



# BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA ELECTRÓNICA  
MAESTRÍA EN CIENCIAS DE LA ELECTRÓNICA  
OPCIÓN EN AUTOMATIZACIÓN

TESIS PARA OBTENER EL GRADO DE:  
MAESTRO EN CIENCIAS DE LA  
ELECTRÓNICA OPCIÓN EN  
AUTOMATIZACIÓN

CONTROL CON GANANCIAS  
VARIABLES PARA ROBOTS  
MANIPULADORES\*

Presenta:

Lic. Oscar Ramos Arroyo

Director de Tesis:

Dr. Fernando Reyes Cortés

Puebla, Pue., Enero 2016

\*Trabajo financiado por VIEP-BUAP y DITCo

## **Agradecimientos**

Agradezco al Dr. Fernando Reyes Cortés por su disposición y tiempo que dedicó a las revisiones de tesis, así como los estímulos económicos y por la forma de enseñarme cuando requería de su ayuda.

Al Dr. Fernando Reyes Cortés y al Dr. Jaime Cid Monjaráz por el apoyo económico que proporcionaron para la asistencia de congresos y en el desarrollo de la tesis.

Agradezco a la Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Posgrado (VIEP) por haber ayudado económicamente en el desarrollo de ésta tesis.

Al Dr. Sergio Vergara Limon, la Dra. Aurora Diozcora Vargas Treviño y Dra. Amparo Palomino Merino que dieron su apoyo y amistad a lo largo del periodo de estudios, así como el uso del laboratorio que sirvió para perseverar en mis estudios.

Agradezco a mis padres por toda la disposición, amor incondicional y dedicación en sus desvelos y cuidados, pues es por ustedes que su guía y perseverancia hicieron el hombre que soy hoy.

A mi hermana Verónica que ha estado en cada momento de mi vida y que es parte importante de mi pues desde las risas, enojos y apoyos siempre ha estado ahí con amor.

A mis hermanos de sangre Lilian, Guillermo, Juan Carlos, Jorge Juan e Iván que han estado a lo largo de nuestra amistad, sopesando los días oscuros y sirviendo de apoyo en momentos difíciles.

A mis amigos de la maestría Nayelli, Montse, Luis y Ady-hermanita, que hicieron de la maestría un lugar agradable y acogedor.

Dedico esta tesis a mis padres que son y han sido el más fuerte apoyo en todos los aspectos de mi vida, por todo su amor y cariño, son mis estrellas en mi cielo nocturno.

A mi hermana que dedica cada parte de su día a ser un ángel conmigo.

A ti Lúthien, Eärendil y Eldar que con sus ladridos llenan mi vida y la hacen feliz.

A ti Lily, Jorge Juan, Guillermo, Iván y Juan Carlos, pues son mis hermanos y su amistad ha florecido por muchos años y son una guía constante para mí.

# Índice

Índice de Figuras .....	V
Objetivos .....	VI
Objetivo General .....	VI
Objetivos Particulares .....	VI
Introducción .....	VII
Capítulo 1 .....	9
1.1 Control de regulación .....	9
1.2 Ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange .....	9
1.3 Moldeo de energía .....	11
Capítulo 2 .....	13
2.1 Plataforma Experimental .....	13
2.2 Diseño de la ley de control .....	16
2.2.1 Función definida positiva .....	16
2.3 Ecuaciones de autosintonía .....	19
2.4 Algoritmo de Control .....	21
Capítulo 3 .....	23
3.1 Modelo dinámico del robot de 3 grados de libertad .....	23
3.2 Demostración de estabilidad .....	38
Capítulo 4 .....	50
4.1 Resultados Experimentales .....	50
Conclusiones .....	62
Trabajo a futuro .....	63
Referencias .....	69

## Índice de Figuras

Figura 1. 1 Diagrama a bloques de la estructura de control por moldeo de energía. ....	12
Figura 1. 2 Plataforma experimental.....	14
Figura 2. 1 Robot Rotradi de tres grados de libertad.....	13
Figura 2. 2 Lazo cerrado de control del robot manipulador de tres grados de libertad.....	15
Figura 2. 3 Energía potencial artificial.....	17
Figura 2. 4 Perfil del gradiente de la energía potencial artificial. ....	18
Figura 2. 5 Gradiente de la energía potencial artificial. ....	19
Figura 2. 6 Función de autosintonía.....	20
Figura 2. 7 Diagrama de flujo del algoritmo de control. ....	22
Figura 3. 1 Eslabón base.....	24
Figura 3. 2 Eslabón hombro. ....	25
Figura 3. 3 a) Proyección en el plano Y – Z. b) Proyección en el plano X – Y. ....	26
Figura 3. 4 Eslabones Hombro y Codo. ....	29
Figura 3. 5 a) Proyecciones de los planos Y – Z. b) Proyecciones de los planos X – Y.....	29
Figura 3. 6 Proyecciones de los eslabones Brazo y Codo en el plano X – Z.....	30
Figura 4. 1 Gráficas de error de posición con respecto del tiempo. ....	51
Figura 4. 2 Gráficas de torque con respecto al tiempo.....	52
Figura 4. 3 Gráficas de la variación de la ganancia proporcional con respecto al tiempo.....	53
Figura 4. 4 Gráficas de la variación de la ganancia derivativa con respecto al tiempo.....	53
Figura 4. 5 Gráficas de error articular con respecto al tiempo. ....	54
Figura 4. 6 Gráficas de torque con respecto al tiempo.....	55
Figura 4. 7 Gráficas de la variación de ganancia proporcional con respecto al tiempo. ....	56
Figura 4. 8 Gráficas de la variación de ganancia derivativa con respecto del tiempo. ....	56
Figura 4. 9 Gráficas de comparación de los errores de posición articular. ....	57
Figura 4. 10 Comparaciones de los dos controladores para cada grado de libertad.....	58
Figura 4. 11 Índice de desempeño para diferentes controladores para .....	60
Figura 4. 12 Índice de desempeño para diferentes controladores .....	60

## **Objetivos**

### **Objetivo General**

Abordar el problema de control de robots manipuladores en coordenadas articulares con autosintonía de ganancias variables.

### **Objetivos Particulares**

- Proponer una metodología de diseños de esquemas de control de posición (regulación) para robots manipuladores de  $n$ -grados de libertad con ganancias variables.
- Proponer un método de autosintonía de las ganancias variables de los esquemas de control propuestos.
- Realizar experimentación con robots manipuladores de 3 grados de libertad.
- Publicación en revista arbitrada.

## Introducción

El tema de control está vigente pues en la actualidad se necesita que los procesos industriales sean cada vez más rápidos, versátiles y de poco presupuesto. Con el pasó el tiempo y las variaciones de diseño los hicieron más complejos para afrontar las nuevas especificaciones de diseño y producción. Hablar de un sistema de control es hablar indirectamente de las ganancias asociadas a tal estructura, las cuales permiten modificar el desempeño; las ganancias mencionadas necesariamente deben cambiarse por medios empíricos o bien, por medios matemáticos bien definidos.

Métodos de sintonía existen muchos, el que dio hincapié fue el método de Ziegler-Nichols en 1942. Sin embargo, al considerar la sintonía mediante su formulación sólo se obtiene una sintonía pobre, en la práctica la sintonía mediante Ziegler-Nichols puede ser complementada con una sintonía manual [1].

Otro método consiste en muestrear la respuesta de un proceso ante una señal de entrada, procesar los datos muestreados estimando de los valores característicos del proceso, y calcular valores óptimos en los parámetros de control Proporcional-Integral-Derivativo. Para la optimización, se utiliza un nuevo índice de desempeño, es decir, se introduce una integral ponderada de error cuadrático [2].

Åström y Hågglund proponen un método automático de sintonía mediante una red PID y un sistema de histéresis [3, 4].

Aunque no se utiliza la metodología de control adaptivo, la significancia de su definición es parte importante de este trabajo. Control adaptivo es la combinación de un estimador de parámetros, lo que genera una estimación de parámetros en línea, con una ley de control con el fin de controlar diferentes tipos de plantas cuyos parámetros son completamente desconocidos y los cuales pueden cambiar con el tiempo de forma impredecible [5].

También existen otros tipos de métodos en la literatura de sintonía, entre ellas se encuentran el método fuzzy, redes neuronales, gain scheduling, entre otras técnicas que se han propuesto para elegir las ganancias dependiendo de las aplicaciones de los robots.

Para obtener un buen desempeño es necesario tener ganancias variables para el controlador, como lo propone Victor Santibanez *et al.* [6].

Francisco G. Salas *et al.* proponen matrices diagonales con ganancias variables cuyos elementos son constantes positivas. Sin embargo, la diferencia radica en la ley de control escogida, ya que las funciones matriciales de ganancia dependen exclusivamente de la variable de estado de error articular  $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q}_d - \mathbf{q}$  [7].

## Introducción

En este trabajo se presenta una metodología diferente que no emplea complejos procesos para obtener la sintonía de las ganancias para el controlador. Se propone una función de sintonía que está ligada a los ámbitos de las variables de estado escogidas. Entre otra de las ventajas es que no necesita un preproceso de cálculo para asignar la sintonía, por lo que el cálculo se produce en el proceso mismo. A diferencia de Francisco G. Salas *et al.* la ley de control escogida depende de dos variables físicas diferentes como error de posición  $\tilde{q}$  y velocidad articular  $\dot{q}$ ; también se proponen dos funciones matriciales de ganancias, sin embargo son funciones positivas con margen de amplitud acotado.

El presente trabajo está dividido en 4 capítulos. En el capítulo 1 se plantea la teoría que le da sustento a las ecuaciones planteadas en la tesis, entre los temas descritos está control de regulación, metodología de desarrollo de Euler-Lagrange que permiten obtener el modelo dinámico del robot manipulador de tres grados de libertad y moldeo de energía, que sirve para proponer una familia grande de controladores de posición.

En el capítulo 2 se describe la plataforma experimental que se utilizó para realizar las diferentes pruebas del algoritmo de control, así como se describe la metodología de obtención de diseño del controlador utilizado en el presente trabajo.

En el capítulo 3 se presenta la obtención del modelo dinámico del robot manipulador de tres grados de libertad; así mismo se expone la demostración de estabilidad de la función de Lyapunov escogida a partir de la energía potencial artificial. Por último, se exponen los resultados experimentales en el capítulo 4. Al final del capítulo se presentan las conclusiones del trabajo y se plantean ideas para el posterior trabajo a futuro.

En la Apéndice de Publicaciones se presenta el artículo con nombre: Control de ganancias variables para robots de n-grados de libertad, que fue aceptado en el evento SENIE 2015 con sede en San Luis Potosí. Se muestra la primera hoja del artículo que fue aceptado en el congreso mencionado y el reconocimiento otorgado por la Universidad Autónoma Metropolitana Azcapotzalco a través de la División de Ciencias Básicas e Ingeniería y la Universidad Autónoma de San Luis Potosí, por presentar la ponencia del trabajo. El trabajo fue publicado en la revista Pistas Educativas, Nueva Época No. 112, ISSN1465-1249.

Dentro de los trabajos de publicación, fue enviado un artículo al Congreso International Conference on Mechatronics, Electronics and Automotive Engineering 2015, con sede en Cuernavaca Morelos, en el área Mechatronics, Robotics, and Biomedical, el artículo con nombre: Variable Control Gains for P-D controller for Robot Manipulators, publicado en IEEE Computer Society, Conference Publishing Services, ISBN 978-1-4673-8328-8.

Los resultados publicados en las revistas antes mencionadas son los mismos que aparecen en el presente trabajo de investigación.

# Capítulo 1

En este capítulo se describen las temáticas que se utilizan a lo largo del presente trabajo de investigación, las cuales sirven de sustento teórico. De esta manera los desarrollos matemáticos serán aplicados directamente de las ecuaciones que se establecieron con dicho propósito y se desarrollarán de acuerdo a sus bases y condiciones.

## 1.1 Control de regulación

El proceso de regulación implica inyección de energía [6] en las diversas articulaciones o servomecanismos de acuerdo a una ley de control  $\tau$  de tal forma que la posición actual del robot  $\mathbf{q}(t) \in \mathbb{R}^n$  y la velocidad angular  $\dot{\mathbf{q}}(t) \in \mathbb{R}^n$  de movimiento tiendan asintóticamente al punto de equilibrio. Expresando en lenguaje matemático la idea anterior se tiene lo siguiente:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \mathbf{q}(t) \\ \dot{\mathbf{q}}(t) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{q}_d \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

donde  $\mathbf{q}_d = [q_{d1}, \dots, q_{dn}]^T$  es el conjunto de posiciones deseadas para cada articulación.

Cuando un eslabón llega a la posición deseada ( $\mathbf{q}_d$ ) en el tiempo que requirió tal propósito la condición  $\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_d$  se cumple y queda como una constante, que es el objetivo de control, alcanzar la posición deseada y mantenerla, alcanzada la posición estable el error se convierte en cero porque el movimiento es nulo.

## 1.2 Ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange

Las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange [6] se aplican a robos manipuladores permiten encontrar el modelo dinámico de un robot manipulador. La ventaja que presenta el modelo es el diseño de controladores; también puede ser utilizado en la simulación del robot para obtener el comportamiento del robot aún antes de ser construido físicamente.

$$\tau_i = \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial q_i} \quad (1.2)$$

donde  $\tau_i$  son las fuerzas y pares ejercidos de forma externa en cada articulación,  $q_i, \dot{q}_i$  son las posiciones y velocidades articulares, respectivamente. El Lagrangiano está definido por  $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  que es la diferencia entre la energía cinética y potencial (véase ecuación (1.7)).

Básicamente las ecuaciones de Euler-Lagrange para el modelado dinámico de manipuladores puede ser escrito en cuatro etapas:

- Cálculo de la energía cinética.
- Cálculo de la energía potencial.
- Cálculo del lagrangiano.
- Desarrollo de las ecuaciones de Lagrange.

Dentro del cálculo de la energía cinética se obtiene la cinemática directa de los centros de masa de cada uno de los eslabones. Al realizar este paso prioritario se obtiene un mapeo de coordenadas articulares que depende de las longitudes anteriores  $l_{i-1}$  y ángulos  $q_i, q_{i-1}$

$$\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} = f(l_i, l_{i-1}, l_{ci}, q_i, q_{i-1}) \quad (1.3)$$

Una vez fue obtenida la cinemática directa se realiza la cinemática diferencial, lo que produce un cálculo para encontrar la rapidez lineal del i-ésimo eslabón,

$$\mathbf{v}_i = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

A partir de la rapidez lineal es posible obtener la energía cinética del i-ésimo eslabón, ya que

$$K_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) = \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_i + \frac{1}{2} I_i \left[ \sum_i^n \dot{q}_i \right]^2 \quad (1.5)$$

donde  $I_i$  es el momento de inercia,  $m_i$  es la masa y el producto  $\mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_i$  que es un término cuadrático que es un factor importante para calcular la energía cinética del i-ésimo eslabón.

## Capítulo I

La energía potencial puede ser encontrada de la siguiente manera:

$$U_i(\mathbf{q}) = m_i g l_{ci} h_i(\mathbf{q}) \quad (1.6)$$

donde  $h_i(\mathbf{q})$  es una función que indica la altura del eslabón respecto al origen del sistema de referencia del robot. Para obtener el lagrangiano se utiliza

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - U(\mathbf{q}) \quad (1.7)$$

Siendo la diferencia entre la energía cinética y la energía potencial.

En el desarrollo de las ecuaciones de Euler-Lagrange del cuarto paso general, se mencionó que los pares son ejercidos de forma externa. Se toman en cuenta los fenómenos de fricción que comprenden la fricción viscosa, de Coulomb y estática de cada articulación.

### 1.3 Moldeo de energía

Moldeo de energía [8] es una técnica que genera una familia muy grande de algoritmos de control de posición con una estructura matemática que se muestra en la ecuación (1.8). Su estructura es la misma que un control PD, siendo la primera parte una energía potencial artificial, la que puede ser propuesta más una parte de freno mecánico, la cual disipa la energía y un término de compensación de gravedad. En la expresión (1.8) está expuesta la ecuación de moldeo de energía,

$$\boldsymbol{\tau} = \nabla U_a(K_p, \tilde{\mathbf{q}}) - \mathbf{f}_v(K_v, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (1.8)$$

donde:

- $\nabla U_a(K_p, \tilde{\mathbf{q}})$  es el gradiente de la energía potencial. El gradiente es una función continua en  $\tilde{\mathbf{q}}$  que se define como el error de posición articular  $\mathbf{q}$ , es decir:  $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q}_d - \mathbf{q}$ .
- La función  $U_a(K_p, \tilde{\mathbf{q}})$  se conoce como energía potencial artificial debido a que es la energía de diseño, la cual es diferenciable y definida positiva con un mínimo y único global en el error de posición  $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ .

## Capítulo I

- $f_v(K_v, \dot{q})$  es la función de inyección de amortiguamiento o freno mecánico que satisface la propiedad disipativa, es decir  $\dot{q}^T f_v(K_v, \dot{q}) > 0$ .
- $g(q)$  representa la compensación del par de gravedad.

La ley de control definida por la ecuación (1.8) está representada esquemáticamente en la Figura 1.1. El robot manipulador de tres grados de libertad consta de una entrada y dos salidas esquemáticas, físicamente existen tres entradas de torque  $\tau$  que corresponden a cada uno de los servomotores y tres salidas de posición  $q$  de los mecanismos, las cuales indicarán si los eslabones han llegado a la posición deseada.

Como se ha indicado, las señales de salida del robot manipulador son posición actual  $q$  y velocidad articular  $\dot{q}$  de los servomotores, las cuales son operadas en forma independiente de la siguiente manera: La posición deseada esquemática  $q_d$  consta a su vez de tres datos establecidos fijos para cada eslabón; cada vez que los eslabones se mueven generan posiciones actuales que se procesan y se comparan en la variable esquemática  $\tilde{q} = q_d - q$ , la cual se regula mediante el diagrama de bloque del gradiente de la energía potencial  $\nabla U_a(K_p, \tilde{q})$ , posteriormente se compara a su vez con el procesamiento del diagrama de bloques del freno mecánico  $f_v(K_v, \dot{q})$  aunada a una inyección de par gravitacional  $g(q)$ .

Las salidas y entradas del robot de tres grados de libertad son procesadas dentro de una computadora donde se utilizarán sentencias de programación que manipulan los datos, por lo que en un instante de tiempo se produce el cálculo de la energía para mover los diferentes eslabones a las posiciones que se establecieron con anterioridad.

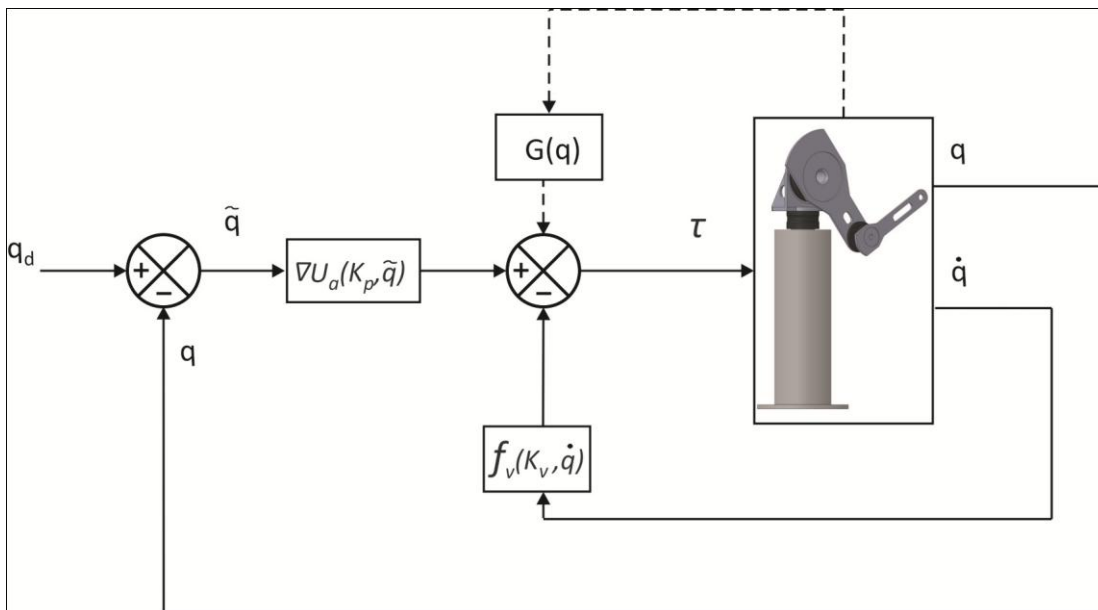


Figura 1. 1 Diagrama a bloques de la estructura de control por moldeo de energía.

# Capítulo 2

## 2.1 Plataforma Experimental

En Figura 1.1 se puede observar el robot de tres grados de libertad con el que se trabajó, el cual cuenta con una arquitectura abierta diseñada para realizar investigaciones de diversa índole. La plataforma experimental de nombre Rotradi consiste en un robot formado por tres motores de transmisión directa cuyas características pueden observarse en Tabla 1.

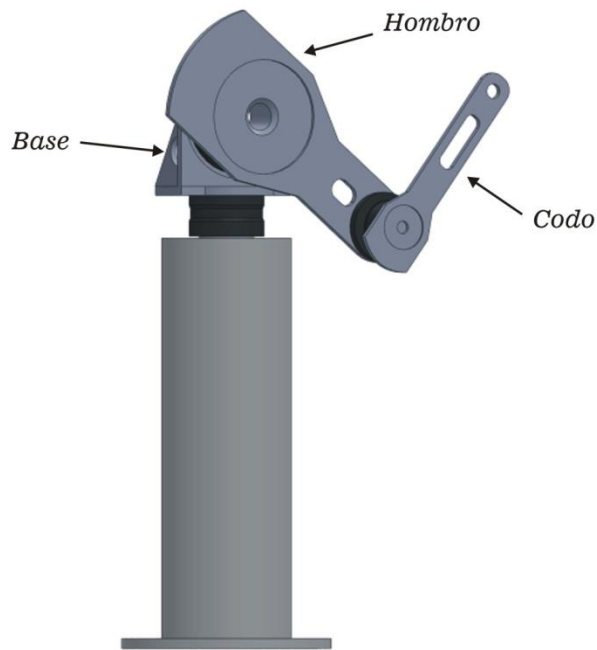


Figura 2. 1 Robot Rotradi de tres grados de libertad.

En la Tabla 1 capítulo II aparecen los datos referentes a cada uno de los servomecanismos que fueron utilizados para ser controlados.

Para mover los tres eslabones se cuenta con tres servomotores de transmisión directa; cada uno tiene diferente tipo de Torque  $\tau$ . La entrada del motor será regulada por el algoritmo de control,

## Capítulo II

la respuesta del mismo será moverse un cierto ángulo o coordenada articular y se detendrá en la posición que le sea indicada.

Tabla 2. 1 Características de los servoactuadores del robot manipulador experimental.

Articulación	Modelo del servomotor	Torque Máximo	Resolución (pulsos)
Base	DM-1015B	15 Nm	4,096,000
Hombro	DM-1050A	50 Nm	4,096,000
Codo	DM-1004C	4 Nm	4,096,000

En la Figura 1.2 se muestra la configuración del sistema con el que se contó para realizar las distintas pruebas. Como se puede ver están marcados los elementos más importantes. El algoritmo de la interfaz que maneja el robot de 3 grados de libertad se programó en Borland C en la plataforma de Windows 98. El juego de instrucciones que gobiernan cada proceso del robot se explicará en la parte Algoritmo de Control.

en la cual, se han diseñado con anterioridad rutinas de lectura y escritura a los puertos, así como la visualización de los datos en la pantalla. El monitor muestra los datos de posición actual de los eslabones. El botón de paro de emergencia como su mismo nombre lo dice sirve para ser presionado en caso de emergencia cuando el operador humano visualice algún funcionamiento errático del robot.

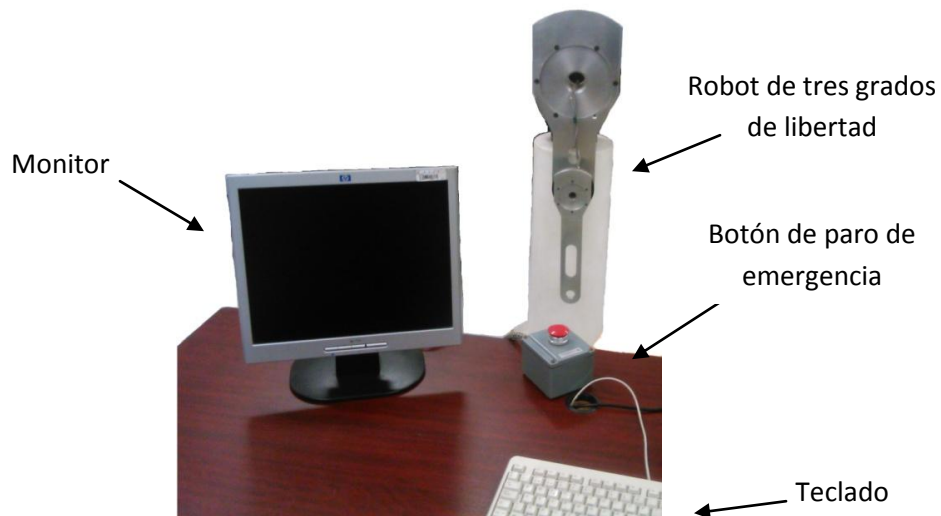


Figura 1. 2 Plataforma experimental.

## Capítulo II

Dentro del CPU está instalada una tarjeta que cuenta con: una arquitectura FPGA para leer los pulsos de los encoders incrementales, 3 convertidores D/A de 12 bits, puertos I/O, 3 timers programables para programar el periodo de muestro de 2.5 ms.

De acuerdo a la Figura 2.1 se ha establecido que la articulación con nombre Base corresponde a  $q_1$ , así mismo, la articulación de nombre Hombro corresponde a  $q_2$ , mientras que la articulación Codo se estableció a la coordenada articular  $q_3$ .

El funcionamiento del sistema en lazo cerrado funciona cuando el eslabón se mueve a la posición deseada, mientras lo hace, las señales de posición  $q$  y velocidad articular  $\dot{q}$  son suministradas (como se ve en la Figura 2.2). Ambas señales son procesadas por contadores para producir un valor que se actualiza constantemente cada 2.5 ms. Los datos ingresan al programa principal y posteriormente procesados por el algoritmo de control. En la computadora el algoritmo produce un valor correspondiente al torque necesario para mover al eslabón a su posición deseada, sin embargo dicho número es una representación binaria que tiene que ser transformada; para producir una cantidad física real, la computadora produce una salida al puerto conectado a un DAC que convierte los datos de carácter binario en una señal de voltaje. El dispositivo DAC se encuentra conectado a un amplificador especial, pues es un transductor, que convierte la entidad física de voltaje a otra entidad física de torque.

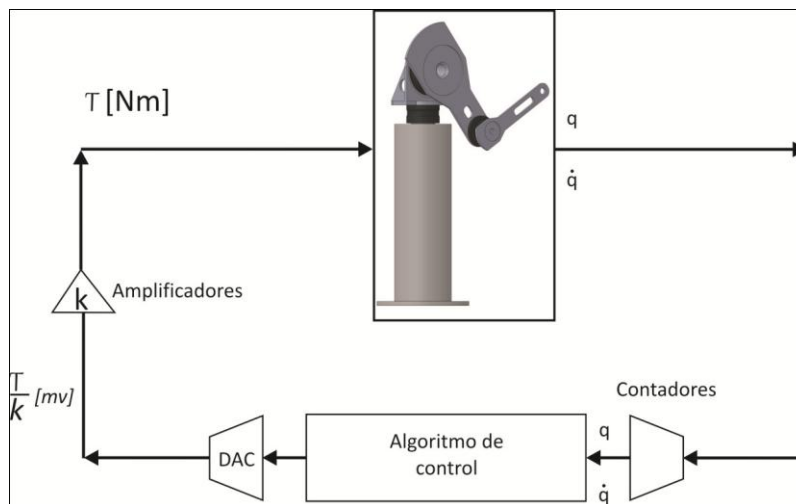


Figura 2. 2 Lazo cerrado de control del robot manipulador de tres grados de libertad.

## 2.2 Diseño de la ley de control

Como se estableció en el Capítulo I en el tema de moldeo de energía, la energía potencial artificial es una función de diseño definida positiva con un mínimo único y global en el error de posición  $\tilde{q} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ . Por lo tanto se definirán las características de una función definida positiva.

### 2.2.1 Función definida positiva

Una función definida positiva [8] es una función continua en su argumento  $x \in \mathbb{R}^n$  tal que  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  satisface lo siguiente:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$$

$$f(x) > 0 \quad \forall x \neq \mathbf{0}$$

$f(x) \rightarrow \infty$ , cuando  $\|x\| \rightarrow \infty_+$  es decir  $f(x)$  es radialmente desacotada.

De acuerdo a las características de la función definida positiva se desarrolló una que cumpliera con esos aspectos, de tal forma que la ecuación (2.1) que se está tomando en cuenta es:

$$\ln\left(\frac{1}{2}x^2 \cdot \cosh(x)\right) \tag{2.1}$$

La ecuación (2.1) está diseñada en modo escalar, lo que equivale a decir que pertenece solamente a un grado de libertad; de tal forma que una vez cumpliera con los requerimientos necesarios se estableciera para el resto de los grados de libertad.

Si obtiene la grafica de la ecuación (2.1) se puede observar en la Figura 2.3 (a), que el mínimo global que se muestra coincide con el origen cartesiano  $x = 0$ , por lo que su amplitud máxima en ese punto es cero. Ya que  $f(x)$  es una función cuadrática se puede confirmar que conforme la variable  $x$  aumenta su valor en una región positiva, la altura toma valores positivos; lo mismo ocurra cuando  $x$  es negativa, por lo que su amplitud es positiva.

En la Figura 2.3 (b) se encuentra la función graficada en tercera dimensión, realizando el hecho de que es de tipo cuadrático, con un mínimo y único global localizado en el origen del mapa

## Capítulo II

tridimensional  $(\tilde{q}, \dot{q}) = (0,0)$  y que crece en amplitud positiva  $f(\tilde{q}, \dot{q}) > 0$ , cualquiera sea el dominio de la variable  $(\tilde{q}, \dot{q})$ .

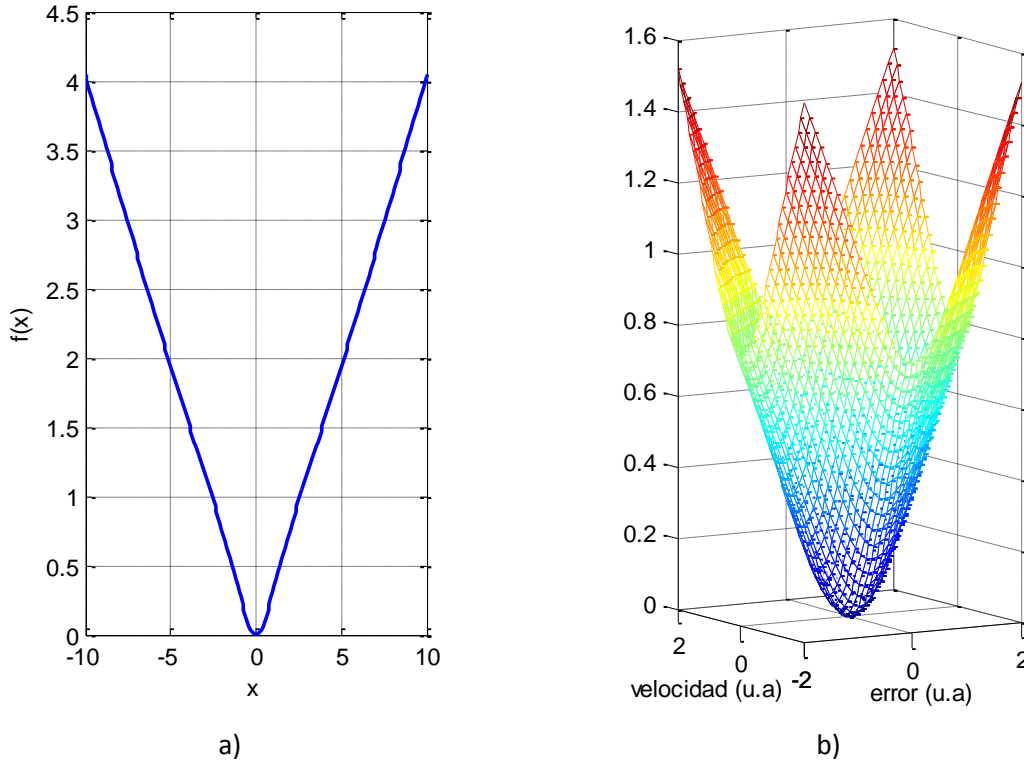


Figura 2. 3 Energía potencial artificial.

A partir de la ecuación (2.1) se modifica el argumento para cambiarlo por las variables de estado  $\tilde{q}, \dot{q}$  de las cuales dependen explícitamente las funciones. De tal forma que de acuerdo al diseño de la ley de control y la técnica de moldeo de energía se tiene la expresión (2.2).

$$\begin{aligned} \tau &= \nabla U_a(K_p, \tilde{q}) - f_v(K_v, \dot{q}) + g(q) \\ \tau &= K_p(\tilde{q}) \left( \frac{\tilde{q} + \sinh(\tilde{q})}{\frac{1}{2}\tilde{q}^2 + \cosh(\tilde{q})} \right) - K_v(\dot{q}) \left( \frac{\dot{q} + \sinh(\dot{q})}{\frac{1}{2}\dot{q}^2 + \cosh(\dot{q})} \right) + g(q) \end{aligned} \quad (2.2)$$

donde  $g(q)$  es la compensación de gravedad del robot manipulador.

Una vez establecida la función que rige la energía potencial artificial, fue posible determinar el gradiente de la energía potencial artificial en la ecuación (2.3) en forma escalar.

$$\nabla f(x) = \frac{x + \sinh(x)}{x^2 + \cosh(x)} \quad (2.3)$$

Tomando la ecuación (2.3) y grificándola se obtiene el perfil de la Figura 2.4. El gradiente de la energía potencial artificial  $\nabla U_a(K_p, \dot{q})$  (donde la variable independiente en este instante es  $x$  porque representa cualquier valor a asignar, posteriormente se cambia por la variable física involucrada) es una función bastante suave, además de que cruza por cero  $x = 0 \Rightarrow \nabla U_a(K_p, x) = 0$ . De acuerdo a su perfil es notable que pertenezca a las funciones impares; parte del origen y crece hasta llegar a un máximo, luego disminuye su altura y crece nuevamente hasta volverse plana.

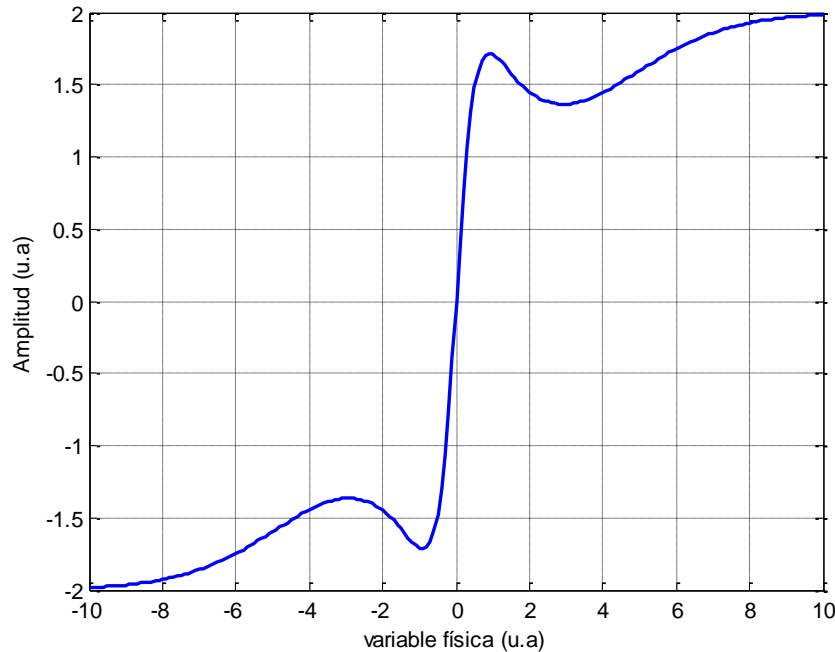


Figura 2. 4 Perfil del gradiente de la energía potencial artificial.

En la Figura 2.5 se muestra el gradiente de la energía potencial vista en tercera dimensión, para la cual fueron utilizadas todas las variables de estado  $\tilde{q}, \dot{q}$ . De acuerdo a lo establecido con anterioridad, la función cruza por cero  $(\tilde{q}, \dot{q}) = (0,0)$ , además, mientras las variables de estado crecen hacia más y menos infinito la amplitud no supera un valor máximo, como era de esperarse de acuerdo a la Figura 2.4.

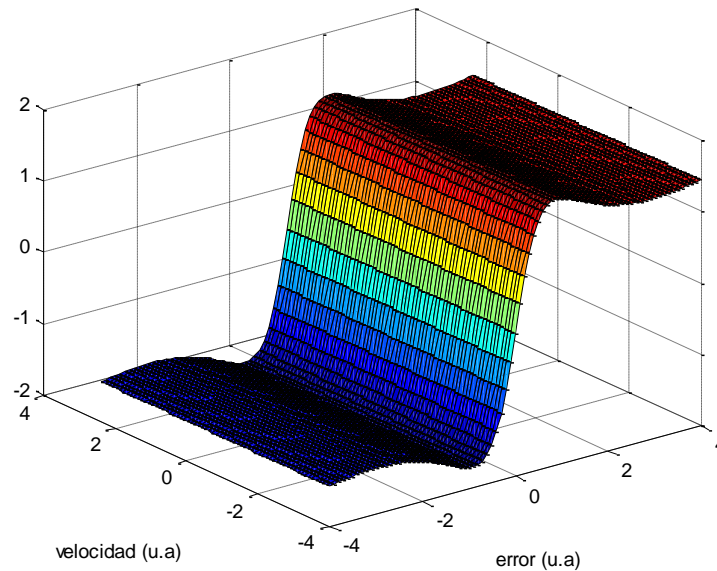


Figura 2. 5 Gradiente de la energía potencial artificial.

## 2.3 Ecuaciones de autosintonía

El aspecto general del método de autosintonía es establecer un algoritmo matemático bien definido que calcula de forma automática las ganancias del controlador. El mecanismo de funcionamiento es simple, de acuerdo a la respuesta del sistema y conforme a su desenvolvimiento, las ganancias se ajustan de forma automática a lo largo de todo el proceso sin intervención de un preproceso de cálculo para las ganancias, lo cual es una ventaja, pues no se requiere obtener ganancias fuera de línea. Las ecuaciones siguientes cumplen con el objetivo de proponer un método de autosintonía de las ganancias variables de los esquemas de control propuestos [9].

Las ecuaciones se escribieron en el programa Borland C en la plataforma de Windows 98, las cuales describen la ganancia Proporcional y Derivativo del controlador.

$$f(x) = K(1 - \alpha e^{-\alpha x^2}) \quad (2.4)$$

El perfil que se obtiene de graficar  $f(x)$  se encuentra en la Figura 2.6. La función posee un mínimo y único global en cero  $x = 0$  y acotado por un valor superior unitario dado que  $1 \geq f(x) \geq 0$ .

## Capítulo II

En la Figura 2.6 en el eje  $x$  aparece la leyendo variable física porque depende de la variable que se mida, para los criterios de la presente tesis se utiliza la variable error y velocidad articular.

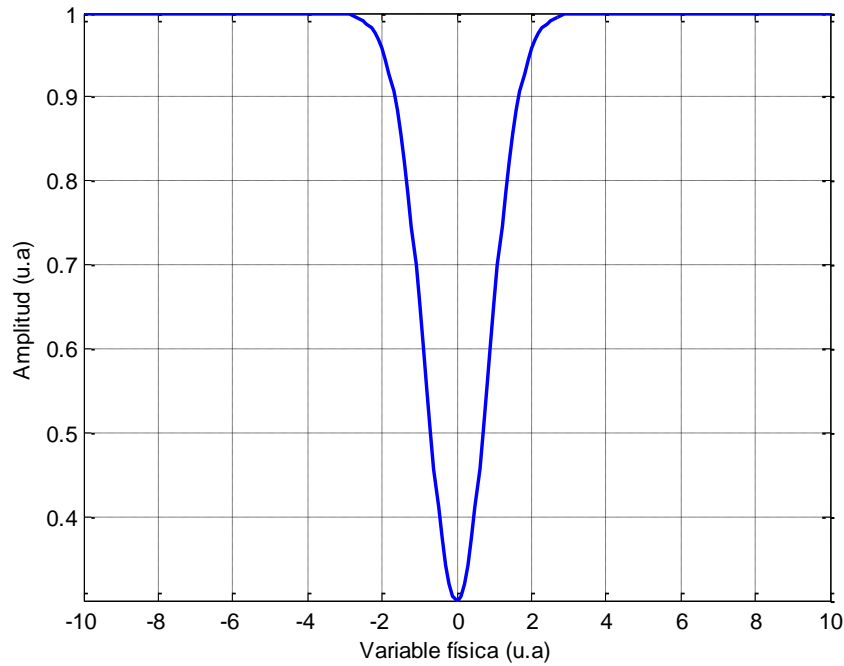


Figura 2. 6 Función de autosintonía.

Específicamente las ganancias variables proporcionales están definidas por la ecuación (2.4) y las variables asignadas son:

$$K_p = k_p^* (1 - \alpha e^{-\alpha x^2}) \quad (2.5)$$

donde  $\alpha > 0$  es una constante positiva definida en el intervalo  $1 \geq \alpha \geq 0$ .

De acuerdo a la ecuación (2.4) las ganancias variables derivativas tienen la siguiente forma:

$$K_v = k_v^* (1 - \beta e^{-\beta x^2}) \quad (2.6)$$

donde  $\beta > 0$  es una constante positiva definida en el intervalo  $1 \geq \beta \geq 0$ .

Ambas, la ecuación (2.5) y (2.6) tienen el perfil que se observa en la Figura 2.6.

## 2.4 Algoritmo de Control

El algoritmo de control está diseñado para que procese las señales de posición y velocidad articular  $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}$ , respectivamente, de los tres servomotores y realice cálculos matemáticos de acuerdo a la ley de control  $\boldsymbol{\tau}$  diseñada para producir un torque numérico con el propósito de llevar a los tres eslabones del robot Rotradi a las posiciones que se establecieron.

Como primera parte del algoritmo (Figura 2.7) se cargan las constantes requeridas para las ecuaciones de ganancia variable  $(\alpha_i, \beta_i)$ . Posteriormente se leen las posiciones y velocidades actuales de los tres eslabones (lo cual está marcado con el subíndice dentro de la rutina), las cuales son prioritarias para producir los resultados en el algoritmo de control.

En la siguiente parte de las rutinas están declaradas las ganancias variables (que utilizan los datos de posición  $\mathbf{q}$  y velocidad  $\dot{\mathbf{q}}$  para cada grado de libertad). Para mantener una estructura de programación se establecieron las ganancias proporcionales y posteriormente las funciones matemáticas para las ganancias derivativas; el conjunto de funciones se declaró acuerdo a la estructura de la función  $f(x) = K(1 - \alpha e^{-\alpha x^2})$ , siendo la variable  $x$  diferente para cada ganancia.

Las posiciones deseadas  $\mathbf{q}_d$  se fijan en el programa, las cuales se utilizan en la ley de control. De la misma manera que antes existen tres valores para cada grado de libertad.

Las leyes de control  $\boldsymbol{\tau}_i$  tiene la estructura matemática establecida por el método de moldeo de energía, funciones que utilizan las ecuaciones de error  $\tilde{\mathbf{q}}$  y velocidad  $\dot{\mathbf{q}}$ .

Si no se produce una acción externa por medio de un controlador humano que presione la tecla de fin, el programa realiza el algoritmo por tiempo indefinido. Cuando ocurre la condición de paro, el programa guarda los datos en la computadora para que puedan ser extraídos con el propósito que le convenga al usuario. Si no se presionada la tecla de paro, el algoritmo actualiza las posiciones y velocidades, iniciando con todo el proceso de cálculo.

En la Figura 2.6 se muestra el diagrama de flujo del algoritmo de control.

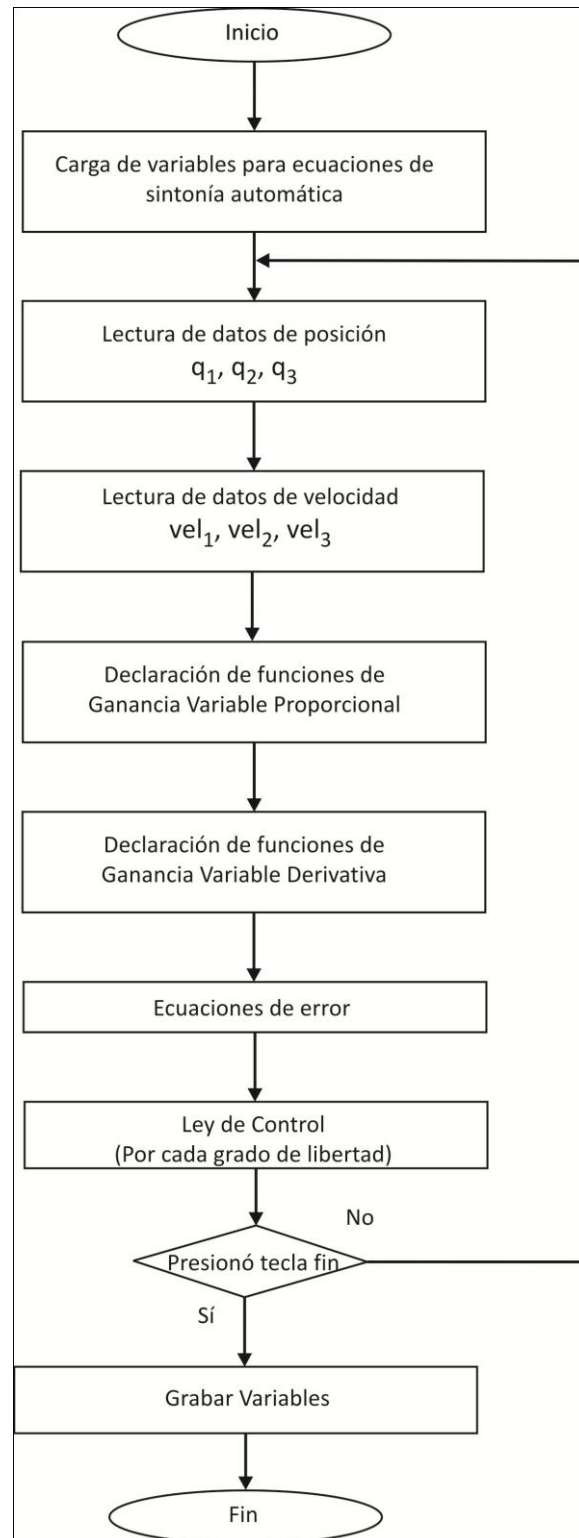


Figura 2. 7 Diagrama de flujo del algoritmo de control.

# Capítulo 3

En esta sección se presenta el desarrollo de la metodología Euler-Lagrange para obtener el modelo dinámico del robot de tres grados de libertad. También se muestra la demostración matemática que sirve de sustento al controlador antes mencionado, lo cual sirve para saber si el mismo será estable en las posiciones deseadas establecidas, de tal forma que los resultados experimentales se vean corroborados por este aspecto, haciendo de la estabilidad la base sólida del buen funcionamiento del controlador y la reproducibilidad del mismo.

## 3.1 Modelo dinámico del robot de 3 grados de libertad

El robot articular de tres grados de libertad de nombre Rotradi sirvió para probar el algoritmo de control y a su vez obtener los resultados del mismo. Para obtener el modelo dinámico se procedió a utilizar las ecuaciones de Euler-Lagrange [7, 8].

Para realizar la metodología de Euler-Lagrange se procede a analizar los eslabones individualmente desde el punto de vista de la longitud de los eslabones anteriores, así como de sus coordenadas articulares presentes y las anteriores al análisis.

El análisis del modelo se obtiene al tomar el robot como una serie de eslabones rígidos, tomando en cuenta que el centro de masa facilita la descripción matemática porque fungirá entonces como el extremo de estudio y representará la posición en un marco tridimensional, del cual pueden obtenerse las proyecciones en los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$ .

Entre las distintas articulaciones se formarán ángulos y los eslabones generarán de acuerdo a la metodología de Euler-Lagrange líneas de proyección entre los ejes de giro y los centros de masa; así que cada vez que un eslabón se mueve genera ángulos entre los mismos y posiciones en un espacio de tres dimensiones, por lo que los ángulos existentes en las articulaciones permiten un mapeo de coordenadas articulares a coordenadas rectangulares, de esta forma se obtiene la cinemática directa.

Para obtener la cinemática directa del primer eslabón que también se conoce como Base, se necesita conocer el centro de masa  $m_1$ . Como puede observarse en la Figura 3.1 el centro de masa  $m_1$  se encuentra en el eje  $z$  y gira en la coordenada articular  $q_1$  por lo que las proyecciones en  $y$  y  $z$  son nulas.

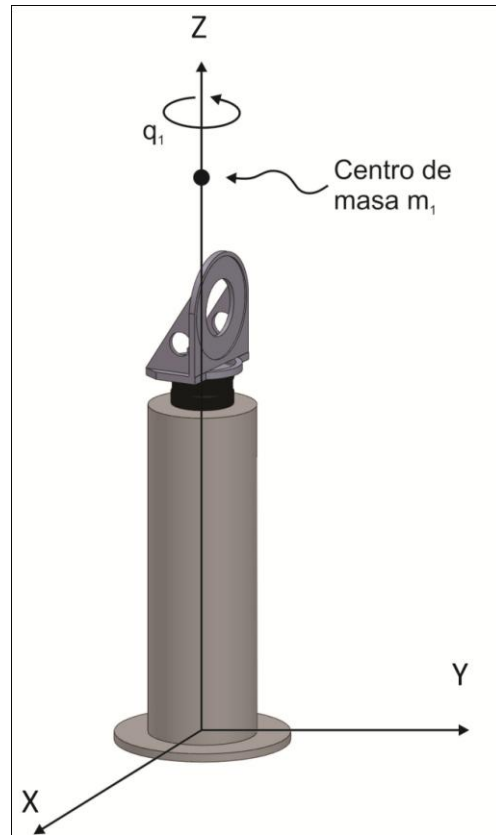


Figura 3. 1 Eslabón base.

De acuerdo a la ubicación del centro de masa  $m_1$  se describe matemáticamente como:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_{c1} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Una vez fue encontrada la cinemática directa del primer eslabón se requiere conocer la cinemática diferencial con el propósito de calcular su energía cinética y potencial. Si se toma la ecuación (3.1) y se realiza una derivada temporal se obtiene:

$$v_1 = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Como la energía cinética está relacionada con la velocidad mediante la ecuación (3.3) se obtiene lo siguiente:

$$K_1(q_1, \dot{q}_1) = \frac{1}{2} m_1 v_1^T v_1 = \frac{1}{2} m_1 (0) = 0 \quad (3.3)$$

### Capítulo III

El valor nulo de la energía cinética queda explicado al no contar con un desplazamiento en cualquiera de los tres ejes.

Como sabemos, la energía potencial está relacionada con la altura del centro de masa, quedando determinada la altura del centro de masa por el valor  $l_{c1}$  y por el valor de gravedad.

$$U_1(q_1) = m_1 g l_{c1} \quad (3.4)$$

Para seguir con la metodología establecida se procede ahora a calcular la posición del segundo centro de masa en un espacio de tres dimensiones, lo que posibilita encontrar la ubicación de las proyecciones en los tres ejes del mapa cartesiano. El eslabón dos u Hombro es una extremidad unida al eslabón Base, por lo que existen dos ángulos implicados, a saber  $q_1$  y  $q_2$  los cuales pueden observarse en la Figura 3.2. El eslabón Base no aparece en la imagen por motivos de simplicidad de obtención de su cinemática directa. Puede observarse que el centro de masa genera un vector en el plano  $x - y$  cuya longitud está en términos del cateto  $d_1$  y el segundo cateto  $l_{c2} \sin(q_2)$ .

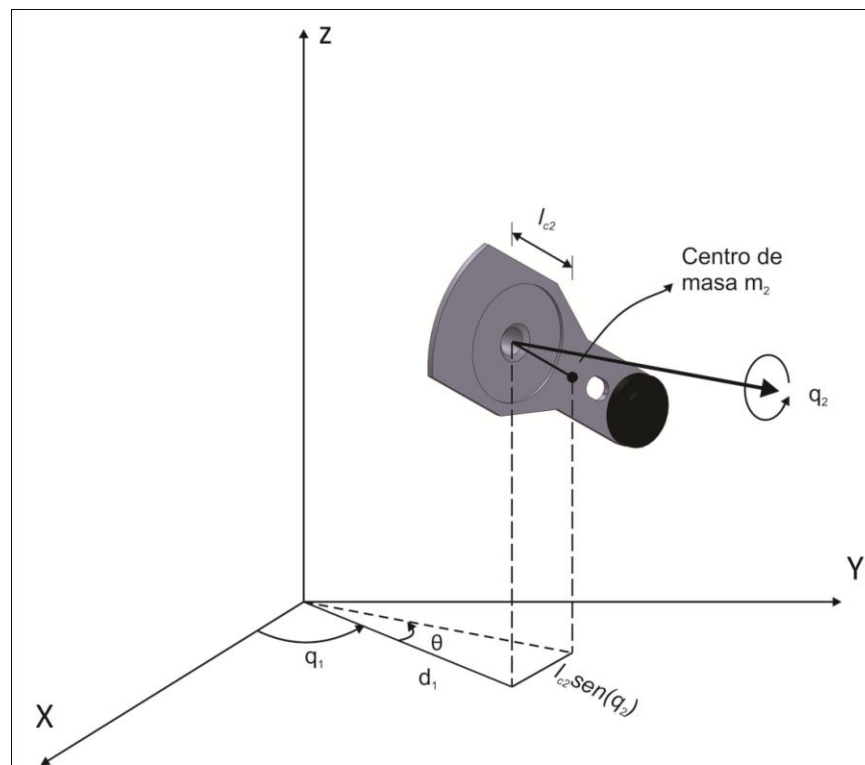


Figura 3. 2 Eslabón hombro.

### Capítulo III

En la Figura 3.3 inciso b se observa el esquema de representación del centro de masa  $m_1$  el cual mantiene una geometría representada por un triángulo rectángulo; hablando expresamente del cateto  $d_1$  (se mide desde el eje cartesiano  $z_1$  al centro de masa) es un valor constante que no cambia; por otra parte, el cateto que depende de la coordenada articular  $q_1$  cambia conforme el eslabón gira a la posición establecida; potencialmente si  $q_1 = 0$  entonces  $d_1$  coincide con la hipotenusa marca con una línea segmentada.

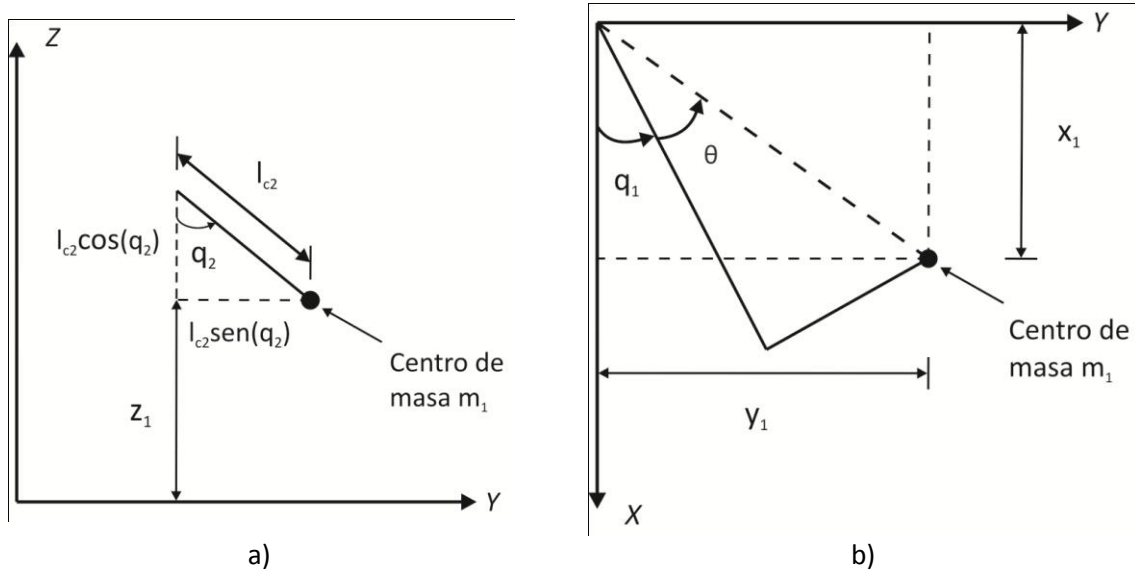


Figura 3.3 a) Proyección en el plano Y – Z. b) Proyección en el plano X – Y.

A partir de las proyecciones en el plano  $x - y$  que están en relación con la coordenada articular  $q_1$  y con el ángulo  $\theta$  que se produce entre los catetos del triángulo. Si el eslabón gira en su eje  $q_2$  la distancia del cateto  $l_{c2} \sin(q_2)$  reduce su tamaño hasta coincidir con  $d_1$  y  $\theta$  se vuelve cero  $\theta = 0$ . La altura  $z_1$  parte de la diferencia distancia que existe entre la proyección  $l_{c2} \sin(q_2)$  y el eje  $y$ .

Por lo tanto las proyecciones para el centro de masa  $m_2$  están dadas por la ecuación (3.5)

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{d_1^2 + l_{c2}^2 \sin^2(q_2)} \cos\left(q_1 + \text{actan}\left(\frac{l_{c2} \sin(q_2)}{d_1}\right)\right) \\ \sqrt{d_1^2 + l_{c2}^2 \sin^2(q_2)} \sin\left(q_1 + \text{actan}\left(\frac{l_{c2} \sin(q_2)}{d_1}\right)\right) \\ l_{c1} - l_{c2} \cos(q_2) \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

### Capítulo III

Para obtener la cinemática diferencial se deriva con respecto al tiempo al vector de posiciones, por lo que se obtiene:

$$v_2 = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

El vector de velocidad  $v_2$  se agrupa en una colección de velocidades ya que su descripción matemática es bastante extensa, de esa forma se dice que:

$$v_2 = \begin{bmatrix} v_{211} \\ v_{221} \\ v_{231} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Las componentes que conforman el vector velocidad de la ecuación (3.7) están escritas de la siguiente manera:

$$v_{211} = \frac{l_{c2}^2 \cos \left( \arctan \left( \frac{l_{c2} \sin(q_2)}{d_1} \right) + q_1 \right) \cos(q_2) \sin(q_2) \dot{q}_2}{\sqrt{d_1^2 + l_{c2}^2 \sin^2(q_2)}} - \sqrt{d_1^2 + l_{c2}^2 \sin^2(q_2)} \sin \left( \arctan \left( \left( \frac{l_{c2} \sin(q_2)}{d_1} \right) + q_1 \right) \right) \left( \dot{q}_1 + \frac{l_{c2} \cos(q_2) \dot{q}_2}{d_1 \left( 1 + \frac{l_{c2}^2 \sin^2(q_2)}{d_1^2} \right)} \right) \quad (3.8)$$

$$v_{221} = \frac{l_{c2}^2 \sin \left( \arctan \left( \frac{l_{c2} \sin(q_2)}{d_1} \right) + q_1 \right) \cos(q_2) \sin(q_2) \dot{q}_2}{\sqrt{d_1^2 + l_{c2}^2 \sin^2(q_2)}} + \sqrt{d_1^2 + l_{c2}^2 \sin^2(q_2)} \cos \left( \arctan \left( \left( \frac{l_{c2} \sin(q_2)}{d_1} \right) + q_1 \right) \right) \left( \dot{q}_1 + \frac{l_{c2} \cos(q_2) \dot{q}_2}{d_1 \left( 1 + \frac{l_{c2}^2 \sin^2(q_2)}{d_1^2} \right)} \right) \quad (3.9)$$

$$v_{231} = l_{c1} - l_{c2} \cos(q_2) \quad (3.10)$$

Una vez fue obtenida la cinemática diferencial se puede calcular el valor de la energía cinética para el eslabón Hombro.

### Capítulo III

$$K_2(q_2, \dot{q}_2) = \frac{1}{2} m_2 v_2^T v_2 + \frac{1}{2} I_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 \quad (3.11)$$

Sustituyendo la expresión (3.7) en la ecuación (3.11) se obtiene:

$$K_2(q_2, \dot{q}_2) = \frac{1}{2} m_2 (d_1^2 \dot{q}_1^2 + 2 \cos(q_2) d_1 l_{c2} \dot{q}_1 \dot{q}_2^2 + \cos(q_2)^2 l_{c1}^2 \dot{q}_2^2 + l_{c2}^2 (\sin(q_2))^2 \dot{q}_1^2 + \cos(q_2)^2 \dot{q}_2^2) + \frac{1}{2} I_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 \quad (3.12)$$

Su energía potencial está dada en términos de:

$$U_2(q_2) = m_1 g (l_{c1} - l_{c2} \cos(q_2)) \quad (3.13)$$

En la Figura 3.4 se pueden observar los eslabones Hombro y Codo, ya que de ambos es posible obtener la ubicación del centro de masa  $m_3$  que genera dos proyecciones a lo largo del eje  $x$  y  $y$ . No se muestra el eslabón Base para hacer más simple la metodología.

Para obtener las proyecciones antes mencionadas es necesario definir algunos aspectos, antes de establecer las ecuaciones matemáticas que lo describen. La distancia  $d_2$  se mide del eje de giro  $q_1$  hasta el centro de masa, considerando que el mismo, se encuentra en el centro físico del eslabón Codo. La distancia  $d_3$  corresponde al eslabón Hombro medido desde el eje de giro de la coordenada articular  $q_2$  hasta la coordenada articular  $q_3$  generando un ángulo de noventa grados; a partir de  $q_3$  (para el Codo), se plantea la distancia  $l_{c3}$  hacia el centro de masa. Los catetos  $d_2$  y  $d_3 \sin(q_2) + l_{c3} \sin(q_2 + q_3)$  generan a su vez las componentes de la hipotenusa que está marcada con la línea segmentada. El ángulo  $\theta$  sirve para obtener las proyecciones y puede ser calculado mediante la fórmula de tangente, que utiliza ambos catetos conocidos.

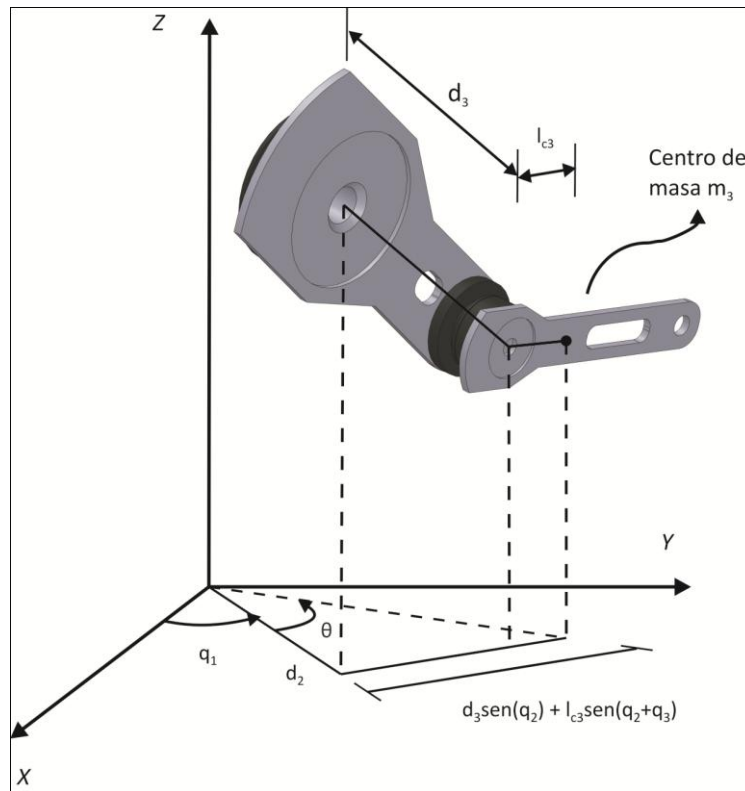


Figura 3. 4 Eslabones Hombro y Codo.

Para haber obtenido las distancias en el plano x – y fue necesario representar las proyecciones de la Figura 3.5, de tal forma que para se pueden observar dos catetos que generan un triángulo cuya hipotenusa es la línea segmentada que se extiende desde el origen del plano, hasta el centro de masa  $m_2$ .

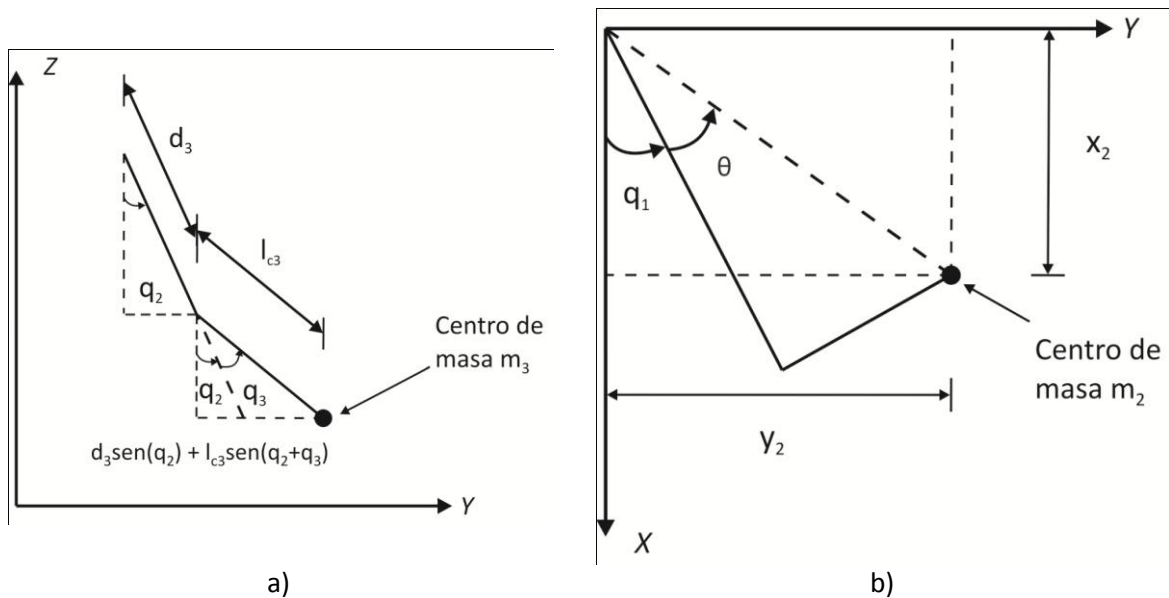


Figura 3. 5 a) Proyecciones de los planos Y – Z. b) Proyecciones de los planos X – Y.

### Capítulo III

Para encontrar las proyecciones en el eje  $z$  nos remitiremos a la Figura 3.6, la cual muestra los eslabones Hombro y Codo, siendo la altura  $h_1$  la distancia entre el plano  $x$  y el eje de giro para la coordenada articular  $q_2$ . En el lado derecho de la imagen se presentan dos distancias las cuales modifican su altura dependiendo del ángulo de giro para las dos coordenadas articulares  $q_2$  y  $q_3$ . Por lo tanto la altura que se encuentra entre  $h_1$  y las distancias generadas por ambos eslabones en el eje  $z$  produce la altura del centro de masa medible para ubicarlo y obtener  $z_3$  en el vector de posiciones.

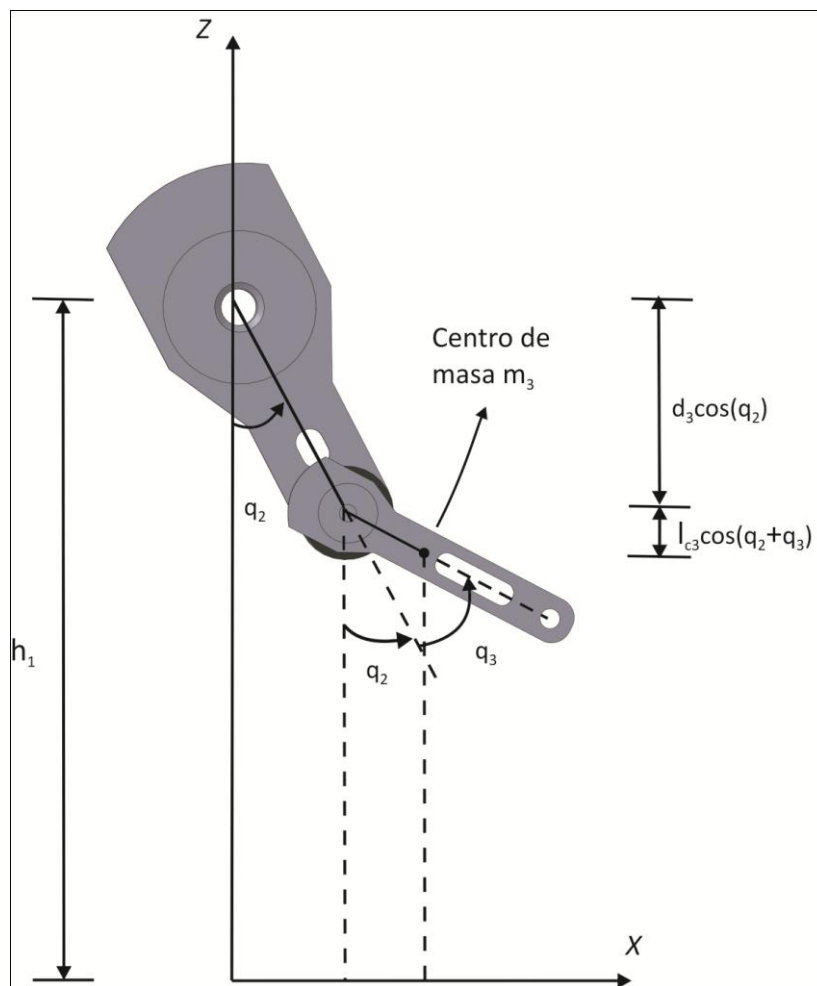


Figura 3. 6 Proyecciones de los eslabones Brazo y Codo en el plano X – Z.

### Capítulo III

De acuerdo a las representaciones que se plantearon en las Figuras anteriores ahora es posible escribir la posición del centro de masa 3 en términos de las distancias del eslabón Brazo, así como a las coordenadas articulares  $q_2$  y  $q_3$  por lo que las ecuaciones que describen la posición en un marco tridimensional quedan como sigue:

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{d_2^2 + (d_3 \text{sen}(q_2) + l_{c3} \text{sen}(q_2 + q_3))^2} \cos \left( q_1 + \arctan \left( \frac{d_3 \text{sen}(q_2) + l_{c3} \text{sen}(q_2 + q_3)}{d_2} \right) \right) \\ \sqrt{d_2^2 + (d_3 \text{sen}(q_2) + l_{c3} \text{sen}(q_2 + q_3))^2} \sin \left( q_1 + \arctan \left( \frac{d_3 \text{sen}(q_2) + l_{c3} \text{sen}(q_2 + q_3)}{d_2} \right) \right) \\ h_1 - d_3 \cos(q_2) - l_{c3} \cos(q_2 + q_3) \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Para obtener la cinemática diferencial del eslabón Brazo se parte de la ecuación (3.14) y se deriva con respecto al tiempo, lo cual se haya representado en la ecuación (3.15).

$$v_3 = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Donde  $v_3$  está definida en términos de:

$$v_3 = \begin{bmatrix} v_{311} \\ v_{321} \\ v_{331} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Los elementos que conforman  $v_3$  están descritos en las ecuaciones (3.17), (3.18) y (3.19).

$$\begin{aligned}
 v_{311} = & \frac{\cos\left(\arctan\left(\frac{d_3 \sin(q_2) + l_{c3} \sin(q_2 + q_3)}{d_2}\right) + q_1\right) (d_3 \sin(q_2) + l_{c3} \sin(q_2 + q_3)) (d_3 \cos(q_2) \dot{q}_2 + l_{c3} \cos(q_2 + q_3) (\dot{q}_2 + \dot{q}_3))}{\sqrt{d_2^2 + (d_3 \sin(q_2) + l_{c3} \sin(q_2 + q_3))^2}} \\
 & - \sqrt{d_2^2 + (d_3 \sin(q_2) + l_{c3} \sin(q_2 + q_3))^2} \sin\left(\arctan\left(\frac{d_3 \sin(q_2) + l_{c3} \sin(q_2 + q_3)}{d_2}\right) + q_1\right) \left( \dot{q}_1 + \frac{d_3 \cos(q_2) \dot{q}_2 + l_{c3} \cos(q_2 + q_3) (\dot{q}_2 + \dot{q}_3)}{d_2 \left(1 + \frac{(d_3 \sin(q_2) + l_{c3} \sin(q_2 + q_3))^2}{d_2^2}\right)} \right)
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}
 v_{321} = & \frac{\sin\left(\arctan\left(\frac{d_3 \sin(q_2) + l_{c3} \sin(q_2 + q_3)}{d_2}\right) + q_1\right) (d_3 \sin(q_2) + l_{c3} \sin(q_2 + q_3)) (d_3 \cos(q_2) \dot{q}_2 + l_{c3} \cos(q_2 + q_3) (\dot{q}_2 + \dot{q}_3))}{\sqrt{d_2^2 + (d_3 \sin(q_2) + l_{c3} \sin(q_2 + q_3))^2}} \\
 & + \sqrt{d_2^2 + (d_3 \sin(q_2) + l_{c3} \sin(q_2 + q_3))^2} \cos\left(\arctan\left(\frac{d_3 \sin(q_2) + l_{c3} \sin(q_2 + q_3)}{d_2}\right) + q_1\right) \left( \dot{q}_1 + \frac{d_3 \cos(q_2) \dot{q}_2 + l_{c3} \cos(q_2 + q_3) (\dot{q}_2 + \dot{q}_3)}{d_2 \left(1 + \frac{(d_3 \sin(q_2) + l_{c3} \sin(q_2 + q_3))^2}{d_2^2}\right)} \right)
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

### Capítulo III

$$v_{331} = l_2 \sin(q_2) \dot{q}_2 + l_{c3} \sin(q_2 + q_3) (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \quad (3.19)$$

La energía cinética del tercer eslabón está dado por:

$$K_3(q_3, \dot{q}_3) = \frac{1}{2} m_3 v_3^T v_3 + \frac{1}{2} I_3 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)^2 \quad (3.20)$$

Por lo que sustituyendo ecuación (3.16) por los elementos del vector en la ecuación (3.20) se obtiene:

$$\begin{aligned} K_3(q_3, \dot{q}_3) = & \frac{1}{2} m_3 (d_2^2 \dot{q}_1^2 + d_3^2 (\sin(q_2)^2 \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + 2d_2 \dot{q}_1 (d_3 \cos(q_2) \dot{q}_2 + l_{c3} \cos(q_2 + q_3) (\dot{q}_2 \\ & + \dot{q}_3)) + 2d_3 l_{c3} (\sin(q_2) \sin(q_2 + q_3) \dot{q}_1^2 + \cos(q_3) \dot{q}_2 (\dot{q}_2 + \dot{q}_3)) \\ & + l_{c3}^2 (\sin(q_2 + q_3)^2 \dot{q}_1^2 + (\dot{q}_2 + \dot{q}_3)^2)) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)^2 \end{aligned} \quad (3.21)$$

La energía potencial del tercer eslabón está dada por:

$$U_2(q_2) = m_1 g (h_1 - l_2 \cos(q_2) - l_{c3} \cos(q_2 + q_3)) \quad (3.22)$$

Se ha obtenido la energía cinética y potencial para los tres eslabones que conforman el robot, por lo que se tiene una estructura general para ambas energías. A continuación se definen la energía cinética y potencial totales.

Donde la energía cinética está constituida por:

$$K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = K_1(q_1, \dot{q}_1) + K_2(q_2, \dot{q}_2) + K_3(q_3, \dot{q}_3) \quad (3.23)$$

De la misma manera la energía potencial está constituida por:

$$U(\mathbf{q}) = U(q_1) + U(q_2) + U(q_3) \quad (3.24)$$

El Lagrangiano está definido como la diferencia de la energía cinética y la energía potencial.

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - U(\mathbf{q}) \quad (3.25)$$

Para el robot de tres grados de libertad el Lagrangiano queda:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = & \frac{1}{2} m_2 (d_1^2 \dot{q}_1^2 + 2d_1 l_{c2} \cos(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + l_{c2}^2 (\sin(q_2)^2 \dot{q}_1^2 + 2\cos(q_2)^2 \dot{q}_2^2)) \\
 & + \frac{1}{2} I_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + \frac{1}{2} m_3 (d_2^2 \dot{q}_1^2 + d_3^2 (\sin(q_2))^2 \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) \\
 & + 2d_2 \dot{q}_1 (\cos(q_2) d_3 \dot{q}_2 + l_{c3} \cos(q_2 + q_3) (\dot{q}_2 + \dot{q}_3)) + 2d_3 l_{c3} (\sin(q_2) \sin(q_2 \\
 & + q_3) \dot{q}_1^2 + \cos(q_3) \dot{q}_2 (\dot{q}_2 + \dot{q}_3)) + l_{c3}^2 (\sin(q_2 + q_3)^2 \dot{q}_1^2 + (\dot{q}_2 + \dot{q}_3)^2) \\
 & + \frac{1}{2} I_3 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)^2 - m_1 g l_{c1} - m_2 g (h_1 - l_{c2} \sin(q_2)) - m_3 g (h_1 \\
 & - d_3 \cos(q_2) - l_{c3} \cos(q_2 + q_3))
 \end{aligned} \tag{3. 26}$$

Aplicando las ecuaciones de Euler-Lagrange se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_1} \right] = & I_2 (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) + \frac{1}{2} m_2 (4l_{c2}^2 \cos(q_2) \sin(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 - 2d_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_2^2 + 2d_1^2 \ddot{q}_1 \\
 & + 2l_{c2}^2 \sin(q_2)^2 \ddot{q}_1 + 2d_1 l_{c2} \cos(q_2) \ddot{q}_2) + \frac{1}{2} m_3 (4\cos(q_2) \sin(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\
 & + 4d_3 l_{c3} \cos(q_2) \sin(q_2 + q_3) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + 4d_3 l_{c3} \cos(q_2 + q_3) \sin(q_2) \dot{q}_1 (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \\
 & + 4l_{c3}^2 \cos(q_2 + q_3) \sin(q_2 + q_3) \dot{q}_1 (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) + 2d_2^2 \ddot{q}_1 + 2d_3^2 \sin(q_2)^2 \ddot{q}_1 \\
 & + 4d_3 l_{c3} \sin(q_2) \sin(q_2 + q_3) \ddot{q}_1 + 2l_{c3}^2 \sin(q_2 + q_3)^2 \ddot{q}_1 + 2d_2 (-\sin(q_2) d_3 \dot{q}_2^2 \\
 & - l_{c3} \sin(q_2 + q_3) (\dot{q}_2 + \dot{q}_3)^2 + d_3 \cos(q_2) \dot{q}_2 + l_{c3} \cos(q_2 + q_3) (\dot{q}_2 + \dot{q}_3))
 \end{aligned} \tag{3. 27}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_2} \right] = & \frac{1}{2} m_2 (-2d_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 - 8l_{c2}^2 \cos(q_2) \sin(q_2) \dot{q}_2^2 + 2d_1 l_{c2} \cos(q_2) \ddot{q}_1 \\
 & + 4l_{c2}^2 \cos(q_2)^2 \ddot{q}_2 + \frac{1}{2} m_3 (2d_2 \dot{q}_1 (-d_3 \sin(q_2) \dot{q}_2 - l_{c3} \sin(q_2 + q_3) (\dot{q}_2 + \dot{q}_3)) \\
 & + 2d_2 (d_3 \cos(q_2) + l_{c3} \cos(q_2 + q_3)) \ddot{q}_1 + 2d_3^2 \ddot{q}_2 + 2l_{c3}^2 (\ddot{q}_2 + \ddot{q}_3) \\
 & + 2d_3 l_{c3} (-\sin(q_3) \dot{q}_2 \dot{q}_3 - \sin(q_3) \dot{q}_3 (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) + \cos(q_3) \ddot{q}_2 \\
 & + \cos(q_3) (\ddot{q}_2 + \ddot{q}_3))) + I_2 (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) + I_3 (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 + \ddot{q}_3)
 \end{aligned} \tag{3. 28}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_3} \right] = & I_3 (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 + \ddot{q}_3) + \frac{1}{2} m_3 (-2d_3 l_{c3} \sin(q_3) \dot{q}_2 \dot{q}_3 - 2d_2 l_{c3} \sin(q_2 + q_3) \dot{q}_1 (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \\
 & + 2d_2 l_{c3} \cos(q_2 + q_3) \ddot{q}_1 + 2d_3 l_{c3} \cos(q_3) \ddot{q}_2 + 2l_{c3}^2 (\ddot{q}_2 + \ddot{q}_3))
 \end{aligned} \tag{3. 29}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial q_1} = 0 \tag{3. 30}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial q_2} = & m_2 l_{c2} g \cos(q_2) - m_3 g (d_3 \sin(q_2) + l_{c3} \sin(q_2 + q_3)) + \frac{1}{2} m_2 (-2d_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\
 & + l_{c2}^2 (2\cos(q_2) \sin(q_2) \dot{q}_1^2 - 4\cos(q_2) \sin(q_2) \dot{q}_2^2)) \\
 & + \frac{1}{2} m_3 (2d_3^2 \cos(q_2) \sin(q_2) \dot{q}_1^2 + 2l_{c3}^2 \cos(q_2 + q_3) \sin(q_2 + q_3) \dot{q}_1^2 \\
 & + 2d_3 l_{c3} (\cos(q_2 + q_3) \sin(q_2) \dot{q}_1^2 + \cos(q_2) \sin(q_2 + q_3) \dot{q}_1^2) \\
 & + 2d_2 \dot{q}_1 (-\sin(q_2) d_3 \dot{q}_2 - l_{c3} \sin(q_2 + q_3) (\dot{q}_2 + \dot{q}_3)))
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial q_3} = & -m_3 l_{c3} g \sin(q_2 + q_3) + \frac{1}{2} m_3 (2l_{c3}^2 \cos(q_2 + q_3) \sin(q_2 + q_3) \dot{q}_1^2 - 2d_2 l_{c3} \sin(q_2 \\
 & + q_3) \dot{q}_1 (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) + 2d_3 l_{c3} (\cos(q_2 + q_3) \sin(q_2) \dot{q}_1^2 - \sin(q_3) \dot{q}_2 (\dot{q}_2 + \dot{q}_3)))
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

Por lo tanto, los pares aplicados para el robot manipulador de tres grados de libertad incluyendo el fenómeno de fricción viscosa y de Coulomb es:

$$\begin{aligned}
 \tau_1 = & \frac{1}{2} m_2 (4l_{c2}^2 \cos(q_2) \sin(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 - 2d_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_2^2 + 2d_1^2 \ddot{q}_1 \\
 & + 2l_{c2}^2 \sin(q_2)^2 \ddot{q}_1 + 2d_1 l_{c2} \cos(q_2) \ddot{q}_2) + \frac{1}{2} m_3 (4\cos(q_2) \sin(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + 4d_3 l_{c3} \cos(q_2) \sin(q_2 \\
 & + q_3) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + 4d_3 l_{c3} \cos(q_2 + q_3) \sin(q_2) \dot{q}_1 (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) + 4l_{c3}^2 \cos(q_2 + q_3) \sin(q_2 \\
 & + q_3) \dot{q}_1 (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) + 2d_2^2 \ddot{q}_1 + 2d_3^2 \sin(q_2)^2 \ddot{q}_1 + 4d_3 l_{c3} \sin(q_2) \sin(q_2 + q_3) \ddot{q}_1 \\
 & + 2l_{c3}^2 \sin(q_2 + q_3)^2 \ddot{q}_1 + 2d_2 (-\sin(q_2) d_3 \dot{q}_2^2 - l_{c3} \sin(q_2 + q_3) (\dot{q}_2 + \dot{q}_3)^2 \\
 & + d_3 \cos(q_2) \ddot{q}_2 + l_{c3} \cos(q_2 + q_3) (\ddot{q}_2 + \ddot{q}_3))) + I_2 (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) + I_3 (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 + \ddot{q}_3) \\
 & + B_{11} \dot{q}_1 + f_{c1} \text{signo}(\dot{q}_1)
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

$$\begin{aligned}
 \tau_2 = & \frac{1}{2} m_2 (-2d_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 - 8l_{c2}^2 \cos(q_2) \sin(q_2) \dot{q}_2^2 + 2d_1 l_{c2} \cos(q_2) \ddot{q}_1 + 4l_{c2}^2 \cos(q_2)^2 \ddot{q}_2) \\
 & + \frac{1}{2} m_3 (2d_2 \dot{q}_1 (-d_3 \sin(q_2) \dot{q}_2 - l_{c3} \sin(q_2 + q_3) (\dot{q}_2 + \dot{q}_3)) \\
 & + 2d_2 (d_3 \cos(q_2) + l_{c3} \cos(q_2 + q_3)) \ddot{q}_1 + 2d_3^2 \ddot{q}_2 + 2l_{c3}^2 (\ddot{q}_2 + \ddot{q}_3) \\
 & + 2d_3 l_{c3} (-\sin(q_3) \dot{q}_2 \dot{q}_3 - \sin(q_3) \dot{q}_3 (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) + \cos(q_3) \dot{q}_2 \\
 & + \cos(q_3) (\dot{q}_2 + \dot{q}_3))) + I_2 (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) - m_2 g l_{c2} \cos(q_2) \\
 & + m_3 g (d_3 \sin(q_2) + l_{c3} \sin(q_2 + q_3)) \\
 & - \frac{1}{2} m_2 (-2d_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\
 & + l_{c2}^2 (2\cos(q_2) \sin(q_2) \dot{q}_1^2 - 4\cos(q_2) \sin(q_2) \dot{q}_2^2)) \\
 & - \frac{1}{2} m_3 (2d_3^2 \cos(q_2) \sin(q_2) \dot{q}_1^2 + 2l_{c3}^2 \cos(q_2 + q_3) \sin(q_2 + q_3) \dot{q}_1^2 \\
 & + 2d_3 l_{c3} (\cos(q_2 + q_3) \sin(q_2) \dot{q}_1^2 + \cos(q_2) \sin(q_2 + q_3) \dot{q}_1^2) \\
 & + 2d_2 \dot{q}_1 (-\sin(q_2) d_3 \dot{q}_2 - l_{c3} \sin(q_2 + q_3) (\dot{q}_2 + \dot{q}_3))) + I_3 (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 + \ddot{q}_3) \\
 & + B_{22} \dot{q}_2 + f_{c2} \text{signo}(\dot{q}_2)
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

### Capítulo III

$$\begin{aligned}
 \tau_3 = & \frac{1}{2}m_3(-2d_3l_{c3}\sin(q_3)\dot{q}_2\dot{q}_3 - 2d_2l_{c3}\sin(q_2 + q_3)\dot{q}_1(\dot{q}_2 + \dot{q}_3) + 2d_2l_{c3}\cos(q_2 + q_3)\ddot{q}_1 \\
 & + 2d_3l_{c3}\cos(q_3)\ddot{q}_2 + 2l_{c3}^2(\ddot{q}_2 + \ddot{q}_3)) + m_3l_{c3}g\sin(q_2 + q_3) \\
 & - \frac{1}{2}m_3\left(2l_{c3}^2\cos(q_2 + q_3)\sin(q_2 + q_3)\dot{q}_1^2 - 2d_2l_{c3}\sin(q_2 + q_3)\dot{q}_1(\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \quad (3.35) \right. \\
 & + 2d_3l_{c3}\left(\cos(q_2 + q_3)\sin(q_2)\dot{q}_1^2 - \sin(q_3)\dot{q}_2(\dot{q}_2 + \dot{q}_3)\right)\left. \right) + I_3(\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 + \ddot{q}_3) \\
 & + B_{33}\dot{q}_3 + f_{c3}\text{signo}(\dot{q}_3)
 \end{aligned}$$

El modelo dinámico del robot obtenido puede escribirse tomando:

$$M(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} M_{11}(\mathbf{q}) & M_{12}(\mathbf{q}) & M_{13}(\mathbf{q}) \\ M_{21}(\mathbf{q}) & M_{22}(\mathbf{q}) & M_{23}(\mathbf{q}) \\ M_{31}(\mathbf{q}) & M_{32}(\mathbf{q}) & M_{33}(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

$$C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} C_{11}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) & C_{12}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) & C_{13}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\ C_{21}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) & C_{22}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) & C_{23}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\ C_{31}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) & C_{32}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) & C_{33}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

$$C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} C_{11}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) & C_{12}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) & C_{13}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\ C_{21}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) & C_{22}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) & C_{23}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\ C_{31}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) & C_{32}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) & C_{33}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

$$F_c(\dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} F_{c11}(\dot{\mathbf{q}}) & F_{c12}(\dot{\mathbf{q}}) & F_{c13}(\dot{\mathbf{q}}) \\ F_{c21}(\dot{\mathbf{q}}) & F_{c22}(\dot{\mathbf{q}}) & F_{c23}(\dot{\mathbf{q}}) \\ F_{c31}(\dot{\mathbf{q}}) & F_{c32}(\dot{\mathbf{q}}) & F_{c33}(\dot{\mathbf{q}}) \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

$$g(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} g_1(\mathbf{q}) \\ g_2(\mathbf{q}) \\ g_3(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

Donde los componentes para las matrices (3.36), (3.37), (3.38), (3.39), (3.40) y (3.41) son:

$$\begin{aligned}
 M_{11}(\mathbf{q}) = & m_2d_1^2 + m_2l_{c2}^2\sin(q_2)^2 + m_3d_2^2 + m_3d_3^2\sin(q_2)^2 + 2m_3d_3l_{c3}\sin(q_2)\sin(q_2 + q_3) \\
 & + 2m_3l_{c3}^2\sin(q_2 + q_3)^2 + I_2 + I_3
 \end{aligned}$$

$$M_{12}(\mathbf{q}) = m_2d_1l_{c2}\cos(q_2) + m_3d_3\cos(q_2) + m_3l_{c3}\cos(q_2 + q_3) + I_2 + I_3$$

$$M_{13}(\mathbf{q}) = m_3l_{c3}\cos(q_2 + q_3) + I_3$$

### Capítulo III

$$M_{21}(\mathbf{q}) = m_2 d_1 l_{c2} \cos(q_2) + m_3 d_2 (d_3 \cos(q_2) + l_{c3} \cos(q_2 + q_3))$$

$$M_{22}(\mathbf{q}) = m_2 l_{c2}^2 \cos(q_2)^2 + m_3 d_3^2 + m_3 l_{c3}^2 + m_3 d_3 l_{c3} + 2m_3 d_3 l_{c3} \cos(q_3) + I_2 + I_3$$

$$M_{23}(\mathbf{q}) = m_3 l_{c3}^2 + m_3 d_3 l_{c3} \cos(q_3) + I_3$$

$$M_{31}(\mathbf{q}) = m_3 d_2 l_{c3} \cos(q_2 + q_3) + I_3$$

$$M_{32}(\mathbf{q}) = m_3 d_3 l_{c3} \cos(q_3) + m_3 d_3 l_{c3} + m_3 l_{c3}^2 + I_3$$

$$M_{33}(\mathbf{q}) = m_3 l_{c3}^2 + I_3$$

$$C_{11}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = 2m_2 l_{c2}^2 \cos(q_2) \sin(q_2) \dot{q}_2 + 2m_3 \cos(q_2) \sin(q_2) \dot{q}_2 + 2m_3 d_3 l_{c3} \cos(q_2) \sin(q_2 + q_3) \dot{q}_2 \\ + 2m_3 d_3 l_{c3} \cos(q_2 + q_3) \sin(q_2) \dot{q}_2 + 2m_3 l_{c3}^2 \cos(q_2 + q_3) \sin(q_2 + q_3) \dot{q}_2$$

$$C_{12}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = m_2 d_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_2 - m_3 d_2 \sin(q_2) d_3 \dot{q}_2 - m_3 l_{c3} \sin(q_2 + q_3) \dot{q}_2 - m_3 l_{c3} \sin(q_2 + q_3)$$

$$C_{13}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = m_3 d_3 l_{c3} \cos(q_2 + q_3) \sin(q_2) \dot{q}_1 + 2m_3 l_{c3}^2 \cos(q_2 + q_3) \sin(q_2 + q_3) \dot{q}_1 - m_3 l_{c3} \sin(q_2 + q_3) \dot{q}_3$$

$$C_{21}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = -m_2 d_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_2 - 4l_{c2}^2 \cos(q_2) \sin(q_2) \dot{q}_2 + m_3 d_2 \dot{q}_1 - m_3 d_3 \sin(q_2) \dot{q}_2 + m_2 d_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_2 \\ - m_2 l_{c2}^2 \cos(q_2) \sin(q_2) \dot{q}_1 - m_3 d_3^2 \cos(q_2) \sin(q_2) \dot{q}_1 - m_3 l_{c3}^2 \cos(q_2 + q_3) \sin(q_2 + q_3) \dot{q}_1 \\ - m_3 2d_3 l_{c3} (\cos(q_2 + q_3) \sin(q_2) \dot{q}_1 - \frac{1}{2} m_3 \cos(q_2) \sin(q_2 + q_3) \dot{q}_1$$

$$C_{22}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = -4m_2 \cos(q_2) \sin(q_2) \dot{q}_2 - m_3 d_3 l_{c3} \sin(q_3) \dot{q}_3 - \frac{1}{2} m_3 l_{c3} \sin(q_2 + q_3) \\ - 2m_2 l_{c2}^2 \cos(q_2) \sin(q_2) \dot{q}_2 + m_3 d_2 d_3 \sin(q_2) \dot{q}_1 + \frac{1}{2} m_3 l_{c3} \sin(q_2 + q_3)$$

$$C_{23}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = -\frac{1}{2} m_3 l_{c3} \sin(q_2 + q_3) - m_3 d_3 l_{c3} \sin(q_3) \dot{q}_3 + \frac{1}{2} m_3 l_{c3} \sin(q_2 + q_3)$$

$$C_{31}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = -m_3 d_2 l_{c3} \sin(q_2 + q_3) \dot{q}_2 - m_3 l_{c3}^2 \cos(q_2 + q_3) \sin(q_2 + q_3) \dot{q}_1 + m_3 d_2 l_{c3} \sin(q_2 + q_3) \dot{q}_2 \\ - m_3 d_3 l_{c3} \cos(q_2 + q_3) \sin(q_2) \dot{q}_1$$

$$C_{32}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = m_3 d_3 l_{c3} \sin(q_3) \dot{q}_2$$

$$C_{33}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = -2m_3 d_2 l_{c3} \sin(q_2 + q_3) \dot{q}_1 - m_3 d_3 l_{c3} \sin(q_3) \dot{q}_2$$

$$g_1(\mathbf{q}) = 0$$

$$g_2(\mathbf{q}) = m_2 g l_{c2} \cos(q_2) + m_3 g l_{c3} \sin(q_2 + q_3)$$

$$g_3(\mathbf{q}) = m_3 g l_{c3} \sin(q_2 + q_3)$$

$B_{11}$  valor de fricción viscosa propio servomecanismo de la articulación Base.

$B_{22}$  valor de fricción viscosa propio servomecanismo de la articulación Hombro.

$B_{33}$  valor de fricción viscosa propio servomecanismo de la articulación Codo.

$$B_{12} = B_{13} = B_{21} = B_{23} = B_{31} = B_{32} = 0$$

$$F_{c11}(\dot{\mathbf{q}}) = f_{c1} \text{signo}(\dot{q}_1)$$

$$F_{c22}(\dot{\mathbf{q}}) = f_{c2} \text{signo}(\dot{q}_2)$$

$$F_{c33}(\dot{\mathbf{q}}) = f_{c3} \text{signo}(\dot{q}_3)$$

$$F_{c12}(\dot{\mathbf{q}}) = F_{c13}(\dot{\mathbf{q}}) = F_{c21}(\dot{\mathbf{q}}) = F_{c23}(\dot{\mathbf{q}}) = F_{c31}(\dot{\mathbf{q}}) = F_{c32}(\dot{\mathbf{q}}) = 0$$

### 3.2 Demostración de estabilidad

El modelo dinámico [8, 10] que gobierna un robot de n-grados de libertad con eslabones rígidos y uniones rotacionales está dado por la ecuación (3.42).

$$\boldsymbol{\tau} = M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{f}_f \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (3.42)$$

Donde  $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$  representan al vector de posiciones, velocidad y aceleración articular, respectivamente.

$M(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz de inercia, que es una matriz simétrica y definida positiva,  $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz de fuerzas centrípetas y de Coriolis, y  $\mathbf{f}_f \in \mathbb{R}^n$  que incluye el vector de pares de fricción viscosa de Coulomb y estática [11, 12], sin embargo para efectos de simplificación de este modelo se tomará en cuenta B que es la matriz de coeficientes de fricción viscosa que tiene cada articulación del robot [8] y  $\mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de fuerzas o pares gravitacionales debido a la acción de la gravedad.

Para cerrar el lazo se propuso trabajar con un controlador tipo proporcional derivativo. De acuerdo a la técnica de moldeo de energía (3.43) se establece una gran cantidad de familias de algoritmos de control capaces de proporcionar la energía de diseño necesaria para que los eslabones de un robot de n-grados de libertad alcancen la posición deseada.

La ley de control de moldeo de energía (3.43) utilizada [8] es la siguiente:

$$\boldsymbol{\tau} = \nabla U_a(K_p, \tilde{\mathbf{q}}) - \mathbf{f}_v(K_v, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (3.43)$$

Donde:

- $\nabla U_a(K_p, \tilde{\mathbf{q}})$  es el gradiente de la energía potencial. El gradiente es una función continua en  $\tilde{\mathbf{q}}$  que se define como el error de posición articular  $\mathbf{q}$ , es decir:  $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q}_d - \mathbf{q}$ .
- La función  $U_a(K_p, \tilde{\mathbf{q}})$  se conoce como energía potencial artificial debido a que es la energía de diseño, la cual es diferenciable y definida positiva con un mínimo y único global en el error de posición  $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ .
- $\mathbf{f}_v(K_v, \dot{\mathbf{q}})$  es la función de inyección de amortiguamiento o freno mecánico que satisface la propiedad disipativa, es decir  $\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{f}_v(K_v, \dot{\mathbf{q}}) > 0$ .
- $\mathbf{g}(\mathbf{q})$  representa la compensación del par de gravedad.

### Capítulo III

La ley de control que utiliza la estructura matemática de acuerdo a (3.43), por lo que:

$$\tau = \mathbf{K}_p(\tilde{\mathbf{q}}) \left( \frac{\tilde{\mathbf{q}} + \sinh(\tilde{\mathbf{q}})}{\frac{1}{2}\tilde{\mathbf{q}}^2 + \cosh(\tilde{\mathbf{q}})} \right) - \mathbf{K}_v(\dot{\mathbf{q}}) \left( \frac{\dot{\mathbf{q}} + \sinh(\dot{\mathbf{q}})}{\frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^2 + \cosh(\dot{\mathbf{q}})} \right) + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (3.44)$$

Donde:

$$\frac{\tilde{\mathbf{q}} + \sinh(\tilde{\mathbf{q}})}{\frac{1}{2}\tilde{\mathbf{q}}^2 + \cosh(\tilde{\mathbf{q}})} = \begin{bmatrix} \frac{\tilde{q}_1 + \sinh(\tilde{q}_1)}{\frac{1}{2}\tilde{q}_1^2 + \cosh(\tilde{q}_1)} \\ \vdots \\ \frac{\tilde{q}_n + \sinh(\tilde{q}_n)}{\frac{1}{2}\tilde{q}_n^2 + \cosh(\tilde{q}_n)} \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

y

$$\frac{\dot{\mathbf{q}} + \sinh(\dot{\mathbf{q}})}{\frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^2 + \cosh(\dot{\mathbf{q}})} = \begin{bmatrix} \frac{\dot{q}_1 + \sinh(\dot{q}_1)}{\frac{1}{2}\dot{q}_1^2 + \cosh(\dot{q}_1)} \\ \vdots \\ \frac{\dot{q}_n + \sinh(\dot{q}_n)}{\frac{1}{2}\dot{q}_n^2 + \cosh(\dot{q}_n)} \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

Donde las matrices  $\mathbf{K}_p(\tilde{\mathbf{q}})$  y  $\mathbf{K}_v(\dot{\mathbf{q}})$  están definidas de acuerdo a (3.47) y (3.48).

$$\mathbf{K}_p(\tilde{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} k_{p1}^*(1 - \alpha_1 e^{-\alpha_1 \tilde{q}_1^2}) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & k_{pn}^*(1 - \alpha_n e^{-\alpha_n \tilde{q}_n^2}) \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

$$\mathbf{K}_v(\dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} k_{v1}^*(1 - \beta_1 e^{-\beta_1 \dot{q}_1^2}) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & k_{vn}^*(1 - \beta_n e^{-\beta_n \dot{q}_n^2}) \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

Donde  $k_{pi}^* > 0$  y  $k_{vi}^* > 0$  están limitados por el máximo valor de torque del servomecanismo utilizado. Mientras que  $\alpha_i$  y  $\beta_i$  son constantes que definidas en los rangos  $0 < \alpha < 1$  y  $0 < \beta < 1$  respectivamente.

### Capítulo III

La ecuación de lazo cerrado que incluye el modelo dinámico y la estructura de control están expresadas en (3.49).

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\mathbf{q}} \\ M(\mathbf{q})^{-1} \left[ \mathbf{K}_p(\tilde{\mathbf{q}}) \left( \frac{\tilde{\mathbf{q}} + \sinh(\tilde{\mathbf{q}})}{\frac{1}{2}\tilde{\mathbf{q}}^2 + \cosh(\tilde{\mathbf{q}})} \right) - \mathbf{K}_v(\dot{\mathbf{q}}) \left( \frac{\dot{\mathbf{q}} + \sinh(\dot{\mathbf{q}})}{\frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^2 + \cosh(\dot{\mathbf{q}})} \right) - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} \right] \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

Para el primer elemento de la ecuación de lazo cerrado  $-\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{1}\dot{\mathbf{q}} \Leftrightarrow \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ .

Para el segundo elemento de la ecuación (3.49) la matriz de inercia  $M(\mathbf{q})$  es una matrix definida positiva, y su matriz inversa  $M(\mathbf{q})^{-1}$  existe y es definida positiva. La matriz de fricción viscosa  $\mathbf{B}$  es definida positiva. Para la matriz de fuerzas centrípetas y de Coriolis  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ .

Por diseño la matriz proporcional  $\mathbf{K}_p(\tilde{\mathbf{q}})$  y la matriz derivativa  $\mathbf{K}_v(\dot{\mathbf{q}})$  son matrices diagonales; los elementos de la diagonal principal son funciones acotadas que cruzan por cero, entonces  $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$  luego la función disipativa  $\mathbf{f}_v(\mathbf{K}_v, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ .

$$\text{Por otro lado } \mathbf{K}_p(\tilde{\mathbf{q}}) \left( \frac{\tilde{\mathbf{q}} + \sinh(\tilde{\mathbf{q}})}{\frac{1}{2}\tilde{\mathbf{q}}^2 + \cosh(\tilde{\mathbf{q}})} \right) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0}.$$

Por lo tanto, el punto de equilibrio existe y es único.

La función candidata de Lyapunov está expresada de la siguiente manera:

$$V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \sqrt{\ln\left(\frac{1}{2}\tilde{\mathbf{q}}^2 + \cosh(\tilde{\mathbf{q}})\right)} \mathbf{K}_p(\tilde{\mathbf{q}}) \sqrt{\ln\left(\frac{1}{2}\tilde{\mathbf{q}}^2 + \cosh(\tilde{\mathbf{q}})\right)} \quad (3.50)$$

La función candidata de forma desglosada es la siguiente:

$$V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \begin{bmatrix} \sqrt{\ln\left(\frac{1}{2}\tilde{q}_1^2 + \cosh(\tilde{q}_1)\right)} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln\left(\frac{1}{2}\tilde{q}_n^2 + \cosh(\tilde{q}_n)\right)} \end{bmatrix}^T \mathbf{K}_p(\tilde{\mathbf{q}}) \begin{bmatrix} \sqrt{\ln\left(\frac{1}{2}\tilde{q}_1^2 + \cosh(\tilde{q}_1)\right)} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln\left(\frac{1}{2}\tilde{q}_n^2 + \cosh(\tilde{q}_n)\right)} \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

Capítulo III

Realizando la derivada temporal de la expresión (3.51) es lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) = & \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{\ln\left(\frac{1}{2}\tilde{q}_1^2 + \cosh(\tilde{q}_1)\right)} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln\left(\frac{1}{2}\tilde{q}_n^2 + \cosh(\tilde{q}_n)\right)} \end{bmatrix}^T \mathbf{K}_p(\tilde{\mathbf{q}}) \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\ln\left(\frac{1}{2}\tilde{q}_1^2 + \cosh(\tilde{q}_1)\right)}} \frac{\tilde{q}_1 + \sinh(\tilde{q}_1)}{\frac{1}{2}\tilde{q}_1^2 + \cosh(\tilde{q}_1)} \dots & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 \dots & \frac{1}{\sqrt{\ln\left(\frac{1}{2}\tilde{q}_1^2 + \cosh(\tilde{q}_1)\right)}} \frac{\tilde{q}_1 + \sinh(\tilde{q}_1)}{\frac{1}{2}\tilde{q}_1^2 + \cosh(\tilde{q}_1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{q}}_1 \\ \vdots \\ \dot{\tilde{q}}_n \end{bmatrix} \\
 & + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\ln\left(\frac{1}{2}\tilde{q}_1^2 + \cosh(\tilde{q}_1)\right)}} \frac{\tilde{q}_1 + \sinh(\tilde{q}_1)}{\frac{1}{2}\tilde{q}_1^2 + \cosh(\tilde{q}_1)} \dot{\tilde{q}}_1 \dots & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 \dots & \frac{1}{\sqrt{\ln\left(\frac{1}{2}\tilde{q}_1^2 + \cosh(\tilde{q}_1)\right)}} \frac{\tilde{q}_1 + \sinh(\tilde{q}_1)}{\frac{1}{2}\tilde{q}_1^2 + \cosh(\tilde{q}_1)} \dot{\tilde{q}}_n \end{bmatrix}^T \mathbf{K}_p(\tilde{\mathbf{q}}) \begin{bmatrix} \sqrt{\ln\left(\frac{1}{2}\tilde{q}_1^2 + \cosh(\tilde{q}_1)\right)} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln\left(\frac{1}{2}\tilde{q}_n^2 + \cosh(\tilde{q}_n)\right)} \end{bmatrix} \\
 & + 2 \begin{bmatrix} \sqrt{\ln\left(\frac{1}{2}\tilde{q}_1^2 + \cosh(\tilde{q}_1)\right)} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln\left(\frac{1}{2}\tilde{q}_n^2 + \cosh(\tilde{q}_n)\right)} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} k_{p1}^* \alpha_1^2 e^{-\alpha_1^2 \tilde{q}_1^2} \tilde{q}_1 \dot{\tilde{q}}_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & k_{pn}^* \alpha_n^2 e^{-\alpha_n^2 \tilde{q}_n^2} \tilde{q}_n \dot{\tilde{q}}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{\ln\left(\frac{1}{2}\tilde{q}_1^2 + \cosh(\tilde{q}_1)\right)} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln\left(\frac{1}{2}\tilde{q}_n^2 + \cosh(\tilde{q}_n)\right)} \end{bmatrix} + \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}
 \end{aligned} \tag{3.52}$$

Ya que está separado por tres áreas se usará cada parte para realizar reducción de operaciones de la siguiente manera:

De la ecuación anterior se desarrolla la primera parte de la siguiente manera para reducir operaciones.

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{\ln\left(\frac{1}{2}\tilde{q}_1^2 + \cosh(\tilde{q}_1)\right)} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln\left(\frac{1}{2}\tilde{q}_n^2 + \cosh(\tilde{q}_n)\right)} \end{bmatrix}^T \mathbf{K}_p(\tilde{\mathbf{q}}) \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\ln\left(\frac{1}{2}\tilde{q}_1^2 + \cosh(\tilde{q}_1)\right)}} \frac{\tilde{q}_1 + \sinh(\tilde{q}_1)}{\frac{1}{2}\tilde{q}_1^2 + \cosh(\tilde{q}_1)} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{1}{\sqrt{\ln\left(\frac{1}{2}\tilde{q}_n^2 + \cosh(\tilde{q}_n)\right)}} \frac{\tilde{q}_n + \sinh(\tilde{q}_n)}{\frac{1}{2}\tilde{q}_n^2 + \cosh(\tilde{q}_n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{q}}_1 \\ \vdots \\ \dot{\tilde{q}}_n \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

Debido a una propiedad de las matrices diagonales es posible intercambiar las posiciones.

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{\ln\left(\frac{1}{2}\tilde{q}_1^2 + \cosh(\tilde{q}_1)\right)} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln\left(\frac{1}{2}\tilde{q}_n^2 + \cosh(\tilde{q}_n)\right)} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\ln\left(\frac{1}{2}\tilde{q}_1^2 + \cosh(\tilde{q}_1)\right)}} \frac{\tilde{q}_1 + \sinh(\tilde{q}_1)}{\frac{1}{2}\tilde{q}_1^2 + \cosh(\tilde{q}_1)} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{1}{\sqrt{\ln\left(\frac{1}{2}\tilde{q}_n^2 + \cosh(\tilde{q}_n)\right)}} \frac{\tilde{q}_n + \sinh(\tilde{q}_n)}{\frac{1}{2}\tilde{q}_n^2 + \cosh(\tilde{q}_n)} \end{bmatrix} \mathbf{K}_p(\tilde{\mathbf{q}}) \begin{bmatrix} \dot{\tilde{q}}_1 \\ \vdots \\ \dot{\tilde{q}}_n \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

Se realiza la multiplicación del primer vector por la matriz del lado izquierdo. Sustituyendo  $\tilde{\mathbf{q}} = -\dot{\mathbf{q}}$  de la ecuación de lazo se obtiene:

$$-\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{\tilde{q}_1 + \sinh(\tilde{q}_1)}{\frac{1}{2}\tilde{q}_1^2 + \cosh(\tilde{q}_1)} \\ \vdots \\ \frac{\tilde{q}_n + \sinh(\tilde{q}_n)}{\frac{1}{2}\tilde{q}_n^2 + \cosh(\tilde{q}_n)} \end{bmatrix}^T \mathbf{K}_p(\tilde{\mathbf{q}}) \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

Capítulo III

De la ecuación anterior (3.52), de la parte central de la expresión se realizan operaciones de reducción de la siguiente manera:

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\ln\left(\frac{1}{2}\tilde{q}_1^2 + \cosh(\tilde{q}_1)\right)}} \frac{\tilde{q}_1 + \sinh(\tilde{q}_1)}{\frac{1}{2}\tilde{q}_1^2 + \cosh(\tilde{q}_1)} \ddot{\tilde{q}}_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{1}{\sqrt{\ln\left(\frac{1}{2}\tilde{q}_n^2 + \cosh(\tilde{q}_n)\right)}} \frac{\tilde{q}_n + \sinh(\tilde{q}_n)}{\frac{1}{2}\tilde{q}_n^2 + \cosh(\tilde{q}_n)} \ddot{\tilde{q}}_n \end{bmatrix}^T \mathbf{K}_p(\tilde{\mathbf{q}}) \begin{bmatrix} \sqrt{\ln\left(\frac{1}{2}\tilde{q}_1^2 + \cosh(\tilde{q}_1)\right)} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln\left(\frac{1}{2}\tilde{q}_n^2 + \cosh(\tilde{q}_n)\right)} \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{\ln\left(\frac{1}{2}\tilde{q}_1^2 + \cosh(\tilde{q}_1)\right)} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln\left(\frac{1}{2}\tilde{q}_n^2 + \cosh(\tilde{q}_n)\right)} \end{bmatrix}^T \mathbf{K}_p(\tilde{\mathbf{q}}) \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\ln\left(\frac{1}{2}\tilde{q}_1^2 + \cosh(\tilde{q}_1)\right)}} \frac{\tilde{q}_1 + \sinh(\tilde{q}_1)}{\frac{1}{2}\tilde{q}_1^2 + \cosh(\tilde{q}_1)} \dots & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{1}{\sqrt{\ln\left(\frac{1}{2}\tilde{q}_n^2 + \cosh(\tilde{q}_n)\right)}} \frac{\tilde{q}_n + \sinh(\tilde{q}_n)}{\frac{1}{2}\tilde{q}_n^2 + \cosh(\tilde{q}_n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\tilde{q}}_1 \\ \vdots \\ \ddot{\tilde{q}}_n \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

Se multiplica el vector de la izquierda por la matriz siguiente para reducir términos.

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{\ln\left(\frac{1}{2}\tilde{q}_1^2 + \cosh(\tilde{q}_1)\right)} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln\left(\frac{1}{2}\tilde{q}_n^2 + \cosh(\tilde{q}_n)\right)} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\ln\left(\frac{1}{2}\tilde{q}_1^2 + \cosh(\tilde{q}_1)\right)}} \frac{\tilde{q}_1 + \sinh(\tilde{q}_1)}{\frac{1}{2}\tilde{q}_1^2 + \cosh(\tilde{q}_1)} \dots & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{1}{\sqrt{\ln\left(\frac{1}{2}\tilde{q}_n^2 + \cosh(\tilde{q}_n)\right)}} \frac{\tilde{q}_n + \sinh(\tilde{q}_n)}{\frac{1}{2}\tilde{q}_n^2 + \cosh(\tilde{q}_n)} \end{bmatrix} \mathbf{K}_p(\tilde{\mathbf{q}}) \begin{bmatrix} \ddot{\tilde{q}}_1 \\ \vdots \\ \ddot{\tilde{q}}_n \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

### Capítulo III

De la misma manera que la ecuación anterior se sustituye la variable de estado  $\tilde{q} = -\dot{q}$  para obtener lo siguiente:

$$-\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tilde{q}_1 + \sinh(\tilde{q}_1) \\ \frac{1}{2} \tilde{q}_1^2 + \cosh(\tilde{q}_1) \\ \vdots \\ \tilde{q}_1 + \sinh(\tilde{q}_1) \\ \frac{1}{2} \tilde{q}_1^2 + \cosh(\tilde{q}_1) \end{bmatrix}^T \mathbf{K}_p(\tilde{q}) \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

Una vez se obtuvo la ecuación (3.55) y (3.59), al sumarlas se obtiene:

$$-\begin{bmatrix} \tilde{q}_1 + \sinh(\tilde{q}_1) \\ \frac{1}{2} \tilde{q}_1^2 + \cosh(\tilde{q}_1) \\ \vdots \\ \tilde{q}_1 + \sinh(\tilde{q}_1) \\ \frac{1}{2} \tilde{q}_1^2 + \cosh(\tilde{q}_1) \end{bmatrix}^T \mathbf{K}_p(\tilde{q}) \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

La tercera parte de la ecuación (3.52) se opera de la siguiente manera:

$$2 \begin{bmatrix} \sqrt{\ln\left(\frac{1}{2} \tilde{q}_1^2 + \cosh(\tilde{q}_1)\right)} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln\left(\frac{1}{2} \tilde{q}_n^2 + \cosh(\tilde{q}_n)\right)} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} k_{p1}^* \alpha_1^2 e^{-\alpha_1^2 \tilde{q}_1^2} \tilde{q}_1 \dot{q}_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & k_{pn}^* \alpha_n^2 e^{-\alpha_n^2 \tilde{q}_n^2} \tilde{q}_n \dot{q}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{\ln\left(\frac{1}{2} \tilde{q}_1^2 + \cosh(\tilde{q}_1)\right)} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln\left(\frac{1}{2} \tilde{q}_n^2 + \cosh(\tilde{q}_n)\right)} \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

Posteriormente se tiene que:

$$2 \begin{bmatrix} \sqrt{\ln\left(\frac{1}{2} \tilde{q}_1^2 + \cosh(\tilde{q}_1)\right)} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln\left(\frac{1}{2} \tilde{q}_n^2 + \cosh(\tilde{q}_n)\right)} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} k_{p1}^* \alpha_1^2 e^{-\alpha_1^2 \tilde{q}_1^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & k_{pn}^* \alpha_n^2 e^{-\alpha_n^2 \tilde{q}_n^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{q}_1 \dot{q}_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \tilde{q}_n \dot{q}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{\ln\left(\frac{1}{2} \tilde{q}_1^2 + \cosh(\tilde{q}_1)\right)} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln\left(\frac{1}{2} \tilde{q}_n^2 + \cosh(\tilde{q}_n)\right)} \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

Multiplicando la matriz diagonal y el vector de la derecha se tienen los siguientes términos:

$$2 \begin{bmatrix} \sqrt{\ln\left(\frac{1}{2} \tilde{q}_1^2 + \cosh(\tilde{q}_1)\right)} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln\left(\frac{1}{2} \tilde{q}_n^2 + \cosh(\tilde{q}_n)\right)} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} k_{p1}^* \alpha_1^2 e^{-\alpha_1^2 \tilde{q}_1^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & k_{pn}^* \alpha_n^2 e^{-\alpha_n^2 \tilde{q}_n^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{\ln\left(\frac{1}{2} \tilde{q}_1^2 + \cosh(\tilde{q}_1)\right)} \tilde{q}_1 \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \sqrt{\ln\left(\frac{1}{2} \tilde{q}_n^2 + \cosh(\tilde{q}_n)\right)} \tilde{q}_n \dot{q}_n \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

$$2 \begin{bmatrix} \sqrt{\ln\left(\frac{1}{2}\tilde{q}_1^2 + \cosh(\tilde{q}_1)\right)} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln\left(\frac{1}{2}\tilde{q}_n^2 + \cosh(\tilde{q}_n)\right)} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} k_{p1}^* \alpha_1^2 e^{-\alpha_1^2 \tilde{q}_1^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & k_{pn}^* \alpha_n^2 e^{-\alpha_n^2 \tilde{q}_n^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{\ln\left(\frac{1}{2}\tilde{q}_1^2 + \cosh(\tilde{q}_1)\right)} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sqrt{\ln\left(\frac{1}{2}\tilde{q}_n^2 + \cosh(\tilde{q}_n)\right)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{q}_1 \dot{\tilde{q}}_1 \\ \vdots \\ \tilde{q}_n \dot{\tilde{q}}_n \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

Se ocupa la propiedad de conmutabilidad para matrices diagonales, de tal forma que se obtiene lo siguiente:

$$2 \begin{bmatrix} \sqrt{\ln\left(\frac{1}{2}\tilde{q}_1^2 + \cosh(\tilde{q}_1)\right)} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln\left(\frac{1}{2}\tilde{q}_n^2 + \cosh(\tilde{q}_n)\right)} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \sqrt{\ln\left(\frac{1}{2}\tilde{q}_1^2 + \cosh(\tilde{q}_1)\right)} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sqrt{\ln\left(\frac{1}{2}\tilde{q}_n^2 + \cosh(\tilde{q}_n)\right)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{p1}^* \alpha_1^2 e^{-\alpha_1^2 \tilde{q}_1^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & k_{pn}^* \alpha_n^2 e^{-\alpha_n^2 \tilde{q}_n^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{q}_1 \dot{\tilde{q}}_1 \\ \vdots \\ \tilde{q}_n \dot{\tilde{q}}_n \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

$$2 \begin{bmatrix} \ln\left(\frac{1}{2}\tilde{q}_1^2 + \cosh(\tilde{q}_1)\right) \\ \vdots \\ \ln\left(\frac{1}{2}\tilde{q}_n^2 + \cosh(\tilde{q}_n)\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{p1}^* \alpha_1^2 e^{-\alpha_1^2 \tilde{q}_1^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & k_{pn}^* \alpha_n^2 e^{-\alpha_n^2 \tilde{q}_n^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{q}_1 \dot{\tilde{q}}_1 \\ \vdots \\ \tilde{q}_n \dot{\tilde{q}}_n \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

Sustituyendo la variable de estado  $\tilde{\mathbf{q}} = -\dot{\mathbf{q}}$  de la ecuación de lazo cerrado, se tiene:

$$-2 \begin{bmatrix} \ln\left(\frac{1}{2}\tilde{q}_1^2 + \cosh(\tilde{q}_1)\right) \\ \vdots \\ \ln\left(\frac{1}{2}\tilde{q}_n^2 + \cosh(\tilde{q}_n)\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{p1}^* \alpha_1^2 e^{-\alpha_1^2 \tilde{q}_1^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & k_{pn}^* \alpha_n^2 e^{-\alpha_n^2 \tilde{q}_n^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{q}_1 \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \tilde{q}_n \dot{q}_n \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

Por lo tanto, la función de Lyapunov derivada con respecto al tiempo, queda:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) = & \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \begin{bmatrix} \tilde{q}_1 + \sinh(\tilde{q}_1) \\ \frac{1}{2}\tilde{q}_1^2 + \cosh(\tilde{q}_1) \\ \vdots \\ \tilde{q}_1 + \sinh(\tilde{q}_1) \\ \frac{1}{2}\tilde{q}_1^2 + \cosh(\tilde{q}_1) \end{bmatrix}^T \mathbf{K}_p(\tilde{\mathbf{q}}) \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} \\ & - 2 \begin{bmatrix} \ln\left(\frac{1}{2}\tilde{q}_1^2 + \cosh(\tilde{q}_1)\right) \\ \vdots \\ \ln\left(\frac{1}{2}\tilde{q}_n^2 + \cosh(\tilde{q}_n)\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{p1}^* \alpha_1^2 e^{-\alpha_1^2 \tilde{q}_1^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & k_{pn}^* \alpha_n^2 e^{-\alpha_n^2 \tilde{q}_n^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{q}_1 \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \tilde{q}_n \dot{q}_n \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.68)$$

Si se sustituye la variable de estado  $\tilde{\mathbf{q}}$  en la ecuación (3.68) se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) = & \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) M(\mathbf{q})^{-1} \left[ \mathbf{K}_p(\tilde{\mathbf{q}}) \left( \frac{\tilde{\mathbf{q}} + \sinh(\tilde{\mathbf{q}})}{\frac{1}{2}\tilde{\mathbf{q}}^2 + \cosh(\tilde{\mathbf{q}})} \right) - \mathbf{K}_v(\dot{\mathbf{q}}) \left( \frac{\dot{\mathbf{q}} + \sinh(\dot{\mathbf{q}})}{\frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^2 + \cosh(\dot{\mathbf{q}})} \right) - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} - B \dot{\mathbf{q}} \right] \\ & + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \begin{bmatrix} \tilde{q}_1 + \sinh(\tilde{q}_1) \\ \frac{1}{2}\tilde{q}_1^2 + \cosh(\tilde{q}_1) \\ \vdots \\ \tilde{q}_1 + \sinh(\tilde{q}_1) \\ \frac{1}{2}\tilde{q}_1^2 + \cosh(\tilde{q}_1) \end{bmatrix}^T \mathbf{K}_p(\tilde{\mathbf{q}}) \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} \\ & - 2 \begin{bmatrix} \ln\left(\frac{1}{2}\tilde{q}_1^2 + \cosh(\tilde{q}_1)\right) \\ \vdots \\ \ln\left(\frac{1}{2}\tilde{q}_n^2 + \cosh(\tilde{q}_n)\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{p1}^* \alpha_1^2 e^{-\alpha_1^2 \tilde{q}_1^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & k_{pn}^* \alpha_n^2 e^{-\alpha_n^2 \tilde{q}_n^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{q}_1 \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \tilde{q}_n \dot{q}_n \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.69)$$

Al realizar las operaciones se tiene:

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) &= \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{K}_p(\tilde{\mathbf{q}}) \left( \frac{\tilde{\mathbf{q}} + \sinh(\tilde{\mathbf{q}})}{\frac{1}{2}\tilde{\mathbf{q}}^2 + \cosh(\tilde{\mathbf{q}})} \right) - \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{K}_v(\dot{\mathbf{q}}) \left( \frac{\dot{\mathbf{q}} + \sinh(\dot{\mathbf{q}})}{\frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^2 + \cosh(\dot{\mathbf{q}})} \right) - \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{B} \dot{\mathbf{q}} \\
 &+ \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \begin{bmatrix} \tilde{q}_1 + \sinh(\tilde{q}_1) \\ \frac{1}{2}\tilde{q}_1^2 + \cosh(\tilde{q}_1) \\ \vdots \\ \tilde{q}_n + \sinh(\tilde{q}_n) \\ \frac{1}{2}\tilde{q}_n^2 + \cosh(\tilde{q}_n) \end{bmatrix}^T \mathbf{K}_p(\tilde{\mathbf{q}}) \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} \\
 &- 2 \begin{bmatrix} \ln\left(\frac{1}{2}\tilde{q}_1^2 + \cosh(\tilde{q}_1)\right) \\ \vdots \\ \ln\left(\frac{1}{2}\tilde{q}_n^2 + \cosh(\tilde{q}_n)\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{p1}^* \alpha_1^2 e^{-\alpha_1^2 \tilde{q}_1^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & k_{pn}^* \alpha_n^2 e^{-\alpha_n^2 \tilde{q}_n^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{q}_1 \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \tilde{q}_n \dot{q}_n \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.70}$$

Se considera la propiedad de antisimetría  $\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T [\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})] \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$  del modelo dinámico, por lo tanto el desarrollo queda como sigue:

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) &= -\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{K}_v(\dot{\mathbf{q}}) \left( \frac{\dot{\mathbf{q}} + \sinh(\dot{\mathbf{q}})}{\frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^2 + \cosh(\dot{\mathbf{q}})} \right) - \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{B} \dot{\mathbf{q}} \\
 &- 2 \begin{bmatrix} \ln\left(\frac{1}{2}\tilde{q}_1^2 + \cosh(\tilde{q}_1)\right) \\ \vdots \\ \ln\left(\frac{1}{2}\tilde{q}_n^2 + \cosh(\tilde{q}_n)\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{p1}^* \alpha_1^2 e^{-\alpha_1^2 \tilde{q}_1^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & k_{pn}^* \alpha_n^2 e^{-\alpha_n^2 \tilde{q}_n^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{q}_1 \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \tilde{q}_n \dot{q}_n \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.71}$$

Para poder considerar  $\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})$  como semidefinida negativa, se procede a utilizar el teorema de Rayleigh-Ritz, que dice:

$$\lambda_A^{min} \|\mathbf{x}\|^2 \leq \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \leq \lambda_A^{max} \|\mathbf{x}\|^2 \tag{3.72}$$

Donde los valores propios máximo y mínimo de A están denotados por  $\lambda_A^{min}$   $\lambda_A^{max}$ , respectivamente.

La generalización del teorema de Rayleigh-Ritz dice lo siguiente:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{y} \leq \lambda_A^{max} \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \tag{3.73}$$

### Capítulo III

Se utiliza la reducción de la expresión (3.46) en el formalismo matemático. Tomando en cuenta el teorema de Rayleigh-Ritz se tiene que:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\dot{\mathbf{q}} + \sinh(\dot{\mathbf{q}})}{\frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^2 + \cosh(\dot{\mathbf{q}})} \right\| \|\dot{\mathbf{q}}\| \lambda_{\mathbf{K}_v(\dot{\mathbf{q}})}^{MIN} &\leq \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{K}_v(\dot{\mathbf{q}}) \left( \frac{\dot{\mathbf{q}} + \sinh(\dot{\mathbf{q}})}{\frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^2 + \cosh(\dot{\mathbf{q}})} \right) \\ &\leq \left\| \frac{\dot{\mathbf{q}} + \sinh(\dot{\mathbf{q}})}{\frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^2 + \cosh(\dot{\mathbf{q}})} \right\| \|\dot{\mathbf{q}}\| \lambda_{\mathbf{K}_v(\dot{\mathbf{q}})}^{MAX} \end{aligned} \quad (3.74)$$

Donde

$$\left\| \frac{\dot{\mathbf{q}} + \sinh(\dot{\mathbf{q}})}{\frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^2 + \cosh(\dot{\mathbf{q}})} \right\| \leq 2 \quad (3.75)$$

La expresión (3.75) se encuentra acotada por la parte superior con un valor propio máximo y por debajo con un valor propio mínimo, mediante la estructura matemática que ahí se plantea, por lo tanto se considera que es una función positiva.  $\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{f}_v(\mathbf{K}_v, \dot{\mathbf{q}}) > 0$ , por lo tanto, es definida positiva.

Para analizar la última parte de la expresión (3.71) se procederá a realizar la siguiente notación para simplificar el análisis.

$$\left[ \ln \left( \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{q}}^2 + \cosh(\tilde{\mathbf{q}}) \right) \right]^T M_I [\tilde{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}}] \quad (3.76)$$

Donde:

$$\begin{bmatrix} k_{p1}^* \alpha_1^2 e^{-\alpha_1^2 \tilde{q}_1^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & k_{pn}^* \alpha_n^2 e^{-\alpha_n^2 \tilde{q}_n^2} \end{bmatrix} = M_I \quad (3.77)$$

Y

$$\begin{bmatrix} \ln\left(\frac{1}{2}\tilde{q}_1^2 + \cosh(\tilde{q}_1)\right) \\ \vdots \\ \ln\left(\frac{1}{2}\tilde{q}_n^2 + \cosh(\tilde{q}_n)\right) \end{bmatrix} = \ln\left(\frac{1}{2}\tilde{\mathbf{q}}^2 + \cosh(\tilde{\mathbf{q}})\right) \quad (3.78)$$

Y

$$\begin{bmatrix} \tilde{q}_1 \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \tilde{q}_n \dot{q}_n \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} \quad (3.79)$$

Analizando la otra parte de la expresión (3.71), se tiene:

$$\begin{aligned} \left\| \ln\left(\frac{1}{2}\tilde{\mathbf{q}}^2 + \cosh(\tilde{\mathbf{q}})\right) \right\| \|\tilde{\mathbf{q}}\| \|\dot{\mathbf{q}}\| \lambda_{M_i}^{MIN} &\leq \left[ \ln\left(\frac{1}{2}\tilde{\mathbf{q}}^2 + \cosh(\tilde{\mathbf{q}})\right) \right]^T M_i [\tilde{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}}] \\ &\leq \left\| \ln\left(\frac{1}{2}\tilde{\mathbf{q}}^2 + \cosh(\tilde{\mathbf{q}})\right) \right\| \|\tilde{\mathbf{q}}\| \|\dot{\mathbf{q}}\| \lambda_{M_i}^{MAX} \end{aligned} \quad (3.80)$$

Se llega a la conclusión de que la función original está acotada por un valor mínimo de valores  $\lambda_{M_i}^{MIN}$ , y a su vez por un valor máximo de valores  $\lambda_{M_i}^{MAX}$ , lo que equivale a decir que la función es positiva. Siendo más estrictos con la notación encontramos que el primer vector  $\ln\left(\frac{1}{2}\tilde{\mathbf{q}}^2 + \cosh(\tilde{\mathbf{q}})\right)$  está conformado por elementos i-ésimos cada uno de ellos positivos, pues la función coseno hiperbólico crece siempre positivamente en el eje de las ordenadas; aún más cuando se suma a un valor cuadrático. Obtener el logaritmo natural de dicha suma representa un valor positivo. Para los valores propios de la matriz  $M_i$  no es la excepción, pues la función i-ésima de la cual depende su estructura diagonal, presenta elementos que son positivos con una cota, por lo que se obtienen elementos positivos. La multiplicación de los vectores de error y velocidad articular funcionan como un factor cuadrático. Por lo tanto la función es definida positiva.

Por último para la matriz de coeficientes de fricción viscosa  $B > 0$  por la misma estructura matemática que se definió con anterioridad.

Por lo que se concluye estabilidad asintótica, en el punto de equilibrio de la ecuación de lazo cerrado.

# Capítulo 4

En esta sección se presentan los resultados que fueron obtenidos al realizar los experimentos en el robot manipulador de tres grados de libertad.

Los resultados aquí expuestos fueron a su vez presentados en los artículos presentados en diferentes congresos.

## 4.1 Resultados Experimentales

De acuerdo a las ecuaciones de autosintonía que se establecieron en la expresión (2.4), existían parámetros reales a tomar en cuenta para realizar los experimentos pertinentes en el robot manipulador de tres grados de libertad.

Como se mencionó con anterioridad, existen valores constantes que representan el torque máximo que cada servomotor puede suministrar, por lo que se espera que los valores netos sean los que se encuentran en la Tabla 2.1, sin embargo, dado que la función de moldeo de energía mostró un perfil cuyo máximo de dos conforme las variables de estado crecen hacia infinito, los valores de torque máximo tuvieron que ser modificados a aquellos que se encuentran en la Tabla 4.1.

Tabla 4. 1 Ecuaciones de ganancia proporcional y ganancia derivativa.

Ganancias proporcionales automáticas (Nm grad)	Ganancias derivativas automáticas ( $\frac{Nm s}{grad}$ )
$k_{p3} = 2.5(1 - 0.7e^{-0.7\dot{q}_3^2})$	$k_{v3} = 0.5(1 - 0.7e^{-0.7\dot{q}_3^2})$
$k_{p2} = 39(1 - 0.7e^{-0.7\dot{q}_2^2})$	$k_{v2} = 10(1 - 0.7e^{-0.7\dot{q}_2^2})$
$k_{p1} = 4(1 - 0.7e^{-0.7\dot{q}_1^2})$	$k_{v1} = 1.2(1 - 0.7e^{-0.7\dot{q}_1^2})$

## Capítulo IV

Para poder realizar las pruebas con el robot manipulador de tres grados de libertad fue necesario programar el algoritmo de sintonía automática, la ley de control así como las posiciones deseadas para los tres eslabones. Debido a que la estructura de programación del robot es de arquitectura abierta fue posible realizar diversas pruebas, los resultados obtenidos son los siguientes.

Las posiciones deseadas para cada grado de libertad fueron:  $q_{d1} = 90^\circ$ ,  $q_{d2} = 180^\circ$ ,  $q_{d3} = 90^\circ$  las cuales fueron alcanzadas por cada eslabón independientemente como se observa en Figura 4.1.

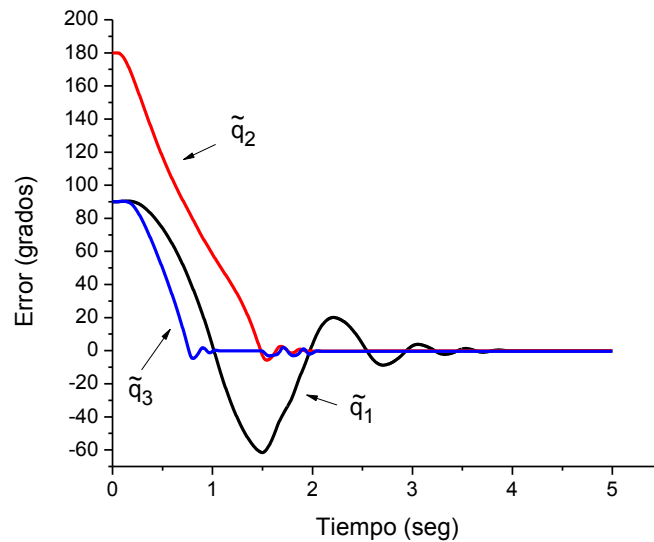


Figura 4. 1 Gráficas de error de posición con respecto del tiempo.

En Figura 4.1 se observa la dinámica de los eslabones en movimiento al alcanzar las distintas posiciones deseadas. A un tiempo posterior de 5 segundos todas las articulaciones han llegado de forma exitosa al punto establecido, satisfaciendo la condición de regulación denotado por (1.1). De acuerdo a la condición de estabilidad un punto del equilibrio funciona como un lugar de atracción de las variables de estado (error de posición y velocidad articular), donde la potencia dinámica de la función de Lyapunov reduce la variación del suministro de energía de forma progresiva y asintótica a cero dentro de las variables de estado.

Se observa un sobreimpulso en todas las articulaciones. La articulación  $q_1$  muestra un pico que llega a los  $40^\circ$  de error negativo y posteriormente reduce asintóticamente la amplitud a cero, debido a la dinámica acoplada de un robot de tres grados de libertad cuya articulación de la base queda gobernada por las otras dos articulaciones (Codo y Hombro) de las cuales depende su movimiento.

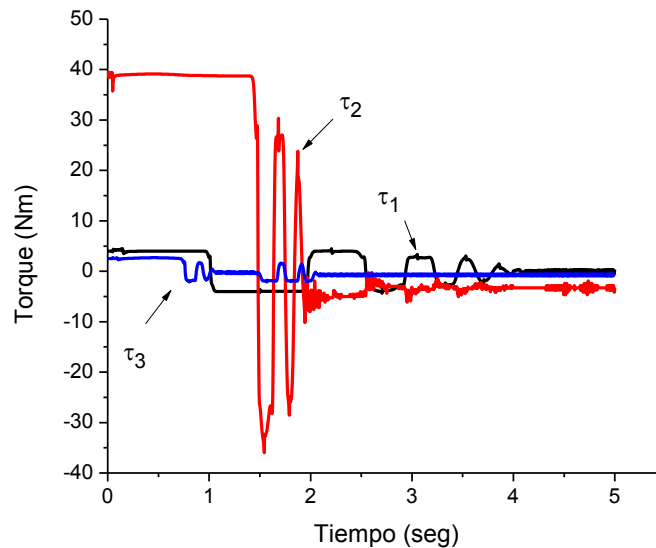


Figura 4. 2 Gráficas de torque con respecto al tiempo.

En la Figura 4.2 se observa el torque suministrado a un robot articular de tres grados de libertad. El torque suministrado en un tiempo inicial tiene una amplitud con valores positivos y conforme el tiempo evoluciona la articulación llega a la posición deseada el error de posición se vuelve negativo cuando existe un desvío de la posición fijada. De acuerdo a la Figura 4.2  $q_3$  tiene un sobreimpulso cerca de 1.9 segundos lo cual coincide con un cambio en el torque, el cual pasó de valores positivos a negativos y posteriormente se mantiene un torque suficiente para mantener la articulación en el lugar establecido. Ocurre lo mismo con  $q_1$  y  $q_2$  con valores alternados de torque una vez existe un error negativo de posición articular.

En Figura 4.3 se observan los torques de cada grado de libertad, los cuales son suministrados a los servomotores de acuerdo a la ley de control. El torque requerido para la posición inicial de cero grados se encuentra delimitado por el máximo permitido de acuerdo a las ecuaciones de sintonía variable; conforme el tiempo avanza la amplitud del torque disminuye y cambia a valores negativos, dicha variación entre valores positivos y negativos se mantiene hasta que el error disminuye al valor en estado estable de la posición deseada; una vez alcanzada la posición deseada el controlador sigue suministrando a cada motor la energía suficiente para que permanezca en un punto fijo del espacio.

En la Fig. 4 y Fig. 5 se observan las ganancias variables correspondientes al controlador utilizado.

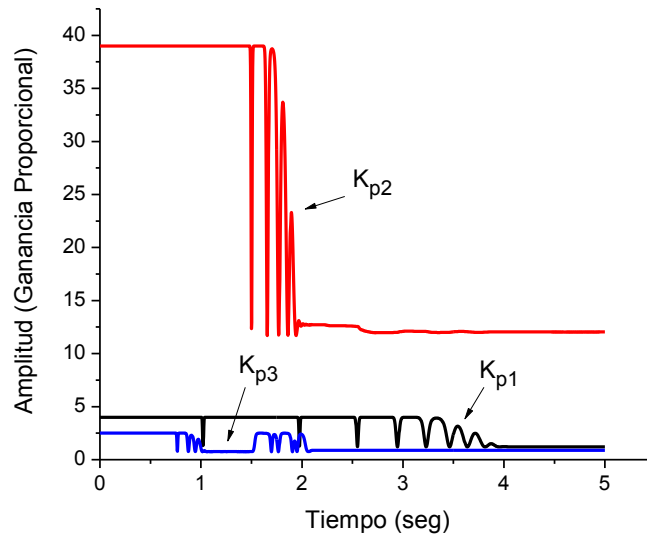
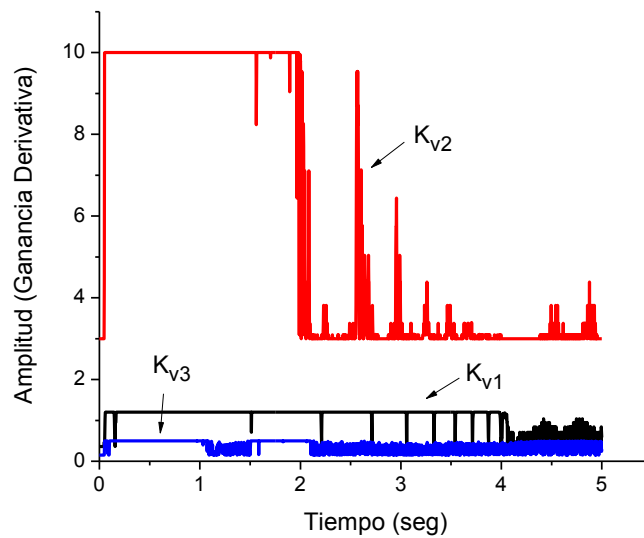


Figura 4. 3 Gráficas de la variación de la ganancia proporcional con respecto al tiempo.



g

Figura 4. 4 Gráficas de la variación de la ganancia derivativa con respecto al tiempo

Se puede observar en Figura. 4.3 y Figura 4.4 que de acuerdo a la función de sintonía variable la ganancia ya sea proporcional o derivativa modifica sus valores de forma acotada, lo cual quiere decir que suministrará un valor máximo permisible de acuerdo al valor torque máximo de cada servomecanismo y tenderá a un número constante o mínimo cuando se alcanzó el estado estable.

## Capítulo IV

Ya sea el nivel de error de posición o la velocidad articular, ambas variables suministran la información necesaria para cada grado de libertad.

A continuación se muestran otros resultados al variar las posiciones deseadas en el robot Rotradi con el propósito de observar el comportamiento de las respuestas.

Las posiciones deseadas para cada grado de libertad fueron  $q_1 = 45^\circ$ ,  $q_2 = 45^\circ$  y  $q_3 = 90^\circ$ , las cuales fueron alcanzadas por cada eslabón independientemente como se observa en Figura 4.5.

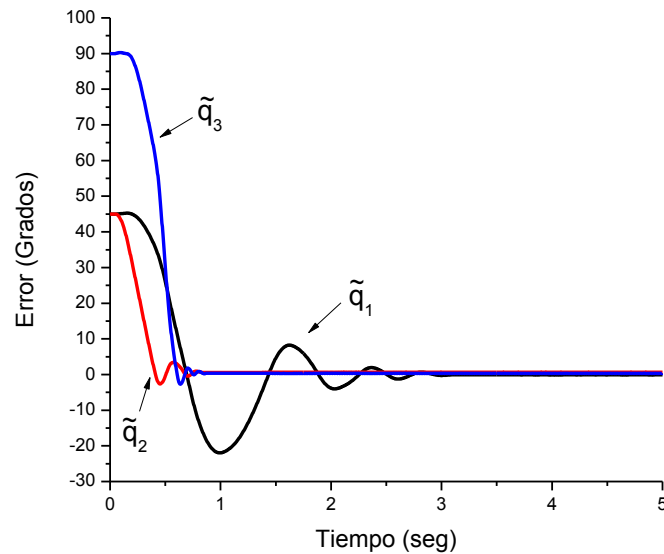


Figura 4. 5 Gráficas de error articular con respecto al tiempo.

En Figura. 4.5 se observa la dinámica de los eslabones en movimiento al alcanzar las distintas posiciones deseadas. A un tiempo posterior de 4 segundos todas las articulaciones han llegado de forma exitosa al punto establecido, satisfaciendo la condición de regulación denotado por (1.1). De acuerdo a la condición de estabilidad un punto de equilibrio funciona como un lugar de atracción de las variables de estado (error de posición y velocidad articular), donde la potencia dinámica de la función de Lyapunov reduce la variación del suministro de energía de forma progresiva y asintótica a cero dentro de las variables de estado.

En la Figura 4.6 se observa el torque suministrado a un robot articular de tres grados de libertad.

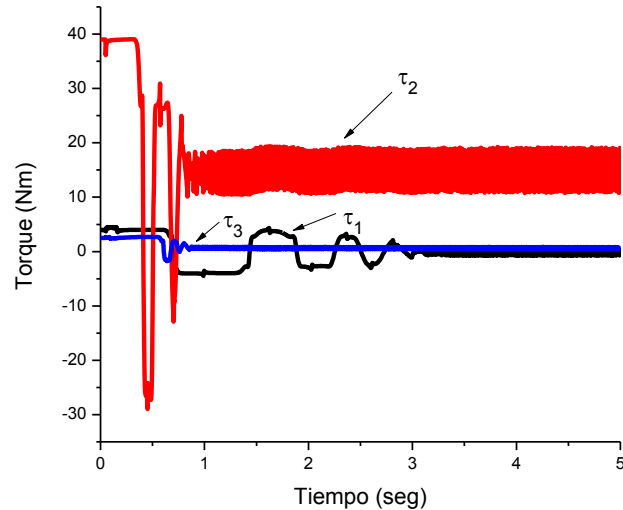


Figura 4. 6 Gráficas de torque con respecto al tiempo.

En la Figura 4.6 se observan los torques de cada grado de libertad, los cuales son suministrados a los servomotores de acuerdo a la ley de control. El torque suministrado en un tiempo inicial tiene una amplitud con valores positivos y conforme el tiempo evoluciona la articulación llega a la posición deseada, el error de posición se vuelve negativo cuando existe un desvío de la posición fijada.

El máximo de los torques está limitado por la ganancia máxima que es posible alcanzar debido al aspecto de regulación de la misma, el cual se definió en las ganancias de la Tabla 2. Por poner un ejemplo, se observa que el torque para el eslabón 2, alcanza un valor máximo entre 0 y 0.5 segundos de 39, lo cual está relacionado con la expresión  $k_{p2}$ . Posteriormente su amplitud decrece y comienza una transición alternante de valores positivos y negativos hasta que llega a una región de cambio persistente, lo que mantiene al eslabón con la energía suficiente para mantenerse fija en un espacio de tres dimensiones. De la misma manera ocurre para el resto de los eslabones y sus respuestas.

En la Figura 4.7 y Figura 4.8 se observan las ganancias variables correspondientes al controlador utilizado.

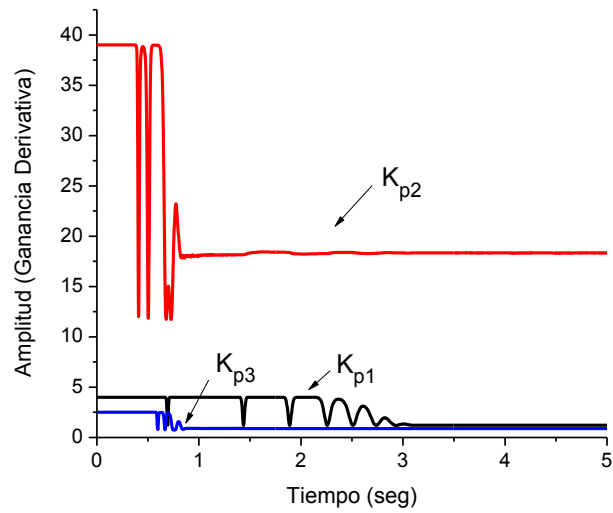


Figura 4. 7 Gráficas de la variación de ganancia proporcional con respecto al tiempo.

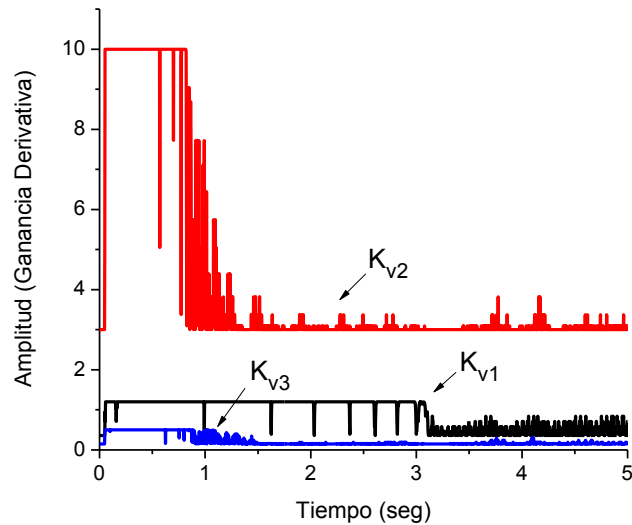


Figura 4. 8 Gráficas de la variación de ganancia derivativa con respecto del tiempo.

Se puede observar en Figura 4.7 y Figura 4.8 que de acuerdo a la función de ganancia variable la ganancia ya sea proporcional o derivativa modifica sus valores de forma acotada, lo cual quiere decir que suministrará un valor máximo permisible de acuerdo al valor torque máximo de cada servomecanismo y tenderá a un número constante o mínimo cuando se alcanzó el estado estable.

## Capítulo IV

Los datos obtenidos del robot manipulador de tres grados de libertad del error de posición, torque y ganancias proporcional y derivativa proporcionaron mediciones del nuevo controlador diseñado a lo largo de esta tesis, sus datos sirven para presentar a la comunidad las respuestas efectivas y su importancia debido a que es un nuevo controlador y funciona correctamente; ahora bien, hablando específicamente de las gráficas de error, es notable observar cada uno de los eslabones llegó a la posición deseada en coordenadas articulares y permanecieron en dicho lugar en forma indefinida, que es uno de los objetivos de regulación de control. Aunando estos dos hechos (estabilidad y un proceso de control de regulación) era necesario realizar una comparación con algún controlador efectivo, de forma que los datos dieran el hincapié para determinar el buen o mal funcionamiento del mismo comparado con respecto al controlador escogido. A continuación se presentan las comparaciones realizadas con el controlador tangente hiperbólico [9] usado en las instalaciones de la Benemérita Universidad de Puebla (BUAP) y cuyos resultados han probado ser hasta la fecha, óptimos y de buena calidad en el tema de control.

En la Figura 4.9 se presentan las comparaciones de cada grado de libertad para dos diferentes controladores, uno de ellos es el controlador que fue diseñado para la presente tesis, el otro es el controlador diseñado por Ortega Mendez Adbiel *et al.* [9] el cual tiene la estructura de la expresión (4.1).

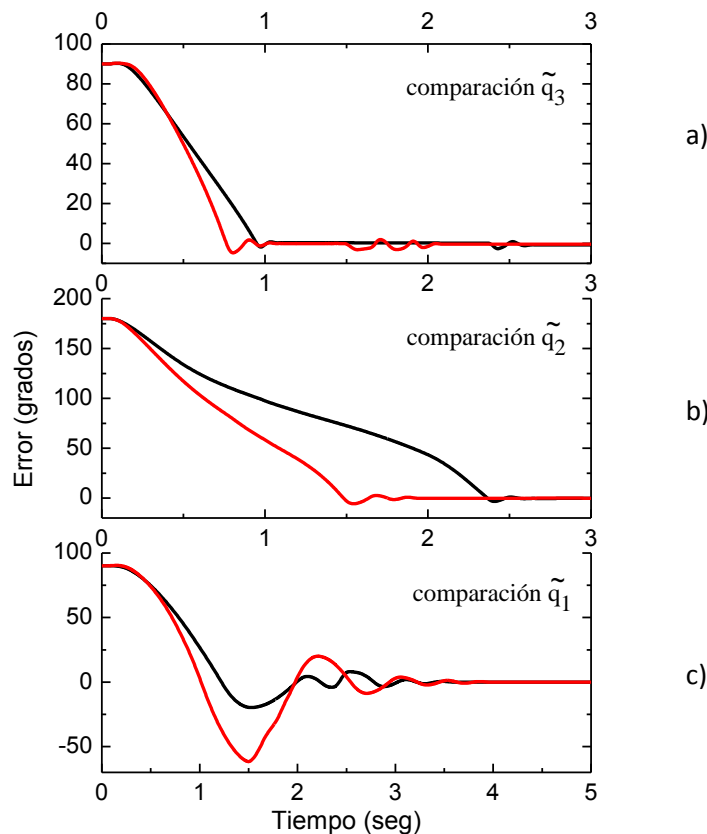


Figura 4. 9 Gráficas de comparación de los errores de posición articular.

$$\tau = K_p(\tilde{q})\tanh(\tilde{q}) - K_V(\dot{q})\tanh(\dot{q}) + g(q) \quad (4.1)$$

donde  $K_p$  y  $K_V$  tiene la misma estructura matemática de las matrices en (3.47) y (3.48).

Las posiciones deseadas para cada grado de libertad fueron:  $q_{d1} = 90^\circ$ ,  $q_{d2} = 180^\circ$ ,  $q_{d3} = 90^\circ$  y los valores de las constantes para las ecuaciones de sintonía fueron para ambos controladores  $\alpha = 0.7$  y  $\beta = 0.7$ , de tal forma que ambos tuvieran los mismos parámetros y se analizaran cuantitativamente sus respuestas.

En los tres tipos de comparaciones de la Figura 4.9 se encuentran dos tipos de colores, las gráficas de color rojo corresponden al controlador diseñado en esta tesis, mientras que aquéllas de color negro se obtuvieron del controlador diseñado por Ortega Mendez Abdiel *et al.* [9]. En Figura 4.9 (a) ambas gráficas presentan un sobreimpulso menor al 1.5% con respecto a una vuelta completa. Se alcanza el estado estable en un tiempo menor a 1.5 s. En Figura 4.9 (b) el controlador tangente hiperbólico alcanza la posición deseada en un tiempo menor a 3 s, mientras que el controlador de esta tesis lo hace en menos de 2 s; el sobreimpulso es menor a 1.5% para ambos casos. En Figura 4.9 (c) los controladores alcanzan la posición deseada en un tiempo menor a 4 s. El sobreimpulso para ambos controladores es menor a 5.5%.

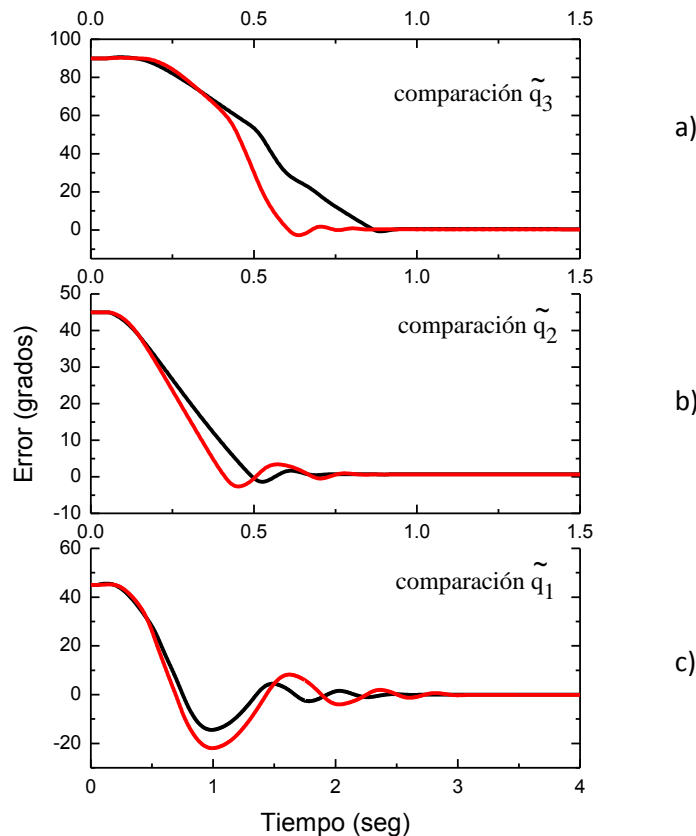


Figura 4. 10 Comparaciones de los dos controladores para cada grado de libertad.

## Capítulo IV

En Figura 4.10 se muestran las comparaciones de los tres grados de libertad cuyas posiciones deseadas fueron  $q_1 = 45^\circ$ ,  $q_2 = 45^\circ$  y  $q_3 = 90^\circ$ . Se considera que  $\alpha = 0.7$  y  $\beta = 0.7$ , al igual que los datos anteriores para tener los mismos parámetros en los controladores para analizar los resultados. En la Figura 4.10 (a) ambas gráficas presentan un sobreimpulso menor al 1% con respecto a una vuelta completa. Se alcanza el estado estable para el controlador aquí estudiado en un tiempo menor a 0.9 s, mientras que el controlador tangente hiperbólico en menos de 1 s. En Figura 4.10 (b) ambos controladores alcanzan la posición deseada en un tiempo menor a 0.9 s, con un sobreimpulso menor a 1%. En Figura 4.10 (c) los dos controladores alcanzan la posición deseada en un tiempo menor a 3 s. El sobreimpulso para ambos controladores es menor a 5.5%.

Una forma más adecuada de medir el rendimiento de un controlador es utilizar la norma  $L_2$  que permite obtener el área bajo la curva de la variable de estado del error y que está descrita por la expresión (4.2).

$$L_2 = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \|\tilde{q}\|^2 dt} \quad (4.2)$$

donde T representa el tiempo durante el cual se realizó el experimento.

La norma  $L_2$  se aplica de forma individual en cada controlador, tomando en cuenta los grados de libertad del mecanismo, de tal forma que al tomar los datos de error articular se obtendrá un valor, el cual indica el índice de desempeño. Los valores se incluyen en una gráfica de barras y dependiendo de la altura se dirá que es de pobre o buen desempeño según sea el caso. Una barra alta indicará una deficiencia del controlador con respecto a otra que tenga una altura de valor reducido, pues de esta forma el controlador responde con mayor efectividad comparado con otro ya que es reducida el área menor por las curvas de error.

Sin embargo la idea de realizar la comparación se llevó un poco más allá y se decidió añadir un controlador Proporcional-Derivativo sin ganancias variables para observar el efecto del cambio de un ajuste automático que se adapta al alcanzar distintas posiciones deseadas. Para realizar la comparación se tomó al controlador Proporcional-Derivativo como si fuera el mejor controlador y observar los efectos de los cambios que existen entre el controlador tangente hiperbólico y el presente controlador diseñado.

Se añadió el controlador Proporcional-Derivativo como un punto de comparación de referencia, sin embargo este mismo no tiene otro sentido más que el mencionado, no se explicará ni se ahondará pues no es el motivo general de ésta tesis.

## Capítulo IV

Pueden observarse los índices de desempeño en la Figura 4.11 y Figura 4.12 para el controlador que se diseñó en la presente tesis, el controlador diseñado por Ortega Mendez Abdiel *et al.* [9] y un controlador Proporcional-Derivativo con ganancias ajustadas empíricamente. Los índices de desempeño son diferentes pues se realizaron los cálculos a partir de los datos suministrados, los cuales pueden ser observados en Figura 4.9 y Figura 4.10.

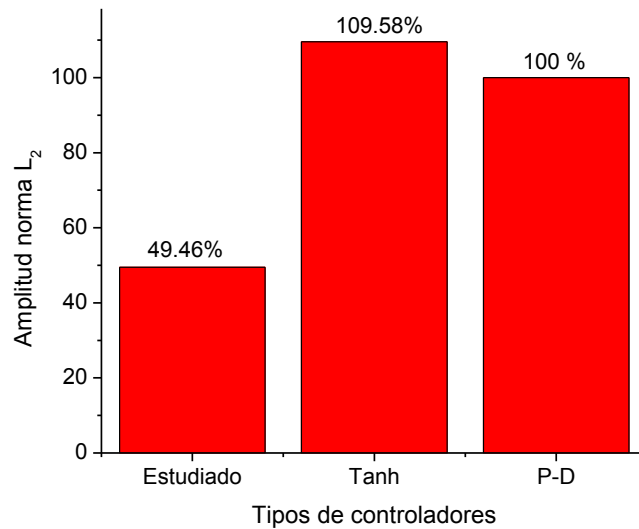


Figura 4. 11 Índice de desempeño para diferentes controladores para las posiciones deseadas especificadas.

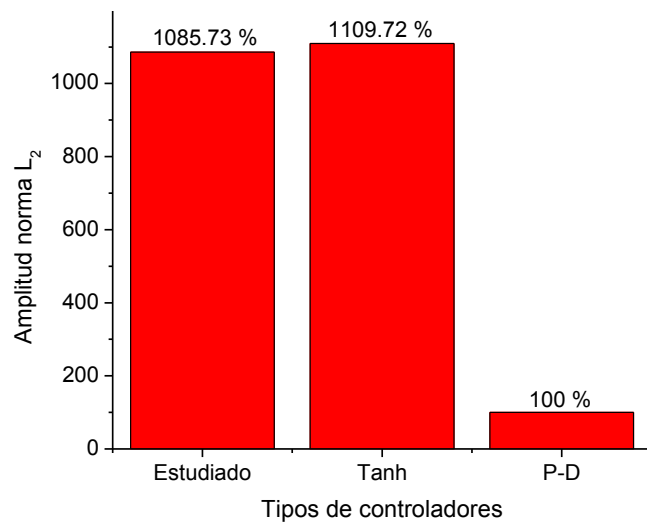


Figura 4. 12 Índice de desempeño para diferentes controladores para diferentes posiciones deseadas.

## Capítulo IV

De acuerdo a los datos obtenidos en la Figura 4.11 se observa que para algunos eslabones con posiciones deseadas entre  $90^\circ$  y  $180^\circ$  el controlador diseñado en la presente tesis tiene un desempeño con una mejoría del 50 % con respecto a un controlador tipo Proporcional-Derivativo, siendo el controlador tangente hiperbólico el que supera en un 9% en altura con respecto al controlador que se tomó como base referencia. Estos datos son significativos ya que dentro de las comparaciones que se realizaron en la Figura 4.9 (b) el eslabón Hombro llegó a la posición deseada con una diferencia de tiempo de 0.79 s con respecto al controlador de comparación tangente hiperbólico, que se considera una reducción de tiempo bastante significativa. Lo mismo ocurre con el eslabón Codo en Figura 4.9 (a) pues existe una diferencia de tiempos de 0.09 s.

Ahora bien, si las posiciones deseadas para algunos eslabones resultan ser menores o iguales  $90^\circ$  se encontró que el controlador aquí estudiado y tangente hiperbólico responden de manera muy similar pues entre ambos existe una variación de 23.99 %. La altura que ambos controladores alcanzan superan en un orden de diez en altura, con respecto al controlador que se estableció como base. Nótese que en Figura 4.10 (b) y (c) la diferencia entre ambos es muy reducida, alcanzando las posiciones deseadas en un margen de tiempo similar, mientras que en Figura 4.10 (a) el contraste es bastante definido en el perfil de las gráficas al desplazarse el eslabón. Pareciera que la diferencia notable existe en el eslabón Base al compararlo contra otro perfil, sin embargo, el resto de las comparaciones muestran diferencias de menor grado; por otra parte al realizar el cálculo de la norma, esas pequeñas variaciones se van agregando toda vez que se realiza el procedimiento de obtención del índice de desempeño en la variable de estado error articular, por lo que si las similitudes son más enmarcadas en un eslabón y en el resto son pequeñas, la suma total termina siendo la comparación de la Figura 4.12.

Una manera de explicar lo ocurrido es hablar de la energía potencial cuyo perfil se observa en la Figura 2.4; de acuerdo al mismo, se observa que la amplitud máxima es de dos unidades; teniendo en cuenta tal idea y comparándola con respecto al perfil del controlador tangente hiperbólico cuya amplitud máxima es unitaria se posee la suficiente energía para competir con un controlador que ha sido hasta la fecha como uno de los predilectos en las instalaciones de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. De acuerdo a los datos obtenidos puede decirse que el controlador diseñado a lo largo de esta tesis tiene facultades para ser usado en temas de control y obtener buenos resultados.

## Conclusiones

De acuerdo a los datos obtenidos en este trabajo está claro que los objetivos de la tesis fueron alcanzados, lo cual se resume en:

- Fue abordado el problema de control de robos manipuladores en coordenadas articulares con autosintonía de ganancias variables.
- Se utilizó un esquema de control de posición para un robot de 3 grados de libertad con ganancias variables.
- Se propuso un método de autosintonía de ganancias variables del esquema de control propuesto.
- Se realizaron experimentos con un robot de 3 grados de libertad.

El resultado principal es haber propuesto una expresión que controla la energía que es inyectada a los diferentes servomotores y que por las mismas características de la función es posible alcanzar cualquier posición deseada dentro de los márgenes de funcionamiento físico del mecanismo.

No dejando de lado los resultados obtenidos y proporcionados en las distintas gráficas se puede decir que:

- De acuerdo a los datos obtenidos experimentales se encontró que el controlador propuesto cumple con las características de la metodología de moldeo de energía, al tener un único mínimo global, ser una función definida positiva.
- Al proponer un controlador con funciones de sintonía automática que están acotadas, el máximo torque no supera los límites físicos del servomecanismo.
- De acuerdo a los datos obtenidos todos los eslabones responden en un tiempo menor a 6 segundos.
- El algoritmo funciona para un robot de 3 grados de libertad, por lo que puede ser implementado para n-grados de libertad.

Dentro de los resultados de comparación fue posible constatar que el controlador aquí diseñado funciona de forma adecuada para todos los distintos puntos a los que se les asignó cada eslabón. Hablando específicamente de las posiciones deseadas para ángulos mayores o iguales a  $90^\circ$ , las mediciones arrojaron una eficiencia del 50% con respecto a un eje de referencia; mientras que cuando las posiciones deseadas menores o iguales a  $90^\circ$  los índices mostraron un índice de efectividad bastante parecido al controlador tangente hiperbólico, lo que lo hace competitivo desde el punto de vista de control de regulación y un posible candidato para utilizarlo en estos aspectos.

Conclusiones

## **Trabajo a futuro**

Desde el punto de vista de este trabajo aún hay mucho que hacer, debido a que principalmente el tema de control de regulación está abierto todavía a debate y análisis pues existen miles de funciones que no han sido probadas y que pueden tener un desempeño de mejor calidad y rapidez, cumpliendo el objetivo de propuesto.

Cabe decir que aún se está trabajando para desarrollar un algoritmo más eficaz que sea programado como rutina y que tome en cuenta sólo un dato a ser ingresado en el algoritmo de control, de forma que calcule de forma precisa los valores de ganancia para alcanzar las posiciones deseadas con sustento matemático fuerte.

# Publicaciones

*Pistas Educativas, No. ###, #####-##### 20##, México, Instituto Tecnológico de Celaya.*

---

## Control de ganancias variables para robots de n-grados de libertad

**Oscar Ramos Arroyo<sup>1</sup>, Fernando Reyes Cortés<sup>2</sup>, Maria Aurora Diozcora Vargas Treviño<sup>3</sup>, Sergio Vergara Limon<sup>4</sup>**

Facultad de Ciencias de la Electrónica, Maestría en Ciencias de la Electrónica opción Automatización, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla Institución, Av. San Claudio y 18 Sur C.U. Edificio 129. Col. San Manuel. Puebla, Pue. C.P. 72570, 01 (222) 229 5500 ext. 7411

*oscar\_racso2@hotmail.com<sup>1</sup>, ref62@gmail.com<sup>2</sup>, auroravargast@hotmail.com<sup>3</sup>, coordinador.mcea.fce.buap@gmail.com<sup>4</sup>*

### Resumen

En este artículo se aborda el problema de sintonía de ganancias variables para un controlador tipo proporcional derivativo más compensación de gravedad. Se presentan los datos obtenidos a partir del movimiento de los eslabones de un robot de tres grados de libertad tipo articular, de acuerdo a una ley de control de diseño que cumple las características de una función de Lyapunov, además de una función que sintoniza las ganancias del controlador proporcional derivativo de forma automática.

**Palabra(s) Clave(s):** Función de Lyapunov, Ganancia variable, Moldeo de energía.

### 1. Introducción

Los procesos automáticos involucran cada vez más robots en los procesos industriales. El uso de los mismos requiere de estructuras matemáticas que regulen sus movimientos. Los controladores tipo PD han servido al propósito establecido, lo cual involucra el manejo de sintonía por parte de sus ganancias del controlador. Para sintonizar las ganancias existen diferentes métodos en la literatura, entre ellas se encuentran el método fuzzy, gain shedding, redes neuronales, entre otras técnicas que se han propuesto para elegir las ganancias

---

**Pistas Educativas Año ##### - ISSN 1405-1249**  
Certificado de Licitud de Título 6216; Certificado de Licitud de Contenido 4777; Expediente de Reserva 6 98 62  
<http://pistaseducativas.itc.mx>

~ 1 ~

# Publicaciones



La Universidad Autónoma Metropolitana Azcapotzalco a través de la  
División de Ciencias Básicas e Ingeniería y la Universidad Autónoma de San Luis  
Potosí

Otorgan la presente  
**CONSTANCIA**

a:

**Oscar Ramos Arroyo**

Por haber participado como expositor del artículo titulado:


Control de ganancias variables para robots de n-grados de libertad

Presentado en la XI Semana Nacional de Ingeniería Electrónica

San Luis Potosí, S.L.P. a 9 de octubre de 2015

  
Dr. Luis Enrique Noreña Franco  
Director de la División de CBI  
Universidad Autónoma Metropolitana-Azcapotzalco

  
Dr. Miguel Mégos Rivera  
Presidente del Comité Organizador  
Senie 2015

  
Fis. Jorge Alejandro Ochoa Cardiel  
Director de la Facultad de Ciencias  
Universidad Autónoma de San Luis Potosí

# Publicaciones

## Variable Control Gains for P-D controller for Robot Manipulators

Oscar Ramos Arroyo<sup>1</sup>, Fernando Reyes Cortés<sup>2</sup>, María Aurora Diozcora Vargas Treviño<sup>3</sup>, Sergio Vergara Limón<sup>4</sup>

*Facultad de Ciencias de la Electrónica, Maestría en Ciencias de la Electrónica opción Automatización.*

*Benemérita Universidad Autónoma de Puebla*

*oscar\_racso2@hotmail.com<sup>1</sup>, ref62@gmail.com<sup>2</sup>, auroravargast@hotmail.com<sup>3</sup>,  
coordinador.mcea.fce.buap@gmail.com<sup>4</sup>*

### Abstract

*In this work we present the problem of tuning gains for type P-D controller with gravity compensation on a robot of three degrees of freedom. A function for the proportional and derivative gains modifies the amplitude to be adjusted depending on the value of the variables on which it depends. We present the demonstration of stability for the controller. Experimental results of the proposed controller are presented, and a comparison between the data and the data obtained in a previous study was presented.*

**Keywords**—Control law, Lyapunov function, variable gain.

### 1. Introduction

Several techniques have been proposed to tune the gains for a specific control law. In the literature were proposed and used fuzzy control, neural networks, gain scheduling. Our proposal includes a P-D controller with gravity compensation type with variable gains, where profit includes a positive type bounded function whose maximum value corresponds to the maximum torque limit of the servomotor [1].

In a previous work Abdiel Méndez et. al [2] were proposed a hyperbolic tangent control law and use the same variable gain tuning structure, so the purpose of this work is making a comparison with a new control structure to monitor their performance against a robust controller with the same automatic tuning function. Specifically, the proposed control scheme comply the objective function control, so it was proposed regulation by providing a torque considering the limits of the actuators. Demonstration of stability for the closed-loop system is also presented. Similarly in this paper the experimental results are shown to compare

both answers using  $L_2$  norm as well as graphs showing the evolution of the variable gains.

### 2. Robot dynamics

A robot of n-degrees of freedom is described by mathematical equation [3] for the kinematic model in (1).

$$\tau = M(\mathbf{q})\mathbf{q}'' + C(\mathbf{q}, \mathbf{q}')\mathbf{q}' + B\mathbf{q}' + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (1)$$

Where  $\mathbf{q}, \mathbf{q}', \mathbf{q}'' \in R^n$  represent the vector positions, velocity and acceleration articular, respectively.

$M(\mathbf{q}) \in R^{n \times n}$  is the inertia matrix, a symmetric positive definite matrix.

$C(\mathbf{q}, \mathbf{q}') \in R^{n \times n}$  is the matrix of centripetal and Coriolis forces.

$B \in R^{n \times n}$  is the coefficient matrix of viscous friction that each robot joint.

$\mathbf{g}(\mathbf{q}) \in R^n$  is the vector of pairs gravitational forces or by the action of gravity.

The control law of molding energy methodology [4]-[5]-[6] is used is as follows.

$$\tau = \nabla U_a(K_p, \tilde{\mathbf{q}}) - \mathbf{f}_v(K_v, \mathbf{q}) + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (2)$$

Where:

$\nabla U_a(K_p, \tilde{\mathbf{q}})$  is the gradient of the potential energy.

The function  $U_a(K_p, \tilde{\mathbf{q}})$  is called artificial potential energy because energy is design.

$\mathbf{f}_v(K_v, \mathbf{q})$  is the function of mechanical brake.

$\mathbf{g}(\mathbf{q})$  represents the torque compensation of gravity.

## Publicaciones



**ICMEAE**  
INTERNATIONAL CONFERENCE ON MECHATRONICS, ELECTRONICS AND AUTOMOTIVE ENGINEERING

El Intituto de Ingenieros de Morelos (IIM), el Centro de Investigación en Ingeniería y Ciencias Aplicadas (CIICAp) y el Instituto de Ingenieros en Eléctrica y Electrónica (IEEE)

otorgan el presente

# RECONOCIMIENTO

Oscar Ramos Arroyo

Por su valiosa participación como ponente en el Congreso Internacional de Ingeniería Mecatrónica, Electrónica y Automotriz, presentando el artículo:

Variable Control Gains for P-D controller for Robot Manipulators

que se llevó a cabo del 24 al 27 de Noviembre de 2015 en la ciudad de Cuernavaca, Morelos.



**Ing. Leoncio Aguilar Negrete**  
Director General del Instituto de Ingenieros de Morelos



**Dr. Francisco Ponce Maldonado**  
Presidente del IEEE Sección Morelos



**Dr. Pedro Antonio Márquez Aguilar**  
Director del Centro de Investigación en Ingeniería y Ciencias Aplicadas



**U.A.E.M.**  
CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN INGENIERÍA Y CIENCIAS APLICADAS



## TOEFL ITP Score Report

Name of Institution: FACULTAD DE LENGUAS DE LA BUAP

Name: RAMOS OSCAR

DOB: 01/01/1970

Native Country: Mexico

Native Language: Spanish

Scaled Scores:

Student Number: 213470694

Times Taken TOEFL: None

Sex: M

Degree:

Listening Comprehension: 55

Structure & Written Expression: 44

Reading Comprehension: 49

Total Score: 493

Test Date: 08/28/2015

Form: TOEFL ITP



The face of this document has a security embossment. The emboss contains a watermark. Hold at an angle to view.

The TOEFL® ITP Assessment Series is designed to be used for placement, progress monitoring, and exit purposes. TOEFL® ITP scores can also be used for admissions to programs and institutions where English is not the dominant language of instruction for content courses. Learn more at [www.ets.org/toefl\\_ip](http://www.ets.org/toefl_ip).

108518-1867-2 • PS-23 49200 • Printed in U.S.A.

LN: 770462

Student's File Copy  
Do Not Copy

Copyright © 2012 by Educational Testing Service.

## Referencias

- [1] W. K. Ho, Y. Hong, A. Hansson, H. Hjalmarsson, J.W. Deng, "Relay auto-tuning of PDI controllers using iterative feedback tuning," *Automatica* 39, pp 149 – 157, 2003.
- [2] Y. Nishikawa, N. Sannomiyam T. Ohta, H. Tanaka, "A method for auto-tuning of PID control parameters", *Automatica*, 20 (3), pp 312 – 332, 2003.
- [3] K. J. Åström, T. Hägglund, "PIF Controllers: theory, Design, and Tuning", Instrument Society of America, 1995.
- [4] V. Bobál, J. Böhm, J. Fessl, *Digital Self-tuning Controllers – Algorithms, Implementation and Applications*, Springer-Verlag London Limited, 2005.
- [5] J. S. Mijares, V. Santibanez, J. L. M. Medina, "A Globally Asymptotically Stable Nonlinear PID Regulator with Fuzzy Self-tuned PD Gains, for Robot Manipulators", *World Automation Congress*, pp 573-578, 2014.
- [6] F. G. Salas, V. Santibanez, M. A. Llama, "Variable Gains PD Tracking Control of Robot Manipulators: Stability Analysis and Simulations", *World Automation Congress*, pp 1-6, 2012.
- [7] R. Kelly, V. Santibáñez, "Control de movimiento de robots manipuladores, vol I, México: Prentice Hall, 2003.
- [8] F. R. Cortés, "Robótica, Control de Robots Manipuladores", Alfaomega Grupo Editor, Primera edición, México, 2011.
- [9] O. M. Abdiel, R. C. Fernando, V. T. Aurora, V. L. Sergio, "Control tangente hiperbólico con ganancia variable", *Asociación Mexicana de Mecatrónica*, pp 45-47, 2013.
- [10] H. S. Liu, S. Q. Zhu, "A Generalized Trajectory Tracking Controller for Robot Manipulators with Bounded Inputs", *Journal of Zhejiang University Science A*, vol 10 (10), pp 1500-1508, 2009.
- [11] J. M. Cervantes, F. Reyes, J. Bedolla, "Global Stability of A Regulator For Robot Manipulators", *International Journal of Robotics and Automation*, vol 3, pp 220-232, 2012.
- [12] F. Reyes, J. Cid, M. A. Limon, M. CervantesG, "Square Root –The Control for Robot Manipulators", *International Journal of Advanced Robotics Systems*, vol 10, 39, 2013.