Im } \varphi_{n-1}$ y $\text{Im } \varphi_i \cap \text{Im } \varphi_j = \langle D_1, \dots, D_{n-1} \rangle \cap C_{n-1}(X)$, si $i \neq j$. Sea $\xi_0 = \langle D_1, \dots, D_{n-1} \rangle \cap C_{n-1}(X)$. Entonces ξ_0 es una $2(n-1) - celda$.

Sea \mathcal{F} la componente de $cl_{C_n(X)}(B^H(\epsilon, A) \cap C_n(X)) \cap \mathcal{C}$ tal que $A \in \mathcal{F}$. Sea $F = \bigcup\{G: G \in \mathcal{F}\}$. Como $A \in \mathcal{F}$, por el Teorema 1.28, F tiene a lo más $n - 1$ componentes y $F \cap N(2\epsilon, A_i) \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, \dots, n - 1\}$. Esto implica que F tiene exactamente $n - 1$ componentes las cuales son $F_1 = F \cap N(2\epsilon, A_1), \dots, F_{n-1} = F \cap N(2\epsilon, A_{n-1})$. Así, $F_1 \subset D_1, \dots, F_{n-1} \subset D_{n-1}$. Dado $G \in \mathcal{F}$, $H(G, A) < 2\epsilon$. Esto implica que $G \cap N(2\epsilon, A_i) \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, \dots, n - 1\}$. Como $G \subset F \subset D_1 \cup \dots \cup D_{n-1}$ y por el Teorema 1.28 (c), $G \cap D_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, \dots, n - 1\}$, se tiene que $G \in \xi$. Por tanto, $\mathcal{F} \subset \xi$.

Como \mathcal{F} es una vecindad de A es la $2n - celda$ \mathcal{C} , existe una $2n - celda$ \mathcal{K} tal que $A \in \text{int}_{\mathcal{C}}(\mathcal{K}) \subset \mathcal{K} \subset \mathcal{F}$. Sea $\delta > 0$ tal que $\delta < \epsilon$ y $B^H(\delta, A) \cap C_n(X) \cap \mathcal{C} \subset \mathcal{K}$. Como $A_1 \subset C_1$ y $A \neq X$, existe un arco α_1 en C_1 tal que $\text{diam}(\alpha_1) < \delta$ y $\alpha_1 \cap A_1$ es un conjunto de un punto. Entonces $\mathcal{L} = \{A \cup \{x\}: x \in \alpha_1\}$ es un subconjunto conexo de \mathcal{M} que contiene a A . Así, $\mathcal{L} \subset \mathcal{C}$ y $\mathcal{L} \subset B^H(\delta, A) \cap C_n(X)$. Así, $\mathcal{L} \subset \mathcal{K}$. Sea $p_1 \in \alpha_1 - A$ un punto fijo. Entonces $A \cup \{p_1\} \in \text{Im } \varphi_1 - \xi_0$. Esto prueba que $\mathcal{K} \cap \text{Im } \varphi_1 - \xi_0$ es no vacío. De manera similar, se puede probar que $\mathcal{K} \cap \text{Im } \varphi_2 - \xi_0$ es no vacío (aquí estamos usando que $n \geq 3$). Como $\mathcal{K} \subset \xi = \text{Im } \varphi_1 \cup \dots \cup \text{Im } \varphi_{n-1}$ y $\text{Im } \varphi_i \cap \text{Im } \varphi_j = \xi_0$, si $i \neq j$, tenemos que $\mathcal{K} \cap \text{Im } \varphi_1 - \xi_0$ y $\mathcal{K} \cap \text{Im } \varphi_2 - \xi_0$ son separados por $\mathcal{K} \cap \xi_0$. Esto contradice a [32, Teorema IV 4] ya que \mathcal{K} es una $2n - celda$ y $\dim[\mathcal{K} \cap \xi_0] \leq 2n - 2$. Por tanto, $m = n$. Esto termina la prueba del teorema. \square

Teorema 2.26. *Si X es un continuo y $n \in \mathbb{N} - \{1, 2\}$, entonces*

$\mathcal{W}_1(X) = \{A \in \mathcal{W}_n(X) - \mathcal{Z}_n(X): A \text{ tiene una base } \mathcal{B} \text{ de vecindades de } A \text{ en } C_n(X) \text{ tal que para cada } \mathcal{U} \in \mathcal{B}, \text{ si } \mathcal{C} \text{ es la componente de } \mathcal{U} \text{ que contiene a } A, \text{ entonces } \mathcal{C} \cap \mathcal{Z}_n(X) \text{ es conexo}\}.$

Demostración. Por el Teorema 2.25 se tiene que $\mathcal{Z}_n(X) = \mathcal{W}_n(X) \cap (C_n(X) - C_{n-1}(X))$.

Veamos (C).

Sea $A \in \mathcal{W}_1(X)$. Si $A = X$, entonces X es o un arco o una curva cerrada simple. Así, $\mathcal{W}_n(X) = C_n(X)$ y $\mathcal{Z}_n(X) = C_n(X) - C_{n-1}(X)$. Por tanto, $A \in \mathcal{W}_n(X) - \mathcal{Z}_n(X)$ y como $A = X$ es homeomorfo a $[0, 1]$ o S^1 , se tiene que para cada $\epsilon > 0$, $B^H(\epsilon, A) \cap C_n(X)$ es una vecindad

conexa de A con la propiedad de que $[B^H(\epsilon, A) \cap C_n(X)] \cap \mathcal{Z}_n(X)$ es conexa.

Supongamos que $A \neq X$. Entonces A es conexo y existe un alambre C en X homeomorfo a $(0, 1)$ o a $[0, 1)$ tal que $A \subset C$ y C es componente de un subconjunto abierto W de X . Por el Teorema 2.25 (b), $A \in \mathcal{W}_n(X) - \mathcal{Z}_n(X)$. Sea $\epsilon > 0$ tal que $N(\epsilon, A) \subset W$. Sea $\mathcal{B} = \{B^H(\delta, A) \cap C_n(X) : 0 < \delta < \epsilon\}$. Entonces \mathcal{B} es una base de vecindades de A en $C_n(X)$. Sea $0 < \delta < \epsilon$ y $\mathcal{U} = B^H(\delta, A) \cap C_n(X)$. Sea \mathcal{D} la componente de \mathcal{U} que contiene a A . Sea $T = \bigcup \{E : E \in \mathcal{D}\}$. Por el Teorema 1.28, se tiene que T es un subconjunto conexo de X . Como $A \subset T \subset N(\epsilon, A)$, se tiene que $T \subset C$. Así, T es un subconjunto conexo de $C \cap N(\delta, A)$. Por tanto, T es homeomorfo a un intervalo en la recta real.

Dado $K, L \in \mathcal{D} \cap \mathcal{Z}_n(X)$, tenemos que $K \cup L \subset T$. Sea J un arco tal que $K \cup L \subset J \subset T$. Entonces $J \subset C \cap N(\delta, A)$. Como $H(A, K) < \delta$, $H(A, L) < \delta$ y $J \subset N(\delta, A)$, cualquier elemento $Q \in C_n(X)$ tal que $K \subset Q \subset J$ (o $L \subset Q \subset J$) tiene la propiedad de que $H(Q, A) < \delta$. En particular, $H(J, A) < \delta$. Sea $\eta > 0$ tal que $\eta < \delta - H(J, A)$. Entonces $B^H(\eta, J) \cap C_n(X) \subset B^H(\delta, A) \cap C_n(X)$. Sea $\varphi: [0, 1] \rightarrow J$ un homeomorfismo. Entonces existe un $\xi > 0$ tal que si $W \in C_n([0, 1]) - C_{n-1}([0, 1])$ y $\lambda([0, 1] - W) < \xi$, entonces $\varphi(W) \in B^H(\eta, J) \cap C_n(X)$, donde λ es la medida de Lebesgue en $[0, 1]$. Luego se puede probar que $\mathcal{R} = \{R \in C_n([0, 1]) - C_{n-1}([0, 1]) : \lambda([0, 1] - R) \leq \xi\}$ es conexo por trayectorias. Ahora, podemos describir una trayectoria que una a K con L en $\mathcal{D} \cap \mathcal{Z}_n(X)$. Recordemos que $\mathcal{Z}_n(X) = \mathcal{W}_n(X) \cap (C_n(X) - C_{n-1}(X))$. Como K y L tienen exactamente n componentes, entonces $\varphi^{-1}(K)$ y $\varphi^{-1}(L)$ tienen exactamente n componentes. Entonces podemos dar trayectorias $\alpha_1, \alpha_2: [0, 1] \rightarrow C_n([0, 1]) - C_{n-1}([0, 1])$ tal que $\alpha_1(0) = K, \alpha_2(0) = L$, para cada $i \in \{1, 2\}$, $\lambda([0, 1] - \alpha_i(1)) < \xi$; y si $0 \leq s \leq t \leq 1$, entonces $\alpha_i(s) \subset \alpha_i(t)$. Sea $\alpha_3: [0, 1] \rightarrow C_n([0, 1]) - C_{n-1}([0, 1])$ una trayectoria en \mathcal{R} que una a $\alpha_1(1)$ con $\alpha_2(1)$. Entonces se puede obtener una trayectoria de K a L en $\mathcal{D} \cap \mathcal{Z}_n(X)$ combinando las trayectorias $\varphi \circ \alpha_1, \varphi \circ \alpha_2, \varphi \circ \alpha_3$.

Veamos (\supset).

Sea $A \in \mathcal{W}_n(X) - \mathcal{Z}_n(X)$ tal que existe una base \mathcal{B} de vecindades de A en $C_n(X)$ tal que para cada $\mathcal{U} \in \mathcal{B}$, si \mathcal{C} es la componente de \mathcal{U} que contiene a A , entonces $\mathcal{C} \cap \mathcal{Z}_n(X)$ es conexa. Para probar que $A \in \mathcal{W}_1(X)$ es suficiente probar que A es conexo.

Supongamos que A no es conexo y que tiene por lo menos dos com-

ponentes. Sean $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m$, donde los conjunto A_1, \dots, A_m son las componentes diferentes de A . Como $A \notin \mathcal{Z}_n(X)$ y $n \geq 3$, por el Teorema 2.25 (b), $1 < m < n$. Como $A \in \mathcal{W}_n(X)$ para cada $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ existe un subconjunto abierto U_i de X tal que $A_i \subset U_i$ y la componente C_i de U_i que contiene a A_i es homeomorfo a $[0, 1)$ o $(0, 1)$. Como A no es conexo, entonces $A \neq X$. Por lo que podemos suponer que $U_i \neq X$. Entonces U_i es homeomorfo a $[0, 1)$ o $(0, 1)$. Sea $\delta > 0$ tal que para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, $N(\delta, A_i) \subset U_i$ y los conjuntos $cl_X(N(\delta, A_1)), \dots, cl_X(N(\delta, A_m))$ son disjuntos dos a dos. Sea $\mathcal{U} \in \mathcal{B}$ tal que $\mathcal{U} \subset B^H(\delta, A) \cap C_n(X)$ y sea \mathcal{C} la componente de \mathcal{U} que contiene a A . Entonces $\mathcal{C} \cap \mathcal{Z}_n(X)$ es conexa.

Sea $\epsilon > 0$ tal que $B^H(\epsilon, A) \cap C_n(X) \subset \mathcal{U}$ y $\epsilon < \delta$. Como $A_1 \subset C_1$, se tiene que A_1 es un arco o un conjunto de un punto. Entonces existe una trayectoria $\alpha: [0, 1] \rightarrow C_n(X)$ tal que $\alpha(0) = A_1$, $\alpha(t)$ tiene $n - m + 1$ componentes, $\alpha(t) \subset C_1$ y $H(A_1, \alpha(t)) < \epsilon$ para cada $t > 0$. Así, la función $\beta: [0, 1] \rightarrow C_n(X)$ dada por $\beta(t) = \alpha(t) \cup A_2 \cup \dots \cup A_m$ es continua y $H(A, \beta(t)) < \epsilon$ para cada $t \in [0, 1]$. Así, $\beta(1) \in \mathcal{C} - C_{n-1}(X)$. Por el Teorema 2.25 (b), $\beta(1) \in \mathcal{C} \cap \mathcal{Z}_n(X)$. Sea $B = \beta(1)$. De manera similar podemos construir un elemento $D \in \mathcal{C} \cap \mathcal{Z}_n(X)$ de la forma $D = A_1 \cup D_1 \cup A_3 \cup \dots \cup A_m$, donde $D_1 \subset C_2$ y D_1 tiene exactamente $n - m + 1$ componentes. Sean $\mathcal{K} = \{E \in \mathcal{C} \cap \mathcal{Z}_n(X) : E \cap cl_X(N(\delta, A_i)) \text{ es conexo para cada } i \in \{2, \dots, m\}\}$ y $\mathcal{L} = \{E \in \mathcal{C} \cap \mathcal{Z}_n(X) : E \cap cl_X(N(\delta, A_1)) \text{ tiene a lo mas } n - m \text{ componentes}\}$.

Luego, se tiene que $\mathcal{C} \cap \mathcal{Z}_n(X) = \mathcal{K} \cup \mathcal{L}$, \mathcal{K} y \mathcal{L} son cerrados en $\mathcal{C} \cap \mathcal{Z}_n(X)$, $B \in \mathcal{K}$ y $D \in \mathcal{L}$. Por la conexidad de $\mathcal{C} \cap \mathcal{Z}_n(X)$, existe un elemento $E \in \mathcal{K} \cap \mathcal{L}$. Así, E tiene a lo más $n - 1$ componentes. Esto contradice el hecho de que los elementos de $\mathcal{Z}_n(X)$ tiene exactamente n componentes (vea el Teorema 2.25 (b)). Esta contradicción muestra que A es conexo. Esto completa la prueba. \square

2.2. Arco continuos indescomponibles

En esta sección exponemos la prueba de que el hiperespacio $C_n(X)$ es rígido para cada n natural distinto del 2 cuando X es un arco continuo indescomponible.

El siguiente resultado es de Sergio Macías.

Teorema 2.27. *Si X, Y son arco continuos indescomponibles y $h: C(X) \rightarrow C(Y)$ es un homeomorfismo, entonces $h(F_1(X)) = F_1(Y)$.*

Demostración. Es la misma que la de la prueba del Teorema 3 de [41]. \square

Teorema 2.28. *Si X es un arco continuo indescomponible y $n \in \mathbb{N}$, entonces el único elemento que arco-desconecta a $C_n(X)$ es X . Además, $C_n(X) - \{X\}$ tiene una cantidad no numerable de arco-componentes.*

Demostración. Por el Teorema 1.36 tenemos que las arco-componentes de $C_n(X) - \{X\}$ son los conjuntos de la forma $\langle K_1, \dots, K_r \rangle_n$, donde $r \in \mathbb{N}$, con $r \leq n$ y K_1, \dots, K_r son composantes de X .

Como X tiene una cantidad no numerable de composantes podemos concluir que $C_n(X) - \{X\}$, tiene una cantidad no numerable de arco-componentes. Luego, $C_n(X) - \{X\}$ no es arco-conexo.

Veamos que X es el único que arco-desconecta a $C_n(X)$, es decir, que para cualquier otro elemento en $A \in C_n(X)$ diferente de X , resulta que $C_n(X) - \{A\}$ es arco-conexo.

Sea $A \in C_n(X) - \{X\}$. Veamos que $C_n(X) - \{A\}$ es arco-conexo. Sea \mathcal{C} la arco-componente de $C_n(X) - \{A\}$ tal que $X \in \mathcal{C}$. Vamos a probar que $\mathcal{C} = C_n(X) - \{A\}$.

\subset es directa.

Mostremos la otra contención. Sea $D \in C_n(X) - \{A\}$.

Caso (1).

Si D no esta contenida en A , ($D \not\subset A$) tomamos un arco ordenado α de D a X . Luego, $\alpha(t) \neq A$ para todo $t \in [0, 1]$. Así, $Im(\alpha) \subset \mathcal{C}$, porque \mathcal{C} es el conjunto arco-conexo maximal, y por tanto $D \in \mathcal{C}$.

Caso (2).

Si $D \subset A$. De manera similar como en la prueba del Teorema 11.3 de [43], si A no es conexo, existe un arco α de D a X en $C(X) - \{A\}$. De donde $Im(\alpha) \subset \mathcal{C}$ y por tanto $D \in \mathcal{C}$.

Sea A conexo. Sea $B \in C(X) - \{X\}$ tal que $A \subsetneq B$. Entonces A y B son arcos. Sea F un conjunto finito que contiene exactamente un punto en cada componente de D . Es decir, $F \in F_n(X) \subset C_n(X)$. Ahora, como $F \subset D$ y cada componente de D intersecta a F , existe un arco ordenado β de F a D . Luego, $Im(\beta) \subset C_n(X) - \{A\}$.

Por otro lado, como B es un arco, se tiene que $F_n(B)$ es arco-conexo. Así, existe un arco γ en $F_n(B)$ de F a un elemento $E \subset B - A$ tal que E tiene a lo mas n puntos. Y como E no esta contenida en A , por el caso 1, existe un arco ordenado δ de E a X . Así, obtenemos un arco ω de D a X contenido en $C_n(X) - \{A\}$. Entonces $Im(\omega) \subset \mathcal{C}$ y por tanto $D \in \mathcal{C}$. Por tanto la contención.

Así, $\mathcal{C} = C_n(X) - \{A\}$. Es decir, $C_n(X) - \{A\}$ es arco-conexo. \square

Teorema 2.29. *Si X es un arco continuo indescomponible, $n \in \mathbb{N}$, Y un continuo tal que existe un homeomorfismo $h: C_n(X) \rightarrow C_n(Y)$ y $Y_0 \in C_n(Y)$ tal que $Y_0 = h(X)$, entonces $Y_0 \in C(Y)$ y además Y_0 es indescomponible.*

Demostración. Supongamos que Y_0 no es conexo. Luego, igual que en la prueba del T.11.3 de [43] se concluye que $C_n(Y) - \{Y_0\}$ es arco-conexo. Como h es homeomorfismo se tiene que $C_n(X) - \{h^{-1}(Y_0)\}$ es arco-conexo. Como $h(X) = Y_0$, entonces $X = h^{-1}(Y_0)$. Por tanto, $C_n(X) - \{X\}$ es arco-conexo lo cual contradice al Teorema 2.28. Por tanto, $Y_0 \in C(Y)$.

Supongamos que Y_0 es descomponible. Por un lado, de acuerdo al Teorem 1.38, se tiene que $C_n(Y) - \{Y_0\}$ tiene a los más dos arco-componentes. Por otro lado, como h es homeomorfismo, se tiene que $C_n(Y) - \{Y_0\}$, de acuerdo al Teorema 2.28, tiene una cantidad no numerable de arco-componentes. Llegamos a una contradicción. Por tanto, Y_0 es indescomponible. \square

Teorema 2.30. *Si X es un arco continuo indescomponible, $n \in \mathbb{N}$, Y un continuo tal que existe un homeomorfismo $h: C_n(X) \rightarrow C_n(Y)$ y $k = 2n + 1$, entonces $C_n(Y)$ no contiene $k - celdas$.*

Demostración. Supongamos que $C_n(Y)$ contiene una $k - celda$. Luego existe una $k - celda$ \mathcal{M} en $C_n(X)$. Sea $m = \max\{i \in \{1, \dots, n\} : \mathcal{M} \cap (C_i(X) - C_{i-1}(X)) \neq \emptyset\}$. Como $\mathcal{M} \cap (C_m(X) - C_{m-1}(X))$ es un subconjunto abierto no vacío de \mathcal{M} , existe $A \in \mathcal{M} \cap (C_m(X) - C_{m-1}(X)) - \{X\}$. Sea \mathcal{N} una $k - celda$ tal que $A \in \mathcal{N} \subset \mathcal{M} \cap (C_m(X) - C_{m-1}(X)) -$

$\{X\}$ y sea $B = \bigcup\{H: H \in \mathcal{N}\}$. Supongamos que A_1, \dots, A_m son las componentes de A , tomando un ϵ como

$$\epsilon < \min\left\{\frac{d(A_i, A_j)}{2}: i, j \in \{1, \dots, m\} \text{ y } i \neq j\right\}$$

y $\mathcal{N} \subset B^H(\epsilon, A)$, tenemos que B tiene al menos m componentes y también $B \neq X$. Es decir, podemos tomar a \mathcal{N} lo suficientemente pequeño de tal manera que B tenga mínimo m componentes y $B \neq X$. Por el Teorema 1.28, si $H \in \mathcal{N}$, entonces H intersecta cada componente de B y como $A \in \mathcal{N}$ se tiene que A intersecta cada componente de B . Como $A \subset B$, tenemos que B tiene exactamente m componentes. Sean B_1, B_2, \dots, B_m las componentes de B . Entonces cada B_i es un arco o un conjunto de un solo punto. Dado $H \in \mathcal{N}$, $H \in \langle B_1, \dots, B_m \rangle \cap C_n(X)$ y por la elección de m , H tiene exactamente m componentes. Así, las componentes de H son los conjuntos $H \cap B_1, \dots, H \cap B_m$. Sea $\varphi: \mathcal{N} \rightarrow C(B_1) \times C(B_2) \times \dots \times C(B_m)$ dada por $\varphi(H) = (H \cap B_1, \dots, H \cap B_m)$. Luego, φ es una función continua e inyectiva. Así, \mathcal{N} se puede encajar en $C(B_1) \times C(B_2) \times \dots \times C(B_m)$. Como $C([0, 1])$ es una 2 -celda, entonces \mathcal{N} se puede encajar en una j -celda para algún $j \leq 2m \leq 2n$. Por tanto, $k \leq 2n$ lo cual es una contradicción. Así, $C_n(Y)$ no contiene k -celdas cuando k es de la forma $k = 2n + 1$. \square

Teorema 2.31. *Si X es un arco continuo indescomponible, $n \in \mathbb{N}$, Y un continuo tal que existe un homeomorfismo $h: C_n(X) \rightarrow C_n(Y)$, $Y_0 \in C_n(Y)$ tal que $Y_0 = h(X)$ y $Z \in C(Y) - F_1(Y)$ tal que $Y_0 \not\subset Z$, entonces Z es descomponible.*

Demostración. Supongamos que Z es indescomponible. Note que $Z \neq Y$. Sea \mathcal{B} la arco-componente de $C_n(Y) - \{Z\}$ tal que $Y \in \mathcal{B}$. Por el Teorema 1.30 y por el Teorema 2.30, se tiene que Y no contiene $(2n+1)$ -odos. Tenemos que Y es un continuo sin $(2n+1)$ -odos, que Z es un subcontinuo propio indescomponible de Y y \mathcal{B} la arco-componente de $C_n(Y) - \{Z\}$ tal que $Y \in \mathcal{B}$. Por el Teorema 1.37, el conjunto $\mathcal{K} = \{K \subset Z: K \text{ composante de } Z \text{ tal que } \langle K \rangle \cap C_n(Y) \cap \mathcal{B} \neq \emptyset\}$ tiene a lo más $2n$ elementos. Como Z tiene una infinidad de composantes (vea [44, Teorema 11.15]), podemos tomar una composante K_0 de Z tal que $K_0 \notin \mathcal{K}$. Sea $x_0 \in K_0$ fijo. Luego $\{x_0\} \notin \mathcal{B}$.

Si $C_n(Y) - \{Z\}$ es arco-conexo, como $\{x_0\}, Y \in C_n(Y) - \{Z\}$, entonces existe un arco, α , en $C_n(Y) - \{Z\}$ de $\{x_0\}$ a Y . Como \mathcal{B} es arco-conexo maximal y $Y \in \mathcal{B}$, se tiene que $\alpha \in \mathcal{B}$, de donde $\{x_0\} \in \mathcal{B}$, lo

cual es una contradicción. Así, $C_n(Y) - \{Z\}$ es arco-disconexo. Como h es un homeomorfismo se tiene que $C_n(X) - \{h^{-1}(Z)\}$ es arco-disconexo. Por el Teorema 2.28, tenemos que $X = h^{-1}(Z)$ de donde $Z = h(X) = Y_0$ lo cual es una contradicción. Por tanto, Z descomponible. \square

Teorema 2.32. *Si X es un arco continuo indescomponible, $n \in \mathbb{N}$, Y un continuo tal que existe un homeomorfismo $h: C_n(X) \rightarrow C_n(Y)$, $Y_0 \in C_n(Y)$ tal que $Y_0 = h(X)$ y $Z \in C(Y) - F_1(Y)$ tal que $Y_0 \not\subset Z$, entonces Z es un arco.*

Demostración. Sea $\mathcal{W} = h^{-1}(C_n(Z))$. Como $Y_0 \notin C_n(Z)$, tenemos que $X = h^{-1}(Y_0) \notin \mathcal{W}$. Sea $B = \bigcup \{D: D \in \mathcal{W}\}$. Por el Teorema 1.28, tenemos que $B \in C_n(X)$. Sean B_1, B_2, \dots, B_m las componentes de B , donde $m \leq n$. Como $Y_0 \not\subset Z$, tenemos que $Z \in C_n(Y) - \{Y_0\}$. Luego, tenemos que $Z_0 = h^{-1}(Z) \in C_n(X) - \{X\}$. Por el Teorema 1.36, la arco-componente de $C_n(X) - \{X\}$ que contiene a Z_0 es un conjunto de la forma $\langle K_1, \dots, K_r \rangle \cap C_n(X)$ (es decir, $Z_0 \in \langle K_1, \dots, K_r \rangle \cap C_n(X)$), donde $r \leq n$ y K_1, \dots, K_r son composantes de X . Como $C_n(Z)$ es arco-conexo, entonces \mathcal{W} es un conjunto arco-conexo y $X \notin \mathcal{W}$. Como $Z_0 \in \mathcal{W}$, $\mathcal{W} \subset \langle K_1, \dots, K_r \rangle \cap C_n(X)$. Esto indica que $B \subset K_1 \cup \dots \cup K_r$ y por lo que $B \neq X$. Así, cada B_i es un arco o un conjunto de un solo punto.

Afirmamos que Z es localmente conexo.

Supongamos que Z no es conexo es pequeño en algún elemento $z_0 \in Z$. Entonces existe un conjunto abierto U de Z y una sucesión de puntos $\{z_j\}_{j=1}^{\infty}$ en U tal que $z_0 \in U$, $\lim z_j = z_0$ y si E_j es la componente de U que contiene a z_j , con $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, entonces E_0, E_1, \dots son todas diferentes. Note que $U \neq Z$. Sea V un subconjunto abierto de Z tal que $z_0 \in V$ y $cl_Z(V) \subset U$. Para cada $j \in \mathbb{N}$, supongamos que $z_j \in V$ y tomamos la componente D_j de $cl_Z(V)$ tal que $z_j \in D_j$. Supongamos que $\lim D_j = D_0$ para algún $D_0 \in C(Z)$. Entonces $z_0 \in D_0 \subset E_0$, $D_j \subset E_j$ y $D_j \cap fr_Z(V) \neq \emptyset$ para cada $j \in \mathbb{N}$ (vea el Teorema 1.27). Así, $D_0 \cap fr_Z(V) \neq \emptyset$ y D_0 es no degenerado. Fijamos un continuo no degenerado D tal que $z_0 \in D \subset D_0 \cap V$.

Como $cl_Z(V) \neq Z$, podemos elegir subcontinuos no degenerados y disjuntos dos a dos, digamos G_1, \dots, G_{n-1} contenidos en $Z - cl_Z(V)$.

Por el Teorema 2.31, cada G_i es descomponible. Luego cada G_i contiene un 2-*odo*. Sin pérdida de generalidad supongamos que cada G_i es un 2-*odo*. Para cada $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ sea $R_i \in C(G_i)$ tal que $G_i - R_i$ es desconexo. Por la prueba de [43, Teorema 1.100], existe una 2-*celda* \mathcal{G}_i en $C(G_i)$ tal que $R_i, G_i \in \mathcal{G}_i$ y para cada $L \in \mathcal{G}_i$, $R_i \subset L \subset G_i$. Sea $\mathcal{G} = \{\{y\} \cup L_1 \cup \dots \cup L_{n-1} \in C_n(Z) : y \in D \text{ y } L_i \in \mathcal{G}_i \text{ para cada } i \in \{1, 2, \dots, n-1\}\}$. Note que \mathcal{G} es homeomorfo a $D \times \mathcal{G}_1 \times \dots \times \mathcal{G}_{n-1}$ por lo que $\dim[\mathcal{G}] \geq 2n-1$ (vea [32, Al final de la sección 4 del capítulo III]). Sea

$$\mathcal{M} = h^{-1}(\mathcal{G}).$$

Entonces \mathcal{M} es un subcontinuo de $C_n(X)$ tal que $\mathcal{M} \subset \mathcal{W}$ y $\dim[\mathcal{M}] \geq 2n-1$. Note que $X \notin \mathcal{M}$. Sea

$$m_0 = \{\max\{i \in \{1, 2, \dots, n\} : \mathcal{M} \cap (C_i(X) - C_{i-1}(X)) \neq \emptyset\}\}$$

Veamos que $m_0 = n$.

Sean $M_0 \in \mathcal{M} \cap (C_{m_0}(X) - C_{m_0-1}(X))$ y M_1, \dots, M_{m_0} las componentes de M_0 . Supongamos que $M_0 = h^{-1}(\{y_0\} \cup L_1^0 \cup \dots \cup L_{n-1}^0)$, donde $y_0 \in D$ y $L_i^0 \in \mathcal{G}_i$ para cada $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. Sea $\epsilon > 0$ tal que los conjuntos $N(\epsilon, M_1), \dots, N(\epsilon, M_{m_0})$ son disjuntos dos a dos. Como $X \notin \mathcal{M}$, $M_0 \neq X$, por lo que $X \neq N(\epsilon, M_1) \cup \dots \cup N(\epsilon, M_{m_0})$. Como $C_{m_0-1}(X)$ es cerrada en $C_n(X)$ y h^{-1} es continua, existe un continuo no degenerado D' de D y para cada $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ existe una 2-*celda* \mathcal{G}'_i tal que $L_i^0 \in \mathcal{G}'_i \subset \mathcal{G}$, $H(M_0, h^{-1}(L)) < \epsilon$ y $h^{-1}(L) \notin C_{m_0-1}(X)$ para cada $L \in \mathcal{G}' = \{\{y\} \cup L_1 \cup \dots \cup L_{n-1} \in C_n(Z) : y \in D' \text{ y } L_i \in \mathcal{G}'_i \text{ para cada } i \in \{1, 2, \dots, n-1\}\}$. Dado $L \in \mathcal{G}'$, $h^{-1}(L) \in \mathcal{M}$, $h^{-1}(L)$ tiene al menos m_0 componentes y por la definición de m_0 , $h^{-1}(L)$ tiene a lo más m_0 componentes. Así, $h^{-1}(L)$ tiene exactamente m_0 componentes. Como $h^{-1}(L) \in \langle N(\epsilon, M_1), \dots, N(\epsilon, M_{m_0}) \rangle \cap C_n(X)$, tenemos que las componentes de $h^{-1}(L)$ son los conjuntos $h^{-1}(L) \cap N(\epsilon, M_1), \dots, h^{-1}(L) \cap N(\epsilon, M_{m_0})$. Sea $L_0 = \bigcup \{h^{-1}(L) : L \in \mathcal{G}'\}$. Por el Teorema 1.28, L_0 tiene a lo más m_0 componentes, pero $L_0 \in \langle N(\epsilon, M_1), \dots, N(\epsilon, M_{m_0}) \rangle \cap C_n(X)$, por lo que L_0 tiene exactamente m_0 componentes las cuales son precisamente los conjuntos $L_0 \cap N(\epsilon, M_1), \dots, L_0 \cap N(\epsilon, M_{m_0})$. Esto implica que cada conjunto $L_0 \cap N(\epsilon, M_i)$ es un arco o un conjunto de un solo punto.

Por otro lado, note que \mathcal{G}' es homeomorfo a $D' \times \mathcal{G}'_1 \times \cdots \times \mathcal{G}'_{n-1}$ por lo que $\dim[\mathcal{G}'] \geq 2n - 1$ y $\dim[h^{-1}(\mathcal{G}')] \geq 2n - 1$. En otro caso, la función continua $\varphi: \mathcal{G}' \rightarrow C(L_0 \cap N(\epsilon, M_1)) \times \cdots \times C(L_0 \cap N(\epsilon, M_{m_0}))$ dada por $\varphi(L) = (h^{-1}(L) \cap N(\epsilon, M_{m_1}), \dots, h^{-1}(L) \cap N(\epsilon, M_{m_0}))$ es una incrustación. Esto muestra que $\dim[C(L_0 \cap N(\epsilon, M_1)) \times \cdots \times C(L_0 \cap N(\epsilon, M_{m_0}))] \geq 2n - 1$. Dado que, para cada $i \in \{1, \dots, m_0\}$, $C(L_0 \cap N(\epsilon, M_i))$ es un conjunto de un punto o una 2-celda (vea [38, Teorema 5.1], tenemos que $2m_0 \geq \dim[C(L_0 \cap N(\epsilon, M_1)) \times \cdots \times C(L_0 \cap N(\epsilon, M_{m_0}))]$. Así, $m_0 \geq n$. Por tanto, $m_0 = n$.

Como $M_0 \in \mathcal{M} \subset \mathcal{W}$, se tiene que $M_0 \subset B$ y por el Teorema 1.28, tenemos que B_i intersecta a M_0 . Dado que B es union finita de arcos o conjuntos de un punto, existen arcos disjuntos dos a dos (o conjuntos de un punto), Q_1, \dots, Q_n de B tal que para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, $M_i \subset \text{int}_B(Q_i)$. Entonces $M_0 \in C_n(X) \cap \mathcal{W} \cap \langle \text{int}_B(Q_1), \dots, \text{int}_B(Q_n) \rangle$, el cual es un subconjunto abierto de \mathcal{W} .

Veamos que cada Q_i es un arco. Como $C_n(X) - C_{n-1}(X)$ es abierto en $C_n(X)$ y $M_0 \in \mathcal{M} \cap (C_n(X) - C_{n-1}(X))$, existe un $\epsilon_0 > 0$ y para cada $i \in \{1, \dots, n-1\}$, existe una 2-celda \mathcal{L}_i tal que $B_Z(\epsilon_0, y_0) \subset V, L_i^0 \in \mathcal{L}_i \subset \mathcal{G}_i$ y $h^{-1}(L) \in C_n(X) \cap \mathcal{W} \cap \langle \text{int}_B(Q_1), \dots, \text{int}_B(Q_n) \rangle$ para cada $L \in \mathcal{L}$, donde

$$\mathcal{L} = \{A \cup L_1 \cup \cdots \cup L_{n-1} \in C_n(Z) : H(A, \{y_0\}) < \epsilon_0 \text{ y } L_i \in \mathcal{L}_i, \text{ para cada } i \in \{1, \dots, n-1\}\}.$$

Sea $\{y_m\}_{m=1}^\infty$ una sucesión fija en X tal que $\lim y_m = y_0$ y $y_m \in D_m$, para cada $m \in \mathbb{N}$. Sea $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $y_m \in B_Y(\frac{\epsilon_0}{2}, y_0)$, para cada $m \geq N_0$. Para cada $m \geq N_0$, tomamos un subcontinuo P_m de Z tal que $\text{diam}(P_m) = \frac{\epsilon_0}{2}$ y $y_m \in P_m$. entonces $P_m \subset V$, por lo que $P_m \subset D_m$. Tomando una subsucesión si es necesario, podemos suponer que $\lim P_m = P_0$ para algún $P_0 \in C(Z)$ y $\lim C(P_m) = \mathcal{P}$ para algún $\mathcal{P} \in C(C(Z))$. Entonces $y_0 \in P_0$, $\text{diam}(P_0) = \frac{\epsilon_0}{2}$ y $\mathcal{P} \subset C(P_0)$. Entonces $P_0 \subset D_0$. Sean $p_0, q_0 \in P_0$, fijos, tales que $p_0 \neq q_0$ y elegimos sucesiones $\{p_m\}_{m=N_0}^\infty$, y $\{q_m\}_{m=M_0}^\infty$ en Z tal que $\lim p_m = p_0$, $\lim q_m = q_0$ y para cada $m \geq N_0$, $p_m \in P_m$. Dado $m \geq N_0$, elegimos arcos ordenados α_m, β_m de $\{p_m\}$ a P_m y de $\{q_m\}$ a P_m , respectivamente. Sean $\mathcal{T}_m = \text{Im} \alpha_m$ y $\mathcal{S}_m = \text{Im} \beta_m$. También supongamos que $\lim \mathcal{T}_m = \mathcal{T}_0$ y $\lim \mathcal{S}_m = \mathcal{S}_0$ para algún $\mathcal{T}_0, \mathcal{S}_0 \in C(C(P_0))$. Por [43, 1.34] cada conjun-

to \mathcal{T}_0 y \mathcal{S}_0 son imágenes de respectivos arcos ordenados de $\{p_0\}$ a P_0 y de $\{q_0\}$ a P_0 . Note que $F_1(P_0) \cup \mathcal{T}_0 \cup \mathcal{S}_0 \subset \mathcal{P}$.

Dado $m \in \{0, N_0, N_0+1, \dots\}$ y un subcontinuo A de P_m , como $A \subset P_m \subset B_Y(\epsilon_0, y_0)$, $H(A, \{y_0\}) < \epsilon_0$. Así, para cada elección de elementos $L_i \in \mathcal{L}_i$, con $i \in \{1, \dots, n-1\}$, se tiene que $A \cup L_1 \cup \dots \cup L_{n-1} \in \mathcal{L}$.

Dado $L \in \mathcal{L}$, $h^{-1}(L) \in C_n(X) \cap \mathcal{W} \cap \langle \text{int}_B(Q_1), \dots, \text{int}_B(Q_n) \rangle$. Como Q_1, \dots, Q_n son disjuntos dos a dos, entonces h^{-1} tiene exactamente n componentes las cuales son precisamente $h^{-1}(L) \cap Q_1, \dots, h^{-1}(L) \cap Q_n$. Sea $\mathcal{A} = C(Q_1) \times \dots \times C(Q_n)$. Definimos $\sigma: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{A}$ por $\sigma(L) = (h^{-1}(L) \cap Q_1, \dots, h^{-1}(L) \cap Q_n)$. Luego, σ es un encaje. Por [43, Teorema 2.1], la $\dim[C(P_0)] > 2$. Como \mathcal{L} contiene una copia topológica de $C(P_0) \times \mathcal{L}_1 \times \dots \times \mathcal{L}_{n-1}$ y la dimensión de este conjunto es $\dim[C(P_0)] + 2(n-1) > 2n$, vea [32, final de sección 4 del capítulo III], tenemos que $\dim[\mathcal{A}] \geq 2n$. Ahora, como cada $C(Q_i)$ es un conjunto de un punto o una 2 -celda, se tiene que $\dim[\mathcal{A}] \leq 2n$, por lo que $\dim[\mathcal{A}] = 2n$. Esto implica que cada Q_i es un arco y \mathcal{A} es una $2n$ -celda. Como $F_1(P_0) \subset \mathcal{P}$, tenemos que $\dim[\mathcal{P}] \geq 1$. Analicemos los dos casos siguientes.

Caso 1. Supongamos que $\dim[\mathcal{P}] \geq 2$.

Sea $\mathcal{L}_0 = \{A \cup L_1 \cup \dots \cup L_{n-1} \in C_n(Z) : A \in \mathcal{P} \text{ y } L_i \in \mathcal{L}_i \text{ para cada } i \in \{1, \dots, n-1\}\}$. Como \mathcal{L}_0 es homeomorfo a $\mathcal{P} \times [0, 1]^{2(n-1)}$, tenemos que $\dim[\mathcal{L}_0] \geq 2n$. Como $\sigma|_{\mathcal{L}_0}: \mathcal{L}_0 \rightarrow \mathcal{A}$ es un encaje, entonces $\dim[\mathcal{L}_0] = 2n$. Por [32, Teorema IV 3], $\text{int}_{\mathcal{A}}(\sigma(\mathcal{L}_0))$ es no vacío. Sea $L = A \cup L_1 \cup \dots \cup L_{n-1} \in C_n(Z)$ tal que $\sigma(L) \in \text{int}_{\mathcal{A}}(\sigma(\mathcal{L}_0))$, donde $A \in \mathcal{P}$ y $L_i \in \mathcal{L}_i$ para cada $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Como $A \in \mathcal{P} = \lim C(P_m)$, existe una sucesión $\{A_m\}_{m=1}^{\infty}$ en $C(Z)$ tal que $\lim A_m = A$ y $A_m \in C(P_m)$ para cada $m \in \mathbb{N}$. Entonces $\lim \sigma(A_m \cup L_1 \cup \dots \cup L_{n-1}) = \sigma(A \cup L_1 \cup \dots \cup L_{n-1}) = \sigma(L) \in \text{int}_{\mathcal{A}}(\sigma(\mathcal{L}_0))$. Así, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\sigma(A_m \cup L_1 \cup \dots \cup L_{n-1}) \in \sigma(\mathcal{L}_0)$. Como σ es inyectiva $A \cup L_1 \cup \dots \cup L_{n-1} \in \mathcal{L}_0$. Esto implica que $A \cup L_1 \cup \dots \cup L_{n-1} = A' \cup L'_1 \cup \dots \cup L'_{n-1}$, donde $A' \in \mathcal{P}$ y $L'_i \in \mathcal{L}_i$ para cada $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Intersectando estos conjuntos con $B_{C_n(Z)}(\epsilon_0, \{y_0\})$, obtenemos que $A_m = A'$. Esto es una contradicción ya que $A_m \in C(P_m)$, $A' \in \mathcal{P} \subset C(P_0)$ y $P_0 \cap P_m = \emptyset$. Por tanto este caso es imposible.

Caso 2. Supongamos que $\dim[\mathcal{P}] = 1$.

Sea S^+ (respectivamente, S^-) la mitad superior (inferior) de S^1 . Como $F_1(P_0) \cap (\mathcal{T}_0 \cup \mathcal{S}_0) = \{\{p_0\}, \{q_0\}\}$, por Lema de Urysohn para espacios métricos, existe una función continua $f: F_1(P_0) \cup \mathcal{T}_0 \cup \mathcal{S}_0 \rightarrow S^1$ tal que $f(F_1(P_0)) = S^-$, $f(\{p_0\}) = \{(-1, 0)\}$, $f(\{q_0\}) = \{(1, 0)\}$ y $f(\mathcal{T}_0 \cup \mathcal{S}_0) = S^+$. Como $\dim[\mathcal{P}] = 1$, por [32, Teorema VI 4] la función continua f se puede extender a una función (que también le llamamos f) $f: \mathcal{U} \rightarrow S^1$, donde \mathcal{U} es un subconjunto abierto de $C(Z)$ tal que $\mathcal{P} \subset \mathcal{U}$.

Como $\lim \mathcal{T}_m \cup \mathcal{S}_m = \mathcal{T}_0 \cup \mathcal{S}_0$ y $\lim F_1(P_m) = F_1(P_0)$, existe un $m > N_0$ tal que se cumple que $C(P_m) \subset \mathcal{U}$, $f(\mathcal{T}_m \cup \mathcal{S}_m) \subset N_{S^1}(\frac{1}{10}, S^+)$, $f(F_1(P_m)) \subset N_{S^1}(\frac{1}{10}, S^-)$, $f(\{p_m\}) \subset N_{S^1}(\frac{1}{10}, \{(-1, 0)\})$ y $f(\{q_m\}) \subset N_{S^1}(\frac{1}{10}, \{(1, 0)\})$. Luego, por el [45, Lema 5.12] y el hecho de que $F_1(P_m) \cap (\mathcal{T}_m \cup \mathcal{S}_m) = \{p_m, q_m\}$, se tiene que $f|_{F_1(P_m) \cup \mathcal{T}_m \cup \mathcal{S}_m}$ no tiene un levantamiento (esto es, que no existe una función continua $f_1: F_1(P_m) \cup \mathcal{T}_m \cup \mathcal{S}_m \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f|_{F_1(P_m) \cup \mathcal{T}_m \cup \mathcal{S}_m} = (Cos \circ f_1, Sin \circ f_1)$). Por otro lado, por [6, Lema 13], $f|_{C(P_m)}$ tiene un levantamiento. Como $F_1(P_m) \cup \mathcal{T}_m \cup \mathcal{S}_m \subset C(P_m)$, entonces $f|_{F_1(P_m) \cup \mathcal{T}_m \cup \mathcal{S}_m}$ tiene un levantamiento. Esta contradicción prueba que también este caso es imposible.

Por tanto, tenemos que Z es localmente conexo.

Ahora, supongamos que Z contiene un triodo simple T y supongamos que $T \neq Z$. Por lo que podemos construir arcos J_1, J_2, \dots, J_{n-1} en Z tal que $T, J_1, J_2, \dots, J_{n-1}$ son disjuntos dos a dos. Como $C(T) \times C(J_1) \times \dots \times C(J_{n-1})$ es naturalmente encajado en $C_n(Z)$, por [38, Ejemplos 5.1 y 5.4], $C(T) \times C(J_1) \times \dots \times C(J_{n-1})$ tiene una $(2n+1)$ -celda. Esto contradice al Teorema 2.30 por lo que Z no contiene triodos simples. Por tanto, Z es un arco o una curva cerrada simple. Usando un arco ordenado de Z a Y , es posible construir un subcontinuo Z_1 de Y tal que $Z \subsetneq Z_1$ y $Y_0 \not\subset Z_1$. Aplicando lo que tenemos hasta ahora a Z_1 , concluimos que Z_1 es un arco o una curva cerrada simple. Por tanto, Z es un arco. \square

Teorema 2.33. *Si X es un arco continuo indescomponible, $n \in \mathbb{N}$, Y es un continuo tal que existe un homeomorfismo $h: C_n(X) \rightarrow C_n(Y)$, $Y_0 \in C_n(Y)$ tal que $Y_0 = h(X)$ y $D \in C_n(Y)$ tal que $Y_0 \not\subset D$, entonces $D \in \mathcal{W}_n(Y)$. Por otro lado, $\mathcal{W}_n(X) = C_n(X) - \{X\}$.*

Demostración. Sea V un subconjunto abierto de Y tal que $D \subset V$ y $Y_0 \not\subset cl_Y(V)$. Sea Z una componente de D . Por el Teorema 2.32 tenemos que Z es un arco o un conjunto de un punto. Sea B la componente de $cl_Y(V)$ tal que $Z \subset B$. Entonces B es no degenerado. Entonces por el Teorema 2.32, B es un arco. Sea W la componente de V tal que $Z \subset W$.

Por el Teorema 1.27, se tiene que $cl_Y(W) \cap fr(V) \neq \emptyset$, es decir, $cl_Y(W) \cap (Y - V) \neq \emptyset$. Así, W no es compacto. Entonces W no es subconjunto compacto conexo de B . Así, W es homeomorfo a $[0, 1)$ o $(0, 1)$. Es decir, W es un alambre. Esto termina la primera parte del teorema. La segunda parte se hace con argumentos similares. \square

Teorema 2.34. *Si X es un arco continuo indescomponible, $n \in \mathbb{N} - \{1, 2\}$, Y es un continuo tal que existe un homeomorfismo $h: C_n(X) \rightarrow C_n(Y)$, $Y_0 \in C_n(Y)$ tal que $Y_0 = h(X)$ y $Z \in C(Y) - F_1(Y)$ tal que $Y_0 \not\subset Z$, entonces $h^{-1}(Z)$ es conexo.*

Demostración. Sea $Z \in C(Y) - F_1(Y)$ tal que $Y_0 \not\subset Z$. Sea $A = h^{-1}(Z)$. Por el Teorema 2.33, tenemos que $Z \in \mathcal{W}_1(Y)$ y por el Teorema 2.26, tenemos que $Z \notin \mathcal{Z}_n(Y)$ (aquí se usa que $n \geq 3$). Como $A \neq X$, de acuerdo a la segunda parte del Teorema 2.33, tenemos que $A \in \mathcal{W}_n(X)$. Supongamos que $A \in \mathcal{Z}_n(X)$. Así, A cumple la propiedad topológica que define a $\mathcal{Z}_n(X)$. Luego, $h(A) = Z$ cumple la propiedad topológica que define a $\mathcal{Z}_n(Y)$. Como $Z \notin \mathcal{Z}_n(Y)$, tenemos que $Z \notin \mathcal{W}_n(Y)$. Así, $Z \notin \mathcal{W}_1(Y)$, lo cual es una contradicción. Por tanto, $A \notin \mathcal{Z}_n(X)$.

Por el Teorema 2.26, Z tiene una base de vecindades \mathcal{B} en $C_n(Y)$ tal que para cada $\mathcal{V} \in \mathcal{B}$, si \mathcal{C} es la componente de \mathcal{V} tal que $Z \subset \mathcal{C}$, entonces $\mathcal{C} \cap \mathcal{Z}_n(Y)$ es conexo. Como $Y_0 \not\subset Z$, podemos pedir que para cada $\mathcal{V} \in \mathcal{B}$ y para cada $B \in \mathcal{V}$, $Y_0 \not\subset B$. Luego, por el Teorema 2.33, $B \in \mathcal{W}_n(Y)$ y $Y_0 \notin \mathcal{V}$. Como h es un homeomorfismo y por la segunda parte del Teorema 2.33, se tiene que si $\mathcal{V} \in \mathcal{B}$ y \mathcal{C} es la componente de \mathcal{V} que contiene a Z , entonces $h^{-1}(\mathcal{C}) \cap \mathcal{Z}_n(X) = h^{-1}(\mathcal{C} \cap \mathcal{Z}_n(Y))$. Se define $h^{-1}(\mathcal{B}) = \{h^{-1}(\mathcal{V}) \subset C_n(X) : \mathcal{V} \in \mathcal{B}\}$. Entonces $h^{-1}(\mathcal{B})$ es una base de vecindades de A en $C_n(X)$. Dado $\mathcal{V} \in \mathcal{B}$ y \mathcal{C} la componente de \mathcal{V} tal que $Z \subset \mathcal{C}$, la igualdad $h^{-1}(\mathcal{C}) \cap \mathcal{Z}_n(X) = h^{-1}(\mathcal{C} \cap \mathcal{Z}_n(Y))$ implica que $h^{-1}(\mathcal{C}) \cap \mathcal{Z}_n(X)$ es conexo. Así, por el Teorema 2.26, $A \in \mathcal{W}_1(X)$. En particular, A es conexo. Por tanto, $h^{-1}(Z)$ es conexo. \square

Teorema 2.35. *Si X es un arco continuo indescomponible, $n, r \in \mathbb{N}$ tal que $r \leq n$, y K_1, \dots, K_r son composantes de X , entonces $C(X) \subset$*

$cl_{C_n(X)}(\langle K_1, \dots, K_r \rangle \cap C_n(X))$.

Demostración. Como $C(X) - (\{X\} \cup F_1(X))$ es denso en $C(X)$, es suficiente mostrar que $C(X) - (\{X\} \cup F_1(X)) \subset cl_{C_n(X)}(\langle K_1, \dots, K_r \rangle \cap C_n(X))$. Sea $E \in C(X) - (\{X\} \cup F_1(X))$. Entonces E es un arco con puntos extremos a_1 y a_2 . Sea K una composante de X . Dado $i \in \{1, 2\}$, sea $A_i(K) = \{p \in E : \text{tal que existe una sucesión } \{B_m\}_{m=1}^\infty \text{ en } \langle K \rangle \cap C(X) \text{ que converge a un subcontinuo } B \text{ de } E \text{ y } p, a_i \in B\}$. Como K es denso en X , $\{a_i\} \in A_i(K)$. Note que $A_i(K)$ es cerrado en E y si $p \in A_i(K)$, entonces el subarco de E que une a a_i con p está contenido en $A_i(K)$. Así, $A_i(K)$ es un subcontinuo de E .

Veamos que $E = A_1(K) \cup A_2(K)$. Sea $p \in E - \{a_1, a_2\}$. Sea $\{p_m\}_{m=1}^\infty$ una sucesión en K tal que $\lim p_m = p$. Sea $\mu: C(X) \rightarrow [0, 1]$ una función de Whitney continua donde $\mu(X) = 1$ (vea [38, Teorema 13.4]). Usando arcos ordeñados se puede encontrar un subcontinuo B_m de X tal que $p_m \in B_m$ y $\mu(B_m) = \mu(E)$, para cada $m \in \mathbb{N}$. Podemos suponer que $\lim B_m = B$, para algún $B \in C(X)$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, como $E \neq X$, tenemos que $B_m \neq X$. Esto implica que $B_m \in \langle K \rangle \cap C(X)$. Note que $p \in B$. Como E, B son subcontinuos propios de X , se tiene que $E \cup B$ es un subcontinuo de X , de donde $E \cup B$ es un arco. Como $\mu(E) = \mu(B)$, no es posible que $B \subsetneq E$. Esto implica que $a_1 \in B$ o $a_2 \in B$.

Para cada $m \in \mathbb{N}$, sea $\alpha_m: [0, 1] \rightarrow C(B_m)$ un arco ordenado de $\{p_m\}$ a B_m . Podemos suponer que $\lim \text{Im } \alpha_m = \gamma$ para algún $\gamma \in C(C(X))$. Por [43, Observación 1.34], γ es la imagen de un arco ordenado $\alpha: [0, 1] \rightarrow C(X)$ que une a $\{p\}$ con B . Sea $s_0 = \{s \in [0, 1] : \gamma(s) \cap \{a_1, a_2\} \neq \emptyset\}$. Dado $s < s_0$, se tiene que $\gamma(s) \cap \{a_1, a_2\} = \emptyset$, $\gamma(s)$ interseca el arco E y $\gamma(s)$ está contenida en el arco $E \cup B$. Esto implica que $\gamma(s) \subset E$. Así, $\gamma(s_0) \subset E$. Como $\gamma(s_0)$ pertenece a $\lim \text{Im } \alpha_m$, $\gamma(s_0)$ satisface las condiciones de la definición de $A_i(K)$, lo cual nos permite concluir que $p \in A_1(K) \cup A_2(K)$. Por tanto, $E = A_1(K) \cup A_2(K)$.

Para el caso $r = 1$, por la conexidad de E , existe $p \in A_1(K_1) \cap A_2(K_1)$. Sean $\{B_m\}_{m=1}^\infty$ y $\{C_m\}_{m=1}^\infty$ sucesiones en $\langle K_1 \rangle \cap C(X)$ que convergen a subcontinuos B y C de E (respectivamente) tal que $p, a_1 \in B$ y $p, a_2 \in C$. Entonces $B \cup C$ es un subcontinuo de E que contiene a a_1 y a_2 . Así, $E = B \cup C$. Por tanto, $E = \lim B_m \cup C_m$. como $B_m \cup C_m \subset \langle K_1 \rangle \cap C_n(X)$ para cada $m \in \mathbb{N}$, tenemos que $E \in cl_{C_n(X)}(\langle K_1 \rangle \cap C_n(X))$.

Para el caso $r \geq 2$, tomamos un orden natural en E tal que $a_1 < a_2$. Por la conexidad de E , podemos elegir puntos $p_1 \in A_1(K_1) \cap A_2(K_1)$ y $p_2 \in A_1(K_2) \cap A_2(K_2)$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $p_1 \leq p_2$. Sean $\{B_m\}_{m=1}^\infty$ y $\{C_m\}_{m=1}^\infty$ sucesiones en $\langle K_1 \rangle \cap C(X)$ y $\langle K_2 \rangle \cap C(X)$, respectivamente, que convergen a subcontinuos B y C de E , respectivamente, tal que $p_1, a_2 \in B$ y $p_2, a_1 \in C$. Así, $E = B \cup C$ y $E = \lim B_m \cup C_m$. Para cada $i \in \{3, 4, \dots\}$, elegimos una sucesión $\{x_m^{(i)}\}_{m=1}^\infty$ en K_i tal que $\lim x_m^{(i)} = a_1$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, sea $E_m = B_m \cup C_m \cup \{x_m^{(3)}, \dots, x_m^{(r)}\}$. Entonces $E_m \in \langle K_1, \dots, K_r \rangle \cap C_n(X)$ y $\lim E_m = E$. \square

Teorema 2.36. *Si X es un arco continuo indescomponible, $n \in \mathbb{N} - \{2\}$, Y un continuo tal que existe un homeomorfismo $h: C_n(X) \rightarrow C_n(Y)$ y $Y_0 \in C_n(Y)$ tal que $Y_0 = h(X)$, entonces $Y_0 = Y$.*

Demostración. En el Teorema 2.28 probamos que $C_n(X) - \{X\}$ tiene una cantidad no numerable de arco-componentes, por lo que $C_n(Y) - \{Y_0\}$ tiene una cantidad no numerable de arco-componentes. Sea \mathcal{G} un arco componente de $C(Y) - \{Y_0\}$ tal que $Y \notin \mathcal{G}$. Dado $G \in \mathcal{G}$, si $G \not\subset Y_0$, entonces un arco ordenado de G a Y es un camino que conecta a G con Y sin pasar por Y_0 , de donde, $Y \in \mathcal{G}$, lo cual es una contradicción. Así, $G \subset Y_0$ y $\mathcal{G} \subset C_n(Y_0)$. Por el Teorema 1.36, tenemos que $h^{-1}(\mathcal{G})$ es de la forma $h^{-1}(\mathcal{G}) = \langle K_1, \dots, K_r \rangle \cap C_n(X)$ para algún $r \leq n$ y composantes K_1, \dots, K_r de X . De donde, $\mathcal{G} = h(\langle K_1, \dots, K_r \rangle \cap C_n(X))$. Supongamos que $Y_0 \neq Y$. Tomamos $y \in Y - Y_0$. Luego existe un subcontinuo no degenerado Z de Y tal que $y \in Z \subset Y - Y_0$. Sea $E = h^{-1}(Z)$. Por el Teorema 2.34, tenemos que E es un subcontinuo de X . Por el Teorema 2.35 se tiene que $E \in cl_{C_n(X)}(\langle K_1, \dots, K_r \rangle \cap C_n(X))$, de donde, $Z \in cl_{C_n(Y)}(h(\langle K_1, \dots, K_r \rangle \cap C_n(X))) = cl_{C_n(Y)}(\mathcal{G}) \subset C_n(Y_0)$ de modo que $Z \subset Y_0$. Esto contradice la elección de Z . Así, $Y_0 = Y$. \square

El siguiente resultado muestra que los arco continuos indescomponibles, para $n \in \mathbb{N} - \{2\}$, tienen hiperespacio único $C_n(X)$.

Teorema 2.37. *Si X es un arco continuo indescomponible, Y un continuo, $n \in \mathbb{N} - \{2\}$ y si $C_n(X)$ es homeomorfo a $C_n(Y)$, entonces X es homeomorfo a Y .*

Demostración. Para $n = 1$ la unicidad del hiperespacio $C(X)$ está probada en el Teorema 2.3 de [1].

Supongamos que X es un arco continuo indescomponible, Y es un continuo, $n \in \mathbb{N} - \{1, 2\}$ y $h : C_n(X) \rightarrow C_n(Y)$ un homeomorfismo.

Sea $Y_0 \in C_n(Y)$ tal que $h(X) = Y_0$. En el Teorema 2.29 se prueba que Y_0 es un subcontinuo indescomponible de Y y en el Teorema 2.36 se prueba que $Y = Y_0$. Por tanto, Y es indescomponible. Por el Teorema 2.32 se prueba que cada subcontinuo propio de Y no degenerado es un arco. Por tanto, Y es arco continuo indescomponible.

Por otro lado, por el Teorema 2.34 se tiene que $h^{-1}(Z) \in C(X)$ para cada $Z \in C(Y)$. Por simetría podemos concluir que $h(W) \in C(Y)$ para cada $W \in C(X)$. Luego, $h|C(X) : C(X) \rightarrow C(Y)$ es un homeomorfismo. Luego por el Teorema 2.27, tenemos que $h(F_1(X)) = F_1(Y)$. Dado que X es homeomorfo a $F_1(X)$, que Y es homeomorfo a $F_1(Y)$ y como $F_1(X)$ es homeomorfo a $h(F_1(X))$, tenemos que X es homeomorfo a Y . \square

Teorema 2.38. *Si X es un arco continuo indescomponible y $n \in \mathbb{N} - \{2\}$, entonces el hiperespacio $C_n(X)$ es rígido.*

Demostración. Supongamos que X es un arco continuo indescomponible, $n \in \mathbb{N} - \{2\}$ y $h : C_n(X) \rightarrow C_n(X)$ un homeomorfismo.

Por los Teoremas 2.28, 2.29, 2.30, 2.31, 2.32, 2.33, 2.34, 2.35, 2.36, llegamos, en particular, a que $h|C(X) : C(X) \rightarrow C(X)$ es un homeomorfismo. Luego, por el Teorema 2.27, tenemos que $h(F_1(X)) = F_1(X)$. Es decir, que el hiperespacio $C_n(X)$ es rígido. \square

Mencionamos un par de ejemplos a los que les aplicamos el Teorema 2.38.

Definición 2.39. *Una sucesión inversa es una “sucesión doble” $\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty}$, donde, los X_n son espacios métricos compactos y para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n : X_{n+1} \rightarrow X_n$ es una función continua.*

Si $\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión inversa, usualmente se piensa en el siguiente diagrama:

$$X_1 \longleftarrow f_1 X_2 \longleftarrow f_2 \dots X_n \longleftarrow f_n X_{n+1} \longleftarrow f_{n+1} \dots$$

Entonces el límite inverso de $\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty}$, es el subespacio del producto cartesiano $\prod_{n=1}^{\infty}$ definido y denotado como:

$$\varprojlim \{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty} = \{(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n : f_n(x_{n+1}) = x_n \text{ para cada } n \in \mathbb{N}\}.$$

Para mayor información sobre límites inversos vea [44].

Ejemplo 2.40. Para cada $p = 2, 3, 4, \dots$ sea $f^p: S^1 \rightarrow S^1$ dada por $f^p(z) = z^p$, para cada $z \in S^1$ (donde z^p es la p -ésima potencia de z usando multiplicación compleja). Para cada p , sea

$$\sum_p = \varprojlim \{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}, \text{ donde } X_i = S^1 \text{ y cada } f_i = f^p.$$

Por [44, Teorema 2.7], para cada $p \geq 2$, tenemos que \sum_p es un continuo indescomponible y por [44, Ejercicio 2.16] o de [30, Teorema 2] o de la afirmación del [28, Corolario 25], tenemos que \sum_p es un arco continuo indescomponible. Así, por el Teorema 2.38, tenemos que si $n \in \mathbb{N} - \{2\}$, entonces $C_n(\sum_p)$ es rígido. El continuo \sum_p se llama el Solenoide p -ádico.

Ejemplo 2.41. Otro tipo de arco continuos indescomponibles son los continuos tipo Knaster los cuales mencionamos su construcción como sigue:

Definición 2.42. Un continuo X es un **continuo tipo Knaster**, si existe una función $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ abierta y sobreyectiva tal que f no es un homeomorfismo y además que $X = \varprojlim \{[0, 1], f\}$.

Un continuo X tipo Knaster tiene la propiedad de ser arco continuo indescomponible (vea [31] y [39]). Luego de acuerdo con el Teorema 2.38, si $n \in \mathbb{N} - \{2\}$, tenemos que el hiperespacio $C_n(X)$ es rígido.

Como se puede observar, la rigidez del hiperespacio $C_n(X)$ se vale para todo natural que no sea el 2 y hasta este momento para los arco continuos indescomponibles X . El caso para $n = 2$ está abierto aún. Es interesante preguntar qué pasa en una familia de continuos más grande a la que se estudia en el Teorema 2.38.

Pregunta: Supongamos que X es un continuo alambrado. ¿Es verdad que $C_2(X)$ no es rígido? Sería interesante determinar si $C_2(X)$ es rígido cuando X es uno de los siguientes continuos particulares:

- (a) es el continuo de Buckethandle (vea [44, 2.9]),
- (b) es un Solenoide p -ádico (vea [44, 2.8]),
- (c) es el cono sobre el conjunto de Cantor.

Pregunta: Supongamos que X es un arco continuo indescomponible. ¿ X tiene hiperespacio único $C_2(X)$? Sería interesante determinar si X tiene hiperespacio único $C_2(X)$ cuando X es uno de los siguientes continuos particulares:

- (a) es el continuo de Buckethandle (vea [44, 2.9]),
- (b) es un Solenoide p -ádico (vea [44, 2.8]).

2.3. Continuos localmente conexos

En esta sección trabajamos con continuos localmente conexos. Al igual que en el Teorema 2.38, presentamos un resultado (vea 2.54) en el que demostramos que el n -ésimo hiperespacio de un continuo es rígido para todo natural distinto del 2. También presentamos un resultado (vea 2.47) en el que el n -ésimo hiperespacio de un continuo no es rígido para todo número natural.

Definición 2.43. *Sea X un continuo con métrica d . Un subconjunto A de X es un **Z-conjunto** en X si para cada $\epsilon > 0$, existe una función continua $f: X \rightarrow X - A$ tal que $d(x, f(x)) < \epsilon$ para todo $x \in X$.*

Vamos a mencionar algunos resultados que utilizaremos dentro de la prueba de otro resultado importante el cual menciona para qué familia de continuos el hiperespacio $C_n(X)$ no es rígido.

Definición 2.44. *Sea X un continuo y K un subconjunto cerrado en X . Definimos el conjunto $C_n(X, K)$ como:*

$$C_n(X, K) = \{A \in C_n(X) : A \cap K \neq \emptyset\}.$$

Teorema 2.45. *[27, Teorema 16] Si X es un continuo localmente conexo, $n \in \mathbb{N}$ y R un subconjunto no vacío cerrado de $\mathcal{P}(X)$, entonces $C_n(X, R)$ es un cubo de Hilbert.*

Teorema 2.46. *[38, Teorema de homogeneidad de Anderson 11.9.1] Si \mathcal{Q} es un cubo de Hilbert, A, B dos Z-conjuntos de \mathcal{Q} y $h: A \rightarrow B$ es un homeomorfismo, entonces h puede ser extendida a un homeomorfismo $H: \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{Q}$.*

Veamos una familia de continuos en la cual el n -ésimo hiperespacio no es rígido.

Teorema 2.47. *Si X es un continuo localmente conexo que no es casi enrejado y $n \in \mathbb{N}$, entonces $C_n(X)$ no es rígido.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{P}(X)$ es como en la Definición 1.16. Tenemos que $C_n(X, \mathcal{P}(X)) = \{A \in C_n(X) : A \cap \mathcal{P}(X) \neq \emptyset\}$. Como $\mathcal{P}(X)$ es cerrado en X , por el Teorema 2.45, se tiene que $C_n(X, \mathcal{P}(X))$ es homeomorfo al cubo de Hilbert. Como X no es casi enrejado (vea Definición 1.16), existen un conjunto abierto, U , de X y $p \in X$ tal que

$p \in U \subset \mathcal{P}(X)$. Tomamos un subcontinuo no degenerado T de X tal que $p \in T \subset U$.

Sea $\mathcal{A} = fr_{C_n(X)}(C_n(X, \mathcal{P}(X)))$ y $\mathcal{B} = \{\{p\}, T\}$. Note que \mathcal{A} y \mathcal{B} son subconjuntos cerrados de $C_n(X, \mathcal{P}(X))$. Como $p \in T \subset U \subset \mathcal{P}(X)$, entonces $\{p\}, T \in \langle U \rangle_n \subset C_n(X, \mathcal{P}(X))$. Entonces $\{p\}, T \in int_{C_n(X)}(C_n(X, \mathcal{P}(X)))$. Luego $\{p\}, T \notin \mathcal{A}$, es decir, que $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$. Por [27, Claim 1, Teorema 20], se tiene que \mathcal{A} es un Z -conjunto de $C_n(X, \mathcal{P}(X))$ y como \mathcal{B} es un subconjunto finito del cubo de Hilbert $C_n(X, \mathcal{P}(X))$, tenemos que \mathcal{B} es un Z -conjunto de $C_n(X, \mathcal{P}(X))$, (vea [38, Pág. 78]). Entonces, por [38, Ejercicio 9.4], se tiene que $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ es un Z -conjunto de $C_n(X, \mathcal{P}(X))$.

Consideremos la siguiente función $h: \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ definida como sigue:

$$h(A) = \begin{cases} A, & \text{si } A \in \mathcal{A}, \\ \{p\}, & \text{si } A \in \mathcal{B} \text{ y } A = T, \\ T, & \text{si } A \in \mathcal{B} \text{ y } A = \{p\}. \end{cases}$$

Note que h es un homeomorfismo entre Z -conjuntos en el cubo de Hilbert $C_n(X, \mathcal{P}(X))$. Por el Teorema de homogeneidad de Anderson, existe un homeomorfismo del cubo de Hilbert $C_n(X, \mathcal{P}(X))$ sobre él mismo, digamos $g: C_n(X, \mathcal{P}(X)) \rightarrow C_n(X, \mathcal{P}(X))$, que extiende a h .

Veamos que podemos extender a g a un homeomorfismo, f , de $C_n(X)$ en $C_n(X)$ tal que $f(F_1(X)) \neq F_1(X)$, lo cual prueba que el hiperespacio $C_n(X)$ no es rígido.

Sea la función $f: C_n(X) \rightarrow C_n(X)$ definida como:

$$f(A) = \begin{cases} A, & \text{si } A \in C_n(X) - C_n(X, \mathcal{P}(X)) \\ g(A), & \text{si } A \in C_n(X, \mathcal{P}(X)). \end{cases}$$

Note que f es biyectiva. Veamos la continuidad de f en el conjunto $C_n(X) - C_n(X, \mathcal{P}(X))$.

Sean $H \in C_n(X) - C_n(X, \mathcal{P}(X))$ y $\{H_i\}_{i=1}^\infty \in C_n(X) - C_n(X, \mathcal{P}(X))$ tal que H_i converge a H . Por demostrar que $f(H_i)$ converge a $f(H)$.

Note que como $H_i \in C_n(X) - C_n(X, \mathcal{P}(X))$, entonces $f(H_i) = H_i$. Pero H_i converge a H , de donde tenemos que $f(H_i)$ converge a H . Veamos que $f(H) = H$

Si $H \in C_n(X) - C_n(X, \mathcal{P}(X))$, entonces $f(H) = H$. Por tanto, tenemos que $f(H_i)$ converge a $f(H)$. Así, tenemos que f es continua. Si $H \in C_n(X, \mathcal{P}(X))$ y como $C_n(X, \mathcal{P}(X))$ es cerrado, entonces $H \in \overline{C_n(X, \mathcal{P}(X))}$ y como $H \in \overline{C_n(X) - C_n(X, \mathcal{P}(X))}$, entonces $H \in \mathcal{A}$. Como $H \in \mathcal{A}$ y h restringida a \mathcal{A} es la identidad, entonces $f(H) = H$. Por tanto, tenemos que $f(H_i)$ converge a $f(H)$. Así, tenemos que f es continua en H .

Por tanto, tenemos que f es un homeomorfismo de $C_n(X)$ en $C_n(X)$ tal que $f(\{p\}) = T$ con $T \notin F_1(X)$, es decir, $f(F_1(X)) \neq F_1(X)$. Por tanto, se tiene que $C_n(X)$ no es rígido. \square

A continuación, presentamos un ejemplo de un continuo X que cumple con las condiciones del Teorema 2.47, por lo que el n -ésimo hiperespacio de X no es rígido.

Ejemplo 2.48. Sea la dendrita D_3 como en [8, Sección 3] y $n \in \mathbb{N}$. En la Figura 2.1 se muestran los primeros tres pasos de la construcción del continuo D_3 . Por ser D_3 una dendrita, tenemos que D_3 es localmente conexo y como D_3 no tiene arcos libres, tenemos que $\mathcal{G}(D_3) = \emptyset$. Por tanto, tenemos que D_3 no es casi enrejado por lo que de acuerdo al Teorema 2.47, se tiene que $C_n(D_3)$ no es rígido.

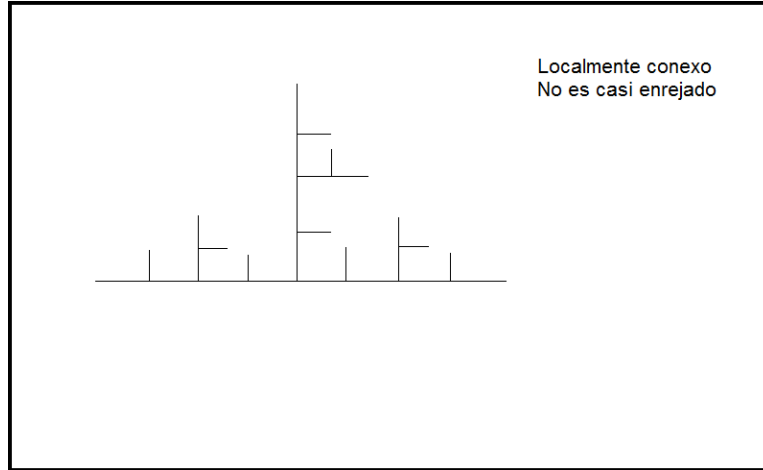


Figura 2.1: Dendrita D_3

El siguiente resultado nos ayuda a demostrar, en el Teorema 2.51,

que los continuos localmente conexos casi enrejados y sin pelos, el hiperespacio $C(X)$ es rígido

Teorema 2.49. *Sean X un continuo localmente conexo que no contiene pelos y $h: C(X) \rightarrow C(X)$ es un homeomorfismo. Si $p \in \alpha - \{a, b\}$ para algún arco libre α en X ($\alpha \subset X$) con puntos extremos a y b , entonces $h(\{p\}) \in F_1(X)$.*

Demostración. Supongamos que X es una curva cerrada simple. Sea α un arco libre en X ($\alpha \subset X$) con puntos extremos a, b , $h: C(X) \rightarrow C(X)$ un homeomorfismo y $p \in \alpha - \{a, b\}$. Entonces $C(X)$ es una 2-celda tal que su frontera como variedad es $F_1(X)$, es decir, que $\partial C(X) = F_1(X)$. Como h es un homeomorfismo y la frontera como variedad y el interior como variedad se preservan bajo homeomorfismos, es decir, $h(\partial C(X)) = \partial C(X)$, tenemos que $h(F_1(X)) = F_1(X)$. En particular, $h(\{p\}) \in F_1(X)$.

Supongamos que X no es una curva cerrada simple. Como X no contiene pelos, tenemos que X no es un arco. Sea $A = h(\{p\})$. Sea $\mathcal{U} = \langle \alpha - \{a, b\} \rangle \cap C(X)$. Entonces \mathcal{U} es un subconjunto abierto de $C(X)$ que contiene a $\{p\}$. Por [38, Ejemplo 5.1], existe un homeomorfismo $t: \mathcal{U} \rightarrow C = [0, 1) \times [0, 1)$ tal que $t(\{p\}) = (0, 0)$. Así, A tiene una vecindad \mathcal{M} en $C(X)$ tal que \mathcal{M} es una 2-celda y A pertenece a la frontera como variedad de \mathcal{M} . En particular, $\dim_A[C(X)] = 2$.

Por el Teorema 2.13, $A \in \mathcal{W}_1(X)$. Así, existe un subconjunto abierto U de X tal que la componente B de U que contiene a A es homeomorfa a $(0, 1)$ o $[0, 1)$, de acuerdo al Teorema 2.2. Por la conexidad local de X , se tiene que B es abierto en X . Si existe un homeomorfismo $f: [0, 1) \rightarrow B$, entonces $f([0, \frac{1}{2}])$ es un arco tal que $f([0, \frac{1}{2})) = B - f([\frac{1}{2}, 1])$ es abierto en X . Así, $f([0, \frac{1}{2}))$ es un pelo en X , lo cual contradice nuestra hipótesis. Por lo que tenemos que B es homeomorfo a $(0, 1)$. Como $A \subset B$, se tiene que A es un arco o un conjunto de un solo punto. Si A es un arco, entonces $A \in \langle B \rangle \cap C(X) \subset \langle [0, 1] \rangle \cap C(X) = \mathcal{D}_1$. Luego, tenemos que \mathcal{D}_1 es una 2-celda contenida en $C(X)$.

Como \mathcal{M} vecindad de A , existe U abierto en $C(X)$ tal que $A \in U \subset \mathcal{M}$. Entonces existe una 2-celda, \mathcal{D} , tal que $A \in \text{int}(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}_1 \cap U \subset \text{int}(\mathcal{M})$. Por tanto, tenemos que $A \in \text{int}(\mathcal{M})$, es decir, que A esta en interior como variedad de \mathcal{M} lo cual contradice el Teorema del Dominio Invariante. Por tanto, tenemos que A no puede ser un arco, de donde $A \in F_1(X)$. Por tanto, $h(\{p\}) \in F_1(X)$. \square

En el Teorema 2.51 se muestra la rigidez del hiperespacio $C(X)$ cuando X pertenece a una familia de continuos distinta a la que se considera en el Teorema 2.38.

Definición 2.50. *Sea X un continuo. Definimos el conjunto $\mathcal{FA}(X)$ como sigue:*

$$\mathcal{FA}(X) = \bigcup \{J^\circ : J \text{ es un arco libre en } X\}.$$

Teorema 2.51. *Si X es un continuo localmente conexo casi enrejado y sin pelos, entonces el hiperespacio $C(X)$ es rígido.*

Demostración. Sean X un continuo localmente conexo casi enrejado sin pelos y $h: C(X) \rightarrow C(X)$ un homeomorfismo. Como X es casi enrejado, por [27, Lema 1], tenemos que el conjunto $\mathcal{FA}(X)$ es denso en X , es decir, que $\overline{\mathcal{FA}(X)} = X$.

Si tomamos un $x \in X$, entonces $x \in \overline{\mathcal{FA}(X)}$. Luego, existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ en $\mathcal{FA}(X)$ que converge a x . Como para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in \mathcal{FA}(X)$, existe un J_n arco libre en X tal que $x_n \in J_n^\circ$. Como x_n y X cumplen las hipótesis del Teorema 2.49 y como h es un homeomorfismo, tenemos que $h(\{x_n\}) = \{y_n\} \in F_1(X)$.

Por la continuidad de h , tenemos que $h(\{x_n\})$ converge a $h(\{x\})$. Como $h(\{x_n\})$ es una sucesión en $F_1(X)$ y $F_1(X)$ es cerrado, tenemos que $h(\{x\}) = \{y\} \in F_1(X)$. Luego, tenemos que $h(F_1(X)) = F_1(X)$. Así, el hiperespacio $C(X)$ es rígido. \square

En el Teorema 2.53 se da una caracterización de la rigidez del hiperespacio $C(X)$ para cuando X es un continuo localmente conexo y casi enrejado.

Definición 2.52. *Sean $p, q \in \mathbb{R}^2$ dos puntos diferentes. El segmento convexo que une a p con q es denotado por pq .*

Teorema 2.53. *Sea X un continuo localmente conexo casi enrejado. Entonces $C(X)$ es rígido si y solo si X no contiene pelos.*

Demostración. Supongamos $C(X)$ es rígido y que existe un pelo en X . Sea α un pelo, es decir, α es un arco con puntos extremos a, b tal que $\alpha - \{a\}$ es abierto en X . Supongamos que $\alpha \neq X$. Entonces a es un punto de corte de X , de donde, $E = X - (\alpha - \{a\})$ es un subcontinuo de X . Sea Δ el triángulo sólido en el plano Euclidiano \mathbb{R}^2 con vértices en los puntos $(0, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, 1)$. Por [38, Ejemplo 5.1],

existe un homeomorfismo $f: C(\alpha) \rightarrow \Delta$ tal que $f(\{A \in C(\alpha): a \in A\}) = (0,0)(0,1)$ y $f(\{\{x\}: x \in \alpha\}) = (0,0)(1,1)$. Sea $k: \Delta \rightarrow \Delta$ un homeomorfismo tal que $k|(0,0)(0,1)$ es la función identidad y $k(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = (\frac{1}{2}, 1)$. Definimos $h: C(X) \rightarrow C(X)$ por

$$h(A) = \begin{cases} A, & \text{si } A \cap E \neq \emptyset \\ f^{-1}(k(f(A))), & \text{si } A \in C(\alpha) \end{cases}$$

Note que si $A \in C(\alpha)$ tal que $A \cap E \neq \emptyset$, entonces por un lado tenemos que $h(A) = A$ pues $A \cap E \neq \emptyset$, por otro lado tenemos que $f^{-1}(k(f(A))) = f^{-1}(k(0,t)) = f^{-1}(0,t) = A$, de donde, $h(A) = A$. Luego h es continua y biyectiva. Así, h es un homeomorfismo.

Por definición de f , existe $\{a_0\} \in C(\alpha)$ tal que $f(\{a_0\}) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Note que $\{a_0\} \notin E$. Luego $h(\{a_0\}) = f^{-1}(k(f(\{a_0\}))) = f^{-1}(k(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})) = f^{-1}(\frac{1}{2}, 1) = A_0 \in C(\alpha, b)$ y no es singular, es decir, $A_0 \notin F_1(X)$. Por tanto, $h(F_1(X)) \not\subset F_1(X)$. Lo cual es una contradicción pues $C(X)$ es rígido. Por tanto, X no contiene pelos.

El regreso lo afirma el Teorema 2.51. \square

En el siguiente resultado se demuestra la rigidez del n -ésimo hiperespacio, para todo natural distinto del 2, cuando el continuo es localmente conexo casi enrejado y sin pelos.

Teorema 2.54. *Si X es un continuo localmente conexo casi enrejado sin pelos y $n \in \mathbb{N} - \{2\}$, entonces el hiperespacio $C_n(X)$ es rígido.*

Demostración. Si $n = 1$, por el Teorema 2.51 tenemos que el hiperespacio $C(X)$ es rígido.

Consideremos el caso para $n \geq 3$. Sea $h: C_n(X) \rightarrow C_n(X)$ un homeomorfismo. Como X es localmente conexo, por el Teorema 2.19, X preserva n -alambrados, es decir, que $h(\mathcal{W}_n(X)) = \mathcal{W}_n(X)$. Esto implica que $h(\mathcal{Z}_n(X)) = \mathcal{Z}_n(X)$. Como $n \geq 3$, por el Teorema 2.26, tenemos que $\mathcal{W}_1(X) = \{A \in \mathcal{W}_n(X) - \mathcal{Z}_n(X): A \text{ tiene una base } \mathcal{B} \text{ de vecindades de } A \text{ en } C_n(X) \text{ tal que para cada } \mathcal{U} \in \mathcal{B}, \text{ si } \mathcal{C} \text{ es la componente de } \mathcal{U} \text{ que contiene a } A, \text{ entonces } \mathcal{C} \cap \mathcal{Z}_n(X) \text{ es conexo}\}$. Luego, $h(\mathcal{W}_1(X)) = \mathcal{W}_1(X)$.

Como X es casi enrejado, tenemos que $h(C(X)) = C(X)$, es decir, que la restricción $h|_{C(X)}: C(X) \rightarrow C(X)$ es un homeomorfismo. Como X es localmente conexo casi enrejado y sin pelos, por el Teorema 2.53,

tenemos que $C(X)$ es rígido, es decir, $h(F_1(X)) = F_1(X)$. Por tanto, el hiperespacio $C_n(X)$ es rígido. \square

Ejemplo 2.55. En la Figura 2.2 se muestran los primeros pasos de la construcción de un continuo X el cual es localmente conexo casi enrejado y sin pelos. Por el Teorema 2.54, se tiene que $C_n(X)$ es rígido para cada $n \in \mathbb{N} - \{2\}$.

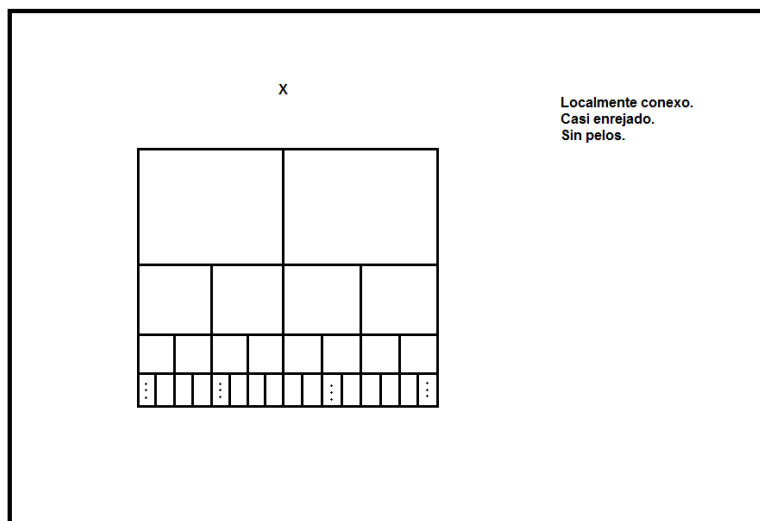


Figura 2.2: Continuo X

Resulta interesante hacer las siguientes preguntas.

Pregunta: ¿ $C_3([0, 1])$ es rígido?

Pregunta: ¿Si X es una gráfica finita y $n \geq 3$, entonces $C_n(X)$ es rígido?

Pregunta: ¿Si X es un continuo localmente conexo casi enrejado tal que X contiene un pelo y $n \geq 3$, entonces $C_n(X)$ es rígido?

Ahora veamos un teorema que nos ayudará a demostrar una caracterización (vea 2.57) de la rigidez del n -ésimo hiperespacio del continuo $[0, 1]$.

Teorema 2.56. Si $n \in \mathbb{N} - \{1, 2\}$ y $h: C_n([0, 1]) \rightarrow C_n([0, 1])$ es un homeomorfismo, entonces $h(C_{n-1}([0, 1])) = C_{n-1}([0, 1])$.

Demostración. Por definición de $\mathcal{W}_n([0, 1])$, tenemos que $\mathcal{W}_n([0, 1]) = C_n([0, 1])$. Luego $h(\mathcal{Z}_n([0, 1])) = \mathcal{Z}_n([0, 1])$. Como $n \geq 3$, por el Teorema 2.25 (b), tenemos que

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_n([0, 1]) &= \mathcal{W}_n([0, 1]) \cap (C_n([0, 1]) - C_{n-1}([0, 1])) \\ &= C_n([0, 1]) \cap (C_n([0, 1]) - C_{n-1}([0, 1])) \\ &= C_n([0, 1]) - C_{n-1}([0, 1]).\end{aligned}$$

Así, tenemos que $h(C_n([0, 1]) - C_{n-1}([0, 1])) = C_n([0, 1]) - C_{n-1}([0, 1])$. Por tanto, $h(C_{n-1}([0, 1])) = C_{n-1}([0, 1])$. \square

Haciendo uso del Teorema 2.56 podemos probar el siguiente.

Teorema 2.57. $C_3([0, 1])$ es rígido si y solo si $C_n([0, 1])$ es rígido para cada $n \in \mathbb{N} - \{1, 2\}$.

Demostración. Si $n \in \mathbb{N} - \{1, 2\}$ y $C_n([0, 1])$ es rígido, entonces en particular para $n = 3$ tenemos que $C_3([0, 1])$ es rígido.

Supongamos que $C_3([0, 1])$ es rígido, es decir, que para cualquier homeomorfismo $h: C_3([0, 1]) \rightarrow C_3([0, 1])$ se tiene que $h(F_1([0, 1])) = F_1([0, 1])$.

Sea $n \in \mathbb{N} - \{1, 2, 3\}$ y $h: C_n([0, 1]) \rightarrow C_n([0, 1])$ un homeomorfismo. Veamos que $h(F_1([0, 1])) = F_1([0, 1])$.

Por el Teorema 2.56, tenemos que $h(C_{n-1}([0, 1])) = C_{n-1}([0, 1])$. Luego $h|_{C_{n-1}([0, 1])} C_{n-1}([0, 1]) \rightarrow C_{n-1}([0, 1])$ es un homeomorfismo y como $n - 1 \in \mathbb{N} - \{1, 2\}$, aplicando el Teorema 2.56, tenemos que $h(C_{n-2}([0, 1])) = C_{n-2}([0, 1])$. Luego $h|_{C_{n-2}([0, 1])} C_{n-2}([0, 1]) \rightarrow C_{n-2}([0, 1])$ es un homeomorfismo y como $n - 2 \in \mathbb{N} - \{1, 2\}$, aplicando el Teorema 2.56, tenemos que $h(C_{n-2}([0, 1])) = C_{n-2}([0, 1])$. Siguiendo de esta manera, en algún momento tenemos que $h|_{C_{n-(n-4)}([0, 1])} C_{n-(n-4)}([0, 1]) \rightarrow C_{n-(n-4)}([0, 1])$ es un homeomorfismo. Por el Teorema 2.56, tenemos que $h(C_3([0, 1])) = C_3([0, 1])$, es decir, $h|_{C_3([0, 1])} C_3([0, 1]) \rightarrow C_3([0, 1])$ es un homeomorfismo. Luego $h(F_1([0, 1])) = F_1([0, 1])$ ya que $C_3([0, 1])$ es rígido. Por tanto, $C_n([0, 1])$ es rígido. \square

Hasta aquí, de acuerdo al Teorema 2.54, tenemos una familia de continuos tal que el hiperespacio $C_n(X)$ es rígido para todo natural distinto de 2. Es interesante preguntarse, el caso para $n = 2$, es decir, cuándo es o no es rígido el hiperespacio $C_2(X)$. Resulta que cuando

el continuo tiene un arco libre, entonces $C_2(X)$ no es rígido. Como lo afirma el siguiente:

Teorema 2.58. *Si X es un continuo tal que contiene un arco libre, entonces $C_2(X)$ no es rígido.*

Demostración. Sea α un arco libre en X con puntos extremos a, b . Sea $p \in \alpha - \{a, b\}$ y $\epsilon > 0$ tal que $B(\epsilon, p) \subset \alpha - \{a, b\}$. Sea $\mathcal{M} = C_2(\alpha)$. Por [34, Lema 2.2], tenemos que \mathcal{M} es una 4-celda. Sea $\mathcal{U} = B^H(\epsilon, \{p\}) \cap C_2(X)$. Entonces \mathcal{U} es un subconjunto abierto de $C_2(X)$ tal que $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$. De la construcción en [34, Lema 2.2], se puede ver que $F_1(\alpha)$ es un arco en la frontera como variedad, $\partial\mathcal{M}$, de \mathcal{M} . Como $\text{int}_{\partial\mathcal{M}}(F_1(\alpha)) = \emptyset$, existe un homeomorfismo $g: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ tal que $g(\{p\}) \notin F_1(\alpha)$ y g es la identidad en $\mathcal{M} - \mathcal{U}$. Sea $h: C_2(X) \rightarrow C_2(X)$ dada por

$$h(A) = \begin{cases} g(A), & \text{si } A \in \mathcal{M}, \\ A, & \text{si } A \in C_2(X) - \mathcal{U}. \end{cases}$$

Note que h es biyectiva. Sea $A \in C_2(X) - \mathcal{U}$ y $A \in \mathcal{M}$. Por un lado, tenemos que $h(A) = A$. Por otro lado, tenemos que $h(A) = g(A)$. Note que $A \in \mathcal{M} - \mathcal{U}$. Como g es la identidad en $\mathcal{M} - \mathcal{U}$ tenemos que $g(A) = A$. Así, $h(A) = A$. Luego, h es continua. Por tanto, h es un homeomorfismo.

Como $\{p\} \subset \mathcal{U}$ y $g(\{p\}) \notin F_1(\alpha)$, entonces $h(\{p\}) = g(\{p\}) \notin F_1(\alpha)$. Así, $h(\{p\}) \notin F_1(X)$. Luego $h(F_1(X)) \neq F_1(X)$. Por tanto, $C_2(X)$ no es rígido. \square

Hacemos un breve resumen de los resultados de esta sección.

Teorema 2.59. *Si X es un continuo localmente conexo, entonces*

- (a) *si X no es casi enrejado, entonces $C_n(X)$ no es rígido para toda $n \in \mathbb{N}$,*
- (b) *$C_2(X)$ no es rígido,*
- (c) *si X es casi enrejado y no contiene pelos, entonces $C_n(X)$ es rígido para cada $n \in \mathbb{N} - \{2\}$,*
- (d) *si X es casi enrejado, entonces X no contiene pelos si y solo si $C(X)$ es rígido,*

-
- (e) si $X = [0, 1]$, entonces $C_3(X)$ es rígido si y solo si $C_n(X)$ es rígido para cada $n \geq 3$,
- (f) si $X = [0, 1]$, no se sabe si $C_3([0, 1])$ es rígido.

2.4. Abanicos suaves

En esta sección trabajamos con los abanicos suaves. En el Teorema 2.78 presentamos un resultado en el que se muestra la rigidez del n -ésimo hiperespacio de un continuo.

Definición 2.60. *Dado un dendroide X y dos puntos $p, q \in X$, denotamos el único arco que une a p y q en X por pq si $p \neq q$ y $pq = \{p\}$ si $p = q$.*

Para un continuo arco conexo aceptamos la siguiente definición.

Definición 2.61. *Sean X un continuo arco conexo, $p \in X$ y $r \in \mathbb{N} \cup \{\aleph_0\}$. El punto p es **de orden r en X** , (denotado por $r = \text{ord}_p X$), si p es un punto extremo común de exactamente r arcos en X que no se intersectan en ningún otro punto (vea [9, pág. 6]). Si X es un continuo arco conexo, definimos los siguiente.*

- (a) p es un **punto extremo de X** si $\text{ord}_p X = 1$. El conjunto de puntos extremos de X lo denotamos por $E(X)$.
- (b) p es un **punto ordinario de X** si $\text{ord}_p X = 2$. El conjunto de puntos ordinarios de X lo denotamos por $O(X)$.
- (c) p es un **punto de ramificación de X** si $\text{ord}_p X \geq 3$. El conjunto de puntos de ramificación de X lo denotamos por $R(X)$.

Ejemplo 2.62. *Sea $n \in \mathbb{N}$. Si X es un n -odo simple con vértice p , entonces p es un punto de orden n en X , es decir, $\text{ord}_p X = n$.*

Definición 2.63. *Un **abanico** es un dendroide X con exactamente un punto de ramificación v , llamado el **vértice** de X .*

Observación 2.64. *Si X es un abanico con vertice v , entonces se puede observar que:*

$$X = \bigcup_{e \in E(X)} ve.$$

Ejemplo 2.65. *En la Figura 2.3, se presentan dos ejemplos de continuos los cuales uno de ellos es un abanico y otro no es abanico. El continuo X es arco conexo y hereditariamente unicoherente tal que los puntos p y q son de ramificación de X , de donde, X es un dendroide*

pero no es abanico. El continuo Y es arco conexo y hereditariamente unicoherente tal que el punto v es el único punto de ramificación de Y , de donde, Y es un dendroide con exactamente un punto de ramificación, es decir, Y es un abanico.

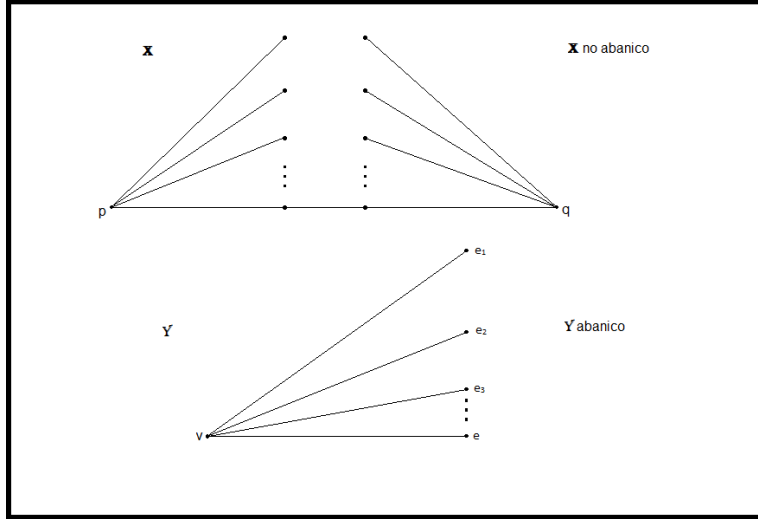


Figura 2.3: Abanico y no abanico

Una vez que ya tenemos la noción de abanico los vamos a clasificar como lo hacemos a continuación.

Definición 2.66. Un abanico X con vértice v es **suave** si para cualquier sucesión $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ en X convergente a un punto $x \in X$ ($\lim x_i = x$), se tiene que la sucesión de arcos $\{vx_i\}_{i=1}^{\infty}$ converge y converge al arco vx ($\lim vx_i = vx$) en $C(X)$.

Ejemplo 2.67. En la Figura 2.4 presentamos dos continuos que son abanicos tales que uno de ellos es suave y el otro no. El continuo X es un abanico suave y el continuo Y es un abanico no suave ya que para la sucesión $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ convergente a v , tenemos que la sucesión de arcos $\{ve_i\}_{i=1}^{\infty}$ converge al arco $ve \neq v$.

Se conoce que la clase de los abanicos suaves coincide con la clase de los subcontinuos del abanico de Cantor que no son arcos (vea [14, Corolario 4]). Dado un abanico suave X , sea $E(X)$ el conjunto de puntos extremos de X . El **abanico de Lelek** (puede revisar [11] para una

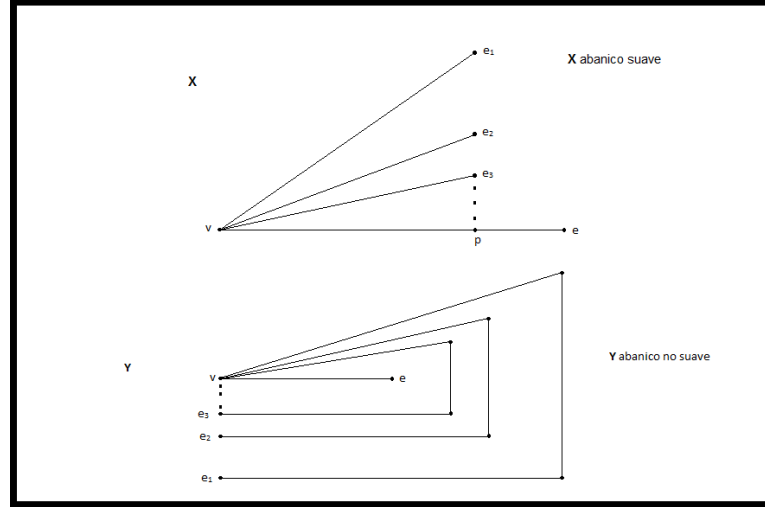


Figura 2.4: Abanico suave y abanico no suave

descripción más detallada de este continuo) es el único abanico suave tal que $E(X)$ es denso en X . Carl Eberhart y Sam B. Nadler, Jr. en [15, Corolario 3.3], probaron que un abanico suave X tiene hiperespacio único $C(X)$ en la clase de los abanicos suaves. Esto es, si X, Y son abanicos suaves tales que $C(X)$ es homeomorfo a $C(Y)$, entonces X es homeomorfo a Y . Este resultado fue extendido por Gerardo Acosta quien probó que un abanico suave tiene hiperespacio único $C(X)$ en la clase de los abanicos (vea [2, Teorema 5.4]). Alejandro Illanes muestra que el resultado de Gerardo Acosta no puede ser generalizado a los abanicos al construir un abanico X que no tiene hiperespacio único $C(X)$ en la clase de los abanicos (vea [33]).

En la sección anterior se proporciona un resultado que caracteriza la rigidez del hiperespacio $C(X)$ cuando X es un continuo localmente conexo casi enrejado y sin pelos. En particular tenemos la siguiente:

Observación 2.68. *Sea X un continuo y $n \in \mathbb{N}$. Por un lado, si X es un n -odo simple, como consecuencia del Teorema 2.53, tenemos que el hiperespacio $C(X)$ no es rígido. Por otro lado, de acuerdo al Teorema 2 de [37] y al Teorema 3 de [37], X tiene hiperespacio único $C_n(X)$, para toda $n \in \mathbb{N}$.*

Ahora vamos a caracterizar los abanicos suaves X para los cuales el hiperespacio $C(X)$ es rígido.

La siguiente discusión está particularmente en [15, Secciones 2 y 3].

Definición 2.69. Si X es un abanico suave con vértice v , $E(x)$ denota el conjunto de puntos extremos de X y $E_0(X) = cl(E(X)) - E(X)$.

Observaciones

- (a) El conjunto $E_0(X)$ puede ser el conjunto vacío, como en el caso cuando X es homeomorfo al cono sobre el conjunto de Cantor.
- (b) El conjunto $E_0(X)$ puede ser denso en X , como en el caso cuando X es el abanico de Lelek.

Definición 2.70. Supongamos que X es un abanico suave contenido en el cono sobre el conjunto de Cantor, donde el conjunto de Cantor es el conjunto ternario usual construido en $[0, 1] \times \{0\}$ en el plano y su vértice es el punto $v = (0, 1)$. Consideramos la proyección sobre la segunda coordenada $\pi: X \rightarrow [0, 1]$. Note que $\pi(v) = 1$. Definimos el conjunto X_0 por:

$$X_0 = \{v\} \cup cl_X(\bigcup\{vx: x \in E_0(X)\}).$$

Note que X_0 es un subcontinuo de X y cuando $E_0(X) = \emptyset$, entonces $X_0 = \{v\}$. El subcontinuo X_0 nos va dar una caracterización (vea 2.77) de la rigidez del hiperespacio $C(X)$.

Definición 2.71. Sean X un abanico suave y $E(X), E_0(X)$ como en la Definición 2.69. Definimos la función $\psi: E(X) \rightarrow [0, 1]$ como

$$\psi(e) = \text{mín}\{\pi(t): t \in X_0 \cap ve\}.$$

Note que ψ no necesariamente es continua. En el abanico suave de la figura 2.3, la función ψ es continua pero en el caso del abanico suave de la figura 2.4, la función ψ no es continua.

Definición 2.72. Sean X un abanico suave y $E(X)$ como en la Definición 2.69. Definimos los conjuntos \mathcal{V} y $\mathcal{L}(e)$ como:

- (a) $\mathcal{V} = \{A \in C(X): v \in A\}$.
- (b) Para cada $e \in E(X)$, sea $\mathcal{L}(e) = \{A \in C(X): A \subset ve - \{v\}\}$.

Note que

$$C(X) = \mathcal{V} \cup (\bigcup \{\mathcal{L}(e) : e \in E(X)\}).$$

Teorema 2.73. *Si X es un abanico suave, $h: C(X) \rightarrow C(X)$ un homeomorfismo y \mathcal{V} , $\mathcal{L}(e)$ como en la Definición 2.72, entonces existe una biyección $h_0: E(X) \rightarrow E(X)$ (no necesariamente continua) tal que*

- (a) $h(\mathcal{V}) = \mathcal{V}$,
- (b) para cada $e \in E(X)$, se cumple que $h(\mathcal{L}(e)) = \mathcal{L}(h_0(e))$,
- (c) $h(\{v\}) = \{v\}$,
- (d) para cada $e \in E(X)$, tenemos que $h(F_1(ve)) \subset F_1(vh_0(e)) \cup \{xh_0(e) : x \in vh_0(e)\}$ y $h(ve) = vh_0(e)$.

Demostración. (a) **Caso 1.** Sea $m \in \mathbb{N}$ y supongamos que el conjunto $E(X)$ es finito, digamos con m elementos, entonces $\mathcal{V} = \{A \in C(X) : \dim_A[C(X)] = m\}$, de donde, $h(\mathcal{V}) = \mathcal{V}$.

Caso 2. Supongamos que el conjunto $E(X)$ es infinito, entonces $\mathcal{V} = \{A \in C(X) : \dim_A[C(X)] = \infty\}$, de donde, $h(\mathcal{V}) = \mathcal{V}$.

La existencia de h_0 y (b) se siguen del hecho de que las componentes de $C(X) - \mathcal{V}$ son los elementos del conjunto $\{\mathcal{L}(e) : e \in E(X)\}$.

(c) Note que $\mathcal{V} \cap (\bigcap \{cl_{C(X)}(\mathcal{L}(e)) : e \in E(X)\}) = \{\{v\}\}$. Esto implica que $h(\{v\}) = \{v\}$.

(d) Por [38, Ejemplo 5.1], para cada $e \in E(X)$, se tiene que $\mathcal{L}(e)$ es homeomorfo a $(0, 1) \times [0, 1)$ y su frontera como variedad es $\partial\mathcal{L}(e) = F_1(ve - \{v\}) \cup \{xe : x \in ve - \{v\}\}$. Por otra parte, $cl_{C(X)}(\partial\mathcal{L}(e))$ es un arco con puntos extremos $\{v\}$ y ve y $cl_{C(X)}(\partial\mathcal{L}(e)) - \{\{v\}, ve\} = \partial\mathcal{L}(e)$. Así, concluimos que $h(F_1(ve)) \subset F_1(vh_0(e)) \cup \{xh_0(e) : x \in vh_0(e)\}$, y como $h(\{v\}) = \{v\}$, se tiene que $h(ve) = vh_0(e)$. \square

El Teorema 2.73 limita las opciones de la imagen, $h(\{x\})$, para los $x \in ve$, cuando $h: C(X) \rightarrow C(X)$ es un homeomorfismo. Como queremos determinar cuándo $C(X)$ es rígido, estamos interesados en determinar qué condiciones debe satisfacer X para que los singulares los mande a singulares. El siguiente resultado nos ayuda a hacer esto.

Teorema 2.74. *Si X es un abanico suave, $h: C(X) \rightarrow C(X)$ un homeomorfismo, \mathcal{V} , $\mathcal{L}(e)$ como en la Definición 2.72, $E_0(X)$ como en la Definición 2.69 y $x \in E_0(X)$, entonces:*

- (a) $h(\{x\}) \in F_1(X)$,
- (b) $h(F_1(vx)) \subset F_1(X)$,
- (c) $h(F_1(X_0)) \subset F_1(X)$.

Demostración. (a) Sea $e \in E(X)$ tal que $x \in ve$. Supongamos que $h(\{x\}) \notin F_1(X)$. Por el Teorema 2.73 (d), tenemos que $h(F_1(ve)) \subset F_1(vh_0(e)) \cup \{xh_0(e) : x \in vh_0(e)\}$. Como estamos suponiendo que $h(\{x\}) \notin F_1(X)$, tenemos que $h(\{x\}) \in \{xh_0(e) : x \in vh_0(e)\}$. Luego, $h(\{x\}) = zh_0(e)$, donde h_0 es como en el Teorema 2.73 y $z \in vh_0(e) - \{h_0(e)\}$.

Como $x \in E_0(X) = \overline{E(X)} - E(X)$, existe una sucesión $\{e_m\}_{m=1}^\infty$ en $E(X)$ tal que $\lim e_m = x$. Podemos suponer que $\lim h_0(e_m) = u$ para algún $u \in X$. Por la suavidad de X , tenemos que $\lim vh_0(e_m) = vu$. Ahora, como $\lim e_m = x$, tenemos que $\lim \{e_m\} = \{x\}$. Por la continuidad de h , tenemos que $\lim h(\{e_m\}) = h(\{x\})$, pero por el párrafo anterior tenemos que $h(\{x\}) = zh_0(e)$, de donde, $\lim h(\{e_m\}) = zh_0(e)$. Luego, por el Teorema 2.73 (b), para cada $m \in \mathbb{N}$, sucede que $h(\{e_m\}) \subset vh_0(e_m)$. Luego, tomando límites tenemos que $zh_0(e) \subset vu$. Como $h_0(e) \in E(X)$, concluimos que $u = h_0(e)$. Usando otra vez la suavidad de X , tenemos que $\lim ve_m = vx$, y por la continuidad de h que $\lim h(ve_m) = h(vx)$ y por el Teorema 2.73 (d), tenemos que $\lim h(ve_m) = \lim vh_0(e_m) = vu = vh_0(e) = h(ve)$. Así, tenemos que $vx = ve$, lo cual implica que $x = e \in E(X)$, lo cual es una contradicción. Por tanto, $h(\{x\}) \in F_1(X)$.

(b) Por el Teorema 2.73 (d), se tiene que $h(F_1(vx))$ es un arco contenido en el conjunto $\mathcal{A} = F_1(vh_0(e)) \cup \{xh_0(e) : x \in vh_0(e)\}$. Note que \mathcal{A} es un arco con puntos extremos $\{v\}$ y $vh_0(e)$. Como $\{v\}$ y $\{x\}$ son los puntos extremos del arco $F_1(vx)$, tenemos que $h(\{v\})$ y $h(\{x\})$ son los puntos extremos del arco $h(F_1(vx))$. Ahora, por el Teorema 2.73 incisos (a) y (c), se tiene que $h(\{v\})$ y $h(\{x\})$ están en el subarco $F_1(vh_0(e))$ de \mathcal{A} . Así, $h(F_1(vx)) \subset F_1(vh_0(e)) \subset F_1(X)$.

(c) Sea $x_0 \in X_0$. Veamos que $h(\{x_0\}) \in F_1(X)$. Recordemos que $X_0 = \{v\} \cup cl_X(\cup\{vx : x \in E_0\})$.

Caso 1. Supongamos que $x_0 = v$. Por el inciso (b), en particular tenemos que $h(\{v\}) \in F_1(X)$. Luego, $h(\{x_0\}) \in F_1(X)$.

Caso 2. Supongamos que $E_0(X)$ es finito. Entonces $cl_X(\cup\{vx: x \in E_0(X)\}) = (\cup\{vx: x \in E_0(X)\})$. Luego, $X_0 = \cup\{vx: x \in E_0(X)\}$. Si $x_0 \in X_0$, entonces $x_0 \in \cup\{vx: x \in E_0(X)\}$. Luego, existe $y_0 \in E_0(X)$ tal que $x_0 \in vy_0$. Por el inciso (b), tenemos que $h(F_1(vy_0)) \subset F_1(X)$, en particular $h(x_0) \in F_1(X)$. Por tanto, $h(F_1(X_0)) \subset F_1(X)$.

Supongamos que $E_0(X)$ es infinito. Sea $x_0 \in X_0$ tal que $x_0 \in cl_X(\cup\{vx: x \in E_0(X)\})$. Luego, existe una sucesión $\{y_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \cup\{vx: x \in E_0(X)\}$ tal que y_i converge a x_0 . Así, para cada $i \in \mathbb{N}$, existe un $x_i \in E_0(X)$ tal que $y_i \in vx_i$. Por el inciso (b), para cada $i \in \mathbb{N}$, tenemos que $h(F_1(vx_i)) \subset F_1(X)$, en particular $h(\{y_i\}) \in F_1(X)$. Como $\lim y_i = x_0$, tenemos que $\lim \{y_i\} = \{x_0\}$. Por la continuidad de h , tenemos que $h(\{y_i\})$ converge a $h(\{x_0\})$. Como $\{h(\{y_i\})\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión en $F_1(X)$ que converge a $h(\{x_0\})$ y como $F_1(X)$ es cerrado, tenemos que $h(\{x_0\}) \in F_1(X)$. Por tanto, $h(F_1(X_0)) \subset F_1(X)$.

Por los dos casos anteriores, tenemos que $h(F_1(X_0)) \subset F_1(X)$. \square

Definición 2.75. *Un espacio topológico X es localmente compacto si y solo si para cada $x \in X$ y cada U subconjunto abierto de X tal que $x \in U$, existe V abierto en X tal que $x \in V \subset \bar{V} \subset U$ y \bar{V} es compacto.*

En un espacio Hausdorff, X , es localmente compacto si y solo si cada punto de X tiene una vecindad compacta (Vea [12, Ejercicio (2.I.3)]).

Teorema 2.76. *Si X es un abanico suave, $E(X), E_0(X)$ como en la Definición 2.69 y $e_0 \in E(X)$ tal que $E(X)$ es localmente compacto en e_0 , entonces existe un subconjunto abierto W de X y $t_1 \in [0, 1]$ tal que*

- (a) $e_0 \in W$,
- (b) $W \cap E(X)$ es compacto,
- (c) $W \cap X_0 = \emptyset$ y
- (d) Si $e \in W \cap E(X)$, entonces $\pi(e) < t_1 < \psi(e)$.

Demostración. Sea d una métrica en el plano Euclidiano \mathbb{R}^2 . Sea U un conjunto abierto de X tal que $e_0 \in U$ y el conjunto $cl_X(U) \cap E(X)$ es compacto.

Afirmamos que $e_0 \notin X_0$.

Supongamos lo contrario, que existe una sucesión $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ en X y una sucesión $\{z_m\}_{m=1}^{\infty}$ en $E_0(X)$ tal que $\lim x_m = e_0$ y $x_m \in vz_m$ para cada $m \in \mathbb{N}$. Por la compacidad de X , podemos suponer que $\lim z_m = z$ para algún $z \in X$. Dado un $m \in \mathbb{N}$, existe $e_m \in E(X)$ tal que $d(e_m, z_m) < \frac{1}{m}$. Entonces, $\lim e_m = z$. Por la suavidad de x , tenemos que $\lim ve_m = \lim vz_m = vz$. Como $x_m \in vz_m$ para cada $m \in \mathbb{N}$, tenemos que $e_0 \in vz$. Como $e_0 \in E(X)$, tenemos que $e_0 = z$. Así, existe $m \in \mathbb{N}$, tal que $z_m \in U$. Como $z_m \in cl_X(E(X)) - E(X)$, se tiene que $z_m = \lim w_r$ para alguna sucesión $\{w_r\}_{r=1}^{\infty}$ en $E(X) \cap U$. Así, $\{w_r\}_{r=1}^{\infty}$ es una sucesión en $cl_X(U) \cap E(X)$ con límite que no se encuentra en $cl_X(U) \cap E(X)$. Esto muestra que $cl_X(U) \cap E(X)$ no es compacto lo cual es una contradicción. Así, $e_0 \notin X_0$.

Por tanto, existe un conjunto abierto V de X tal que $e_0 \in V$ y $cl_X(V) \subset (U - X_0)$. Así, $cl_X(V) \cap E(X)$ es compacta.

Como $v \notin E(X)$, tenemos que E es totalmente desconexo. Así, se tiene que $cl_X(V) \cap E(X)$ es compacto y totalmente desconexo y entonces $cl_X(V) \cap E(X)$ es 0-dimensional. Ahora, por la manera en que consideramos el cono sobre el conjunto de cantor en \mathbb{R}^2 , podemos suponer que existe un conjunto $Y \subset [0, 1]$ y números $s_0, s_1 \in (0, 1)$ tal que $V = X \cap (\{(0, 1)(y, 0) : y \in Y\} \cap ([0, 1] \times (s_0, s_1))$ donde $(0, 1)(y, 0)$ es el segmento convexo que une los puntos $(0, 1)$ y $(y, 0)$. Como $e_0 \in V$, se tiene que $s_0 < \pi(e_0) < s_1$. Como $e \in V \cap E(X)$, existe un $y \in Y$ tal que $e \in (0, 1)(y, 0)$. Sea p el punto en $(0, 1)(y, 0)$ tal que $\pi(p) = s_1$. Entonces $(ep - \{p\}) \subset V$. Esto implica que $(ep - \{p\}) \cap X = \emptyset$. Note que si $w \in X_0$, entonces $vw \subset X_0$. Así, $\psi(e) \geq s_1$.

Como $cl_X(V) \cap E(X)$ es 0-dimensional, existe un subconjunto cerrado y abierto, R , de $cl_X(V) \cap E(X)$ tal que $e_0 \in R$ y además $R \subset V \cap E(X)$. Sea W un conjunto abierto de X tal que $R = W \cap cl_X(V) \cap E(X)$ y $W \subset V$. Note que $e_0 \in W$, la intersección $W \cap E(X) = R$ es compacta y $W \cap X_0 = \emptyset$. Luego, si $t_1 \in (\max\{\pi(e) : e \in W \cap E(X)\}, s_1)$, se tiene que t_1 satisface que $\pi(e) < t_1 < \psi(e)$. \square

Ahora mencionamos una caracterización de la rigidez del hiperespacio $C(X)$ cuando X es un abanico suave.

Teorema 2.77. *Sean X un abanico suave, $E(X)$ como en la Definición 2.69 y X_0 como en la Definición 2.70. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (a) $C(X)$ es rígido,
 (b) $X = X_0$,
 (c) $E(X)$ no tiene puntos de compacidad local.

Demostración. (b) \implies (a) Supongamos que $X = X_0$ y que $h: C(X) \rightarrow C(X)$ es un homeomorfismo. Por el Teorema 2.74 (c), tenemos que $h(F_1(X_0)) \subset F_1(X)$. Como $X = X_0$, tenemos que $h(F_1(X)) \subset F_1(X)$. Utilizando h^{-1} , por el Teorema 2.74 (c), se tiene que $h^{-1}(F_1(X_0)) \subset F_1(X)$. Como $X = X_0$. Tenemos que $h^{-1}(F_1(X)) \subset F_1(X)$, de donde, $F_1(X) \subset h(F_1(X))$. Por tanto, $h(F_1(X)) = F_1(X)$. Así, $C(X)$ es rígido

(c) \implies (b) Supongamos que $X \neq X_0$. Tomamos $x \in X - X_0$ y sea $e \in E(X)$ tal que $x \in ve$. Si $e \in X_0$, dado que $v \in X_0$ y X_0 es un subcontinuo de X , entonces $x \in ev \subset X_0$, lo cual es una contradicción. Así, $e \notin X_0$. Sea U un conjunto abierto de X tal que $e \in U$ y $cl_X(U) \cap X_0 = \emptyset$.

Veamos que $cl_X(U) \cap E(X)$ es una vecindad compacta de e en $E(X)$.

Como X es compacto, es suficiente probar que para cualquier sucesión $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$ en $cl_X(U) \cap E(X)$ que converge a un punto $z \in cl_X(U)$, se cumple que $z \in E(X)$ también. Sea $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$ una sucesión en $cl_X(U) \cap E(X)$ tal que $\lim e_m = z \in cl_X(U)$. Como $E_0(X) \subset X_0$, se tiene que $z \notin E_0(X)$. Como $z \in cl_X(E(X))$ y $z \notin E_0(X)$, se tiene que $z \in E(X)$. Por tanto, el conjunto $cl_X(U) \cap E(X)$ es cerrado y como X es compacto, tenemos que $cl_X(U) \cap E(X)$ es compacto. Luego $E(X)$ es localmente compacto en e . Lo cual es una contradicción. Por tanto, $X = X_0$.

(a) \implies (c) Supongamos que $E(X)$ tiene un punto e_0 de compacidad local. Sea W un subconjunto abierto de X y $t_1 \in (0, 1)$ que satisfacen del inciso (a) – (d) del Teorema 2.76. Para cada $e \in E(X) \cap W$, sea $x_e \in ve$ tal que $\pi(x_e) = t_1$. Note que la función $e \rightarrow x_e$ es continua. Sea $Z = \bigcup \{ex_e \subset X : e \in W \cap E(X)\}$. Sea $g: (W \cap E(X)) \times [0, 1] \rightarrow Z$ dada por $g(e, s) = s \cdot e + (1 - s) \cdot x_e$. Luego g es continua, inyectiva y sobreyectiva. Como $W \cap E(X)$ es compacta, se tiene que g es un homeomorfismo. En particular, tenemos que los conjuntos Z y $Z_0 = \{x_e \in X : e \in W \cap E(X)\}$ son subconjuntos compactos de X .

Veamos que Z_0 es la frontera de Z (en X).

Como para cada $e \in W \cap E(X)$ se tiene que $\pi(e) < t_1 < 1$, entonces $Z_0 \subset fr_X(Z)$. Sea $x \in Z \cap cl_X(X - Z)$ y sea $\{x_m\}_{m=1}^\infty$ una sucesión de $X - Z$ tal que $\lim x_m = x$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, sea $e_m \in E(X)$ tal que $x_m \in ve_m$ y sea $e \in W \cap E(X)$ tal que $x \in ex_e$. Podemos suponer que $\lim e_m = x_0$ para algún $x_0 \in X$. Como $x \in Z$, se tiene que $\pi(x) \leq t_1$, de donde $x \neq v$. Por la suavidad de X , tenemos que $\lim ve_m = vx_0$, por lo que $x \in vx_0 \cap (ve - \{v\})$. Esto implica que $vx_0 \subset ve$. Si $x_0 \neq e$, entonces $x_0 \in E_0(X)$ y $x_0 \in X_0$. Por el Teorema 2.76 (d), se tiene que $t_1 < \psi(e) = \min \pi(X_0 \cap ve)$. Así, $t_1 < \pi(x_0)$. Como $x \in vx_0$, se tiene que $\pi(x_0) \leq \pi(x)$. Esto contradice el hecho de que $x \in Z$. Así, $x_0 = e$. Luego, $x_0 \in W$. Como W es abierto, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que para cada $m \geq M$, se cumple que $e_m \in W$. Dado un $m \geq M$, como $e_m \in W \cap E(X)$ y $x_m \in (X - Z) \cap ve_m$, tenemos que $\pi(x_m) > t_1$. Así, $\pi(x) > t_1$. Como $x \in Z$, concluimos que $\pi(x) = t_1$. Así, $x = x_e \in Z_0$. Con esto terminamos la prueba de que $Z_0 = fr_X(Z)$.

Definimos lo siguiente

$$\mathcal{L} = \bigcup \{C(ex_e) \subset C(X) : e \in W \cap E(X)\}.$$

Como $\mathcal{L} = \{A \in C(X) : A \in Z\}$, tenemos que \mathcal{L} es cerrado en $C(X)$. Usando el modelo geométrico para $C([0, 1])$ es posible definir un homeomorfismo $f: C([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$ tal que $f(A) = A$ para cada $A \in C([0, 1])$, $0 \in A$ y $f(\{1\}) = [\frac{1}{2}, 1]$.

Sea

$f_C: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ definida por

$$h_C(A) = (g \circ (id_{W \cap E(X)} \times f) \circ g^{-1})(A)$$

Luego, h_C es un homeomorfismo con las siguientes propiedades:

- (1) Si $A \in \mathcal{L}$ y $x_e \in A$ para algún $e \in E(X) \cap W$, entonces $h_C(A) = A$,
- (2) Si $e \in E(X) \cap W$, entonces $h_C(\{e\}) \notin F_1(X)$.

Extendemos h_C a un homeomorfismo $h: C(X) \rightarrow C(X)$ dado por

$$h(A) = \begin{cases} h_C(A), & \text{si } A \in \mathcal{L} \\ A, & \text{si } A \cap cl_X(X - Z). \end{cases}$$

Ahora, por la primera propiedad, (1), que cumple h_C y la igualdad, que ya fue demostrada, $Z_0 = fr_X(Z)$, tenemos que h es una función continua bien definida y además inyectiva y sobreyectiva. Luego por la segunda propiedad, (2), que cumple h_C tenemos que $C(X)$ no es rígido. Lo cual es una contradicción. Por tanto, $E(X)$ no tiene puntos de compacidad local. \square

Veamos ahora un resultado que relaciona a $C(X)$ con $C_n(X)$ cuando X es un abanico suave.

Teorema 2.78. *Si X es un abanico suave tal que $C(X)$ es rígido y $n \in \mathbb{N} - \{2\}$, entonces $C_n(X)$ es rígido.*

Demostración. Supongamos que $n \geq 3$ y que $h: C_n(X) \rightarrow C_n(X)$ es un homeomorfismo. Como X es un dendroide, por el Teorema 2.20, tenemos que X preserva n -alambrados, es decir, $h(\mathcal{W}_n(X)) = \mathcal{W}_n(X)$. Luego, $h(\mathcal{Z}_n(X)) = \mathcal{Z}_n(X)$. Por el Teorema 2.26, tenemos que $\mathcal{W}_1(X) = \{A \in \mathcal{W}_n(X) - \mathcal{Z}_n(X) : A \text{ tiene una base } \mathcal{B} \text{ de vecindades de } A \text{ en } C_n(X) \text{ tal que para cada } \mathcal{U} \in \mathcal{B}, \text{ si } \mathcal{C} \text{ es la componente de } \mathcal{U} \text{ que contiene a } A, \text{ entonces } \mathcal{C} \cap \mathcal{Z}_n(X) \text{ es conexo}\}$. Así, $h(\mathcal{W}_1(X)) = \mathcal{W}_1(X)$. Note que, por definición de $\mathcal{W}_n(X)$, en particular tenemos que $\mathcal{W}_1(X) = \{A \in C(X) : v \notin A\}$.

Recordemos lo siguiente:

- (1) v es el vertice de X ,
- (2) $\mathcal{V} = \{A \in C(X) : v \in A\}$,
- (3) $E(X)$ es el conjunto de puntos extremos de X y
- (4) Si $e \in E(X)$, entonces $\mathcal{L}(e) = \{A \in C(X) : A \subset ve - \{v\}\}$.

Note que $\mathcal{V} = C(\{v\}, X)$. Como $C(X)$ es rígido, por el Teorema 2.77, tenemos que $X = X_0$. Si $E(X)$ es finito, entonces $E(X) = \overline{E(X)}$, de donde, $E_0(X) = \emptyset$. Así, $X_0 = \{v\} \neq X$. Lo cual es una contradicción. Por tanto $E(X)$ es infinito. Por [15, Teorema 3.1 (3)], tenemos que \mathcal{V} es homeomorfo al Cubo de Hilbert. Sea $\mathcal{A} = cl_{C_n(X)}(\mathcal{W}_1(X))$. Luego, $h(\mathcal{A}) = h(cl_{C_n(X)}(\mathcal{W}_1(X))) = cl_{C_n(X)}(h(\mathcal{W}_1(X))) = cl_{C_n(X)}(\mathcal{W}_1(X)) = \mathcal{A}$, es decir $h(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$. Así, $h(\mathcal{A} - \mathcal{W}_1(X)) = \mathcal{A} - \mathcal{W}_1(X)$.

Note que $\mathcal{A} = \{A \in C(X) : \text{ existe } e \in E \text{ tal que } A \in \mathcal{L}(e) \cup \{v\}\}$. Si $A \in \mathcal{A} - \mathcal{W}_1(X)$, entonces A es un subcontinuo de X tal que $A \in$

$\mathcal{L}(e) \cup \{v\}$ para algún $e \in E(X)$ y que no pertenece a $\mathcal{W}_1(X)$, es decir, A es un subcontinuo de X que contiene al vértice v , de donde, $A \in \mathcal{V}$. Por tanto, $\mathcal{A} - \mathcal{W}_1(X) \subset \mathcal{V} \cap \mathcal{A}$. Si $A \in \mathcal{V} \cap \mathcal{A}$, por un lado $A \in \mathcal{A}$ y por otro lado $A \in \mathcal{V}$ implica que $A \notin \mathcal{W}_1(X)$, es decir, $A \in \mathcal{A} - \mathcal{W}_1(X)$. Por tanto, $\mathcal{V} \cap \mathcal{A} \subset \mathcal{A} - \mathcal{W}_1(X)$. Así, $\mathcal{A} - \mathcal{W}_1(X) = \mathcal{V} \cap \mathcal{A}$. Luego $h(\mathcal{V} \cap \mathcal{A}) = h(\mathcal{A} - \mathcal{W}_1(X)) = \mathcal{A} - \mathcal{W}_1(X) = \mathcal{V} \cap \mathcal{A}$, es decir, $h(\mathcal{V} \cap \mathcal{A}) = \mathcal{V} \cap \mathcal{A}$. Luego, la restricción $h|_{\mathcal{V} \cap \mathcal{A}}: \mathcal{V} \cap \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{V} \cap \mathcal{A}$ es un homeomorfismo. Por [15, Teorema 3.1 (2)], tenemos que $\mathcal{V} \cap \mathcal{A}$ es un Z -conjunto de \mathcal{V} . Así, $h|_{\mathcal{V} \cap \mathcal{A}}$ es un homeomorfismo entre Z -conjuntos del cubo de Hilbert \mathcal{V} . Por el Teorema de Homogeneidad de Anderson, [38, 11.9.1], el homeomorfismo $h|_{\mathcal{V} \cap \mathcal{A}}$ puede ser extendido a un homeomorfismo $g: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$.

Definimos $f: \mathcal{V} \cup \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{V} \cup \mathcal{A}$ por

$$f(A) = \begin{cases} g(A), & \text{si } A \in \mathcal{V} \\ h(A), & \text{si } A \in \mathcal{A}. \end{cases}$$

Note que si $A \in \mathcal{V} \cap \mathcal{A}$, por un lado tenemos $f(A) = h(A)$. Por otro lado, tenemos que $f(A) = g(A)$ pero g restringida a la intersección $\mathcal{V} \cap \mathcal{A}$ es h , es decir, $g(A) = h(A)$. Así, $f(A) = g(A) = h(A)$. Por tanto, f es un homeomorfismo.

Note que $\mathcal{V} \cup \mathcal{A} = C(X)$. Luego f es un homeomorfismo de $C(X)$ en $C(X)$ y como $C(X)$ es rígido, se tiene que $f(F_1(X)) = F_1(X)$.

Dado $p \in X - \{v\}$, tenemos que $\{p\} \in \mathcal{W}_1(X)$. Como $\mathcal{W}_1(X) \subset cl_{C_n(X)}(\mathcal{W}_1(X)) = \mathcal{A}$, tenemos que $\{p\} \in \mathcal{A}$. Así, $h(\{p\}) = f(\{p\}) \in F_1(X)$.

Sea $p \in X$. Como $X - \{v\}$ es denso en X , tenemos que $p \in \overline{X - \{v\}}$. Existe una sucesión $\{p_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X - \{v\}$ tal que p_n converge a p . Como $p_n \in X - \{v\}$, entonces $\{p_n\} \in \mathcal{W}_1(X)$, de donde, $\{p_n\} \in \mathcal{A}$. Luego $h(\{p_n\}) = f(\{p_n\}) \in F_1(X)$. Así, $h(\{p_n\}) \in F_1(X)$. Por la continuidad de h , tenemos que $h(\{p_n\})$ converge a $h(\{p\})$. Como $h(\{p_n\})$ es una sucesión en $F_1(X)$ y $F_1(X)$ es cerrado, tenemos que $h(\{p\}) \in F_1(X)$. Por tanto, concluimos que $h(F_1(X)) \subset F_1(X)$. De manera similar se llega a que $h^{-1}(F_1(X)) \subset F_1(X)$. Así, tenemos que $h(F_1(X)) = F_1(X)$. Es decir, $C_n(X)$ es rígido. \square

En consecuencia tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.79. Sean X un abanico suave, E como en la Definición 2.69, X_0 como en la Definición 2.70 y $n \in \mathbb{N} - \{2\}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (a) $C(X)$ es rígido,
- (b) $X = X_0$,
- (c) $E(X)$ no tiene puntos de compacidad local,
- (d) $C_n(X)$ es rígido para cada $n \neq 2$.

Demostración. Se obtiene del Teorema 2.77 y del Teorema 2.78. \square

Relacionando la pregunta de que si $C_3([0, 1])$ es rígido y el Teorema 2.79, los autores de [26] y [29] plantean el siguiente problema.

Problema 2.80. Sea Z un continuo. ¿Si $C(Z)$ es rígido, entonces $C_n(Z)$ es rígido para cada $n \neq 2$?

Presentamos un par de ejemplos de abanicos suaves en los que analizamos la rigidez no solo de $C(X)$ sino de $C_n(X)$ para todo $n \in \mathbb{N} - \{2\}$.

Ejemplo 2.81. Aquí presentamos un ejemplo de un continuo Y diferente del abanico de Lelek en el cual el hiperespacio $C(Y)$ es rígido.

Recordemos que el abanico de Lelek es el único abanico suave, X , tal que el conjunto de puntos extremos de X es denso en X . Dado un punto $p \in X - (E(X) \cup \{v\})$. Como $X = \overline{E(X)}$, tenemos que $p \in \overline{E(X)}$. Como $p \notin (E(X) \cup \{v\})$, entonces $p \in \overline{E(X)} - E(X) = E_0(X)$. Es decir, $p \in E_0(X) \subset X_0$. Por tanto, $X - (E(X) \cup \{v\}) \subset E_0(X)$. Como $E_0(X) \subset X_0$, entonces $\overline{E_0(X)} \subset \overline{X_0} = X_0$. Luego, tenemos que $X = cl_X(X - (E(X) \cup \{v\})) \subset \overline{E_0(X)} \subset X_0$, es decir, que $X = X_0$. Por el Teorema 2.77, tenemos que $C(X)$ es rígido. Más aún, por el Teorema 2.78, tenemos que para todo $n \in \mathbb{N} - \{2\}$ el hiperespacio $C_n(X)$ es rígido.

Otro abanico suave, Y , con la propiedad de que $C(Y)$ sea rígido lo vamos a construir de la siguiente manera.

Supongamos que X es el abanico de Lelek. Sea Z el cono sobre el conjunto de Cantor, C . Note que $X \subset Z$. Sea $g: C \times [0, 1] \rightarrow Z$ la función natural cociente tal que $g(c, 1) = v$ para cada $c \in C$, es decir,

Z es el espacio cociente que resulta de $C \times [0, 1]$ al identificar el conjunto $C \times \{1\}$ al punto $v = (0, 1)$. Consideremos los conjuntos $Q = C \times [0, 2]$ y $P = (C \times [1, 2]) \cup g^{-1}(X)$. Note que $P \subset Q$. Sea Y el espacio cociente que resulta de P al identificar el conjunto $C \times \{2\}$ al punto $v = (0, 2)$. Luego, tenemos la siguientes observaciones sobre el espacio resultante Y :

(a) Y es un abanico suave.

(b) El conjunto de puntos extremos en X es el mismo en Y , es decir, que $E(X) = E(Y)$.

(c) Y no es homeomorfo a el abanico de Lelek.

(d) $Y = Y_0$, por lo que de acuerdo al Teorema 2.77, $C(Y)$ es rígido. Más aún, de acuerdo al Teorema 2.79, si $n \in \mathbb{N} - \{2\}$, entonces $C_n(Y)$ es rígido.

Un problema abierto es que ¿si X es un abanico suave tal que $C_2(X)$ es rígido, entonces $C(X)$ es rígido?

2.5. Continuos hereditariamente indescomponibles

Hasta aquí hemos logrado mostrar la rigidez del n -ésimo hiperespacio para todo natural diferente del 2 al menos para los arco continuos indescomponibles y para los continuos localmente conexos casi enrejados sin pelos.

Terminamos nuestro estudio presentando un resultado que afirma la rigidez del n -ésimo hiperespacio para todo número natural para una familia distinta a las mencionadas anteriormente.

Definición 2.82. *Un continuo indescomponible X es **hereditariamente indescomponible** si todos los subcontinuos propios de X no degenerados son indescomponibles.*

Teorema 2.83. *Si X es un continuo hereditariamente indescomponible y $n \in \mathbb{N}$, entonces $C_n(X)$ es rígido.*

Demostración. Vea [36, Teorema 4.4, Afirmación 4]. □

Conclusión

Para el desenlace de este trabajo, se hizo lo siguiente.

Sea X un continuo, en [29, pág. 4], se definen los siguientes conjuntos $\mathcal{G}(X) = \{p \in X : p \text{ tiene una vecindad } W \text{ en } X \text{ tal que } W \text{ es una gráfica finita}\}$, y $\mathcal{P}(X) = X - \mathcal{G}(X)$; un continuo X es *casi enrejado* si cumple que $\mathcal{G}(X)$ es denso en X .

Sea X un continuo, de acuerdo a [29, pág. 4], un *alambre* es un subconjunto α de X tal que α es homeomorfo a uno de los siguientes espacios, $(0, 1)$, $[0, 1)$, $[0, 1]$ o la circunferencia unitaria S^1 en el espacio Euclidiano, y α es una componente de un subconjunto abierto de X . Sea $W(X) = \bigcup\{\alpha \subset X : \alpha \text{ es un alambre en } X\}$. El continuo X es *alambrado* si $W(X)$ es denso en X , es decir, si $\overline{W(X)} = X$.

Un continuo, X , es *descomponible* si existen dos subcontinuos propios U y V de X tales que $X = U \cup V$. Si no existen tales conjuntos, entonces X es *indescomponible*. Un continuo indescomponible tal que todos sus subcontinuos propios no degenerados son arcos es un *arco continuo indescomponible* (vea [29, pág. 4]).

Un *pelo* en un continuo X es un arco α con puntos extremos a, b tal que $\alpha - \{a\}$ es abierto en X .

Dado un continuo X y $n \in \mathbb{N}$, sea

$\mathcal{W}_n(X) = \{A \in C_n(X) : \text{cada componente de } A \text{ esta contenida en un alambre de } X\}$.

$\mathcal{Z}_n(X) = \{A \in \mathcal{W}_n(X) : \text{existe una vecindad, } \mathcal{M} \text{ de } A \text{ en } C_n(X) \text{ tal que la componente } \mathcal{C} \text{ de } \mathcal{M} \text{ que contiene a } A \text{ es una } 2n\text{-celda}\}$.

Un continuo X *preserva n -alambrados* si para cada homeomorfismo $h : C_n(X) \rightarrow C_n(X)$, se tiene que $h(\mathcal{W}_n(X)) = \mathcal{W}_n(X)$.

Un continuo X es *unicoherente*, si para cualesquiera dos subcontinuos A y B de X tales que $A \cup B = X$, la intersección $A \cap B$ es conexa; X es *hereditariamente unicoherente* si todos sus subcontinuos son unicoherentes.

Un *dendroide* es un continuo hereditariamente unicoherente y arco conexo.

Un hiperespacio $K(X) \in \{2^X, C_n(X), F_n(X)\}$ es *rígido* si para cualquier homeomorfismo $h : K(X) \rightarrow K(X)$ se tiene que $h(F_1(X)) = F_1(X)$.

Un continuo X tiene *hiperespacio único* $K(X)$ si se cumple la siguiente implicación: si Y es un continuo tal que $K(X)$ es homeomorfo a $K(Y)$, entonces X es homeomorfo a Y .

Un *abanico* es un dendroide X con exactamente un punto de ramificación v , llamado el *vértice* de X . Un abanico X con vértice v es *suave* si para cada sucesión $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ convergente a un punto $x \in X$, se tiene que $\lim vx_i = vx$.

Teorema 1.28. Sean X un continuo, $n \in \mathbb{N}$ y $\mathcal{A} \subset 2^X$ conexo tal que $\mathcal{A} \cap C_n(X) \neq \emptyset$. Sea $A_0 = \bigcup\{A : A \in \mathcal{A}\}$. Entonces

- (a) A_0 tiene a lo más n componentes,
- (b) si \mathcal{A} es cerrado en 2^X , entonces $A_0 \in C_n(X)$,
- (c) para cada $A \in \mathcal{A}$, cada componente de A_0 intersecciona a A .

Teorema 2.7. Si X es un arco continuo indescomponible, entonces X es un continuo alambrado.

Teorema 2.13. Si X es un continuo localmente conexo y $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\mathcal{W}_n(X) = \{A \in C_n(X) : \dim_A[C_n(X)] = 2n\}.$$

Teorema 2.18. Sean X un continuo, $n \in \mathbb{N}$ y \mathcal{V} como en la Definición 2.17. Entonces

- (a) $\mathcal{W}_n(X) \subset \mathcal{V}$,
- (b) Si X es un dendroide, entonces $\mathcal{W}_n(X) = \mathcal{V}$.

Teoremas 2.19 y 2.20. Continuos que pertenecen a una de las siguientes clases *preservan n -alambrados* para cada $n \in \mathbb{N}$.

- (a) Continuos localmente conexo.
- (b) Dendroides.

Teorema 2.25. Sean X un continuo y $n \in \mathcal{N}$. Entonces

- (a) $\mathcal{W}_n(X) \cap (C_n(X) - C_{n-1}(X)) \subset \mathcal{Z}_n(X)$,
- (b) Si $n \geq 3$, entonces $\mathcal{W}_n(X) \cap (C_n(X) - C_{n-1}(X)) = \mathcal{Z}_n(X)$.

Teorema 2.26. Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N} - \{1, 2, 3\}$. Entonces

$\mathcal{W}_1(X) = \{A \in \mathcal{W}_n(X) - \mathcal{Z}_n(X) : A \text{ tiene una base } \mathcal{B} \text{ de vecindades de } A \text{ en } C_n(X) \text{ tal que para cada } \mathcal{U} \in \mathcal{B}, \text{ si } \mathcal{C} \text{ es la componente de } \mathcal{U} \text{ que contiene a } A, \text{ entonces } \mathcal{C} \cap \mathcal{Z}_n(X) \text{ es conexo}\}$.

Teorema 2.38. Si X es un arco continuo indescomponible y $n \in \mathbb{N} - \{2\}$, entonces X tiene hiperespacio único $C_n(X)$ y $C_n(X)$ es rígido. Los autores de [29] se preguntan lo siguiente:

Pregunta 1. Supongamos que X es un continuo alambrado. ¿Es verdad que el hiperespacio $C_2(X)$ no es rígido?

Dentro de los continuos localmente conexo se demuestra lo siguiente:

Teorema 2.47. Si X es un continuo localmente conexo que no es casi enrejado y $n \in \mathbb{N}$, entonces $C_n(X)$ no es rígido.

Teoremas 2.49 y 2.51. Sea X un continuo localmente conexo que no contiene pelos. Entonces

- (a) Si $p \in \alpha - \{a, b\}$ para algún arco libre α con puntos extremos a y b , $\alpha \subset X$ y $h: C(X) \rightarrow C(X)$ es un homeomorfismo, entonces $h(\{p\}) \in F_1(X)$,
- (b) Si X es casi enrejado, entonces $C(X)$ es rígido.

Teorema 2.53. Sea X un continuo localmente conexo casi enrejado. Entonces $C(X)$ es rígido si y solo si X no contiene pelos.

Teorema 2.54. Si X es un continuo localmente conexo, casi enrejado sin pelos y $n \in \mathbb{N} - \{2\}$, entonces el hiperespacio $C_n(X)$ es rígido.

Teorema 2.58. Si X contiene un arco libre, entonces $C_2(X)$ no es rígido.

Hasta aquí tenemos la rigidez del hiperespacio $C_n(X)$ para ciertas familias de continuos, es decir, que para los arco continuos indecomponibles y para los continuos localmente conexos, casi enrejados sin pelos, el hiperespacio $C_n(X)$ es rígido para toda $n \in \mathbb{N} - \{2\}$.

Refiriéndose a la pregunta 1, podemos decir que si yo tengo una gráfica finita, X , entonces es un continuo alambrado. Además es claro que contiene un arco libre, de donde, por el Teorema 2.58, tenemos que $C_2(X)$ no es rígido.

Dentro de los abanicos suaves se demuestra lo siguiente:

Teoremas 2.77 y 2.78. Supongamos que X es un abanico suave y $n \in \mathbb{N} - \{2\}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (a) $C(X)$ es rígido,
- (b) $X = X_0$,
- (c) E no tiene puntos de compacidad local,
- (d) $C_n(X)$ es rígido.

Para los abanicos suaves, si el hiperespacio $C(X)$ es rígido y $n \in \mathbb{N} - \{2\}$, entonces $C_n(X)$ también es rígido y viceversa. Como ejemplo particular mencionamos que el abanico de Lelek (Vea [11]) es el único abanico suave en el que el conjunto de puntos extremos es denso y además que el hiperespacio $C(X)$ es rígido, de donde, por los Teoremas 2.77 y 2.78, tenemos que $C_n(X)$ es rígido para cada $n \in \mathbb{N} - \{2\}$.

Resulta interesante preguntarse si el caso $n = 2$. proporciona información.

Pregunta 2. Sea X un abanico suave. ¿Si $C_2(X)$ es rígido, entonces $C(X)$ es rígido?

Por último, es deseable encontrar una familia de continuos para la cual el n -ésimo hiperespacio sea rígido para todo n número natural. Lo cual afirma el siguiente resultado.

Teorema 2.83. Si X es un continuo hereditariamente indescomponible y $n \in \mathbb{N}$, entonces el hiperespacio $C_n(X)$ es rígido.

La aportación que hacemos con esta tesis es presentar y demostrar de manera detallada el desarrollo de los artículos [26] y [29]; en cuanto al concepto de rigidez de hiperespacios. Estos artículos son una aportación para el estudio del tema de Rigidez de hiperespacios (también puede revisar [28]). Además, exponemos resultados sobre temas referentes a Hiperespacio único.

Bibliografía

- [1] Gerardo Acosta García, *Continua with almost unique hyperspace*, Topology Appl. 117 (2002), 175–189.
- [2] Gerardo Acosta García, *On smooth fans and unique hyperspace*, Houston J. Math. 30 (2004), 99–115.
- [3] Gerardo Acosta García y David Herrera Carrasco, *Dendrites without unique hyperspace*, Houston J. Math. 35 (2009), no. 2, 451–467.
- [4] Gerardo Acosta García, David Herrera Carrasco y Fernando Macías Romero, *Local dendrites with unique hyperspace $C(X)$* , Topology Appl. 157 (2010), 2069–2085.
- [5] José Gerardo Ahuatzi Reyes, *Los continuos enrejados tienen n -ésimo hiperespacio único*, Tesis de licenciatura, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2014.
<http://www.fcfm.buap.mx/docencia/docs/tesis/matematicas/JoseGerardoAhuatziReyes.pdf>
- [6] José Guadalupe Anaya, *Making holes in hyperspaces*, Topology Appl. 154 (2007), 2000–2008.
- [7] José Guadalupe Anaya, Enrique Castañeda Alvarado y Alejandro Illanes, *Continua with unique symmetric product*, Comment. Math. Univ. Carolin. 54 (2013) 397–406.
- [8] Janusz Jerzy Charatonik, *Monotone Mappings of universal dendrites*, Topology Appl. 38 (1991), 163–187.
- [9] Janusz Jerzy Charatonik, *On fans*, Dissertationes Math. 54, (1967).

- [10] Janusz Jerzy Charatonik y Alejandro Illanes, *Local connectedness in hyperspaces*, Rocky Mountain J. Math. 36 (2006), 811-856
- [11] Włodzimierz Januzs Charatonik, *The Lelek fan is unique*, Houston J. Math. 15 (1989), 27-34.
- [12] Charles O. Christenson y William L. Voxman, *Aspects of topology*, Department of mathematics College of Letters and Science University of Idaho Moscow, Idaho, Vol. 39, Marcel Dekker, Inc., New York and Basel, 1977.
- [13] Vianey Córdova Salazar, *Elementos básicos de hiperespacios de continuos*, Tesis de Licenciatura en Matemáticas, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2011.
<http://www.fcm.buap.mx/docencia/docs/tesis/matematicas/VianeyCordovaSalazar.pdf>
- [14] Carl Eberhart, *A note on smooth fans*, Colloq. Math. 20 (1969), 89-90.
- [15] Carl Eberhart y Sam Bernardo Nadler, Jr., *Hyperspaces of cones and fans*, Proc. Amer. Math. Soc. 77 (1979), 279-288.
- [16] Luis Alberto Guerrero Méndez, David Herrera Carrasco, María de Jesús López y Fernando Macías Romero, *Meshed continua have unique second and third symmetric products*, Topology Appl. 191 (2015) 16-27.
- [17] David Herrera Carrasco, *Dendrites with unique hyperspace*, Houston J. Math. 33 (3) (2007), 795-805.
- [18] David Herrera Carrasco, Alejandro Illanes, María de Jesús López y Fernando Macías Romero, *Dendrites with unique hyperspace $C_2(X)$* , Topology Appl. 156 (2009), 549-557.
- [19] David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero, Alejandro Illanes y Francisco Vázquez Juárez. *Finite graphs have unique hyperspace $HS_n(X)$* , Topology Proc. 44 (2014), 75-95.
- [20] David Herrera Carrasco, María de Jesús López y Fernando Macías Romero, *Dendrites with unique symmetric products*, Topology Proc. 34 (2009), 175-190.

-
- [21] David Herrera Carrasco, María de Jesús López y Fernando Macías Romero, *Framed continua have unique n -fold hyperspace suspension*, to appear in *Topology Appl.*
- [22] David Herrera Carrasco y Fernando Macías Romero, *Dendrites with unique n -fold hyperspace*, *Topology Proc.* 32 (2008), 321-337.
- [23] David Herrera Carrasco y Fernando Macías Romero, *Local dendrites with unique n -fold hyperspace*, *Topology Appl.* 158 (2011), 244-251.
- [24] David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero y Germán Montero Rodríguez, *Indescomponibilidad*, Por aparecer en *Matemáticas y sus aplicaciones* 5.
- [25] David Herrera Carrasco, Fernando Macías Romero y Francisco Vázquez Juárez, *Peano continua with unique symmetric products*, *Journal of Mathematics Research* 4(4) (2012), 1-9.
- [26] Rodrigo Hernández Gutiérrez, Alejandro Illanes y Verónica Martínez de la Vega, *Uniqueness of hyperspaces of indescomposable arc continua*, *Glasnik Math.* 49 (69) (2014), 421-432.
- [27] Rodrigo Hernández Gutiérrez, Alejandro Illanes y Verónica Martínez de la Vega, *Uniqueness of hyperspaces for Peano continua*, *Rocky Mountain J. Math.* 43 (2013), 1583-1624.
- [28] Rodrigo Hernández Gutiérrez y Verónica Martínez de la Vega, *Rigidity of symmetric products*, *Topology Appl.* 160 (2013), 1577-1587.
- [29] Rodrigo Hernández Gutiérrez, Alejandro Illanes y Verónica Martínez de la Vega, *Rigidity of Hyperspaces*, *Rocky Mountain J. Math.* 45 (1) (2015) 213-236.
- [30] Charles Lemuel Hagopian, *A Characterization of solenoids*, *Pac. J. Math.*, 68 (1977), 425-435.
- [31] Javier Camargo y Rafael Isaacs, *Continuos tipo Knaster y sus modelos geométricos*, *Revista Integración Colombiana de Matemáticas*, 47 (2013), 67-81

- [32] Witold Hurewicz y Henry Wallman, *Dimension Theory*, Princeton, NJ: Princeton University Press, ninth printing, 1974.
- [33] Alejandro Illanes, *Fans are not C-determined*, Colloq. Math. 81 (1999) 211–216.
- [34] Alejandro Illanes, *The hyperspace $C_2(X)$ for a finite graph X is unique*, Glasnik Math. 37 (57)(2002), 347-363.
- [35] Alejandro Illanes, *Hyperspaces with exactly two or three orbits*, Aportaciones Matemáticas, Investigación, 19 (2007), 45-58.
- [36] Alejandro Illanes, *Hereditarily indecomposable Hausdorff continua have unique hyperspaces 2^X and $C_n(X)$* , Publ. Inst. Math. (Beograd). (S.N.) 89 (103) (2011), 49-56.
- [37] Alejandro Illanes, *Uniqueness of hyperspaces*, Questions and Answers in General Topology 30 (2012), 21-44.
- [38] Alejandro Illanes y Sam Bernardo Nadler Jr., *Hyperspaces. Fundamentals and Recent Advances*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 216, Marcel Dekker, Inc., New York, 1999.
- [39] Francis Leon Jones, *Historia y desarrollo de la teoría de los continuos indescomponibles*, Aportaciones Matemáticas No. 27, Sociedad Matemática Mexicana, México, 2004.
- [40] Verónica Martínez de la Vega, *Dimension of the n -fold hyperspaces of graphs*, Houston J. Math. 32, (2006), 783-799.
- [41] Sergio Macías, *On C-determined continua*, Glasnik Mat., 32(52) (1997), 259-262.
- [42] Sergio Macías, *On the hyperspaces $C_n(X)$ of a continuum X* , Topology Appl. 109 (2001), 237-256.
- [43] Sam Bernardo Nadler, Jr., *Hyperspaces of Sets*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 49, Marcel Dekker, Inc., New York, 1978.
- [44] Sam Bernardo Nadler, Jr., *Continuum Theory: An Introduction*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 158, Marcel Dekker, Inc., New York, 1992.

- [45] Sam Bernardo Nadler, Jr., *The fixed point property for continua*, Aportaciones Matemáticas: Textos, 30. Sociedad Matemática Mexicana, México, 2005.

Índice alfabético

- Abanico, 56, 72
Abanico suave, 57, 72
Alambre, 17, 71
Alambrado, 18, 71
Arco, 3
Arco continuo indescomponible, 18, 71
Arco conexo, 3
Arco libre, 3
Arco ordenado, 11
- Bola abierta, 1
- Casi enrejado, 4, 71
Composante, 2
Conexo por trayectorias, 22
Continuo, 2
Continuo descomponible, 2, 71
Continuo indescomponible, 2, 71
Continuo tipo Knaster, 44
Curva cerrada simple, 3
- Dendroide, 22, 72
- Frontera como variedad, 26
- Gráfica finita, 3
- Hiperespacio de los subcontinuos, 5
Hereditariamente indescomponible, 70
- Hereditariamente unicoherente, 22, 72
Hiperespacios, 5
Hiperespacio único, 6, 72
- Interior como variedad, 26
- Límite inverso, 43
Localmente conexo, 2
Localmente compacto, 62
- Métrica de Hausdorff, 5
M-odo, 11
- N -ésimo producto simétrico, 5
 N -ésimo hiperespacio, 5
 N -variedad, 26
N-odo simple, 3
No degenerado, 1
- Pelo, 3, 71
Preserva n -alambrados, 19, 72
Punto extremo, 3
Punto ordinario, 56
Punto de Ramificación, 56
- Rígido, 6, 72
- Subcontinuo, 2
Sucesión inversa, 43
Trayectoria, 21

Topología de Vietoris, 6

Triodo simple, 3

Unicoherente, 22, 72

Vecindad, 1

Vértice, 3, 72

Vietórico, 6

Z-conjunto, 46