



**BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA**  
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA ELECTRÓNICA  
MAESTRÍA EN CIENCIAS DE LA ELECTRÓNICA  
OPCIÓN EN AUTOMATIZACIÓN

**“Control de ganancias variables basado en dinámica convergente con aplicaciones en servomecanismos”**

# **T E S I S**

Presentada para obtener el título de:  
**Maestro en Ciencias de la Electrónica, Opción en Automatización**

Presenta:

**Ing. Lorenzo Lázaro González Romeo\***

Directores:

Dr. Rodolfo Reyes Báez (RUG\*\*)

Dra. Olga Guadalupe Félix Beltrán (FCE-BUAP)

Dr. Jaime Julián Cid Monjaraz (BUAP)

**Puebla, México.**

**Septiembre 2020**

\* Becario CONACYT.

\*\* University of Groningen.

**BUAP**<sup>®</sup>



# Agradecimientos

A la Dra Olga por brindarme la oportunidad de ingresar a la Maestría en Ciencias de la Electrónica opción Automatización (MCEA), por confiar en mí y guiarme como una madre durante todo este trayecto.

A mi hermana Dunia, que sin su apoyo hubiese sido imposible tan siquiera plantearme emprender este camino.

A toda mi familia en Cuba y en especial a mis padres, que desde la distancia han sido un bastón fundamental para no perder la motivación y que no pesara tanto la distancia.

A mi esposa Annel, que desde que nos conocimos ha sido parte vital de toda esta experiencia, acompañándome en mis desveladas, en las alegrías y en las reprobadas, y por absorber parte de todo mi estrés, siendo más que mi esposa, mi compañera y mi mejor amiga.

A Calixto y Marisela, por acogerme como un hijo desde mi llegada a México sin ni siquiera conocerme, por en todo momento estar al pendiente de mí y por brindarme en su casa siempre un rinconcito de Cuba.

A toda mi nueva familia en México, en especial a Lizzi, Alan y los Betos, por hacerme sentir parte de ellos como hijo y como hermano.

A mis asesores de tesis por tantos consejos que me regalaron, y al Dr Fermi, que a pesar de que no le tocaba me brindó un apoyo incondicional y desinteresado en todo momento.

A todos los amigos nuevos que conocí en México, en especial a Jorge por brindarme una verdadera amistad.

A mis amigos que dejé en Cuba y los que ya no están allá.

A Mine y Alejandra por permitirme entrar en su casa y haberme brindado mi primer hogar en México.

A CONACYT por el apoyo económico durante el transcurso de la maestría. A la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP), en particular la Facultad de Ciencias de la Electrónica (FCE) por abrirme las puertas para llevar a cabo mis estudios de posgrado, así como a los sinodales por sus

---

recomendaciones y comentarios a lo largo del desarrollo de la tesis.

# Dedicatoria

*Esta tesis va dedicada especialmente a mi mamá y a mi papá, que desde niño me inculcaron el hábito de estudio y de llegar académica y profesionalmente lo más lejos que pudiese; por en la medida de sus posibilidades darme todas las facilidades para que mi única preocupación fuese estudiar, y que por más temerosos y preocupados que estuviesen por mi deseo de salir a estudiar al extranjero, de irme de su casa y definitivamente de sus brazos, no dejaron de apoyarme para cumplir mis sueños, esta tesis y este título es de ustedes también...*

# Resumen

En este trabajo de tesis se realiza la implementación experimental de controladores de ganancia variable basados en dinámica convergente, en un robot manipulador de un grado de libertad (péndulo) y en un sistema de estabilización láser. Para esto primeramente se lleva a cabo un estudio sobre la teoría del análisis de contracción, su origen, fundamentos, aplicaciones y su relación con los sistemas convergentes, así como las principales propiedades de estos. También es presentada la teoría diferencial de Lyapunov, siendo esta la herramienta principal para el diseño de los controladores presentados en este trabajo, así como para la demostración de la convergencia de las trayectorias de cada sistema estudiado en lazo cerrado.

Luego de presentado el marco teórico en el que se sustenta este trabajo de tesis, a partir de la aplicación de la metodología de Euler-Lagrange se obtiene el modelo dinámico del péndulo. Con este modelo se realiza el diseño de un controlador de ganancia variable basado en dinámica convergente para dicho sistema en lazo cerrado. Seguidamente se muestra la implementación experimental del controlador mencionado a través de una tarjeta Arduino Due, y mediante gráficas se presentan los principales resultados obtenidos. La función de ganancia variable presente en el controlador diseñado es reemplazada por una nueva propuesta con el fin de mejorar el desempeño en lazo cerrado, realizándose simulaciones en MATLAB/Simulink para varios escenarios propuestos. Se lleva a cabo el análisis de desempeño del controlador diseñado, para cada escenario caso de estudio mediante las normas RMS y  $\mathcal{L}_2$ . Los resultados de desempeño obtenidos con dichas normas se comparan con los arrojados por otros cinco controladores, estos son un Proporcional Derivativo (PD), dos de ganancias variables encontrados en la literatura, el propio controlador diseñado sin la presencia de la ganancia variable, y este con la primera función de ganancia variable propuesta, cada uno sometido a los diferentes casos de estudio propuestos.

Del sistema de estabilización láser se realiza una breve descripción de su principio de funcionamiento y los componentes que lo conforman. Se obtiene el modelo dinámico del actuador de este sistema en espacio de estados y para el mismo se diseñan dos controladores de ganancia variable basados en contracción. El primero de estos se simula en MATLAB/Simulink, y el segundo se le incorpora una acción integral y se implementa experimentalmente. En ambos casos se somete el sistema a diferentes escenarios y se obtiene el desempeño con las normas RMS y  $\mathcal{L}_2$ . Los resultados obtenidos en materia de desempeño con ambos controladores diseñados, se comparan a los de otros cuatro, estos son un Proporcional Integral Derivativo (PID), otro de retroalimentación de estados con observador (OBSF), uno lineal cuadrático gaussiano (LQG) y los controladores diseñados sin la inclusión de la ganancia variable, esto para cada caso de estudio propuesto.

# Índice general

Índice de figuras	VII
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Objetivos	2
1.1.1. Objetivo general	2
1.1.2. Objetivos particulares	2
1.2. Justificación	3
1.3. Modelado matemático de servomecanismos	3
1.3.1. Ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange	4
<b>2. Análisis de contracción</b>	<b>6</b>
2.1. Sistemas no lineales	6
2.2. Sistemas convergentes	8
2.2.1. Propiedades básicas	8
2.2.2. Aplicaciones	10
2.3. Análisis de contracción geométrico diferencial	11
2.4. Análisis de contracción mediante normas matriciales	12
2.5. Estabilidad incremental	14
2.6. Teoría diferencial de Lyapunov	15
2.6.1. Análisis mediante métricas Riemannianas	18
2.6.2. Análisis mediante normas matriciales	18
<b>3. Sistema péndulo</b>	<b>19</b>
3.1. Robot manipulador de 1 grado de libertad (péndulo)	19
3.1.1. Servomotor de transmisión directa	20
3.2. Modelo dinámico del péndulo	21
3.2.1. Modelado mediante ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange	22
3.3. Diseño del controlador y análisis de contracción del péndulo en lazo cerrado	23
3.4. Implementación experimental del controlador de ganancia variable	28
3.5. Resultados experimentales	32
3.6. Resultados en simulación	34
3.6.1. Análisis de desempeño	37
<b>4. Sistema de estabilización de haz láser</b>	<b>40</b>
4.1. Principio de funcionamiento	40
4.2. Componentes del sistema LBS	41
4.2.1. Fuente Láser	43

---

4.2.2.	Espejo de direccionamiento rápido (FSM) y bobina de voz . . . . .	43
4.2.3.	Perturbación deslizando . . . . .	44
4.2.4.	Detector Sensible a la Posición (PSD) . . . . .	45
4.2.5.	Tarjeta Amplificadora/Interfaz Quanser LBS . . . . .	46
4.2.6.	Tablero Terminal QPID . . . . .	47
4.2.7.	Tarjeta de Adquisición de Datos (DAQ QPID) . . . . .	48
4.3.	Modelo dinámico de la bobina de voz . . . . .	49
4.4.	Diseño del controlador y análisis de contracción del sistema LBS en lazo cerrado . . . . .	50
4.5.	Resultados en simulación . . . . .	54
4.5.1.	Análisis de desempeño . . . . .	57
4.6.	Diseño del controlador con acción integral y análisis de contracción del sistema LBS en lazo cerrado . . . . .	58
4.7.	Resultados experimentales . . . . .	64
4.7.1.	Análisis de desempeño . . . . .	66
<b>5.</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>70</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>72</b>
	<b>Anexos</b>	<b>75</b>
<b>A.</b>	<b>Programas desarrollados para el control de los servomecanismos empleados</b>	<b>76</b>
A.1.	Programa en Arduino para el control del péndulo . . . . .	76
A.2.	Programa en MATLAB/Simulink para las simulaciones del sistema péndulo . . . . .	78
A.3.	Programa en MATLAB/Simulink para el control del sistema LBS . . . . .	81
<b>B.</b>	<b>Participación en eventos científicos y artículos realizados</b>	<b>85</b>

# Índice de figuras

1.1. Comportamiento deseado de una función de ganancia variable. . . . .	2
2.1. Diagrama en bloques de un sistema no lineal. . . . .	7
2.2. Sistema no lineal con soluciones crecientes y no acotadas. . . . .	7
2.3. Sistema no lineal con soluciones acotadas. . . . .	7
2.4. Sistema no lineal con solución convergente. . . . .	8
2.5. Sistema con entrada y solución constante. . . . .	9
2.6. Sistema con entrada y solución periódica. . . . .	9
2.7. Conexión paralelo de un sistema uniformemente convergente. . . . .	10
2.8. Conexión serie de un sistema entrada a estado convergente. . . . .	10
2.9. Desplazamiento virtual de las trayectorias de un sistema convergente. . . . .	11
2.10. Segmento de recta que une a dos trayectorias de un sistema no lineal. . . . .	12
2.11. Ilustración gráfica de la distancia inducida por la condición (2.29). . . . .	17
3.1. Robot manipulador de 3 grados de libertad (g.d.l). . . . .	19
3.2. Amplificador electrónico DYNASERV de 3ra generación. . . . .	21
3.3. Señales de salida del encoder óptico. . . . .	21
3.4. Péndulo representado en coordenadas cartesianas. . . . .	22
3.5. Tarjeta Arduino Due. . . . .	28
3.6. Señales provenientes del encoder ubicado en el servomotor del péndulo. . . . .	29
3.7. Circuito de acoplamiento del encoder del péndulo a las entradas analógicas del Arduino Due. . . . .	29
3.8. Circuito para eliminar offset del DAC1 del Arduino Due. . . . .	30
3.9. Circuito para la amplificación de la tensión de salida del DAC1 del Arduino Due. . . . .	30
3.10. Electrónica implementada para el acoplamiento del Arduino Due con el encoder del péndulo y con la entrada de control del robot. . . . .	31
3.11. Caracterización del DAC1 del Arduino Due. . . . .	31
3.12. Algoritmo general para el control del péndulo del robot de 3 g.d.l. . . . .	32
3.13. Comportamiento en lazo cerrado del péndulo. . . . .	33
3.14. Simulación del error de posición en lazo cerrado. . . . .	35
3.15. Simulación del torque generado por el servomotor del péndulo. . . . .	36
3.16. Simulación de la ganancia variable vs velocidad. . . . .	36
3.17. Desempeño de varios controladores en diferentes situaciones con la norma RMS. . . . .	38
3.18. Desempeño de varios controladores en diferentes situaciones con la norma $\mathcal{L}_2$ . . . . .	39
4.1. Principio de funcionamiento del sistema LBS. . . . .	41
4.2. Diagrama de bloques general del sistema LBS. . . . .	41
4.3. Componentes del sistema LBS. . . . .	42

---

4.4. Fuente estática láser. . . . .	43
4.5. Espejo de direccionamiento rápido (FSM). . . . .	44
4.6. Subsistema de perturbación deslizante. . . . .	44
4.7. PSD bidimensional instalado en el sistema LBS. . . . .	45
4.8. Acoplamiento de señales del PSD. . . . .	46
4.9. Tarjeta Amplificadora/Interfaz Quanser LBS. . . . .	47
4.10. Tablero Terminal QPID. . . . .	48
4.11. Tarjeta de adquisición de datos DAQ QPID. . . . .	49
4.12. Lazo de control para sistema LBS. . . . .	49
4.13. Simulación del error de posición vs tiempo. . . . .	55
4.14. Simulación de la señal de control vs tiempo. . . . .	56
4.15. Simulación de la ganancia variable vs velocidad. . . . .	56
4.16. Error de posición vs tiempo. . . . .	65
4.17. Señal de control vs tiempo. . . . .	65
4.18. Ganancia variable vs velocidad. . . . .	66
4.19. Gráfico de barras con la norma RMS. . . . .	68
4.20. Gráfico de barras con la norma $\mathcal{L}_2$ . . . . .	69
A.1. Pantalla principal del programa en Simulink para la simulación del sistema péndulo. . . . .	79
A.2. Selección de controladores para la simulación del sistema péndulo. . . . .	80
A.3. Subsistema para la simulación del controlador basado en contracción en el sistema péndulo. . . . .	81
A.4. Pantalla principal del programa en Simulink para el control del sistema LBS. . . . .	82
A.5. Subsistema selector de controlador. . . . .	83
A.6. Subsistema controlador basado en contracción. . . . .	84

# Capítulo 1

## Introducción

Uno de los objetivos primordiales que se persigue al controlar un sistema no lineal, es el empleo de una ley de control que logre mantener constante la salida o valor esperado que se desea en el sistema, a pesar de las variaciones que puedan ocurrir en la entrada, o perturbaciones que puedan afectar al sistema en cuestión. Si en esa ley de control, además se emplean funciones de ganancia variable, estas van a brindar el ajuste automático de las ganancias en función de una variable que se considere, buscándose generalmente que varíen de manera proporcional al error de posición. En otras palabras, la idea básica que sustenta la aplicación de este tipo de funciones en cualquier ley de control radica en que, cuando se tenga un error pequeño, una ganancia pequeña deberá aplicarse para asegurar baja sensibilidad ante ruido de alta frecuencia en las mediciones, consecuentemente, cuando sea grande el error, una ganancia alta se deberá aplicar, asegurando así el rechazo de perturbaciones de baja frecuencia.

Desde la aparición del concepto de *Ganancia Variable* [1], muchas han sido sus aplicaciones en diversas ramas de la automatización, como son el control de robots manipuladores [2], [3], [4], [5], aplicaciones en robótica móvil [6], para la reducción de vibraciones a baja frecuencia del lente de unidades de almacenamiento óptico [7], [8], en vehículos aéreos autónomos [9], para el control no lineal de la suspensión de vehículos terrestres [10], en aplicaciones para sistemas de movimiento en general [11], [12], entre otras. En este trabajo se incorporará además el uso de este tipo de controladores, en un sistema de estabilización de haz láser.

El comportamiento deseado en una función de ganancia variable presente en un controlador de este tipo, es una respuesta simétrica y dependiente de alguna de las variables de estado del sistema, ya sea el error de posición, la velocidad, etc. Se busca que ante un valor máximo de la variable de la que depende la función propuesta, se obtenga un máximo valor de ganancia, y viceversa, por lo que es recomendable proponer funciones definidas positivas para lograr tal propósito. El comportamiento descrito se puede apreciar en la figura 1.1, donde se muestra como ejemplo la gráfica de respuesta de una función con ganancia variable dependiente de la velocidad, ante valores positivos y negativos de esta última.

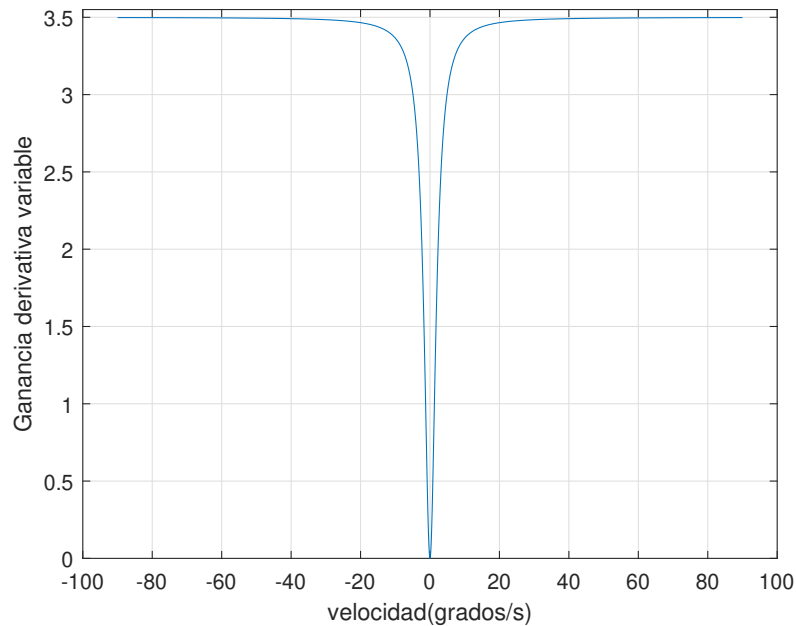


Figura 1.1: Comportamiento deseado de una función de ganancia variable.

## 1.1. Objetivos

### 1.1.1. Objetivo general

Implementar experimentalmente estrategias de control de ganancia variable basadas en análisis de contracción (o sistemas convergentes) en servomecanismos.

### 1.1.2. Objetivos particulares

- Obtener el modelado matemático del servomecanismo.
- Diseñar y simular una ley de control de ganancia variable para servomecanismos.
- Diseñar y simular la interfaz electrónica y programación requerida para servomecanismos.
- Implementar una ley de control de ganancia variable en servomecanismos.
- Publicar los resultados de tesis en revista (arbitrada/indexada) y/o congreso arbitrado.

## 1.2. Justificación

Los sistemas convergentes tienen la propiedad de que, al ser excitados por una entrada acotada, estos tienen una única solución en estado estacionario la cual es acotada y asintóticamente estable [13]. Si existe esta solución en estado estacionario, entonces todas las demás soluciones van a converger a esta solución, independientemente de las condiciones iniciales. Convergencia o contracción implica estabilidad (de un punto de equilibrio) en la ausencia de perturbaciones. En el mismo orden de ideas, este enfoque es adecuado cuando el sistema tiene dinámica no lineal variante en el tiempo, como es en el caso de seguimiento y rechazo de perturbaciones.

La existencia de una única respuesta de estado estacionario permite definir la correspondiente función de respuesta en frecuencia no lineal (FRF, por sus siglas en inglés) para sistemas convergentes [14]. FRF es una función que caracteriza la respuesta de sistemas convergentes ante la excitación de entradas armónicas en varias frecuencias y amplitudes. Esta función FRF extiende la respuesta en frecuencia estándar de sistemas lineales. A diferencia del método de la función descriptiva, el cual solamente da aproximaciones de respuestas en estado estacionario periódicas de sistemas no lineales ante excitaciones armónicas; la FRF no lineal da como resultado una respuesta en estado estacionario exacta ante excitaciones armónicas en varias amplitudes y frecuencias. De forma similar al caso lineal, la FRF da lugar a la versión no lineal de las gráficas de Bode, las cuales proveen información de cómo el sistema convergente amplifica las entradas armónicas de varias frecuencias y amplitudes [14]. Esta información es esencial en el análisis del desempeño del sistema en lazo cerrado convergente, ya que permite cuantificar la influencia del ruido en mediciones en alta frecuencia en la respuesta del estado estacionario del sistema, o como la salida de un sistema en lazo cerrado seguirá a cierta señal de referencia a baja frecuencia.

## 1.3. Modelado matemático de servomecanismos

Un modelo matemático de un sistema real es una representación abstracta realizada en términos de lenguaje y simbología matemática (ecuaciones algebraicas, en diferencias, etc.), la cual resalta propiedades importantes del sistema en cuestión. Este no es único para un sistema determinado, ya que puede representarse de muchas formas diferentes, por lo que se pueden obtener muchos modelos matemáticos. En el caso de modelos matemáticos orientados al diseño de esquemas de control, basta que éste represente el comportamiento y relación de las variables a controlar.

La dinámica de una gran cantidad de sistemas, ya sean mecánicos, eléctricos, térmicos, etc., es posible describirla en términos de ecuaciones diferenciales. Estas se obtienen mediante la aplicación de leyes físicas, como las leyes de Newton para sistemas mecánicos y las leyes de Kirchhoff para sistemas eléctricos [15].

Dependiendo del sistema que se trate y de las circunstancias específicas, un modelo matemático puede ser más conveniente que otros. Puede ser más conveniente utilizar la representación en el espacio de estados en caso de encontrarse un problema de control óptimo, así como la representación mediante la función de transferencia puede ser más acertada para el análisis de la respuesta transitoria o de respuesta en frecuencia de sistemas lineales SISO invariantes en el tiempo. Una vez que se obtiene el modelo matemático de un sistema, se usan diversos recursos analíticos para su estudio y síntesis [15].

### 1.3.1. Ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange

Para obtener el modelo dinámico de un servomecanismo mediante la metodología de Euler-Lagrange, se parte de la expresión que relaciona su energía total  $\mathcal{E}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  con la energía cinética  $\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  y la energía potencial  $\mathcal{U}(\mathbf{q})$ , la que se muestra a continuación [16]:

$$\mathcal{E}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathcal{U}(\mathbf{q}) \quad (1.1)$$

donde  $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$  representan los vectores de posición y velocidad articular respectivamente.

Partiendo de (1.1) se puede plantear el *Lagrangiano*  $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  de un servomecanismo de  $n$  grados de libertad, que se define como la diferencia entre la energía cinética  $\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  y la energía potencial  $\mathcal{U}(\mathbf{q})$ :

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathcal{U}(\mathbf{q}) \quad (1.2)$$

Luego, las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange de un sistema mecatrónico de  $n$  grados de libertad quedan [16]:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right] - \left[ \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} \right] = \boldsymbol{\tau} - \mathbf{f}_f(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{f}_e) \quad (1.3)$$

donde  $\mathbf{q} = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T \in \mathbb{R}^n$  representa el vector de posiciones articulares o coordenadas generalizadas,  $\dot{\mathbf{q}} = [\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n]^T \in \mathbb{R}^n$  es el vector de velocidades articulares,  $\boldsymbol{\tau} = [\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n]^T \in \mathbb{R}^n$  es el vector de pares aplicados, donde el  $i$ -ésimo par  $\tau_i$  se encuentra asociado con la  $i$ -ésima coordenada generalizada  $q_i$ , y  $\mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{f}_e) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de pares de fricción que depende de la velocidad articular  $\dot{\mathbf{q}}$  y de la fricción estática  $\mathbf{f}_e$  presente en las articulaciones del mismo;  $t \in \mathbb{R}_+$  representa el tiempo y  $n \in \mathbb{N}$  es el número de grados de libertad (n.g.l).

La energía cinética tiene una estructura matemática cuadrada en función de la velocidad articular [16]:

$$\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (1.4)$$

donde  $M(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz de inercia del manipulador, y es una matriz definida positiva, y por tanto simétrica. La energía potencial no tiene una forma específica, esta depende exclusivamente de la posición  $\mathbf{q}$ , ya que se considera su presencia a campos conservativos como la fuerza de gravedad.

Luego, las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange pueden escribirse de forma compacta como [16]:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \left[ \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \right] - \frac{\partial \mathcal{U}(\mathbf{q})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (1.5)$$

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right] = M(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left[ \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \right] - \frac{\partial \mathcal{U}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \quad (1.7)$$

Teniéndose luego:

$$\boldsymbol{\tau} = M(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left[ \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \right] + \frac{\partial \mathcal{U}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{f}_f(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{f}_e) \quad (1.8)$$

Finalmente, se puede llegar a la expresión del modelo dinámico de un servomecanismo de  $n$  grados de libertad [16].

$$\boldsymbol{\tau} = M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{f}_f(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{f}_e) \quad (1.9)$$

donde:

- $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$  es el vector de coordenadas generalizadas o posiciones articulares.
- $\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$  es el vector de velocidades articulares.
- $\ddot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$  es el vector de aceleraciones articulares.
- $M(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz de inercia, la cual es simétrica y definida positiva.
- $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz de fuerzas centrípetas y de Coriolis.

$$C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} = \dot{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left[ \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \right] \quad (1.10)$$

- $\mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de fuerzas o pares gravitacionales obtenido como el gradiente de la energía potencial, o sea,  $\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \frac{\partial U(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}$  debido a la acción de la gravedad.
- $\mathbf{f}_f(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{f}_e) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de pares de fricción que incluye la fricción viscosa, de Coulomb y estática ( $\mathbf{f}_e$ ) de cada articulación del servomecanismo.

Este trabajo está organizado como se describe a continuación. En el Capítulo 2 se describen los fundamentos de la teoría del análisis de contracción y los sistemas convergentes, desde sus inicios hasta las últimas vertientes. El Capítulo 3 muestra el sistema péndulo, sus principales componentes, así como su modelo dinámico y la propuesta de controlador de ganancia variable basado en análisis de contracción, mostrándose el diseño de la electrónica necesaria para la implementación del controlador propuesto, los resultados obtenidos tanto con la plataforma experimental, como a nivel simulación y el análisis de desempeño del sistema en lazo cerrado. El Capítulo 4 presenta el sistema de estabilización de haz láser (LBS), su principio de funcionamiento, principales componentes y el modelo dinámico del actuador del sistema, así como la propuesta del control con ganancia variable basado en análisis de contracción, resultados tanto experimentales como a nivel simulación y el análisis del desempeño en lazo cerrado. En el Capítulo 5 se realizan las conclusiones de este trabajo de tesis y seguidamente se muestra la bibliografía empleada. Como Anexos se muestran el programa desarrollado en Arduino para el control del sistema péndulo, así como diferentes interfaces desarrolladas en MATLAB/Simulink para simulación del sistema péndulo y el control el LBS. Como últimos anexos se presentan los resultados académicos alcanzados durante el desarrollo del trabajo de tesis.

# Capítulo 2

## Análisis de contracción

En muchos problemas de control se requiere que los controladores sean diseñados de forma tal que todas las soluciones del sistema en lazo cerrado “olviden” sus condiciones iniciales. Esto quiere decir, que independientemente de la condición inicial, todas las soluciones del sistema deben converger a una única solución en estado estable que va a estar dada únicamente por la entrada del sistema en lazo cerrado, o sea, la referencia o valor deseado. Esta propiedad de convergencia de los sistemas juega un papel importante en muchos problemas de control no lineales [13]. Como herramienta para la demostración matemática de dicha propiedad en el diseño de controladores, el análisis de contracción resulta en una versión incremental del concepto de estabilidad de Lyapunov, en el que la convergencia a una solución específica es reemplazada por la convergencia o contracción entre cualquier par de soluciones, esto brinda una propiedad más fuerte que va a indicar que las soluciones olvidan sus condiciones iniciales [17].

### 2.1. Sistemas no lineales

La mayoría de los sistemas físicos son de naturaleza no lineal, siendo el comportamiento dinámico de estos mucho más rico que el de los sistemas lineales, y su análisis más complicado. Dichos sistemas muchas veces pueden ser aproximados mediante linealización tangente. La aplicación de técnicas de control no lineal permite un mejor entendimiento del sistema físico y por tanto mejores resultados en el control del mismo. La estabilidad es la característica más importante de los sistemas dinámicos y al analizarse la misma en estos sistemas, aparecen diferentes problemas según la manera en que se caracterice el propio sistema en consideración [18].

La riqueza dinámica de los sistemas no lineales involucra diferentes fenómenos que no son evidentes en los sistemas lineales. Uno de ellos es la existencia de múltiples puntos de equilibrio aislados. Los sistemas no lineales pueden tener varios puntos de equilibrio, y la convergencia a uno estable depende del estado inicial [18]. Un caso general de un sistema no lineal se representa en (2.1) y (2.2), donde se muestra un sistema no lineal con una sola entrada y una sola salida [19]:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t), u(t)), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (2.1)$$

$$y(t) = h(\mathbf{x}(t)) \quad (2.2)$$

donde  $\mathbf{x}(t)$  es una función vectorial del tiempo, la cual toma valores en el espacio de n-dimensiones y representa el estado del sistema,  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t)$  es una función escalar del tiempo y toma valores en

la recta real  $u(t) \in \mathbb{R}$ . La variable  $y(t)$  es también una función escalar del tiempo y representa la salida del sistema,  $y(t) \in \mathbb{R}$ . Las funciones  $f(\cdot)$  y  $h(\cdot)$  son funciones continuas, diferenciables al menos una vez con respecto a cada uno de sus argumentos, definidas de tal forma que  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

El sistema no lineal descrito en (2.1) y (2.2) se encuentra representado en la Figura 2.1 [19].

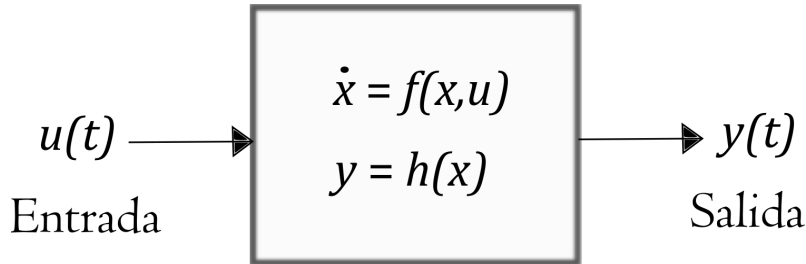


Figura 2.1: Diagrama en bloques de un sistema no lineal.

Las soluciones de sistemas no lineales con entradas variantes en el tiempo pueden ser [8]:

- Crecientes y no acotadas para  $t \rightarrow \infty$ , ver Figura 2.2 [20].
- Estados estables acotados ante entradas acotadas, ver Figura 2.3 [20].
- Única y acotada en estado estable (Convergencia), ver Figura 2.4 [20].

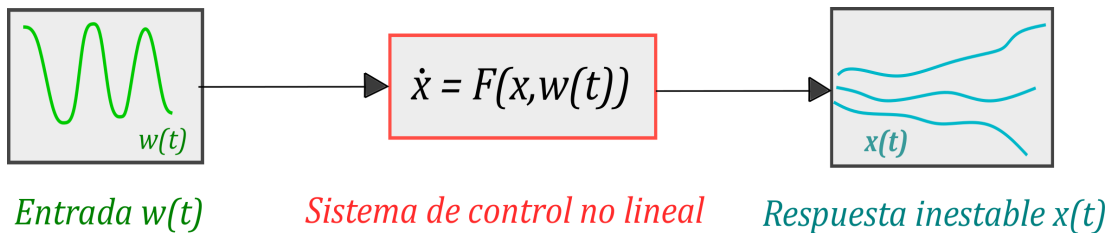


Figura 2.2: Sistema no lineal con soluciones crecientes y no acotadas.

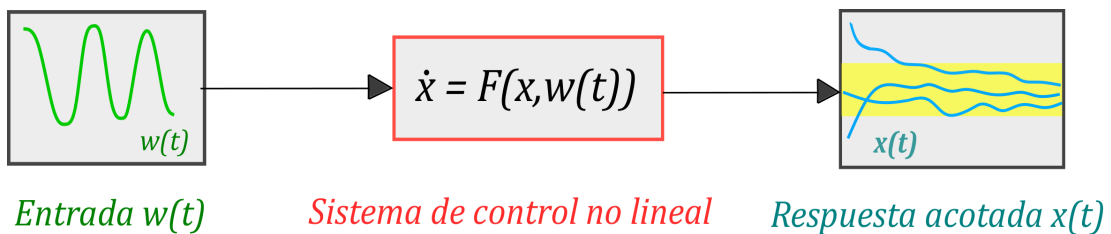


Figura 2.3: Sistema no lineal con soluciones acotadas.

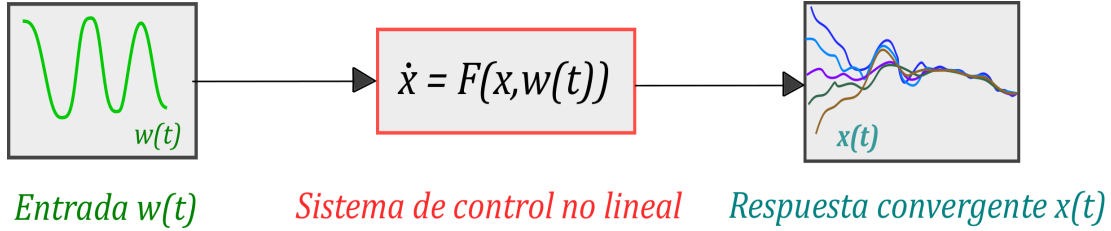


Figura 2.4: Sistema no lineal con solución convergente.

## 2.2. Sistemas convergentes

La teoría de contracción en las trayectorias o soluciones de un sistema, que en sus inicios fue tratada como dinámica convergente, tuvo como precursor al matemático ruso Boris P. Demidovich (1906-1977). Demidovich en su *paper* publicado en 1962 [21], estudió sistemas no lineales de la forma:

$$\dot{x} = f(x, t) \tag{2.3}$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$  y  $t \in \mathbb{R}$ , con  $f(x, t)$  siendo continua en  $t$  y diferenciable en  $x$ . Demidovich demostró que si existen matrices  $P = P^T > 0$  y  $Q = Q^T > 0$ , tales que:

$$P \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) + \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right)^T P \leq -Q \tag{2.4}$$

entonces el sistema (2.3) es exponencialmente convergente y entrada a estado convergente. El concepto de sistemas convergentes fue generalizado en [13], donde se afirma que

**Definición 2.1:** Sistemas del tipo (2.3), con condición inicial  $x_0$  son llamados *uniformemente convergentes* si:

1. Existe una única solución  $\bar{x}(t)$  que es definida y acotada,  $\forall t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ .
2.  $\bar{x}(t)$  es uniforme y asintóticamente estable.

Si  $\bar{x}(t)$  es uniforme y exponencialmente estable, entonces sistemas del tipo (2.3) son llamados uniformes y exponencialmente convergentes.

### 2.2.1. Propiedades básicas

**Propiedad 1:** Si el sistema (2.3) es uniformemente convergente, entonces la solución límite  $\bar{x}(t)$  es la única solución definida y acotada  $\forall t \in \mathbb{R}$ , como se mostró en la Figura 2.4 [13].

**Propiedad 2:** La propiedad de convergencia uniforme y convergencia de entrada-a-estado se conservan bajo transformaciones de coordenadas [13].

**Propiedad 3:** Supóngase el sistema (2.3) con una entrada  $w(t)$  es uniformemente convergente. Si la entrada  $w(t)$  es constante, la correspondiente solución límite  $\bar{x}_w(t)$  es también constante; si la entrada  $w(t)$  es periódica con período  $T$ , entonces la correspondiente solución límite  $\bar{x}_w(t)$  es también periódica con el

mismo período  $T$ , véanse Figuras 2.5 y 2.6 [13], [20].

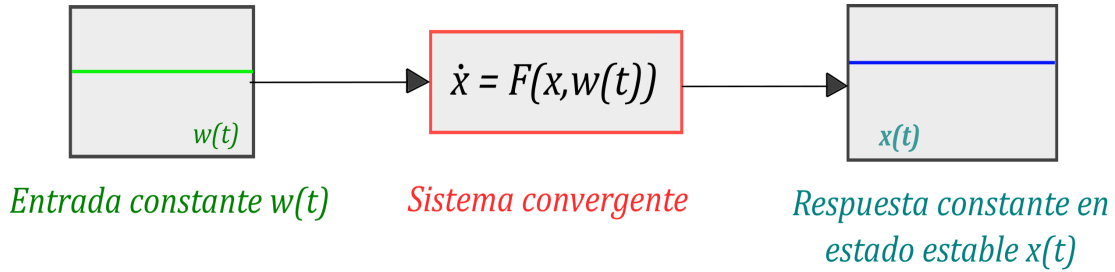


Figura 2.5: Sistema con entrada y solución constante.

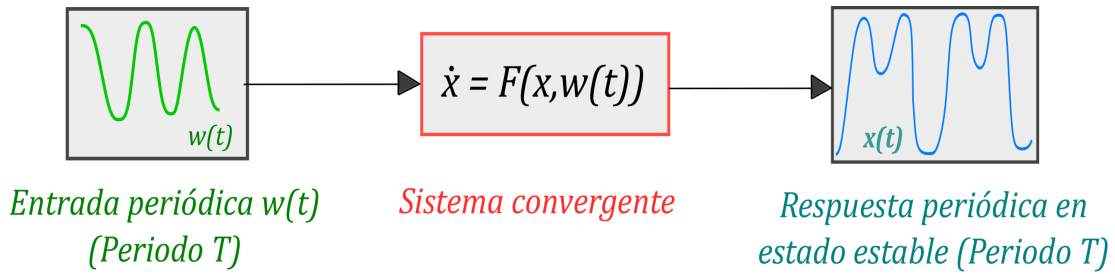


Figura 2.6: Sistema con entrada y solución periódica.

**Propiedad 4:** Supóngase el sistema (2.3) uniformemente convergente y  $F(x, w)$  es  $C^1$ . Entonces para cualesquiera dos entradas  $w_1(t)$  y  $w_2(t)$  satisfacen  $w_1(t) - w_2(t) \rightarrow 0$  para  $t \rightarrow +\infty$ , las correspondientes soluciones límites  $\bar{x}_{w_1}(t)$  y  $\bar{x}_{w_2}(t)$  satisfacen  $\bar{x}_{w_1}(t) - \bar{x}_{w_2}(t) \rightarrow 0$  para  $t \rightarrow +\infty$  [13].

**Propiedad 5:**(Conexión paralelo)  
 Considérese el sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F(x, w), & x &\in \mathbb{R}^d \\ \dot{y} &= G(y, w), & y &\in \mathbb{R}^q \end{aligned} \tag{2.5}$$

Supónganse los subsistemas  $x$  y  $y$  uniformemente convergentes (entrada-a-estados convergentes). Entonces el sistema (2.5) es uniformemente convergente (entrada-a-estado convergente), ver Figura 2.7 [13], [20].

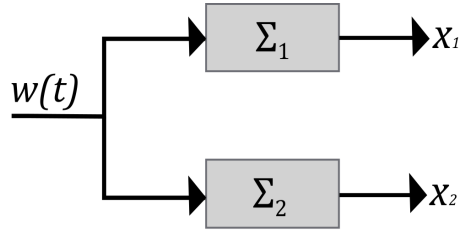


Figura 2.7: Conexión paralelo de un sistema uniformemente convergente.

**Propiedad 6:**(Conexión serie)

Considérese el sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F(x, y, w), & x &\in \mathbb{R}^d \\ \dot{y} &= G(y, w), & y &\in \mathbb{R}^q \end{aligned} \tag{2.6}$$

Supóngase que el subsistema  $x$  con entradas  $(y, w)$  es entrada-a-estado convergente y el subsistema  $y$  con  $w$  como entrada es entrada-a-estado convergente. Entonces el sistema (2.6) es entrada-a-estado convergente, ver Figura 2.8 [13], [20].

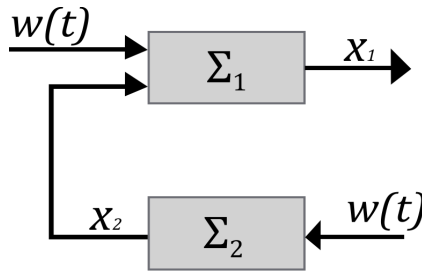


Figura 2.8: Conexión serie de un sistema entrada a estado convergente.

### 2.2.2. Aplicaciones

Desde la aparición de la teoría de contracción, y más específicamente, de los elementos teóricos que fundamentan la convergencia de sistemas, esto se ha reflejado en diferentes aplicaciones al control automático, como son [20]:

- Análisis en espacio de estados de sistemas de control no lineales usando funciones de respuesta en frecuencia para sistemas no lineales.
- Diseño de controladores para control de seguimiento, desestimación de entradas o sincronización maestro-esclavo.
- Diseño de observadores.
- Regulación de salida global.
- Problema de inversión estable.
- Modelo de reducción para sistemas no lineales con preservación de estabilidad y acotamiento del error.

### 2.3. Análisis de contracción geométrico diferencial

Winfried Lohmiller y Jean-Jacques E. Slotine en [22] y partiendo del análisis de sistemas no lineales como en (2.3), mostraron desde un punto de vista diferente el análisis de estabilidad no lineal. En este mostraron que la distancia medida de convergencia entre dos trayectorias no necesita ser construida explícitamente, en cambio, puede ser la integral de una medida infinitesimal de contracción. Lohmiller y Slotine traen a la comunidad de control el concepto de *contracción*, antes llamado *convergencia* por Demidovich, brindando un análisis geométrico diferencial de las trayectorias de un sistema, basado en el desplazamiento virtual ( $\delta x$ ) que existe entre estas, como se puede apreciar en la figura 2.9.

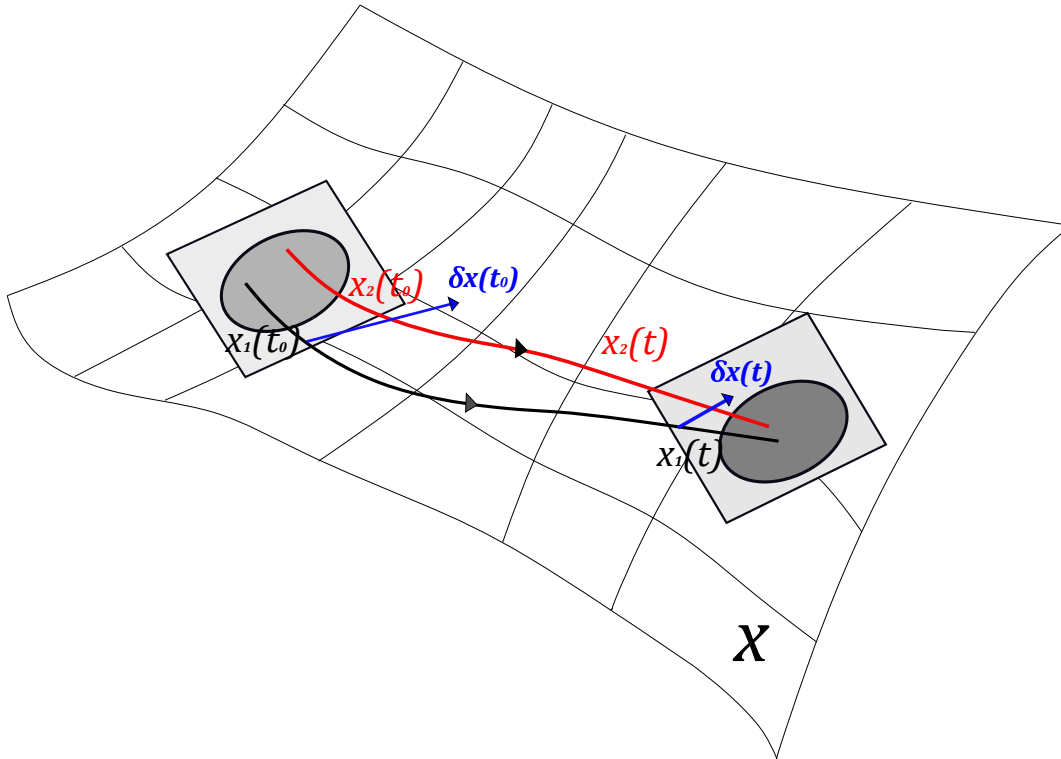


Figura 2.9: Desplazamiento virtual de las trayectorias de un sistema convergente.

En [22], mediante la aplicación del teorema del valor medio [23], se hace posible determinar el comportamiento temporal de la distancia entre dos trayectorias del sistema no lineal

$$\frac{d}{dt}(x_2 - x_1) = f(x_2, t) - f(x_1, t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)(x_2 - x_1) \quad (2.7)$$

donde  $x_1$  y  $x_2$  son dos puntos de dos trayectorias diferentes y  $x$  es la línea uniendo la trayectorias, siendo  $x = x_1 + \lambda(x_2 - x_1)$ , donde  $\lambda \in \mathbb{R}$  es la razón con la que se acercan dichas trayectorias, como se muestra en la figura 2.10.

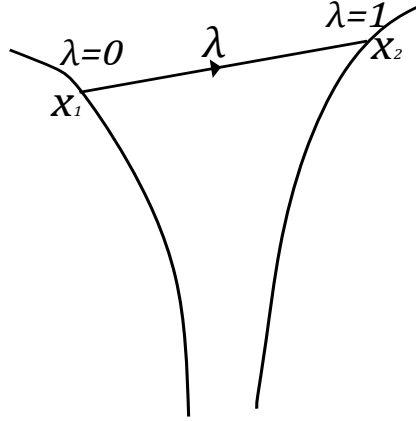


Figura 2.10: Segmento de recta que une a dos trayectorias de un sistema no lineal.

El comportamiento temporal de la distancia entre las trayectorias puede ser calculado de igual forma mediante el uso de la integral

$$\frac{d}{dt}(x_2 - x_1) = \int_{\lambda=0}^{\lambda=1} f(x_1 + \lambda(x_2 - x_1))d\lambda \quad (2.8)$$

Pudiéndose reescribir (2.8) como:

$$\frac{d}{dt}(x_2 - x_1) = \int_{\lambda=0}^{\lambda=1} \frac{\partial}{\partial x} f(x) d\lambda \quad (2.9)$$

Finalmente Lohmiller y Slotine llegan a dos teoremas que brindan la condición necesaria y suficiente para demostrar contracción entre cualquier par de soluciones de un sistema no lineal:

**Teorema 2.1: (Caso escalar)**

Si  $\exists \lambda > 0, \forall x, \forall t \geq 0$ , tal que  $\frac{\partial f}{\partial x} \leq -\lambda$ , entonces todas las trayectorias convergen una a la otra exponencialmente con razón  $\lambda$ , o sea:

$$\|x_2 - x_1\| \leq \|x_2 - x_1\|_{t=0} e^{-\lambda t} \quad (2.10)$$

**Teorema 2.2: (Caso vectorial)**

Si  $\exists \lambda > 0, \forall x, \forall t \geq 0$ , tal que  $\frac{\partial f}{\partial x} \leq -\lambda I$ , entonces  $\frac{\partial f}{\partial x}$  es uniformemente definido negativo, por lo que todos los valores propios de la parte simétrica del jacobiano del sistema ( $\frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f^T}{\partial x} \right)$ ) son uniformemente definidos negativos. Entonces se puede afirmar que todas las trayectorias convergen una a la otra exponencialmente con razón  $\lambda$ .

## 2.4. Análisis de contracción mediante normas matriciales

Otro enfoque más reciente sobre el análisis de contracción fue dado por Eduardo D. Sontag en [24], donde basándose en la contracción con respecto a las normas no euclidianas, brinda diferentes definiciones y teoremas, los que pueden resultar como una vía más simple que las dadas anteriormente, en muchos casos

donde se necesite analizar contracción en sistemas no lineales complejos del tipo (2.3), redefiniendo este tipo de sistemas de la siguiente forma, sea:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \quad (2.11)$$

definido para  $t \in [0, \infty)$  y  $\mathbf{x} \in C$ , donde  $C$  es un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$ . Se asumirá que  $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$  es diferenciable en  $\mathbf{x}$ , y tanto  $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ , como el Jacobiano de  $\mathbf{f}$  respecto a  $\mathbf{x}$ , que es denotado como  $J(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(t, \mathbf{x})$ , son continuos en  $(t, \mathbf{x})$ . Se denota por  $\mathbf{x}(t) = \varphi(t, 0, \xi)$  el valor de la solución  $\mathbf{x}(t)$  en el tiempo  $t$  de la ecuación diferencial (2.11) con valor inicial  $\mathbf{x}(s) = \xi$ . Recalcándose que dada una norma vectorial en el espacio euclidiano  $|\cdot|$ , con la que se induce la norma matricial  $\|A\|$ , la *matriz de medida*  $\mu$  asociada es definida como la derivada direccional de la norma matricial [24]:

$$\mu(A) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\|I + hA\| - 1) \quad (2.12)$$

Por ejemplo, si  $|\cdot|$  es la norma 2 euclidiana estándar, entonces  $\mu(A)$  es el máximo eigenvalor de la parte simétrica de  $A$ , de forma similar, para la norma 1 será el valor máximo de la sumatoria de las columnas de la matriz a la que se le aplique la norma [24]. Una vez planteadas las anteriores premisas se llega a la siguiente definición:

**Definición 2.2:** El sistema (2.11) se dice que es infinitesimalmente contractivo en un conjunto  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  si existe alguna norma en  $C$ , con su asociada *matriz de medida*  $\mu$ , tal que para una constante  $c > 0$  (radio de contracción), sostiene que:

$$\mu(J(\mathbf{x}, t)) \leq -c, \quad \forall \mathbf{x} \in C, \quad \forall t \geq 0 \quad (2.13)$$

Dicha contractividad infinitesimal implica contractividad global [24].

**Teorema 2.3:** Supóngase que  $C$  es un subconjunto convexo de  $\mathbb{R}^n$  y que  $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$  es infinitesimalmente contractivo con radio de contracción  $c$ . Luego, para ambas soluciones  $\mathbf{x}(t) = \varphi(t, 0, \xi)$  y  $\mathbf{z}(t) = \varphi(t, 0, \zeta)$  de (2.11), se sostiene que [24]:

$$|\mathbf{x}(t) - \mathbf{z}(t)| \leq e^{-ct} |\xi - \zeta|, \quad \forall t \geq 0 \quad (2.14)$$

La dependencia del tiempo en (2.11) usualmente es debido a una entrada, la que puede representar una perturbación  $w(t)$ , por lo que de cumplirse (2.13) se puede plantear el siguiente teorema:

**Teorema 2.4:** Supóngase que:

- $C$  es un subconjunto convexo de  $\mathbb{R}^n$ .
- $\mathbf{f}$  es infinitesimalmente contractivo con radio  $c$ .
- $\mathbf{f}$  es  $T$ -periódica.

Entonces existe una única solución periódica  $\hat{\mathbf{x}}(t) : [0, \infty) \rightarrow C$  de (2.11) de período  $T$  y, para cada solución  $\mathbf{x}(t)$ , se sostiene que  $|\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)| \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$  [24].

A través del teorema anterior, apoyado por la afirmación de contractividad global, va a brindar robustez ante entradas periódicas, hecho que se ilustra en la figura 2.6. Existe una metodología para facilitar la prueba de la contractividad global en un sistema no lineal, la cual sirve de apoyo para la definición 1, y es

el siguiente teorema [25]:

**Teorema 2.5:** Sean sistemas de tipo (2.11), donde  $f$  es una función suave no lineal. Si existe una matriz uniformemente invertible  $P(x,t)$ , tal que el *Jacobiano generalizado* asociado

$$\mathbf{F} = \left( \dot{P} + P \frac{\partial f}{\partial x} \right) P^{-1} \quad (2.15)$$

es uniformemente definido negativo, entonces todas las trayectorias del sistema convergen a una única trayectoria, con una razón de convergencia  $|\lambda_{max}|$ , donde  $\lambda_{max}$  es el mayor valor propio de la parte simétrica de  $\mathbf{F}$ , entonces se puede afirmar que el sistema es contractivo.

Otra condición necesaria para la convergencia exponencial de todas las trayectorias del sistema es la existencia de la matriz  $P^T P$  uniformemente definida positiva <sup>1</sup>.

## 2.5. Estabilidad incremental

La idea central de la estabilidad incremental consiste en comparar cualquier par de soluciones del sistema respecto a una distancia, por lo que no se necesita conocer la existencia de un punto de equilibrio como en la teoría de estabilidad de Lyapunov.

Sea  $\Sigma_u$  un sistema de control no lineal, afín en la entrada  $u$ , variedad de espacio de estado  $\mathcal{X}$  (ver figura 2.9) de dimensión  $N = 1$ , el cual en coordenadas locales está dado por [26],

$$\Sigma_u : \begin{cases} \dot{x} = f(x,t) + g(x,t)u \\ y = h(x,t) \end{cases} \quad (2.16)$$

donde  $x \in \mathcal{X}$  es el estado, la entrada  $u \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}$  es una función de tiempo localmente acotada y medible, y la salida  $y \in \mathcal{Y} \subset \mathbb{R}$ . La entrada espacio  $\mathcal{U}$  y la salida espacio  $\mathcal{Y}$  son subconjuntos de  $\mathbb{R}$ . El sistema de control  $\Sigma_u$  en lazo cerrado con  $u = \gamma(x,t)$  es [26],

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x} = F(x,t) = f(x,t) + g(x,t)\gamma(x,t) \\ y = h(x,t) \end{cases} \quad (2.17)$$

Las soluciones de  $\Sigma_u$  están dadas por las trayectorias  $t \in [t_0, T] \mapsto x(t) = \psi_{t_0}^u(x_0, t)$  resultantes desde la condición inicial  $x_0 \in \mathcal{X}$ , para una función fija de entrada  $u : [t_0, T] \mapsto \mathcal{U}$ , con  $\psi_{t_0}^{u_0}(x_0, t_0) = x_0$ . Considere una vecindad abierta, invariante y conectada  $C$  de  $\mathcal{X}$  tal que  $\psi_{t_0}^u(x_0, t_0)$  es completa para cada  $x_0 \in C$ , cada función  $u$  y cada  $t_0$ . Las soluciones de  $\Sigma$  son definidas de forma similar y se denotan por  $x(t) = \psi_{t_0}(x_0, t)$ . Por conectividad, cualquier par de puntos  $x_0, x_1$  en  $C$  pueden ser conectados por una curva suave  $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow C$ , con  $\gamma(-\epsilon) = x_0$  y  $\gamma(\epsilon) = x_1$  [26].

**Definición 2.3:** Sea  $C \subseteq \mathcal{X}$  un conjunto invariante y  $d : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  una distancia continua en  $\mathcal{X}$  y considere el sistema  $\Sigma$  dado por (2.17). Entonces el sistema  $\Sigma$  es ([17]),

<sup>1</sup>La matriz  $P^T P$  es definida positiva si su primer elemento es positivo y todos los determinantes menores de la misma son positivos [16].

- (IE) Incrementalmente estable en  $C$  (con respecto a  $d$ ) si existe una función  $\alpha$  de clase  $\mathcal{K}^2$  tal que  $\forall x_1, x_2 \in C, \forall t_0 \in \mathbb{R}, \forall t > t_0$ ,

$$d(\psi_{t_0}(t, x_1), \psi_{t_0}(t, x_2)) \leq \alpha(d(x_1, x_2)) \quad (2.18)$$

- (IAE) Incremental y asintóticamente estable en  $C$  si es incrementalmente estable y  $\forall x_1, x_2 \in C, \forall t_0 \in \mathbb{R}$ ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(\psi_{t_0}(t, x_1), \psi_{t_0}(t, x_2)) = 0 \quad (2.19)$$

- (IEE) Incremental y exponencialmente estable en  $C$  si existe una distancia  $d, K \geq 1$  y  $\lambda > 0$  tal que  $\forall x_1, x_2 \in C, \forall t_0 \in \mathbb{R}, \forall t \geq t_0$

$$d(\psi_{t_0}(t, x_1), \psi_{t_0}(t, x_2)) \leq Ke^{-\lambda(t-t_0)}d(x_1, x_2) \quad (2.20)$$

Las definiciones antes mostradas constituyen versiones incrementales de las nociones clásicas de estabilidad, estabilidad asintótica y estabilidad exponencial ([27]).

## 2.6. Teoría diferencial de Lyapunov

La dinámica variacional de los sistemas  $\Sigma_u$  y  $\Sigma$  está definida como sigue, ver [28] y [29]:

Sea  $t \in [t_0, T] \mapsto x(t, s) = \psi_{t_0}(\gamma(s), t)$  una familia  $s$ -parametrizada de trayectorias de estado, desde la condición inicial  $x(t_0, s) = \gamma(s)$ , en el tiempo  $t_0$ . La correspondiente familia de pares de trayectorias entrada-salida son  $t \in [t_0, T] \mapsto u(t, s) = \varrho_{t_0}(t, s)$  y  $t \in [t_0, T] \mapsto y(t, s) = \zeta_{t_0}(t, s) = h(\psi_{t_0}(\gamma(s), t), t)$ , para  $s \in I = (-\epsilon, \epsilon)$ . El diferencial  $\frac{\partial}{\partial t}$  a un  $s$  fijo es el tiempo derivativo. Además,  $\psi_{t_0}(t, \gamma(s))$  satisface en coordenadas,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_{t_0}}{\partial t}(t, \gamma(s)) &= f(\psi_{t_0}(t, \gamma(s)), t) + g(\psi_{t_0}(t, \gamma(s)), t)\varrho_{i,t_0}(t, s) \\ \varrho_{t_0}(t, s) &= h(\psi_{t_0}(t, \gamma(s)), t), \end{aligned} \quad (2.21)$$

$\forall t \geq t_0$  y  $s \in I$ . Por otra parte, el diferencial  $\frac{\partial}{\partial s}$  para un tiempo  $t$  fijo es la variación infinitesimal con respecto de  $s$ . Denotando la trayectoria nominal entrada-estado-salida por  $u(t) = u(t, 0), x(t) = x(t, 0)$  y  $y(t) = y(t, 0)$ . Entonces, las variaciones de  $(u(t), x(t), y(t))$  son

$$\delta u = \left. \frac{\partial \varrho_{t_0}}{\partial s}(t, s) \right|_{s=0}, \quad \delta x = \left. \frac{\partial \psi_{t_0}}{\partial s}(t, \gamma(s)) \right|_{s=0}, \quad \delta y = \left. \frac{\partial \zeta_{t_0}}{\partial s}(t, s) \right|_{s=0} \quad (2.22)$$

las cuales son tangentes a  $\varrho_{t_0}(t, s), \psi_{t_0}(t, \gamma(s))$  y  $\zeta_{t_0}(t, s)$  a  $s$ , respectivamente, o sea,  $\delta u \in T_u \mathcal{U}, \delta x \in T_x \mathcal{X}$ , y  $\delta y \in T_y \mathcal{Y}$ . Luego, la dinámica del estado variacional  $\delta x(t)$  es,

$$\begin{aligned} \delta \dot{x}(t) &= \frac{\partial^2 \psi_{t_0}}{\partial t \partial s}(t, \gamma(0)) = \frac{\partial^2 \psi_{t_0}}{\partial s \partial t}(t, \gamma(0)) \\ &= \frac{\partial}{\partial s} [f(\psi_{t_0}(t, \gamma(0)), t) + g(\psi_{t_0}(t, \gamma(0)), t)\varrho_{t_0}(t, 0)] \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(\psi_{t_0}(t, \gamma(0)), t) \frac{\partial \psi_{t_0}}{\partial s}(t, \gamma(0)) \\ &\quad + \frac{\partial g}{\partial x}(\psi_{t_0}(t, \gamma(0)), t) \frac{\partial \psi_{t_0}}{\partial s}(t, \gamma(0))\varrho_{t_0}(t, 0) \\ &\quad + g(\psi_{t_0}(t, \gamma(0)), t) \frac{\partial \varrho_{t_0}}{\partial s}(t, 0) \end{aligned} \quad (2.23)$$

<sup>2</sup>La función  $\alpha$  se dice de clase  $\mathcal{K}$  si es estrictamente creciente y  $\alpha(0) = 0$  [27].

Además, la dinámica variacional de  $\Sigma_u$  en (2.16) a lo largo de la trayectoria  $(u, x, y)(t)$  es el sistema variante en el tiempo y denotado por

$$\delta\Sigma_u : \begin{cases} \delta\dot{x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\delta x + u\frac{\partial g}{\partial x}(x, t)\delta x + g\delta u \\ \delta y = \frac{\partial h}{\partial x}(x, t)\delta x \end{cases} \quad (2.24)$$

**Definición 2.4:** El sistema de control prolongado  $\Sigma_u^\delta$  asociado al sistema de control  $\Sigma_u$  en (2.16) conlleva considerar el sistema original  $\Sigma_u$  y su sistema variacional  $\delta\Sigma_u$ , que se describe como [28],

$$\Sigma_u^\delta : \begin{cases} \dot{x} = f(x, t) + g(x, t)u \\ y = h(x, t) \\ \delta\dot{x} = \frac{\partial f}{\partial x}\delta x + u\frac{\partial g}{\partial x}\delta x + g\delta u \\ \delta y = \frac{\partial h}{\partial x}(x, t)\delta x \end{cases} \quad (2.25)$$

con  $(u, \delta u) \in T\mathcal{U}$ ,  $(x, \delta x) \in T\mathcal{X}$ , y  $(y, \delta y) \in T\mathcal{Y}$ . El sistema prolongado  $\Sigma^\delta$  del sistema en lazo cerrado  $\Sigma$  en (2.17) de manera semejante está definido como,

$$\Sigma^\delta : \begin{cases} \dot{x} = F(x, t) \\ y = h(x, t) \\ \delta\dot{x} = \frac{\partial F}{\partial x}(x, t)\delta x \\ \delta y = \frac{\partial h}{\partial x}(x, t)\delta x \end{cases} \quad (2.26)$$

**Definición 2.5** (Estructura Finsler): La función  $\mathfrak{F} : T\mathcal{X} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  define una estructura Finsler si satisface las siguientes condiciones [30]:

- $\mathfrak{F}$  es una función uniforme  $C^1$  en  $T\mathcal{X} \times \mathbb{R}$  para  $\delta x \neq 0$ .
- $\mathfrak{F}(x, \delta x, t) > 0$  para cada  $(x, \delta x) \in T\mathcal{X}$  uniformemente en  $t$  tal que  $\delta x \neq 0$ .
- $\mathfrak{F}(x, \lambda\delta x, t) = \lambda\mathfrak{F}(x, \delta x, t)$  para cada  $\lambda \geq 0$  y para cada  $(x, \delta x) \in T\mathcal{X}$  uniformemente en  $t$ , tal que  $\delta x \neq 0$  (homogeneidad).
- $\mathfrak{F}(x, \delta x_1 + \delta x_2, t) \leq \mathfrak{F}(x, \delta x_1, t) + \mathfrak{F}(x, \delta x_2, t)$ , para cada  $(x, \delta x_1), (x, \delta x_2) \in T\mathcal{X}$  uniformemente en  $t$  (convexidad).

La longitud de cualquier curva  $\lambda(s)$  inducida por  $\mathfrak{F}$  es independiente de reparametrizaciones de preservación de la orientación.

**Definición 2.6** (Función diferencial de Lyapunov): Sea  $\mathfrak{F}(x, \delta x, t)$  una estructura Finsler. Una función  $V : T\mathcal{X} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  es una función diferencial candidata de Lyapunov adaptada a  $\mathfrak{F}$  si satisface [17],

$$c_1\mathfrak{F}(x, \delta x, t)^p \leq V(x, \delta x, t) \leq c_2\mathfrak{F}(x, \delta x, t)^p \quad (2.27)$$

para algunas constantes  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ , siendo  $p$  un entero positivo.

La relación entre una función diferencial candidata de Lyapunov y la estructura Finsler mostrada en (2.27) es la clave para el análisis de estabilidad incremental, más precisamente, una distancia uniforme bien definida en  $\mathcal{X} \times \mathbb{R}$  mediante integración, como se define a continuación.

**Definición 2.7** (Distancia Finsler): Considere una función diferencial candidata de Lyapunov en  $\mathcal{X}$  y la estructura Finsler  $\mathfrak{F}$ . Para cualquier subconjunto  $C \subseteq \mathcal{X}$  y cualquier  $x_1, x_2 \in C$ , sea  $\Gamma(x_1, x_2)$  la colección por partes  $C^1$  de curvas  $\gamma : I \rightarrow \mathcal{X}$  conectando  $\gamma(0) = x_1$  y  $\gamma(1) = x_2$ . La distancia Finsler  $d : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  inducida por  $\mathfrak{F}$  es definida por [17],

$$d(x_1, x_2) := \inf_{\gamma \in \Gamma(x_1, x_2)} \int_{\gamma} \mathfrak{F} \left( \gamma(s), \frac{\partial \gamma}{\partial s}(s), t \right) ds \quad (2.28)$$

**Teorema 2.6** (Método diferencial de Lyapunov): Considere el sistema prolongado  $\Sigma^\delta$ , un conjunto conectado e invariante  $C \subseteq \mathcal{X}$ , y una función  $\alpha : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ . Sea  $V$  una función diferencial candidata de Lyapunov satisfaciendo [17],

$$\dot{V}(x, \delta x, t) \leq -\alpha(V(x, \delta x, t)) \quad (2.29)$$

para cada  $(x, \delta x, t) \in T\mathcal{X} \times \mathbb{R}$ . Entonces, el sistema descrito en (2.17) es

- IE en  $C$  uniformemente en  $t$ , si  $\alpha(s) = 0$  para cada  $s \geq 0$ .
- IAE en  $C$  uniformemente en  $t$ , si  $\alpha$  es una función de tipo  $\mathcal{K}$ .
- IEE en  $C$  uniformemente en  $t$  con radio  $\beta > 0$ , si  $\alpha(s) = \beta s, \forall s > 0$ .

En la figura 2.11<sup>3</sup> se muestra una interpretación geométrica del método antes descrito.

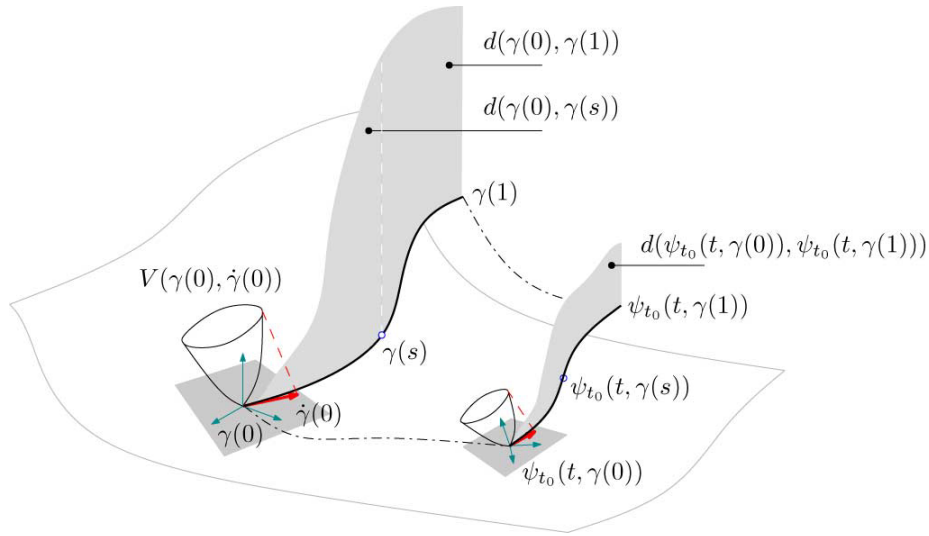


Figura 2.11: Ilustración gráfica de la distancia inducida por la condición (2.29).

El método diferencial de Lyapunov resulta en una condición suficiente para demostrar estabilidad incremental en términos de funciones diferenciales de Lyapunov. Este puede ser considerado como la versión Finsler-Lyapunov/diferencial del método directo de Lyapunov [17]. Por tanto, la definición de contracción

<sup>3</sup>Imagen tomada de [17].

en términos de funciones diferenciales de Lyapunov es la siguiente:

**Definición 2.8** (Contracción): Se puede decir que  $\Sigma$  contrae  $V$  en  $C$  si se satisface (2.29) para alguna función  $\alpha$  de clase  $\mathcal{K}$ .  $V$  es llamada la medida de contracción y  $C$  la región de contracción [17].

Con el empleo de esta metodología se cuenta con un criterio y procedimiento semejantes al tradicionalmente utilizado para demostrar estabilidad asintótica, hecho que resulta de interés en cuanto a su estudio y puesta en práctica, al ofrecer una vía similar de trabajo para demostrar una propiedad más fuerte como es la estabilidad incremental y contracción de las soluciones de un sistema.

### 2.6.1. Análisis mediante métricas Riemannianas

Considérese la estructura Finsler

$$\mathfrak{F}(x, \delta x, t) = \sqrt{\frac{1}{2} \delta x^T P(x, t) \delta x} \quad (2.30)$$

donde  $P(x, t)$  es un tensor métrico Riemanniano [31], posiblemente dependiendo de  $t$ . Entonces, una función diferencial candidata correspondiente está dada por

$$V(x, \delta x, t) = \mathfrak{F}(x, \delta x, t)^2 = \frac{1}{2} \delta x^T P(x, t) \delta x \quad (2.31)$$

En este caso la condición (2.29) asciende a la condición de *análisis de contracción generalizado* como en [22], dada por

$$\dot{P}(x, t) + \frac{\partial f^T}{\partial x}(x, t) P(x, t) + P(x, t) \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \leq -2\beta(x, t) P(x, t) \quad (2.32)$$

para algún  $\beta(x, t) > 0$ . Bajo la hipótesis del Teorema 2.6,  $C \subseteq X$  es también un conjunto compacto, entonces el sistema (2.17) satisface la Definición 2.1.

### 2.6.2. Análisis mediante normas matriciales

Supóngase que  $P(x, t)$  en (2.32) es escrita como  $P(x, t) = \Theta^T(x, t) \Theta(x, t)$ , ver [25]. Entonces la condición de contracción Riemanniana en (2.32) es equivalente a la condición de contracción de la matriz de medida dada por

$$\mu(\bar{J}(x, t)) < -2\beta \quad (2.33)$$

donde el *Jacobiano generalizado* [22], está dado por:

$$\bar{J}(x, t) = \left[ \dot{\Theta}(x, t) f(x, t) + \Theta(x, t) \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right] \Theta^{-1}(x, t) \quad (2.34)$$

como se muestra en [17], [25] y [32].

# Capítulo 3

## Sistema péndulo

Por la sencillez de su modelo matemático, en la esfera de la robótica, el péndulo es el robot más simple, el cual es utilizado comúnmente como caso de estudio para el desarrollo y aprendizaje de la dinámica de sistemas en las ramas de la ingeniería como la mecatrónica, robótica, control, mecánica, electrónica, computación y automatización. Igualmente debido a sus efectos físicos y su diversidad de aplicaciones prácticas, como el péndulo invertido, brazos robóticos, etc., además de diversas aplicaciones en la vida cotidiana como los metrónomos, relojes, entre otras.

### 3.1. Robot manipulador de 1 grado de libertad (péndulo)

Uno de los servomecanismos empleados en este trabajo de tesis fue el eslabón péndulo (codo) del robot ROTRADI que se observa en la figura 3.1. Este es un robot de 3 grados de libertad totalmente actuado por 3 servomotores de transmisión directa, lo que significa que cada servomotor funciona como una fuente ideal de par o torque, por lo que no tiene pérdidas de energía como sucede en motores provistos de engranaje.

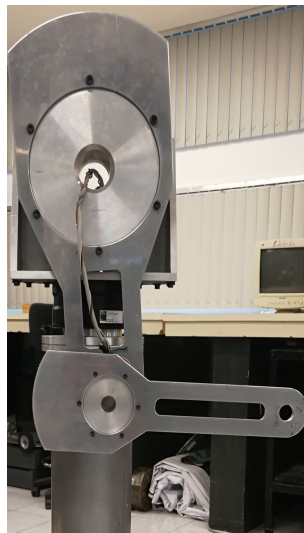


Figura 3.1: Robot manipulador de 3 grados de libertad (g.d.l).

### 3.1.1. Servomotor de transmisión directa

Un servomotor está compuesto por motor eléctrico, sensor de posición (encoder) y el amplificador electrónico. Los servomotores de transmisión directa presentan 3 modos de operación: *posición*, el cual permite mover al motor a una posición preestablecida con la desventaja de que en este modo de operación no es posible desplazar objetos o aplicar fuerza; modo *velocidad*, que controla el movimiento del motor sobre una velocidad deseada, teniendo la misma desventaja que el modo *posición*; y finalmente el modo *par* o *torque*, que hace que el servomotor funcione como una fuente de par permitiendo que este último se mantenga en magnitud y signo. En este modo el servomotor posee características de sistemas con arquitectura abierta, haciendo posible implementar y evaluar algoritmos de control, por lo que en este trabajo el servomotor que se utilizó está configurado en modo *torque*, lo que permite la evaluación experimental de robustez y desempeño de cualquier estrategia de control [16].

Las principales características del eslabón a utilizar se encuentran reflejadas en la tabla 3.1, ver [33].

Eslabón	Parámetro	Notación	Valor/unidades
Codo	Modelo		DMG3-1004C-115B
	Resolución		10260 pulsos/rev
	Torque máximo		4 Nm
	Masa	$m$	1.18 kg
	Longitud	$l$	0.35 m
	Longitud del centro de masas	$lc$	0.041 m
	Coficiente de Inercia	$I$	$0.097 \text{ Nm} \frac{\text{s}^2}{\text{rad}}$
	Coficiente de fricción viscosa	$b$	$0.175 \text{ Nm} \frac{\text{s}}{\text{rad}}$

Tabla 3.1: Parámetros del eslabón utilizado del robot manipulador de 3 g.d.l.

### Amplificador electrónico y sensor de posición

El amplificador electrónico instalado en el robot manipulador de transmisión directa caso de estudio, es un modelo de 3ra generación DYNASERV y se muestra en la figura 3.2<sup>1</sup>. Estando configurado en el modo par, la señal de control a enviarse al amplificador debe estar en un rango de tensión de  $\pm 8\text{V}$ , por lo que si se envía 0V el servo motor tendrá una respuesta de 0 par o torque, los torques mínimo y máximo se obtendrán cuando se le proporcione al servomotor  $-8\text{V}$  o  $+8\text{V}$  respectivamente [34]. Este servo amplificador lleva integrado un encoder óptico que produce como señales de salida 2 trenes de pulsos A y B de 5V cada uno, desfasados  $90^\circ$  y proporcionales al ángulo de giro del rotor (encoder incremental), como se muestra en la figura 3.3<sup>2</sup>. Para esta generación de servo amplificadores es posible por parte del usuario ajustar la cantidad de pulsos por revolución de sus encoders, estando configurado el encoder en cuestión a 10260 pulsos/rev, o sea,  $0.0350877192^\circ$  de resolución [36].

<sup>1</sup>Imagen tomada de [16].

<sup>2</sup>Imagen tomada de [35].

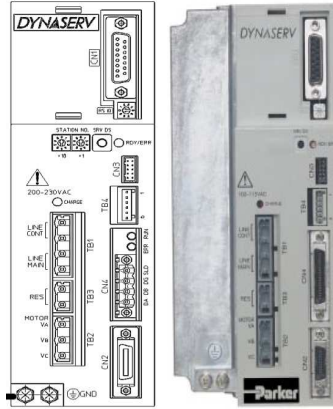


Figura 3.2: Amplificador electrónico DYNASERV de 3ra generación.

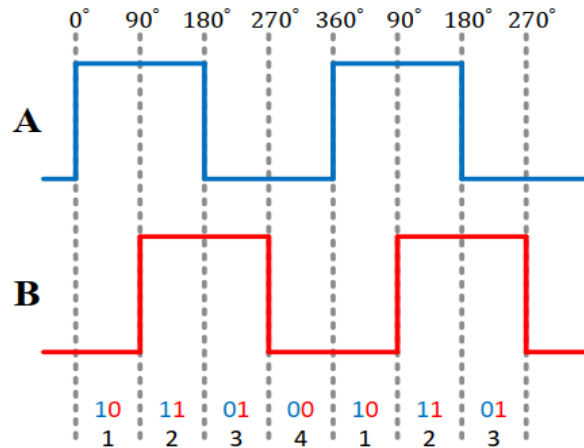


Figura 3.3: Señales de salida del encoder óptico.

### 3.2. Modelo dinámico del péndulo

Para obtener el modelado dinámico del péndulo, ya sea la metodología que se utilice resulta conveniente situar al servomecanismo en un eje de coordenadas cartesianas, ya que facilita su comprensión al momento de realizar el análisis de la cinemática del mismo, esto se puede apreciar en la Figura 3.4. El eslabón en cuestión se conforma por un servomotor y una barra metálica de longitud  $l$ , la acción de la gravedad  $g$  está dirigida en el eje  $y$  negativo. El momento de inercia se denota por  $I$ , el centro de masa se representa como  $l_c$  y la masa del péndulo como  $m$ .

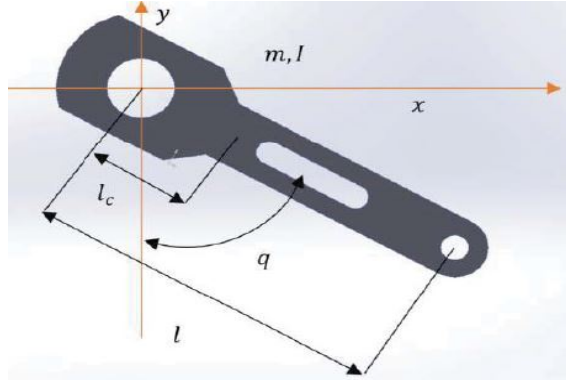


Figura 3.4: Péndulo representado en coordenadas cartesianas.

### 3.2.1. Modelado mediante ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange

Teniendo como base la representación del péndulo en el eje de coordenadas cartesianas, se puede obtener la cinemática directa del centro de masa del péndulo.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_c \text{sen}(q) \\ -l_c \text{cos}(q) \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

El modelo de cinemática diferencial que se obtiene, queda:

$$\mathbf{v} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_c \text{cos}(q) \dot{q} \\ l_c \text{sen}(q) \dot{q} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Luego, la rapidez de traslación está dada por:

$$\mathbf{v}^T \mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|^2 = (l_c \text{cos}(q) \dot{q})^2 + (l_c \text{sen}(q) \dot{q})^2 = l_c^2 \dot{q}^2 \quad (3.3)$$

Para determinarse el modelo de energía, se expresan las energías cinética  $\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  y potencial  $\mathcal{U}(\mathbf{q})$ , teniendo la energía cinética la siguiente forma:

$$\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^T \mathbf{v} + \frac{1}{2} I \dot{q}^2 = \frac{1}{2} [ml_c^2 + I] \dot{q}^2 \quad (3.4)$$

La energía potencial  $\mathcal{U}(\mathbf{q})$  tiene la forma  $\mathcal{U}(\mathbf{q}) = mgh$ , donde  $h$ (altura), para el caso del péndulo se compone por  $h = l_c(1 - \text{cos}(q))$ , luego:

$$\mathcal{U}(\mathbf{q}) = mgh = mgl_c [1 - \text{cos}(q)] \quad (3.5)$$

Por tanto, el *lagrangiano* para el péndulo está dado por:

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathcal{U}(\mathbf{q}) \quad (3.6)$$

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} [ml_c^2 + I] \dot{q}^2 - mgl_c [1 - \text{cos}(q)] \quad (3.7)$$

Cada uno de los términos de la ecuación de movimiento de Euler-Lagrange para el péndulo se determinan a continuación.

$$\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} = [ml_c^2 + I] \dot{q} \quad (3.8)$$

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right] = [ml_c^2 + I] \ddot{q} \quad (3.9)$$

$$\left[ \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q} \right] = -mgl_c \text{sen}(q) \quad (3.10)$$

La componente de fricción de la ecuación de movimiento está dada por:

$$f_f(f_e, \dot{q}) = b\dot{q} + f_c \text{signo}(\dot{q}) + f_e [1 - |\text{signo}(\dot{q})|] \quad (3.11)$$

donde  $f_c$  es la fricción de Coulomb,  $f_e$  es la fricción estática,  $b$  es el coeficiente de fricción viscosa y la función  $\text{signo}(\dot{q})$  está definida como:

$$\text{signo}(\dot{q}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \dot{q} > 0 \\ -1 & \text{si } \dot{q} < 0 \end{cases} \quad (3.12)$$

Finalmente, el modelo dinámico del péndulo mediante ecuaciones de Euler-Lagrange queda expresado como:

$$\tau = [ml_c^2 + I] \ddot{q} + mgl_c \text{sen}(q) + b\dot{q} + f_c \text{signo}(\dot{q}) + f_e [1 - |\text{signo}(\dot{q})|] \quad (3.13)$$

Expresado en variables de estado, el modelo dinámico lagrangiano queda:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \frac{1}{I_p} (\tau - mgl_c \text{sen}(q) - f_f(f_e, \dot{q})) \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

donde  $I_p = ml_c^2 + I$  y  $f_f(f_e, \dot{q})$  quedó definida anteriormente como la componente de fricción de la ecuación de movimiento.

### 3.3. Diseño del controlador y análisis de contracción del péndulo en lazo cerrado

El modelo dinámico del péndulo mediante ecuaciones de Euler-Lagrange, considerando para esta demostración la fricción viscosa y despreciando la de Coulomb y estática debido a sus componentes signo, las cuales son funciones discontinuas, es el siguiente:

$$\tau = I_p \ddot{q} + b\dot{q} + g(q) \quad (3.15)$$

donde  $I_p = ml_c^2 + I$  y  $g(q) = mgl_c \text{sen}(q)$ , siendo  $m$  la masa,  $l_c$  la longitud del centro de masas,  $I$  el coeficiente de inercia,  $g$  la aceleración de la gravedad y  $b$  el coeficiente de fricción viscosa.

Definiendo  $x_1 = q$  como la posición y la velocidad  $x_2 = \dot{q}$ , en variables de estado está dado por:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{1}{I_p} [\tau - bx_2 - mgl_c \text{sen}(x_1)] \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Para diseñar el esquema de control, se propone una adaptación de la técnica de control no lineal *backstepping* ([27]), basada en análisis de contracción. En el método estándar de *backstepping*, se busca diseñar

funciones de Lyapunov de manera recursiva mediante control. Por otro lado, en éste trabajo, el requerimiento de estabilidad en el sentido de Lyapunov es reemplazado por el requerimiento de contractividad. Para este fin, se diseñarán de manera recursiva funciones *diferenciales* de Lyapunov (ver (2.27)), para sistemas prolongados (ver (2.25)).

**Proposición:** Sea  $x_{1d}(t) \in \mathcal{X}$  una posición deseada para el sistema péndulo en (3.16) y defínase el error de posición como  $\tilde{x}_1 = x_{1d} - x_1$ , entonces el sistema (3.16) en lazo cerrado con la ley de control por retroalimentación

$$\tau = I_p \ddot{x}_{1d} + \dot{x}_{1d} (b + I_p k_p) - I_p k_p x_2 + \tilde{x}_1 (b k_p + k_p) + m g l_c \text{sen}(x_1) + K_v^{var}(x_2) (\dot{x}_{1d} - x_2 + k_p \tilde{x}_1) \quad (3.17)$$

es contractivo, con  $K_v^{var}(x_2) = \frac{k_1 x_2^2}{x_2^2 + k_2}$ , y  $k_p, k_1, k_2 \in \mathbb{R}^+$ , y con la función diferencial de Lyapunov dada por

$$V_2(\tilde{x}_1, \delta \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \delta \tilde{x}_2) = \frac{1}{2} k_p \delta \tilde{x}_1^2 + \frac{1}{2} I_p \delta \tilde{x}_2^2 \quad (3.18)$$

**Demostración por construcción:** Como primer paso de diseño, se introduce el error de posición  $\tilde{x}_1$  definido arriba, donde  $x_{1d}$  es la posición deseada y la dinámica del error está dada por

$$\dot{\tilde{x}}_1 = \dot{x}_{1d} - x_2 \quad (3.19)$$

donde  $\dot{x}_{1d}$  es la velocidad deseada. Luego, se asume que  $x_2$  es una acción de control artificial expresado como:

$$x_2 = \tilde{x}_2 - \alpha(x_1) \quad (3.20)$$

donde  $\tilde{x}_2$  es un nuevo estado y  $-\alpha(x_1)$  es una acción que hace que la dinámica del error  $\tilde{x}_1$  en (3.19) sea contractiva y  $\alpha(0) = 0$ . Sustituyendo (3.20) en (3.19) se tiene

$$\dot{\tilde{x}}_1 = \dot{x}_{1d} - \tilde{x}_2 + \alpha(x_1) \quad (3.21)$$

Para garantizar que  $\dot{\tilde{x}}_1 = 0$  sea una solución de (3.21) cuando  $\tilde{x}_2 = 0$ , se propone para  $\alpha(x_1)$  la siguiente expresión:

$$\alpha(x_1) = -\dot{x}_{1d} - \phi(\tilde{x}_1) \quad (3.22)$$

donde  $\phi(0) = 0$ . Sustituyendo (3.22) en (3.21), el sistema en lazo cerrado queda:

$$\dot{\tilde{x}}_1 = -\tilde{x}_2 - \phi(\tilde{x}_1) \quad (3.23)$$

Luego, el sistema prolongado asociado a (3.23) está dado por

$$\Sigma_1^\delta : \begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = -\tilde{x}_2 - \phi(\tilde{x}_1) \\ \delta \dot{\tilde{x}}_1 = -\delta \tilde{x}_2 - \frac{\partial \phi(\tilde{x}_1)}{\partial \tilde{x}_1} \delta \tilde{x}_1 \end{cases} \quad (3.24)$$

El diseño de la función diferencial candidata de Lyapunov para (3.24) tiene como premisas, tanto que  $V(\tilde{x}_1, \delta \tilde{x}_1) > 0$ , como  $\dot{V}(\tilde{x}_1, \delta \tilde{x}_1) < 0$ , por lo que se propone:

$$V_1(\tilde{x}_1, \delta\tilde{x}_1) = \frac{1}{2}k_p\delta\tilde{x}_1^2 > 0 \quad (3.25)$$

donde  $k_p \in \mathbb{R}^+$ , por lo que la derivada temporal de la función diferencial candidata es:

$$\dot{V}_1(\tilde{x}_1, \delta\tilde{x}_1) = k_p\delta\tilde{x}_1\delta\dot{\tilde{x}}_1 = -k_p\delta\tilde{x}_1\delta\tilde{x}_2 - k_p\frac{\partial\phi(\tilde{x}_1)}{\partial\tilde{x}_1}\delta\tilde{x}_1^2 \quad (3.26)$$

Si se asume que  $\delta\tilde{x}_2 = 0$  y si

$$k_p\frac{\partial\phi(\tilde{x}_1)}{\partial\tilde{x}_1} > 0 \quad (3.27)$$

entonces  $\dot{V}_1(\tilde{x}_1, \delta\tilde{x}_1) < 0$  y por tanto  $\tilde{x}_1 \rightarrow 0$ .

Por tanto, en el segundo paso del proceso de diseño se debe asegurar que  $(\tilde{x}_2, \delta\tilde{x}_2) = (0, 0)$ . Retomando (3.20) y despejando  $\tilde{x}_2$  se tiene que:

$$\tilde{x}_2 = x_2 + \alpha(x_1) \quad (3.28)$$

Luego, la dinámica de  $\tilde{x}_2$ , o sea, su derivada temporal es:

$$\dot{\tilde{x}}_2 = \dot{x}_2 + \dot{\alpha}(x_1) \quad (3.29)$$

Por consiguiente, sustituyendo  $\dot{x}_2$  en (3.29), se tiene

$$\dot{\tilde{x}}_2 = \frac{1}{I_p} [\tau - bx_2 - mgl_c \text{sen}(x_1)] + \dot{\alpha}(x_1) \quad (3.30)$$

Si se sustituyen (3.20) y  $x_1$  en (3.30), esta última puede ser reescrita como sigue:

$$\dot{\tilde{x}}_2 = \frac{1}{I_p} \left[ \tau - b(\tilde{x}_2 - \alpha(x_1)) - mgl_c \text{sen}(x_{1d} - \tilde{x}_1) \right] + \dot{\alpha}(x_{1d} - \tilde{x}_1) \quad (3.31)$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta (3.23) y (3.31), el sistema en lazo cerrado puede escribirse como:

$$\Sigma_\tau : \begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = -\phi(\tilde{x}_1) - \tilde{x}_2 \\ \dot{\tilde{x}}_2 = \frac{1}{I_p} \left[ \tau - b(\tilde{x}_2 - \alpha(x_1)) - mgl_c \text{sen}(x_{1d} - \tilde{x}_1) \right] + \dot{\alpha}(x_{1d} - \tilde{x}_1) \end{cases} \quad (3.32)$$

Además, el sistema variacional de (3.32) queda expresado como se muestra a continuación:

$$\Sigma_\tau^\delta : \begin{cases} \delta\dot{\tilde{x}}_1 = -\frac{\partial\phi(\tilde{x}_1)}{\partial\tilde{x}_1}\delta\tilde{x}_1 - \delta\tilde{x}_2 \\ \delta\dot{\tilde{x}}_2 = \frac{1}{I_p}\delta\tau - \frac{b}{I_p}\delta\tilde{x}_2 + \frac{b}{I_p}\frac{\partial\alpha(x_{1d} - \tilde{x}_1)}{\partial\tilde{x}_1}\delta\tilde{x}_1 - \frac{mgl_c}{I_p}\cos(x_{1d} - \tilde{x}_1)\delta\tilde{x}_1 + \frac{\partial\dot{\alpha}(x_{1d} - \tilde{x}_1)}{\partial\tilde{x}_1}\delta\tilde{x}_1 \end{cases} \quad (3.33)$$

Luego, la propuesta de función diferencial de control de Lyapunov para el sistema prolongado compuesto por (3.32) y (3.33) tiene nuevamente como premisas, tanto que  $V(\tilde{x}_1, \delta\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \delta\tilde{x}_2) > 0$ , como  $\dot{V}(\tilde{x}_1, \delta\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \delta\tilde{x}_2) < 0$ , por lo que se propone:

$$V_2(\tilde{x}_1, \delta\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \delta\tilde{x}_2) = V_1(\tilde{x}_1, \delta\tilde{x}_1) + \frac{1}{2}I_p\delta\tilde{x}_2^2 > 0 \quad (3.34)$$

La derivada temporal de la función diferencial candidata es:

$$\dot{V}_2(\tilde{x}_1, \delta\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \delta\tilde{x}_2) = \dot{V}_1(\tilde{x}_1, \delta\tilde{x}_1) + I_p \delta\tilde{x}_2 \delta\dot{\tilde{x}}_2 \quad (3.35)$$

Sustituyendo (3.26) en (3.35) y desarrollando, se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(\tilde{x}_1, \delta\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \delta\tilde{x}_2) = & -k_p \delta\tilde{x}_1 \delta\tilde{x}_2 - k_p \frac{\partial\phi(\tilde{x}_1)}{\partial\tilde{x}_1} \delta\tilde{x}_1^2 + I_p \delta\tilde{x}_2 \left[ \frac{1}{I_p} \delta\tau - \frac{b}{I_p} \delta\tilde{x}_2 + \frac{b}{I_p} \frac{\partial\alpha(x_{1d} - \tilde{x}_1)}{\partial\tilde{x}_1} \delta\tilde{x}_1 \right. \\ & \left. - \frac{mgl_c}{I_p} \cos(x_{1d} - \tilde{x}_1) \delta\tilde{x}_1 + \frac{\partial\dot{\alpha}(x_{1d} - \tilde{x}_1)}{\partial\tilde{x}_1} \delta\tilde{x}_1 \right] \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(\tilde{x}_1, \delta\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \delta\tilde{x}_2) = & -k_p \delta\tilde{x}_1 \delta\tilde{x}_2 - k_p \frac{\partial\phi(\tilde{x}_1)}{\partial\tilde{x}_1} \delta\tilde{x}_1^2 + \delta\tilde{x}_2 \left[ \delta\tau - b\delta\tilde{x}_2 + b \frac{\partial\alpha(x_{1d} - \tilde{x}_1)}{\partial\tilde{x}_1} \delta\tilde{x}_1 \right. \\ & \left. - mgl_c \cos(x_{1d} - \tilde{x}_1) \delta\tilde{x}_1 + I_p \frac{\partial\dot{\alpha}(x_{1d} - \tilde{x}_1)}{\partial\tilde{x}_1} \delta\tilde{x}_1 \right] \end{aligned} \quad (3.37)$$

De (3.37), se propone definir:

$$\delta\tau = -b \frac{\partial\alpha(x_{1d} - \tilde{x}_1)}{\partial\tilde{x}_1} \delta\tilde{x}_1 + mgl_c \cos(x_{1d} - \tilde{x}_1) \delta\tilde{x}_1 - I_p \frac{\partial\dot{\alpha}(x_{1d} - \tilde{x}_1)}{\partial\tilde{x}_1} \delta\tilde{x}_1 + \delta u \quad (3.38)$$

donde  $\delta u$  es el variacional de una función adicional que se propone por parte del autor y que luego quedará en la ley de control resultante. Luego, al sustituir (3.38) en (3.37), se obtiene:

$$\dot{V}_2(\tilde{x}_1, \delta\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \delta\tilde{x}_2) = -k_p \delta\tilde{x}_1 \delta\tilde{x}_2 - k_p \frac{\partial\phi(\tilde{x}_1)}{\partial\tilde{x}_1} \delta\tilde{x}_1^2 - b\delta\tilde{x}_2^2 + \delta u \delta\tilde{x}_2 \quad (3.39)$$

A partir del resultado obtenido en (3.39), se procede a la propuesta de las funciones que hasta el momento no han sido definidas en el procedimiento, de forma tal que estas garanticen que  $\dot{V}(\tilde{x}_1, \delta\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \delta\tilde{x}_2) < 0$ , tal es el caso de  $\phi(\tilde{x}_1)$  y  $\delta u$ , proponiéndose:

$$\phi(\tilde{x}_1) = k_p \tilde{x}_1 \quad (3.40)$$

$$\delta u = k_p \delta\tilde{x}_1 - K_v^{var}(x_2) \delta\tilde{x}_2 \quad (3.41)$$

siendo  $K_v^{var}(x_2) = \frac{k_1 x_2^2}{x_2^2 + k_2}$  una función definida positiva que queda dependiente de la velocidad  $x_2$  y donde las constantes  $k_1, k_2 \in \mathbb{R}^+$ . Por tanto, al sustituirse (3.40) y (3.41) en (3.39):

$$\dot{V}_2(\tilde{x}_1, \delta\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \delta\tilde{x}_2) = \cancel{-k_p \delta\tilde{x}_1 \delta\tilde{x}_2} - k_p^2 \delta\tilde{x}_1^2 - b\delta\tilde{x}_2^2 + \cancel{k_p \delta\tilde{x}_1 \delta\tilde{x}_2} - K_v^{var}(x_2) \delta\tilde{x}_2^2 \quad (3.42)$$

Resultando finalmente:

$$\dot{V}_2(\tilde{x}_1, \delta\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \delta\tilde{x}_2) = -k_p^2 \delta\tilde{x}_1^2 - b\delta\tilde{x}_2^2 - K_v^{var}(x_2) \delta\tilde{x}_2^2 < 0 \quad (3.43)$$

por lo que (3.43) cumple con la condición (2.29), lo que resulta suficiente para demostrar la contracción de cualquier par de trayectorias del sistema en lazo cerrado. Luego, la ley control en los estados  $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$  se puede determinar partiéndose de (3.38), y se procede a integrar dicha expresión como sigue:

$$\int \delta\tau = -b \int \frac{\partial\alpha(x_{1d} - \tilde{x}_1)}{\partial\tilde{x}_1} \delta\tilde{x}_1 + mgl_c \int \cos(x_{1d} - \tilde{x}_1) \delta\tilde{x}_1 - I_p \int \frac{\partial\dot{\alpha}(x_{1d} - \tilde{x}_1)}{\partial\tilde{x}_1} \delta\tilde{x}_1 + k_p \int \delta\tilde{x}_1 - k_1 K_v^{var}(x_2) \int \delta\tilde{x}_2 \quad (3.44)$$

Integrando cada uno de los términos en (3.44) se obtiene:

$$\tau = -b\alpha(x_{1d} - \tilde{x}_1) + mgl_c \text{sen}(x_{1d} - \tilde{x}_1) - I_p \dot{\alpha}(x_{1d} - \tilde{x}_1) + k_p \tilde{x}_1 - K_v^{var}(x_2) \tilde{x}_2 \quad (3.45)$$

De igual forma, (3.45) puede ser reescrita como sigue:

$$\tau = -b\alpha(x_1) + mgl_c \text{sen}(x_1) - I_p \dot{\alpha}(x_1) + k_p \tilde{x}_1 - K_v^{var}(x_2) \tilde{x}_2 \quad (3.46)$$

Si se sustituye (3.22) y  $\tilde{x}_2$  despejada de (3.23), todo esto en (3.46), se obtiene:

$$\tau = -b(-\dot{x}_{1d} - k_p \tilde{x}_1) + mgl_c \text{sen}(x_1) - I_p (-\ddot{x}_{1d} - k_p \dot{\tilde{x}}_1) + k_p \tilde{x}_1 - K_v^{var}(x_2) (-\dot{\tilde{x}}_1 - \phi(\tilde{x}_1)) \quad (3.47)$$

donde  $\ddot{x}_{1d}$  es la aceleración deseada. Desarrollando (3.47) y sustituyendo la dinámica del error de posición definida en (3.19):

$$\tau = b\dot{x}_{1d} + bk_p \tilde{x}_1 + mgl_c \text{sen}(x_1) + I_p \ddot{x}_{1d} + I_p k_p (\dot{x}_{1d} - x_2) + k_p \tilde{x}_1 + K_v^{var}(x_2) (\dot{x}_{1d} - x_2) + K_v^{var}(x_2) k_p \tilde{x}_1 \quad (3.48)$$

Por tanto, agrupando términos semejantes en (3.48), se obtiene la ley de control propuesta en (3.17), resultante del procedimiento antes descrito. ■

El controlador diseñado garantiza la contracción de las soluciones del sistema en lazo cerrado y a su vez resuelve tanto el problema de *control de trayectoria*, como el de *control de posición*. En este, además de los parámetros del péndulo, se tiene una ganancia proporcional  $k_p$  constante y la ganancia variable como una función dependiente de la velocidad  $K_v^{var}$ , dicha función contiene dos constantes  $k_1$  y  $k_2$  que al igual que  $k_p$ , deberán ser sintonizadas.

La ley de control (3.17) puede ser reagrupada en términos de *Feedforward*  $u_{ff}$ , otros de *Feedback*  $u_{fb}$  y un grupo de ganancia variable dependiente de la velocidad  $u_{K_v^{var}}$ , el cual contiene una combinación de elementos de *Feedforward* y *Feedback*, como se muestra a continuación

$$\tau = \underbrace{b\dot{x}_{1d} + I_p \ddot{x}_{1d} + I_p k_p \dot{x}_{1d} - I_p k_p x_2}_{:=u_{ff}} + \underbrace{bk_p \tilde{x}_1 + k_p \tilde{x}_1 + mgl_c \text{sen}(x_1)}_{:=u_{fb}} + \underbrace{K_v^{var}(x_2) (\dot{x}_{1d} - x_2 + k_p \tilde{x}_1)}_{:=u_{K_v^{var}}} \quad (3.49)$$

Cada uno de los grupos antes mencionados presenta las siguientes propiedades:

- Los componentes de *Feedback*  $u_{fb}$  garantizan que el lazo cerrado sea uniformemente convergente, o sea, que el control basado en contracción asegure la estabilidad del sistema en lazo cerrado, y una única y acotada respuesta en estado estable ante cualquier perturbación acotada.

- Los términos de *Feedforward*  $u_{ff}$  dan forma a la respuesta de estado estable para llegar a la posición deseada  $x_{1d}$ .
- En los elementos agrupados como  $u_{K_{var}}$ , tiene una incidencia directa la función de ganancia variable propuesta. Por su estructura y diseño, dependiente de la velocidad, cuando esta última alcance valores elevados, una ganancia de valor alto va a resultar, por lo que en ese caso los términos  $u_{K_{var}}$  en su conjunto contribuirán al rechazo de perturbaciones de baja frecuencia, en cambio, al llegar la velocidad a sus valores más pequeños, se producirá una ganancia de menor valor, lo que permitirá contrarrestar la sensibilidad al ruido de alta frecuencia.

### 3.4. Implementación experimental del controlador de ganancia variable

La implementación del controlador de ganancias variables mostrado en la sección anterior se realizó a través de una tarjeta Arduino Due, en la que se desarrolló un programa donde se aplica la lógica necesaria para llevar a cabo el control del péndulo. Algunas de las principales características de la tarjeta se muestran en la tabla 3.2 y una imagen de la misma en la figura 3.5.

Características	Valor
Microcontrolador	Atmel SAM3X8E ARM Cortex-M3 (32 bits)
Tensión de alimentación	3.3 V
Puertos digitales(E/S)	54(12 salidas PWM)
Entradas analógicas	12 (10 bits)
Salidas analógicas DACs	2 (12 bits)
Memoria FLASH	512 Kb
Frecuencia de operación	84 MHz

Tabla 3.2: Características de la tarjeta Arduino Due.

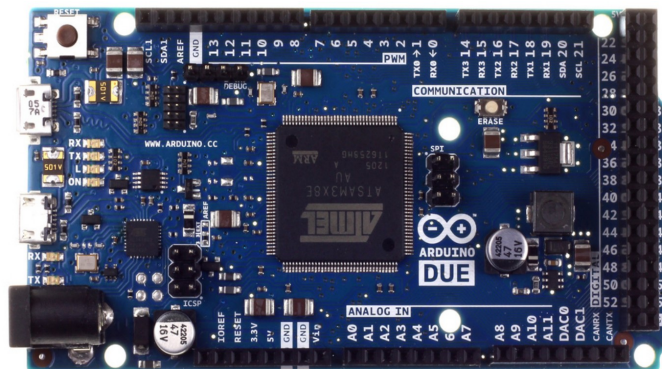
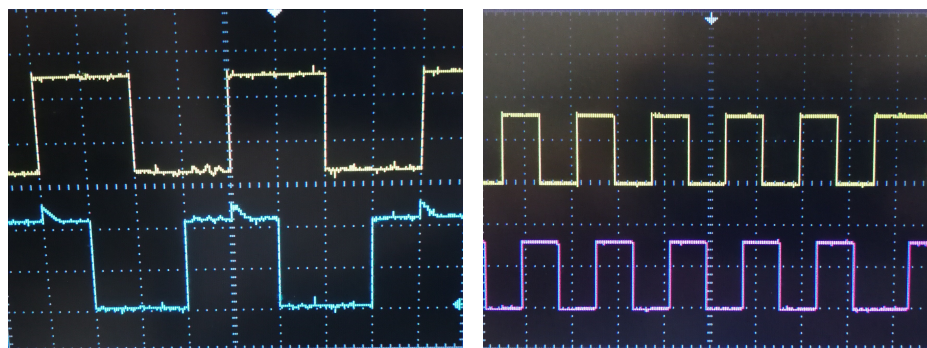


Figura 3.5: Tarjeta Arduino Due.

Para realizar un correcto acoplamiento entre el driver que maneja el servomotor que acciona al péndulo y la tarjeta Arduino Due empleada, se tuvieron en cuenta diferentes aspectos como la lectura de las

señales del encoder provenientes del servomotor, las cuales se encuentran desfasadas  $90^\circ$ , contienen ruido, y tienen valor máximo de tensión de 5V, que excede el límite de 3.3V que soportan las entradas analógicas del Arduino Due, ver figura 3.6(a). Para solventar este problema se utilizó un transistor NPN en modo saturación con el objetivo de reducir el nivel máximo de tensión a un valor no mayor de 3.3V en las entradas del Arduino Due, y un filtro pasabajas para eliminar el ruido en la señal, dicha configuración se muestra en las figuras 3.7(a) y 3.7(b), y para más detalles consultar [33]. Una vez eliminado el ruido presente en las señales del encoder, así como reducido su valor máximo de tensión de 5V a 3.3V, el resultado se aprecia en la figura 3.6(b). Igualmente, para manejar niveles de tensión adecuados que no sobrepasaran la tensión máxima admitida por el servomotor, se necesitó incorporar diferentes etapas de amplificadores operaciones a la salida del DAC1, siendo la primera, la encargada de eliminar el offset de 54mV que este presenta, ver figura 3.8.



(a) Señal con ruido del encoder. (b) Señal del encoder procesada.

Figura 3.6: Señales provenientes del encoder ubicado en el servomotor del péndulo.

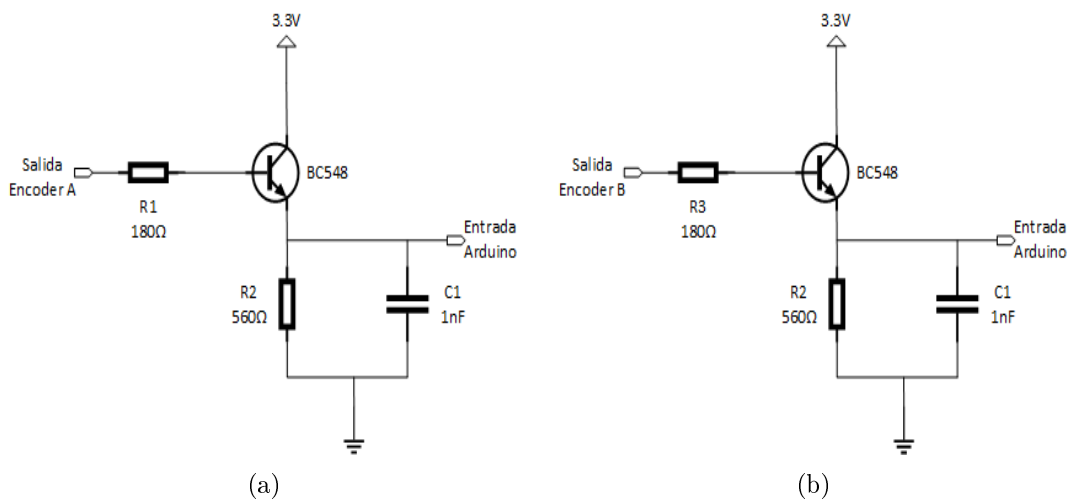


Figura 3.7: Circuito de acoplamiento del encoder del péndulo a las entradas analógicas del Arduino Due.

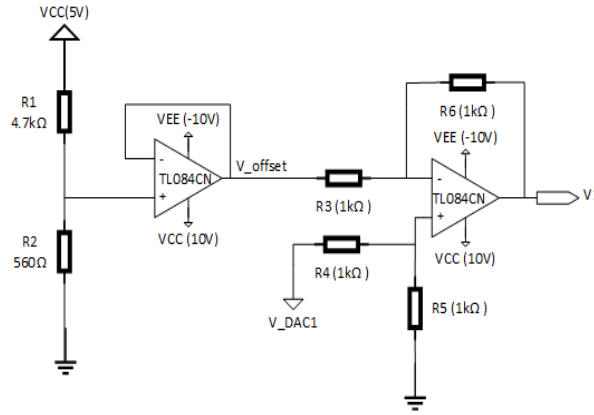


Figura 3.8: Circuito para eliminar offset del DAC1 del Arduino Due.

Como se aprecia en la figura 3.8, primeramente se genera la tensión de offset del DAC1 del Arduino Due mediante un divisor de tensión, ver (3.50). Este se conecta a un amplificador operacional configurado como seguidor de tensión con el fin de acoplar las impedancias entre el divisor de tensión y el resto del circuito. La tensión de offset generada con el divisor de tensión se le resta a la proveniente del DAC1 mediante una configuración diferencial, ver (3.51).

$$V_{offset} = V_{CC} \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (3.50)$$

$$V_1 = \frac{(R_3 + R_6) R_5}{(R_4 + R_5) R_3} V_{DAC1} - \frac{R_6}{R_3} V_{offset} \quad (3.51)$$

Una vez eliminada la tensión de offset, en  $V_1$  se obtiene un máximo de tensión de 2.1V, por lo que se busca amplificar dicha tensión máxima hasta los 5V, y para esto se emplea una configuración no inversora de amplificación que va a permitir generar un rango de tensión  $V_2$  de 0V a 5V, como se muestra en la figura 3.9 y en (3.52). Finalmente, para realizar giros del péndulo a favor y en contra de las manecillas del reloj, se necesita extender el rango de tensión de salida de -5V a 5V, esto se logra con la última configuración que se aprecia en la figura 3.9, donde se obtiene  $V_{salida}$  y su ecuación se muestra en (3.53).

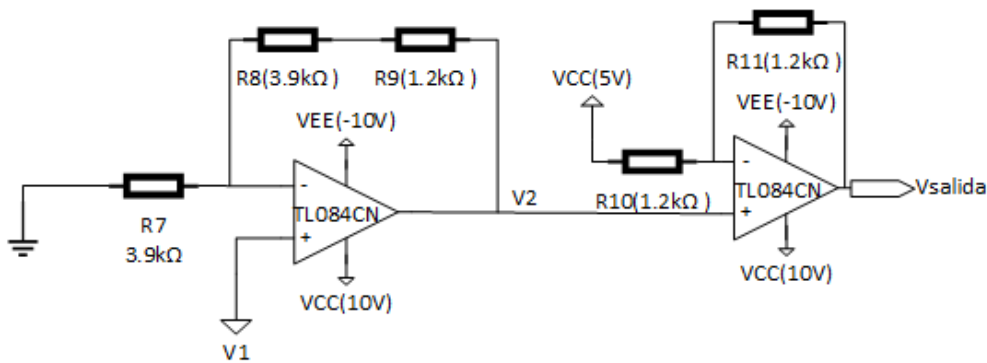
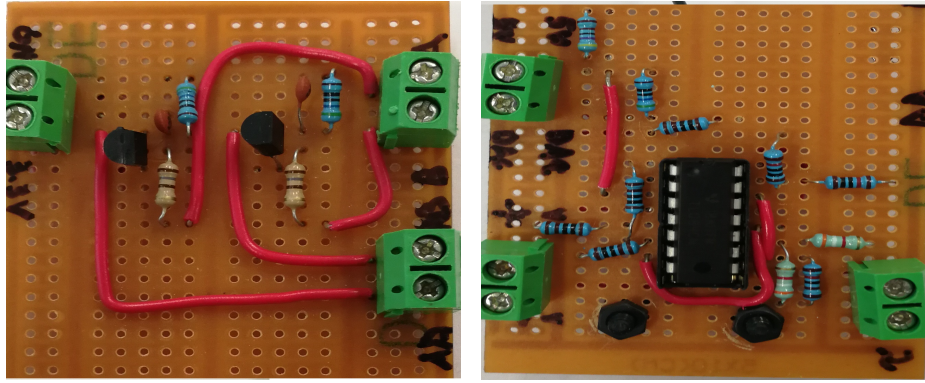


Figura 3.9: Circuito para la amplificación de la tensión de salida del DAC1 del Arduino Due.

$$V_2 = V_1 \left( 1 + \frac{R_8 + R_9}{R_7} \right) \quad (3.52)$$

$$V_{salida} = 2V_2 - V_{cc} \tag{3.53}$$

Por último, la implementación física de la electrónica antes descrita para el procesamiento de las señales provenientes del encoder se aprecia en la figura 3.10(a), así como la etapa de ajuste de offset y amplificación de la tensión de salida del DAC1 hacia la entrada de control del péndulo se observa en la figura 3.10(b).



(a) Acoplamiento de señales del encoder. (b) Ajuste de offset y amplificación.

Figura 3.10: Electrónica implementada para el acoplamiento del Arduino Due con el encoder del péndulo y con la entrada de control del robot.

Luego de incorporada la etapa electrónica adicional a la salida del DAC1 se procedió a caracterizar el mismo, configurado a 12 bits, lo que permite obtener 4096 valores analógicos de salida. El resultado se muestra en la figura 3.11, obteniéndose una salida lineal y con un rango aproximado entre -5V y 5V.

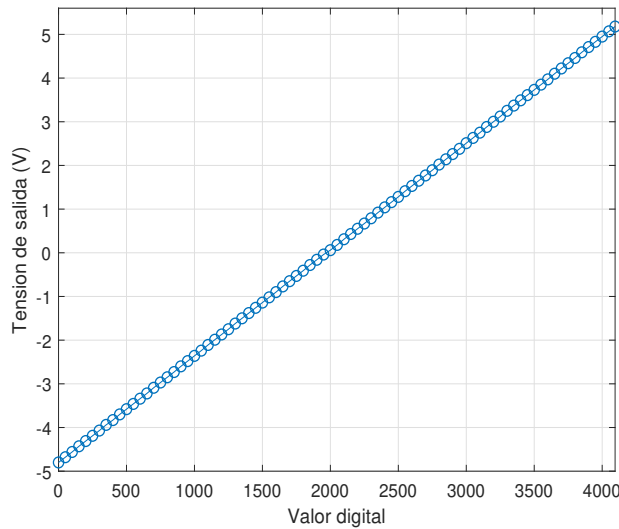


Figura 3.11: Caracterización del DAC1 del Arduino Due.

Con los valores obtenidos producto de la caracterización del DAC1, y empleando el método de mínimos

cuadrados [37], se obtuvo la ecuación de la recta que mejor se aproxima a los resultados arrojados por dicho convertidor digital-analógico, quedando

$$y = 0.002436x - 4.798372 \tag{3.54}$$

donde  $x$  representa los valores digitales del DAC1 y  $y$  el rango de valores de tensión en volts a la salida de este.

### 3.5. Resultados experimentales

Para la realización de las pruebas experimentales, se desarrolló un programa en Arduino, el cual se puede consultar en el Apéndice A.1. La lógica implementada en dicho programa se muestra en la figura 3.12. En este caso se muestran los resultados obtenidos con la implementación de la ley de control de posición propuesta en (3.17), la cual se programó en el Arduino Due y se aplicó al servomotor del péndulo, por lo que se realizó la sintonía de sus constantes, quedando la ganancia proporcional  $k_p = 3.4$ , y constantes de la función de ganancia variable propuesta en (3.41),  $k_1 = 3.5$  y  $k_2 = 0.000003$ .

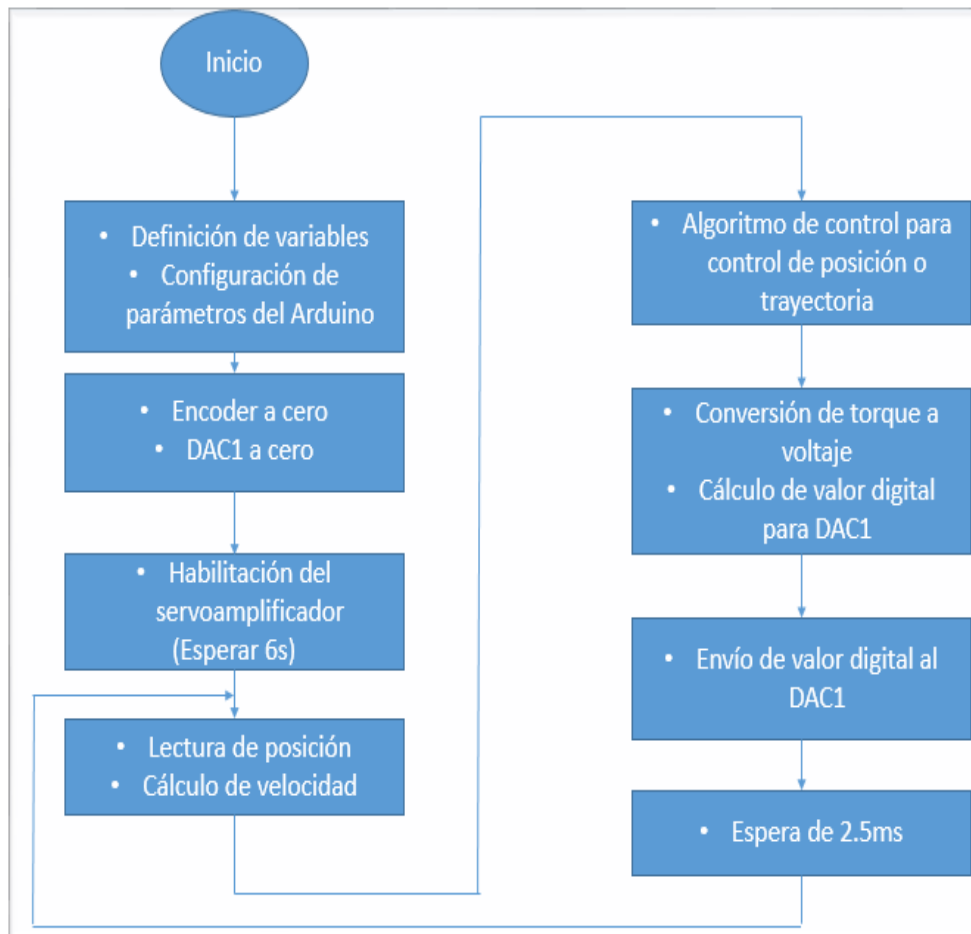
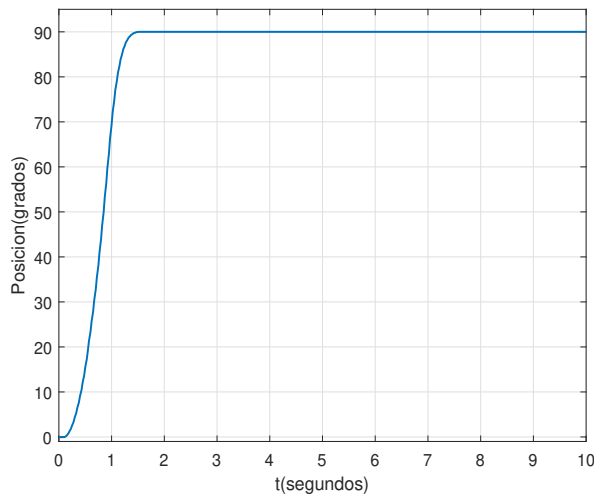
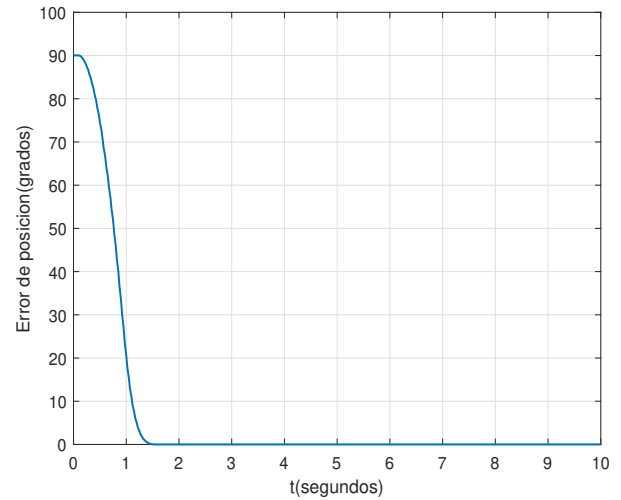


Figura 3.12: Algoritmo general para el control del péndulo del robot de 3 g.d.l.

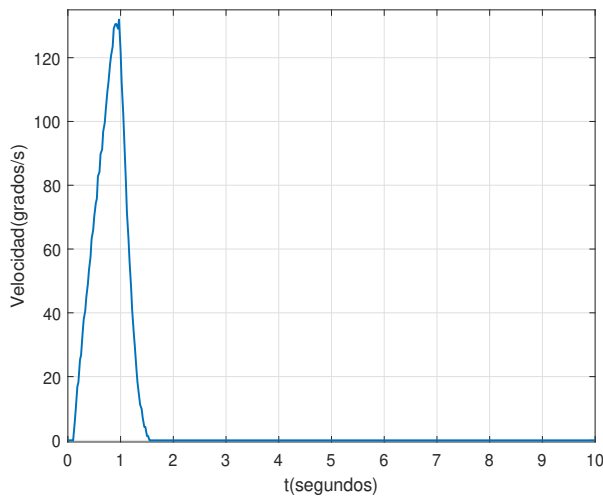
Ya con el controlador sintonizado, los resultados experimentales se muestran en la figura 3.13. Primeramente en 3.13(a) se aprecia una respuesta rápida del péndulo, sin sobreimpulsos y con una pendiente de subida suave, llegando a la posición deseada de  $90^\circ$  en 1.52s. Por otra parte, se observa en 3.13(b) el error de posición, el cual converge a cero al alcanzar la posición deseada. En 3.13(c) se muestra el comportamiento de la velocidad articular, la que en su pendiente de subida llega a alcanzar un valor máximo de 132 grados/s y luego disminuye hasta valer cero al alcanzar la posición deseada. Finalmente, en 3.13(d) se ve el par entregado por el servomotor, el cual no supera su valor máximo de 4Nm y luego mantiene la posición deseada con un valor de torque pequeño de 0.5Nm.



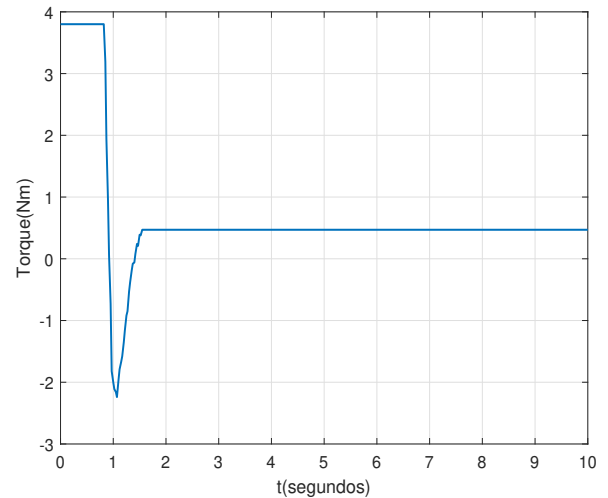
(a) Posición vs tiempo.



(b) Error de posición vs tiempo.



(c) Velocidad vs tiempo.

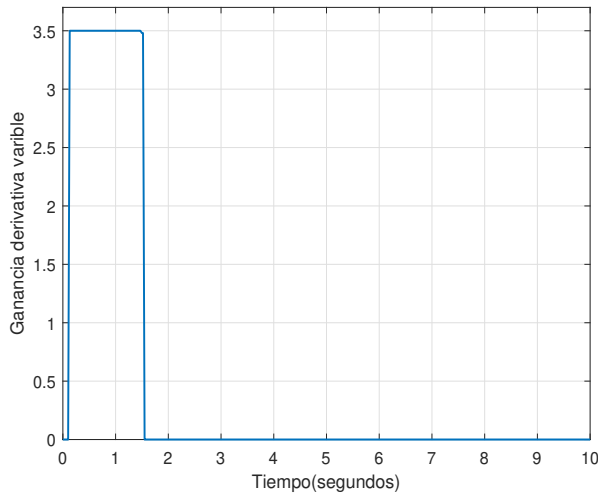


(d) Torque vs tiempo.

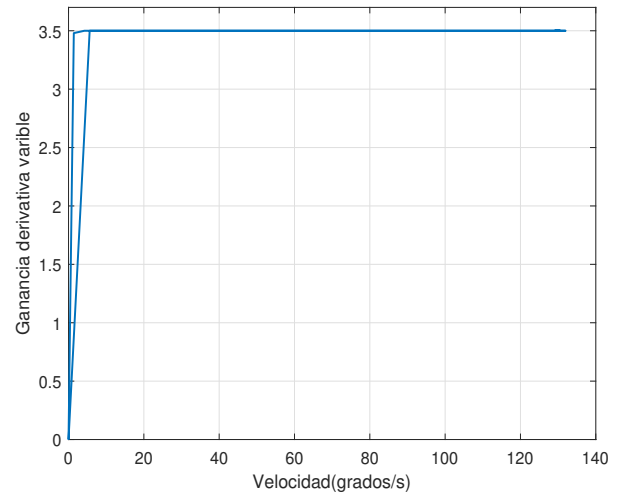
Figura 3.13: Comportamiento en lazo cerrado del péndulo.

En cuanto al comportamiento obtenido de la función propuesta de ganancia variable dependiente de la velocidad articular, en 3.14(a) se observa la evolución de la ganancia derivativa variable en el tiempo,

presentado una histéresis de 1.55s, tiempo en el que alcanza su valor máximo, correspondiendo con el lapso en que el péndulo se mueve hacia la posición deseada y la velocidad se hace máxima. En 3.14(b) se puede apreciar el comportamiento de dicha ganancia con respecto a los valores de velocidad articular.



(a) Ganancia derivativa variable vs tiempo.



(b) Ganancia derivativa variable vs velocidad.

### 3.6. Resultados en simulación

Adicionalmente a los resultados experimentales obtenidos con la implementación en el robot manipulador de 1 grado de libertad con el controlador de ganancia variable diseñado, a este último se le realizó un cambio en la función de ganancia variable, con vistas a mejorar el desempeño y comparar el controlador con otros del mismo tipo. La función de ganancia variable propuesta está definida como sigue:

$$K_v^{var}(x_2) = \frac{\beta_1 \Gamma_M^2(x_2)}{1 + \beta_2 \frac{\partial \Gamma_M(x_2)}{\partial x_2}} \quad (3.55)$$

donde  $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}^+$  y la definición de la función  $\Gamma_M(x_2)$ , la cual es dos veces diferenciable, estuvo inspirada en el trabajo desarrollado en [38] y se muestra a continuación:

$$\Gamma_M(x_2) = \begin{cases} -M & \text{si } x_2 < -M - \alpha \\ p_1(x_2) = a_1 x_2^2 + b_1 x_2 + c_1 & \text{si } x_2 \in [-M - \alpha, -M + \alpha] \\ x_2 & \text{si } x_2 \in [-M + \alpha, M - \alpha] \\ p_2(x_2) = a_2 x_2^2 + b_2 x_2 + c_2 & \text{si } x_2 \in [M - \alpha, M + \alpha] \\ +M & \text{si } x_2 > M + \alpha \end{cases} \quad (3.56)$$

con  $a_1 = -a_2 = \frac{1}{4\alpha}$ ,  $b_1 = b_2 = \frac{1}{2} + \frac{M}{2\alpha}$ ,  $c_1 = -M + \frac{\alpha}{2} + b_1 M - a_1 (M^2 + \alpha^2)$  y  $c_2 = -M + \frac{\alpha}{2} + b_2 M - a_2 (M^2 + \alpha^2)$ . A su vez  $M \in \mathbb{R}$  funge como cota superior e inferior de la función, y  $0 < \alpha < 1$  influye directamente sobre la pendiente de la función.

La ecuación (3.55) es una función definida positiva dependiente de la velocidad, por lo que al ser sustituida en el diseño del controlador de ganancia variable de la sección 3.3, garantiza que la función de Lyapunov

en (3.43) sea definida negativa, siendo una condición suficiente para demostrar la contracción de cualquier par de trayectorias del sistema en lazo cerrado. Dicho esto, se realizaron pruebas a nivel simulación del controlador resultante en (3.17), con la nueva función de ganancia variable propuesta en (3.55), esto mediante un programa desarrollado en MATLAB/Simulink, y que sus principales componentes pueden ser consultados en el Apéndice A.2. Se tuvo como caso de estudio una posición deseada  $q_d = 90^\circ$  y como valores de ganancia del controlador diseñado,  $k_p = 2.167$ ,  $\beta_1 = 1$ ,  $\beta_2 = 30$ ,  $\alpha = 0.9$ ,  $M = 5$ . Seis diferentes escenarios fueron escogidos para evaluar el rendimiento en lazo cerrado del controlador. Como primer caso se consideraron valores nominales, o sea, cada parámetro establecido por el fabricante y en condiciones ideales, sin la presencia de perturbaciones, ruido o desgaste en los componentes del sistema. Como segundo escenario se tuvo en cuenta la presencia de perturbaciones externas, específicamente una función cuadrada de amplitud 10 y 12 rad/s de frecuencia. Ruido blanco de 0.0001 de poder en la medición de la posición articular se contempló para el tercer caso. La combinación de la perturbación externa y el ruido blanco antes descritos fue el cuarto escenario escogido. Para el quinto caso, incertidumbre en diversos parámetros del péndulo se consideraron presentes, tales como  $m_i = m - 0.2m$ ,  $l_{c_i} = l_c + 0.3l_c$ ,  $b_i = b + 0.7b$ ,  $I_{r_i} = I_r - 0.5I_r$ . Finalmente, como sexto escenario se consideró la coincidencia de los casos 4 y 5, o sea, donde existen perturbaciones externas, ruido en la medición e incertidumbre en los parámetros del péndulo, siendo este el escenario más desfavorable de los antes descritos que podría enfrentarse el controlador. Luego, en las figuras 3.14 y 3.15 se muestran el error de posición y el torque generado respectivamente.

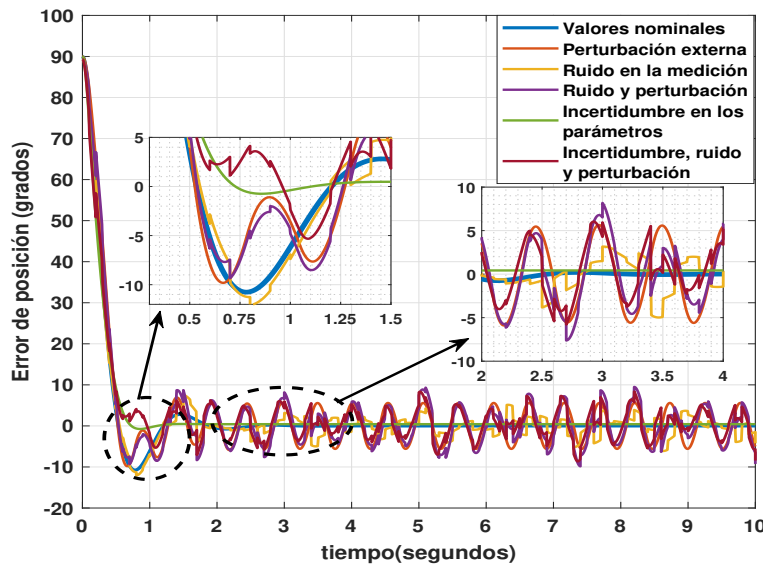


Figura 3.14: Simulación del error de posición en lazo cerrado.

En la figura 3.14 se puede apreciar que para el caso nominal, el error de posición converge a cero en aproximadamente 2.6 segundos, teniendo un pico máximo de  $11^\circ$  de error, elementos que se pueden valorar como una respuesta rápida y con sobreimpulso relativamente pequeño. En el segundo, tercer, cuarto y sexto escenario, el error se mantiene acotado en una región cercana a cero, entre  $-10^\circ$  y  $10^\circ$  de magnitud. Finalmente, el caso de incertidumbre en los parámetros, al igual que en el primer escenario, el error de posición converge a cero. En la figura 3.15 se muestra el torque que ejerce el servomotor del péndulo, no excediendo los 4 Nm de torque máximo, y en sentido general se aprecia un comportamiento similar al error de posición. Como es de esperar, el torque para los escenarios 2, 3, 4 y 6, se mantiene oscilando en

una región acotada, siendo esta de aproximadamente 1 Nm. A su vez, para el primer y quinto escenario, tan pronto el error converge a cero el torque se mantiene constante, garantizando la posición deseada.

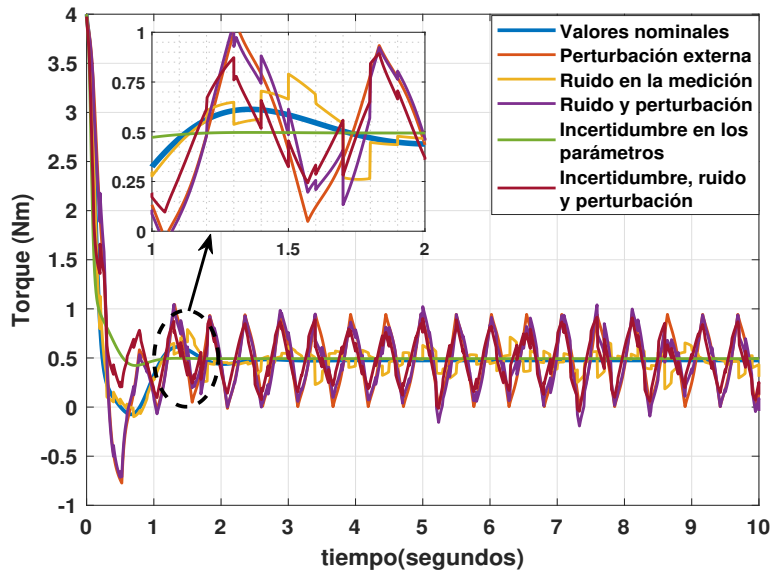


Figura 3.15: Simulación del torque generado por el servomotor del péndulo.

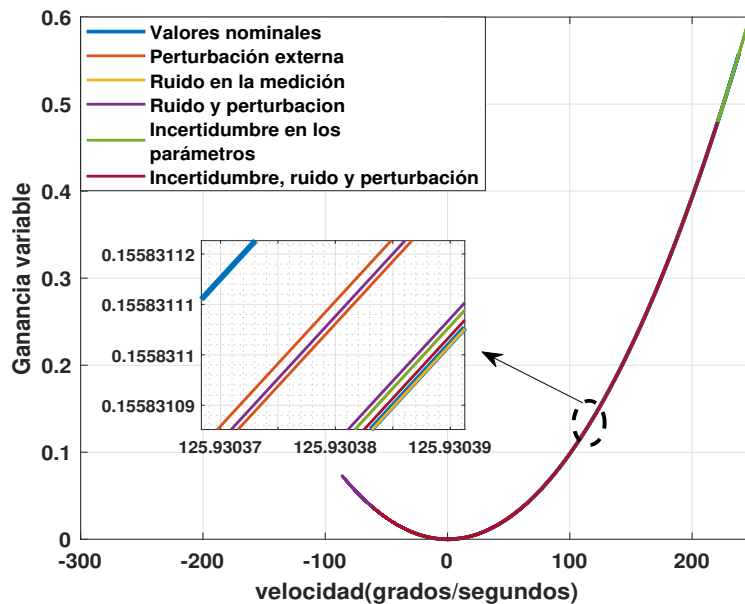


Figura 3.16: Simulación de la ganancia variable vs velocidad.

Finalmente, el comportamiento de la ganancia variable respecto a la velocidad articular del péndulo se muestra en la figura 3.16, donde esta varía en relación a la desaceleración o aceleración del péndulo, ocurriendo así para los 6 escenarios descritos anteriormente.

### 3.6.1. Análisis de desempeño

El desempeño obtenido ante cada uno de los 6 escenarios descritos en la sección anterior con el controlador diseñado y la nueva función de ganancia variable, se comparó con el de otros 5 controladores ante los mismos 6 casos, estos fueron un Proporcional Derivativo (PD), 2 controladores de ganancias variables de la literatura, el diseñado en [3], que se le denominó como CAO, y el desarrollado en [4], al que se le llamó COR, también el controlador diseñado en este capítulo sin la inclusión de la ganancia variable, y por último dicho controlador basado en contracción, con la primera función de ganancia variable propuesta. Para medir dicho desempeño se emplearon 2 tipos de normas diferentes.

#### Norma RMS

Primeramente la norma RMS definida en (3.57), la cual se emplea comúnmente para analizar cualitativamente (rendimiento del estado estable) una señal, reflejando en sentido general el tamaño promedio de esta.

$$RMS = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \|\tilde{x}_1(t)\|^2 dt} \tag{3.57}$$

Los resultados obtenidos al aplicar la norma RMS a los 5 controladores en cuestión, ante los 6 escenarios anteriormente descritos se muestran en la tabla 3.3, y a manera de gráfico de barras en la figura 3.17. Por un lado, para analizar la tabla 3.3, cabe señalar que en cada escenario, el menor valor significará un mejor de desempeño, ocurriendo igual en la figura 3.17, donde en cada caso, la barra más pequeña va a representar el controlador de mejor rendimiento.

	PD	CAO	COR	Contractivo (sin gan. var.)	Contractivo (con gan. var. 1)	Contractivo (con gan. var. 2)
Valores nominales	0.22172	0.23075	0.22338	0.22413	0.22183	0.2182
Perturbación externa	0.25017	0.25944	0.25546	0.25306	0.24664	0.24174
Ruido en la medición	0.22118	0.22968	0.2215	0.22341	0.22194	0.21824
Ruido y perturbación	0.24833	0.2566	0.25209	0.25125	0.24509	0.24014
Incertidumbre en los parámetros	0.20045	0.21962	0.20171	0.20362	0.2075	0.19292
Incertidumbre, ruido y perturbación	0.21498	0.23476	0.21467	0.21548	0.22038	0.20904

Tabla 3.3: Resultados obtenidos con la norma RMS.

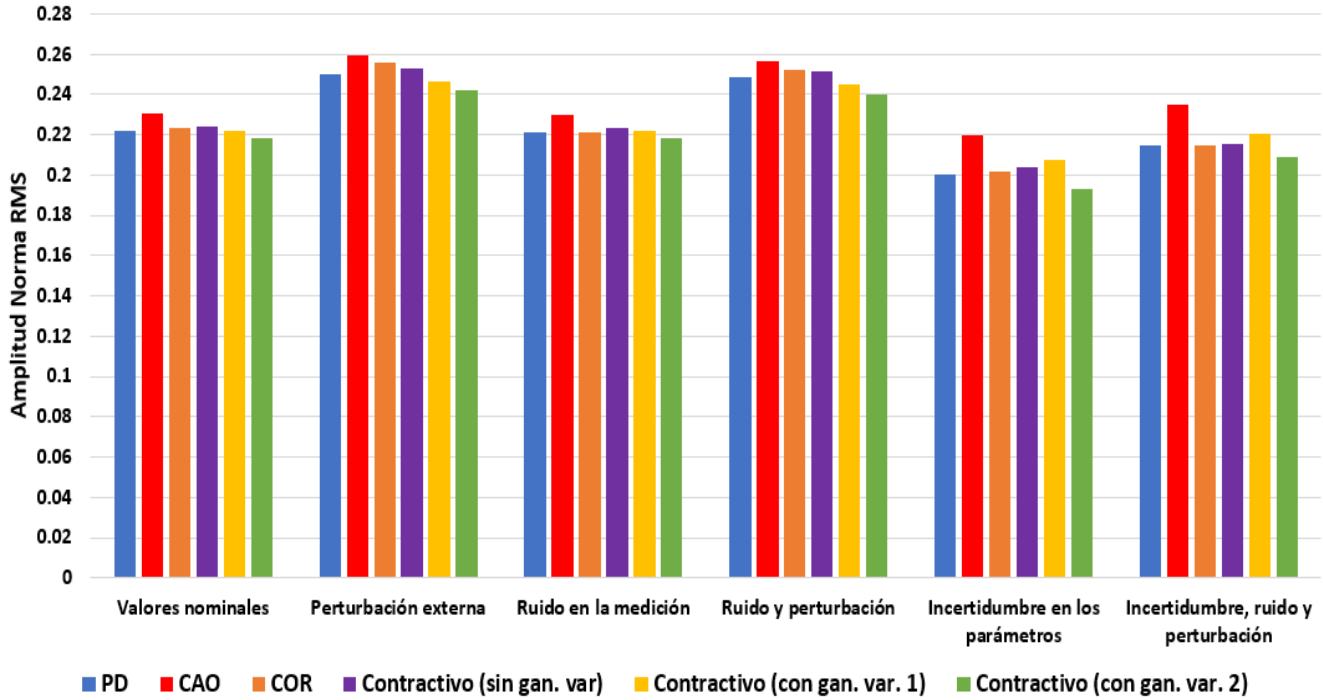


Figura 3.17: Desempeño de varios controladores en diferentes situaciones con la norma RMS.

Al observar tanto la tabla 3.3 como la figura 3.17, es evidente que el controlador basado en contracción diseñado con la inclusión de la nueva función de ganancia variable tiene un mejor desempeño que los demás controladores en cada uno de los escenarios propuestos. Especialmente se hace notar cuando están presentes perturbaciones externas, donde logra destacar más el controlador propuesto, lo que muestra la robustez del mismo, hecho que no se manifiesta de igual forma si está ausente la función de ganancia variable, por lo que se intuye la mejora en el rendimiento que provoca la inclusión de esta función, siendo finalmente el controlador diseñado el de mejor desempeño para todos los casos frente a los demás controladores empleados.

### Norma $\mathcal{L}_2$

A su vez, se empleó la norma  $\mathcal{L}_2$  definida en (3.58), la que permite realizar un análisis cuantitativo (rendimiento del estado transitorio) [39].

$$\mathcal{L}_2 = \sqrt{\int_0^T \|\tilde{x}_1(t)\|^2 dt} \tag{3.58}$$

Para analizar los resultados obtenidos con la norma  $\mathcal{L}_2$  se tiene en cuenta el mismo criterio empleado anteriormente con la norma RMS, donde un menor valor o barra más pequeña, va a significar un mejor desempeño, estos resultados se muestran en la tabla 3.4 y la figura 3.18. Igualmente resulta evidente numérica y gráficamente que el controlador diseñado con la nueva función de ganancia variable presenta un mejor rendimiento para cada uno de los 6 escenarios abordados respecto a los demás controladores objetos de comparación, especialmente cuando existen perturbaciones externas, y aún más importante, en el sexto caso donde confluyen ruido, perturbaciones e incertidumbre, el controlador de mejor desempeño

es notoriamente el propuesto en este trabajo de tesis, siendo clara nuevamente la mejora que conlleva la inclusión de la función de ganancia variable.

	PD	CAO	COR	Contractivo (sin gan. var.)	Contractivo (con gan. var. 1)	Contractivo (con gan. var. 2)
Valores nominales	0.70115	0.72969	0.7064	0.70878	0.70148	0.69
Perturbación externa	0.79111	0.82043	0.80784	0.80025	0.77994	0.76444
Ruido en la medición	0.69943	0.72632	0.70045	0.70648	0.70185	0.69015
Ruido y perturbación	0.78529	0.81146	0.79719	0.79452	0.77506	0.75941
Incertidumbre en los parámetros	0.63387	0.69452	0.63785	0.6439	0.65618	0.61006
Incertidumbre, ruido y perturbación	0.67983	0.74236	0.67884	0.68142	0.69689	0.66104

Tabla 3.4: Resultados obtenidos con la norma  $\mathcal{L}_2$ .

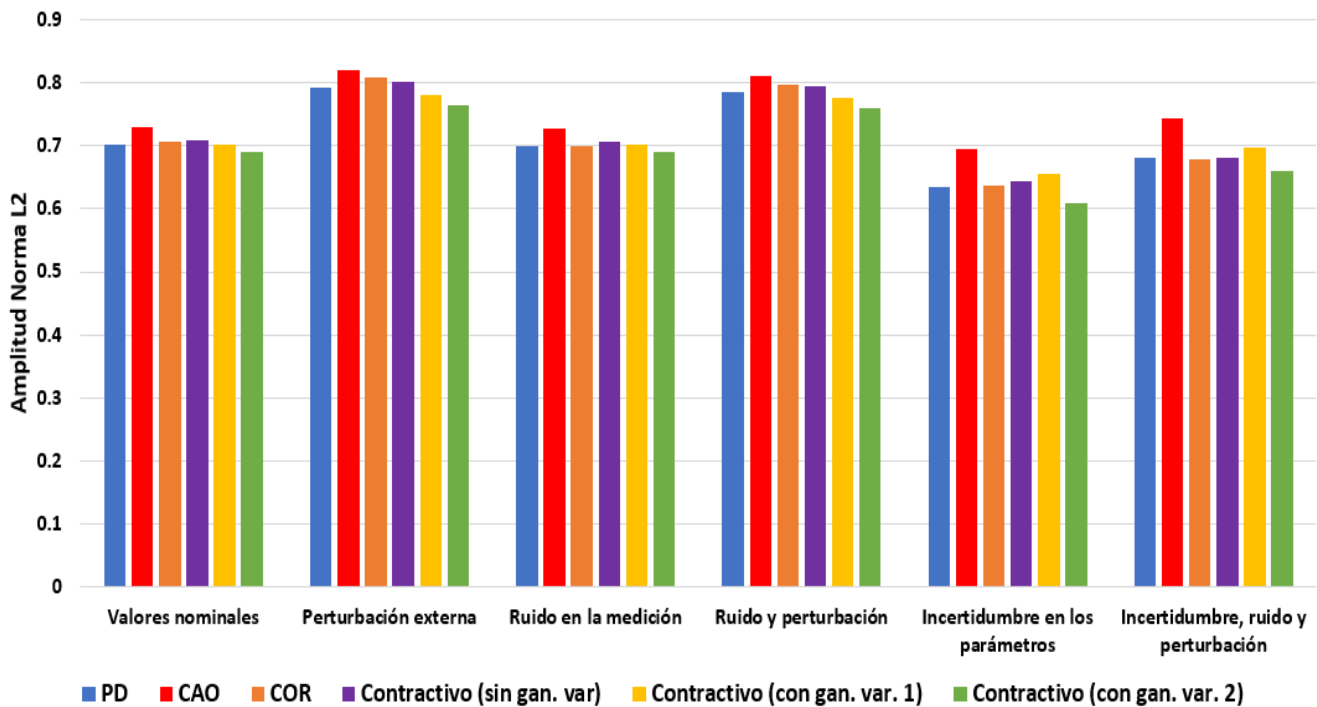


Figura 3.18: Desempeño de varios controladores en diferentes situaciones con la norma  $\mathcal{L}_2$ .

# Capítulo 4

## Sistema de estabilización de haz láser

Hoy en día, una gran cantidad de sistemas láser son usados en aplicaciones muy complejas debido a su exactitud y seguridad, donde la robustez queda definida por su capacidad de estabilización. Por esto el controlador toma un papel fundamental ya que tiene como objetivo principal llevar al punto deseado el haz, así como atenuar lo más posible el efecto del ruido y las perturbaciones externas inducidas. Así, un diseño óptimo del controlador permite afrontar estos retos. Debido a las características únicas del láser, como direccionalidad, monocromaticidad, coherencia e intensidad, es usado en una gran variedad de aplicaciones, tales como procesos de maquinaria industrial, metrología, comunicaciones de fibra óptica, ingeniería de audio/video, holografía, investigación de fisión nuclear, milicia, medicina, etc, [40]. El sistema de estabilización de haz láser o LBS (Laser Beam Stabilization por sus siglas en inglés) empleado en este trabajo de tesis, está conformado por un módulo estabilizador láser, un tablero terminal y una tarjeta de adquisición de datos o DAQ QPID (Quanser Personality Intelligent Data Acquisition por sus siglas en inglés).

### 4.1. Principio de funcionamiento

El sistema de estabilización de haz láser cuenta con un principio de operación bastante sencillo, y se compone por 3 elementos fundamentales, la fuente del haz láser, el espejo de direccionamiento rápido o FSM (Fast Steering Mirror por sus siglas en inglés), y un detector sensible a la posición o PSD (Position Sensitive Detector por sus siglas en inglés). Primeramente el láser es dirigido al FSM, el cual es controlado por un actuador de bobina de voz que provoca la rotación en torno a un pivote. El haz láser es reflejado desde el FSM hacia el PSD, donde se censa la posición del haz para así reajustar la posición del FSM mediante el control de la bobina de voz, hasta garantizar que el reflejo del haz coincida con la posición o trayectoria deseada. El FSM puede ser sometido a una perturbación deslizante provocada por un motor de DC, el cual tiene acoplada una carga asimétrica y se encuentra montado sobre una guía lineal unida a un resorte para generar fuerza de restauración. De esta forma, al aplicar una tensión de DC a dicho motor, se genera un movimiento de vaivén en la guía lineal, lo que provoca la perturbación dinámica introducida al sistema, la cual varía amplitud y frecuencia en el tiempo. Una síntesis de este principio de funcionamiento se puede observar en la figura 4.1.

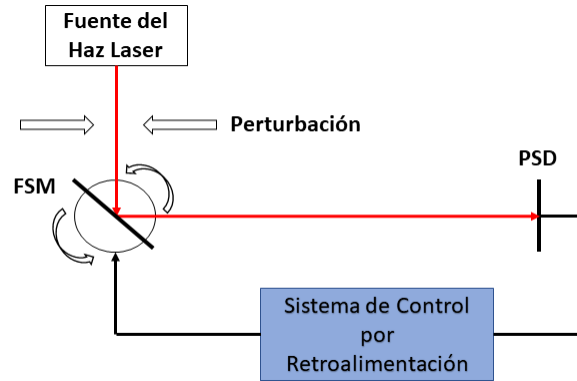


Figura 4.1: Principio de funcionamiento del sistema LBS.

Una vista más detallada de la integración de todos los elementos que componen el sistema LBS, los cuales son descritos más adelante, la ofrece el diagrama de bloques que se muestra en la figura 4.2.

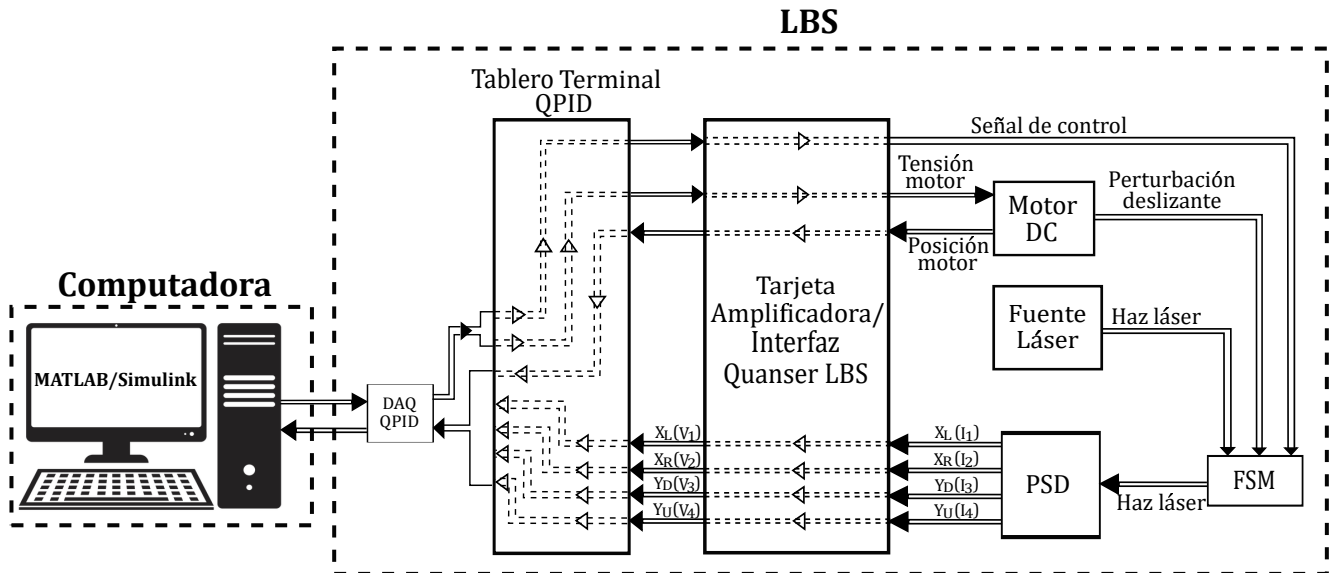


Figura 4.2: Diagrama de bloques general del sistema LBS.

## 4.2. Componentes del sistema LBS

El sistema estabilizador de haz láser (LBS por sus siglas en inglés), está compuesto por un conjunto de elementos que permiten la estabilización de un haz láser de fuente estática. En la figura 4.3 se ilustra el sistema LBS con notación para identificar sus componentes, los cuales se enuncian en la Tabla 5.4.

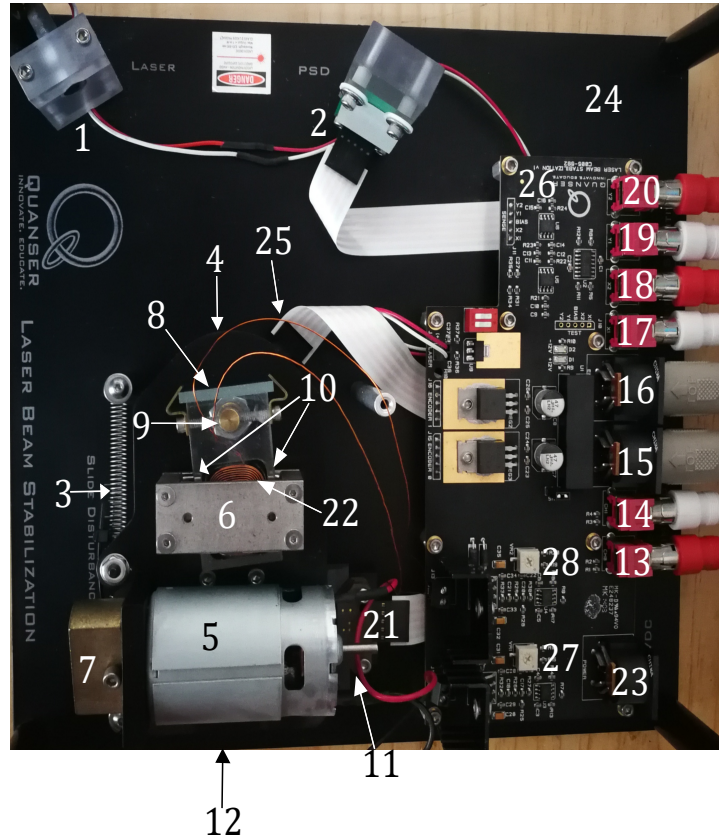


Figura 4.3: Componentes del sistema LBS.

ID	Descripción	ID	Descripción
1	Fuente estática láser	16	Conector <i>Coil Encoder</i>
2	Detector sensible a la posición (PSD)	17	Conector <i>PSD X1</i>
3	Resorte	18	Conector <i>PSD X2</i>
4	Guía lineal	19	Conector <i>PSD Y1</i>
5	Motor DC	20	Conector <i>PSD Y2</i>
6	Arnés de bobina de voz	21	Encoder lineal de perturbación deslizante
7	Carga excéntrica	22	Bobina
8	Espejo	23	Conector de alimentación $\pm 15V$ DC
9	Eje de encoder de bobina de voz	24	Plataforma LBS
10	Imanes permanentes	25	Encoder rotatorio de bobina de voz
11	Tira de encoder	26	Tarjeta Amplificadora/Interfaz Quanser LBS
12	Riel guía	27	Perilla offset VR1
13	Conector <i>Slide Command</i>	28	Perilla offset VR2
14	Conector <i>Coil Command</i>	29	
15	Conector <i>Slide Encoder</i>	30	

Tabla 4.1: Componentes del módulo estabilizador láser.

### 4.2.1. Fuente Láser

La fuente láser (ID 1 de la figura 4.3) es un láser semiconductor sujetado por una estructura estática, como se ilustra en la figura 4.4. Este es de baja potencia, sin embargo el contacto directo con el ojo humano puede causar daño permanente.

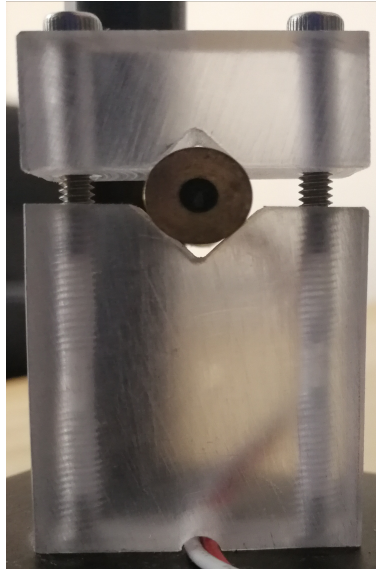
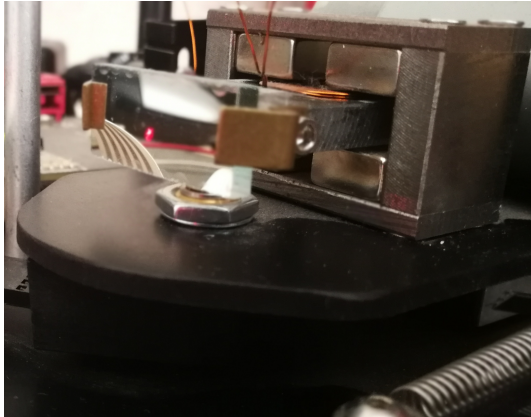


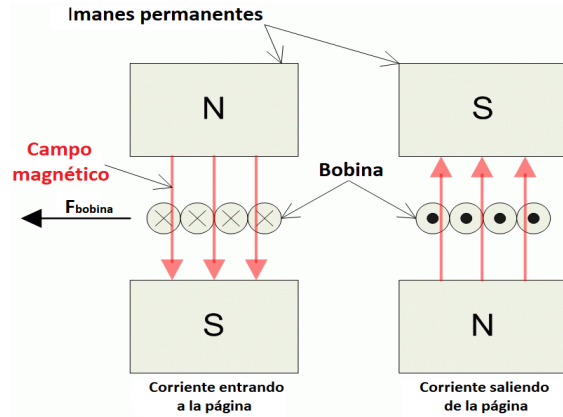
Figura 4.4: Fuente estática láser.

### 4.2.2. Espejo de direccionamiento rápido (FSM) y bobina de voz

El espejo de direccionamiento rápido o FSM (por sus siglas en inglés), se ubica montado sobre un eje cuyo giro es controlado por un actuador de bobina de voz. Una bobina de voz (ID 22 en la figura 4.3) en sentido general es un motor eléctrico en su forma más simple; es un actuador compuesto por un hilo magnético y un par de imanes permanentes (ID 10 en la figura 4.3), siendo de un alto ancho de banda debido a la baja inductancia de la bobina, de aproximadamente de  $600 \mu\text{H}$ . La bobina está montada sobre una caja de fibra de vidrio que pivotea sobre el eje de un encoder giratorio (ID 9 en la figura 4.3). Luego, la fuerza electromagnética generada aplica un torque sobre el eje del encoder que rota el espejo (ID 8 en la figura 4.3). El encoder (ID 25 en la figura 4.3) mide la posición angular del actuador bobina de voz. En el modo cuadratura el encoder realiza 4096 pulsos por revolución, debido a esto tiene una resolución de  $0.0879$  grados/pulso [41], [42]. El espejo de direccionamiento rápido, así como una descripción gráfica del principio de operación de la bobina de voz se pueden apreciar en las figuras 4.5(a) y 4.5(b) respectivamente.



(a) Vista lateral del FSM y encoder rotatorio.

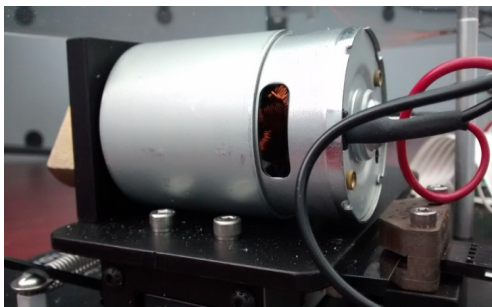


(b) Imanes del actuador de la bobina de voz.

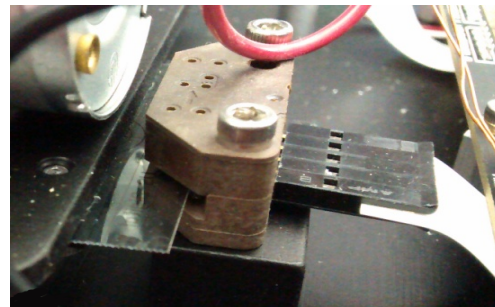
Figura 4.5: Espejo de direccionamiento rápido (FSM).

### 4.2.3. Perturbación deslizando

El subsistema que genera la perturbación deslizando está conformado por un motor de corriente directa de 12 VDC (ID 5 en la figura 4.3), con carga asimétrica montado sobre una guía lineal (ID 4 en la figura 4.3) unida a un resorte que genera fuerza de restauración (ID 3 en la figura 4.3) y que se desliza por un riel guía (ID 12 en la figura 4.3), como se muestra en la figura 4.6(a). De esta forma, al aplicar un valor constante de tensión al motor, la carga asimétrica gira y hace que la base se deslice hacia adelante y hacia atrás, generando un movimiento de vaivén en la guía lineal, lo que representa la perturbación dinámica introducida al sistema, la cual varía amplitud y frecuencia en el tiempo. La fricción de Coulomb del motor corresponde a un voltaje de 1V a 1.5V. La guía lineal tiene acoplada una regleta (ID 11 en la figura 4.3) en el lado derecho, la cual tiene como función ser leída por el encoder lineal (ID 21 en la figura 4.3) para determinar la posición lineal de perturbación, ver figura 4.6(b)<sup>1</sup>. El encoder lineal tiene una salida de 500 pulsos/pulgada, y en el modo cuadratura tiene una salida de 2000 líneas/pulgada, resultando en una resolución de  $1.27 \mu\text{m}$  [41], [42].



(a) Motor de DC.



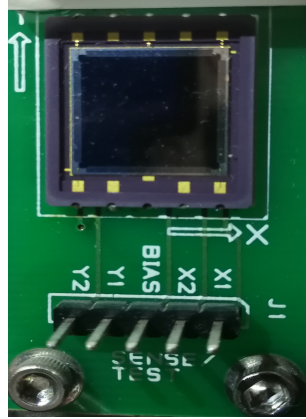
(b) Encoder lineal.

Figura 4.6: Subsistema de perturbación deslizando.

<sup>1</sup>Las figuras 4.6(a) y 4.6(b) fueron tomadas de [42].

#### 4.2.4. Detector Sensible a la Posición (PSD)

El detector sensible a la posición (ID 2 en la figura 4.3), es un sensor optoelectrónico del tipo bidimensional que utiliza la resistencia de la superficie de un fotodiodo para calcular la posición del láser. Los PSD bidimensionales poseen dos parejas de electrodos de salida  $X_1 = X_L$ ,  $X_2 = X_R$ ,  $Y_1 = Y_D$  y  $Y_2 = Y_U$ . El sensor en cuestión tiene una resolución de  $1.5\mu\text{m}$ , un área activa de  $9\text{x}9\text{mm}$  y el rango de error en la medición es de  $\pm 150\mu\text{m}$  para un punto de luz de  $0.2\text{mm}$  de diámetro. Una vista frontal del PSD instalado en el LBS se puede observar en la figura 4.7 [41].



(a) Vista frontal del PSD.

- ① Anode X1 (I1)
- ② NC
- ③ NC
- ④ NC
- ⑤ Anode Y1 (I3)
- ⑥ Anode X2 (I2)
- ⑦ NC
- ⑧ Cathode
- ⑨ NC
- ⑩ Anode Y2 (I4)

(b) Pines E/S del PSD

Figura 4.7: PSD bidimensional instalado en el sistema LBS.

Las corrientes fotosensibles que genera el PSD son proporcionales a las posiciones  $x$  y  $y$  de un punto de luz en su superficie (con sentidos positivos  $x$  a la derecha y  $y$  hacia arriba), y las fórmulas para determinar dichas posiciones se muestran en (4.1) y (4.2) respectivamente.

$$x = \left(\frac{L}{2}\right) \left(\frac{I_2 + I_3 - I_1 - I_4}{I_1 + I_2 + I_3 + I_4}\right) \quad (4.1)$$

$$y = \left(\frac{L}{2}\right) \left(\frac{I_2 + I_4 - I_1 - I_3}{I_1 + I_2 + I_3 + I_4}\right) \quad (4.2)$$

donde  $L = 10\text{mm}$  es la longitud de la resistencia detectable e  $I_1, I_2, I_3, I_4$  son las corrientes fotosensibles del PSD.

Como se mencionó anteriormente, el FSM unicamente permite mover el haz en el eje horizontal sobre el PSD, por lo que la retroalimentación de este para propósitos de control se limita a la posición  $x$ . En la práctica, a fin de generar corriente cuando el haz de luz golpee la superficie, el sensor debe ser polarizado por el terminal común, lo que se denomina como circuito de polarización [43]. Luego, las corrientes de salida generadas por el PSD son de valores muy pequeños (del orden de los  $\text{pA}$ ), por lo que estas deben ser amplificadas y convertidas a tensiones para su posterior procesamiento e interpretación como valores de posición, esta configuración es denominada circuito de amplificación [43]. Tanto la configuración amplificadora como el circuito de polarización tienen lugar en la tarjeta amplificadora/interfaz QPID. Por tanto,

las salidas de la tarjeta concernientes al PSD son las tensiones  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $V_3$  y  $V_4$  asociadas a las corrientes  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  y  $I_4$  respectivamente, como se muestra en la figura 4.8<sup>2</sup>.

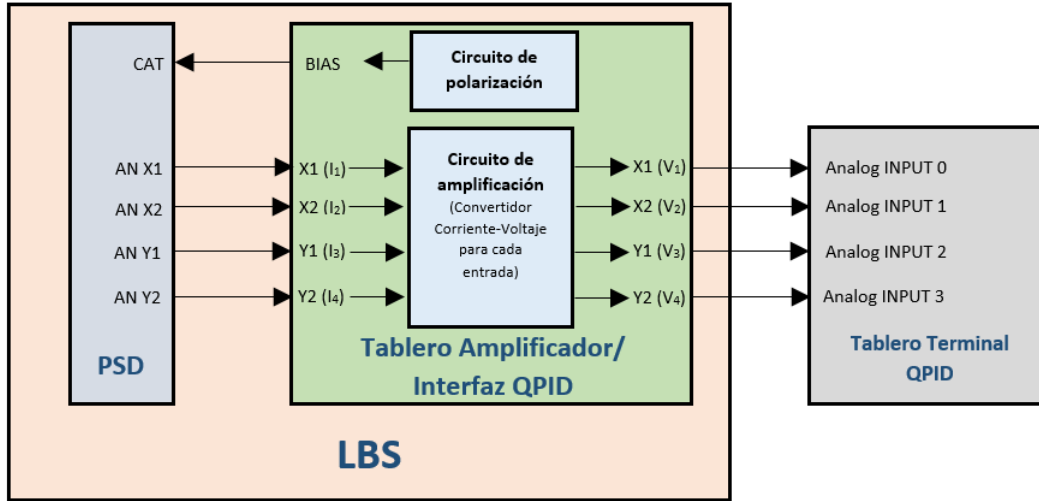


Figura 4.8: Acoplamiento de señales del PSD.

Asumiendo un caso ideal en el que las relaciones de magnitudes de corriente se conservan a pesar de la polarización y amplificación, la posición del haz láser con origen en el centro de la superficie en términos de tensión está dada por:

$$x = \left(\frac{L}{2}\right) \left(\frac{V_2 + V_3 - V_1 + V_4}{V_1 + V_2 + V_3 + V_4}\right) \quad (4.3)$$

$$y = \left(\frac{L}{2}\right) \left(\frac{V_2 + V_4 - V_1 + V_3}{V_1 + V_2 + V_3 + V_4}\right) \quad (4.4)$$

#### 4.2.5. Tarjeta Amplificadora/Interfaz Quanser LBS

La tarjeta amplificadora/interfaz Quanser LBS (ID 26 en la figura 4.3) es una tarjeta electrónica que suministra energía a los componentes del sistema LBS, como el PSD, la fuente láser, el motor de DC, la bobina de voz, y además conecta todos los sensores a las entradas del tablero terminal y amplifica las señales de salida analógicas de este último a los actuadores del sistema LBS [41], [42]. En la figura 4.9<sup>3</sup> se ilustran las entradas, salidas y puerto de alimentación de la tarjeta amplificadora/interfaz Quanser LBS.

<sup>2</sup>Imagen tomada de [42].

<sup>3</sup>Imagen tomada de [42].

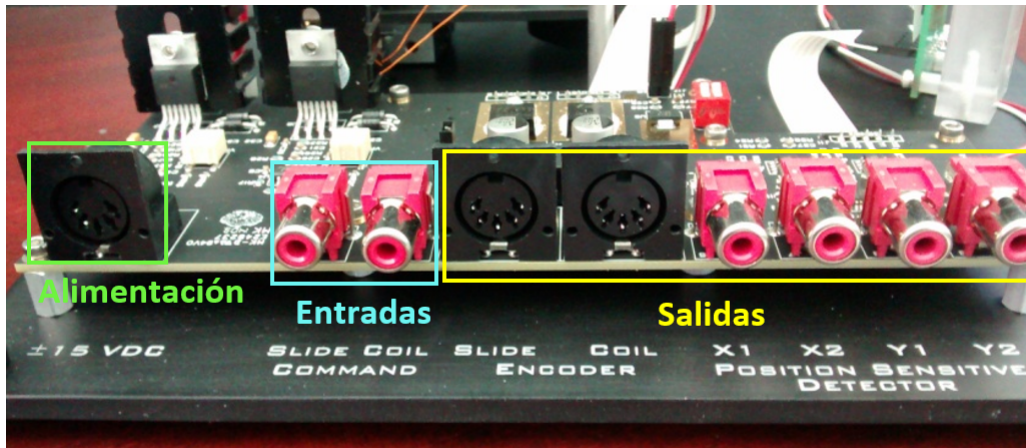


Figura 4.9: Tarjeta Amplificadora/Interfaz Quanser LBS.

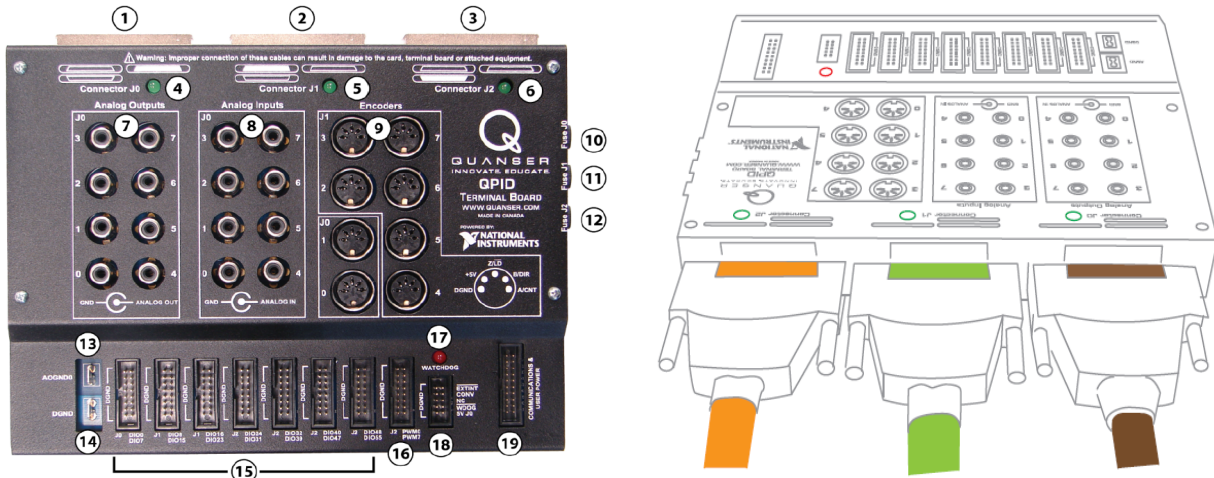
Las cuatro corrientes generadas por el PSD antes mencionadas, son convertidas a tensiones, canalizadas a los conectores RCA (ID 17 al 20 respectivamente en la figura 4.3) y conectadas a las entradas analógicas del tablero terminal (Analog Input 0-3). El motor de DC y la bobina de voz son controlados por las entradas RCA Slide Command y Coil Command (ID 13 y 14 respectivamente en la figura 4.3), que provienen de las salidas analógicas del terminal, Analog Output 1 y Analog Output 0 respectivamente. Los encoders de la perturbación deslizante y la bobina de voz (ID 15 y 16 respectivamente en la figura 4.3) son conectados por medio de conectores DIN y se conectan a las terminales de encoder del tablero terminal (J0-1 y J0-0 respectivamente). La tarjeta amplificadora/interfaz Quanser LBS utiliza el amplificador operacional Texas Instruments OPA548 para amplificar estas dos señales de encoders en 1V/V [41], [42].

De acuerdo a su hoja de datos, el OPA548 puede proporcionar una corriente de salida de 5A de pico máxima y continua de 3A. La tensión de alimentación de la tarjeta amplificador/interfaz QLBS es de  $\pm 15V$  y le llega por medio de un conector DIN, como se aprecia en la figura 4.9. La tarjeta amplificadora posee también dos perillas sobre etiquetadas como VR1 y VR2 (ID 27 y 28 respectivamente en la figura 4.3). La primera ajusta el voltaje de offset del motor DC y se calibra con el fin de que el eje de dicho motor no rote cuando el LBS esta encendido. La segunda permite ajustar el voltaje offset de la bobina de voz, con el objetivo de que esta no golpee con las paredes de su arnés (ID 6 en la figura 4.3) cuando el LBS está encendido [41], [42].

#### 4.2.6. Tablero Terminal QPID

El tablero terminal es el dispositivo que permite la comunicación entre la tarjeta DAQ QPID y el módulo estabilizador láser. En la figura 4.10(a) se muestra el tablero, con una notación que representa el tipo de puertos que contiene, especificados en la tabla 4.2. El tablero dispone de tres conectores para la comunicación con la tarjeta DAQ QPID, los que se pueden apreciar en la figura 4.10(b)<sup>4</sup>.

<sup>4</sup>La figuras 4.10(a) y 4.10(b) fueron tomadas de [42].



(a) Vista superior de Tablero Terminal QPID.

(b) Conectores del tablero terminal con la tarjeta DAQ QPID.

Figura 4.10: Tablero Terminal QPID.

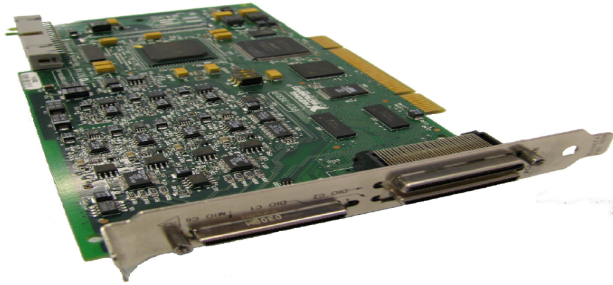
ID	Descripción	ID	Descripción
1	Conector J0	11	Fusible para conector J1
2	Conector J1	12	Fusible para conector J2
3	Conector J2	13	Lengüeta de tierra analógica
4	LED encendido Conector J0	14	Lengüeta de tierra digital
5	LED encendido Conector J1	15	Conectores Digitales E/S
6	LED encendido Conector J2	16	Conector PWM
7	Conectores de Sal. Analógicas	17	LED Watchdog
8	Conectores de Ent. Analógicas	18	Conector de control
9	Conectores de Ent. Encoders	19	Conector de comunicación
10	Fusible para conector J0		

Tabla 4.2: Componentes de Tablero Terminal QPID.

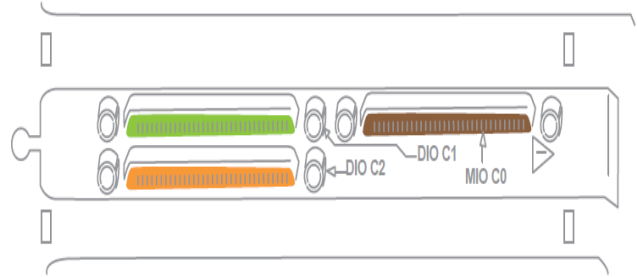
### 4.2.7. Tarjeta de Adquisición de Datos (DAQ QPID)

La tarjeta DAQ QPID es un dispositivo PCI basado en la tecnología reconfigurable I/O de National Instruments, que permite procesar grandes cantidades de datos en tiempo real. Una de sus grandes ventajas es la ejecución en tiempo real, que hace posible usarla con MATLAB y LABVIEW, siendo adecuado para diversas configuraciones complejas de control para la investigación y la docencia. Dicha tarjeta posee un amplio rango de entradas y salida, lo que permite conectar y controlar una gran variedad de dispositivos instrumentados con sensores digitales y analógicos incluyendo encoders de cuadratura, etc. Esta tarjeta se puede apreciar en la figura 4.11(a), y como se observa en la 4.11(b)<sup>5</sup>, la DAQ QPID cuenta con tres conexiones de salida, teniendo asociada cada una la comunicación con recursos específicos de la tarjeta, como se muestra en tabla 4.3.

<sup>5</sup>Las figuras 4.11(a) y 4.11(b) fueron tomadas de [42].



(a) Tarjeta DAQ QPID.



(b) Conexiones en tarjeta DAQ QPID.

Figura 4.11: Tarjeta de adquisición de datos DAQ QPID.

Conector DAQ QPID	Conector Tablero Terminal	Cable	Función
Conector 0	Conector J0	NI SHC68-68-RMIO (Color Café)	Ent. Analógica 0-7
			Sal. Analógica 0-7
			Ent. Encoder 0-1
			E/S. Digital 0-7
			Indicador Watchdog
Conector 1	Conector J1	NI SHC68-68-RDIO (Color Verde)	Ent. Encoder 2-7
			E/S. Digital 8-23
			Ent. Interrup. Ext.
			Ent. Convert
			Interfaz SPI
Conector 2	Conector J2	NI SHC68-68-RDIO (Color Naranja)	E/S. Digital 24-55
			Sal. PWM 0-7

Tabla 4.3: Funciones de conectores DAQ QPID - Tablero Terminal QPID.

### 4.3. Modelo dinámico de la bobina de voz

El lazo de control para el sistema LBS es el que se muestra en la figura 4.12, donde  $X_d \in R$  es la posición deseada del eje de rotación,  $E(s)$  es el error de posición,  $C(s)$  es la función transferencial del controlador,  $V_c(s)$  es la transformada de Laplace de la tensión de entrada a la bobina de voz,  $P(s)$  es la función transferencial del actuador y  $X(s)$  es la transformada de Laplace de la posición horizontal de la bobina.

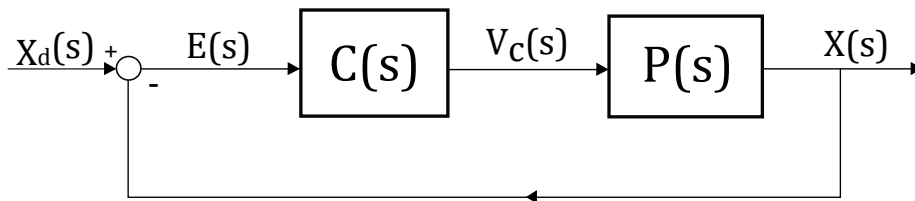


Figura 4.12: Lazo de control para sistema LBS.

La función transferencial del actuador  $P(s)$  [41], está dada por:

$$P(s) = \frac{X(s)}{V_c(s)} = \frac{K}{Ts^2 + s} \quad (4.5)$$

donde  $K$  es la ganancia en lazo abierto y  $T$  es la constante de tiempo en lazo abierto.

$$X(s)Ts^2 + X(s)s = KV_c(s) \quad (4.6)$$

$$X(s)s^2 + X(s)\frac{s}{T} = \frac{K}{T}V_c(s) \quad (4.7)$$

Luego (4.7) expresada como ecuación diferencial:

$$\ddot{x} + \dot{x}\frac{1}{T} = \frac{K}{T}V_c \quad (4.8)$$

$$\ddot{x} = -\frac{1}{T}\dot{x} + \frac{K}{T}V_c \quad (4.9)$$

Por tanto, definiendo la posición  $x_1 = x$  y la velocidad  $x_2 = \dot{x}$ , y a su vez definiendo  $a = \frac{1}{T}$  y  $b = \frac{K}{T}$ , el sistema expresado en variables de estado está dado por:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -ax_2 + bV_c \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

## 4.4. Diseño del controlador y análisis de contracción del sistema LBS en lazo cerrado

Para diseñar el esquema de control se propuso, al igual que para el caso del péndulo, una adaptación de la técnica de control no lineal backstepping, basada en análisis de contracción, por lo que el requerimiento de estabilidad en el sentido de Lyapunov va a ser reemplazado por el requerimiento de contractividad, y para lograrlo se diseñaron de manera recursiva funciones *diferenciales* de Lyapunov.

**Proposición:** Considerándose una posición deseada  $x_{1d}(t) \in \mathcal{X}$  para el sistema LBS en (4.10), y definiendo el error de posición como  $\tilde{x}_1 = x_{1d} - x_1$ , entonces el sistema (4.10) en lazo cerrado con la ley de control por retroalimentación

$$V_c = \frac{1}{b}\ddot{x}_{1d} + \dot{x}_{1d} \left( \frac{a}{b} + \frac{1}{b} \operatorname{sech}^2(\tilde{x}_1) \right) - \frac{1}{b} \operatorname{sech}^2(\tilde{x}_1) x_2 + \frac{a}{b} \tanh(\tilde{x}_1) + \frac{k_p}{Tb} \tilde{x}_1 + K_v^{var}(x_2) \left( \frac{1}{Tb} \dot{x}_{1d} - \frac{1}{Tb} x_2 + \frac{1}{Tb} \tanh(\tilde{x}_1) \right) \quad (4.11)$$

es contractivo con  $K_v^{var}(x_2) = \frac{k_1 x_2^2}{x_2^2 + k_2}$ ,  $k_1, k_2 \in R^+$ , y la función diferencial de Lyapunov dada por

$$V_2(\tilde{x}_1, \delta\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \delta\tilde{x}_2) = \frac{1}{2} k_p \delta\tilde{x}_1^2 + \frac{1}{2} T \delta\tilde{x}_2^2 \quad (4.12)$$

**Demostración por construcción:** Primeramente, se introduce el error de posición  $\tilde{x}_1$  definido previamente, cuya dinámica está dada por

$$\dot{\tilde{x}}_1 = \dot{x}_{1d} - x_2 \quad (4.13)$$

donde  $\dot{\tilde{x}}_1$  es la velocidad deseada. Luego, se asume que  $x_2$  es una acción de control artificial expresado como:

$$x_2 = \tilde{x}_2 - \alpha(x_1) \quad (4.14)$$

donde  $\tilde{x}_2$  es un nuevo estado y  $-\alpha(x_1)$  es una acción que hace que la dinámica del error de  $\tilde{x}_1$  en (4.13) sea contractiva y  $\alpha(0) = 0$ . Sustituyendo (4.14) en (4.13) se tiene

$$\dot{\tilde{x}}_1 = \dot{x}_{1d} - \tilde{x}_2 + \alpha(x_1) \quad (4.15)$$

Para garantizar que  $\dot{\tilde{x}}_1 = 0$  sea una solución de (4.15) cuando  $\tilde{x}_2 = 0$ , se propone para  $\alpha(x_1)$  la siguiente expresión:

$$\alpha(x_1) = -\dot{x}_{1d} - \phi(\tilde{x}_1) \quad (4.16)$$

donde  $\phi(0) = 0$ . Sustituyendo (4.16) en (4.15), el sistema en lazo cerrado queda:

$$\dot{\tilde{x}}_1 = -\tilde{x}_2 - \phi(\tilde{x}_1) \quad (4.17)$$

Luego, el sistema prolongado asociado a (4.17) está dado por

$$\Sigma^\delta : \begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = -\tilde{x}_2 - \phi(\tilde{x}_1) \\ \delta\dot{\tilde{x}}_1 = -\delta\tilde{x}_2 - \frac{\partial\phi(\tilde{x}_1)}{\partial\tilde{x}_1}\delta\tilde{x}_1 \end{cases} \quad (4.18)$$

El diseño de la función diferencial candidata de Lyapunov para (4.18) tiene como premisas, tanto que  $V(\tilde{x}_1, \delta\tilde{x}_1) > 0$ , como  $\dot{V}(\tilde{x}_1, \delta\tilde{x}_1) < 0$ , por lo que se propone:

$$V_1(\tilde{x}_1, \delta\tilde{x}_1) = \frac{1}{2}k_p\delta\tilde{x}_1^2 > 0 \quad (4.19)$$

donde  $k_p \in \mathbb{R}^+$ , por lo que la derivada temporal de la función diferencial candidata es:

$$\dot{V}_1(\tilde{x}_1, \delta\tilde{x}_1) = k_p\delta\tilde{x}_1\delta\dot{\tilde{x}}_1 = -k_p\delta\tilde{x}_1\delta\tilde{x}_2 - k_p\frac{\partial\phi(\tilde{x}_1)}{\partial\tilde{x}_1}\delta\tilde{x}_1^2 \quad (4.20)$$

Si se asume que  $\delta\tilde{x}_2 = 0$  y si

$$k_p\frac{\partial\phi(\tilde{x}_1)}{\partial\tilde{x}_1} > 0 \quad (4.21)$$

entonces  $\dot{V}_1(\tilde{x}_1, \delta\tilde{x}_1) < 0$ , y por tanto  $\tilde{x}_1 \rightarrow 0$ .

Por tanto, a continuación se debe asegurar que  $(\tilde{x}_2, \delta\tilde{x}_2) = (0, 0)$ . Retomando (3.20) y despejando  $\tilde{x}_2$  se tiene que:

$$\tilde{x}_2 = x_2 + \alpha(x_1) \quad (4.22)$$

Luego, la dinámica de  $\tilde{x}_2$  es:

$$\dot{\tilde{x}}_2 = \dot{x}_2 + \dot{\alpha}(x_1) \quad (4.23)$$

Por consiguiente, sustituyendo  $\dot{x}_2$  en (4.23), se obtiene

$$\dot{\tilde{x}}_2 = -a\tilde{x}_2 + bV_c + \dot{\alpha}(x_1) \quad (4.24)$$

Si se sustituyen (4.14) y  $x_1$  en (4.24), esta última puede ser reescrita como sigue:

$$\dot{\tilde{x}}_2 = -a(\tilde{x}_2 - \alpha(x_{1d} - \tilde{x}_1)) + bV_c + \dot{\alpha}(x_{1d} - \tilde{x}_1) \quad (4.25)$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta (4.17) y (4.25), el sistema en lazo cerrado puede escribirse como:

$$\Sigma_{V_c} : \begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = -\phi(\tilde{x}_1) - \tilde{x}_2 \\ \dot{\tilde{x}}_2 = -a(\tilde{x}_2 - \alpha(x_{1d} - \tilde{x}_1)) + bV_c + \dot{\alpha}(x_{1d} - \tilde{x}_1) \end{cases} \quad (4.26)$$

Además, el sistema variacional de (4.26) queda expresado como se muestra a continuación:

$$\Sigma_{V_c}^\delta : \begin{cases} \delta\dot{\tilde{x}}_1 = -\frac{\partial\phi(\tilde{x}_1)}{\partial\tilde{x}_1}\delta\tilde{x}_1 - \delta\tilde{x}_2 \\ \delta\dot{\tilde{x}}_2 = -a\delta\tilde{x}_2 + a\frac{\partial\alpha(x_{1d} - \tilde{x}_1)}{\partial\tilde{x}_1}\delta\tilde{x}_1 + b\delta V_c + \frac{\partial\dot{\alpha}(x_{1d} - \tilde{x}_1)}{\partial\tilde{x}_1}\delta\tilde{x}_1 \end{cases} \quad (4.27)$$

Luego, la propuesta de función diferencial de control de Lyapunov para el sistema prolongado compuesto por (4.26) y (4.27) tiene nuevamente como premisas, tanto que  $V(\tilde{x}_1, \delta\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \delta\tilde{x}_2) > 0$ , como  $\dot{V}(\tilde{x}_1, \delta\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \delta\tilde{x}_2) < 0$ , por lo que se propone:

$$V_2(\tilde{x}_1, \delta\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \delta\tilde{x}_2) = V_1(\tilde{x}_1, \delta\tilde{x}_1) + \frac{1}{2}T\delta\tilde{x}_2^2 > 0 \quad (4.28)$$

La derivada temporal de la función diferencial candidata es:

$$\dot{V}_2(\tilde{x}_1, \delta\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \delta\tilde{x}_2) = \dot{V}_1(\tilde{x}_1, \delta\tilde{x}_1) + T\delta\tilde{x}_2\delta\dot{\tilde{x}}_2 \quad (4.29)$$

Sustituyendo (4.20) en (4.29) y desarrollando, se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(\tilde{x}_1, \delta\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \delta\tilde{x}_2) &= -k_p\delta\tilde{x}_1\delta\tilde{x}_2 - k_p\frac{\partial\phi(\tilde{x}_1)}{\partial\tilde{x}_1}\delta\tilde{x}_1^2 \\ &+ T\delta\tilde{x}_2 \left[ -a\delta\tilde{x}_2 + a\frac{\partial\alpha(x_{1d} - \tilde{x}_1)}{\partial\tilde{x}_1}\delta\tilde{x}_1 + b\delta V_c + \frac{\partial\dot{\alpha}(x_{1d} - \tilde{x}_1)}{\partial\tilde{x}_1}\delta\tilde{x}_1 \right] \end{aligned} \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(\tilde{x}_1, \delta\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \delta\tilde{x}_2) &= -k_p\delta\tilde{x}_1\delta\tilde{x}_2 - k_p\frac{\partial\phi(\tilde{x}_1)}{\partial\tilde{x}_1}\delta\tilde{x}_1^2 - aT\delta\tilde{x}_2^2 + Ta\frac{\partial\alpha(x_{1d} - \tilde{x}_1)}{\partial\tilde{x}_1}\delta\tilde{x}_1\delta\tilde{x}_2 \\ &+ Tb\delta V_c\delta\tilde{x}_2 + T\frac{\partial\dot{\alpha}(x_{1d} - \tilde{x}_1)}{\partial\tilde{x}_1}\delta\tilde{x}_1\delta\tilde{x}_2 \end{aligned} \quad (4.31)$$

De (4.31), se propone definir:

$$\delta V_c = -\frac{a}{b}\frac{\partial\alpha(x_{1d} - \tilde{x}_1)}{\partial\tilde{x}_1}\delta\tilde{x}_1 - \frac{1}{b}\frac{\partial\dot{\alpha}(x_{1d} - \tilde{x}_1)}{\partial\tilde{x}_1}\delta\tilde{x}_1 + \frac{1}{Tb}\delta u \quad (4.32)$$

donde  $\delta u$  es el variacional de una función adicional que se propone por parte del autor y que luego quedará en la ley de control resultante. Luego, al sustituir (4.32) en (4.31), se obtiene:

$$\dot{V}_2(\tilde{x}_1, \delta\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \delta\tilde{x}_2) = -k_p\delta\tilde{x}_1\delta\tilde{x}_2 - k_p\frac{\partial\phi(\tilde{x}_1)}{\partial\tilde{x}_1}\delta\tilde{x}_1^2 - aT\delta\tilde{x}_2^2 + \delta u\delta\tilde{x}_2 \quad (4.33)$$

A partir del resultado obtenido en (4.33), se procede a la propuesta de las funciones que hasta el momento no han sido definidas en el procedimiento, de forma tal que estas garanticen que  $\dot{V}(\tilde{x}_1, \delta\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \delta\tilde{x}_2) < 0$ , tal es el caso de  $\phi(\tilde{x}_1)$  y  $\delta u$ , proponiéndose:

$$\phi(\tilde{x}_1) = \tanh(\tilde{x}_1) \quad (4.34)$$

$$\delta u = k_p\delta\tilde{x}_1 - Kvvvar(x_2)\delta\tilde{x}_2 \quad (4.35)$$

siendo  $Kvvvar(x_2) = \frac{k_1x_2^2}{x_2^2+k_2}$  una función definida positiva dependiente de la velocidad  $x_2$  y donde las constantes  $k_1, k_2 \in \mathbb{R}^+$ . Por tanto, al sustituirse (4.34) y (4.35) en (4.33):

$$\dot{V}_2(\tilde{x}_1, \delta\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \delta\tilde{x}_2) = \cancel{-k_p\delta\tilde{x}_1\delta\tilde{x}_2} - k_p\text{sech}^2(\tilde{x}_1)\delta\tilde{x}_1^2 - aT\delta\tilde{x}_2^2 + \cancel{k_p\delta\tilde{x}_1\delta\tilde{x}_2} - \frac{k_1x_2^2}{x_2^2+k_2}\delta\tilde{x}_2^2 \quad (4.36)$$

Resultando finalmente:

$$\dot{V}_2(\tilde{x}_1, \delta\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \delta\tilde{x}_2) = -k_p\text{sech}^2(\tilde{x}_1)\delta\tilde{x}_1^2 - aT\delta\tilde{x}_2^2 - \frac{k_1x_2^2}{x_2^2+k_2}\delta\tilde{x}_2^2 < 0 \quad (4.37)$$

lo que constituye una condición suficiente para demostrar la contracción de cualquier par de trayectorias del sistema en lazo cerrado. Luego, la ley control en los estados  $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$  se procede a integrar como sigue:

$$\int \delta V_c = -\frac{a}{b} \int \frac{\partial\alpha(x_{1d} - \tilde{x}_1)}{\partial\tilde{x}_1} \delta\tilde{x}_1 - \frac{1}{b} \int \frac{\partial\dot{\alpha}(x_{1d} - \tilde{x}_1)}{\partial\tilde{x}_1} \delta\tilde{x}_1 + \frac{k_p}{Tb} \int \delta\tilde{x}_1 - \frac{1}{Tb} \int \frac{k_1x_2^2}{x_2^2+k_2} \delta\tilde{x}_2 \quad (4.38)$$

Integrando cada uno de los términos en (4.38) se obtiene:

$$V_c = -\frac{a}{b}\alpha(x_{1d} - \tilde{x}_1) - \frac{1}{b}\dot{\alpha}(x_{1d} - \tilde{x}_1) + \frac{k_p}{Tb}\tilde{x}_1 - \frac{1}{Tb}\frac{k_1x_2^2}{x_2^2+k_2}\tilde{x}_2 \quad (4.39)$$

De igual forma, (4.39) puede ser reescrita como sigue:

$$V_c = -\frac{a}{b}\alpha(x_1) - \frac{1}{b}\dot{\alpha}(x_1) + \frac{k_p}{Tb}\tilde{x}_1 - \frac{1}{Tb}\frac{k_1x_2^2}{x_2^2+k_2}\tilde{x}_2 \quad (4.40)$$

Si se sustituye (4.16) y  $\tilde{x}_2$  despejada de (4.17), todo esto en (4.40), se obtiene:

$$V_c = -\frac{a}{b}(-\dot{x}_{1d} - \phi(\tilde{x}_1)) - \frac{1}{b}(-\dot{x}_{1d} - \dot{\phi}(\tilde{x}_1)) + \frac{k_p}{Tb}\tilde{x}_1 - \frac{1}{Tb}\frac{k_1x_2^2}{x_2^2+k_2}(-\dot{x}_1 - \phi(\tilde{x}_1)) \quad (4.41)$$

Desarrollando (4.41) y sustituyendo la dinámica del error de posición definida en (4.13):

$$\begin{aligned} V_c = & \frac{a}{b}\dot{x}_{1d} + \frac{a}{b}\tanh(\tilde{x}_1) + \frac{1}{b}\ddot{x}_{1d} + \frac{1}{b}\text{sech}^2(\tilde{x}_1)(\dot{x}_{1d} - x_2) + \frac{k_p}{Tb}\tilde{x}_1 + \frac{1}{Tb}\frac{k_1x_2^2}{x_2^2+k_2}(\dot{x}_{1d} - x_2) \\ & + \frac{1}{Tb}\frac{k_1x_2^2}{x_2^2+k_2}\tanh(\tilde{x}_1) \end{aligned} \quad (4.42)$$

Finalmente, agrupando términos semejantes en (4.42) se obtiene la ley de control propuesta en (4.11). ■

El controlador diseñado, además de garantizar la contracción de las soluciones del sistema en lazo cerrado, resuelve los problema de *control de trayectoria* y *control de posición*. Este igualmente puede ser descompuesto en elementos de *Feedforward*  $u_{ff}$ , otros de *Feedback*  $u_{fb}$  y elementos de *Feedforward* y *Feedback* que combinados conforman la ganancia variable del controlador  $u_{K_v^{var}}$ , como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}
 V_c = & \underbrace{\frac{1}{b}\ddot{x}_{1d} + \dot{x}_{1d} \left( \frac{a}{b} + \frac{1}{b} \operatorname{sech}^2(\tilde{x}_1) \right) - \frac{1}{b} \operatorname{sech}^2(\tilde{x}_1) x_2}_{:=u_{ff}} + \underbrace{\frac{a}{b} \tanh(\tilde{x}_1) + \frac{k_p}{Tb} \tilde{x}_1}_{:=u_{fb}} \\
 & + \underbrace{K_v^{var}(x_2) \left( \frac{1}{Tb} \dot{x}_{1d} - \frac{1}{Tb} x_2 + \frac{1}{Tb} \tanh(\tilde{x}_1) \right)}_{:=u_{K_v^{var}}}
 \end{aligned} \tag{4.43}$$

## 4.5. Resultados en simulación

La respuesta en lazo cerrado del sistema LBS bajo la acción del controlador propuesto en (4.11), primeramente se obtuvo mediante simulaciones con MATLAB/Simulink, partiendo del programa para la simulación del sistema péndulo que se muestra en el Apéndice A.2, siendo adaptado para el sistema láser y el controlador diseñado para su control.

Teniéndose como caso de estudio una posición deseada  $x_{1d} = 1\text{mm}$ , el sistema fue simulado ante 5 posibles escenarios. Para el primero de estos se consideraron valores nominales de la planta y como segundo caso se contempló incertidumbre en los parámetros del sistema, siendo esta  $K_i = K + 0.8K$  y  $T_i = T - 0.8T$ . La acción de una perturbación externa, dada por una señal sinusoidal de amplitud 2 y 12 rad/s de frecuencia fue el tercer escenario considerado. Para el cuarto caso se tuvo en cuenta ruido blanco en la medición de la posición, de 0.0001 de poder. Finalmente, como quinto escenario se contó con la combinación del tercer y cuarto caso, donde confluyen ruido en la medición de la posición y perturbación externa.

La sintonía de las constantes del controlador quedó con  $k_p = 900$ ,  $k_1 = 1$  y  $k_2 = 0.1$ . Una vez realizadas las simulaciones, en la figura 4.13 se observa el error de posición obtenido para cada uno de los escenarios antes mencionados, convergiendo a cero de manera exponencial para el caso de valores nominales, ocurriendo de forma aún más rápida ante incertidumbre en los parámetros. De manera similar, cuando está presente la señal de perturbación externa el error converge a cero, manteniéndose acotado en una región muy cercana a dicho valor. En el escenario donde se cuenta con ruido en la medición, a pesar de que la respuesta en lazo cerrado se mantiene acotada, el error en estado estable presenta pequeños picos, los cuales van disminuyendo a medida que transcurre el tiempo de simulación. Para el quinto caso donde coinciden el ruido en la medición y la perturbación externa, esta última es rechazada al igual que en el tercer escenario, pero domina el efecto del ruido en la respuesta en estado estacionario del error de posición. La señal de control en la figura 4.14, bajo los 5 escenarios objetos de estudio, presenta un comportamiento bastante similar al del error de posición.

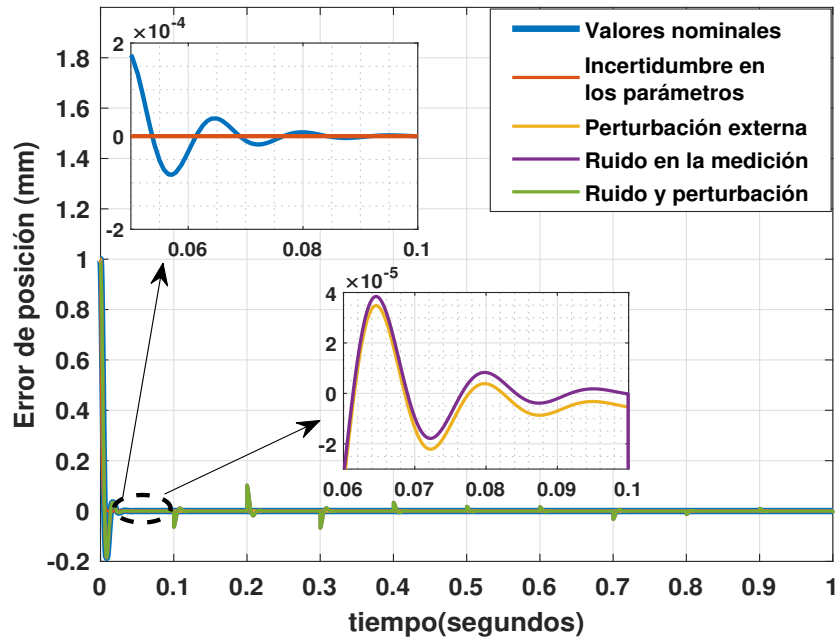


Figura 4.13: Simulación del error de posición vs tiempo.

Luego, el comportamiento de la ganancia variable dependiente de la velocidad se muestra en la figura 4.15, teniendo su pico para los valores máximos de velocidad y llegando a cero cuando se detiene el sistema al alcanzar la posición deseada y valer cero la velocidad.

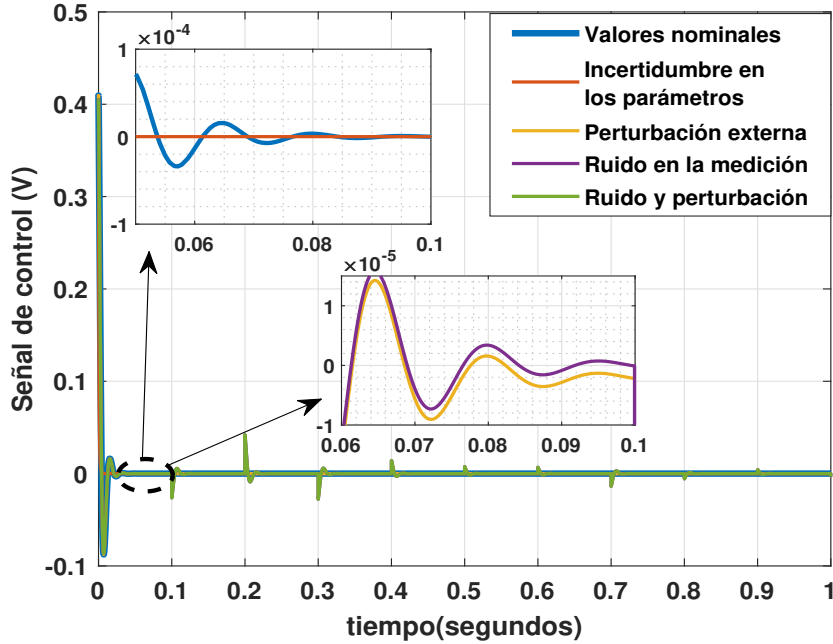


Figura 4.14: Simulación de la señal de control vs tiempo.

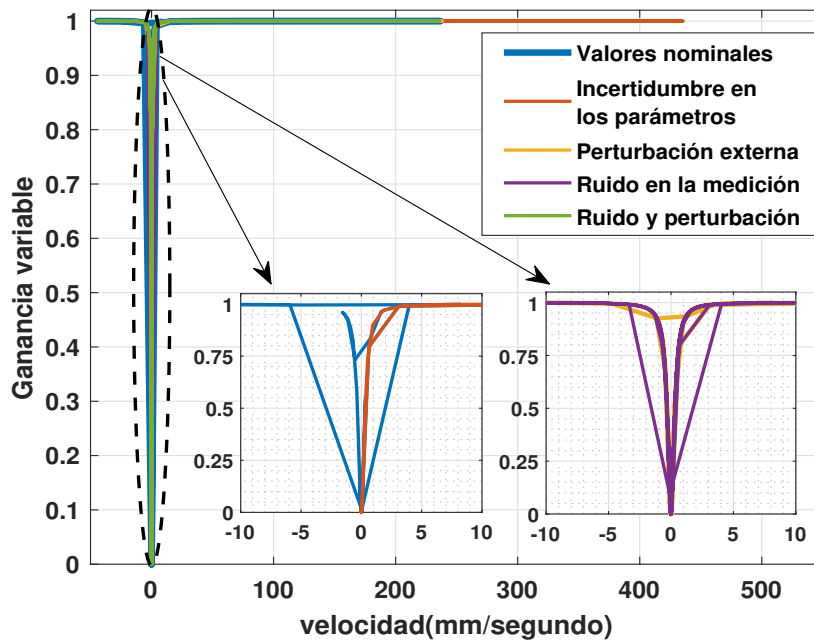


Figura 4.15: Simulación de la ganancia variable vs velocidad.

### 4.5.1. Análisis de desempeño

El análisis de desempeño del controlador propuesto ante los 5 escenarios antes mencionados, se realizó para un tiempo de simulación de 5 segundos, empleando nuevamente las normas RMS y  $\mathcal{L}_2$ , las cuales se definieron y describieron en el capítulo anterior. Se realizó la comparativa de desempeño del controlador basado en contracción con otros 4 controladores, estos son el PID diseñado en [44], un controlador por retroalimentación de estados con observador (OBSF por sus siglas en inglés) [45], uno lineal cuadrático gaussiano (LQG por sus siglas en inglés) [39], y por último el controlador propuesto sin la inclusión de la función de ganancia variable. Igualmente cabe señalar al igual que en el capítulo anterior, que para cada caso, el controlador con mejor desempeño va a ser el que presente un menor valor obtenido con cada norma.

#### Norma RMS

Al aplicarse la norma RMS, se puede apreciar un mejor desempeño del controlador diseñado para cada uno de los 5 escenarios descritos, siendo aun más visible la diferencia respecto a los demás controladores cuando está presente la perturbación externa, siendo prácticamente nulo su efecto en el desempeño del controlador basado en contracción. También se hace notar la mejora que brinda en el rendimiento del sistema el uso de la ganancia variable en el controlador diseñado.

	PID	OBSF	LQG	Contractivo (sin gan. var.)	Contractivo (con gan. var.)
<b>Valores nominales</b>	0.01759	0.01763	0.0178	0.01854	0.01807
<b>Incertidumbre en los parámetros</b>	0.03013	0.02041	0.02295	0.01704	0.01659
<b>Perturbación externa</b>	1.08506	1.53333	1.30359	0.02896	0.02611
<b>Ruido en la medición</b>	0.03133	0.02633	0.02672	0.02818	0.02672
<b>Ruido y perturbación</b>	1.08689	1.53513	1.30513	0.03098	0.02818

Tabla 4.4: Análisis de desempeño con la norma RMS.

### Norma $\mathcal{L}_2$

En el caso de la Norma  $\mathcal{L}_2$ , al aplicarse esta se tiene un resultado semejante al obtenido con la norma RMS, presentando un mejor comportamiento el controlador de ganancia variable diseñado, para cada uno de los escenarios propuestos.

	PID	OBSF	LQG	Contractivo (sin gan. var.)	Contractivo (con gan. var.)
Valores nominales	0.03932	0.03942	0.03979	0.04145	0.04042
Incertidumbre en los parámetros	0.0676	0.04594	0.05156	0.03811	0.03708
Perturbación externa	2.4262	3.42855	2.91485	0.06476	0.05838
Ruido en la medición	0.07006	0.05889	0.05975	0.06929	0.06301
Ruido y perturbación	2.43052	3.43289	2.91856	0.06928	0.06301

Tabla 4.5: Análisis de desempeño con la norma  $\mathcal{L}_2$ .

## 4.6. Diseño del controlador con acción integral y análisis de contracción del sistema LBS en lazo cerrado

Aunque la primera versión de controlador basado en contracción diseñado para el sistema LBS presentó un buen desempeño a nivel simulación, la implementación práctica mostró que el error de posición no convergía a cero, permaneciendo en un valor constante, esto debido a que a diferencia de la simulación, a nivel experimental están presentes diversos fenómenos físicos que el modelo de la bobina de voz no contempla, y que provocan la existencia de un error en estado estacionario en la evaluación experimental. Con el fin de superar este percance, se añadió un término integral en el diseño del controlador, el cual garantiza error de estado estacionario cero y se define como  $x_0 = \int \tilde{x}_1 dt$ , por lo que  $\dot{x}_0 = \tilde{x}_1$  es el error de estado estacionario definido como  $\tilde{x}_1 = x_{1d} - x_1$ , donde  $x_{1d}$  es la posición deseada y  $x_1$  la posición medida. Por tanto, el sistema LBS expresado en variables de estado con la inclusión de la acción integral, queda:

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = \tilde{x}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_1 = \dot{x}_{1d} - x_2 \\ \dot{x}_2 = -ax_2 + bV_c \end{cases} \quad (4.44)$$

**Proposición:** Considerándose una posición deseada  $x_{1d}(t) \in \mathcal{X}$ , entonces el sistema (4.44) en lazo cerrado con la ley de control por retroalimentación

$$\begin{aligned}
V_c = & \frac{1}{b} \ddot{x}_{1d} + \dot{x}_{1d} \left( \frac{k_1}{b} + \frac{k_2}{b} + \frac{a}{b} + \frac{1}{b} \operatorname{sech}^2(x_0) \right) + x_2 \left( \frac{1}{b} \operatorname{sech}^2(x_0) - \frac{k_1}{b} - \frac{k_2}{b} \right) + \tilde{x}_1 \left( \frac{2}{b} + \frac{ak_1}{b} \right. \\
& + \frac{ak_2}{b} + \frac{k_2k_1}{b} + \frac{a}{b} \operatorname{sech}^2(x_0) + \frac{k_2}{b} \operatorname{sech}^2(x_0) - \frac{2}{b} \tanh(x_0) \operatorname{sech}^2(x_0) \left. \right) + \frac{1}{b} \tanh(x_0) \\
& + \frac{ak_2}{b} \tanh(x_0) + x_0 \left( \frac{k_1}{b} + \frac{ak_2k_1}{b} + \frac{a}{b} \right) + K_v^{var}(x_2) \left( \frac{1}{b} \dot{x}_{1d} - \frac{1}{b} x_2 + \frac{k_1}{b} \tilde{x}_1 + \frac{k_2}{b} \tilde{x}_1 \right. \\
& \left. + \frac{k_2}{b} \tanh(x_0) + \frac{1}{b} \operatorname{sech}^2(x_0) \tilde{x}_1 + \frac{k_2k_1}{b} x_0 + \frac{1}{b} x_0 \right)
\end{aligned} \tag{4.45}$$

es contractivo, con  $K_v^{var}(x_2)$  definida en (3.55) y (3.56),  $k_1, k_2 \in \mathbb{R}^+$ , y la función diferencial de Lyapunov dada por

$$V_3 = \frac{1}{2} \delta z_1^2 + \frac{1}{2} \delta z_2^2 + \frac{1}{2} \delta z_3^2 \tag{4.46}$$

**Demostración por construcción:** Sea  $z_1 = x_0$  tal que  $\dot{z}_1 = \dot{x}_0 = \tilde{x}_1$ , asumiendo  $x_1$  como una acción de control artificial:

$$x_1 = z_2 - \alpha_1(z_1) \tag{4.47}$$

donde  $z_2$  es un nuevo estado y  $-\alpha_1(z_1)$  es una acción que hace que la dinámica del error  $\dot{\tilde{x}}_1$  sea contractiva y  $\alpha_1(0) = 0$ . Sustituyendo (4.47) en  $\dot{z}_1$ :

$$\dot{z}_1 = x_{1d} - z_2 + \alpha_1(z_1) \tag{4.48}$$

Para garantizar que  $\dot{z}_1 = 0$  sea una solución cuando  $z_2 = 0$ , se propone para  $\alpha_1(z_1)$  la siguiente expresión:

$$\alpha_1(z_1) = -x_{1d} - k_1 z_1 - \phi(z_1) \tag{4.49}$$

donde  $\phi(0) = 0$  y  $k_1 \in \mathbb{R}^+$ . Sustituyendo (4.49) en (4.48):

$$\dot{z}_1 = -z_2 - k_1 z_1 - \phi(z_1) \tag{4.50}$$

Luego, el sistema prolongado asociado a (4.50) está dado por:

$$\Sigma_1^\delta : \begin{cases} \dot{z}_1 = -z_2 - k_1 z_1 - \phi(z_1) \\ \delta \dot{z}_1 = -\delta z_2 - k_1 \delta z_1 - \frac{\partial \phi(z_1)}{\partial z_1} \delta z_1 \end{cases} \tag{4.51}$$

El diseño de la 1ra función diferencial candidata de Lyapunov tiene como premisas, tanto que  $V_1(z_1, \delta z_1) > 0$ , como que  $\dot{V}_1(z_1, \delta z_1) < 0$ , por lo que se propone:

$$V_1 = \frac{1}{2} \delta z_1^2 > 0 \tag{4.52}$$

La derivada temporal de la función candidata es:

$$\dot{V}_1 = -\delta z_1 \delta z_2 - k_1 \delta z_1^2 - \frac{\partial \phi(z_1)}{\partial z_1} \delta z_1^2 \tag{4.53}$$

Si se asume que  $\delta z_2 = 0$ , y si

$$\frac{\partial \phi(z_1)}{\partial z_1} > 0 \quad (4.54)$$

entonces  $\dot{V}_1(z_1, \delta z_1) < 0$  y por tanto  $\dot{z}_1 \rightarrow 0$ . Luego, en el segundo paso de diseño se debe asegurar que  $(z_2, \delta z_2) = (0, 0)$ , por lo que retomando (4.47) y despejando  $z_2$  se tiene que:

$$z_2 = x_1 + \alpha_1(z_1) \quad (4.55)$$

$$z_2 = x_1 - \dot{x}_{1d} - k_1 z_1 - \phi(z_1) \quad (4.56)$$

La dinámica de (4.56), o sea, su derivada temporal es:

$$\dot{z}_2 = \dot{x}_2 - \ddot{x}_{1d} - k_1 \dot{z}_1 - \dot{\phi}(z_1) \quad (4.57)$$

Ahora, asumiendo  $x_2$  como una acción de control artificial:

$$x_2 = z_3 - \alpha_2(z_2) \quad (4.58)$$

donde  $z_3$  es un nuevo estado y  $-\alpha_2(z_2)$  va a ser la acción que haga que la dinámica de  $z_1$  en (4.57) y  $\alpha_2(0) = 0$ . Sustituyendo (4.58) en (4.57) se tiene:

$$\dot{z}_2 = z_3 - \alpha_2(z_2) - \dot{x}_{1d} - k_1 \dot{z}_1 - \dot{\phi}(z_1) \quad (4.59)$$

Se propone:

$$\alpha_2(z_2) = -\dot{x}_{1d} - k_1 \dot{z}_1 - \dot{\phi}(z_1) + k_2 z_2 - z_1 \quad (4.60)$$

donde  $k_2 \in \mathbb{R}^+$ . Sustituyendo (4.60) en (4.59) queda:

$$\dot{z}_2 = z_3 - k_2 z_2 + z_1 \quad (4.61)$$

Luego, el sistema prolongado asociado a (4.61) está dado por:

$$\Sigma_2^\delta : \begin{cases} \dot{z}_2 = z_3 - k_2 z_2 + z_1 \\ \delta \dot{z}_2 = \delta z_3 - k_2 \delta z_2 + \delta z_1 \end{cases} \quad (4.62)$$

El diseño de la 2da función diferencial candidata de Lyapunov tiene como premisas, que tanto  $V_2(z_1, \delta z_1, z_2, \delta z_2) > 0$ , como que  $\dot{V}_2(z_1, \delta z_1, z_2, \delta z_2) < 0$ , por lo que se propone:

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{2} \delta z_2^2 > 0 \quad (4.63)$$

La derivada temporal de la función candidata de Lyapunov es:

$$\dot{V}_2 = -\delta z_1 \delta z_2 - k_1 \delta z_1^2 - \frac{\partial \phi(z_1)}{\partial z_1} \delta z_1^2 + \delta z_2 \delta \dot{z}_2 \quad (4.64)$$

$$\dot{V}_2 = \cancel{-\delta z_1 \delta z_2} - k_1 \delta z_1^2 - \frac{\partial \phi(z_1)}{\partial z_1} \delta z_1^2 + \delta z_2 \delta z_3 - k_2 \delta z_2^2 + \cancel{\delta z_2 \delta z_1} \quad (4.65)$$

Nuevamente, asumiendo que  $\delta z_2 = 0$  y (4.54), entonces  $\dot{V}_2(z_1, \delta z_1, z_2, \delta z_2) < 0$  y por tanto  $\dot{z}_2 \rightarrow 0$ . Luego, como tercer y último paso de diseño se debe asegurar que  $(z_3, \delta z_3) = (0, 0)$ , por lo que retomando (4.58) y despejando  $z_3$  se tiene que:

$$z_3 = x_2 + \alpha_2(z_2) \quad (4.66)$$

La dinámica de (4.66) es:

$$\dot{z}_3 = \dot{x}_2 + \dot{\alpha}_2(z_2) \quad (4.67)$$

Por consiguiente, sustituyendo  $\dot{x}_2$  en (4.67), se tiene:

$$\dot{z}_3 = -az_3 + a\alpha_2(z_2) + bV_c + \dot{\alpha}_2(z_2) \quad (4.68)$$

Luego, teniendo en cuenta (4.50), (4.61) y (4.68), el sistema completo en lazo cerrado queda:

$$\Sigma_{V_c} : \begin{cases} \dot{z}_1 = -z_2 - k_1 z_1 - \phi(z_1) \\ \dot{z}_2 = z_3 - k_2 z_2 + z_1 \\ \dot{z}_3 = -az_3 + a\alpha_2(z_2) + bV_c + \dot{\alpha}_2(z_2) \end{cases} \quad (4.69)$$

Además, el sistema variacional de (4.69) queda expresado como:

$$\Sigma_{V_c}^\delta : \begin{cases} \delta \dot{z}_1 = -\delta z_2 - k_1 \delta z_1 - \frac{\partial \phi(z_1)}{\partial z_1} \delta z_1 \\ \delta \dot{z}_2 = \delta z_3 - k_2 \delta z_2 + \delta z_1 \\ \delta \dot{z}_3 = -a \delta z_3 + a \frac{\partial \alpha_2}{\partial z_2} \delta z_2 + b \delta V_c + \frac{\partial \dot{\alpha}_2}{\partial z_2} \delta z_2 \end{cases} \quad (4.70)$$

Luego, la propuesta de la 3ra función diferencial candidata de Lyapunov para el sistema prolongado compuesto por (4.69) y (4.70) tiene nuevamente como premisas que tanto que  $V_3(z_1, \delta z_1, z_2, \delta z_2, z_3, \delta z_3) > 0$ , como que  $\dot{V}_3(z_1, \delta z_1, z_2, \delta z_2, z_3, \delta z_3) < 0$ , por lo que se propone:

$$V_3 = V_2 + \frac{1}{2} \delta z_3^2 \quad (4.71)$$

La derivada temporal de (4.71) es:

$$\dot{V}_3 = -k_1 \delta z_1^2 - \frac{\partial \phi(z_1)}{\partial z_1} \delta z_1^2 + \delta z_2 \delta z_3 - k_2 \delta z_2^2 + \delta z_3 \delta \dot{z}_3 \quad (4.72)$$

Desarrollando (4.72) se tiene:

$$\dot{V}_3 = -k_1 \delta z_1^2 - \frac{\partial \phi(z_1)}{\partial z_1} \delta z_1^2 + \delta z_2 \delta z_3 - k_2 \delta z_2^2 - a \delta z_3^2 + a \frac{\partial \alpha_2}{\partial z_2} \delta z_2 \delta z_3 + b \delta z_3 \delta V_c + \frac{\partial \dot{\alpha}_2}{\partial z_2} \delta z_2 \delta z_3 \quad (4.73)$$

De (4.73) se propone definir la ley de control como sigue:

$$\delta V_c = -\frac{1}{b} \delta z_2 - \frac{a}{b} \frac{\partial \alpha_2}{\partial z_2} \delta z_2 - \frac{1}{b} \frac{\partial \dot{\alpha}_2}{\partial z_2} \delta z_2 + \frac{1}{b} \delta u \quad (4.74)$$

donde  $\delta u$  es el variacional de una función adicional que se propone por parte del autor y que luego quedará en la ley de control resultante. Luego, sustituyendo (4.74) en (4.73), queda:

$$\dot{V}_3 = -k_1 \delta z_1^2 - \frac{\partial \phi(z_1)}{\partial z_1} \delta z_1^2 - k_2 \delta z_2^2 - a \delta z_3^2 + \delta z_3 \delta u \quad (4.75)$$

Partiendo del resultado obtenido en (4.75), se procede a la propuesta de las funciones que hasta el momento no han sido definidas en el procedimiento, de forma tal que estas garanticen que  $\dot{V}_3(z_1, \delta z_1, z_2, \delta z_2, z_3, \delta z_3) < 0$ , como son  $\phi(z_1)$  y  $\delta u$ , proponiéndose:

$$\phi(z_1) = \tanh(z_1) \quad (4.76)$$

$$\delta u = -K_v^{var}(x_2) \delta z_3 \quad (4.77)$$

siendo  $K_v^{var}(x_2)$  la función de ganancia variable propuesta en (3.55), la cual es definida positiva, y con la propuesta de  $\phi(z_1)$  se obtiene  $\frac{\partial \phi(z_1)}{\partial z_1} = \text{sech}^2(z_1) > 0$ , cumpliéndose con la condición (4.54). Finalmente, sustituyendo (4.77) en (4.75) se obtiene:

$$\dot{V}_3 = -k_1 \delta z_1^2 - \text{sech}^2(z_1) \delta z_1^2 - k_2 \delta z_2^2 - a \delta z_3^2 - K_v^{var}(x_2) \delta z_3^2 < 0 \quad (4.78)$$

satisfaciendo la condición (2.29), por lo resulta suficiente para demostrar la contracción de cualquier par de trayectorias del sistema en lazo cerrado. Por tanto, la ley de control propuesta se puede determinar integrando (4.74):

$$\int \delta V_c = -\frac{1}{b} \int \delta z_2 - \frac{a}{b} \int \frac{\partial \alpha_2}{\partial z_2} \delta z_2 - \frac{1}{b} \int \frac{\partial \dot{\alpha}_2}{\partial z_2} \delta z_2 - \frac{1}{b} K_v^{var}(x_2) \int \delta z_3 \quad (4.79)$$

Integrando cada uno de los términos en (4.79) se obtiene:

$$V_c = -\frac{1}{b} z_2 - \frac{a}{b} \alpha_2(z_2) - \frac{1}{b} \dot{\alpha}_2(z_2) - \frac{1}{b} K_v^{var}(x_2) z_3 \quad (4.80)$$

Luego, sustituyendo (4.56), (4.60) y (4.66) en (4.80) se obtiene:

$$\begin{aligned} V_c = & -\frac{1}{b} (x_1 + \alpha_1(z_1)) - \frac{a}{b} \left( -\dot{x}_{1d} - k_1 \dot{z}_1 - \dot{\phi}(z_1) + k_2 z_2 - z_1 \right) - \frac{1}{b} \left( -\ddot{x}_{1d} - k_1 \ddot{z}_1 - \ddot{\phi}(z_1) \right. \\ & \left. + k_2 \dot{z}_2 - \dot{z}_1 \right) - \frac{1}{b} K_v^{var}(x_2) (x_2 + \alpha_2(z_2)) \end{aligned} \quad (4.81)$$

Nuevamente, al sustituir (4.49), (4.56), (4.57) y (4.60) en (4.80) queda:

$$\begin{aligned} V_c = & -\frac{1}{b} (x_1 - x_{1d} - k_1 z_1 - \phi(z_1)) - \frac{a}{b} \left[ -\dot{x}_{1d} - k_1 \dot{z}_1 - \dot{\phi}(z_1) + k_2 (x_1 - x_{1d} - k_1 z_1 - \phi(z_1)) - z_1 \right] \\ & - \frac{1}{b} \left[ -\ddot{x}_{1d} - k_1 \ddot{z}_1 - \ddot{\phi}(z_1) + k_2 (x_2 - \dot{x}_{1d} - k_1 \dot{z}_1 - \dot{\phi}(z_1)) - \dot{z}_1 \right] - \frac{1}{b} K_v^{var}(x_2) x_2 \\ & - \frac{1}{b} K_v^{var}(x_2) \left( -\dot{x}_{1d} - k_1 \dot{z}_1 - \dot{\phi}(z_1) + k_2 (x_1 - x_{1d} - k_1 z_1 - \phi(z_1)) - z_1 \right) \end{aligned} \quad (4.82)$$

Teniéndose en cuenta que  $\tilde{x}_1 = -(x_1 - x_{1d})$ , que  $\dot{z}_1 = x_2 - \dot{x}_{1d}$  y retomándose que  $z_1 = x_0 = \int \tilde{x}_1 dt$ , entonces (4.82) se puede reescribir como:

$$\begin{aligned}
 V_c = & \frac{1}{b} \tilde{x}_1 + \frac{k_1}{b} x_0 + \frac{1}{b} \phi(x_0) + \frac{a}{b} \dot{x}_{1d} + \frac{ak_1}{b} \tilde{x}_1 + \frac{a}{b} \dot{\phi}(x_0) + \frac{ak_2}{b} \tilde{x}_1 + \frac{ak_1k_2}{b} x_0 + \frac{ak_2}{b} \phi(x_0) \\
 & + \frac{a}{b} x_0 + \frac{1}{b} \ddot{x}_{1d} + \frac{k_1}{b} (x_2 - \dot{x}_{1d}) + \frac{1}{b} \ddot{\phi}(x_0) - \frac{k_2}{b} (x_2 - \dot{x}_{1d}) + \frac{k_2k_1}{b} \tilde{x}_1 + \frac{k_2}{b} \dot{\phi}(x_0) + \frac{1}{b} \tilde{x}_1 \\
 & - \frac{1}{b} K_v^{var}(x_2) (x_2 - \dot{x}_{1d}) + \frac{k_1}{b} K_v^{var}(x_2) \tilde{x}_1 + \frac{1}{b} K_v^{var}(x_2) \dot{\phi}(x_0) + \frac{k_2}{b} K_v^{var}(x_2) \tilde{x}_1 \\
 & + \frac{k_2k_1}{b} K_v^{var}(x_2) x_0 + \frac{k_2}{b} K_v^{var}(x_2) \phi(x_0) + \frac{1}{b} K_v^{var}(x_2) x_0
 \end{aligned} \tag{4.83}$$

Luego, la 1ra y 2da derivada temporal de la función  $\phi(x_0)$  propuesta en (4.76) resultan:

$$\dot{\phi}(x_0) = \operatorname{sech}^2(x_0) \tilde{x}_1 \tag{4.84}$$

$$\ddot{\phi}(x_0) = -2 \tanh(x_0) \operatorname{sech}^2(x_0) \tilde{x}_1 + \operatorname{sech}^2(x_0) \dot{x}_{1d} - \operatorname{sech}^2(x_0) x_2 \tag{4.85}$$

Al sustituir (4.76), (4.84) y (4.85) en (4.83), desarrollando se obtiene

$$\begin{aligned}
 V_c = & \frac{k_1}{b} \dot{x}_{1d} + \frac{k_2}{b} \dot{x}_{1d} + \frac{a}{b} \dot{x}_{1d} + \frac{1}{b} \operatorname{sech}^2(x_0) \dot{x}_{1d} - \frac{k_1}{b} x_2 - \frac{k_2}{b} x_2 + \frac{1}{b} \operatorname{sech}^2(x_0) x_2 + \frac{1}{b} \ddot{x}_{1d} + \frac{1}{b} \tilde{x}_1 \\
 & + \frac{ak_1}{b} \tilde{x}_1 + \frac{ak_2}{b} \tilde{x}_1 + \frac{k_2k_1}{b} \tilde{x}_1 + \frac{1}{b} \tilde{x}_1 + \frac{a}{b} \operatorname{sech}^2(x_0) \tilde{x}_1 + \frac{k_2}{b} \operatorname{sech}^2(x_0) \tilde{x}_1 - \frac{2}{b} \tanh(x_0) \operatorname{sech}^2(x_0) \tilde{x}_1 \\
 & + \frac{1}{b} \tanh(x_0) + \frac{ak_2}{b} \tanh(x_0) + \frac{1}{b} K_v^{var}(x_2) (\dot{x}_{1d} - x_2) + \frac{k_1}{b} K_v^{var}(x_2) \tilde{x}_1 + \frac{k_2}{b} K_v^{var}(x_2) \tilde{x}_1 \\
 & + \frac{k_2}{b} K_v^{var}(x_2) \tanh(x_0) + \frac{1}{b} K_v^{var}(x_2) \operatorname{sech}^2(x_0) \tilde{x}_1 + \frac{k_1}{b} x_0 + \frac{ak_2k_1}{b} x_0 + \frac{a}{b} x_0 \\
 & + \frac{k_2k_1}{b} K_v^{var}(x_2) x_0 + \frac{1}{b} K_v^{var}(x_2) x_0
 \end{aligned} \tag{4.86}$$

Por tanto, agrupando términos semejantes en (4.86) se obtiene la expresión final del controlador basado en contracción a implementarse en el sistema LBS, propuesto en (4.45). ■

El controlador diseñado resuelve los problemas de *control de trayectoria* y *control de posición*, y además de estar presentes los parámetros del sistema estabilizador láser, deberán ser sintonizadas las ganancias proporcionales  $k_1$  y  $k_2$  y las presentes en la función de ganancia variable  $K_v^{var}$ .

Igualmente, la expresión final del controlador puede ser agrupada en términos de *Feedforward*  $u_{ff}$ , de *Feedback*  $u_{fb}$ , y en términos de la ganancia variable dependiente de la velocidad  $u_{K_v^{var}}$ , que representan una combinación de *Feedforward* y *Feedback*, ya habiendo sido mencionadas las ventajas que ofrecen la presencia de cada uno de estos elementos en el capítulo anterior. La ley de control reagrupada se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}
 V_c = & \underbrace{\dot{x}_{1d} \left[ \frac{k_1}{b} + \frac{k_2}{b} + \frac{a}{b} + \frac{1}{b} \operatorname{sech}^2(x_0) \right] - x_2 \left[ \frac{k_1}{b} + \frac{k_2}{b} + \frac{1}{b} \operatorname{sech}^2(x_0) \right] + \frac{1}{b} \ddot{x}_{1d}}_{:=u_{ff}} \\
 & + \underbrace{\tilde{x}_1 \left[ \frac{1}{b} + \frac{ak_1}{b} + \frac{ak_2}{b} + \frac{k_2k_1}{b} + \frac{1}{b} + \frac{a}{b} \operatorname{sech}^2(x_0) + \frac{k_2}{b} \operatorname{sech}^2(x_0) - \frac{2}{b} \tanh(x_0) \operatorname{sech}^2(x_0) \right]}_{:=u_{fb}} \\
 & + x_0 \underbrace{\left[ \frac{k_1}{b} + \frac{ak_2k_1}{b} + \frac{a}{b} \right] + \frac{1}{b} \tanh(x_0) + \frac{ak_2}{b} \tanh(x_0)}_{:=u_{fb}} + \underbrace{K_v^{var}(x_2) \left[ \frac{1}{b} (\dot{x}_{1d} - x_2) \right]}_{:=u_{K_v^{var}}} \\
 & + \underbrace{\left( \frac{k_1}{b} + \frac{k_2}{b} \right) \tilde{x}_1 + \frac{k_2}{b} \tanh(x_0) + \frac{1}{b} \operatorname{sech}^2(x_0) \tilde{x}_1}_{:=u_{K_v^{var}}}
 \end{aligned} \tag{4.87}$$

## 4.7. Resultados experimentales

Para la implementación en el sistema estabilizador láser del controlador de ganancia variable basado en contracción resultante en (4.86), se empleó como plataforma de recepción y envío de datos el software MATLAB/Simulink, en el que se programó dicho controlador y la interfaz de comunicación con el sistema LBS, ver Anexo A.3. La sintonización de los parámetros del controlador quedó con  $k_1 = k_2 = 250$ ,  $\beta_1 = 1$ ,  $\beta_2 = 5$ ,  $\alpha = 0.1$  y  $M = 4$ . Se realizó la prueba experimental para el caso de regulación y ante 2 escenarios, el primero sin la acción de la perturbación externa que genera el motor de DC, y el segundo bajo dicha perturbación, al ser alimentando el motor con una tensión de 1.8V. El caso de estudio planteado fue el origen, o sea,  $x_{1d} = 0\text{mm}$ . Luego, como resultados de estas pruebas se ven reflejados de manera gráfica en la figura 4.16 el error de posición, en 4.17 la señal de control generada, y en 4.18 el comportamiento de la ganancia variable.

Como se aprecia en la figura 4.16, para ambos escenarios antes descritos, el error de posición converge a cero de forma bastante rápida, en aproximadamente 0.4s, y con un pico máximo previo relativamente pequeño de 2mm. Luego, para el caso donde está presente la perturbación generada por el motor de DC, el error se mantiene acotado en una región cercana a cero de aproximadamente  $\pm 0.1\text{mm}$ . Por otro lado, la figura 4.17 muestra como la tensión suministrada a la bobina de voz presenta un pico de tensión inicial aproximado entre -10V y 6V, para luego de alcanzar la posición deseada, permanecer en -0.23V en el caso donde no existe perturbación, y en un rango entre 0V y -0.5V cuando está presente dicha perturbación.

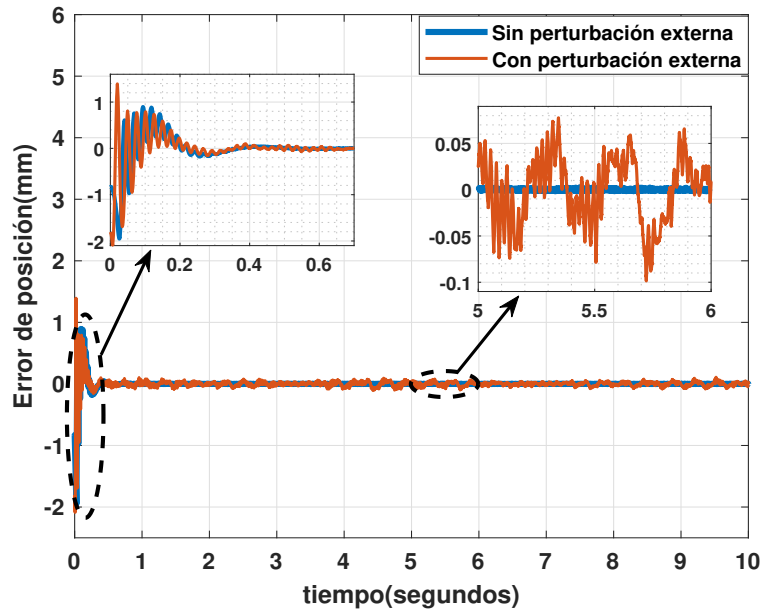


Figura 4.16: Error de posición vs tiempo.

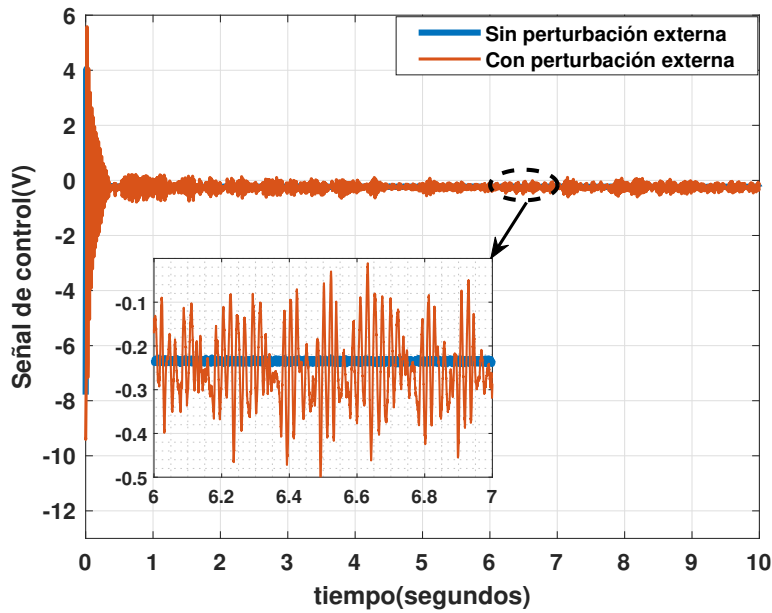


Figura 4.17: Señal de control vs tiempo.

Finalmente se puede apreciar en la figura 4.18 cómo se comporta la ganancia variable respecto a la velocidad, teniéndose el valor máximo de ganancia para los valores mayores de velocidad, y se ajusta a cero cuando se detiene el movimiento del láser.

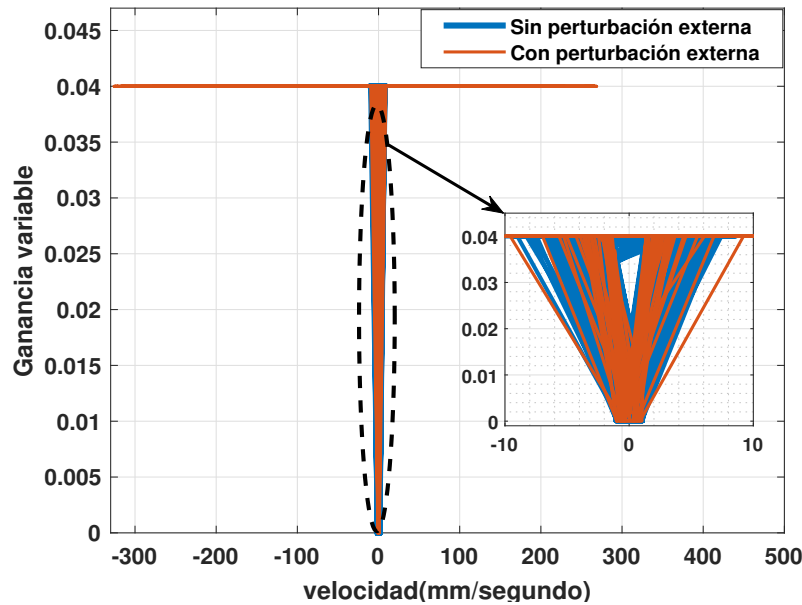


Figura 4.18: Ganancia variable vs velocidad.

### 4.7.1. Análisis de desempeño

Para analizar el rendimiento del controlador propuesto bajo los 2 escenarios antes mencionados, una vez más fueron empleadas las normas RMS y  $\mathcal{L}_2$ . Igualmente se realizó la comparativa de desempeño del controlador diseñado con 4 controladores como en el caso de las simulaciones, estos son el PID [44], OBSF [45], LQG [39], y el mismo controlador propuesto con acción integral, sin la inclusión de la función de ganancia variable. Para una adecuada lectura de los resultados, en cada norma se realizó la comparación del promedio de 10 muestras por cada controlador, ya que el experimento en cada prueba puede tener una ligera variación en los resultados. La interpretación de los promedios obtenidos con cada norma va a seguir radicando en que el controlador con mejor desempeño corresponde al que presente un menor promedio de las muestras rendimiento recopiladas en cada escenario estudiado.

#### Norma RMS

Al observar las tablas 4.4 y 4.5, queda claro que el controlador basado en contracción propuesto, con la inclusión de la función de ganancia variable es superior su desempeño respecto a los demás controladores objetos de comparación, tanto sin la presencia de la perturbación externa generada por el motor de DC, como sin esta. Al igual se aprecia el plus en cuanto a rendimiento que brinda el uso de la ganancia variable en el controlador diseñado, respecto a los resultados obtenidos sin incluir dicha función. Igualmente de manera gráfica son fácilmente perceptibles las diferencias en cuanto al desempeño de los controladores en la figura 4.19.

Muestras	Sin Perturbación Externa				
	PID	OBSF	LQG	Contractivo (sin gan. var.)	Contractivo (con gan. var.)
1ra	0.1507	0.1633	0.1628	0.0685	0.0675
2da	0.151	0.1901	0.1203	0.0683	0.0703
3ra	0.1524	0.2126	0.1276	0.0613	0.047
4ta	0.1517	0.2095	0.1399	0.0559	0.0524
5ta	0.1408	0.2017	0.1315	0.0751	0.0485
6ta	0.1438	0.2016	0.135	0.0587	0.0539
7ma	0.146	0.1974	0.1441	0.0615	0.0477
8va	0.1452	0.2018	0.1422	0.062	0.0469
9na	0.1504	0.2071	0.1462	0.0632	0.0484
10ma	0.1458	0.2093	0.1571	0.0614	0.0491
<b>Promedio</b>	<b>0.14778</b>	<b>0.19944</b>	<b>0.14067</b>	<b>0.06359</b>	<b>0.05317</b>

Tabla 4.6: Rendimiento con la norma RMS.

Muestras	Con Perturbación Externa				
	PID	OBSF	LQG	Contractivo (sin gan. var.)	Contractivo (con gan. var.)
1ra	0.2608	0.2116	0.1932	0.1451	0.1304
2da	0.1984	0.2352	0.1806	0.1275	0.1267
3ra	0.2312	0.1997	0.2224	0.1633	0.1009
4ta	0.1812	0.2068	0.1708	0.1757	0.1686
5ta	0.1643	0.2007	0.1889	0.1936	0.2136
6ta	0.1512	0.2232	0.2065	0.1655	0.1903
7ma	0.1398	0.182	0.1997	0.1977	0.1872
8va	0.1375	0.2199	0.2432	0.1808	0.2347
9na	0.1868	0.2136	0.1401	0.2091	0.1562
10ma	0.1648	0.22	0.13	0.2061	0.1713
<b>Promedio</b>	<b>0.1816</b>	<b>0.21127</b>	<b>0.18754</b>	<b>0.17644</b>	<b>0.16799</b>

Tabla 4.7: Rendimiento con la norma RMS ante perturbación externa.

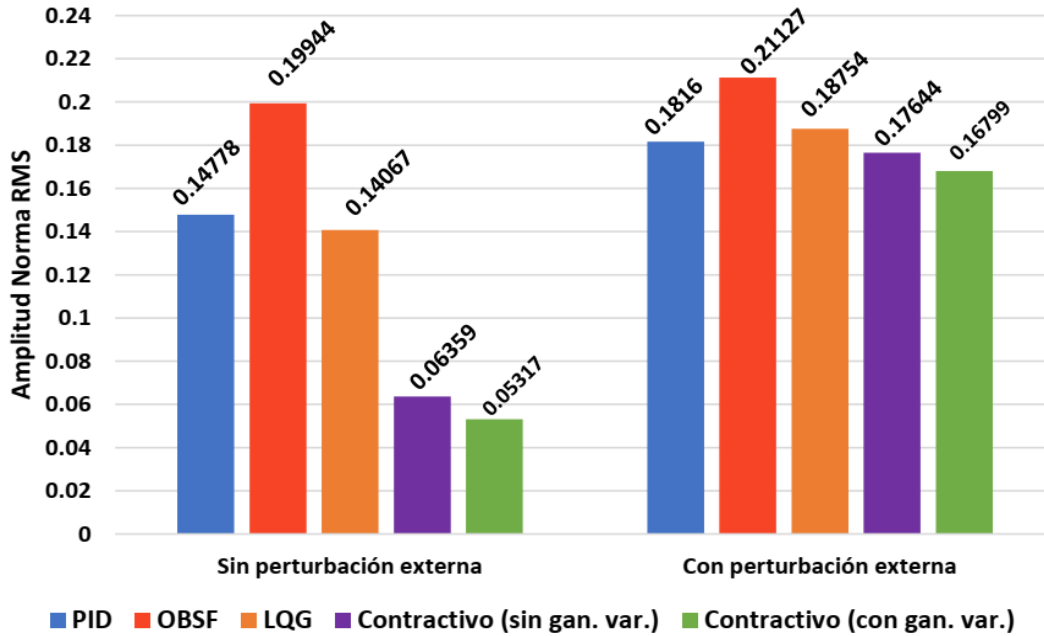


Figura 4.19: Gráfico de barras con la norma RMS.

### Norma $\mathcal{L}_2$

Los resultados obtenidos al aplicarse la norma  $\mathcal{L}_2$ , tanto sin perturbación externa, como con la presencia de esta, se muestran en las tablas 4.6 y 4.7. En sentido general se puede decir que el controlador propuesto de ganancia variable es superior al resto de los controladores con los que se realizó la comparación, y se puede apreciar la mejora en el rendimiento que proporciona la inclusión de la función de ganancia variable. Estas conclusiones también se pueden deducir fácilmente al observarse la gráfica de barras 4.20.

Muestras	Sin Perturbación Externa				
	PID	OBSF	LQG	Contractivo (sin gan. var.)	Contractivo (con gan. var.)
1ra	0.5489	0.7778	0.6707	0.3959	0.3777
2da	0.4652	0.6431	0.8071	0.393	0.3655
3ra	0.5126	0.8121	0.6117	0.3925	0.3654
4ta	0.5488	0.8055	0.6698	0.3823	0.3744
5ta	0.588	0.8582	0.4795	0.3834	0.3812
6ta	0.7975	0.8732	0.4891	0.3849	0.3824
7ma	0.8825	0.8958	0.5094	0.3858	0.3783
8va	0.8949	0.6788	0.5323	0.3897	0.3788
9na	0.8749	0.6993	0.5492	0.3913	0.3841
10ma	0.7506	0.7101	0.5685	0.392	0.3418
<b>Promedio</b>	<b>0.68639</b>	<b>0.77539</b>	<b>0.58873</b>	<b>0.38908</b>	<b>0.37296</b>

Tabla 4.8: Rendimiento con la norma  $\mathcal{L}_2$ .

Muestras	Con Perturbación Externa				
	PID	OBSF	LQG	Contractivo (sin gan. var.)	Contractivo (con gan. var.)
1ra	0.4463	0.6887	0.6428	0.5486	0.4874
2da	0.4505	0.6599	0.6099	0.4377	0.4955
3ra	0.5478	0.6313	0.616	0.4467	0.458
4ta	0.4804	0.7006	0.6118	0.4833	0.4903
5ta	0.5134	0.7177	0.6628	0.4498	0.4447
6ta	0.5385	0.8551	0.6792	0.471	0.4482
7ma	0.5371	0.7517	0.7191	0.4625	0.4056
8va	0.5529	0.7217	0.7278	0.5137	0.4595
9na	0.5072	0.7485	0.5923	0.4614	0.4914
10ma	0.5611	0.713	0.6337	0.4928	0.499
Promedio	<b>0.51352</b>	<b>0.71882</b>	<b>0.64954</b>	<b>0.47675</b>	<b>0.46796</b>

Tabla 4.9: Rendimiento con la norma  $\mathcal{L}_2$  ante perturbación externa.

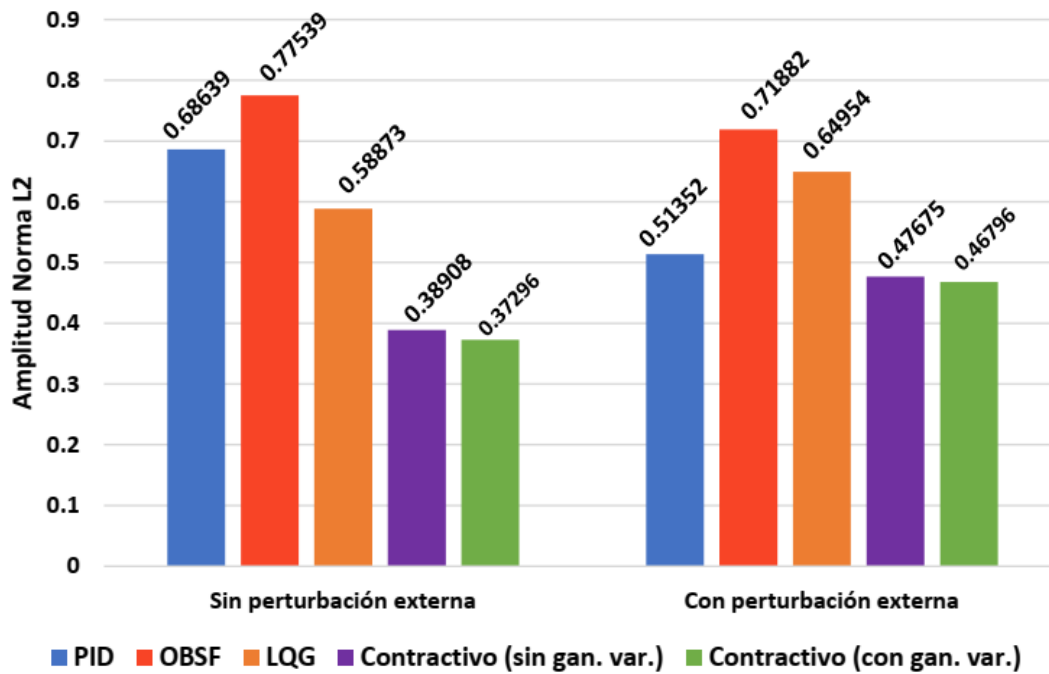


Figura 4.20: Gráfico de barras con la norma  $\mathcal{L}_2$ .

# Capítulo 5

## Conclusiones

En este trabajo de tesis se alcanzó el objetivo de abordar el diseño e implementación experimental de estrategias de control de ganancia variable basadas en análisis de contracción, en un robot manipulador de un grado de libertad (péndulo) y en un sistema de estabilización de haz láser (LBS).

El estudio de diferentes metodologías que permiten obtener el modelo matemático que representa la dinámica de cualquier sistema mecánico, facilitó la obtención de dicho modelo para cada servomecanismo caso de estudio. En cuanto al sistema péndulo se empleó la metodología de Euler-Lagrange y para el sistema LBS, se realizó una conversión de la función de transferencia en términos de la frecuencia del actuador o bobina de voz, a su modelo en espacio de estados.

Con el aprendizaje de la técnica de control no lineal backstepping, y su adaptación a la teoría de análisis de contracción, se diseñaron tanto para el sistema péndulo como para el LBS leyes de control de ganancia variable, las cuales fueron simuladas en lazo cerrado a través de programas desarrollados en MATLAB/Simulink. Se midió el desempeño de los controladores diseñados para cada sistema ante seis distintos escenarios propuestos, empleando las normas RMS y  $\mathcal{L}_2$ , realizándose la comparación de los resultados obtenidos con el desempeño de diferentes controladores existentes en la literatura, quedando claramente reflejado en ambos casos y para cada norma, la superioridad en cuanto a rendimiento de los controladores basados en contracción, y comprobándose con estas mediciones, el efecto que brindó el uso de la función de la ganancia variable en la mejora del desempeño.

Para cada servomecanismo se llevó a cabo la implementación experimental del control basado en contracción, obteniéndose en ambos casos resultados satisfactorios en las respuestas en lazo cerrado para una posición deseada determinada. En cuanto al péndulo, se realizó en el eslabón codo de un robot ROTRADI mediante el empleo de una tarjeta Arduino Due en la que se grabó la programación requerida, y se incorporaron varias etapas de electrónica adicionales que garantizaron una correcta comunicación con el robot y niveles de tensión que no sobrepasaran los permitidos por el servomotor en cuestión. Con el controlador diseñado ya sintonizado, se obtuvo una respuesta rápida, sin oscilaciones y con error de posición cero. En el caso del sistema LBS, se programó un software en la plataforma MATLAB/Simulink que permitió el envío y la lectura de datos provenientes de este sistema, así como la implementación experimental del controlador de ganancia variable basado en análisis de contracción. Para varios escenarios de estudio empleados en el experimento, se obtuvo una respuesta en lazo cerrado en la que su error de posición convergió a cero de forma exponencial y con un sobreimpulso pequeño, manteniéndose en todo momento en una región acotada y bastante cercana a error cero, esto gracias a la acción integral que se añadió al diseño del controlador

y que eliminó el offset en el error de estado estacionario que se mostraba en la respuesta en lazo cerrado. Igualmente se midió el desempeño del controlador diseñado para el sistema LBS empleando las normas RMS y  $\mathcal{L}_2$ , comparándose con otros controladores de la literatura, donde nuevamente se pudo apreciar un mejor rendimiento del controlador basado en contracción, y se comprobó el efecto que brindó el uso de la función de ganancia variable en la mejora del desempeño.

Se puede decir que en ambos casos de estudio, las bondades que ofrece el diseño basado en el análisis de contracción mediante funciones diferenciales de Lyapunov, así como las que brinda el uso de la ganancia variable, trajeron consigo un mejor desempeño de la respuesta en lazo cerrado de los sistemas estudiados, respecto a otros controladores ya existentes en la literatura. Igualmente, aunque los experimentos y mediciones de desempeño se realizaron para el caso regulación, se puede afirmar que ambos controladores diseñados en este trabajo pueden ser empleados para control de trayectoria, hecho que se plantea como trabajo futuro.

Como resultados adicionales de la realización de este trabajo de tesis, se produjeron diversos artículos científicos, los que se pueden ser consultados en el Apéndice B. Prueba de ello fue el presentado en el *XXI Congreso Mexicano de Robótica*, titulado “Análisis de contracción de un controlador de ganancias variables: el caso del péndulo”, siendo publicado en las memorias de dicho congreso. También se elaboró el artículo titulado “Control no lineal basado en contracción con ganancia variable: el caso del péndulo”, el cual fue aceptado como ponencia en la *29a Reunión Internacional en Comunicaciones, Computación, Electrónica, Automatización, Robótica y Exposición Industrial*. Finalmente se elaboró el artículo titulado “Contraction-Based Nonlinear Controller for a Laser Beam Stabilization System Using a Variable Gain”, alcanzándose excelentes resultados con este último trabajo, siendo aceptado para su ponencia en la *59th IEEE Conference on Decision and Control* y publicado en la revista *IEEE Control Systems Letters*.

# Bibliografía

- [1] Leonard R Kahn. Analysis of a limiter as a variable-gain device. *Electrical Engineering*, 72(12):1106–1109, 1953.
- [2] Carlos Muñiz Montero and Fernando Reyes Cortés. Teorema para el diseño de reguladores auto-sintonizables para robots manipuladores. In *2do Congreso Nacional de Electrónica*, 2002.
- [3] Abdiel Ortega Bermudez, Fernando Reyes Cortés, Aurora Vargas Treviño, and Sergio Vergara Limón. Control tangente hiperbólico con ganancia variable. *Asociación Mexicana de Mecatrónica*, pages 42–47, 2013.
- [4] Oscar Ramos Arroyo, Fernando Reyes Cortés, Aurora Vargas Treviño, and Sergio Vergara Limón. Control de ganancias variables para robots de ngrados de libertad. *Pistas Educativas*, 36(112), 2018.
- [5] Miguel Angel Limón Díaz, Fernando Reyes Cortés, and Emilio Jorge González Galván. Unbounded regulators with variable gains for a direct-drive robot manipulator. *Automatica*, 57(2):484–495, 2017.
- [6] Huafei Xiao and Shaoping Wang. Auto-tuning pid module of robot motion system. In *2011 6th IEEE Conference on Industrial Electronics and Applications*, pages 668–673. IEEE, 2011.
- [7] Marcel F Heertjes and Maarten Steinbuch. Stability and performance of a variable gain controller with application to a dvd storage drive. *Automatica*, 40(4):591–602, 2004.
- [8] Nathan van de Wouw, HA Pastink, Marcel François Heertjes, Alexey V Pavlov, and Henk Nijmeijer. Performance of convergence-based variable-gain control of optical storage drives. *Automatica*, 44(1):15–27, 2008.
- [9] Zhi Chen, Xiaowei Tu, Li Xing, and Jian Fu. Variable gains control for unmanned helicopter trajectory tracking. In *2019 Chinese Control Conference (CCC)*, pages 2742–2748. IEEE, 2019.
- [10] Karim A Tahboub. Active nonlinear vehicle-suspension variable-gain control. In *Proceedings of the 2005 IEEE International Symposium on, Mediterrean Conference on Control and Automation Intelligent Control, 2005.*, pages 569–574. IEEE, 2005.
- [11] LC van Breugel, Henk Nijmeijer, Nathan van de Wouw, and BGB Hunnekens. Analysis of piecewise linear variable gain controllers for linear motion systems. 2012.
- [12] B. Hunnekens, N. van de Wouw, M. Heertjes, and H. Nijmeijer. Synthesis of variable gain integral controllers for linear motion systems. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 23(1):139–149, 2015.

- [13] Alexey Pavlov, Nathan Van De Wouw, and Henk Nijmeijer. Convergent systems: analysis and synthesis. In *Control and observer design for nonlinear finite and infinite dimensional systems*, pages 131–146. Springer, 2005.
- [14] Alexey Pavlov, Nathan van de Wouw, and Henk Nijmeijer. Frequency response functions for nonlinear convergent systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52(6):1159–1165, 2007.
- [15] Katsuhiko Ogata. *Ingenieria de control moderna, 5ta edicion*. Pearson Prentice Hall, Madrid, 2010.
- [16] Fernando Reyes Cortés. *Robótica Control de Robots Manipuladores*. Alfaomega, México, 2011.
- [17] Fulvio Forni and Rodolphe Sepulchre. A differential lyapunov framework for contraction analysis. 59(3):614–628, 2014.
- [18] Anzures M Juan, Padilla G José, and Cuevas S Omar. Estabilidad de sistemas no-lineales: Sistema de nivel de líquidos de dos tanques interconectados. *RIEE&C*, 5(2), 2008.
- [19] Hebertt Sira-Ramirez, Richard Marquez, Francklin Rivas-Echevarría, and Orestes Llanes-Santiago. *Control de sistemas no lineales: Linealización aproximada, extendida, exacta*. Pearson Prentice Hall, 2005.
- [20] Nathan van de Wouw. Convergent systems: System theoretic aspects and applications. Technical report, Supelec, Gif-sur-Yvette, Francia, 2015.
- [21] Boris P Demidovich. Dissipativity of nonlinear system of differential equations. 1962.
- [22] Winfried Lohmiller and Jean-Jacques E. Slotine. On contraction analysis for non-linear systems. *Automatica*, 34(6):683–696, 1998.
- [23] Craig Smoryński. *MVT: a most valuable theorem*. Springer, 2017.
- [24] Eduardo D Sontag. Contractive systems with inputs. In *Perspectives in Mathematical System Theory, Control, and Signal Processing*, pages 217–228. Springer, 2010.
- [25] Mario Di Bernardo, Giovanni Russo, and Jean-Jacques Slotine. An algorithm to prove contraction, consensus, and network synchronization. *IFAC Proceedings Volumes*, 42(20):60–65, 2009.
- [26] Rodolfo Reyes Báez. *Virtual contraction and passivity based control of nonlinear mechanical system*. PhD thesis, Jan C. Willems Center for Systems and Control, Faculty of Science and Engineering, University of Groningen, 2019.
- [27] Hassan K Khalil. *Nonlinear systems, 3rd ed*. Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, 2002.
- [28] Peter E Crouch and Arjan J van der Schaft. Variational and hamiltonian control systems. 1987.
- [29] Fulvio Forni, Rodolphe Sepulchre, and AJ Van Der Schaft. On differential passivity of physical systems. In *52nd IEEE Conference on Decision and Control*, pages 6580–6585. IEEE, 2013.
- [30] David Bao, S-S Chern, and Zhongmin Shen. *An introduction to Riemann-Finsler geometry*, volume 200. Springer Science & Business Media, 2012.

- [31] Leonor Godinho and José Natário. *An Introduction to Riemannian Geometry With Applications to Mechanics and Relativity*. Springer, 2012.
- [32] Samuel Coogan. A contractive approach to separable lyapunov functions for monotone systems. *Automatica*, 106:349–357, 2019.
- [33] José Domingo Pájaro Adrián, Rodolfo Reyes Báez, Jaime C. Monjaraz, and Fernando Reyes Cortés. Implementación de un algoritmo de control en un sistema de arquitectura abierta. In *18vo Congreso Nacional de Mecatrónica*, 2019.
- [34] Yokogawa Electric Corporation Parker Automation. *Dynaserv g3 user guide*, 2004.
- [35] José Domingo Pájaro Adrián. Implementación de algoritmos de consenso en un sistema multiagente de robots manipuladores, 2020.
- [36] Edgar Hugo Mayoral Arzaba. Automatización de una celda robótica con retroalimentación visual, 2017.
- [37] Dominguez Sanchez Clicerio Federico and Nieves Hurtado Antonio. *Métodos numéricos aplicados a la ingeniería*. Grupo Editorial Patria, 2014.
- [38] Ahmad Hably and Nicolas Marchand. Global stabilization of a four rotor helicopter with bounded inputs. In *2007 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pages 129–134. IEEE, 2007.
- [39] Stephen P Boyd and Craig H Barratt. *Linear controller design: limits of performance*. Prentice Hall Englewood Cliffs, NJ, 1991.
- [40] S Nagabhushana. *Lasers and optical instrumentation*. IK International Pvt Ltd, 2010.
- [41] Quanser. *Laser beam stabilization instructor manual. Quanser Speciality Experiment Series: LBS Laboratory Workbook*, 2010.
- [42] Alessio D Hernández Rojas and J Fermi Guerrero Castellanos. Diseño de controladores por retroalimentación de estado con observador trivial y óptimo para sistema estabilizador de haz láser. Technical report, Laboratorio de Control Avanzado, Facultad de Ciencias de la Electrónica, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2017.
- [43] David Rodríguez-Navarro, José Luis Lázaro-Galilea, Ignacio Bravo-Muñoz, Alfredo Gardel-Vicente, and Georgios Tsirigotis. Analysis and calibration of sources of electronic error in psd sensor response. *Sensors*, 16(5):619, 2016.
- [44] Kwabena A Konadu, Sun Yi, Wonchang Choi, and Taher Abu-Lebdeh. Robust positioning of laser beams using proportional integral derivative and based observer-feedback control. *American Journal of Applied Sciences*, 10(4):374, 2013.
- [45] Karl Johan Åström and Richard M Murray. *Feedback systems: an introduction for scientists and engineers*. Princeton university press, 2010.

# Anexos

# Apéndice A

## Programas desarrollados para el control de los servomecanismos empleados

### A.1. Programa en Arduino para el control del péndulo

```
1 #include <math.h>
2 #define g 9.81 // aceleracion de la gravedad
3 #define m 1.18 // masa del pendulo
4 #define lc 0.041 // centro de masas
5 #define b 0.175 // coeficiente de friccion viscosa
6 #define Ir 0.097 // momento de inercia del rotor
7 #define pinA 34 //Pin entrada de encoder A
8 #define pinB 35 //Pin entrada de encoder B
9
10 int contador=0, bandera=1, EA=0, EB=0;
11 volatile float posicion_q = 0, t=0; //CONTEO ENCODER
12 float q=0, qd=0, qt=0, qp=0, qanterior=0, par_grav=0, Kvvar=0, TauV=0;
13 float k1=0, k2=0, kp=0,Ip=0;//constantes del controlador de ganancias
    variables
14 double ToDAC1=0, tf=0, h=0.025, Tau=0;
15
16 void setup()
17 {
18     analogWriteResolution(12);//resolucion DAC1
19     Serial.begin(115200);
20     pinMode(pinA,INPUT_PULLUP);
21     pinMode(pinB,INPUT_PULLUP);
22     attachInterrupt(digitalPinToInterrupt(pinA),EncoderA,CHANGE);
23     attachInterrupt(digitalPinToInterrupt(pinB),EncoderB,CHANGE);
24     kp= 3.4;
25     k1= 3.5;
26     k2= 0.000003;
27 }
```

```
28
29 void EncoderA()
30 { EA=digitalRead(pinA);
31   EB=digitalRead(pinB);
32   posicion_q += (EA != EB) ? +1 : -1;
33 }
34 void EncoderB()
35 { EA=digitalRead(pinA);
36   EB=digitalRead(pinB);
37   posicion_q += (EA == EB) ? +1 : -1;
38 }
39
40 void loop()
41 {
42   if(bandera)
43   {
44     q=0;
45     qd=0;
46     qt=0;
47     Tau=0;
48     ToDAC1=(Tau/0.0024361862)+(4.798372/0.0024361862); // ecuacion DAC1
49     analogWrite(DAC1,ToDAC1);
50     Serial.print(t,2);
51     Serial.print(" ");
52     Serial.print(q*180/PI);
53     Serial.print(" ");
54     Serial.print(qp*180/PI);
55     Serial.print(" ");
56     Serial.print(qt*180/PI);
57     Serial.print(" ");
58     Serial.print(Tau);
59     Serial.print(" ");
60     Serial.print(Kpvar);
61     Serial.print(" ");
62     Serial.print(Kvvar);
63     Serial.print(" ");
64     Serial.print(TauV);
65     Serial.print(" ");
66     Serial.println(ToDAC1);
67     t=0;
68     delay(6000);
69     bandera=0;
70   }
71   qd=90*PI/180; // posicion deseada en radianes
72   q=(posicion_q*360.0/10260)*PI/180; // posicion actual radianes
73   qt=qd-q; // error de posicion
74   qp=(q-qanterior)/h; // velocidad
```

```

75     qanterior=q;
76     TauGV();
77     analogWrite(DAC1,ToDAC1);
78     Serial.print(t,2);
79     Serial.print(" ");
80     Serial.print(q*180/PI);
81     Serial.print(" ");
82     Serial.print(qp*180/PI);
83     Serial.print(" ");
84     Serial.print(qt*180/PI);
85     Serial.print(" ");
86     Serial.print(Tau);
87     Serial.print(" ");
88     Serial.print(Kpvar);
89     Serial.print(" ");
90     Serial.print(Kvvar);
91     Serial.print(" ");
92     Serial.print(TauV);
93     Serial.print(" ");
94     Serial.println(ToDAC1);
95     t=t+h;
96 }
97 void TauGV()
98 {
99     Ip=m*lc*lc+Ir;
100     par_grav=m*g*lc*sin(q);// par gravitacional
101     Kvvar=(k1*qp*qp)/(qp*qp+k2);// ganancia derivativa variable
102     Tau=kp*qt+kp*b*qt-Ip*kp*qp-Kvvar*qp+Kvvar*kp*qt+par_grav;
103     if(Tau>=3.8)//torque limite superior recomendado
104         {Tau=3.8;}
105     if(Tau<=-3.8)//torque limite inferior recomendado
106         {Tau=-3.8;}
107     TauV=Tau/0.8;// voltaje=torque/ganancia
108     ToDAC1=(TauV/0.0024361862)+(4.798372/0.0024361862);// valor digital DAC
109 }

```

## A.2. Programa en MATLAB/Simulink para las simulaciones del sistema péndulo

Este anexo expone los elementos esenciales del programa empleado en MATLAB/Simulink para realizar las simulaciones del sistema péndulo. Primeramente en la figura A.1 se observa la pantalla principal de dicho programa, en la que se puede trabajar con los diferentes escenarios de estudio propuestos, seleccionar la referencia, etc. Luego la figura A.2 muestra la etapa de selección de cada bloque de control programado. Finalmente en la figura A.3 se aprecia la estructura y componentes de la programación del controlador de ganancia variable basado en contracción diseñado para el péndulo.

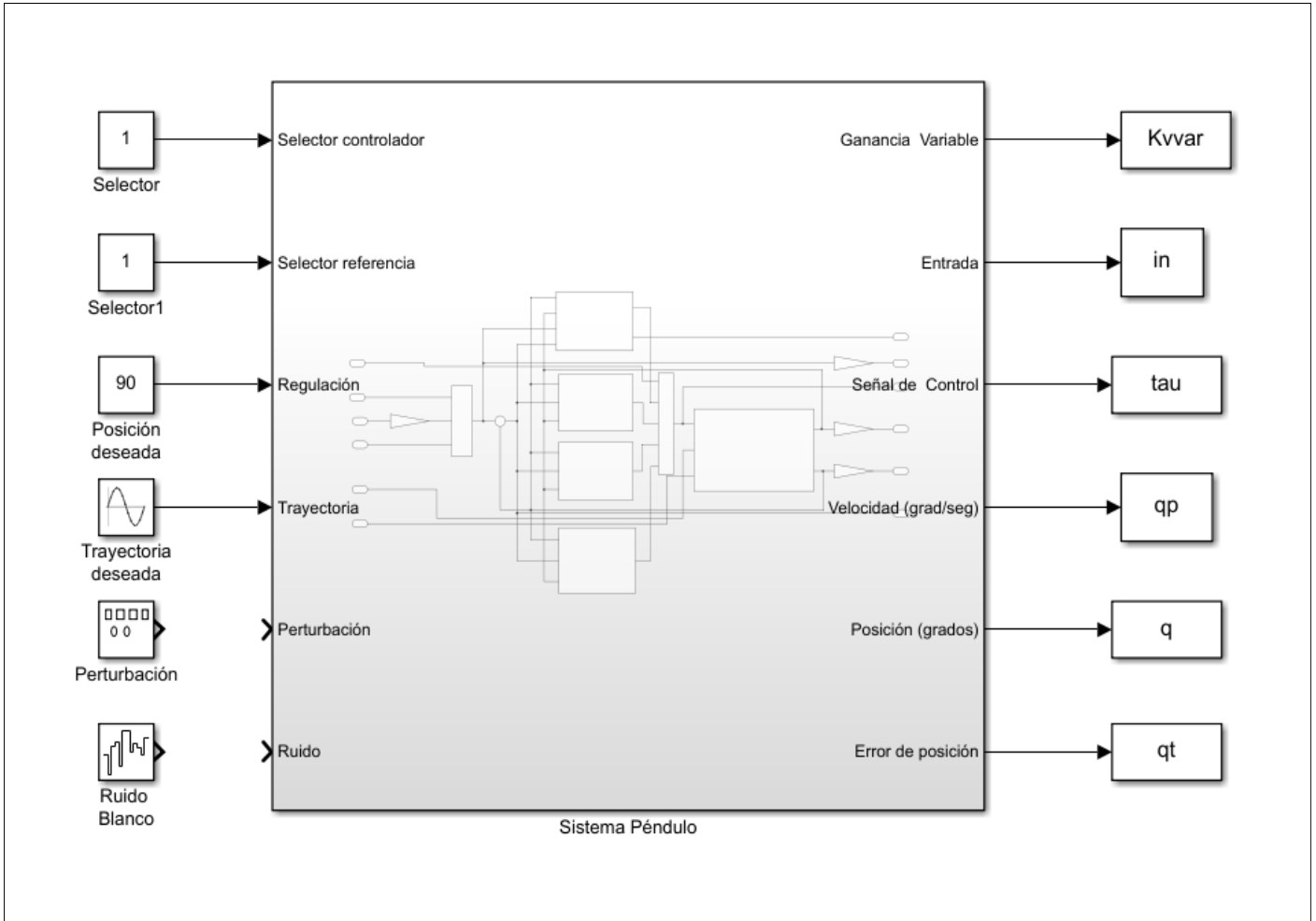


Figura A.1: Pantalla principal del programa en Simulink para la simulación del sistema péndulo.

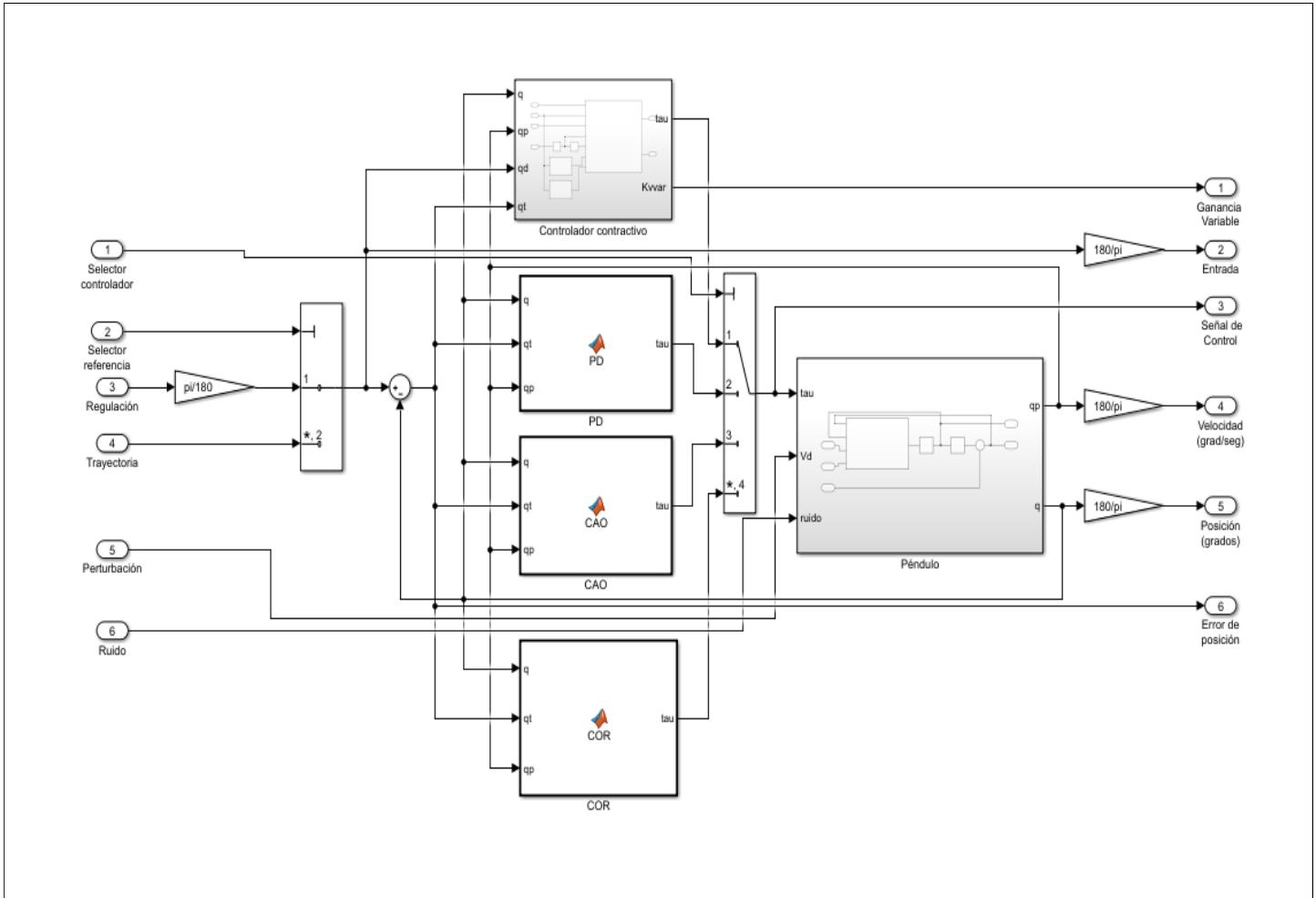


Figura A.2: Selección de controladores para la simulación del sistema péndulo.

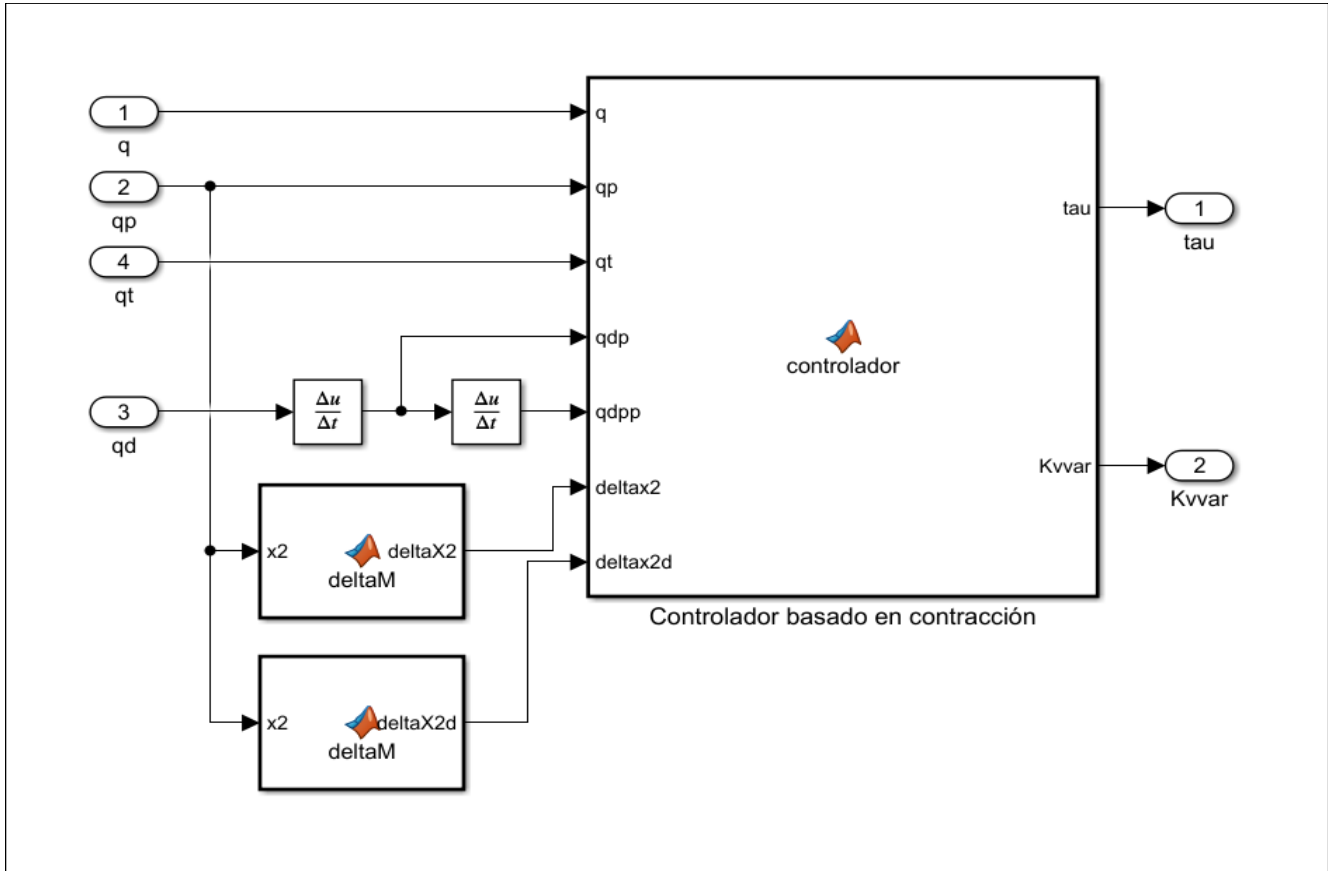


Figura A.3: Subsistema para la simulación del controlador basado en contracción en el sistema péndulo.

### A.3. Programa en MATLAB/Simulink para el control del sistema LBS

En este anexo se muestran las partes fundamentales del programa empleado en MATLAB/Simulink para controlar el sistema LBS. Primeramente en la figura A.4 se observa la pantalla principal de dicho programa, la que se compone por diferentes subsistemas, como son el selector del controlador y el encargado de procesar las señales del LBS. Seguidamente la figura A.5 muestra en detalle la etapa de selección de cada bloque de control programado. Finalmente en la figura A.6 se aprecia la estructura y componentes de la programación del controlador de ganancia variable basado en contracción que se diseñó para el sistema LBS.

# CONTROLADORES PARA SISTEMA ESTABILIZADOR LÁSER QUANSER

- Controlador PID = 1
- Controlador por Retroalimentación de Estado (OBSF) = 2
- Controlador Lineal Cuadrático Gaussiano (LQG) = 3
- Controlador Basado en Contracción = 4

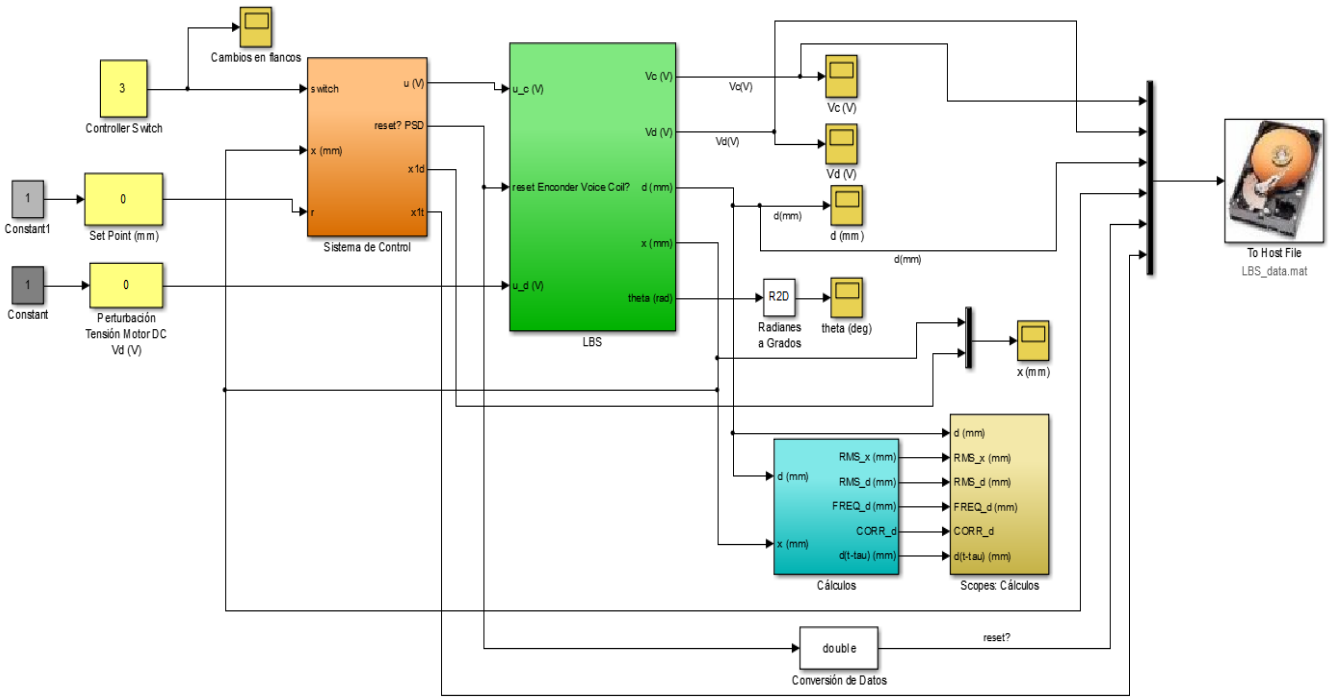


Figura A.4: Pantalla principal del programa en Simulink para el control del sistema LBS.

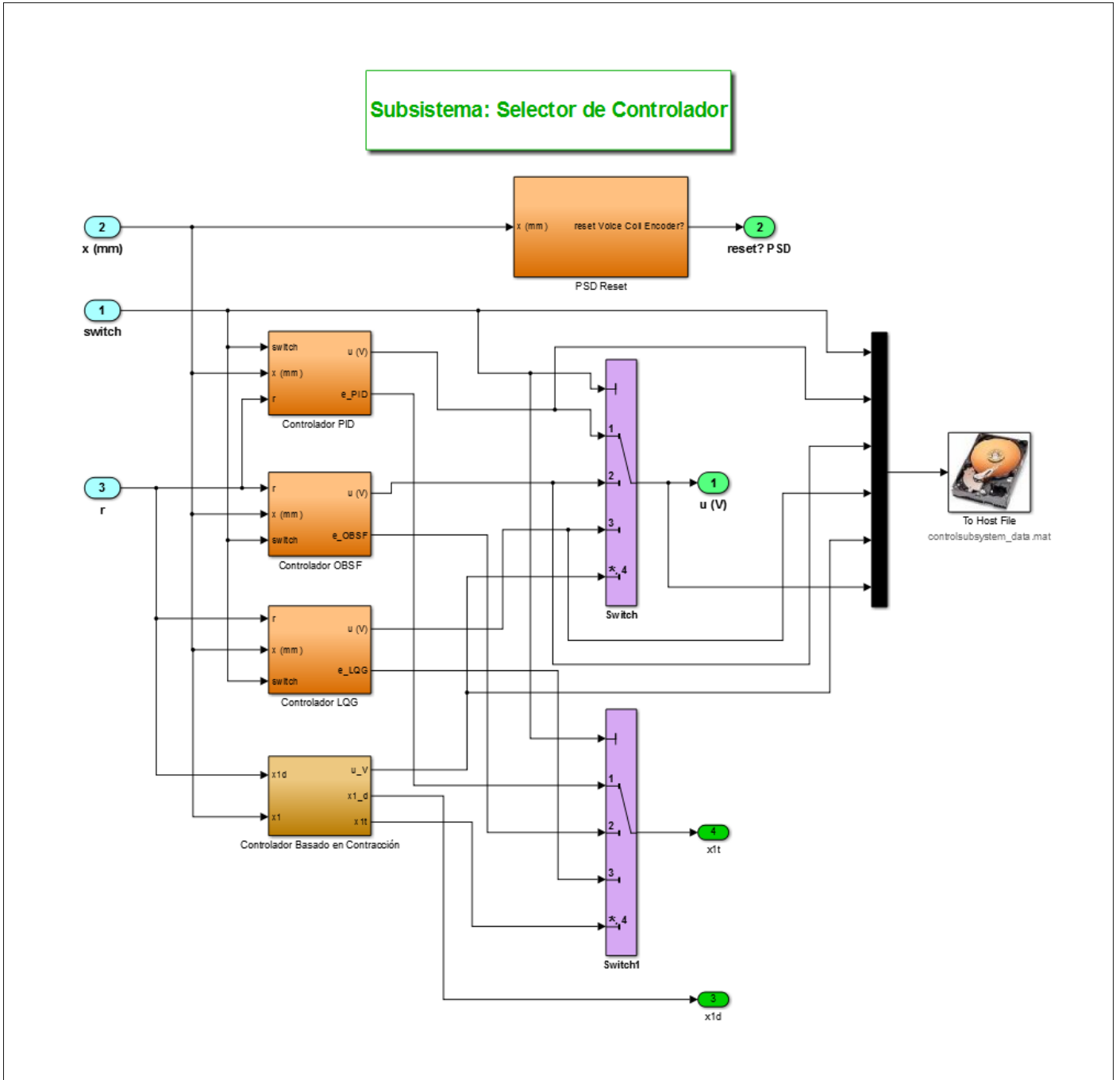


Figura A.5: Subsistema selector de controlador.

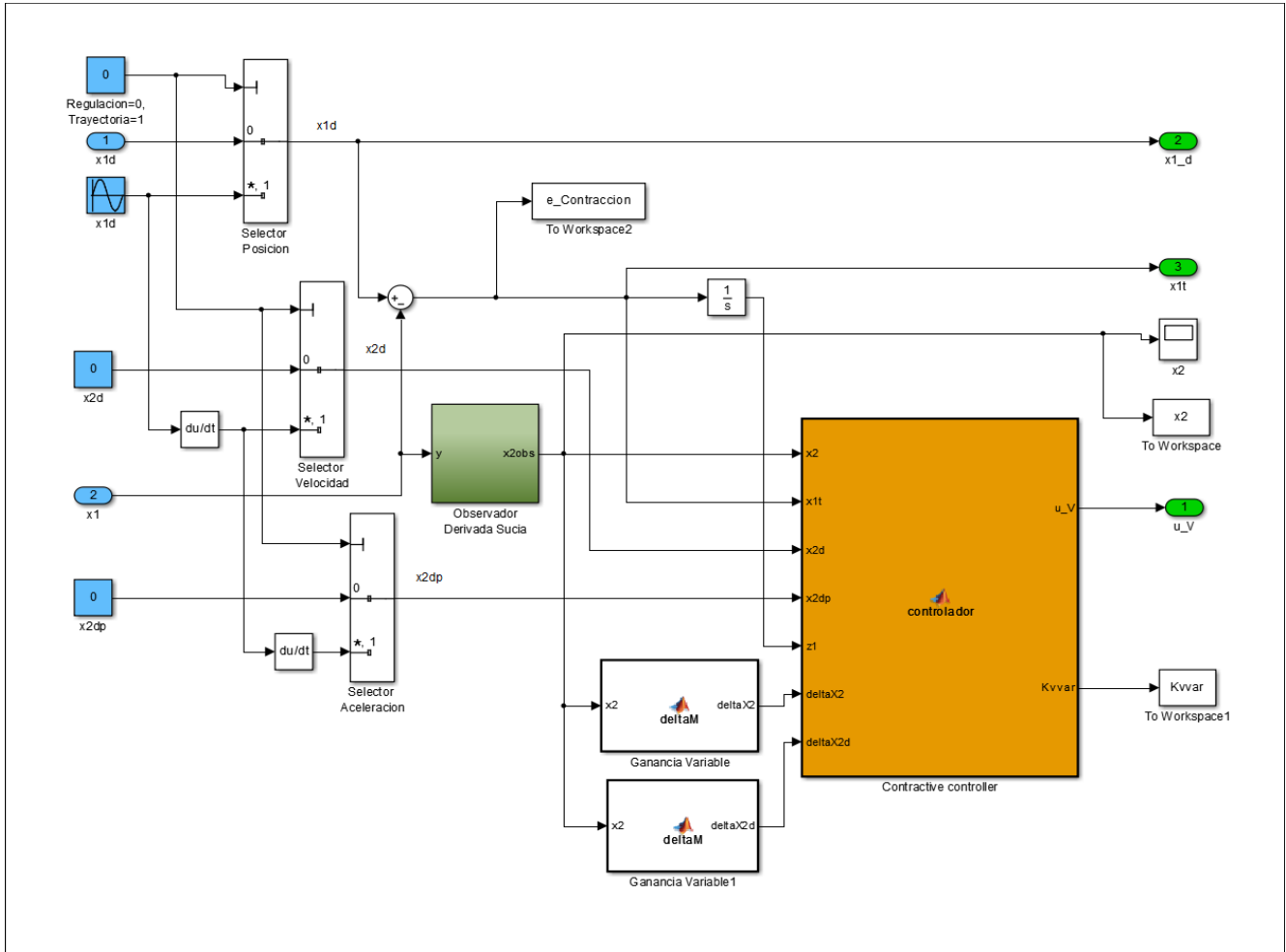
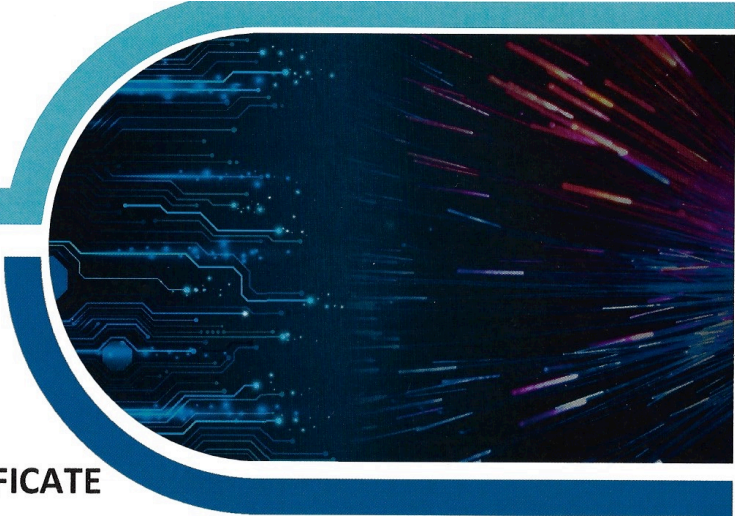


Figura A.6: Subsistema controlador basado en contracción.

## Apéndice B

# Participación en eventos científicos y artículos realizados

En este apéndice se muestran los diferentes resultados alcanzados durante la realización de este trabajo de tesis, en materia de participación en eventos científicos y artículos realizados. El primero de estos fue un póster con el mismo nombre del trabajo de tesis, que fue presentado en el *1er Congreso de Tópicos Avanzados de Óptica y Electrónica*. El siguiente trabajo fue un artículo presentado en el *XXI Congreso Mexicano de Robótica*, titulado “Análisis de contracción de un controlador de ganancias variables: el caso del péndulo”, siendo publicado en las memorias de dicho congreso. Seguidamente se elaboró otro artículo titulado “Control no lineal basado en contracción con ganancia variable: el caso del péndulo”, el cual fue aceptado como ponencia en la *29a Reunión Internacional en Comunicaciones, Computación, Electrónica, Automatización, Robótica y Exposición Industrial*. Por último se elaboró el artículo titulado “Contraction-Based Nonlinear Controller for a Laser Beam Stabilization System Using a Variable Gain”, siendo aceptado para su ponencia en la *59th IEEE Conference on Decision and Control* y publicado en la revista *IEEE Control Systems Letters*.



## CERTIFICATE

This is to certify that **Lorenzo L. González Romeo** attended the “**1er Congreso de Tópicos Avanzados de Óptica y Electrónica 2019 - CTAOE 2019**” held in the Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica (INAOE) during Apr 23-26th, 2019 in Puebla, México.

Author presented the conference entitled “*Control con ganancias variables basado en dinámica convergente*”.

This certification is signed on Apr 23th, 2019 in Puebla, México



MSc. Elizabeth Saldivia Gómez  
President  
OSA Student Chapter - INAOE



MSc. Joan Villa Hernández  
President  
SPIE Student Chapter - INAOE



MSc. Hans Israel Morales López  
President  
IEEE Student Branch - INAOE

## RESUMEN

En este trabajo se aborda el estudio de la teoría de contracción y dinámica convergente, lo que permite asentar las bases para que, a partir del modelado matemático de un brazo robótico, se obtenga una ley de control o controlador de ganancias variables que garantice convergencia (y por tanto estabilidad) del sistema en lazo cerrado, analizándose su respuesta temporal y el comportamiento del mismo en la frecuencia mediante simulación.

## INTRODUCCIÓN

Se propone el diseño e implementación de un controlador de ganancias variables en un brazo robótico, el cual va a garantizar convergencia del sistema en lazo cerrado, proporcionando una propiedad más fuerte que la estabilidad asintótica del punto de equilibrio que brinda la teoría de Lyapunov [3]. Primeramente se va a representar el modelo dinámico brazo robótico que se observa en la figura 1 en lazo cerrado con la inclusión del controlador de ganancias variables, expresado en variables de estado. Luego se presentan resultados a nivel simulación del comportamiento del brazo robótico en lazo abierto y cerrado, esto mediante un programa desarrollado en MATLAB/Simulink, se verá el comportamiento en frecuencia del sistema en cuestión.



Figura 1. Robot ROTRADI a emplearse para la implementación del controlador de ganancias variables en un brazo robótico.

Es conocido que el modelo dinámico del péndulo está dado por:

$$\tau = I_p \ddot{q} + b \dot{q} + g(q)$$

donde  $I_p = ml_c^2 + I$  y  $g(q) = mgl_c \sin(q)$ , siendo  $m$  la masa del brazo robótico,  $l_c$  la longitud de su centro de masas,  $I$  el coeficiente de inercia y  $b$  el coeficiente de fricción viscosa. La ley de control con ganancias variables a emplearse, tendrá la ganancia proporcional dependiente del error de posición ( $\tilde{q} = q_d - q$ ), siendo  $q_d$  la posición deseada y  $q$  la posición actual. La ganancia derivativa va a quedar dependiente de la velocidad  $\dot{q}$ , quedando:

$$\tau = K_p(\tilde{q}) \tanh(\tilde{q}) - K_v(\dot{q}) \tanh(\dot{q}) + g(q)$$

donde  $K_p(\tilde{q}) = k_p^* (1 - \beta e^{-\beta \tilde{q}^2})$  y  $K_v(\dot{q}) = k_v^* (1 - \alpha e^{-\alpha \dot{q}^2})$ .

El sistema en lazo cerrado expresado en variables de estado se muestra a continuación:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\tilde{q}} \\ \frac{1}{I_p} [K_p(\tilde{q}) \tanh(\tilde{q}) - K_v(\dot{\tilde{q}}) \tanh(\dot{\tilde{q}}) - b \dot{\tilde{q}}] \end{bmatrix}$$

## EXPERIMENTOS

A continuación se muestra el programa que se va a utilizar para controlar el brazo robótico. Este fue desarrollado en MATLAB/Simulink, y en su interior se crearon 2 funciones, una para simular el modelo dinámico del robot, llamada *pendulo* y otra para desarrollar la acción de control, llamada *controlador*.

El código de bloques en Simulink, para el control de posición del brazo robótico es el siguiente:

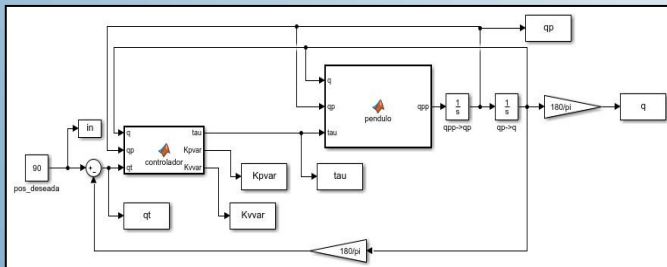


Figura 2. Programa en Simulink para control de posición de un brazo robótico.

En la figura 3 se observa el comportamiento en lazo abierto del brazo robótico, sometido a diferentes condiciones iniciales. Este sin importar dichas condiciones siempre vuelve a su posición de casa, o sea, 0 grados, lo cual constituye una propiedad de convergencia en su respuesta y lo que permite extender para este sistema que es no lineal, el análisis en frecuencia. En la figura 4 se aprecia el comportamiento temporal de la velocidad y la figura 5 muestra el torque aplicado para lograr una posición deseada de 90 grados. En la figura 6 se muestra el diagrama de Bode del sistema en lazo cerrado obtenido de forma experimental, donde se observa el rango de frecuencias para los que el brazo robótico puede seguir de forma correcta la trayectoria de una señal periódica.

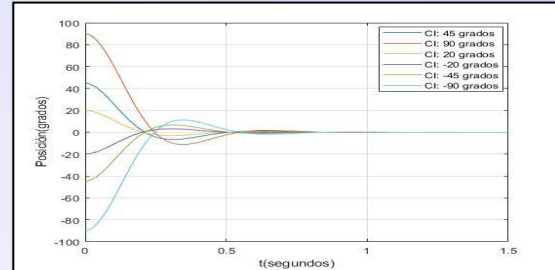


Figura 3 Brazo robótico en lazo abierto ante diferentes condiciones iniciales.

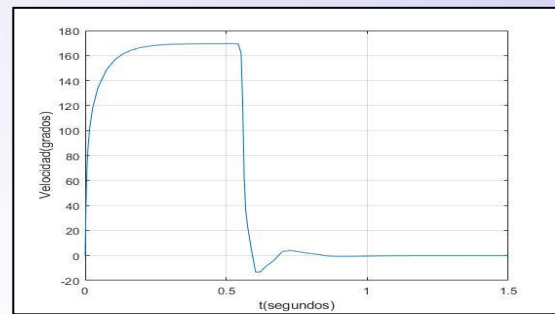


Figura 4 Velocidad del brazo robótico en lazo cerrado para una posición deseada de 90 grados.

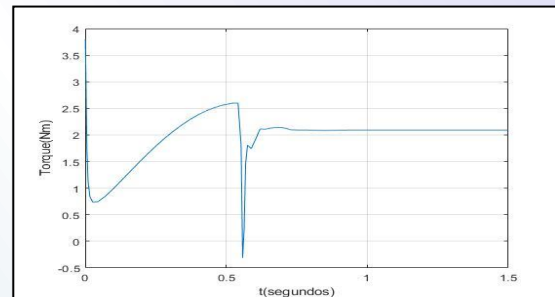


Figura 5 Torque aplicado para alcanzar la posición de 90 grados.

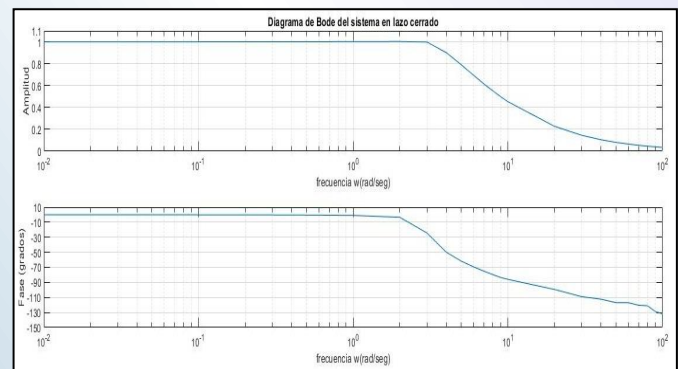


Figura 6 Diagrama de Bode del sistema en lazo cerrado.

## CONCLUSIONES

Hasta el momento el proyecto sigue en desarrollo, teniéndose previsto la implementación del controlador en el brazo robótico y extender los experimentos a más grados de libertad, así como seguir trabajando en la fundamentación matemática del experimento. De igual forma se pretende realizar los mismos experimentos en una unidad de almacenamiento óptico.

## REFERENCIAS

- [1] Edgar H. Mayoral Arzaba. Automatización de una celda robótica con retroalimentación visual, 2017.
- [2] Abdel O. Méndez, F. Reyes, et al. Control tangente hiperbólico con ganancias variables. BUAP, 2013.
- [3] Eduardo D. Sotang. Contractive systems with inputs. Springer, 2010.
- [4] Alexey Pavlov, et al. Frequency response functions for nonlinear convergent systems. IEEE Transactions on Automatic Control, 52(6), 2007.



EDUCACIÓN CON  
RESPONSABILIDAD  
SOCIAL

UNIVERSIDAD DE COLIMA



LA ASOCIACIÓN MEXICANA DE ROBÓTICA E INDUSTRIA A.C.  
Y LA FACULTAD DE INGENIERÍA ELECTROMECAÁNICA,  
EN EL MARCO DEL

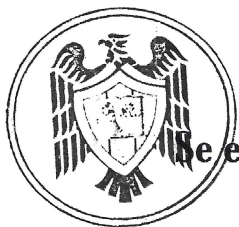


# RECONOCIMIENTO

A: LORENZO LÁZARO GONZÁLEZ ROMEO, RODOLFO REYES BAEZ, JAIME CID  
MONJARAZ, , OLGA GUADALUPE FÉLIX BELTRÁN

POR SU VALIOSA PARTICIPACIÓN CON LA PONENCIA:

“ANÁLISIS DE CONTRACCIÓN DE UN CONTROLADOR DE GANANCIAS VARIABLES: EL  
CASO DEL PÉNDULO”



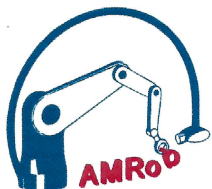
Se expide el presente en la ciudad y puerto de Manzanillo, Colima  
del 13 al 15 de Noviembre de 2019

UNIVERSIDAD  
DE COLIMA  
FACULTAD DE

INGENIERÍA ELECTROMECAÁNICA  
DR. MIGUEL ÁNGEL DURÁN FONSECA  
DIRECTOR DE LA FIE

DRA. DORA AYDEE RODRÍGUEZ VEGA  
PRESIDENTE DE LA AMRob

DR. JORGE GUDIÑO LAU  
PRESIDENTE COMITÉ ORGANIZADOR



# Análisis de contracción de un controlador de ganancias variables: el caso del péndulo

Lorenzo L. González Romeo

Facultad de Ciencias de la Electrónica  
 Benemérita Universidad Autónoma de Puebla  
 Email: lorengromeo@gmail.com

Rodolfo Reyes Báez

Jan C. Willems Center for Systems and Control  
 Faculty of Science and Engineering  
 University of Groningen  
 Email: rb.rdlf@gmail.com

Jaime Cid Monjaraz

and Olga G. Felix Beltrán  
 Facultad de Ciencias de la Electrónica  
 Benemérita Universidad Autónoma de Puebla  
 Emails: jaime.cid@correo.buap.mx  
 olga.felix@correo.buap.mx

**Abstract**—Este artículo brinda el análisis matemático y a nivel simulación de la contractividad de un controlador de ganancias variables aplicado a un péndulo. Primeramente se realiza un estudio de la teoría de análisis de contracción, teniendo como base el empleo de las normas matriciales. Empleándose el modelo dinámico del péndulo en ecuaciones de Euler-Lagrange, se realiza el análisis de contracción de este en lazo abierto y lazo cerrado, bajo la acción del controlador de ganancias variables dado, del que se describe su estructura. Se llevan a cabo diferentes simulaciones con las que se aprecia el comportamiento del péndulo sin la acción del controlador ante una entrada periódica y luego en lazo cerrado para una posición deseada.

## I. INTRODUCCIÓN

Controlar un sistema no lineal mediante el uso de una ley de control con ganancia variable, tiene como principal ventaja mantener constante la salida o valor esperado que se desea en el sistema, muy a pesar de las variaciones que puedan ocurrir en la entrada, o perturbaciones que puedan afectar al sistema en cuestión. Desde la primera aparición del concepto de *Ganancia Variable* [1], muchas han sido sus aplicaciones en diversas ramas de la automatización, como el control de posición de robot manipuladores [2], la reducción de vibraciones a baja frecuencia del lente de unidades de almacenamiento óptico [3], [4], o en aplicaciones para sistemas de movimiento en general [5]. Los controladores de ganancias variables, además de brindar el ajuste automático de la ganancia en función de una variable que se considere, se busca generalmente que esta varíe proporcional a un error. Para este propósito, en muchas aplicaciones, la función de Lyapunov no es sencilla de hallar, especialmente si el estado estable no es conocido y se desea realizar análisis de estabilidad. Ante esta dificultad, el análisis de contracción resulta en una versión incremental del concepto de estabilidad de Lyapunov, en el que la convergencia a una solución específica es reemplazada por la convergencia o contracción entre cualquier par de soluciones, esto brinda una propiedad más fuerte que indica que las trayectorias del sistema convergen a una única solución, sin importar las condiciones iniciales [6]. A su vez, el análisis en el dominio de la frecuencia juega un papel fundamental para el estudio del desempeño de estos sistemas. Dicho análisis depende explícitamente de que cualquier sistema lineal e invariante en el tiempo tiene una única y acotada respuesta de estado estacionario ante cualquier perturbación también acotada [7]. Esto permite analizar el comportamiento de sistemas de control lineal a través de la respuesta ante excitaciones armónicas [8].

En este trabajo se busca brindar un enfoque diferente al tradicional análisis de estabilidad asintótica mediante la teoría de Lyapunov, presentándose como alternativa el análisis de contracción de las soluciones de un sistema, en este caso el péndulo en lazo abierto y lazo cerrado bajo la acción de un controlador de ganancias variables. Luego de realizados ambos análisis, se muestra mediante simulación

el comportamiento del sistema sin acción de control ante una entrada periódica, bajo la acción del controlador ante un valor de posición deseada.

## II. PRELIMINARES DE ANÁLISIS DE CONTRACCIÓN

Considere el sistema no lineal

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \quad (1)$$

definidos para  $t \in [0, \infty)$  y  $\mathbf{x} \in C$ , donde  $C$  es un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  [9]. Se asumirá que  $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$  es diferenciable en  $\mathbf{x}$ , y tanto  $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ , como el Jacobiano de  $\mathbf{f}$  respecto a  $\mathbf{x}$ , que es denotado como  $J(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(t, \mathbf{x})$ , son continuos en  $(t, \mathbf{x})$ . Se denota por  $\mathbf{x}(t) = \varphi(t, 0, \xi)$  el valor de la solución  $\mathbf{x}(t)$  en el tiempo  $t$  de la ecuación diferencial (1) con valor inicial  $\mathbf{x}(s) = \xi$ . Recalcándose que dada una norma vectorial en el espacio euclidiano  $|\cdot|$ , con la que se induce la norma matricial  $\|A\|$ , la *medida de la matriz*  $\mu$  asociada es definida como la derivada direccional de la norma matricial [9]:

$$\mu(A) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\|I + hA\| - 1). \quad (2)$$

Por ejemplo, si  $|\cdot|$  es la norma 2 euclidiana estándar, entonces  $\mu(A)$  es el máximo eigenvalor de la parte simétrica de  $A$ , de forma similar, para la norma 1 será el valor máximo de la sumatoria de las columnas de la matriz a la que se le aplique la norma [9].

Una vez planteadas las anteriores premisas se llega a la siguiente definición:

**Definición 1:** El sistema (1) se dice que es infinitesimalmente contractivo en un conjunto  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  si existe alguna norma en  $C$ , con su asociada *medida de la matriz*  $\mu$ , tal que para una constante  $c > 0$  (radio de contracción), sostiene que,

$$\mu(J(\mathbf{x}, t)) \leq -c, \quad \forall \mathbf{x} \in C, \quad \forall t \geq 0 \quad (3)$$

Dicha contractividad infinitesimal implica contractividad global [9].

**Teorema 1:** Supóngase que  $C$  es un subconjunto convexo de  $\mathbb{R}^n$  y que  $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$  es infinitesimalmente contractivo con radio de contracción  $c$ . Luego, para ambas soluciones  $\mathbf{x}(t) = \varphi(t, 0, \xi)$  y  $\mathbf{z}(t) = \varphi(t, 0, \zeta)$  de (1), se sostiene que [9]:

$$|\mathbf{x}(t) - \mathbf{z}(t)| \leq e^{-ct} |\xi - \zeta|, \quad \forall t \geq 0 \quad (4)$$

La dependencia del tiempo en (1) usualmente es debido a una entrada, la que puede representar una perturbación  $w(t)$ , por lo que de cumplirse (3) se puede plantear el siguiente teorema:

**Teorema 2:** Supóngase que:

- $C$  es un subconjunto convexo de  $\mathbb{R}^n$ .

- $f$  es infinitesimalmente contractivo con radio  $c$ .
- $f$  es  $T$ -periódica.

Entonces existe una única solución periódica  $\hat{x}(t) : [0, \infty) \rightarrow C$  de (1) de período  $T$  y, para cada solución  $x(t)$ , se sostiene que  $|x(t) - \hat{x}(t)| \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$  [9].

Existe una metodología para facilitar la prueba de la contractividad global en un sistema no lineal, la cual sirve de apoyo para la **Definición 1**, y es el siguiente teorema:

**Teorema 3:** Sean sistemas de tipo (1), donde  $f$  es una función suave no lineal. Si existe una matriz uniformemente invertible  $P(x,t)$ , tal que el *Jacobiano generalizado* asociado,

$$\mathbf{F} = \left( \dot{P} + P \frac{\partial f}{\partial x} \right) P^{-1} \quad (5)$$

es uniformemente definido negativo, entonces todas las trayectorias del sistema convergen a una única trayectoria, con una razón de convergencia  $|\lambda_{\text{máx}}|$ , donde  $\lambda_{\text{máx}}$  es el mayor valor propio de la parte simétrica de  $\mathbf{F}$ , entonces se puede afirmar que el sistema es contractivo [10].

Otra condición necesaria para la convergencia exponencial de todas las trayectorias del sistema es la existencia de la matriz  $P^T P$  uniformemente definida positiva [10].

### III. ANÁLISIS DE CONTRACCIÓN DEL PÉNDULO EN LAZO ABIERTO

Se requiere conocer si el servomecanismo caso de estudio es o no contractivo, por lo que para dicha prueba se utiliza el enfoque brindado por Sontag en [9], donde primeramente se realiza el análisis para el caso del péndulo en lazo abierto. De ser contractivo, provocaría el hecho de cumplirse el **Teorema 2**, o sea, que ante una entrada periódica, tenga una respuesta de igual periodo que la entrada, esto permitiría realizar análisis en la frecuencia, hecho que se verá más adelante, así como la prueba de contracción en lazo cerrado con la inclusión de un controlador de ganancias variables.

El modelo dinámico del péndulo mediante ecuaciones de Euler-Lagrange, considerando para esta demostración la fricción viscosa y descartando la de Coulomb y estática debido a sus componentes *signo*, función discontinua definida como:

$$\text{signo}(\dot{q}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \dot{q} > 0 \\ -1 & \text{si } \dot{q} < 0 \end{cases} \quad (6)$$

Teniendo en cuenta lo antes planteado, el modelo dinámico del péndulo es el siguiente:

$$\tau = I_p \ddot{q} + b \dot{q} + g(q) \quad (7)$$

donde  $\tau \in \mathbb{R}$  es el torque o par aplicado;  $q, \dot{q}, \ddot{q} \in \mathbb{R}$  representan la posición, velocidad y aceleración articular del péndulo, respectivamente;  $I_p = ml_c^2 + I$ , siendo  $m \in \mathbb{R}$  la masa,  $l_c \in \mathbb{R}$  el centro de masas e  $I \in \mathbb{R}$  el momento de inercia;  $b \in \mathbb{R}$  el coeficiente de fricción viscosa y  $g(q) = mgl_c \sin(q)$  es el par gravitacional.

A su vez, el péndulo en lazo abierto expresado en las variables de estado, velocidad  $\dot{q}$  y aceleración  $\ddot{q}$ , queda:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \frac{1}{I_p} [-b\dot{q} - mgl_c \sin(q)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

El Jacobiano de (8) es el siguiente:

$$J = \frac{\partial \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}}{\partial \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a \cos(q) & -\frac{b}{I_p} \end{bmatrix} \quad (9)$$

donde  $a = \frac{mgl_c}{I_p}$ .

Como medida de matriz se usa la medida  $\mu_{P,1}$  inducida por la norma 1 del vector  $|Px|_1$ , donde  $P \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  es una matriz no singular [11]. Específicamente se escoge la matriz:

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \quad (10)$$

donde  $P_{i,j} \in \mathbb{R}^+$  deben ser escogidos apropiadamente en dependencia de los parámetros que definen el sistema.

Acerca de las medidas de matrices, aplicándose el **Teorema 3** como herramienta auxiliar y considerándose que la matriz  $P$  es escalar, se tiene que:

$$\mu_{P,1}(J) = \mu_1(PJP^{-1}) = \mu_1(F) \quad (11)$$

donde  $\mu_{P,1}(J)$  es la medida asociada a la norma  $|\bullet|_1$  y es dado explícitamente por la expresión:

$$\mu_1(J) = \text{máx}_j \left( J_{jj} + \sum_{i \neq j} |J_{ij}| \right) \quad (12)$$

Luego, para el péndulo en lazo abierto, al aplicarse (12) al resultado obtenido en (11), se obtuvieron dos expresiones  $g_1$  y  $g_2$ , en las que están presentes los valores de la matriz  $P$ , de los cuales no se necesita conocer un valor exacto, basta con encontrar un intervalo de valores de  $P_{i,j}$  que permitan demostrar que la medida obtenida es definida negativa. Así, para garantizar  $\mu_{P,1}(J) < 0$ , se deben cumplir las siguientes 2 condiciones:

$$g_1 = \frac{-(I_p p_{11} p_{21} - b p_{12} p_{21} + I_p a p_{12} p_{22} \cos(q))}{I_p (p_{11} p_{22} - p_{12} p_{21})} + \left| \frac{-(I_p p_{21}^2 - b p_{21} p_{22} + I_p a \cos(q) p_{22}^2)}{I_p (p_{11} p_{22} - p_{12} p_{21})} \right| < -c_1$$

$$g_2 = \left| \frac{I_p p_{11}^2 - b p_{11} p_{12} + I_p a \cos(q) p_{12}^2}{I_p (p_{11} p_{22} - p_{12} p_{21})} \right| + \frac{I_p p_{11} p_{21} - b p_{11} p_{22} + I_p a p_{12} p_{22} \cos(q)}{I_p (p_{11} p_{22} - p_{12} p_{21})} < -c_2$$

El problema radica en encontrar un intervalo de valores de  $P_{i,j}$  que hagan valer las condiciones planteadas para  $g_1$  y  $g_2$  simultáneamente. Primeramente se va a proponer la matriz  $P$  simétrica y definida positiva, con esta condición se tiene que  $p_{11} > 0$ ,  $p_{11} p_{22} > p_{21} p_{12}$  y  $p_{21} = p_{12}$ . Por lo tanto es suficiente con encontrar las condiciones para las que el numerador de  $g_1$  es negativo, ya que su denominador es positivo, al ser el determinante de la matriz  $P$ . A continuación se describe el procedimiento para  $g_1$ , donde  $g_{1n}$  es el numerador de dicha expresión:

$$g_{1n} = -p_{11} p_{21} + \frac{b}{I_p} p_{12} p_{21} - a p_{12} p_{22} \cos(q) + \left| - \left( p_{21}^2 - \frac{b}{I_p} p_{21} p_{22} + a \cos(q) p_{22}^2 \right) \right| < 0$$

Aplicándose la desigualdad del triángulo [12], se tiene que:

$$g_{1n} \leq -p_{11}p_{21} + \frac{b}{I_p}p_{12}p_{21} - ap_{12}p_{22} \cos(q) + \left| p_{21}^2 - \frac{b}{I_p}p_{21}p_{22} \right| + |a \cos(q)p_{22}^2| < 0$$

En cuanto a los valores absolutos presentes en la expresión anterior, estos pueden ser desarrollados como sigue:

$$|a \cos(q)p_{22}^2| = |a| |\cos(q)| |p_{22}^2| \leq ap_{22}^2$$

$$\left| p_{21}^2 - \frac{b}{I_p}p_{21}p_{22} \right| = \left| p_{21}^2 + \left( -\frac{b}{I_p}p_{21}p_{22} \right) \right| \leq |p_{21}^2| + \left| -\frac{b}{I_p}p_{21}p_{22} \right| \leq |p_{21}^2| + \left| \frac{b}{I_p}p_{21}p_{22} \right|$$

Por tanto, aplicando los desarrollos anteriores en  $g_{1n}$ :

$$g_{1n} \leq -p_{11}p_{21} + \frac{b}{I_p}p_{12}p_{21} + ap_{12}p_{22} + p_{21}^2 + \frac{b}{I_p}p_{21}p_{22} + ap_{22}^2 < 0 \quad (13)$$

Luego, proponiéndose que  $p_{21} = p_{12} = 1$ , se tiene:

$$g_{1n} \leq -p_{11} + \frac{b}{I_p} - ap_{22} + 1 + \frac{b}{I_p}p_{22} + ap_{22}^2 < 0 \quad (14)$$

Si se asume que  $p_{11} = \frac{b}{I_p} - ap_{22} + 1 + \frac{b}{I_p}p_{22} + ap_{22}^2 + \epsilon$ , donde  $\epsilon \in \mathbb{R}$ , y se sustituye en (14), se tiene como resultado:

$$g_1 < -\epsilon \quad (15)$$

siendo  $-\epsilon = -c_1$ , que representa la cota superior de  $g_1$ . Luego de encontrada dicha cota se puede realizar el mismo procedimiento para el caso de  $g_2$  para encontrar su cota  $c_2$ , aplicándose las mismas condiciones antes mencionadas para los elementos de la matriz  $P$ , mismos que deben ser asigandos al finalizarse el proceso sin violar sus condicionantes y sustituidos tanto en  $g_1$  como en  $g_2$  para encontrar el valor numérico de  $c_1$  y  $c_2$ , respectivamente. Al encontrarse esos valores se demuestra la contractividad global del sistema en lazo abierto y su radio de contracción es mín  $\{c_1, c_2\}$ .

#### IV. CONTROL CON GANANCIAS VARIABLES

La idea básica que sustenta la aplicación de una ley de control con ganancias variables, además de lo ya antes planteado, radica en que cuando se tenga un error pequeño, una ganancia pequeña deberá aplicarse, esto para asegurar baja sensibilidad ante mediciones de ruido de alta frecuencia. Consecuentemente, cuando sea grande el error una ganancia alta se deberá aplicar.

A su vez, con la aplicación de un algoritmo de control con ganancias variables, se busca que este sea capaz de posicionar el servomecanismo a controlar desde una posición inicial hasta una posición deseada con error cero, en otras palabras, se quiere que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \tilde{q}(t) \\ \dot{\tilde{q}}(t) \end{bmatrix} \rightarrow 0 \quad (16)$$

donde  $\dot{q}(t)$ ,  $\tilde{q}(t) \in \mathbb{R}^n$  representan el vector de velocidades articulares y el error de posición del servomecanismo,  $\tilde{q}(t) = q_d - q(t)$  [13].

Para la realización de las pruebas de contracción del péndulo en lazo cerrado, primeramente se usa el algoritmo de control autosintonizable empleado en [13]. Este es un control tangente hiperbólico con

ganancia variable, que tiene como base uno de los controles saturados más comunes, y que para el caso de un péndulo sería expresado como:

$$\tau = k_p \tanh(\tilde{q}) - k_v \tanh(\dot{\tilde{q}}) + g(q) \quad (17)$$

donde  $k_p, k_v \in \mathbb{R}$  son las ganancias proporcional y derivativa del controlador. Luego, a partir de (17), en [13] se propone hacer depender la ganancia proporcional  $k_p$  del error de posición  $\tilde{q}$  para lograr la autosintonía de las ganancias. Esto buscando que mientras se tenga el error máximo, el controlador sea capaz de proporcionar el par necesario máximo y a su vez, teniéndose un error cercano a cero, proporcionar un par mínimo o suficiente para mantener al servomecanismo en esa posición. Por tanto, para  $k_p(\tilde{q})$  se propone la función:

$$k_p(\tilde{q}) = k_p^* \left( 1 - \beta e^{-\beta \tilde{q}^2} \right) \quad (18)$$

donde  $k_p^*, \beta \in \mathbb{R}^+$ . Específicamente para  $k_p^*$  se escoge el valor de par máximo deseado y  $\beta$  es una constante que va a estar acotada  $0 < \beta < 1$ .

La ganancia derivativa  $k_v$  queda dependiente de la velocidad articular, ya que el freno mecánico reacciona en relación a la inyección de velocidad  $\dot{q}$ , proponiéndose para  $k_v(\dot{q})$  la siguiente función:

$$k_v(\dot{q}) = k_v^* \left( 1 - \alpha e^{-\alpha \dot{q}^2} \right) \quad (19)$$

donde igualmente  $k_v^*, \alpha \in \mathbb{R}^+$ . Para  $k_v^*$  se escoge un porcentaje del valor de par máximo deseado y  $\alpha$  es una constante que va a estar acotada  $0 < \alpha < 1$ .

Por tanto, a partir de las propuestas plasmadas en (18) y (19), la ley de control queda finalmente como:

$$\tau = k_p(\tilde{q}) \tanh(\tilde{q}) - k_v(\dot{\tilde{q}}) \tanh(\dot{\tilde{q}}) + g(q) \quad (20)$$

Con dicha ley de control se buscará contractividad global del péndulo en lazo cerrado, lo que va a garantizar robustez en la respuesta del sistema, así como error de posición cero, sin importar las condiciones iniciales. A su vez, la demostración de contractividad global va a permitir realizar análisis en la frecuencia del sistema en lazo cerrado.

#### IV-A. Análisis de contracción del péndulo en lazo cerrado

Partiéndose de (7), igualando dicha expresión con (20) y despejando la aceleración, se obtiene la ecuación en lazo cerrado del péndulo, quedando:

$$\ddot{q} = \frac{1}{I_p} [k_p(\tilde{q}) \tanh(\tilde{q}) - k_v(\dot{\tilde{q}}) \tanh(\dot{\tilde{q}}) - b\dot{q}] \quad (21)$$

Teniendo en cuenta que  $\tilde{q} = q_d - q$ , el sistema expresado en las variables de estados  $\dot{\tilde{q}}$  y  $\ddot{\tilde{q}}$  queda:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\tilde{q}} \\ \frac{1}{I_p} [k_p(\tilde{q}) \tanh(\tilde{q}) - k_v(\dot{\tilde{q}}) \tanh(\dot{\tilde{q}}) - b\dot{\tilde{q}}] \end{bmatrix} \quad (22)$$

Sustituyendo (18) y (19) en (22), se tiene:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\tilde{q}} \\ \frac{1}{I_p} [k_p^* a \tanh(\tilde{q}) - k_v^* b \tanh(\dot{\tilde{q}}) - b\dot{\tilde{q}}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \quad (23)$$

donde  $a = \left( 1 - \beta e^{-\beta \tilde{q}^2} \right)$  y  $b = \left( 1 - \alpha e^{-\alpha \dot{\tilde{q}}^2} \right)$ . Luego, el cálculo del Jacobiano del sistema en variables de estados queda planteado

como:

$$J = \frac{\partial \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}}{\partial \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \tilde{q}} & \frac{\partial f_1}{\partial \dot{q}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \tilde{q}} & \frac{\partial f_2}{\partial \dot{q}} \end{bmatrix} \quad (24)$$

Quedando:

$$\frac{\partial \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}}{\partial \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \left[ k_p^* (\beta e^{-\beta \tilde{q}^2} - 1) (\tanh^2(\tilde{q}) - 1) + 2\beta^2 k_p^* \tilde{q} e^{-\beta \tilde{q}^2} \tanh(\tilde{q}) \right] \frac{1}{I_p} & - \left[ b + k_v^* (\alpha e^{-\alpha \dot{q}^2} - 1) + 2\alpha^2 k_v^* \dot{q} e^{-\alpha \dot{q}^2} \tanh(\dot{q}) \right] \frac{1}{I_p} \end{bmatrix} \quad (25)$$

Como matriz de medida, se usará en esta ocasión  $\mu_{P,\infty}$  inducida por la norma  $\infty$  del vector  $|Px|_\infty$ , donde  $P \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  es una matriz no singular:

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \quad (26)$$

siendo  $P_{i,j} \in \mathbb{R}^+$  y  $\mu_{P,\infty}(J)$  la medida asociada a la norma  $|\bullet|_\infty$  y dada por la fórmula:

$$\mu_\infty(J) = \max_i \left( J_{ii} + \sum_{i \neq j} |J_{ij}| \right) \quad (27)$$

Luego, para el péndulo en lazo cerrado, teniendo como base (20) y aplicándose la metodología empleada en la sección anterior, luego se obtiene:

$$\mu_{P,\infty}(J) = \max \begin{cases} Rp_{21}e - R \frac{p_{12}p_{22}d}{I_p} + \left| -Rp_{11}e - R \frac{p_{12}d}{I_p} \right| = g_1; \\ \left| Rp_{21}f + R \frac{p_{22}d}{I_p} \right| - Rp_{11}f - R \frac{p_{12}p_{22}d}{I_p} = g_2 \end{cases} \quad (28)$$

donde  $R = (p_{11}p_{22} - p_{12}p_{21})^{-1}$  y además están presentes los términos  $d$ ,  $e$  y  $f$ , los cuales se describen a continuación:

$$d = k_p^* (\beta e^{-\beta \tilde{q}^2} - 1) (\tanh^2(\tilde{q}) - 1) + 2\beta^2 k_p^* \tilde{q} e^{-\beta \tilde{q}^2} \tanh(\tilde{q})$$

$$e = p_{11} + \left[ p_{12} \left( b + k_v^* (\alpha e^{-\alpha \dot{q}^2} - 1) (\tanh^2(\dot{q}) - 1) + 2\alpha^2 k_v^* \dot{q} e^{-\alpha \dot{q}^2} \tanh(\dot{q}) \right) \right] \frac{1}{I_p} \quad (29)$$

$$f = p_{21} + \left[ p_{22} \left( b - k_v^* (\alpha e^{-\alpha \dot{q}^2} - 1) (\tanh^2(\dot{q}) - 1) + 2\alpha^2 k_v^* \dot{q} e^{-\alpha \dot{q}^2} \tanh(\dot{q}) \right) \right] \frac{1}{I_p}$$

Como ocurrió en la demostración de contracción de la sección anterior, no se necesita conocer los valores exactos de  $P_{i,j}$ , sino el rango de valores de estos que garantice que  $\mu_{P,\infty}(J) < 0$ , por lo que es suficiente demostrar que tanto  $g_1$  como  $g_2$  sean definidas negativas.

Para tal propósito, asumiendo que  $R > 0$ , puede centrarse el análisis en demostrar que el numerador de dichas expresiones es negativo, por tanto, aplicando propiedades matemáticas y operaciones algebraicas, además de considerarse que  $\tanh^2(\tilde{q}) - 1 \leq 0$ ,  $e^{-\beta \tilde{q}^2} \tanh(\tilde{q}) \leq 1$  y teniéndose por diseño que  $0 < \alpha < 1$  y  $0 < \beta < 1$  se llega a:

$$g_{1n} < p_{21}p_{11} + \frac{p_{21}p_{12}b}{I_p} + \frac{2p_{21}p_{12}\alpha^2 k_v^* \dot{q}}{I_p} + \frac{2p_{12}p_{22}\beta^2 k_p^* \tilde{q}}{I_p} + p_{11}^2 + \frac{p_{12}p_{11}b}{I_p} + \frac{2p_{21}p_{12}\alpha^2 k_v^* \dot{q}}{I_p} + \frac{2p_{12}^2\beta^2 k_p^* \tilde{q}}{I_p} < 0 \quad (30)$$

donde  $g_{1n}$  es el numerador de  $g_1$ . Luego, si se asume que  $p_{12} = 0$ , se tiene:

$$g_{1n} < p_{21}p_{11} + p_{11}^2 < 0 \quad (31)$$

La desigualdad (31) se puede trabajar de forma tal que quede una condición para uno de los dos parámetros de  $P$  presentes en la misma, esto con el fin de garantizar que  $g_1$  sea estrictamente negativa. Dicha condición, a la par de las antes mencionadas para los elementos de la matriz  $P$  serán aplicadas en  $g_2$ , buscando

que esta sea negativa y a partir de todas las condiciones de  $P$  recopiladas, se encontrará una combinación que haga valer que  $\mu_\infty(J) < -\min\{c_1, c_2\}$ , demostrándose así la contractividad global del sistema en lazo cerrado.

## V. SIMULACIONES EN MATLAB

Para la simulación del péndulo, tanto bajo la acción del controlador en lazo cerrado (22), como del sistema en lazo abierto (8), se desarrolló un programa en MATLAB/Simulink, el cual se aprecia en la Figura 1. El mismo brinda al usuario la posibilidad de visual-

lizar diferentes variables como las ganancias proporcional  $K_p(\ddot{q})$  y derivativa  $K_v(\dot{q})$ , la posición deseada  $q_d$ , el error de posición  $\tilde{q}$ , el par o torque aplicado  $\tau$ , así como la velocidad  $\dot{q}$  y posición articular  $q$ . En el programa vienen implementadas dos funciones, *controlador*, donde se pueden modificar los parámetros del mismo, y *pendulo*, en la que se pueden ajustar los valores de la planta.

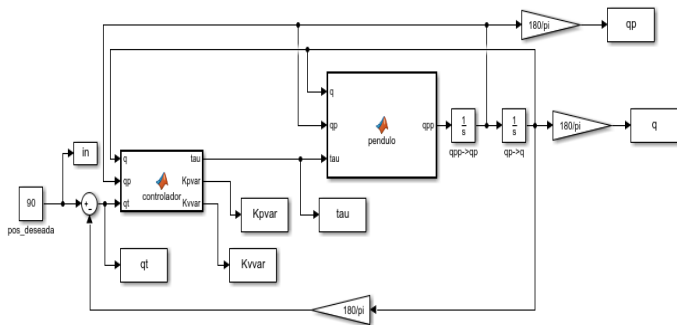


Fig. 1: Programa desarrollado en MATLAB/Simulink para el control del péndulo.

La respuesta del sistema sin la acción del controlador ante una entrada periódica se observa en la Figura 2, en la que se corrobora gráficamente la contractividad global del péndulo en lazo abierto, esto tras imponerse dicha entrada justo donde el torque se le inyecta a la planta, obteniéndose una respuesta de igual periodo y amplitud diferente, cumpliendo con el **Teorema 2**.

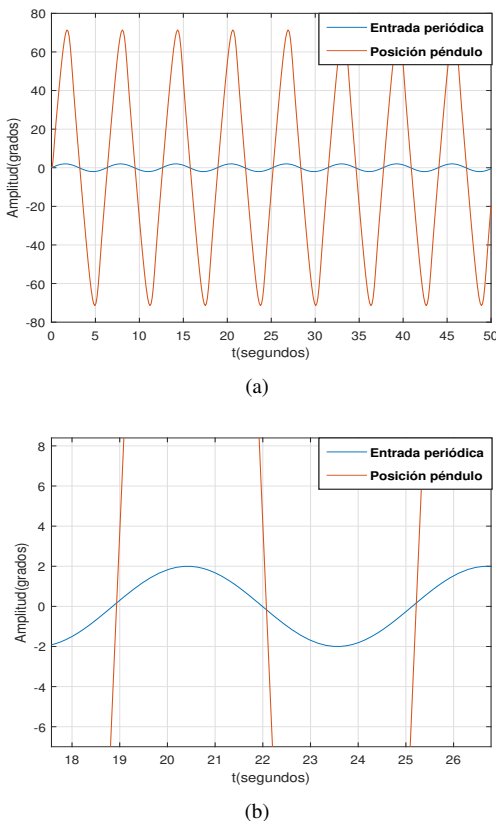


Fig. 2: Respuesta del péndulo en lazo abierto ante una entrada periódica.

En la Figura 3 se observa la respuesta del sistema en lazo cerrado para una posición deseada  $q_d$ , donde el péndulo llega a dicha posición en poco más de medio segundo, de forma suave y con una mínima oscilación. A su vez, la Figura 4 muestra el error de posición que presenta el sistema en lazo cerrado, llegando a valor cero rápidamente, en tanto en la Figura 5 se aprecia el torque que ejerce el motor del péndulo para llevarlo a la posición deseada, sin llegar o rebasar el valor de par máximo del motor, que en este caso es de 4 Nm. La Figura 6 muestra como varía la ganancia proporcional a medida que el extremo final del péndulo llega a la posición deseada. Adicionalmente, en la Figura 7 se observa el comportamiento de la ganancia proporcional dependiente del error de posición, disminuyendo el valor de esta conforme es menor el error.

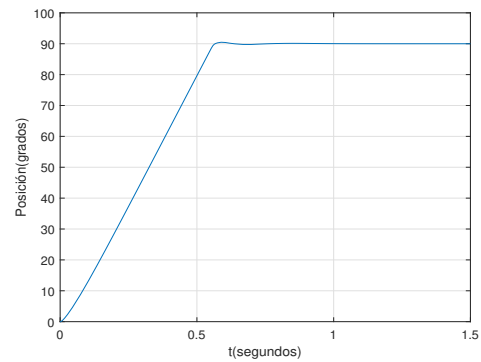


Fig. 3: Posición del péndulo en lazo cerrado para  $q_d = 90$  grados.

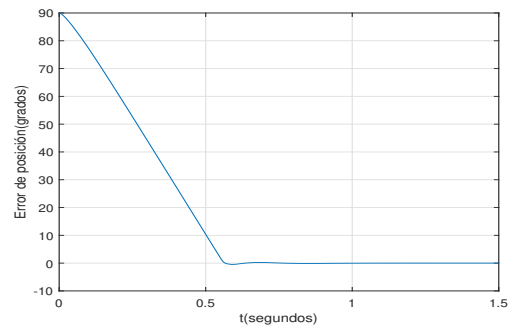


Fig. 4: Error de posición.

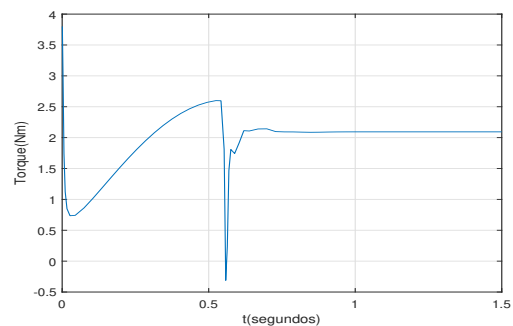


Fig. 5: Par aplicado por el controlador.

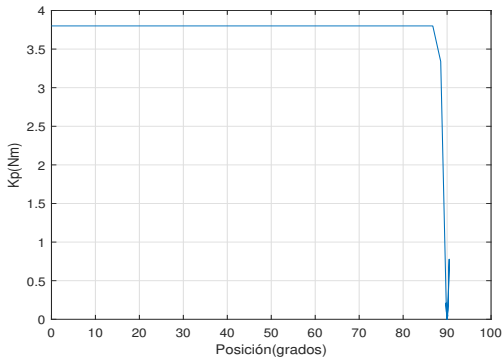


Fig. 6: Ganancia proporcional variable vs posición.

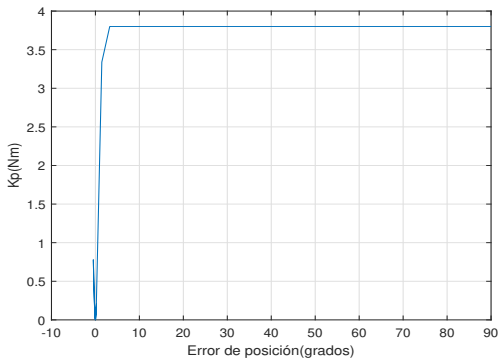


Fig. 7: Ganancia proporcional variable vs error de posición.

## VI. CONCLUSIONES

En este trabajo, luego de realizado un estudio de la teoría de contracción, se llevó a cabo el análisis de contractividad del péndulo en lazo abierto y posteriormente, teniendo en cuenta el controlador de ganancias variables empleado, se analizó nuevamente la contractividad del péndulo en lazo cerrado, siendo dadas en ambos casos las premisas, en cuanto al desarrollo matemático se refiere, para llevar a cabo la demostración de contracción. Fue desarrollado un programa en MATLAB/Simulink, con el que se simuló la respuesta del péndulo sin la acción del controlador y ante una entrada periódica, presentando una respuesta de igual periodo y amplitud diferente que la señal de entrada, característica propia de los sistemas contractivos. De manera análoga, para la simulación de la respuesta en lazo cerrado,

se observó el comportamiento de diferentes variables presentes en la misma, como la posición, error de posición, torque y ganancia proporcional. Para un trabajo futuro se pretende extender el análisis de este tipo de controladores de ganancias variables aplicando la teoría de contracción en robots de más grados de libertad y otros servomecanismos e igualmente llevar a cabo la implementación de la plataforma experimental de los controladores en diferentes servomecanismos, así como la propuesta de nuevos controladores no lineales de ganancias variables que garanticen la convergencia del sistema en lazo cerrado.

## REFERENCES

- [1] L. R. Khan, *Analysis of a limiter as a variable-gain device*, Electrical Engineering, Vol.72, No. 12, pages 1106-1109, 1953.
- [2] Miguel A. Limón-Díaz, Fernando Reyes-Cortés and Emilio J. González Galván, *Unbounded regulators with variable gains for a direct-drive robot manipulator*, Automatica, Vol.57, No.2, pages 484-495, 2017.
- [3] Marcel Heertjes and Maarten Steinbuch, *Stability and performance of a variable gain controller with application to a dvd storage drive*, Automatica, Vol.40, No.4, pages 591-602, 2004.
- [4] Nathan van de Wouw, H.A Pastink, Marcel Heertjes, Alexey Pavlov and Henk Nijmeijer, *Performance of convergence-based variable-gain control of optical storage drives*, Automatica, Vol. 44, No.1, pages 15-27, 2008.
- [5] L.C. van Breugel, H. Nijmeijer, N. van de Wouw and B.G.B. Hunnekens *Analysis of piecewise linear variable gain controllers for linear motion systems*, Department of Mechanical Engineering, Dynamics and Control, Eindhoven University of Technology, 2012.
- [6] Fulvio Forni and Rodolphe Sepulchre, *A differential Lyapunov framework for contraction analysis*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 59, No. 3, pages 614-628, 2014.
- [7] Alexey Pavlov, Nathan Van De Wouw and Henk Nijmeijer, *Convergent systems: analysis and synthesis*, Springer, pages 131-146, 2005.
- [8] Alexey Pavlov, Nathan van de Wouw and Henk Nijmeijer, *Frequency Response Functions for Nonlinear Convergent Systems*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 52, No. 6, pages 1159-1165, 2007.
- [9] Eduardo D. Sontag, *Contractive Systems with Inputs*, Springer, pages 217-228, 2010.
- [10] Mario Di Bernardo, Giovanni Russo and Jean-Jacques E. Slotine, *An algorithm to prove contraction, consensus, and network synchronization*, IFAC Proceedings Volumes, Vol. 42, No. 20, pages 60-65, 2009.
- [11] Giovanni Russo, Mario Di Bernardo and Eduardo D. Sontag, *Global entrainment of transcriptional systems to periodic inputs*, PLoS computational biology, Vol. 6, No. 4, pages e1000739, 2010.
- [12] Fernando Reyes Cortés, *Robótica Control de Robots Manipuladores*, México: Alfaomega grupo editor, 2011.
- [13] Abdiel Ortega Méndez, Fernando Reyes Cortés, Aurora Vargas Treviño and Sergio Vergara Limón, *Control tangente hiperbólico con ganancia variable*, Asociación Mexicana de Mecatrónica, pages 42-47, 2013.
- [14] Winfried Lohmiller and Jean-Jacques E. Slotine, *On contraction analysis for non-linear systems*, Automatica, Vol. 34, No. 6, pages 683-696, 1998.



# ROC&C'2020

29ª. REUNION INTERNACIONAL DE COMUNICACIONES, COMPUTACION, ELECTRONICA, AUTOMATIZACION, ROBOTICA Y EXPOSICION INDUSTRIAL.

PALACIO MUNDO IMPERIAL RIVIERA DIAMANTE

EXPO + FORUM + RESORT + PROMENADE

18 al 20 de Marzo de 2020.

Acapulco, Gro., México

México, D. F. a 10 de Febrero de 2020.

Lorenzo L. González Romeo, Rodolfo Reyes Báez\*, Jaime J. Cid Monjaraz, Olga G. Felix Beltrán  
BENEMERITA UNIVERSIDAD AUTONOMA DE PUEBLA - FACULTAD DE CIENCIAS DE LA ELECTRONICA / UNIVERSITY OF GRONINGEN

Estimado Sr. González:

Nos es muy grato informar a usted, que su ponencia ha sido aceptada, para ser publicada en la memoria tradicional con ISBN nacional (sin publicación IEEE Xplore) de la, **29ª. REUNION INTERNACIONAL DE OTOÑO DE COMUNICACIONES, COMPUTACION, ELECTRONICA, AUTOMATIZACION, ROBOTICA Y EXPOSICION INDUSTRIAL, ROC&C'2020**, a celebrarse del **18 al 20 de Marzo del 2020**, en **Palacio Mundo Imperial Riviera Diamante Acapulco**.

03 ♦ 20

## CARTA COMPROMISO

Mediante este documento y de acuerdo con los **ESTATUTOS DEL IEEE**, me comprometo a presentar personalmente la ponencia cuyo título es,

### PONENCIA 15.- CONTROL NO LINEAL BASADO EN CONTRACCION CON GANANCIA VARIABLE EL CASO DE PENDULO

o bien, enviar a un representante con conocimientos suficientes del tema, notificando al **IEEE**, de este cambio, **por lo menos 10 días antes del evento**.

Atentamente,

Lorenzo L. González Romeo, Rodolfo Reyes Báez\*, Jaime J. Cid Monjaraz, Olga G. Felix Beltrán

**IMPORTANTE:** Para realizar los **TRAMITES DE INSCRIPCION AL EVENTO Y AL HOTEL**, *con mucho gusto, le anexamos la documentación correspondiente.*

El **IEEE Sección México** le extiende una muy cordial invitación a participar como **Moderador** en esta **ROC&C'2020**, moderando algunas de las **Sesiones Técnicas de su interés y especialidad**. En caso de aceptar ayudarnos, le suplicamos nos lo comunique, para considerarlo en el **Programa Técnico**.

Sin otro particular de momento, aprovechamos la ocasión para enviarle un cordial saludo y expresarle nuestro reconocimiento y gratitud por participar en la **ROC&C'2020**.

Atentamente,

*M.P. César Fuentes Estrada*

DIRECTOR CORPORATIVO DE INGENIERIA Y  
PROYECTOS DE INFRAESTRUCTURA

CFE

PRESIDENTE

**IEEE SECCION MÉXICO**

Nota: Agradeceremos se sirva enviar por correo el siguiente documento debidamente firmado.

# Control no lineal basado en contracción con ganancia variable: el caso de péndulo

Lorenzo L. González Romeo  
Facultad de Ciencias de la Electrónica  
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla  
Puebla, México  
loregromeo@gmail.com

Rodolfo Reyes-Báez, *Member, IEEE*  
Jan C. Willems Center for Systems and Control  
University of Groningen  
Groningen, The Netherlands  
r.reyes-baez@ieee.org

Jaime J. Cid Monjaraz, *Senior, IEEE*  
Facultad de Ciencias de la Electrónica  
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla  
Puebla, México  
jaime.cid@ieee.org

Olga G. Felix Beltrán  
Facultad de Ciencias de la Electrónica  
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla  
Puebla, México  
olga.felix@correo.buap.mx

**Resumen**—En este artículo se muestra el diseño de un esquema de control no lineal con ganancia variable, el cual se aplica a un péndulo robot. El sistema en lazo cerrado con el controlador propuesto posee la propiedad de *contractividad*, esta asegura que las trayectorias están acotadas y convergen exponencialmente a una solución única. Con este fin se introduce la teoría diferencial de Lyapunov para el análisis de contracción, luego se propone un método inspirado en la técnica de control no lineal conocida como *backstepping*. En esta técnica el diseño recursivo de funciones de control de Lyapunov es reemplazado por el diseño recursivo de funciones de *diferenciales* de control de Lyapunov. El desempeño del controlador es evaluado de forma experimental, donde se resuelven los problemas de regulación y seguimiento de trayectoria en el péndulo. La implementación es realizada en una tarjeta Arduino Due.

**Index Terms**—ganancia variable, contracción, Lyapunov, backstepping

## I. INTRODUCCIÓN

Desde la primera aparición del concepto de *Ganancia Variable* en [1], muchas han sido sus aplicaciones en diversas ramas de la automatización, como son el control de posición de robot manipuladores [2], la reducción de vibraciones a baja frecuencia del lente de unidades de almacenamiento óptico [3] y [4], en aplicaciones para sistemas de movimiento en general [5], entre otras. Los controladores de ganancia variable brindan el ajuste automático de la ganancia en función de una variable que se considere.

Para este propósito, en muchas aplicaciones, la función de Lyapunov no es sencilla de hallar para el sistema en lazo cerrado; especialmente si el estado estable no es conocido y la entrada es diferente de cero. Ante estas dificultades han surgido versiones incrementales de la teoría de Lyapunov, en las cuales aún sin conocer el estado estable, es posible asegurar convergencia exponencial a una solución nominal, y con la posibilidad de caracterizar dicha solución para diversas entradas diferente de cero (e.g. constantes, periódicas, etc.). Sin embargo, encontrar una función incremental de Lyapunov resulta ser igual o más difícil que la versión estándar en algunos casos [6]. Por esta razón, el análisis de contracción surge como una alternativa para estudiar la estabilidad incremental entre soluciones, en la cual analizando la dinámica asociada a desplazamientos virtuales (variaciones infinitesimales entre trayectorias) se puede inferir la estabilidad incremental de las soluciones de un sistema [7]. Es decir, contractividad es la forma diferencial de estabilidad incremental, o estabilidad incremental es la versión integral de contractividad.

La propiedad de contractividad puede ser estudiada de diversas

formas, por ejemplo, mediante métricas Rimeannianas [7], [8], o a través del enfoque algebraico de medidas matriciales [9]. Sin embargo, en este trabajo la propiedad de contracción se estudiará mediante la teoría diferencial de Lyapunov para el análisis de contracción [10].

El artículo tiene la siguiente estructura: en la sección II se presenta el método diferencial de Lyapunov; la sección III contiene el planteamiento del problema de control y se presenta el resultado principal de este trabajo, donde el controlador basado en contracción y con ganancia variable es diseñado. En la sección IV se presentan los resultados experimentales. Finalmente, en la sección V se dan las conclusiones.

## II. TEORÍA DIFERENCIAL DE LYAPUNOV

La idea central de la estabilidad incremental consiste en comparar cualquier par de soluciones del sistema respecto a una distancia, por lo que no se necesita conocer la existencia de un punto de equilibrio como en la teoría de estabilidad de Lyapunov. Sea  $\Sigma$  un sistema de control en lazo cerrado, definido como

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x} = F(x, t) = f(x, t) + g(x, t)\gamma(x, t) \\ y = h(x, t) \end{cases} \quad (1)$$

donde  $x \in \mathcal{X}$  es el estado, la entrada  $u \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}$  es una función de tiempo localmente acotada y medible, con  $u = \gamma(x, t)$  y la salida  $y \in \mathcal{Y} \subset \mathbb{R}$ . La entrada espacio  $\mathcal{U}$  y la salida espacio  $\mathcal{Y}$  son subconjuntos de  $\mathbb{R}$ . Las soluciones de  $\Sigma$  se denotan por  $x(t) = \psi_{t_0}(x_0, t)$ . Considere una vecindad abierta, invariante y conectada  $C$  de  $\mathcal{X}$  tal que  $\psi_{t_0}(x_0, t_0)$  es completa para cada  $x_0 \in C$ , cada función  $u$  y cada  $t_0$ . Por conectividad, cualquier par de puntos  $x_0, x_1$  en  $C$  pueden ser conectados por una curva suave  $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow C$ , con  $\gamma(-\epsilon) = x_0$  y  $\gamma(\epsilon) = x_1$  [11]. La dinámica variacional de  $\Sigma$  en (1), a lo largo de la trayectoria  $(u, x, y)(t)$  es el sistema variante en el tiempo y denotado por

$$\delta\Sigma : \begin{cases} \delta\dot{x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\delta x + u \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)\delta x + g\delta u \\ \delta y = \frac{\partial h}{\partial x}(x, t)\delta x \end{cases} \quad (2)$$

**Definición:** El sistema de control prolongado  $\Sigma^\delta$  asociado al sistema de control  $\Sigma$  en (1) conlleva considerar el sistema original  $\Sigma$  y su sistema variacional  $\delta\Sigma$ , que se describe como [12]

$$\Sigma_u^\delta : \begin{cases} \dot{x} = f(x, t) + g(x, t)u \\ y = h(x, t) \\ \delta\dot{x} = \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + u \frac{\partial g}{\partial x} \delta x + g \delta u \\ \delta y = \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) \delta x \end{cases} \quad (3)$$

con  $(u, \delta u) \in T\mathcal{U}$ ,  $(x, \delta x) \in T\mathcal{X}$  y  $(y, \delta y) \in T\mathcal{Y}$ .

**Función diferencial de Lyapunov:** Sea  $\mathfrak{F}(x, \delta x, t)$  una estructura Finsler [13]. Una función  $V : T\mathcal{X} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  es una función diferencial candidata de Lyapunov adaptada a  $\mathfrak{F}$  si satisface [10]

$$c_1 \mathfrak{F}(x, \delta x, t)^p \leq V(x, \delta x, t) \leq c_2 \mathfrak{F}(x, \delta x, t)^p \quad (4)$$

para algunas constantes  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ , siendo  $p$  un entero positivo. La relación entre una función diferencial candidata de Lyapunov y la estructura Finsler es la clave para el análisis de estabilidad incremental, más precisamente, una distancia uniforme bien definida en  $\mathcal{X} \times \mathbb{R}$  mediante integración, como se define a continuación.

**Distancia Finsler:** Considere una función diferencial candidata de Lyapunov en  $\mathcal{X}$  y la estructura Finsler  $\mathfrak{F}$ . Para cualquier subconjunto  $C \subseteq \mathcal{X}$  y cualquier  $x_1, x_2 \in C$ , sea  $\Gamma(x_1, x_2)$  la colección por partes  $C^1$  de curvas  $\gamma : I \rightarrow \mathcal{X}$  conectando  $\gamma(0) = x_1$  y  $\gamma(1) = x_2$ . La distancia Finsler  $d : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  inducida por  $\mathfrak{F}$  es definida por [10]

$$d(x_1, x_2) := \inf_{\gamma \in \Gamma(x_1, x_2)} \int_{\gamma} \mathfrak{F} \left( \gamma(s), \frac{\partial \gamma}{\partial s}(s), t \right) ds \quad (5)$$

**Método diferencial de Lyapunov:** Considere el sistema prolongado  $\Sigma^\delta$ , un conjunto conectado e invariante  $C \subseteq \mathcal{X}$ , y una función  $\alpha : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  [10]. Sea  $V$  una función diferencial candidata de Lyapunov satisfaciendo

$$\dot{V}(x, \delta x, t) \leq -\alpha(V(x, \delta x, t)) \quad (6)$$

para cada  $(x, \delta x, t) \in T\mathcal{X} \times \mathbb{R}$ . Entonces, el sistema descrito en (1) es

- Incrementalmente estable en  $C$  uniformemente en  $t$ , si  $\alpha(s) = 0$  para cada  $s \geq 0$ .
- Incremental y asintóticamente estable en  $C$  uniformemente en  $t$ , si  $\alpha$  es una función de tipo  $\mathcal{K}^1$ .
- Incremental y exponencialmente estable en  $C$  uniformemente en  $t$ , si  $\alpha(s) = \beta s$ ,  $\forall s > 0$ .

En la figura 1 se muestra una interpretación geométrica del método antes descrito. Este resulta en una condición suficiente para demostrar estabilidad incremental en términos de funciones diferenciales de Lyapunov, por lo que puede ser considerado como la versión *Finsler-Lyapunov/diferencial* del método directo de Lyapunov [10]. Por tanto, la definición de contracción en términos de funciones diferenciales de Lyapunov es la siguiente:

**Contracción:** Se puede decir que  $\Sigma$  contrae  $V$  en  $C$  si se satisface (6) para alguna función  $\alpha$  de clase  $\mathcal{K}$ .  $V$  es llamada la medida de contracción y  $C$  la región de contracción [10].

<sup>1</sup>La función  $\alpha$  se dice de clase  $\mathcal{K}$  si es estrictamente creciente y  $\alpha(0) = 0$  [14].

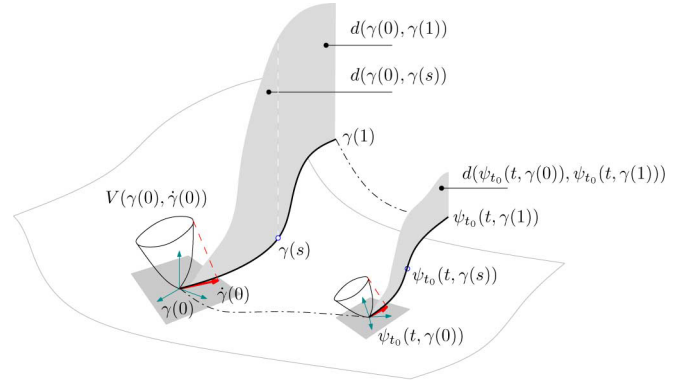


Figura 1. Ilustración gráfica de la distancia inducida por la condición (6) [10].

Con el empleo de esta metodología se cuenta con un criterio y procedimiento semejantes al tradicionalmente utilizado para demostrar estabilidad asintótica. Es un hecho que resulta de interés en cuanto a su estudio y puesta en práctica, ya que ofrece una vía similar de trabajo para demostrar una propiedad más fuerte, como es la estabilidad incremental y contracción de las soluciones de un sistema.

### III. CONTROL CON GANANCIA VARIABLE

Con la aplicación de un algoritmo de control con ganancia variable, se busca que este sea capaz de posicionar el servomecanismo a controlar desde una posición inicial hasta una posición deseada con error cero, esto es:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \tilde{q}(t) \\ \dot{q}(t) \end{bmatrix} \rightarrow 0 \quad (7)$$

donde  $\dot{q}(t)$ ,  $\tilde{q}(t) \in \mathbb{R}^n$  representan el vector de velocidades articulares y el error de posición del servomecanismo respectivamente, y  $\tilde{q}(t) = q_d - q(t)$  [15].

El comportamiento deseado en un controlador con ganancia variable es una respuesta simétrica y dependiente de alguna de las variables de estado del sistema, ya sea el error de posición, la velocidad, etc. A su vez se busca que, ante un valor máximo de la variable de la que depende la función propuesta, se obtenga un máximo valor de ganancia, y viceversa, por lo que es recomendable proponer funciones definidas positivas para lograr tal propósito. El comportamiento descrito se puede apreciar en la figura 2, donde se muestra como ejemplo la gráfica de respuesta de un controlador con ganancia derivativa variable, dependiente de la velocidad articular considerando valores positivos y negativos de la misma.

#### III-A. Diseño de controladores con ganancia variable y basados en contracción

Para este trabajo, el servomecanismo caso de estudio es un eslabón de un robot de 3 grados de libertad, por lo que su modelo dinámico mediante ecuaciones de Euler-Lagrange; considerando para este caso la fricción viscosa, es el siguiente [16]:

$$\tau = I_p \ddot{q} + b \dot{q} + g(q) \quad (8)$$

donde  $I_p = ml_c^2 + I$  y  $g(q) = mgl_c \sin(q)$ , siendo  $m$  la masa,  $l_c$  la longitud del centro de masas,  $I$  el coeficiente de inercia,  $g$  la aceleración de la gravedad y  $b$  el coeficiente de fricción viscosa.

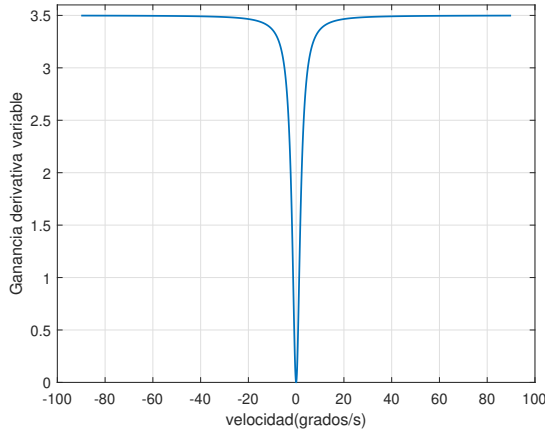


Figura 2. Comportamiento deseado en un controlador de ganancias variables.

Definiendo  $x_1 = q$  y la velocidad  $x_2 = \dot{q}$ , el sistema en lazo cerrado expresado en variables de estado está dado por:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{1}{I_p} [\tau - bx_2 - mgl_c \sin(x_1)] \end{bmatrix} \quad (9)$$

Para diseñar el esquema de control, se propone una adaptación de la técnica de control no lineal backstepping [14], basada en análisis de contracción. En el método estándar de backstepping se busca diseñar funciones de Lyapunov de manera recursiva mediante control. Por otro lado, en este trabajo, el requerimiento de estabilidad en el sentido de Lyapunov es reemplazado por el requerimiento de contractividad. Para este fin, se diseñan de manera recursiva funciones *diferenciales* de Lyapunov (ver (4)) para sistemas prolongados (ver (3)).

Como primer paso de diseño, se introduce el error de posición como  $\tilde{x}_1 = x_{1d} - x_1$ , cuya dinámica está dada por

$$\dot{\tilde{x}}_1 = \dot{x}_{1d} - x_2 \quad (10)$$

Luego, se asume que  $x_2$  es una acción de control artificial expresado como:

$$x_2 = \tilde{x}_2 - \alpha(x_1) \quad (11)$$

donde  $\tilde{x}_2$  es un nuevo estado y  $-\alpha(x_1)$  es una acción que hace que la dinámica del error de  $\tilde{x}_1$  en (10) sea contractiva y  $\alpha(0) = 0$ . Sustituyendo (11) en (10) se tiene

$$\dot{\tilde{x}}_1 = \dot{x}_{1d} - \tilde{x}_2 + \alpha(x_1) \quad (12)$$

Para garantizar que  $\dot{\tilde{x}}_1 = 0$  sea una solución de (12) cuando  $\tilde{x}_2 = 0$ , se propone para  $\alpha(x_1)$  la siguiente expresión:

$$\alpha(x_1) = -\dot{x}_{1d} - \phi(\tilde{x}_1) \quad (13)$$

donde  $\phi(0) = 0$ . Sustituyendo (13) en (12), el sistema en lazo cerrado queda:

$$\dot{\tilde{x}}_1 = -\tilde{x}_2 - \phi(\tilde{x}_1) \quad (14)$$

Luego, el sistema prolongado asociado a (14) está dado por

$$\Sigma^\delta : \begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = -\tilde{x}_2 - \phi(\tilde{x}_1) \\ \delta \dot{\tilde{x}}_1 = -\delta \tilde{x}_2 - \frac{\partial \phi(\tilde{x}_1)}{\partial \tilde{x}_1} \delta \tilde{x}_1 \end{cases} \quad (15)$$

El diseño de la función diferencial candidata de Lyapunov para (15) tiene como premisas, tanto que  $V(\tilde{x}_1, \delta \tilde{x}_1) > 0$  como  $\dot{V}(\tilde{x}_1, \delta \tilde{x}_1) < 0$ , por lo que se propone:

$$V_1(\tilde{x}_1, \delta \tilde{x}_1) = \frac{1}{2} k_p \delta \tilde{x}_1^2 > 0 \quad (16)$$

donde  $k_p \in \mathbb{R}^+$ , por lo que la derivada temporal de la función diferencial candidata es:

$$\dot{V}_1(\tilde{x}_1, \delta \tilde{x}_1) = -k_p \delta \tilde{x}_1 \delta \dot{\tilde{x}}_1 - k_p \frac{\partial \phi(\tilde{x}_1)}{\partial \tilde{x}_1} \delta \tilde{x}_1^2 \quad (17)$$

Si se asume que  $\delta \tilde{x}_2 = 0$  y si

$$k_p \frac{\partial \phi(\tilde{x}_1)}{\partial \tilde{x}_1} > 0 \quad (18)$$

entonces  $\dot{V}_1(\tilde{x}_1, \delta \tilde{x}_1) < 0$  y por tanto  $\tilde{x}_1 \rightarrow 0$ . Así, en el segundo paso del proceso de diseño se debe asegurar que  $(\tilde{x}_2, \delta \tilde{x}_2) = (0, 0)$ . Retomando (11) y despejando  $\tilde{x}_2$  se tiene que:

$$\tilde{x}_2 = x_2 + \alpha(x_1) \quad (19)$$

Luego, la dinámica de  $\tilde{x}_2$ , o sea, su derivada temporal es:

$$\dot{\tilde{x}}_2 = \dot{x}_2 + \dot{\alpha}(x_1) \quad (20)$$

Por consiguiente, sustituyendo  $\dot{x}_2$  en (20), se tiene

$$\dot{\tilde{x}}_2 = \frac{1}{I_p} [\tau - bx_2 - mgl_c \sin(x_1)] + \dot{\alpha}(x_1) \quad (21)$$

Si se sustituyen (11) y  $x_1$  en (21), esta última puede ser reescrita como sigue:

$$\dot{\tilde{x}}_2 = \frac{1}{I_p} [\tau - b(\tilde{x}_2 - \alpha(x_1)) - mgl_c \sin(x_{1d} - \tilde{x}_1)] + \dot{\alpha}(x_{1d} - \tilde{x}_1) \quad (22)$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta (14) y (22), el sistema en lazo cerrado puede escribirse como:

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = -\phi(\tilde{x}_1) - \tilde{x}_2 \\ \dot{\tilde{x}}_2 = \frac{1}{I_p} [\tau - b(\tilde{x}_2 - \alpha(x_1)) - mgl_c \sin(x_{1d} - \tilde{x}_1)] \\ \quad + \dot{\alpha}(x_{1d} - \tilde{x}_1) \end{cases} \quad (23)$$

Además, el sistema variacional de (23) queda expresado como se muestra a continuación:

$$\Sigma^\delta : \begin{cases} \delta \dot{\tilde{x}}_1 = -\frac{\partial \phi(\tilde{x}_1)}{\partial \tilde{x}_1} \delta \tilde{x}_1 - \delta \tilde{x}_2 \\ \delta \dot{\tilde{x}}_2 = \frac{1}{I_p} \delta \tau - \frac{b}{I_p} \delta \tilde{x}_2 + \frac{b}{I_p} \frac{\partial \alpha(x_{1d} - \tilde{x}_1)}{\partial \tilde{x}_1} \delta \tilde{x}_1 \\ \quad - \frac{mgl_c}{I_p} \cos(x_{1d} - \tilde{x}_1) \delta \tilde{x}_1 + \frac{\partial \dot{\alpha}(x_{1d} - \tilde{x}_1)}{\partial \tilde{x}_1} \delta \tilde{x}_1 \end{cases} \quad (24)$$

Luego, la propuesta de función diferencial de control de Lyapunov para el sistema prolongado compuesto por (23) y (24) tiene nuevamente como premisas, tanto que  $V(\tilde{x}_1, \delta \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \delta \tilde{x}_2) > 0$  como  $\dot{V}(\tilde{x}_1, \delta \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \delta \tilde{x}_2) < 0$ , por lo que se propone:

$$V_2(\tilde{x}_1, \delta \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \delta \tilde{x}_2) = V_1(\tilde{x}_1, \delta \tilde{x}_1) + \frac{1}{2} I_p \delta \tilde{x}_2^2 > 0 \quad (25)$$

La derivada temporal de la función diferencial candidata es:

$$\dot{V}_2(\tilde{x}_1, \delta \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \delta \tilde{x}_2) = \dot{V}_1(\tilde{x}_1, \delta \tilde{x}_1) + I_p \delta \tilde{x}_2 \delta \dot{\tilde{x}}_2 \quad (26)$$

Sustituyendo (17) en (26) se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 = & -k_p \delta \tilde{x}_1 \delta \tilde{x}_2 - k_p \frac{\partial \phi(\tilde{x}_1)}{\partial \tilde{x}_1} \delta \tilde{x}_1^2 + \delta \tilde{x}_2 [\delta \tau - b \delta \tilde{x}_2 \\ & + b \frac{\partial \alpha(x_{1d} - \tilde{x}_1)}{\partial \tilde{x}_1} \delta \tilde{x}_1 - mgl_c \cos(x_{1d} - \tilde{x}_1) \delta \tilde{x}_1 \\ & + I_p \frac{\partial \dot{\alpha}(x_{1d} - \tilde{x}_1)}{\partial \tilde{x}_1} \delta \tilde{x}_1] \end{aligned} \quad (27)$$

De (27), se propone definir

$$\begin{aligned} \delta \tau = & -b \frac{\partial \alpha(x_{1d} - \tilde{x}_1)}{\partial \tilde{x}_1} \delta \tilde{x}_1 + mgl_c \cos(x_{1d} - \tilde{x}_1) \delta \tilde{x}_1 \\ & - I_p \frac{\partial \dot{\alpha}(x_{1d} - \tilde{x}_1)}{\partial \tilde{x}_1} \delta \tilde{x}_1 + \delta u \end{aligned} \quad (28)$$

donde  $\delta u$  es el variacional de una función adicional que se propone por parte del autor y que luego quedará en la ley de control resultante. Luego, al sustituir (28) en (27), se obtiene:

$$\dot{V}_2 = -k_p \delta \tilde{x}_1 \delta \tilde{x}_2 - k_p \frac{\partial \phi(\tilde{x}_1)}{\partial \tilde{x}_1} \delta \tilde{x}_1^2 - b \delta \tilde{x}_2^2 + \delta u \delta \tilde{x}_2 \quad (29)$$

A partir del resultado obtenido en (29), se procede a la propuesta de las funciones que hasta el momento no han sido definidas en el procedimiento, de forma tal que estas garanticen que  $\dot{V}_2(\tilde{x}_1, \delta \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \delta \tilde{x}_2) < 0$ , tal es el caso de  $\phi(\tilde{x}_1)$  y  $\delta u$ , proponiéndose:

$$\phi(\tilde{x}_1) = k_p \tilde{x}_1 \quad (30)$$

$$\delta u = k_p \delta \tilde{x}_1 - K_{vvar}(x_2) \delta \tilde{x}_2 \quad (31)$$

siendo  $K_{vvar}(x_2) = \frac{k_1 x_2^2}{x_2^2 + k_2}$  una función definida positiva que queda dependiente de la velocidad  $x_2$ , donde las constantes  $k_1, k_2 \in \mathbb{R}^+$ . Por tanto, al sustituirse (30) y (31) en (29) resulta finalmente:

$$\dot{V}_2 = -k_p^2 \delta \tilde{x}_1^2 - b \delta \tilde{x}_2^2 - \frac{k_1 x_2^2}{x_2^2 + k_2} \delta \tilde{x}_2^2 < 0 \quad (32)$$

lo que constituye una condición suficiente para demostrar la contracción de cualquier par de trayectorias del sistema en lazo cerrado. Luego, integrando el control variacional propuesto  $\delta \tau$  respecto a  $\delta \tilde{x}_1$  y  $\delta \tilde{x}_2$ :

$$\begin{aligned} \int \delta \tau = & -b \int \frac{\partial \alpha(x_{1d} - \tilde{x}_1)}{\partial \tilde{x}_1} \delta \tilde{x}_1 + mgl_c \int \cos(x_{1d} - \tilde{x}_1) \delta \tilde{x}_1 \\ & - I_p \int \frac{\partial \dot{\alpha}(x_{1d} - \tilde{x}_1)}{\partial \tilde{x}_1} \delta \tilde{x}_1 + k_p \int \delta \tilde{x}_1 - k_1 \int \frac{x_2^2}{x_2^2 + k_2} \delta \tilde{x}_2 \end{aligned} \quad (33)$$

De (33) se obtiene:

$$\tau = -b\alpha(x_1) + mgl_c \sin(x_1) - I_p \dot{\alpha}(x_1) + k_p \tilde{x}_1 - \frac{k_1 x_2^2}{x_2^2 + k_2} \tilde{x}_2 \quad (34)$$

Si se sustituye (13) y  $\tilde{x}_2$  despejada de (14) en (34), se obtiene:

$$\begin{aligned} \tau = & -b(-\dot{x}_{1d} - k_p \tilde{x}_1) + mgl_c \sin(x_1) - I_p(-\dot{x}_{1d} - k_p \dot{\tilde{x}}_1) \\ & + k_p \tilde{x}_1 - \frac{k_1 x_2^2}{x_2^2 + k_2} (-\dot{x}_1 - \phi(\tilde{x}_1)) \end{aligned} \quad (35)$$

Sustituyendo la dinámica del error de posición (10) en (35):

$$\begin{aligned} \tau = & b\dot{x}_{1d} + bk_p \tilde{x}_1 + mgl_c \sin(x_1) + I_p \ddot{x}_{1d} + I_p k_p (\dot{x}_{1d} - x_2) \\ & + k_p \tilde{x}_1 + \frac{k_1 x_2^2}{x_2^2 + k_2} (\dot{x}_{1d} - x_2) + \frac{k_1 x_2^2}{x_2^2 + k_2} k_p \tilde{x}_1 \end{aligned} \quad (36)$$

Finalmente, la ley de control resultante del procedimiento antes descrito, la cual garantiza la contracción de las soluciones del sistema

en lazo cerrado y a su vez resuelve el problema de *control de trayectoria*, es la siguiente:

$$\begin{aligned} \tau = & b\dot{x}_{1d} + bk_p \tilde{x}_1 + mgl_c \sin(x_1) + I_p \ddot{x}_{1d} + I_p k_p \dot{x}_{1d} \\ & - I_p k_p x_2 + k_p \tilde{x}_1 + \frac{k_1 x_2^2}{x_2^2 + k_2} \dot{x}_{1d} - \frac{k_1 x_2^2}{x_2^2 + k_2} x_2 \\ & + \frac{k_1 x_2^2}{x_2^2 + k_2} k_p \tilde{x}_1 \end{aligned} \quad (37)$$

Finalmente expresando (37) en términos de los parámetros del sistema físico:

$$\begin{aligned} \tau = & b\dot{q}_d + bk_p \tilde{q} + mgl_c \sin(q) + I_p \ddot{q}_d + I_p k_p \dot{q}_d - I_p k_p \dot{q} \\ & + k_p \tilde{q} + \frac{k_1 \dot{q}^2}{\dot{q}^2 + k_2} \dot{q}_d - \frac{k_1 \dot{q}^2}{\dot{q}^2 + k_2} \dot{q} + \frac{k_1 \dot{q}^2}{\dot{q}^2 + k_2} k_p \tilde{q} \end{aligned} \quad (38)$$

De igual forma, la ley de control obtenida en (37) se puede emplear para *control de posición*, donde la posición deseada sería una constante y su derivada cero, por lo que para dicho control  $\tau$  quedaría como sigue:

$$\begin{aligned} \tau = & bk_p \tilde{x}_1 - I_p k_p x_2 + k_p \tilde{x}_1 - \frac{k_1 x_2^2}{x_2^2 + k_2} x_2 + \frac{k_1 x_2^2}{x_2^2 + k_2} k_p \tilde{x}_1 \\ & + mgl_c \sin(x_1) \end{aligned} \quad (39)$$

que en términos de los parámetros del sistema físico, la ley de *control de posición* propuesta es

$$\tau = bk_p \tilde{q} - I_p k_p \dot{q} + k_p \tilde{q} - \frac{k_1 \dot{q}^2}{\dot{q}^2 + k_2} \dot{q} + \frac{k_1 \dot{q}^2}{\dot{q}^2 + k_2} k_p \tilde{q} + mgl_c \sin(q) \quad (40)$$

donde además de los parámetros del sistema físico, se tiene una ganancia proporcional  $k_p$  constante y se introduce la función de ganancia derivativa variable  $K_{vvar}(\dot{q}) = \frac{k_1 \dot{q}^2}{\dot{q}^2 + k_2}$ , la cual es dependiente de la velocidad articular  $\dot{q}$ ; dicha función contiene dos constantes  $k_1$  y  $k_2$  que al igual que  $k_p$ , deberán ser sintonizadas.

#### IV. RESULTADOS EXPERIMENTALES

La implementación del control con ganancias variables se realizó en el tercer eslabón o *codo* del robot, que se observa en la figura 3. Este es un robot de 3 grados de libertad totalmente actuado por 3 servomotores de transmisión directa, los que tienen 3 modos de operación: posición, velocidad y torque. En este caso el servomotor que se utilizó está configurado en modo torque, el cual ofrece arquitectura abierta, lo que permite la evaluación experimental de robustez y desempeño de cualquier estrategia de control [17].

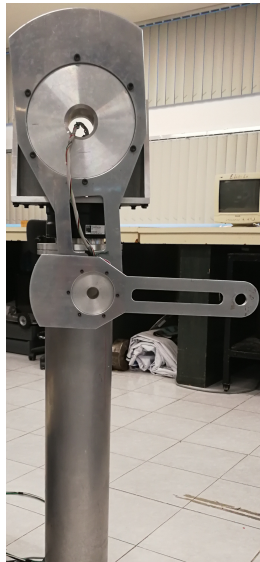


Figura 3. Robot manipulador de 3 grados de libertad (g.d.l).

La implementación de los controladores con ganancia variable, obtenidos en la sección anterior, se realizó a través de una tarjeta Arduino Due, en la que se desarrolló un programa donde se aplica lógica necesaria para llevar a cabo dicha ley de control. Primeramente se muestran los resultados obtenidos con la implementación de la ley de control de posición obtenida en (40), en la que se realizó la sintonía de sus constantes, quedando  $k_p = 3.4$ ,  $k_1 = 3.5$  y  $k_2 = 0.000003$ . Ya con el controlador sintonizado, se obtuvieron los resultados experimentales dados en las figuras 4-9.

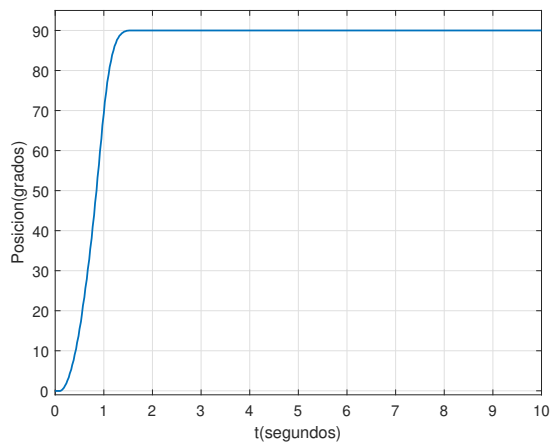


Figura 4. Posición vs tiempo.

En la figura 4 se aprecia una respuesta rápida del eslabón, sin sobreimpulsos y con una pendiente de subida suave, llegando a la posición deseada de  $90^\circ$  en 1.52s. Por otra parte, se observa en la figura 5 el error de posición, el cual llega a valer cero al alcanzar la posición deseada. La figura 6 muestra cómo se comporta la velocidad articular, la que en su pendiente de subida llega a alcanzar un valor máximo de 132 grados/s y luego disminuye hasta ser de valor cero al alcanzar la posición deseada. Finalmente, la figura 7 muestra el par entregado por el servomotor, el cual no supera su valor máximo de 4Nm y luego mantiene la posición deseada con un valor de torque pequeño de 0.5Nm.

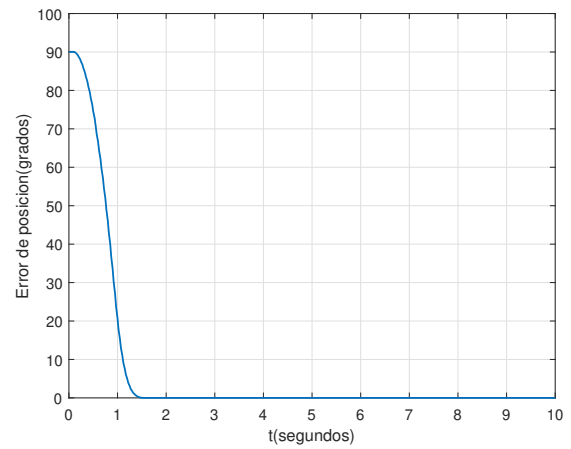


Figura 5. Error de posición vs tiempo.

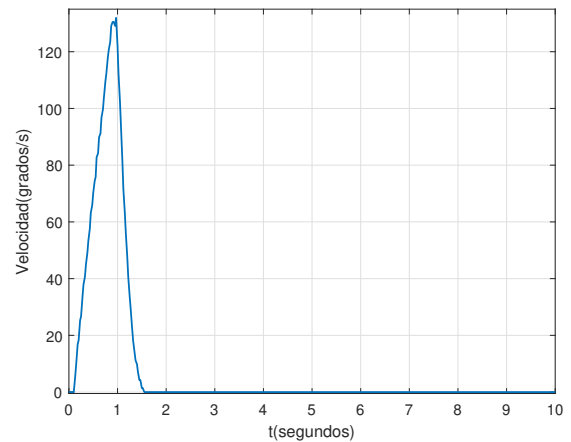


Figura 6. Velocidad vs tiempo.

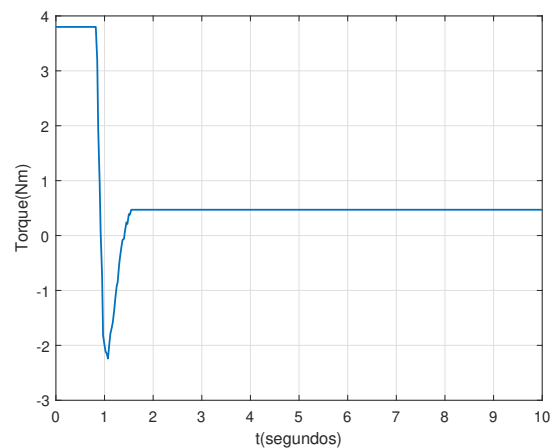


Figura 7. Torque vs tiempo.

En cuanto al comportamiento obtenido de la función propuesta de ganancia variable dependiente de la velocidad articular, la figura 8 muestra la evolución de la ganancia derivativa variable respecto a los valores de velocidad articular, presentado una pequeña histéresis

que corresponde con el tiempo en que el eslabón se mueve hacia la posición deseada, mientras que la velocidad se hace máxima.

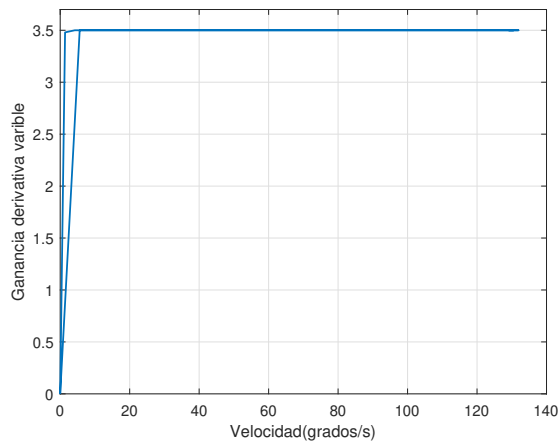


Figura 8. Ganancia derivativa variable vs velocidad.

De igual forma se llevó a cabo la implementación de la ley de control de trayectoria obtenida en (38), realizándose la prueba con los valores ya sintonizados anteriormente para el control de posición y ante una función  $q_d = A \sin(\omega t)$ , donde la amplitud  $A = 45^\circ$ , la frecuencia angular  $\omega = 0.7 \text{ rad/s}$  y  $t$  es el tiempo en segundos. En la figura 9 se aprecia cómo el eslabón sigue correctamente la trayectoria senoidal propuesta.

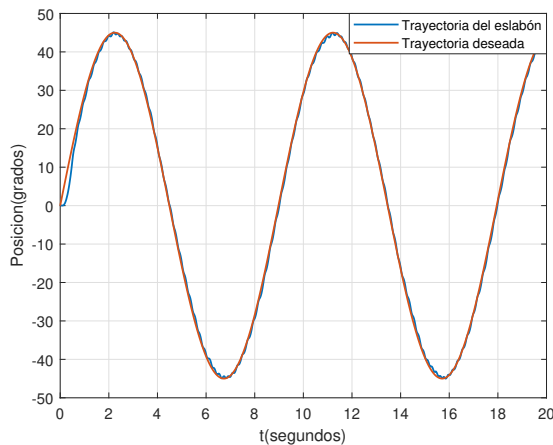


Figura 9. Posición vs tiempo.

## V. CONCLUSIONES

En este trabajo se hizo un estudio de la teoría de contracción, desde sus inicios hasta las actuales vertientes, como es la teoría diferencial de Lyapunov, método que facilitó la demostración de contracción del sistema caso de estudio en lazo cerrado, de manera similar a la tradicionalmente usada teoría de estabilidad de Lyapunov. Acompañado de dicha demostración, se diseñaron leyes de control en las que se incorporó una función de ganancia variable dependiente de la velocidad articular, pudiendo ser empleadas tanto para control de trayectoria, como para control de posición. De igual forma, el método de diseño empleado para la obtención del controlador tiene la ventaja de ser fácilmente extensible para el modelo dinámico de

robots manipuladores de más grados de libertad. Con la propuesta de la función mencionada queda abierto el camino para la propuesta de familias de controladores de ganancia variable que aseguren la contracción de las trayectorias del sistema hacia una única solución deseada. Luego de sintonizados los controladores, se obtuvieron resultados satisfactorios en el comportamiento del eslabón ante una posición deseada, lográndose una respuesta rápida, sin oscilaciones y con error de posición cero. De igual forma se obtuvieron resultados satisfactorios ante el seguimiento de una trayectoria senoidal.

## REFERENCIAS

- [1] L. R. Khan, "Analysis of a limiter as a variable-gain device," *Electrical Engineering*, Vol.72, No. 12, pages 1106-1109, 1953.
- [2] M. A. Limón-Díaz, F. Reyes Cortés and E. J. González Galván, "Unbounded regulators with variable gains for a direct-drive robot manipulator," *Automatica*, Vol.57, No.2, pages 484-495, 2017.
- [3] M. Heertjes and M. Steinbuch, "Stability and performance of a variable gain controller with application to a dvd storage drive," *Automatica*, Vol.40, No.4, pages 591-602, 2004.
- [4] N. van de Wouw, H. A. Pastink, M. Heertjes, A. Pavlov and H. Nijmeijer, "Performance of convergence-based variable-gain control of optical storage drives," *Automatica*, Vol. 44, No.1, pages 15-27, 2008.
- [5] L.C. van Breugel, H. Nijmeijer, N. van de Wouw and B.G.B. Hunnens, "Analysis of piecewise linear variable gain controllers for linear motion systems," Department of Mechanical Engineering, Dynamics and Control, Eindhoven University of Technology, 2012.
- [6] D. Angeli, "A Lyapunov approach to incremental stability properties," *IEEE Trans. Autom. Control*, Vol.47, No.3, pages 410-421, 2000.
- [7] Winfried Lohmiller and Jean-Jacques E. Slotine, *On contraction analysis for non-linear systems*, *Automatica*, Vol. 34, No. 6, pages 683-696, 1998.
- [8] B. P. Demidovich, "Dissipativity of nonlinear system of differential equations," 1962.
- [9] Eduardo D. Sontag, *Contractive Systems with Inputs*, Springer, pages 217-228, 2010.
- [10] F. Forni and R. Sepulchre, "A differential Lyapunov framework for contraction analysis," *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol.59, No.3, 2014.
- [11] R. Reyes-Báez, "Virtual contraction and passivity based control of nonlinear mechanical systems," PhD thesis, Jan C. Willems Center for Systems and Control, Faculty of Science and Engineering, University of Groningen, 2019.
- [12] P. E. Crouch and A. J. van der Schaft, "Variational and hamiltonian control systems," 1987.
- [13] D. Bao, S-S Chern, and Z. Shen, "An introduction to Riemann-Finsler geometry," Vol.200, Springer Science & Business Media, 2012.
- [14] H. K. Khalil, "Nonlinear systems, 3rd ed," Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, 2002.
- [15] A. Ortega Méndez, F. Reyes Cortés, A. Vargas Treviño, and S. Vergara Limón, "Control tangente hiperbólico con ganancia variable," *Asociación Mexicana de Mecatrónica*, pages 42-47, 2013.
- [16] L. L. González Romeo, R. Reyes Báez, J. J. Cid Monjaraz and O. G. Félix Beltrán, "Análisis de contracción de un controlador de ganancias variables: el caso del péndulo," *Asociación Mexicana de Robótica e Industria AC*, pages 3-8, 2019.
- [17] F. Reyes Cortés, "Robótica Control de Robots Manipuladores," México: Alfaomega grupo editor, 2011.



## Organizing Committee

### General Chairs:

Richard D. Braatz  
MIT, USA  
Chung Choo Chung  
Hanyang Univ., Republic of Korea

### Advisor:

Dan Cho  
Seoul National University,  
Republic of Korea

### Program Chairs:

Jay H. Lee  
KAIST, Republic of Korea  
Luca Zaccarian  
LAAS-CNRS, France,  
University of Trento, Italy

### Program Vice-Chairs:

Christophe Prieur  
CNRS GIPSA-Lab, France  
Maria Prandini  
Politecnico di Milano, Italy  
Zongli Lin  
University of Virginia, USA

### Publications Chair:

Carolyn L. Beck  
University of Illinois, USA

### Workshops Chair:

Hyungbo Shim  
Seoul National University,  
Republic of Korea

### Conf. Editorial Board Chair:

Amir Aghdam  
Concordia University, Canada

### Electronic Services Coordinator:

Pradeep Misra  
Wright State University, USA

### Student Activities Chair:

Elisa Franco  
U. of California Los Angeles, USA

### Finance Chair:

Hyo-Sung Ahn  
GIST, Republic of Korea

### Registration Chair:

Yongsoo Eun  
DGIST, Republic of Korea

### Local Arrangements Chairs:

PooGyeon Park  
PosTech, Republic of Korea  
Ho-Chan Kim  
Jeju National, Republic of Korea  
Jong Min Lee  
Seoul National University,  
Republic of Korea

### Exhibits & Sponsorship Chairs:

Keum-Shik Hong  
Pusan National University,  
Republic of Korea  
Valery Ougrinovski  
U. of New South Wales, Australia

### Publicity Chairs:

Hideaki Ishii  
Tokyo Inst. of Technology, Japan  
Jie Chen  
Beijing Inst. of Technology, China

July 23, 2020

Mr. Lorenzo Lázaro González Romeo  
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla  
Río Salado 5126  
72567 Puebla  
Mexico

Dear Mr. Lorenzo Lázaro González Romeo,

On behalf of the Operating and the Program Committees, it is our pleasure to invite you to participate in the 59th IEEE Conference on Decision and Control (CDC 2020), which will be held in mid-December 2020 as a virtual conference. Pre-conference Workshops will be held on the preceding two days.

The CDC is recognized as the premier scientific and engineering conference dedicated to the advancement of the theory and practice of systems and control. The CDC annually brings together an international community of researchers and practitioners in the field of automatic control to discuss new research results, perspectives on future developments, and innovative applications relevant to decision making, systems and control, and related areas.

The IEEE CDC is hosted by the IEEE Control Systems Society (CSS) in cooperation with the Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM) and the Japanese Society of Instrument and Control Engineers (SICE).

Your paper submitted to CDC 2020 has been accepted for presentation by the conference. As indicated in the notification letter sent to you about your paper's acceptance, at least one author of your paper must give a presentation. We hope that you will participate in this scientific meeting and help to make the event memorable. Acceptance of your paper for presentation does not, in any way, financially oblige either the CDC or the CSS for the expenses incurred by you to travel and attend the conference. If you have any questions, please contact me.

Thank you in advance for your participation.

Sincerely,

*Richard D. Braatz*      *Chung Choo Chung*

Richard D. Braatz and Chung Choo Chung

General Chairs

*Accepted Paper details:*

*Lorenzo Lázaro González Romeo, Rodolfo Reyes-Baez, Jose Fermi Guerrero-Castellanos, Bayu Jayawardhana, Jaime Julián Cid Monjaraz, Olga Félix-Beltrán, "Contraction Based Nonlinear Controller for a Laser Beam Stabilization System using a Variable Gain." Scheduled for presentation on Tuesday December 15, 2020, 14:45-15:00 hrs.*

## IEEE Control Systems Letters

### Final Acceptance Letter & Author Checklist

Dear Author:

Congratulations for the acceptance of your paper in the IEEE Control Systems Letters (L-CSS). In order for your paper to be published in the L-CSS within six months from submission, you should **submit your final material for publication via PaperPlaza at <https://css.paperplaza.net/journals/cssl/scripts/login.pl> within two weeks (14 days) from the date of my message communicating the acceptance of your paper** (the date of the email to which this file is attached). It is our commitment that any paper submitted to the L-CSS will either appear on IEEE Xplore within six months from first submission, or be rejected. In order to keep this promise, the two-week deadline cannot be extended, and if the material will not be received in good order within the deadline, you should be aware that your paper may *not* be published.

When ready, please follow the link “**Submit final version**” next to the accepted paper in your Author workspace to access the electronic final submission procedure. Note that this link is active only in the PaperPlaza L-CSS of the corresponding author.

Detailed instructions for the preparation and submission of your final manuscript (including the electronic copyright transfer to IEEE) can be found below, after this letter.

For any doubt, please do not hesitate to contact me or my Editorial Assistant, Francesca Bettini ([bettini@dei.unipd.it](mailto:bettini@dei.unipd.it)).

Congratulations again for the acceptance of your paper in the IEEE Control Systems Letters.

M. Elena Valcher

Editor-in-Chief  
IEEE Control Systems Letters

# Contraction-Based Nonlinear Controller for a Laser Beam Stabilization System Using a Variable Gain

Lorenzo L. González-Romeo<sup>1</sup>, Rodolfo Reyes-Báez<sup>2</sup>, *Member, IEEE*,  
 J. Fermi Guerrero-Castellanos<sup>1</sup>, *Member, IEEE*, Bayu Jayawardhana<sup>3</sup>, *Senior Member, IEEE*,  
 Jaime J. Cid-Monjaraz, *Senior Member, IEEE*, and Olga G. Félix-Beltrán

**Abstract**—In this letter, we propose a contraction-based variable gain nonlinear control scheme for the laser-beam stabilizing (LBS) servo-system, which guarantees that the closed-loop system is convergent. With the variable gain acting on the velocity error, the well known waterbed effect of the low-frequency/bandwidth trade-off can be overcome. Moreover, the contraction-based framework allows us to extend the linear control performance metrics for analyzing the closed-loop nonlinear system behavior. The closed-loop system's performance is evaluated in numerical simulations under input disturbances and/or white noise measurements and its efficacy is compared to that using PID and LQG controllers.

**Index Terms**—Optomechanics, contraction analysis, variable gain, servo-systems, nonlinear systems.

## I. INTRODUCTION

LASER beam steering systems have been used in modern engineering technologies, in which high precision and robustness are required. For instance, in laser-based manufacturing processes and printing, surgical robotics, optical communications, advanced scientific instruments in physics and astronomy, optical storage drive, bar code scanning, among others [1], [2], [3]. Control techniques for beam steering are key in the aforementioned opto-mechatronics applications. The LBS problem, roughly speaking, refers to dynamically control

the beam's direction in order to stabilize the beam's image at a target point [4]. The main difficulties for solving the LBS problem arises from the narrow beam divergence angle and vibration of the pointing system. In order to obtain precision pointing of the laser beam and high-bandwidth rejection of jitters produced by the platform vibrations, one uses active mirrors in the beam stabilizer. Then, by sampling a small percentage of the beam, the active mirrors can stabilize the beam's motion by using feedback control from position sensing detectors [1], [5]. The necessity of high accuracy in the pointing of the laser beams poses a real challenge for the successful operation due to low-frequency/bandwidth trade-off. In order to deal with these problems, many control approaches have been designed and evaluated for such systems, e.g., adaptive control [4], [6], frequency weighting method [7], PID-based controllers [5], fractional order PID control [8],  $H_\infty$  approaches [2], [3], integral resonant control [9]; to name a few. From linear control literature, the waterbed effect has been known and recognized by control practitioners where design trade-off must be made in increasing the closed-loop bandwidth and the low-frequency disturbance rejection properties at the cost of deteriorating the sensitivity to high-frequency measurement noise. On the other hand, nonlinear control schemes like nonlinear PID and sliding mode controllers [10] can take into account the low-frequency/bandwidth trade-off. Similar to the linear control counterpart, the performance in terms of noise measure attenuation is increased without necessarily deteriorating the time response of the closed-loop system. Nevertheless, the aforementioned trade-off in the nonlinear setting is less intuitive and the design procedure is not straightforward.

A different nonlinear approach, called *convergent systems or convergence* [11], has recently attracted the attention of researchers and engineers, because it naturally extends some linear control methods to the nonlinear case, and it allows us to analyze the performance of convergent nonlinear control systems by characterizing its *unique* steady-state solution; without using any linear approximation. This has successfully been applied to optical storage drives [12], [13]. The convergent systems behavior can be proved by invoking the Demidovich's sufficient condition [14]. This condition is

Manuscript received March 17, 2020; revised May 25, 2020; accepted June 10, 2020. Date of publication June 29, 2020; date of current version July 14, 2020. The work of Lorenzo L. González-Romeo was supported by the Master Scholarship Awarded by CONACyT, Mexico. Recommended by Senior Editor M. Arcak. (*Corresponding author: J. Fermi Guerrero-Castellanos.*)

Lorenzo L. González-Romeo, J. Fermi Guerrero-Castellanos, Jaime J. Cid-Monjaraz, and Olga G. Félix-Beltrán are with the Faculty of Electronics Sciences, Meritorious Autonomous University of Puebla, Cd Universitaria, Puebla 72000, Mexico (e-mail: lorengromeo@gmail.com; fermi.guerrero@correo.buap.mx; olga.felix@correo.buap.mx; jaime.cid@ieee.org).

Rodolfo Reyes-Báez and Bayu Jayawardhana are with the Jan C. Willems Center for Systems and Control, Engineering and Technology Institute Groningen, Faculty of Science and Engineering, University of Groningen, 9797 AG Groningen, The Netherlands (e-mail: r.reyes-baez@ieee.org; b.jayawardhana@rug.nl).

Digital Object Identifier 10.1109/LCSYS.2020.3005445

generalized by the closely related notion of *contraction analysis* [15], which, under some conditions, can be shown to be equivalent to convergence as pointed out in [16].

In this letter, the design and closed-loop performance analysis of a contraction-based nonlinear controller are presented. To this end, the *differential Lyapunov framework for contraction analysis* in [17], together with a contraction-based adaptation of the standard backstepping technique, is used as a design tool, such that the closed-loop system is contractive (equivalently, convergent). In order to improve the closed-loop performance, a nonlinear variable gain in the velocity error is employed in order to handle the trade-off between the low-frequency tracking properties and the high frequency measurement noise sensitivity. The closed-loop performance is evaluated in numerical simulations in different scenarios: the nominal case, under the influence of input disturbances, with measurement noise, and under the influence of both input disturbances and measurement noise.

This letter is organized as follows. Section II contains the preliminaries of the differential Lyapunov framework, its relation to the convergent systems and the robustness property. In Section III the working principle and the model of the LBS system are described; and the controller design is proposed. Numerical simulation results are presented in Section IV, and the conclusions are given in Section V.

## II. PRELIMINARIES

### A. Differential Lyapunov Theory and Contraction Analysis

Let<sup>1</sup>  $\Sigma_u$  be a nonlinear control system with  $N$ -dimensional stat manifold  $\mathcal{X}$  and affine in the input  $u$ , described by

$$\Sigma_u : \begin{cases} \dot{x} = f(x, t) + \sum_{i=1}^n g_i(x, t)u_i, \\ y = h(x, t), \end{cases} \quad (1)$$

where  $x \in \mathcal{X}$ ,  $u \in \mathcal{U}$  and  $y \in \mathcal{Y}$ . The vector fields  $f, g_i : \mathcal{X} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow T\mathcal{X}$  and  $h : \mathcal{X} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathcal{Y}$  are assumed to be smooth. The input space  $\mathcal{U}$  and the output space  $\mathcal{Y}$  are open subsets of  $\mathbb{R}^n$ ; and  $T\mathcal{X} = \bigcup T_x\mathcal{X}$  is the tangent bundle, with  $T_x\mathcal{X}$  the tangent space of  $\mathcal{X}$  at  $x$ . System (1) in closed-loop with the control law  $u = \gamma(x, t)$  will be denoted by

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x} = F(x, t), \\ y = h(x, t). \end{cases} \quad (2)$$

*Definition 1* [19]: The *prolonged system*  $\Sigma_u^\delta$  associated to  $\Sigma_u$  in (1), comprises the original system  $\Sigma_u$ , *together* with its variational dynamics, that is the total system

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, t) + \sum_{i=1}^n g_i(x, t)u_i, \\ y &= h(x, t), \\ \delta\dot{x} &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\delta x + \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial g_i}{\partial x}\delta x + \sum_{i=1}^n g_i\delta u_i, \\ \delta y &= \frac{\partial h}{\partial x}(x, t)\delta x. \end{aligned} \quad (3)$$

<sup>1</sup>We refer interested reader to [18] and references therein, for a self-contained treatment of the contraction approach to incremental stability.

Respectively, the prolonged system  $\Sigma^\delta$  of  $\Sigma$  in (2) is

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x, t), & y = h(x, t), \\ \delta\dot{x} = \frac{\partial F}{\partial x}(x, t)\delta x, & \delta y = \frac{\partial h}{\partial x}(x, t)\delta x. \end{cases} \quad (4)$$

*Definition 2* [17]: A function  $V : T\mathcal{X} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  is a candidate *differential Lyapunov function* (dLF) if it satisfies

$$c_1 \|\delta x\|_x^p \leq V(x, \delta x, t) \leq c_2 \|\delta x\|_x^p, \quad (5)$$

where  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ ,  $p$  is a positive integer and  $\|\cdot\|_x^p$  is a Finsler metric (structure), uniformly in  $t$ .

For any subset  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{X}$  and any  $x_1, x_2 \in \mathcal{C}$ , let  $\Gamma(x_1, x_2)$  be the collection of piecewise  $C^1$  curves  $\gamma : I \rightarrow \mathcal{X}$  connecting  $\gamma(0) = x_1$  and  $\gamma(1) = x_2$ . The *Finsler distance*  $d : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  induced by the dLF  $V$  is

$$d(x_1, x_2) := \inf_{\Gamma(x_1, x_2)} \int_{\gamma} V\left(\gamma(s), \frac{\partial \gamma}{\partial s}(s), t\right) ds. \quad (6)$$

*Theorem 1* [17]: Consider system (4), a connected and forward<sup>2</sup> invariant set  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{X}$ , and a function  $\kappa : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ . Let  $V$  be a candidate dLF satisfying the relation

$$\dot{V}(x, \delta x, t) \leq -\kappa(V(x, \delta x, t)) \quad (7)$$

for all  $(x, \delta x) \in T\mathcal{X}$  and all  $t > t_0$ . Then, system (2) is

- incrementally stable (IS) if  $\kappa(s) = 0$  for each  $s \geq 0$ ;
- asymptotically IS if  $\kappa$  is of class<sup>3</sup>  $\mathcal{K}$ ;
- exponentially IS with rate  $\beta$  if  $\kappa(s) = \beta s, \forall s \geq 0$ .

*Definition 3* (*Contractive System*): We say that  $\Sigma$  is contractive if for  $V$  on  $\mathcal{C}$ , it holds that (7) is satisfied for  $\alpha$  of class  $\mathcal{K}$ . The subset  $\mathcal{C}$  is the *contraction region*.

### B. Contractive Systems and Convergent Dynamics

*Definition 4* (*Convergent System* [14]): System  $\Sigma$  in (2) is said to be convergent if

- 1) all solutions  $x(t)$  are well-defined for all  $t \in [t_0, \infty)$  and all initial conditions  $t_0 \in \mathbb{R}, x(t_0) \in \mathcal{X}$ .
- 2) there exists a unique solution  $\bar{x}(t)$  in  $\mathcal{X}$ , called a *steady state solution*, defined and bounded for all  $t \in \mathbb{R}$ .
- 3) the solution  $\bar{x}(t)$  is globally asymptotically stable.

A sufficient condition for convergent behavior is given in the following theorem, the so-called Demidovich condition.

*Theorem 2*: Consider system  $\Sigma$  in (2). Suppose that there exists matrices  $P = P^\top > 0$  and  $Q = Q^\top > 0$  satisfying

$$P \frac{\partial F}{\partial x}(x, t) + \frac{\partial F^\top}{\partial x}(x, t)P \leq -Q, \quad \forall x \in \mathcal{C}, \forall t \in \mathbb{R}. \quad (8)$$

Then, system  $\Sigma$  is exponentially convergent in  $\mathcal{C}$ .

Following Definition 3, in a contractive system any pair of neighboring solutions  $x_1$  and  $x_2$  convergence towards each other by condition (7), due to the distance  $d(x_1, x_2)$  shrinks exponentially, see (6). However, nothing is said about the stability properties of the solutions  $x_1$  and  $x_2$ . On the other hand, by Definition 4, in a convergent system all of its solutions converge to a *unique* globally attractive steady-state solution  $\bar{x}$ .

<sup>2</sup>System (2) is said to be *forward complete* if for every initial condition  $x_0$ , the corresponding solution  $x(t)$  is defined for all  $t \geq 0$ . The set  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{X}$  is *forward invariant* for (2) if the system is forward complete and  $\forall x_0 \in \mathcal{C}$  the solution  $x(t) \in \mathcal{C}, \forall t \geq 0$ , [20].

<sup>3</sup>The class of continuous and strictly increasing functions  $\kappa : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  for which  $\kappa(0) = 0$  is denoted by  $\mathcal{K}$ .

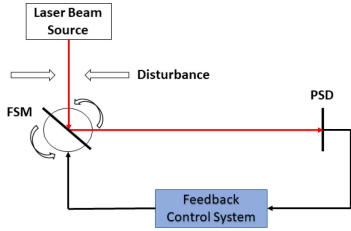


Fig. 1. Working principle of the LBS system.

It can be shown that under compactness assumption on  $\mathcal{C}$  in Theorem 1, both notions are equivalent [16]. Moreover, Theorem 2 can be seen as a particular case of Theorem 1 by taking as dLF to

$$V(x, \delta x, t) = \frac{1}{2} \delta x^\top P \delta x. \quad (9)$$

### C. Robustness of Contractive Systems

Contractive systems exhibit inherent robustness to bounded perturbations and uncertainties. The robustness properties indicated in [21] are described in terms of dLFs and Finsler distances in the following lemma.

*Lemma 1:* Consider the perturbed system

$$\dot{x}_p = F(x_p, t) + p(x_p, t), \quad (10)$$

with state  $x_p \in \mathcal{X}$ , where the perturbation term  $p(x_p, t)$  is uniformly bounded in  $t$  a constant  $p \in \mathbb{R}_{>0}$ . Suppose the unperturbed system  $\Sigma$  in (2) is contractive for  $\kappa(s) = \beta s$  with respect to Theorem 1. Then, the trajectories of the perturbed system (10) verify the following bounds

$$d(x, x_p) \leq \xi e^{-\beta t} d(x(0), x_p(0)) + \frac{\xi p}{\beta}, \quad (11)$$

where  $\xi$  is the condition number of a quadratic dLF.

In the case of the dLF in (9) suppose that  $P$  can be rewritten as  $P = \Theta^\top \Theta$ , with  $\Theta^\top = \Theta > 0$ . Then,  $\xi$  in (11) is the condition number of  $\Theta$ .

## III. CONTRACTION-BASED CONTROL OF THE LBS

### A. LBS System Working Principle and Model

The LBS system consists of a low-power stationary laser beam source pointing at a fast steering mirror (FSM) that rotates around a pivot, see Figure 1. The reflected beam is picked up by a high-resolution position sensing detector (PSD). The PSD measures the relative displacement of the beam from the nominal position and the mirror mechanism is actuated using a high-bandwidth voice coil [1].

The transfer function of the actuator is given by [1]:

$$P(s) = \frac{Y(s)}{V_c(s)} = \frac{K}{\tau s^2 + s}, \quad (12)$$

where  $K = 2200$  and  $\tau = 0.005$ sec are the open-loop gain and time constant, respectively;  $Y(s)$  is the FSM position and  $V_c(s)$  the voltage control input. By introducing the state variables given by the position  $x_1 = y(t)$  and velocity  $x_2 = \dot{y}(t)$ , a realization for the transfer function (12) is given by:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -ax_2 + bV_c \end{bmatrix}, \quad (13)$$

with  $x = (x_1, x_2) \in \mathcal{X} = \mathbb{R}^2$ ,  $a := 1/\tau$  and  $b := K/\tau$ .

### B. Contraction-Based Variable Gain Controllers Design

For designing the control scheme, a contraction-based adaptation of the standard backstepping technique is used. While the goal of standard backstepping is to recursively construct Lyapunov functions that ensure asymptotic stability of the overall closed-loop system [20], in the contraction-based counterpart, the goal is to recursively construct dLF that ensure the *contractive behavior* of the overall closed-loop system; as first presented in [18].

*Proposition 1:* Consider a reference trajectory  $x_d(t) = (x_{1d}(t), x_{2d}(t)) \in \mathcal{X}$  for the LBS system in (13). Let the error coordinates be  $\tilde{x} = x_d(t) - x$ . Then, system (13) in closed-loop with the feedback control law given by

$$V_c = \frac{a}{b} \dot{x}_{1d} + \frac{1}{b} \ddot{x}_{1d} + \frac{1}{b} \operatorname{sech}^2(\tilde{x}_1) \dot{x}_{1d} + \frac{a}{b} \tanh(\tilde{x}_1) - \frac{1}{b} \operatorname{sech}^2(\tilde{x}_1) x_2 + \frac{k_p}{Tb} \tilde{x}_1 + \frac{k_1 x_2^2}{x_2^2 + k_2} \left( \frac{1}{Tb} \dot{x}_{1d} - \frac{1}{Tb} x_2 + \frac{1}{Tb} \tanh(\tilde{x}_1) \right), \quad (14)$$

is contractive, with  $k_p, k_1, k_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ , with dLF given by

$$V_2(\tilde{x}_1, \delta \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \delta \tilde{x}_2) = \frac{1}{2} k_p \delta \tilde{x}_1^2 + \frac{1}{2} T \delta \tilde{x}_2^2. \quad (15)$$

*Proof:* As a first design step, consider the position error  $\tilde{x}_1 = x_{1d} - x_1$ , whose dynamics is given by

$$\dot{\tilde{x}}_1 = \dot{x}_{1d} - x_2. \quad (16)$$

Assume that  $x_2$  is artificial controller for (16) given by

$$x_2 = \tilde{x}_2 - \alpha(\tilde{x}_1, t), \quad (17)$$

where  $\tilde{x}_2$  is a new state and  $-\alpha(x_1)$  is an action that makes the dynamics of  $\tilde{x}_1$  error in (16) contractive. Substitution of (17) in (16) results in the “closed-loop” dynamics

$$\dot{\tilde{x}}_1 = \dot{x}_{1d} - \tilde{x}_2 + \alpha(\tilde{x}_1, t). \quad (18)$$

In order to ensure that  $\tilde{x}_1 = 0$  is a solution of (18) when  $\tilde{x}_2 = 0$ , the following expression is chosen for  $\alpha(x_1)$ :

$$\alpha(\tilde{x}_1, t) := -\dot{x}_{1d} - \phi(\tilde{x}_1), \quad (19)$$

with  $\phi(0) = 0$ . The resulting closed-loop system reads as

$$\dot{\tilde{x}}_1 = -\tilde{x}_2 - \phi(\tilde{x}_1), \quad (20)$$

whose associated prolonged system is given by

$$\Sigma_1^\delta : \begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = -\tilde{x}_2 - \phi(\tilde{x}_1) \\ \delta \dot{\tilde{x}}_1 = -\delta \tilde{x}_2 - \frac{\partial \phi(\tilde{x}_1)}{\partial \tilde{x}_1} \delta \tilde{x}_1 \end{cases}. \quad (21)$$

Now, consider the following function as a candidate dLF for (21)

$$V_1(\tilde{x}_1, \delta \tilde{x}_1) = \frac{1}{2} k_p \delta \tilde{x}_1^2, \quad (22)$$

where  $k_p \in \mathbb{R}_{>0}$ . Then, the time derivative along the prolonged system (21) satisfies

$$\dot{V}_1(\tilde{x}_1, \delta \tilde{x}_1) = -k_p \delta \tilde{x}_1 \delta \tilde{x}_2 - k_p \frac{\partial \phi(\tilde{x}_1)}{\partial \tilde{x}_1} \delta \tilde{x}_1^2. \quad (23)$$

In order to ensure that (23) satisfies the contraction inequality in (7) when  $\delta\tilde{x}_2 = 0$ , the function  $\phi(\tilde{x}_1)$  should satisfy

$$-k_p \frac{\partial \phi(\tilde{x}_1)}{\partial \tilde{x}_1} \leq -\beta_1, \quad (24)$$

for a  $\beta_1 > 0$ . A solution<sup>4</sup> to this inequality is given by  $\phi(\tilde{x}_1) := \tanh(\tilde{x}_1)$ . Indeed, since  $0 < \operatorname{sech}(\tilde{x}_1) \leq 1$ , then

$$-k_p \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{x}_1} = -k_p \operatorname{sech}^2(\tilde{x}_1) \Rightarrow \beta_1 = k_p \inf(\operatorname{sech}^2(\tilde{x}_1)) > 0. \quad (25)$$

It follows that  $\dot{V}_1(\tilde{x}_1, \delta\tilde{x}_1) < -\beta_1 \delta\tilde{x}_1^2$ , and therefore  $\tilde{x}_1$  converges to 0 exponentially, whenever  $\tilde{x}_2 = 0$ .

In the second step of the design, the goal is to ensure that  $(\tilde{x}_2, \delta\tilde{x}_2) = (0, 0)$  holds. To this end, consider the dynamics of  $\tilde{x}_2$  from (17) and (13) in error coordinate, that is

$$\dot{\tilde{x}}_2 = -a(\tilde{x}_2 - \alpha(\tilde{x}_1, t)) + bV_c + \dot{\alpha}(x_{1d} - \tilde{x}_1). \quad (26)$$

Thus, the complete closed-loop dynamics, taking into account (20) and (26), can be written as:

$$\Sigma_{V_c} : \begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = -\phi(\tilde{x}_1) - \tilde{x}_2 \\ \dot{\tilde{x}}_2 = -a(\tilde{x}_2 - \alpha(\tilde{x}_1, t)) + bV_c + \dot{\alpha}(\tilde{x}_1, t), \end{cases} \quad (27)$$

whose variational system is expressed as:

$$\begin{cases} \delta\dot{\tilde{x}}_1 = -\frac{\partial \phi(\tilde{x}_1)}{\partial \tilde{x}_1} \delta\tilde{x}_1 - \delta\tilde{x}_2 \\ \delta\dot{\tilde{x}}_2 = -a\delta\tilde{x}_2 + a \frac{\partial \alpha}{\partial \tilde{x}_1}(\tilde{x}_1, t) \delta\tilde{x}_1 + b\delta V_c \\ \quad + \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial \tilde{x}_1}(\tilde{x}_1, t) \delta\tilde{x}_1. \end{cases} \quad (28)$$

The corresponding prolonged system associated to  $\Sigma_{V_c}$  in (27), is the system composed of (27) and (28). In order to prove the contractivity of the overall system, we consider the following candidate dLF

$$V_2(\tilde{x}_1, \delta\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \delta\tilde{x}_2) = V_1(\tilde{x}_1, \delta\tilde{x}_1) + \frac{1}{2} T \delta\tilde{x}_2^2 > 0. \quad (29)$$

Direct computation shows that

$$\dot{V}_2(\tilde{x}, \delta\tilde{x}) = \dot{V}_1(\tilde{x}_1, \delta\tilde{x}_1) + T \delta\tilde{x}_2 \delta\dot{\tilde{x}}_2. \quad (30)$$

By substituting (23) to (30) we obtain

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(\tilde{x}, \delta\tilde{x}) &= -k_p \delta\tilde{x}_1 \delta\tilde{x}_2 - k_p \frac{\partial \phi(\tilde{x}_1)}{\partial \tilde{x}_1} \delta\tilde{x}_1^2 - aT \delta\tilde{x}_2^2 \\ &\quad + Ta \frac{\partial \alpha}{\partial \tilde{x}_1}(\tilde{x}_1, t) \delta\tilde{x}_1 \delta\tilde{x}_2 + Tb \delta V_c \delta\tilde{x}_2 \\ &\quad + T \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial \tilde{x}_1}(\tilde{x}_1, t) \delta\tilde{x}_1 \delta\tilde{x}_2. \end{aligned} \quad (31)$$

Pick the variational control action  $\delta V_c$  in (31) as follows

$$\delta V_c = -\frac{a}{b} \frac{\partial \alpha}{\partial \tilde{x}_1}(\tilde{x}_1, t) \delta\tilde{x}_1 - \frac{1}{b} \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial \tilde{x}_1}(\tilde{x}_1, t) \delta\tilde{x}_1 + \frac{1}{Tb} \delta u, \quad (32)$$

where  $\delta u$  is the variational of an additional control input. Substituting (32) to (31) yields

$$\dot{V}_2(\tilde{x}, \delta\tilde{x}) = -k_p \delta\tilde{x}_1 \delta\tilde{x}_2 - k_p \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{x}_1} \delta\tilde{x}_1^2 - aT \delta\tilde{x}_2^2 + \delta u \delta\tilde{x}_2. \quad (33)$$

Since one aims to design a control strategy allowing to neutralize the effect of external disturbances while maximizes the

<sup>4</sup>Notice that the solution to (24) is not unique. For instance  $\phi(\tilde{x}_1) = \arctan(\tilde{x}_1)$  is another solution. The selection of  $\phi(\tilde{x}_1) = \tanh(\tilde{x}_1)$  here is mainly motivated by its monotonicity and boundedness properties.

error decay rate, we can propose the following controller's term which guarantees that  $\dot{V}_2(\tilde{x}_1, \delta\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \delta\tilde{x}_2) < 0$ ,

$$\delta u = k_p \delta\tilde{x}_1 - K_v^{var}(x_2) \delta\tilde{x}_2, \quad (34)$$

with the variable derivative gain function be chosen as

$$K_v^{var}(x_2) := \frac{k_1 x_2^2}{x_2^2 + k_2}. \quad (35)$$

Straightforward substitution yields

$$\dot{V}_2 = -k_p \operatorname{sech}^2(\tilde{x}_1) \delta\tilde{x}_1^2 - aT \delta\tilde{x}_2^2 - \frac{k_1 x_2^2}{x_2^2 + k_2} \delta\tilde{x}_2^2 < 0, \quad (36)$$

which fulfills Theorem 1 for contraction. Finally, the controller (14) is obtained by path integration on the variational states from (32) and (34). This completes the proof. ■

*Remark 1:* The idea behind the construction of the control law (14) is similar to this one of the 2-DOF linear controllers. Note that the control (14) can be decomposed in a feedforward, a feedback and a combination of feedback and feedforward components pondered with a variable gain which depends on the velocity. The feedback part guarantees that the closed-loop is uniformly convergent. The feedforward part shapes the steady-state response to be  $x_d(t)$ . Variable gain control is useful to overcome the trade-off between low-frequency tracking properties and high-frequency measurement noise.

#### IV. NUMERICAL SIMULATIONS

The LBS problem is a constant set-point regulation problem, which can be solved by the developed controller (14), by considering as reference to  $x_d = (\bar{x}_1, 0)$ , with  $\bar{x}_1$  constant. Notice that the variable derivative gain term  $K_v^{var}(x_2)$  in (35) can be seen as a filter-like depending on the square of the velocity signal, and acting on the velocity error. This helps for reaching a smart trade-off between low-frequency disturbance rejection (mechanical vibrations for the LBS) and high-frequency measurement noise in the PSD.

For the case of study, the desired position is  $x_{1d} = 1\text{mm}$  and the following gains values are taken for the simulation  $k_p = 900$ ,  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 0.1$ . Five different scenarios are considered for evaluating the performance of the closed-loop LBS servo system. The first scenario is considering nominal values of the system parameters. For the second scenario, uncertainty in the system parameters is present as follows  $K_i = K + \Delta K$  as uncertainty for the nominal open-loop gain  $K$  and  $\tau_i = \tau + \Delta\tau$  for the nominal open loop time constant  $\tau$ , with  $\Delta K = 0.8K$  and  $\Delta\tau = 0.6\tau$ , respectively. In the third scenario, an input disturbance given by a sine function of amplitude 1 and 12 rad/s of frequency is introduced. A position measurement white noise signal with 0.0001 noise power is added in the fourth scenario. Finally, the fifth scenario consist of adding the external disturbance in the input and white noise in the position measurement simultaneously. The position error and control signal time response are presented in Figure 2 and 3, respectively.

From Figure 2, it is clear that in the nominal case the position error converges to zero in an exponential manner. Similarly, in the case under parameters uncertainty, the position error goes to zero, but with a different convergence rate according to the bounds in (11). Similarly, in the case of the

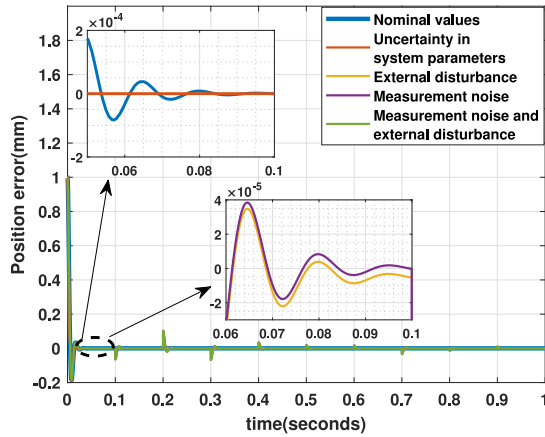


Fig. 2. Closed-loop position error time response with the controller (14).

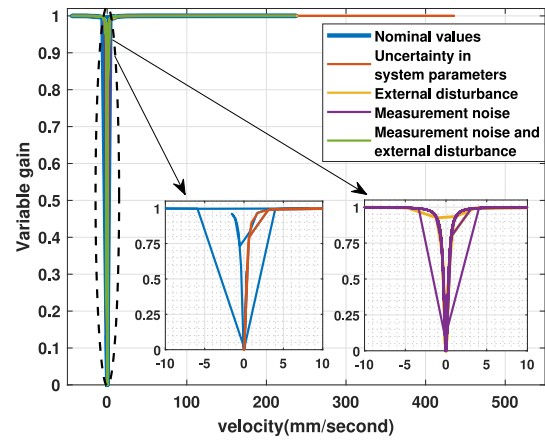


Fig. 4. Variable gain vs velocity.

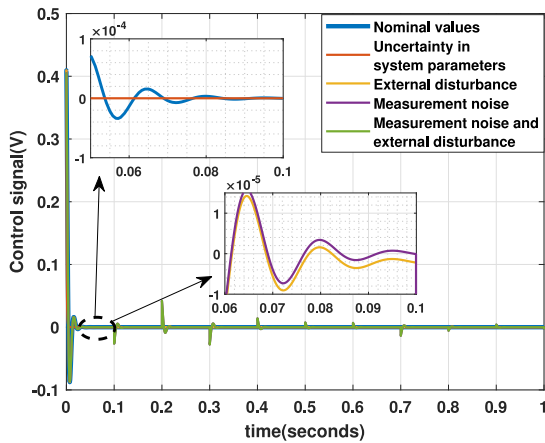


Fig. 3. Time response of the contraction-based controller (14).

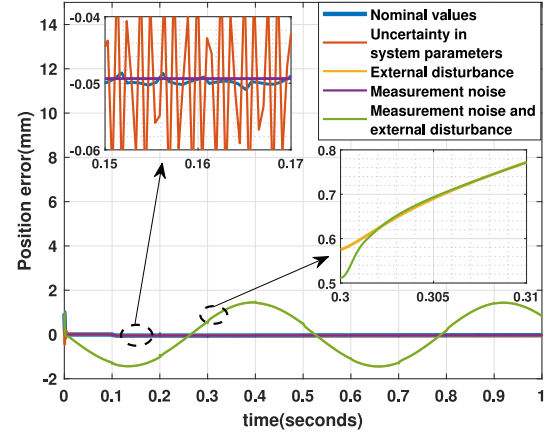


Fig. 5. Position error time response under the PID controller.

time-varying input external disturbance, the convergence is guaranteed by (11), and the steady state position error remains in a neighborhood of zero, modulated by the amplitude of the disturbance. Nevertheless, when white noise is considered, despite of the closed-loop system trajectories remain bounded, the steady-state error presents small peaks which decrease as the simulation time elapses. Notice that in the fifth case where both input disturbance and noise measurement are considered, the disturbance is rejected as in the third scenario, but the effect of the noise is dominating the steady-state time response of the position error.

The control signal under the five scenarios exhibits a similar performance for the steady state error. As expected, the control effort in the cases under noise measurements is not smooth as in the other ones. The behavior of the variable gain (35) is shown in Figure 4, for the simulation values of  $k_1$  and  $k_2$ .

As mentioned in the introduction, a number of strategies have been used to control the LBS system. Among those, the PID scheme presented in [22] is used for comparison purposes, in which the derivative term is implemented with a low-pass filter. The time response of the position error in closed-loop with the PID controller is shown in Figure 5.

In the nominal case, the system maintains a small state error, which is accentuated and oscillates randomly in the case of uncertainty in the system parameters. Then, when the external

sine disturbance is added to the input, the error enters in a stable oscillatory regime, but never converges to zero. When white noise is added to the state measurements, the position error time response converges to a value close to zero almost like in the nominal case; this can be attributed to the low-pass filter added in the derivative part. Finally, both input disturbance and white noise are added to the simulation; it is clear from Figure 4 that despite the noise is somehow filtered, the oscillating disturbance drives the closed-loop steady state response, and not the reference.

### A. Qualitative and Quantitative Performance Comparison

In order to qualitatively (steady-state performance) and quantitatively (transient performance) compare the closed-loop LSB servo system performance under the proposed contraction-based scheme, the PID, Linear Quadratic Gaussian(LQG) [23], [24], Contraction-Based With Variable Gain(CBWVG) and Contraction-Based Without Variable Gain(CBWoVG) controllers, the root mean square(RMS) index and the  $\mathcal{L}_2$  norm performance of the position error are considered, respectively. That is, the quantities

$$\text{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \|\tilde{x}_1(t)\|^2 dt}, \quad \mathcal{L}_2 = \sqrt{\int_0^T \|\tilde{x}_1(t)\|^2 dt} \quad (37)$$

TABLE I  
PERFORMANCE ANALYSIS WITH RMS INDEX

	PID	LQG	CBWVG	CBWoBG
Nominal system values	0.01759	0.0178	0.01807	0.01854
Uncertainty in parameters	0.03013	0.02295	0.01659	0.01704
External disturbance	1.08506	1.30359	0.02611	0.02896
Measurement noise	0.03133	0.02672	0.02672	0.02818
Measurement noise and external disturbance	1.08689	1.30513	0.02818	0.03098

TABLE II  
PERFORMANCE ANALYSIS WITH  $\mathcal{L}_2$  NORM

	PID	LQG	CBWVG	CBWoBG
Nominal system values	0.03932	0.03979	0.04042	0.04145
Uncertainty in parameters	0.0676	0.05156	0.03708	0.03811
External disturbance	2.4262	2.91485	0.05838	0.06476
Measurement noise	0.07006	0.05975	0.06301	0.06929
Measurement noise and external disturbance	2.43052	2.91856	0.06301	0.06928

where  $T = 5\text{sec}$  represents the simulation or experimentation time. The interpretation of the  $\mathcal{L}_2$  norm is the following: the highest  $\mathcal{L}_2$  value means the poorest performance (transient performance) [25]. The same principle applies to the RMS index (steady-state performance) [24]. The simulation results for the different scenarios are summarized in Tables I and II.

In general, it can be said that the overall performance of the proposed controller exhibits superior robust performance than the PID, LQG and CBWoBG schemes, since it can deal very well with external disturbances and keeps the steady state error in a neighborhood of zero of small ratio when noise measurements are considered. However, the PID and LQG schemes exhibit a little better performance in the nominal and only measurement noise scenarios.

## V. CONCLUSION

In this letter, a contraction-based nonlinear scheme was proposed to control the LBS servo system. By means of contractivity/convergence, the closed-loop system was shown to have robust properties against input disturbances and parameter uncertainty; and the existence of a unique steady state solution given by the reference trajectory was ensured. Moreover, the use of a variable gain acting on the velocity error was shown to be useful to overcoming the waterbed effect with the trade-off between low-frequency tracking properties and high-frequency measurement noise which affects the design of PID and LQG controllers. We have shown that by utilizing a contraction-based nonlinear controller for stabilizing a linear plant we can attain simultaneous performance benefits that cannot be attained by any linear control methods. The simulation results confirm the theoretical developments.

## REFERENCES

- [1] *Laser Beam Stabilization Instructor Manual. Quanser Speciality Experiment Series: LBS Laboratory Workbook*, Quanser, Markham, ON, Canada, 2010.
- [2] J. J. Martinez, O. Sename, and A. Voda, "Modeling and robust control of Blu-ray disc servo-mechanisms," *Mechatronics*, vol. 19, no. 5, pp. 715–725, 2009.
- [3] A. Alizadegan, P. Zhao, R. Nagamune, and M. Chiao, "Robust  $H_\infty$  control of miniaturized optical image stabilizers against product variabilities," *Control Eng. Pract.*, vol. 80, pp. 70–82, Nov. 2018.
- [4] B.-S. Kim, S. Gibson, and T.-C. Tsao, "Adaptive control of a tilt mirror for laser beam steering," in *Proc. Amer. Control Conf.*, Jun. 2004, pp. 3417–3421.
- [5] T. Landolsi, R. Dhaouadi, and O. Aldabbas, "Beam-stabilized optical switch using a voice-coil motor actuator," *J. Franklin Institute*, vol. 348, no. 1, pp. 1–11, 2011.
- [6] N. O. Pérez-Arancibia, N. Chen, J. S. Gibson, and T.-C. Tsao, "Variable-order adaptive control of a microelectromechanical steering mirror for suppression of laser beam jitter," *Opt. Eng.*, vol. 45, no. 10, pp. 1–12, 2006.
- [7] N. O. Pérez-Arancibia, J. S. Gibson, and T.-C. Tsao, "Frequency-weighted minimum-variance adaptive control of laser beam jitter," *IEEE/ASME Trans. Mechatronics*, vol. 14, no. 3, pp. 337–348, Jun. 2009.
- [8] A. Al-Alwan, X. Guo, I. N'Doye, and T.-M. Laleg-Kirati, "Laser beam pointing and stabilization by fractional-order PID control: Tuning rule and experiments," in *Proc. IEEE Conf. Control Technol. Appl. (CCTA)*, Aug. 2017, pp. 1685–1691.
- [9] Y. Yue and Z. Song, "An integral resonant control scheme for a laser beam stabilization system," in *Proc. IEEE Int. Conf. Inf. Autom.*, Aug. 2015, pp. 2221–2226.
- [10] M. Hernandez-Gonzalez and M. A. Jimenez-Lizarraga, "Real-time laser beam stabilization by sliding mode controllers," *Int. J. Adv. Manuf. Technol.*, vol. 91, no. 9, pp. 3233–3242, 2017.
- [11] A. Pavlov, N. van de Wouw, and H. Nijmeijer, "Convergent systems: Analysis and synthesis," in *Control and Observer Design for Nonlinear Finite and Infinite Dimensional Systems* (Lecture Notes in Control and Information Sciences), T. Meurer, K. Graichen, and E. D. Gilles, Eds. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 2005, pp. 131–146.
- [12] M. Heertjes, E. Pastink, N. van de Wouw, and H. Nijmeijer, "Experimental frequency-domain analysis of nonlinear controlled optical storage drives," *IEEE Trans. Control Syst. Technol.*, vol. 14, no. 3, pp. 389–397, May 2006.
- [13] N. van de Wouw, H. A. Pastink, M. F. Heertjes, A. V. Pavlov, and H. Nijmeijer, "Performance of convergence-based variable-gain control of optical storage drives," *Automatica*, vol. 44, no. 1, pp. 15–27, 2008.
- [14] B. P. Demidovich, *Lectures on Stability Theory*. Moscow, Russia: Nauka (in Russian), 1967.
- [15] W. Lohmiller and J.-J. E. Slotine, "On contraction analysis for non-linear systems," *Automatica*, vol. 34, no. 6, pp. 683–696, 1998.
- [16] B. S. Rüffer, N. van de Wouw, and M. Mueller, "Convergent systems vs. incremental stability," *Syst. Control Lett.*, vol. 62, no. 3, pp. 277–285, 2013.
- [17] F. Forni and R. Sepulchre, "A differential Lyapunov framework for contraction analysis," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 59, no. 3, pp. 614–628, Mar. 2013.
- [18] R. Reyes-Báez, "Virtual contraction and passivity based control of nonlinear mechanical systems: Trajectory tracking and group coordination," Ph.D. dissertation, Univ. Groningen, Groningen, The Netherlands, 2019.
- [19] P. E. Crouch and A. van der Schaft, *Variational and Hamiltonian Control Systems*. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 1987.
- [20] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*, vol. 2. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice-Hall, 1996, pp. 1–5.
- [21] M. M. Rayguru and I. N. Kar, "Contraction-based stabilisation of nonlinear singularly perturbed systems and application to high gain feedback," *Int. J. Control*, vol. 90, no. 8, pp. 1778–1792, 2017.
- [22] K. A. Konadu, S. Yi, W. Choi, and T. Abu-Lebdeh, "Robust positioning of laser beams using proportional integral derivative and based observer-feedback control," *Amer. J. Appl. Sci.*, vol. 10, no. 4, p. 374, 2013.
- [23] K. J. Åström and R. M. Murray, *Feedback Systems: An Introduction for Scientists and Engineers*. Princeton, NJ, USA: Princeton Univ. Press, 2010.
- [24] S. P. Boyd and C. H. Barratt, *Linear Controller Design: Limits of Performance*. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice-Hall, 1991.
- [25] V. Fromion, G. Scorletti, and G. Ferreres, "Nonlinear performance of a PI controlled missile: An explanation," *Int. J. Robust Nonlinear Control*, vol. 9, no. 8, pp. 485–518, 1999.