



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

**Facultad de Ingeniería
Colegio de Ingeniería Civil**

**“IDENTIFICACIÓN DE COMPORTAMIENTO
CAÓTICO DE REGISTROS
ACELEROMÉTRICOS EN LA CIUDAD DE
PUEBLA PARA SUELO ESTRATIFICADO”**

ENERO 2022

Tesis presentada para obtener el grado de

LICENCIATURA EN INGENIERÍA CIVIL

Presenta:

Luis Alberto Mendoza Luna

Director de tesis:

M.I. Edgar Iram Villagrán Arroyo

Asesor de tesis:

M.I. Edgar Iram Villagrán Arroyo

Coasesor de tesis:

M.I. Ana Elena Posada Sánchez

BUAP

OFICIO DE AUTORIZACIÓN



Oficio No. SAC/1939/2021

C. LUIS ALBERTO MENDOZA LUNA
PASANTE DE LA CARRERA DE INGENIERÍA
CIVIL
Presente.

En atención al Tema de Tesis que puso Usted a consideración de la Coordinación de Área y de esta Secretaría Académica en coordinación con la Dirección de esta Facultad de Ingeniería, dentro del marco de Titulación por Examen Profesional en línea, como medio de Titulación se dio revisión y se ha autorizado el tema denominado:

"IDENTIFICACIÓN DE COMPORTAMIENTO CAÓTICO DE REGISTROS ACELEROMÉTRICOS EN LA CIUDAD DE PUEBLA PARA SUELO ESTRATIFICADO".

Por lo anterior hago de su conocimiento que se asigna como Asesor de tema al Mtro. Edgar Iram Villagrán Arroyo y como Co Asesora a la Mtra. Ana Elena Posada Sánchez.

Sin más por el momento, le envío la seguridad de mi consideración más distinguida.

Atentamente
"Pensar bien, para vivir mejor"
H. Puebla de Z. a 09 de noviembre de 2021

M. I. Angel Cecilio Guerrero Zamora
Director



M'ACGZ /barv
C.c.p. Interesado
C.c.p. Archivo

Facultad
de Ingeniería

Bv. Valdequillo y Av. San Claudio
sin. edif. ING 4, Col. San Manuel,
Ciudad Universitaria,
Puebla, Pue. C.P. 72570
222 229 50 00 Ext. 1110

OFICIO DE IMPRESIÓN

M. I. Ángel Cecilio Guerrero Zamora
Director de la Facultad de Ingeniería
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Presente.


Los que suscriben: M. I. Edgar Iram Villagrán Arroyo, director del tema de tesis, y M. I. Ana Elena Posada Sánchez, codirectora del tema de tesis:


"IDENTIFICACIÓN DE COMPORTAMIENTO CAÓTICO DE REGISTROS ACELEROMÉTRICOS EN LA CIUDAD DE PUEBLA PARA SUELO ESTRATIFICADO".

Presentada por el C. Luis Alberto Mendoza Luna, pasante del Colegio de Ingeniería Civil, y en atención al oficio No. SAC/1939/2021 con fecha de emisión 09 de noviembre de 2021, nos permitimos informar a Usted que después de haber revisado cuidadosamente el contenido temático, metodología, redacción y ortografía de la tesis correspondiente, no tenemos inconvenientes en autorizar la impresión del mismo.

Sin otro particular, le reiteramos la seguridad de nuestra más atenta y distinguida consideración.

Atentamente
"Pensar bien, para vivir mejor"
H. Puebla de Z. a 10 de noviembre de 2021


M. I. Edgar Iram Villagrán Arroyo
Director de Tema


M. I. Ana Elena Posada Sánchez
Codirectora de tesis

M'EIVA/BARV
C.c.p. Interesado
C.c.p. Archivo

AGRADECIMIENTOS

A mis padres Tomás Mendoza Varela y Luisa Luna Rojas, por todo su apoyo, esfuerzo y atención que me han brindado a lo largo de mi vida y mi carrera.

A mis hermanos Jose Luis Mendoza Luna y Claudia Elizabeth Mendoza Luna, que siempre me han impulsado a salir adelante.

A mi compañero John Rafael Rojas Rubio, por su ayuda en la elaboración de los programas utilizados para desarrollar este trabajo.

Al Ph.D. Juan Pablo Hidalgo Toxqui, por su constante supervisión y apoyo en la redacción de esta tesis.

A mis asesores M.I. Edgar Iram Villagrán Arroyo y M.I. Ana Elena Posada Sánchez por su tiempo, dedicación, seguimiento y esfuerzo puesto a lo largo de esta investigación.

Al M.I. Jorge Rubén Peniche Reynoso, M.I. Víctor Guillermo Guerrero Corona y M.I. Roberto Carlos López Téllez, de la empresa CODE MX, por brindarme trabajo y experiencia durante el tiempo de realización de esta tesis.

A mis profesores, amigos y compañeros de trabajo, así como a todas las demás personas que contribuyeron de una o cualquier forma a la elaboración de este trabajo.

ÍNDICE

OFICIO DE AUTORIZACIÓN.....	A
OFICIO DE IMPRESIÓN	B
AGRADECIMIENTOS	C
ÍNDICE	D
RESUMEN.....	F
INTRODUCCIÓN	H
CAPÍTULO 1.- ANTECEDENTES.....	1
1.1.- HISTORIA DEL ANÁLISIS DE FENÓMENOS NO LINEALES Y CAOS	1
1.2.- ANÁLISIS DE CAOS EN REGISTROS ACELEROMÉTRICOS	3
CAPÍTULO 2.- MARCO TEÓRICO.....	4
2.1.- SISTEMAS DINÁMICOS	4
2.1.1.- MAPAS.....	4
2.1.2.- FLUJOS	5
2.2.- PROPIEDADES CAÓTICAS EN FENÓMENOS DE LA NATURALEZA.....	8
2.3.- ESPACIO DE FASE	12
2.3.1.- ESPACIO DE FASE ESTÁNDAR	12
2.3.2.- PSEUDOESPACIO DE FASE.....	13
2.4.- ATRACTORES	14
2.4.1.- ATRACTORES NO CAÓTICOS	15
2.4.2.- ATRACTORES EXTRAÑOS	16
2.4.3.- RECONSTRUCCIÓN DEL ATRACTOR EN SERIES DE TIEMPO	18
2.4.4.- TIEMPO DE RETARDO.....	18
(1) AUTOCORRELACIÓN	19
(2) INFORMACIÓN MUTUA	19
2.4.5.- DIMENSIÓN DE INCRUSTACIÓN	20
(1) MÉTODO DEL FALSO VECINO MÁS CERCANO.....	22
(2) PROMEDIO DE FALSOS VECINOS	23
2.5.- INVARIANTES DINÁMICAS DEL CAOS	25
2.5.1.- DIMENSIÓN DE CORRELACIÓN.....	25
2.5.2.- ENTROPÍA DE CORRELACIÓN.....	27
2.5.3.- EXPONENTES DE LYAPUNOV.....	30
2.6.- TRATAMIENTO PRELIMINAR DE SERIES TEMPORALES.....	32

2.6.1.- CORRECCIÓN DE LÍNEA BASE	32
2.6.2.- FILTRADO DE LA SEÑAL	33
2.6.3.- INTENSIDAD DE ARIAS	33
CAPÍTULO 3.- METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN.....	35
3.1.- DATOS DE LA ESTACIÓN SÍSMICA PASEO BRAVO	35
3.2.- SELECCIÓN DE REGISTROS	36
3.3.- TRATAMIENTO PRELIMINAR DE LAS SERIES TEMPORALES.....	38
3.4.- APLICACIÓN DE LAS HERRAMIENTAS DE LA TEORÍA DEL CAOS EN REGISTROS ACELEROGRÁFICOS	41
3.5.- COMPARACIONES ENTRE RESULTADOS.....	41
3.6.- DIAGRAMA DE FLUJO	43
CAPÍTULO 4.- RESULTADOS Y DISCUSIONES	44
4.1.- RESULTADOS.....	44
4.2.- DISCUSIONES.....	57
CONCLUSIONES.....	62
BIBLIOGRAFÍA.....	64
ANEXO 1.- REGISTROS ACCELEROMÉTRICOS DE PASEO BRAVO CON TRATAMIENTO PREELIMINAR	I
ANEXO II.- RESULTADOS DE DIMENSIÓN DE CORRELACIÓN EN REGISTROS DE PASEO BRAVO	V
ANEXO III.- RESULTADOS DE ENTROPÍA DE CORRELACIÓN EN REGISTROS DE PASEO BRAVO	IX
ANEXO IV.- ATRACTORES RECONSTRUÍDOS PARA REGISTROS DE PASEO BRAVO	XIII

RESUMEN

A pesar de la existencia de métodos para determinar el comportamiento de los movimientos sísmicos que han funcionado de manera eficiente para el diseño estructural, se han propuesto alternativas para obtener modelos que describan de manera más precisa la naturaleza real de los mismos, entre las cuales destaca la aplicación de la teoría del caos en series de tiempo obtenidas de acelerogramas. En este trabajo de investigación se tuvo la finalidad de identificar evidencias de comportamiento caótico en los registros acelerométricos sobre terreno estratificado propio de la zona céntrica de la ciudad de Puebla, empleando los datos generados por la estación sismológica de Paseo Bravo. Para ello se calcularon las invariantes dinámicas más importantes en la teoría del caos que son: dimensión de correlación D_2 , entropía de correlación K_2 y el máximo exponente de Lyapunov λ , además de la reconstrucción del atractor correspondiente a cada acelerograma. Los resultados del cálculo de las invariantes dinámicas indican que las series de tiempo estudiadas presentan comportamiento caótico, por lo tanto, serán de utilidad para realizar futuras correlaciones con la información que se obtenga aplicando los mismos métodos en datos provenientes de otras estaciones sísmicas, con el objetivo a largo plazo de comprobar si existe alguna norma gobernante de los sismos que ocurren en una determinada área geográfica.

ABSTRAC

Although the existence of methods to determine the earthquakes motions behavior that had working efficiently in structural design, alternatives have been proposed to obtain models that describe more precise their real nature, among which stands out chaos theory implementation in time series obtained from accelerograms. In this investigation the purpose was identify chaotic behavior evidences in accelerometric records above stratified ground typical in downtown of the Puebla City, using generated data from the Paseo Bravo seismic station. For it, the most important dynamical invariants in chaos theory were calculated, which are: correlation dimension D_2 , correlation entropy K_2 and the largest Lyapunov exponent λ , in addition to the reconstruction of the attractors for each accelerogram. The results of dynamical invariants calculation indicate that studied time

series present chaotic behavior; thus, they will be of utility to perform future correlations with information obtained from applying the same methods in other seismic stations data, with long-term objective to check if exists a ruling norm of the earthquakes that occurs in determined geographic zone.

INTRODUCCIÓN

Planteamiento del problema

El análisis sísmico de estructuras actualmente cuenta con un gran desarrollo de métodos de cálculo. Estos se basan en la determinación de los valores de la aceleración generada durante un evento sísmico para la posterior obtención de parámetros de interés en el diseño estructural. Estos valores se registran a manera de historial a través de series de tiempo, que son simplemente una colección de magnitudes que se presentan a lo largo del tiempo en intervalos determinados.

Sin embargo, dada la irregularidad y complejidad evidente en el comportamiento de los sismos, comúnmente se acepta la idea de que se consideran como fenómenos aleatorios. De esta manera, los métodos existentes en el diseño de edificios por lo general provienen de una perspectiva probabilística y lineal. Evidentemente, eso involucra que ese enfoque muestre una aproximación limitada y que pueda diferir, en diversas medidas, del comportamiento dinámico real. Ante esta situación ha habido pretensiones de aplicar un enfoque dinámico no lineal basado en la teoría del caos en series de tiempo para analizar estos sistemas, de los cuales se propone que se trate de fenómenos que, pese a un comportamiento aparentemente desordenado, en el fondo presenten una dinámica determinista.

Si bien, como antecedentes en el tema se encuentran las investigaciones de Yang *et. al.* (2012), quienes desarrollaron su trabajo sobre 24 eventos captados en las inmediaciones de la zona de falla del gran sismo de Chi-Chi acontecido en Taiwán el 21 de septiembre de 1999 y en las cuales se concluye que los resultados describen un comportamiento caótico del fenómeno estudiado, aún no se cuenta con la aplicación de análisis caóticos a registros sismológicos obtenidos en territorio nacional, por lo tanto, se hará uso de los datos arrojados por la estación de Paseo Bravo, en la ciudad de Puebla para comprobar si se llega a conclusiones similares.

Justificación de la investigación

La necesidad de realización de la investigación radica en proporcionar información que sea útil a las investigaciones posteriores de teoría del caos aplicadas a series de tiempo

correspondientes a registros acelerométricos para un área específica. Es importante por dos razones: tener datos que sirvan de testigo y que permitan ejemplificar el comportamiento de los eventos sísmicos en territorio nacional y en el tipo de suelo especificado. Y segundo, comprobar si algunos tratamientos que comúnmente se emplean en programas comerciales de análisis (filtros, corrección de línea base, etc.) afectan de manera significativa los resultados. Tener esa información disponible será de importancia para investigaciones futuras del tema.

Hipótesis de trabajo

Las señales sísmicas registradas en la estación de Paseo Bravo de la Ciudad de Puebla presentan comportamiento caótico.

Objetivo General

Generar información de las series de tiempo sísmicas obtenidas de la estación Paseo Bravo de la ciudad de Puebla (terreno estratificado), a través de la teoría del caos y que permita identificar si su comportamiento dinámico corresponde al de un sistema caótico.

Objetivos Particulares

- Comprobar si el desechar los datos irrelevantes por su baja intensidad de Arias ayuda a la obtención de mejores resultados.
- Comparar los resultados obtenidos del análisis de los sismos de la estación Paseo Bravo con los obtenidos del trabajo de Yang *et. al.* (2012), así como los correspondientes a otros sistemas considerados como caóticos.

Contenidos

En el CAPÍTULO 1.- se abordarán de manera general algunos aspectos históricos e interrogantes que han surgido a lo largo del tiempo, y que han contribuido al desarrollo de la teoría del caos, así como también investigaciones previas en las que se han hecho aplicaciones de la misma en series temporales obtenidas de acelerogramas. En el

CAPÍTULO 2.- serán descritos los conceptos más representativos de la teoría del caos, así como de las características de los parámetros requeridos para identificar el caos en series de tiempo, cuya comprensión es fundamental para una interpretación confiable de los resultados. En el CAPÍTULO 3.- se mostrarán detalles de la metodología empleada para llevar a cabo los objetivos planteados, comenzando con las características de la fuente de los datos, los criterios de selección de registros y el tratamiento preliminar aplicado en las series de tiempo. Por último, en el CAPÍTULO 4.- se presentarán los resultados del cálculo de invariantes dinámicas en los acelerogramas de la estación de Paseo Bravo, así como su interpretación y comparación con los resultados de investigaciones anteriores.

CAPÍTULO 1.- ANTECEDENTES

1.1.- Historia del análisis de fenómenos no lineales y caos

Para comprender la importancia del análisis no lineal en el estudio de la naturaleza, es necesario conocer las problemáticas y antecedentes que propiciaron su origen, ya que plantean escenarios que surgieron a raíz de la dificultad de estudiar fenómenos cada vez más complejos.

El estudio formal de la dinámica comúnmente se origina a partir de la invención del cálculo popularmente atribuida a Isaac Newton en el siglo XVII. Una de sus primeras aplicaciones fue explicar el movimiento de los planetas, entre lo que destaca el problema de los dos cuerpos, el cual involucra calcular el movimiento de la Tierra alrededor del Sol; posteriormente, en un intento por extender la magnitud del caso, es decir, involucrando esta vez el movimiento de tres cuerpos, la resolución del problema se hizo imposible, ya que no hubo manera de obtener las fórmulas explícitas para determinar el movimiento de estos tres cuerpos. Debido a ello, el estudio de problemas de altos niveles de complejidad quedó relegado a los métodos probabilísticos puesto que se consideraron como eventos de naturaleza estocástica y, por tanto, no existía la posibilidad de obtener ecuaciones capaces de modelar la dinámica en cuestión lo más cercanas a la realidad.

Tuvieron que pasar más de dos siglos para que el matemático francés Henri Poincaré planteara un avance notable para este tipo de sistemas, pues a través del cuestionamiento que formuló sobre si el Sistema Solar permanecería estable para siempre, fue el primero en visualizar la idea del caos a través de las órbitas asintóticas que se pueden formar en sistemas de complejidad considerable, ya que contrario a lo que afirmaba el físico Pierre Simon Laplace de que bastaba conocer los valores iniciales de cada partícula del Universo para predecir su futuro de manera exacta, Poincaré determinó que solo bastaban pequeñas diferencias en dichas condiciones iniciales para que se produzcan errores en las condiciones finales, de manera que la predicción se hace imposible, sin embargo, Poincaré a su vez rechazó la idea de que estos comportamientos surgieran de un sistema aleatorio (inclusive asociando esa conclusión con la ignorancia del ser humano)

ya que formulaba la idea de que tales comportamientos irregulares podían provenir de sistemas claramente deterministas. Cabe señalar que una idea aproximada ya había sido expuesta en 1828 por el británico Robert Brown, quien había descrito como irregulares, las trayectorias que tomaba un grano de polen soltado dentro de un recipiente con agua, sin embargo, siempre lo hacían en forma de zig zag (lo que se conoce ahora como movimiento browniano).

Fue a partir de la década de los cincuenta que el interés por el caos resurgió gracias a la invención de la computadora de alta velocidad que permitió experimentar con modelos laboriosos de resolver manualmente. Estos experimentos le permitieron al meteorólogo Edward Norton Lorenz en 1963 descubrir el movimiento caótico a partir de un modelo simplificado de corrientes de convección en la atmósfera con el fin de comprender la imprevisibilidad del clima. Lo que Lorenz observó fue que las soluciones de las ecuaciones que planteó nunca tenían un estado de equilibrio o periódico, sino más bien, continuaron oscilando de manera irregular y aperiódica (Strogatz, 2015). Estas soluciones se trazaron en un espacio tridimensional y se consiguió una estructura visible (ver Figura 2-10) formada por un número infinito de trayectorias individualmente regulares y asintóticas entre sí, cada una correspondiente a distintas pruebas con valores iniciales ínfimamente variantes que generaban comportamientos resultantes con fluctuaciones amplificadas fuertemente, lo cual reflejaba indicios de extrema sensibilidad a las condiciones iniciales, tal como Poincaré había deducido. Dicha estructura también se caracterizaba por tener autosimilitud, es decir, la cualidad de conservar la misma forma aún si se visualizaba para diversas escalas. Este tipo de estructura sería posteriormente acuñada con el nombre de fractal por Benoit Mandelbrot en 1975.

Sin embargo, a pesar del descubrimiento del atractor de Lorenz, no fue sino hasta la década de los setenta que la teoría del caos adquirió gran relevancia cuando precisamente Mandelbrot introdujo el concepto de fractales, pues dio pie a varias investigaciones enfocadas a distintas áreas del conocimiento. Entre lo que destaca se encuentra el estudio de las turbulencias hecho por Ruelle y Takens, la detección del caos en el mapa logístico por Robert May, las constantes de Feigenbaum que rigen los diagramas de bifurcación, entre otras investigaciones.

1.2.- Análisis de caos en registros acelerométricos

Como se ha mencionado con anterioridad, las herramientas proporcionadas por la teoría del caos han sido ampliamente aplicadas para el estudio de diversos campos, como la medicina, la ingeniería, la economía, la biología, entre otras áreas. En lo que respecta al análisis de series de tiempo provenientes de acelerogramas, existen trabajos previos con distintos enfoques. Huang y Turcotte (1990) identifican de manera indirecta el comportamiento producido por los sismos en la zona de falla a través de un modelo simple de masa-resorte con el que se obtiene un comportamiento irregular como resultado, el cual surge a través de las variaciones en las fuerzas de fricción generadas. Yang, *et.al.* (2012) por su parte calculan parámetros de interés (conocidos como invariantes dinámicas) requeridos para identificar la presencia de comportamiento caótico en las series temporales generadas por los 24 acelerogramas de eventos captados en las inmediaciones de la zona de falla del gran sismo de Chi-Chi acontecido en Taiwán el 21 de septiembre de 1999. Entre sus conclusiones destacan que los sismos estudiados coinciden con un comportamiento caótico de acuerdo con los resultados de las invariantes dinámicas.

En México, el análisis caótico no ha sido aplicado de manera amplia para estudiar los registros acelerométricos. Se cuenta con el trabajo de Villagrán, *et.al.* (2011) en el cual se aplican las herramientas más comunes para registros provenientes de múltiples sismos proporcionados por la estación SCT de la Base Mexicana de Datos de Sismos Fuertes del Instituto de Ingeniería de la UNAM. Si bien los resultados apuntan a que los sismos presentan un comportamiento caótico, cabe señalar que es importante contar con más de un estudio en el cual se tomen en cuenta una mayor cantidad de variables como el medio físico, los tratamientos de las señales o las distancias respecto a los epicentros de los eventos.

CAPÍTULO 2.- MARCO TEÓRICO

Para comprender las propiedades de los sistemas caóticos es necesario abordar conceptos preliminares de los sistemas dinámicos en general, por lo tanto en este capítulo se darán a conocer de manera ordenada los aspectos teóricos que fundamentan tanto el análisis no lineal como el caos en sí, de manera que se irá de lo más general a lo más específico, ya que por ejemplo para llegar a apreciar el concepto de reconstrucción del atractor del sistema se requieren conocer primero qué significa espacio de fase, retardo, dimensión de incrustación, etc.

2.1.- Sistemas dinámicos

El concepto de dinámica representa la variación de una magnitud a lo largo del tiempo, la cual se define por medio de una regla intrínseca que calcula el estado presente en términos del estado anterior. Para poder desarrollar la dinámica de un sistema primero es necesario considerar si la transición que ocurre de un estado inicial a un estado final será discreta o continua.

2.1.1.- Mapas

Si se considera un tiempo discreto, el sistema dinámico se desarrollará a través de un mapa, esto quiere decir que el sistema dinámico estará regido por una función que calculará sus estados sucesivos a lo largo del tiempo teniendo como variable a los estados anteriores. En términos generales, los mapas se expresan de la siguiente forma:

$$x_{n+1} = f(x_n) \qquad \text{Ec. 2-1}$$

En donde x_n es cada estado inicial correspondiente al instante de tiempo t_n , mientras que x_{n+1} será el estado calculado después de iterar en un intervalo de tiempo Δt , de manera que corresponderá al tiempo $t_{n+1} = t_n + \Delta t$. Como ejemplos de mapas se encuentran las ecuaciones de Henon o el mapa logístico de poblaciones.

2.1.2.- Flujos

Por otro lado, si se considera esta vez un tiempo continuo, implica trabajar con intervalos de tiempo cada vez más pequeños incluso demasiado cercanos a cero, obteniendo de esta manera, ecuaciones diferenciales que, a diferencia de los mapas, expresan que la razón de cambio del estado actual está en función del mismo estado y no del anterior, es decir:

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = f(x) \quad \text{Ec. 2-2}$$

Sin embargo, si se cuenta con un número n de variables dependientes en el sistema, cada estado se conformará por un vector de forma $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Como se ha dicho anteriormente, cuando se trabaja con tiempo continuo la transición de estados genera una ecuación diferencial en función de cada vector, sin embargo, al manejar más de una variable, el marco de referencia general será un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias como se muestra a continuación (Strogatz, 2015):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \quad \text{Ec. 2-3}$$

La solución de este sistema general puede visualizarse como un conjunto de trayectorias que fluyen a lo largo de un espacio de fase de n dimensiones con coordenadas (x_1, x_2, \dots, x_n) (Strogatz, 2015), por esta razón es que, si se considera un tiempo continuo, el sistema dinámico se desarrollará a través de lo que se conoce como un flujo. Por ejemplo, para un sistema sencillo dado por $\dot{x} = \cos x$, la solución genera una trayectoria de flujo que se comporta como se muestra en la Figura 2-1. Cabe señalar que los conceptos de espacio de fase y dimensiones serán abordados en los incisos siguientes.

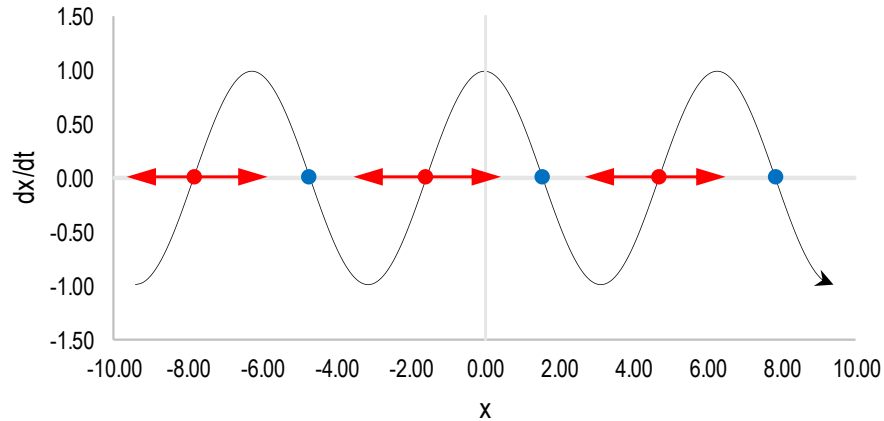


Figura 2-1 Solución de la ecuación diferencial $\dot{x} = \cos x$

La ecuación diferencial $\dot{x} = \cos x$ representa un campo vectorial a lo largo de la línea recta, el cual determina la velocidad \dot{x} del vector para cada posición x . En la gráfica de la Figura 2-1 también se pueden visualizar en los puntos de colores señalados los cambios de dirección que adquiere el flujo conforme evoluciona con el tiempo, de manera que se puede notar que el flujo va hacia la derecha cuando la velocidad es mayor a cero y a la izquierda en caso contrario. Se puede apreciar que es en dichos puntos donde la velocidad del sistema es igual a cero, por consiguiente, en esos puntos no hay flujo. Debido a esta característica, a los puntos de colores se les conoce como puntos fijos.

Si bien todos los puntos de colores representan puntos fijos, hay una distinción entre los puntos rojos y los azules. En los primeros se puede ver una condición de inestabilidad ya que al mínimo cambio el flujo se moverá en la otra dirección, por ello comúnmente a estos se les conoce como fuentes. Por otro parte, en los puntos azules se puede visualizar una condición estable ya que, a diferencia de los puntos rojos, las trayectorias que lleguen a estos nunca más los abandonarán, por lo que se les llama también colectores o atractores (Strogatz, 2015).

Un ejemplo clásico para visualizar las condiciones de estabilidad análogo al campo vectorial, mostrado anteriormente, se puede ver en la Figura 2-2. En la parte izquierda se encuentra una esfera al fondo de un barranco, como puede verse, todas las trayectorias que se aproximen (señaladas en flechas azules) irán directo a la esfera, es decir, serán atraídas a ella, es por ello que se dice que el punto es estable. En la figura de la derecha se muestra el caso contrario; la esfera roja se encuentra en la punta de un montículo,

fácilmente puede apreciarse que con mover ligeramente la esfera en cualquier dirección esta rodará lejos, en este caso la condición desde luego se considera como inestable.

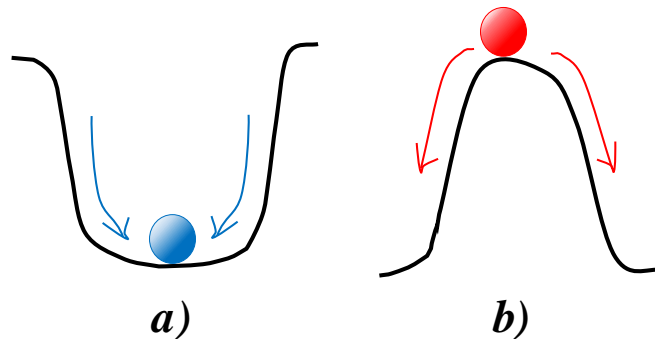


Figura 2-2 Ejemplos de condición a) estable b) inestable

Para varias disciplinas científicas, las primeras herramientas de análisis dinámico se han enfocado en la dinámica lineal, tradicionalmente debido a su sencillez matemática, a pesar de no ser consistentes en su totalidad a la naturaleza real de los fenómenos estudiados, puesto que los modelos de análisis establecidos se tratan en esencia de reproducciones mediante aproximaciones teóricas. Las relaciones dentro de la naturaleza son en realidad casi siempre no lineales. La diferencia sustancial entre la dinámica lineal y la dinámica no lineal consiste básicamente en que los sistemas no lineales evolucionan con el tiempo de manera que sus datos de salida no son proporcionales a los de entrada.

Dentro de la dinámica no lineal, existe un concepto, considerado uno de los más interesantes para quien estudia este campo. Se trata del caos, el cual se define como la evolución aparentemente aleatoria que se produce en sistemas dinámicos no lineales deterministas (Williams, 1997). De manera más específica, presenta las siguientes propiedades:

- No existe proporcionalidad, de manera que pequeños estímulos pueden generar respuestas considerables.
- Presenta dependencia sensible a las condiciones iniciales, lo que quiere decir que los estados iniciales en el sistema que tengan trayectorias cercanas entre sí se verán separadas de manera exponencial a lo largo del tiempo, generando zonas de inestabilidad parcial, por lo tanto, es casi inexistente su reproductibilidad y predictibilidad al largo plazo.
- Generalmente presentan estructura fractal.

2.2.- Propiedades caóticas en fenómenos de la naturaleza

Los comportamientos dinámicos a simple vista azarosos ocurren en casi todos los fenómenos de la naturaleza. Como se ha mencionado con anterioridad, el estudio de la dinámica no lineal se ha visto impulsado por la necesidad de contar con modelos matemáticos lo más próximos a la realidad, cosa que hasta el momento no ha sido posible describir de manera rotunda. Por ejemplo, en hidrodinámica, destaca el fenómeno de turbulencia; cuando el flujo viaja al interior de un conducto de manera uniforme y regular, el movimiento de las partículas que lo componen puede ser estimado con exactitud, sin embargo, al aumentar la intensidad de movimiento, aparecerán pequeños remolinos al interior que tienden a multiplicarse, lo que ocasiona que las partículas del fluido presenten un comportamiento irregular o azaroso, de manera que en este caso, el movimiento y las propiedades del sistema no puedan calcularse.

Para los casos donde el comportamiento dinámico resulta incomprensible, su estudio suele ser relegado mediante probabilidad, sin embargo, con el surgimiento de la teoría del caos, ha sido posible entender algunos aspectos de este tipo de fenómenos. Por ejemplo, uno de los casos que ha sido posible comprender mediante la teoría del caos ha sido la evolución de poblaciones en ecología. Vale la pena presentar este caso ya que suele ser la manera más simple de entender el caos para quienes comienzan su estudio.

El planteamiento del problema de la población es el siguiente: si se conoce la cantidad x de ejemplares de una especie, ¿cuántos ejemplares habrá para los próximos años? Lo primero que se hace es preguntarse si hay una regla que permita estimar la población futura en función del dato actual, la cual puede depender de ciertos factores como el medio físico, la disponibilidad de alimento y la presencia o ausencia de depredadores. La manera más simple de plantear dicha regla es suponer un porcentaje de crecimiento (o decrecimiento) respecto a la población inicial. Por ejemplo, si la población futura y se estima como un 10% mayor que la población inicial, de esta manera se cuenta con el siguiente modelo: $y = 1.1x$. Con el modelo planteado se podrán calcular las poblaciones futuras para el número de años que se desee, a partir de la población inicial. Para hacer más general el modelo, considerando que la población de diferentes especies crece a ritmos distintos, el porcentaje de crecimiento se deja como un parámetro constante α , de manera que se tiene ahora que $y = \alpha x$.

Sin embargo, con este se presenta un problema que lo aleja de la realidad, ya que al calcular a largo plazo las poblaciones se tendrá un número infinito de ejemplares que siempre irá en aumento, lo que implicaría que ninguno de ellos muera, lo cual es obvio descartar, además, considerando que a mayor cantidad de la misma especie se requerirá mayor cantidad de alimento (el cual llegaría al punto de agotarse) y se generaría una disminución en las enormes poblaciones que anteriormente crecían, por el contrario, al contar con pocas especies y mucho alimento disponible, las poblaciones futuras aumentarán con mayor rapidez. Para construir ahora un modelo acorde a esta situación, se consideran dos casos:

- La población de la especie alcanzará un número máximo de ejemplares posibles debido a que, al superar dicho valor, el alimento disponible comenzará a disminuir de manera irreversible. Este valor máximo se considerará por conveniencia como 1, por lo que cada población calculada deberá ser una fracción de dicho valor máximo para mantener el equilibrio en el sistema.
- La población disminuirá hasta el valor de 0, lo que implica la extinción de la especie. Esto debido a factores como la falta de alimento o los depredadores.

Teniendo estas dos consideraciones en cuenta, se llega al siguiente modelo:

$$y = \alpha x(1 - x) \qquad \text{Ec. 2-4}$$

A la ecuación 1-1 comúnmente se le conoce como ecuación de la logística. En la Figura 2-3 se muestra la evolución que tiene el sistema regido por esta ecuación aplicando distintos valores del parámetro α con una condición inicial $x = 0.20$. Por ejemplo, se puede apreciar que al asignando valores tales que $\alpha < 1$, el comportamiento del modelo tendrá una tendencia negativa que culminará con la extinción de la especie, sin embargo, al asignar un valor $\alpha \geq 1$, dicho valor final no llegará a cero, e inclusive, para valores tales que $\alpha \geq 1.25$ la población final se estabiliza a números mayores al valor inicial. En todos los casos se puede visualizar una tendencia de comportamiento suave, lo cual evidentemente es indicio de poca complejidad por lo que a simple vista se podría decir que se tiene un sistema dinámico lineal, sin embargo, lo más interesante ocurre cuando se asignan parámetros de manera que $\alpha \geq 3$.

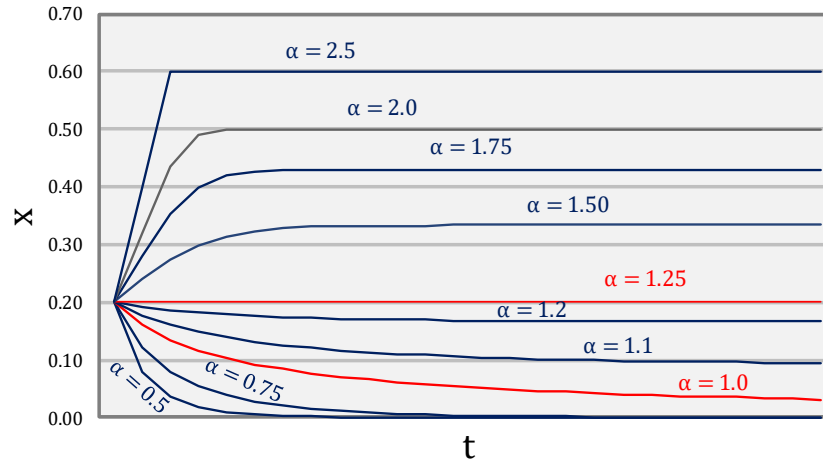


Figura 2-3 Evolución de la ecuación de la logística para parámetros $\alpha < 3.0$ y condición inicial $x_0 = 0.20$

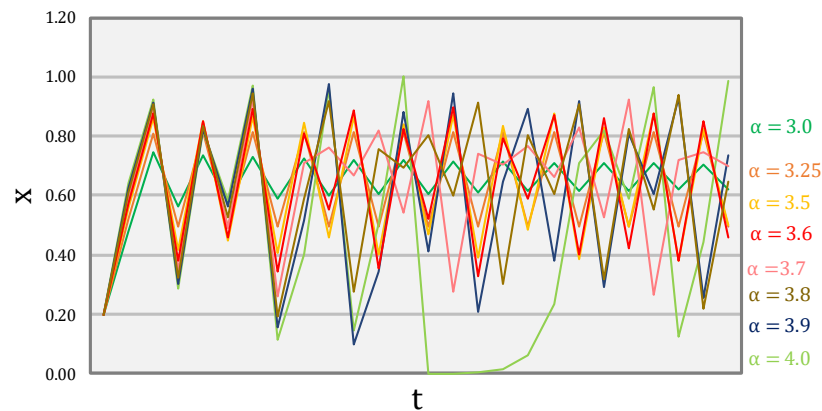


Figura 2-4 Evolución de la ecuación de la logística para parámetros $\alpha \geq 3.0$ y condición inicial $x_0 = 0.25$

En la Figura 2-4 en cambio se muestra la evolución del sistema usando la misma condición inicial, pero asignando parámetros $\alpha \geq 3$. En esta ocasión no se nota una proporcionalidad: por más iteraciones que se hagan, se llega a más de una condición de estabilidad y a su vez, entre cada parámetro la diferencia en el comportamiento no sigue una forma establecida. De aquí se puede deducir con seguridad que se trata de un fenómeno no lineal, el cual ya requiere de mayores herramientas de cálculo para su análisis.

Pero existe otra cualidad notable en este sistema: asignando condiciones iniciales ligeramente diferentes mientras se tenga el parámetro $\alpha \geq 3$, es decir, en la zona no lineal, la dinámica generada tendrá una complejidad tal que se considera impredecible e irregular. En la parte superior de la Figura 2-5 pueden observarse los resultados de la dinámica que se genera en esta zona para las condiciones iniciales $x_0 = \{0.200, 0.202, 0.204, 0.206, 0.208\}$ usando un parámetro $\alpha = 3.8$. Es de importancia si se considera que, por el contrario, para un parámetro propio de la zona lineal, por ejemplo $\alpha = 2.0$, usando las mismas condiciones iniciales, la dinámica subsecuente se mantendrá estable y sin ninguna variación. Esta condición se muestra en la parte inferior de la Figura 2-5. A partir de estas observaciones relacionadas con la complejidad del sistema que se altera bruscamente con condiciones iniciales poco cambiantes es que se considera a la ecuación de la logística como un sistema de tipo caótico. Las características propias de este tipo de sistemas se abordarán en los incisos siguientes.

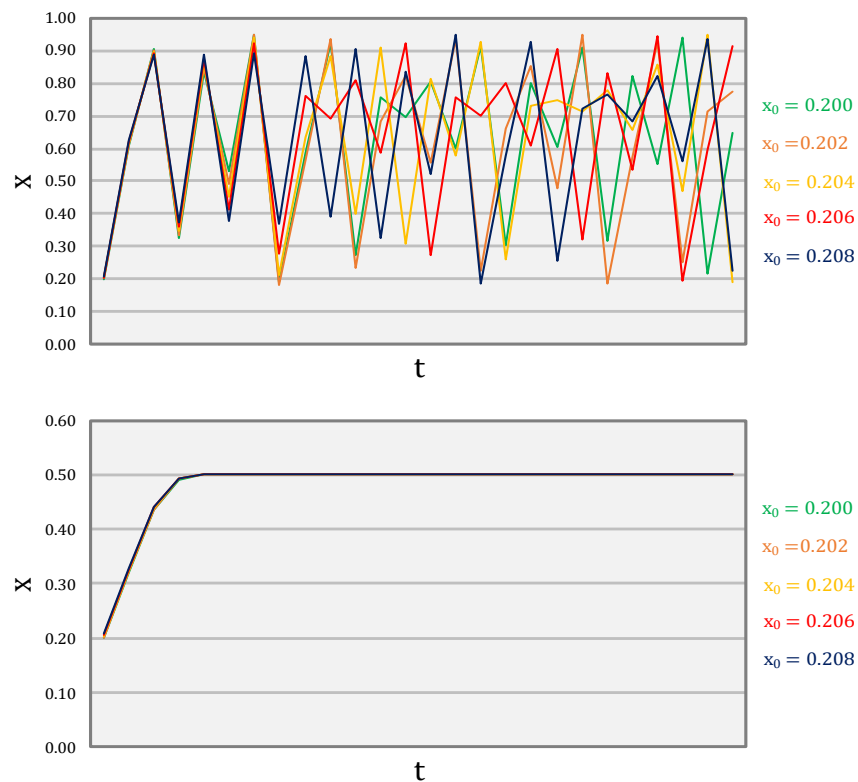


Figura 2-5 Evolución de la ecuación de la logística para condiciones iniciales próximas usando el parámetro a) $\alpha = 3.8$ b) $\alpha = 2.0$

2.3.- Espacio de fase

El espacio de fase es un espacio matemático abstracto en el cual los ejes o coordenadas representan las variables requeridas para especificar el estado de un sistema dinámico en un instante de tiempo particular. Dicho estado se representa como un punto impreso en el espacio de fase el cual contiene la información requerida para poder determinar cómo evolucionará el sistema. Por consiguiente, una secuencia de estados que muestre dicha variación sucesiva del sistema se le denomina como trayectoria (Williams, 1997).

Dentro del análisis caótico comúnmente se emplean dos tipos de espacio de fase: el espacio de fase estándar y el pseudoespacio de fase.

2.3.1.- Espacio de fase estándar

Por definición se trata del espacio gráfico imaginario en el cual sus ejes representan los valores de las características físicas del sistema usando un intervalo de tiempo constante. Por ejemplo, la dinámica de un oscilador armónico con amortiguamiento b de la forma $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$ puede trasladarse al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{b}{m}x_2 - \frac{k}{m}x_1 \end{aligned} \quad \text{Ec. 2-5}$$

En el cual x_1 representa el desplazamiento del oscilador y $x_2 = \dot{x}_1$ su velocidad. Dichos valores pueden graficarse en un espacio de fase estándar como se muestra en la Figura 2-6.

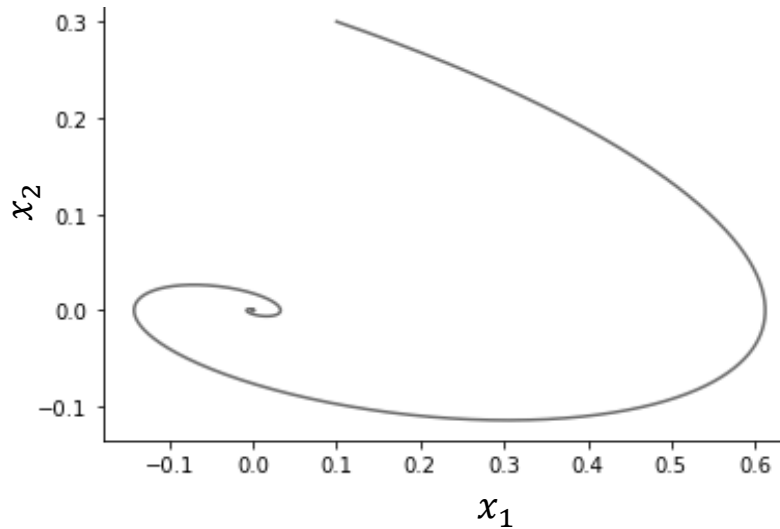


Figura 2-6 Espacio de fase estándar para un oscilador armónico amortiguado

2.3.2.- Pseudoespacio de fase

En este tipo de espacio de fase, sus ejes representan los valores de una sola característica. Lo más común para poder trazar un pseudo espacio es emplear los valores de la variable en cuestión contra imágenes de sí misma, pero en diferentes instantes de tiempo. A estos nuevos valores se les conoce como valores con retardo. Por ejemplo, si se tiene un valor de entrada x_i en el eje de las abscisas, entonces el valor de salida $x_{i+\tau}$ correspondiente al eje de las ordenadas será cualquiera que originalmente sea sucesor al valor de entrada x_i que ocurra un número τ determinado de iteraciones después.

Para visualizar de manera más clara este tipo de espacio, se emplea el mismo ejemplo del oscilador armónico amortiguado, pero asignando un retardo $\tau = 500$, es decir, si se grafica el valor x_1 , como imagen se tendrá el valor x_{501} , que corresponde al resultado que tiene luego de aplicar 500 iteraciones. De la misma manera se grafica x_2 contra x_{502} y así sucesivamente. El pseudoespacio generado se muestra en la Figura 2-7.

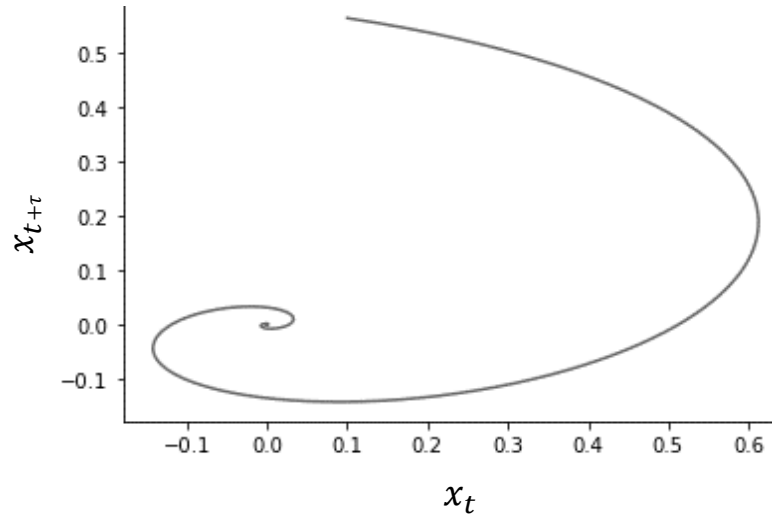


Figura 2-7 Pseudoespacio de fase para un oscilador armónico amortiguado

Aunque aparentemente el espacio de fase estándar y el pseudoespacio para este ejemplo lucen parecidos, hay que tener en cuenta el origen de los datos graficados ya que, al trabajar con series temporales obtenidas de fenómenos naturales, no se cuenta con información más que el propio valor registrado del mismo. Es decir, en el caso de acelerogramas, se cuenta únicamente con la aceleración captada durante el evento sísmico, por lo que a falta de más variables disponibles resulta de momento imposible trazar un espacio de fase estándar para series de tiempo, por lo tanto, de aquí en adelante siempre se trabajará en el pseudoespacio de fases.

2.4.- Atractores

Un atractor es un conjunto de condiciones en el espacio de fase que representan los diversos estados de equilibrio (o estacionarios) posibles que se pueden formar en el sistema dinámico (Williams, 1997). Entiéndase por estado estable como aquel que no cambia con el tiempo, tal como se describió en el ejemplo de la Figura 2-2 en el inciso anterior.

Los atractores son subespacios de volumen finito bastante pequeño en comparación al volumen del espacio de fase en sí y se adaptan a la trayectoria de la dinámica del sistema (de manera que tienen una determinada forma geométrica). Todos los puntos de datos se limitan a esa forma, es decir, todas las trayectorias posibles llegan y permanecen en el atractor cuando alcanzan la condición estable. En otras palabras, al

asignar un punto de partida independientemente de las condiciones iniciales que represente, al llegar dentro del atractor, la trayectoria que tomará nunca lo abandonará. De igual forma si dos trayectorias vecinas entran al atractor, permanecerán a una distancia relativamente cercana entre sí a medida que evolucionan (Williams, 1997).

Debido a que se trazan de manera independiente de las condiciones iniciales del sistema, son considerados como el medio más eficaz para comprender el comportamiento y los límites de un sistema dinámico, tanto en mapas, como flujos y series de tiempo.

Sin embargo, cabe mencionar que en casi todos los sistemas caóticos los atractores que, si bien representan con seguridad todas las condiciones de estabilidad posibles en el sistema, visualmente solo representan una imagen topológicamente equivalente a la dinámica real del sistema. Esto debido a que la complejidad propia del caos casi siempre exige de dimensiones del espacio de fase mayores a 3 para desenvolver el movimiento sin que se presenten cruces en las trayectorias, lo cual resulta imposible de visualizar.

La forma del atractor puede variar dependiendo de la complejidad del sistema dinámico que describa. Las formas más comunes en sistemas lineales y, por tanto, las más sencillas son el punto fijo y los ciclos límite, pues consisten en trayectorias regulares y predecibles. En cambio, para sistemas caóticos por lo general se obtendrán los denominados como atractores extraños.

2.4.1.- Atractores no caóticos

Los atractores de punto fijo indican que, si el sistema llega a la condición de estabilidad, ya no evolucionará más con el tiempo, siendo por lo general en el estado de reposo. En cambio, cuando se tiene un oscilador infinito, la dinámica genera un atractor de ciclo límite, en el cual su duración en términos de número de iteraciones se denomina como periodicidad. Se considera como un atractor ya que sin importar las condiciones iniciales en el sistema la trayectoria final nunca abandonará el ciclo.

Estos dos tipos de atractores por lo general involucran sistemas de dos variables, por lo que la gráfica del espacio de fase en el que se desenvuelven tiene dos dimensiones, aunque en el caso de los ciclos límite, también pueden desenvolverse en espacios de tres o más dimensiones si tiene más de un ciclo límite. En la Figura 2-8, se muestran los dos

casos explicados anteriormente y corresponden al mismo ejemplo del oscilador armónico, aunque con diferentes condiciones de amortiguamiento.

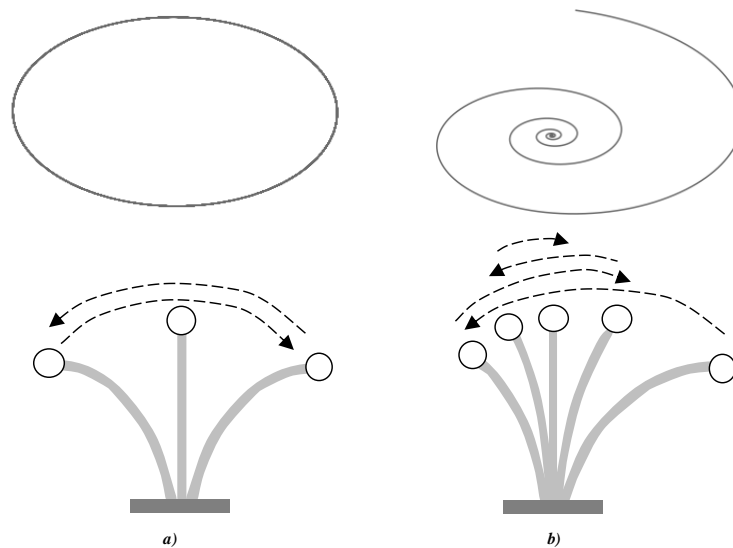
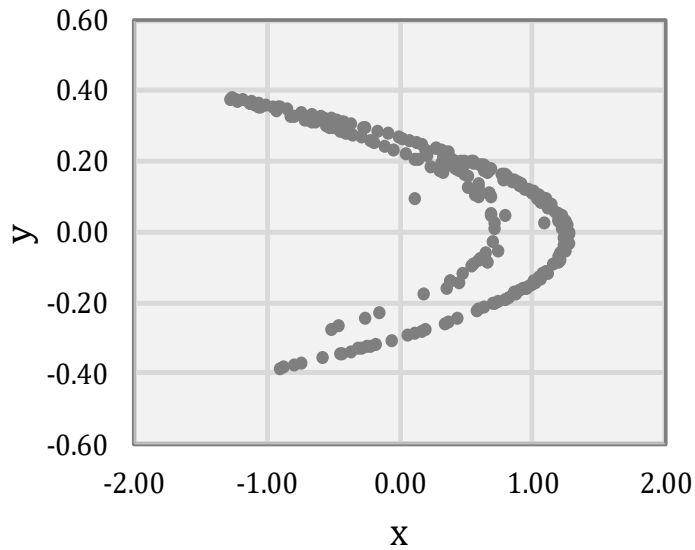


Figura 2-8 Atractores no caóticos de un oscilador armónico a) sin amortiguamiento (ciclo límite) b) amortiguado (punto fijo)

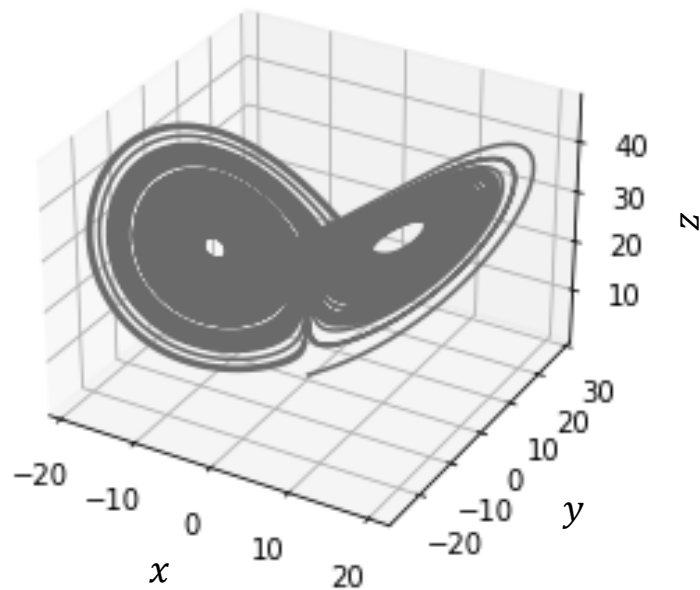
2.4.2.- Atractores extraños

A diferencia de los atractores no caóticos, los atractores extraños se caracterizan porque sus trayectorias no llegan al atractor de una forma única, sino más bien lo hacen de manera asintótica a los estados de equilibrio. Otra característica es la plegabilidad, lo que significa que si una trayectoria alcanza su límite en el espacio de fase esta rebota o se desvía de su patrón original de trazado, lo cual puede repetirse más de una vez, lo que se refleja en que el atractor contenga infinitud de órbitas o capas, sin embargo, hay que tener en cuenta que los sistemas caóticos también se caracterizan por ser disipativos, lo que indica que su volumen disminuirá con el transcurso del tiempo. Esto último recuerda a una estructura fractal, aunque de tipo natural. Sin embargo, a pesar de que los atractores extraños tengan trayectorias que pueden ser irregulares y erráticas, cuentan con zonas de periodicidad, por lo que, a diferencia de los fenómenos aleatorios, sí puede apreciarse una forma geométrica definida debido a que en el fondo son sistemas deterministas que pueden tener soluciones exactas con determinados parámetros. También presentan divergencia de trayectorias que originalmente se encontraban muy juntas, lo que es indicio de la sensibilidad a las condiciones iniciales propia de los fenómenos caóticos.



$$\begin{aligned}x_{n+1} &= 1 - ax_n^2 + y_n \\ y_{n+1} &= bx_n\end{aligned}$$

Figura 2-9 Atractor de Henon



$$\begin{aligned}\dot{x} &= a(y - x) \\ \dot{y} &= x(b - z) - y \\ \dot{z} &= xy - cz\end{aligned}$$

Figura 2-10 Atractor de Lorenz

En la Figura 2-9 se muestra el atractor del mapa de Henon, mientras que en la Figura 2-10 se encuentra el atractor de Lorenz. Se puede notar la diferencia entre los atractores que se generan a partir de un mapa y de un flujo. En los primeros el atractor se

compone de puntos debido a la caracterización discreta del tiempo. En los flujos en cambio los atractores se trazan con líneas continuas (Bradley E. , 2019).

2.4.3.- Reconstrucción del atractor en series de tiempo

Para lograr apreciar la dinámica de un sistema haciendo uso de una sola variable (la serie temporal en sí), Takens demostró en 1981 que se puede conocer la dinámica de un fenómeno mediante la reconstrucción del atractor en el pseudoespacio de fase, lo que implica trazar una gráfica haciendo uso de los vectores con retardo de la forma $Y = \{x_{1+\tau}, x_{2+\tau}, \dots, x_{n-2m\tau}\}$, que será topológicamente equivalente a la gráfica obtenida de los vectores de estado originales $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. De acuerdo con el teorema de Takens, la justificación por la que se puede reconstruir un atractor con solo usar una variable radica en que esta puede estar tan fuertemente relacionada con otra u otras que, por sí misma, también lleva información dinámica sobre esas otras (Williams, 1997). De esta manera no se pierden las propiedades dinámicas no lineales en el sistema.

Si bien la reconstrucción del atractor es relativamente fácil de llevar a cabo, el verdadero reto consiste en determinar los valores óptimos de los siguientes dos parámetros que se encuentran en las expresiones anteriores:

- El tiempo de retardo τ .
- La dimensión de incrustación m

Esto debido a que deben ser cuidadosamente seleccionados para obtener una reconstrucción del atractor significativa y que no diste de la dinámica real del sistema.

2.4.4.- Tiempo de retardo

Como se ha mencionado con anterioridad, el tiempo de retardo τ es el número de iteraciones que separan a los vectores que componen el pseudoespacio de fase, de manera que la forma del mismo varía conforme se asignen distintos valores de τ . En la práctica se busca un valor óptimo ya que comúnmente tiempos de retardo pequeños generan una línea diagonal de 45° en el espacio de fase, la cual obviamente carece de sentido si lo que se quiere es observar la evolución del sistema a lo largo del tiempo. Por otro lado, si se asignan valores de retardo demasiado grandes en comparación al número de muestras de

datos, se produce una dispersión ininteligible de puntos en el espacio de fase. Esto también carece de sentido ya que, de igual forma, la dinámica del sistema es indescifrable.

Por ello es que se han formulado diversos métodos para calcular un valor de retardo con el que se pueda reconstruir un atractor lo más cercano al atractor verdadero posible. Los más comunes son: el método de autocorrelación y el método de información mutua.

(1) Autocorrelación

Como su nombre lo indica, es una medida del nivel de relación entre una variable en un instante de tiempo dado y el valor que adquiere esa misma variable en otro instante a través de una base lineal (Williams, 1997). Se considera que la correlación entre el primer estado de la serie y algún otro valor sucesivo disminuye conforme aumenta el retardo, por lo que se considera como el retardo óptimo el que corresponde a una correlación con un valor pequeño, de manera que al aumentar nuevamente este valor la dinámica dejará de estar correlacionada y por lo tanto la continuidad en el conocimiento de las propiedades del sistema se ve interrumpida. Con respecto a la magnitud de tal valor algunos autores consideran que la autocorrelación sea igual a 0. Otros recomiendan usar la cantidad $1/\varepsilon \approx 0.37$ (llamada tiempo de autocorrelación). La autocorrelación se calcula mediante la siguiente ecuación:

$$C(\tau) = \frac{1}{N - \tau} \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(x_{i+\tau} - \bar{x})}{s^2(x)} \quad \text{Ec. 2-6}$$

En donde s es la desviación estándar de los datos y \bar{x} es el promedio.

(2) Información mutua

Este método, al igual que la función de autocorrelación, cuantifica hasta qué punto se puede saber la información que se tiene de los valores retardados $x_{i+\tau}$ a partir del conocimiento de los valores de x_i , sin embargo, se diferencia por calcularse a través de probabilidad en lugar de usar una base lineal, razón por la que suele recomendarse por encima de la autocorrelación para trabajar con fenómenos no lineales. De manera simple implica que si los valores x_i y $x_{i+\tau}$ están fuertemente relacionados, entonces la

información mutua entre ellos es relativamente alta: por el contrario, esta será baja si la relación entre x_i y $x_{i+\tau}$ es débil.

Su planteamiento es el siguiente: si se considera que x_{max} y x_{min} son, respectivamente, los valores máximo y mínimo dentro de una serie temporal $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$, entonces la norma resultante $\|x_{max} - x_{min}\|$ se divide en un número j de intervalos iguales (de manera que resulten varios compartimientos o “cajas” del mismo tamaño las cuales envolverán al atractor reconstruido con diferentes retardos de tiempo). Se procede a calcular la siguiente expresión:

$$I(\tau) = - \sum_{h=1}^j \sum_{k=1}^j P_{h,k}(\tau) \ln \frac{P_{h,k}(\tau)}{P_h P_k} \quad \text{Ec. 2-7}$$

En donde P_h es la probabilidad de que x_i asuma un valor dentro del h -ésimo compartimiento, P_k es la probabilidad de que x_i asuma un valor dentro del k -ésimo compartimiento y $P_{h,k}(\tau)$ es la probabilidad conjunta de que x_i se encuentre dentro del h -ésimo compartimiento al mismo tiempo que $x_{i+\tau}$ lo esté en el k -ésimo compartimiento.

Como la información mutua entre el estado original y el estado con retardo decrece a medida que se alejan, llegará un punto en cual ambos estados dejen de compartir dicha información. Esto quiere decir que $I(\tau) \rightarrow 0$ a medida que el sistema evoluciona, por lo que, de acuerdo con el método, el retardo óptimo será el que se encuentre en dicha condición de frontera, lo que se traduce en el primer mínimo que se obtenga de la gráfica de información mutua vs tiempo de retardo (Kodba, Perc, & Marhl, 2004).

2.4.5.- Dimensión de incrustación

Una vez que se selecciona un valor de tiempo de retardo τ adecuado, lo siguiente es calcular el número de dimensiones o ejes que requiere el espacio de fase para desenvolver el atractor de manera correcta. A esa cantidad se le conoce como dimensión de incrustación m la cual a su vez sirve como indicador límite del nivel de complejidad en el fenómeno estudiado. Si bien en la vida real solo es posible visualizar de manera conjunta un máximo de 3 dimensiones, la dinámica real en un sistema de alta complejidad implícitamente necesita desenvolverse en un espacio de fase con mayor número de ejes,

lo que a su vez involucra un mayor número de variables. Aunque no se pueda ver, la interacción de las múltiples variables y a su vez los cálculos requeridos en la teoría del caos se desenvuelven en estos espacios imaginarios.

Una forma de ejemplificar el concepto de dimensión de incrustación se muestra en la Figura 2-11; consiste en imaginarse un objeto con volumen como un cubo, el cual podría ser análogo a un atractor de forma tridimensional cuyas trayectorias posibles se encuentran delimitadas por las paredes de dicho cubo, de manera que toda la dinámica posible no sale del mismo. Ahora, se desea conseguir un contenedor para dicho objeto el cual será análogo al espacio de fase requerido para encerrar al atractor. En la imagen se consideran dos ejemplos de contenedor: una lámina plana que hará referencia a un espacio de fase bidimensional (es decir, cuya dimensión utilizada para incrustar el cubo dentro sea $m = 2$) y un cilindro simulando un espacio de fase tridimensional (donde $m = 3$). Se encuentran dos problemas con el primer ejemplo pues la lámina no contendrá todos los estados posibles del atractor cúbico, ya que solo estará en contacto con una de sus caras y también, si se rota la lámina, el cubo caerá. Esto es fácilmente deducible debido a que se pretendió encerrar en un espacio de fase de dos dimensiones un objeto de mayor dimensión. Con respecto a la ilustración de la derecha, estos dos problemas no se presentan ya que todas las trayectorias que componen el cubo están perfectamente contenidas dentro del cilindro cerrado y seguirán estando adentro inclusive si se rotase. Es por ello que se dice que el objeto está incrustado en un espacio de fase adecuado, en donde se puedan desenvolver todos los movimientos posibles con cualquier condición inicial o variable y no necesita de objetos con mayor dimensión para que eso sea posible. A este espacio o “contenedor” se le conoce como espacio de incrustación.

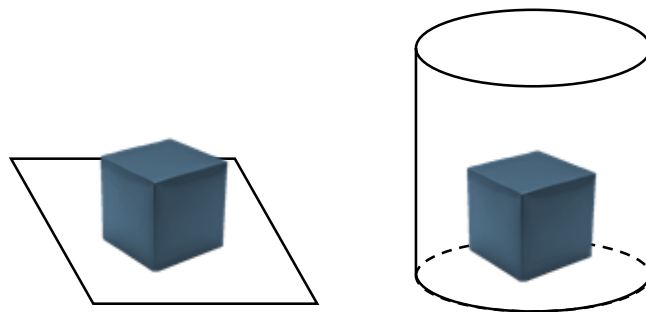


Figura 2-11 Ejemplo de espacio de incrustación para un objeto con volumen.

(1) Método del falso vecino más cercano

Para el cálculo de la dimensión de incrustación adecuada ha sido más común emplear el método del falso vecino más cercano. Este se fundamenta en la propiedad de plegabilidad que debe tener un atractor para poder representar la dinámica del sistema, es decir, por más que se estire o contraiga, las trayectorias no generarán irregularidades como cruces o bifurcaciones considerables entre ellas, esto debido a que los puntos que están cerca en el espacio de incrustación reconstruido tienen que permanecer lo suficientemente cerca también durante la siguiente iteración (Kodba, Perc, & Marhl, 2004). Esto quiere decir que si en el atractor reconstruido dentro de un espacio de fase de m dimensiones se tienen dos puntos $P(i)$ y $P(j)$ con una distancia ε muy corta entre ellos (por lo general menor a la desviación estándar de los datos), entonces esta no debe crecer de manera significativa en un espacio de fase de dimensiones $m + 1$ en adelante. Si esta condición no se cumple, entonces se dice que existe una falsa vecindad.

El concepto de falso vecino se puede ejemplificar con la Figura 2-12. En la imagen de la derecha se puede ver un espacio de incrustación con dimensión $m = 2$ en el cual se dibujan dos puntos denotados como A y B, separados por una distancia que se supone como muy corta. Debido a ello se podrían tratar como puntos vecinos. Sin embargo, en la imagen de la izquierda se muestran los mismos puntos en un espacio de incrustación tridimensional ($m = 3$). La diferencia sustancial radica en que ahora los objetos se ven más alejados entre sí, debido a que en el espacio de dos dimensiones no se consideró la distancia a lo largo del nuevo eje z y que daba solo una apariencia de cercanía que al final no describía la posición real. Se dice entonces que estos dos objetos eran falsos vecinos.

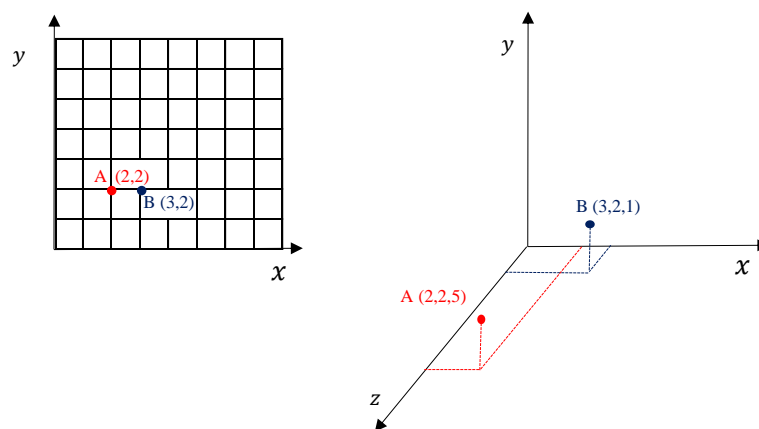


Figura 2-12 Ejemplo de falsos vecinos.

El ejemplo anterior es una versión simplificada de lo que se trabaja con series de tiempo compuestas por enormes cantidades de datos, ya que para cada uno de sus elementos x_i que las componen se busca un punto vecino x_j a una distancia igual o menor a un valor constante ε . Finalmente se calcula la distancia normalizada R_i de acuerdo con la siguiente ecuación:

$$R_i = \frac{\|x_i(m+1) - x_j(m+1)\|}{\|x_i(m) - x_j(m)\|} \quad \text{Ec. 2-8}$$

En donde $x_i(m+1)$ y $x_j(m+1)$ son las coordenadas con retardo de los puntos x_i y x_j , respectivamente, en el espacio de incrustación de dimensión $m+1$. Si el valor de R_i es mayor a un umbral R seleccionado, entonces los puntos se cuentan como vecinos falsos. Una vez cubiertos todos los estados del atractor en el espacio de incrustación m , se obtiene la fracción de falsos vecinos dividiendo la cantidad de puntos considerados como falsos vecinos entre la cantidad total de vecinos encontrados. Este procedimiento se repite para cada dimensión de incrustación hasta que la fracción de falsos vecinos sea insignificante. El valor de m en el que ocurre esta situación es el que se considera como la dimensión de incrustación adecuada para el atractor.

(2) Promedio de falsos vecinos

Si bien el método de falsos vecinos es el más común para determinar la dimensión de incrustación en una serie de tiempo, padece de la subjetividad en el criterio para considerar que un vecino es falso, de manera que para series de tiempo realistas puede no ser preciso, o arrojar un dato no correspondiente con la dimensión real requerida para que la dinámica de los sistemas se desenvuelva adecuadamente (Cao, 1997).

Liangyue Cao (1997) propuso un método para calcular la dimensión de incrustación mínima requerida en una serie de tiempo sin que se presente el problema de la subjetividad que tienen los métodos tradicionales. Su planteamiento es el mismo que el de la ecuación 2.8 correspondiente al método de falsos vecinos, sin embargo, en este método se destaca que un valor del umbral R que sea adecuado para todos los puntos de la trayectoria no puede ser determinado de manera apropiada, lo que conduce a que surjan

imprecisiones a la hora de identificar falsos vecinos, por lo tanto, para evitar este problema, se define la siguiente cantidad:

$$E(m) = \frac{1}{N - m\tau} \sum_{i=1}^{N-m\tau} R_i \quad \text{Ec. 2-9}$$

Como se puede notar, el método propuesto por Cao trabaja con el valor medio de todas las distancias normalizadas que se calculan en el método de falsos vecinos tradicional. Por esta razón es que también se le conoce como método de promedio de falsos vecinos. Ahora, para obtener el valor de la dimensión de incrustación buscado se procede a determinar la variación del parámetro $E(m)$ desde una dimensión m a $m + 1$, de manera que ahora se tiene:

$$E_1(m) = \frac{E(m + 1)}{E(m)} \quad \text{Ec. 2-10}$$

Conforme se trabaja con dimensiones de incrustación cada vez mayores, el valor de $E_1(m)$ deja de cambiar de manera significativa. Cuando se llega a este instante es que se llega al valor de m adecuado.

Hay que destacar también que el método de promedio de falsos vecinos también ha servido de utilidad para distinguir señales deterministas de señales aleatorias mediante el cálculo de la siguiente cantidad:

$$E^*(m) = \frac{1}{N - m\tau} \sum_{i=1}^{N-m\tau} |x_{i+m\tau} - x_{j+m\tau}| \quad \text{Ec. 2-11}$$

Al igual que el valor de $E(m)$, se procede a calcular la variación que tiene el resultado de la ecuación 2.11 para distintas dimensiones de incrustación, de esta manera se tiene:

$$E_2(m) = \frac{E^*(m + 1)}{E^*(m)} \quad \text{Ec. 2-12}$$

2.5.- Invariantes dinámicas del caos

Para poder identificar la presencia de comportamiento caótico en series de tiempo, se lleva a cabo el cálculo de las invariantes dinámicas, que son parámetros que no cambiarán, aunque el atractor se trace en espacios de fase con distintas dimensiones de incrustación. Estos parámetros son principalmente: la dimensión de correlación, la entropía y el máximo exponente de Lyapunov, los cuales describen propiedades especiales que permiten saber si una serie será caótica.

2.5.1.- Dimensión de correlación

A lo largo del tiempo, muchos autores han asociado el concepto de dimensión en la teoría del caos con el poder o el exponente, que a su vez representa una característica importante de los sistemas dinámicos ya que especifica la velocidad en la que varía una función con el tamaño de la escala de medición (Williams, 1997). Debido a ello, es fundamental determinar la dimensión exponencial que rige el movimiento de las trayectorias. Cabe destacar que existen múltiples tipos de dimensión las cuales tienen distintas finalidades, aunque las más destacadas en la teoría del caos son:

- Determinar la geometría del atractor (por ejemplo, dimensión de similitud, dimensión de capacidad, dimensión de Hausdorff-Besicovich).
- Calcular aspectos informativos subyacentes a la geometría del atractor (dimensión de información y dimensión de correlación).

Los tipos de dimensión más empleados en la teoría del caos tienen principalmente la segunda función mencionada.

La dimensión de información (D_1) mide la frecuencia con la que el sistema dinámico visita diferentes regiones del espacio de fase a lo largo del tiempo sobre intervalos de igual longitud (equivalente a poner una cuadrícula encima del atractor tal como se ve en la parte izquierda de la **Figura 2-13**), de manera que refleja la tasa de variación de la información con el aumento en la precisión ϵ de la herramienta usada para la medición de dichas regiones. Se define a través de:

$$D_1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \left| \frac{I_r}{\log_2 \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)} \right| \quad \text{Ec. 2-13}$$

Donde I_ε es la cantidad de información necesaria para describir la trayectoria, la cual está dada por la expresión:

$$I_\varepsilon = \sum_{i=1}^{N_s} P_i \log_2 \left(\frac{1}{P_i} \right) \quad \text{Ec. 2-14}$$

En la que P_i es la probabilidad de que el sistema atravesase el i -ésimo estado, mientras que N_s es el número total de estados de tamaño ε donde $P_i \neq 0$.

La dimensión de correlación (D_2) es un parámetro que implica lo mismo que la dimensión de información, sin embargo, mide la frecuencia con la que una trayectoria visita una vecindad alrededor de un punto determinado, el cual se toma como punto de referencia para cada iteración, de manera que el cálculo se distingue por cambiar la herramienta de medición para cada punto de la trayectoria en lugar de usar una partición uniforme. Es por ello que se considera una medida más fina que la dimensión de información y por ende la más utilizada para el análisis caótico. Cabe mencionar que una dimensión de correlación no entera indica comportamiento caótico de la serie (Sawada & Sawada, 1985). Para determinarla se sigue el siguiente algoritmo:

- Se asigna la distancia r de la herramienta de medición que, por lo general, corresponde al radio de una esfera que se coloca tomando un punto x_i de la trayectoria como marco de referencia (como se muestra en la parte derecha de la Figura 2-13), por lo que la distancia r representa el tamaño de una vecindad alrededor de dicho punto.
- Se determina la distancia entre el punto de referencia x_i y cada uno de sus puntos vecinos x_j que se ubiquen dentro de la esfera de radio r .
- Con cada distancia obtenida se calcula la suma de correlación mediante la expresión:

$$C_r = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N G(\varepsilon - |x_i - x_j|) \quad \text{Ec. 2-15}$$

Donde G es la función de Heavyside, la cual tendrá el valor $G = 0$ cuando $\varepsilon - |x_i - x_j| < 0$ o $G = 1$ si $\varepsilon - |x_i - x_j| \geq 0$.

- Este procedimiento se repite para cada punto de la trayectoria y probando con distintos valores de r .

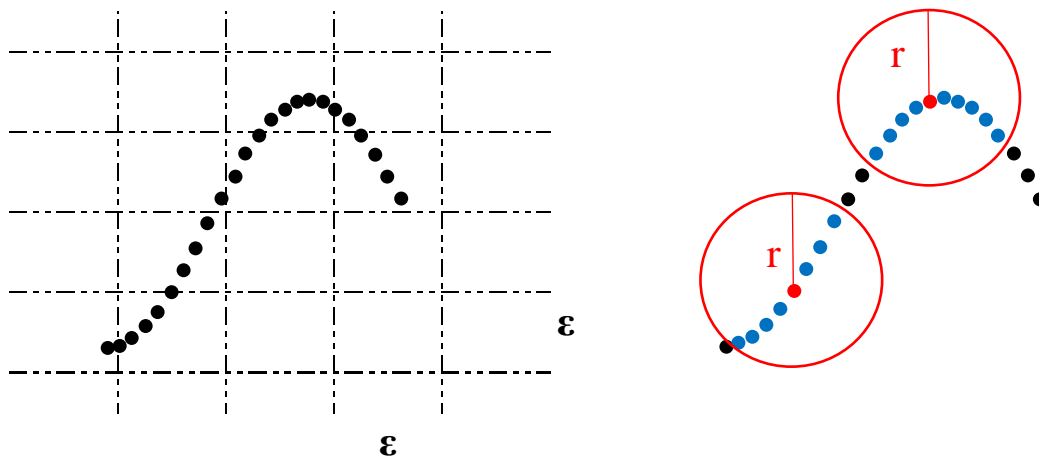


Figura 2-13 Puntos de referencia de una trayectoria para el cálculo de a) dimensión de información D_1 b) dimensión de correlación D_2 .

Cada suma de correlación C_r que se obtiene se grafica con su respectivo valor de radio r en un diagrama bilogarítmico, de manera que, al usar la relación de ley de potencia $C_r \propto r^{D_2}$, D_2 representa la pendiente de la gráfica. Esta cantidad es lo que se conoce como dimensión de correlación. Cabe señalar que la dimensión de correlación también puede usarse para estimar la dimensión de incrustación a partir del teorema de incrustación de retardo de Takens, mediante la condición de $m \geq 2D_2 + 1$ (Grassberger & Procaccia, 1983b).

2.5.2.- Entropía de correlación

El término de entropía es uno de los conceptos más interesantes y complejos dentro de la física. De manera más generalizada tiende a asociarse con el desorden que presentan

las partículas de un sistema debidas al movimiento de los átomos a partir del calor (lo que conforma la segunda ley de la termodinámica), sin embargo, existen muchas más interpretaciones asociadas con el término que derivan en otros campos como la estadística y la teoría de la información. Cabe mencionar que, al hablar de desorden de los elementos o bien, de los datos que conforman un sistema, también se puede hacer una analogía para describir el nivel de complejidad que existe en dicho sistema, por esta razón el concepto de entropía ha sido incluido como uno de los componentes dentro del análisis caótico.

De manera listada el concepto de entropía puede ser interpretada a partir de cualquiera de las siguientes definiciones (Williams, 1997):

- A mayor entropía hay menor proporción de energía que puede ser aprovechada para realizar un trabajo, ya que la mayoría se disipa.
- Involucra un desorden y desorganización de los elementos del sistema.
- Los eventos que componen el sistema tienen una baja probabilidad de ser seleccionados, aunque esta será igual para todos, de manera que existe una relación inversa entre la entropía y la probabilidad. Por esta misma propiedad existe mayor uniformidad en la distribución de los datos para entropía alta, ya que al agrupar los componentes en sitios iguales la probabilidad de seleccionar cada uno es baja.
- Está asociada con un grado de incertidumbre máxima; no existe certeza ni confiabilidad en la predicción de los resultados. Debido a esto, una alta entropía se puede apreciar en fenómenos aleatorios.
- Existe mucha información y resultados posibles, lo que a su vez genera una mayor precisión en los datos.
- Cada estado del sistema requiere de una gran cantidad de información para ser determinado.

Si bien una de las primeras formas de medir cuantitativamente este parámetro fue la probabilidad de la entropía propuesta por Ludwig Boltzmann, el aspecto que ha sido tomado en cuenta por la teoría del caos ha sido asociar la entropía como una medida de la información. Este último enfoque fue desarrollado por Claude Shannon, quien propuso una expresión para determinar la información e incertidumbre de los sistemas, la cual,

modificada ligeramente para ser una medida de la entropía H (conocida ahora como entropía de la información o de Shannon), está dada por:

$$H = \sum_{i=1}^N P_i \log\left(\frac{1}{P_i}\right) \quad \text{Ec. 2-16}$$

Donde P_i es la probabilidad de que un elemento de la serie esté en cualquiera de los N estados del espacio de fase. Sin embargo, esta medida de la entropía no es suficiente para identificar el caos, por lo que en base a la entropía de la información fue desarrollada la entropía de Kolmogrov-Sinai K_1 , la cual se define como la entropía promedio por unidad de tiempo en las condiciones límite en la que el tiempo aumenta hacía el infinito al mismo tiempo que el ancho de las escalas de medición tiende a cero (Williams, 1997). En términos matemáticos se expresa mediante:

$$K_1 = \lim_{r \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow \infty} (H_t - H_{t-1}) \quad \text{Ec. 2-17}$$

Donde H_t es la entropía de Shannon calculada para el instante de tiempo t y H_{t-1} es la correspondiente al estado inmediato anterior; r por su parte es el intervalo de la partición que se hace en el espacio de fases, de la misma manera que en el cálculo de la dimensión de información D_1 . La idea principal que se plantea en la Ec. 2-17 involucra que, debido a la sensibilidad a las condiciones iniciales en un sistema caótico, no se puede predecir un estado futuro con la misma certeza que el estado inicial, por lo tanto, se contará con menos cantidad de información que la que se conocía al principio, pero si se mide la información para cada estado por separado, tal información no se perderá. Tal información recuperada es la que se mide con la entropía de Kolmogrov-Sinai, por lo tanto, el valor de K_1 describirá la tasa media de creación de información (Galka, 2000).

Sin embargo, para series temporales es muy difícil llevar a cabo el cálculo de la entropía de Kolmogrov-Sinai puesto que la metodología requiere que se conozca de manera explícita el modelo del sistema dinámico (Grassberger & Procaccia, 1983a). Ante tal inconveniente, han surgido alternativas aproximadas que permiten agilizar el cálculo y a su vez proporcionar la misma funcionalidad de identificar el caos en la serie temporal.

La más recomendable de estas es la entropía de correlación K_2 (Kantz & Schreiber, 2003), ya que se calcula de manera análoga a la dimensión de correlación D_2 , puesto que se hace uso de la relación que tienen las sumas de correlación de un estado presente $C_r(m, r)$ y la de su respectiva imagen $C_r(m + 1, r)$ en un espacio de fase de dimensión inmediata superior, de manera que:

$$K_2 = \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \ln \frac{C_r(m, r)}{C_r(m + 1, r)} \quad \text{Ec. 2-18}$$

Los resultados tanto de K_1 como de K_2 describen diferentes tipos de sistemas dependiendo de su valor, pues entre más cercano se encuentre a cero, el sistema descrito presenta un comportamiento más determinista y cercano a la probabilidad de certeza absoluta ($P_i = 1$); por el contrario, entre más se aleje, el fenómeno descrito resulta más complejo, por lo que un valor constante positivo es propio de un fenómeno caótico y se convierte en aleatorio si crece hasta acercarse a un valor infinito.

2.5.3.- Exponentes de Lyapunov

El máximo exponente de Lyapunov identifica el crecimiento exponencial repentino de la separación de trayectorias inicialmente cercanas dentro del atractor (Kantz & Schreiber, 2003). De esta manera el cálculo de este valor permite visualizar si existe una sensible dependencia a las condiciones iniciales del sistema, que es la principal característica del caos. La sensibilidad a las condiciones iniciales implica que habrá una divergencia de trayectorias ΔS la cual se describirá mediante una ley exponencial (Sawada & Sawada, 1985), ya que, tal como se menciona en la sección 2.5.1.-, especifica adecuadamente la velocidad de crecimiento promedio en un sistema. Para este aspecto dicha ley se describe como:

$$\Delta S = \Delta S_0 e^{\lambda t} \quad \text{Ec. 2-19}$$

En esta ecuación λ representa la tasa de crecimiento antes mencionada, la cual se denomina como exponente de Lyapunov. Como puede notarse, la Ec. 2-19 involucra solo conocer la divergencia de segmentos de trayectorias vecinas, el cual es un enfoque recomendado ante la falta de ecuaciones que definan la dinámica. Sin embargo, el cálculo

suele estar limitado solo al exponente más grande ya que el atractor sobre el que se calculan las trayectorias solo representa los colectores inestables del sistema, por lo que tasas de crecimiento menores correspondientes a regiones estables son dejadas por fuera (Galka, 2000).

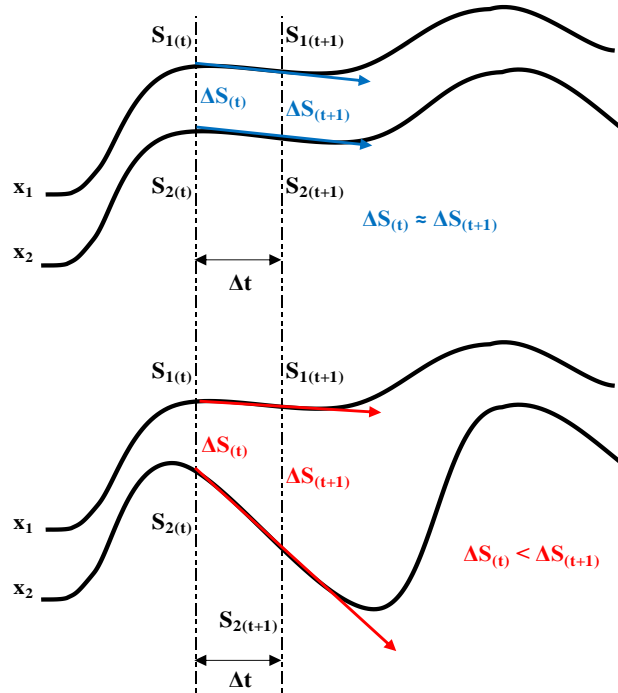


Figura 2-14 Divergencia de trayectorias cercanas inicialmente.

Para comprender la relevancia que tiene el exponente de Lyapunov como indicador de la presencia de comportamiento irregular a partir de las condiciones iniciales, en la Figura 2-14 se muestran dos ejemplos de trayectorias inicialmente cercanas entre sí (suponiendo que los valores de x_1 y x_2 sean casi iguales). En la parte superior se observa un comportamiento regular de las trayectorias S_1 y S_2 puesto que, ambas curvas mantienen una distancia de ΔS que se mantendrá casi igual al transcurrir un instante de tiempo Δt , por lo que su tasa de divergencia será nula, o inclusive tener un valor negativo si las trayectorias se acercan más entre sí, lo que equivale a $\lambda = \frac{1}{t} \ln(\Delta S_{(t+1)} - \Delta S_{(t)}) < 0$, lo que indica que el espacio de fase se comprime. Por otro lado, en la parte inferior se puede percibir a simple vista que existe una divergencia notable ya que llegará un punto en el cual las trayectorias no se mantengan equidistantes, lo que a gran escala representa

incertidumbre y por lo tanto un comportamiento irregular en la dinámica que es precisamente con el que se identifica el caos. En este caso $\lambda = \frac{1}{t} \ln(\Delta S_{(t+1)} - \Delta S_{(t)}) > 0$. De esta manera, si el cálculo del máximo exponente de Lyapunov arroja un valor positivo, se considera que el sistema en cuestión presentará un comportamiento en el que el espacio de fase se extiende.

Por lo general se calculan las tasas de divergencia exponencial para cada estado del sistema, de manera que se obtienen curvas que describen el comportamiento para cada dimensión de incrustación. Una vez que las curvas se compilan gráficamente se procede a calcular la pendiente general de las mismas, ya que, tal como se mencionó anteriormente, la dimensión de crecimiento en una ley de potencia es equivalente a su exponente. Es por esta razón que se obtienen tantos exponentes de Lyapunov como dimensiones tenga el sistema.

2.6.- Tratamiento preliminar de series temporales

Uno de los detalles más importantes a tener en consideración con el uso de los acelerogramas es tener en cuenta que la naturaleza de los datos obtenidos en la estación sísmica casi no es consistente con el fenómeno sísmico como tal. Esto quiere decir que los datos suelen venir alterados por fenómenos externos que son casi imposibles de controlar. Estos pueden ser la pérdida de información debida al tamaño de los intervalos (puesto que la serie temporal es discreta) y a la intromisión del ruido, ya sea por vibraciones generadas por el paso de vehículos o personas cerca de la estación sísmica o por el manejo inadecuado de los instrumentos de medición. Es por ello que múltiples estudios han propuesto algunos tratamientos para los registros con el fin de volverlos aptos para su utilización.

2.6.1.- Corrección de línea base

Esta se hace considerando el hecho de que los valores del acelerograma pueden estar desplazados respecto a la línea de aceleración igual a cero debido a la nivelación inadecuada del acelerógrafo. Si bien puede parecer despreciable en términos de

aceleraciones, puede generar inconsistencias cuando se calculan desplazamientos y velocidades comúnmente mediante integración numérica.

2.6.2.- Filtrado de la señal

Una vez realizada la corrección de línea base en los datos, se atenderá la repercusión del ruido externo, tanto de alta como de baja frecuencia. Para eliminarlos se recurre a utilizar distintos tipos de filtrado en el dominio de las frecuencias. Esto seleccionando las frecuencias de corte adecuadas, tanto mínima como máxima (F_{min} y F_{max} , respectivamente), o ambas. En términos generales, el filtrado de la señal se hace multiplicando los valores de la transformada de Fourier del acelerograma original por una función que reduzca la amplitud del espectro de Fourier que se encuentre fuera de los límites de frecuencia establecidos. Entre los distintos tipos de filtrado se encuentran principalmente:

- Filtros pasa-baja.

$$H_{LP}(f) = 1/\sqrt{1 + (f/F_{max})^{2N}} \quad Ec. 2-20$$

- Filtros pasa-alta

$$H_{HP}(f) = 1/\sqrt{1 + (F_{min}/f)^{2N}} \quad Ec. 2-21$$

- Filtros band-stop

$$H_{BS}(f) = H_{LP} + H_{HP} \quad Ec. 2-22$$

- Filtros pasa-banda, dados por:

$$H_{HP}(f) = 1/\sqrt{1 + (f^2 - F_{min}F_{max}/f(F_{max} - F_{min}))^{2N}} \quad Ec. 2-23$$

2.6.3.- Intensidad de Arias

Este parámetro fue propuesto por el investigador chileno Arturo Arias en 1969 y se define como la energía por unidad de peso disipada por un conjunto de osciladores de

un grado de libertad (Schmidt, 2008). De esta manera, la intensidad de Arias sirve como un parámetro que permite evaluar el riesgo sísmico de las estructuras dentro de un área determinada. Está definida por la siguiente ecuación:

$$IA = \frac{\pi}{2g} \int_0^t a_s^2(t) dt \quad \text{Ec. 2-24}$$

Donde a_s es la aceleración del suelo durante el sismo.

Se suele considerar que la fase intensa del sismo se da en la porción entre la que se desarrolla el 5% y el 95% de la intensidad de Arias, por lo que en este trabajo se desecharán los datos del acelerograma que se encuentren fuera de este rango. La explicación a esto radica en el hecho de que los datos de baja aceleración que se registran al principio y al final del evento sísmico suelen verse afectados en mayor medida por el ruido (a su vez debido a imprecisiones en la instrumentación o a movimientos externos) por lo que pueden corresponder poco o nada con la naturaleza del movimiento debido al sismo. De esta manera lo que se hará en este trabajo será un análisis caótico únicamente de la fase intensa de los sismos.

CAPÍTULO 3.- METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

3.1.- Datos de la estación sísmica Paseo Bravo

Como consecuencia de los sismos de septiembre de 1985, se emprendió el proyecto de implementar una red de acelerógrafos para capturar la información de movimientos fuertes del suelo a nivel nacional. En la capital poblana, la entonces Escuela de Ingeniería Civil y Topográfica de la UAP realizó la instalación de tres acelerógrafos digitales sobre suelos de diferentes características físicas. Una de estas estaciones, destinada a registrar información de comportamiento de suelos de compresibilidad media, se colocó en el centro histórico de la ciudad de Puebla, más específicamente en la zona conocida como Paseo Bravo (véase Figura 3-1), razón por la que a esta estación se le denominó con este nombre (RACP-II/BUAP-10, 2011).

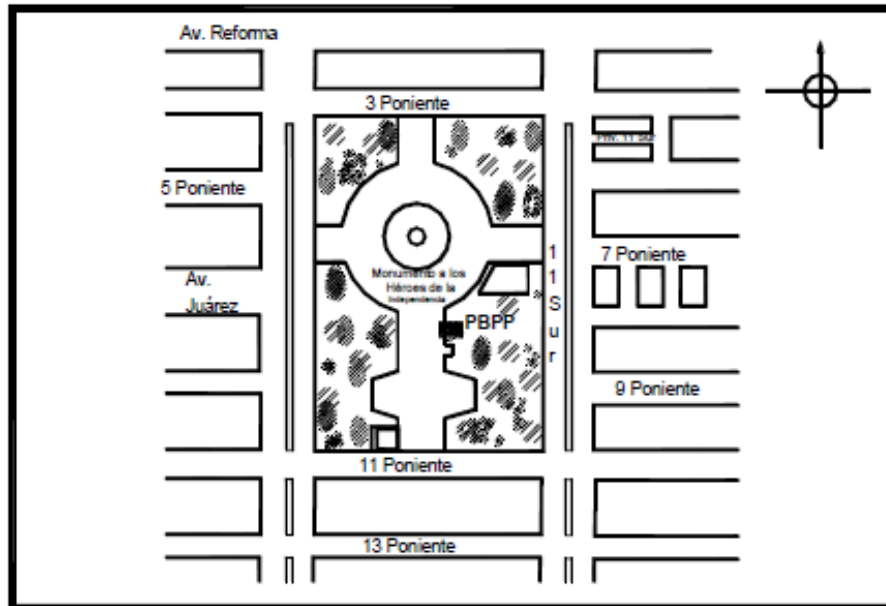


Figura 3-1 Ubicación de la estación sísmica Paseo Bravo (RACP-II/BUAP-10, 2011)

Cabe señalar que se eligió hacer el análisis no lineal con los datos de esta estación debido principalmente a que pertenece a una zona céntrica de gran interés, además de que se cuenta con información estratigráfica con la cual se espera que en un futuro se lleven a cabo correlaciones con los resultados del análisis caótico y las propiedades del suelo sobre el que se asienta la estación sísmica, el cual consiste principalmente en intercalaciones de suelo blando (arcilla) y suelo rígido (travertino) característico de la zona centro-oriente del municipio de Puebla.

La estación cuenta con un aparato ETNA serie 1533 con amortiguamiento de 0.7 capaz de obtener hasta 100 muestras por segundo, es de tipo subterránea, en la cual el equipo se encuentra instalado directamente sobre un pedestal de concreto desligado de la losa de piso. El esquema de la estación se muestra en la Figura 3-2.

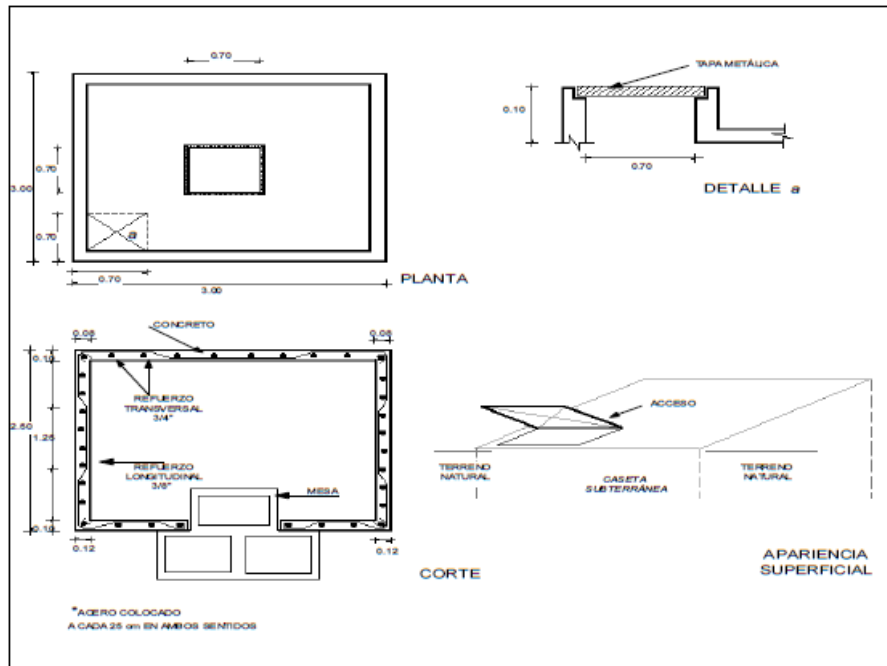


Figura 3-2 Características constructivas de la estación sísmica Paseo Bravo (RACP-II/BUAP-10, 2011)

3.2.- Selección de registros

De todos los registros recogidos por la estación sísmica (RAII-UNAM, 2018) solamente se seleccionaron 15 eventos, cuyas características se presentan en la Tabla 3-1,

mientras que sus ubicaciones se muestran en la Figura 3-3. Los eventos seleccionados fueron aquellos que tuvieran una magnitud mayor a 5 y correspondencia con eventos captados por otras estaciones, con el fin de que se puedan hacer correlaciones futuras con los comportamientos que se detecten para distintos tipos de suelo. También es importante señalar que solo se trabajará con eventos a partir del 2011 que fue el año en el que la estación tuvo su más reciente renovación.

Tabla 3-1 Datos generales de los registros acelerométricos seleccionados

Registro	Archivo	Fecha	Magnitud	Profundidad (km)	Distancia a la estación (km)	Muestras
11-1	PBP21102.251	25/02/2011	6.0	135	349	38600
11-2	PBP21104.071	07/04/2011	6.7	167	457	44800
11-3	PBP21105.051	05/05/2011	5.5	11	280	35791
11-4	PBP21112.111	11/12/2011	6.5	58	230	46600
12-1	PBP21203.201	20/03/2012	7.4	16	311	64400
12-2	PBP21204.021	02/04/2012	6.0	10	309	34000
12-3	PBP21209.221	22/09/2012	5.4	2	312	26000
12-5	PBP21211.151	15/11/2012	6.1	40	263	37800
13-1	PBP21306.161	16/06/2013	5.8	60	157	35400
14-1	PBP21405.241	24/05/2014	5.7	18	315	33600
14-2	PBP21407.291	29/07/2014	6.4	117	310	48200
15-1	PBP21503.201	20/03/2015	5.4	61	127	36600
17-1	PBP21709.081	08/09/2017	8.2	45.9	645	67800
17-2	PBP21709.191	19/09/2017	7.1	38.5	93	59000
17-3	PBP21709.231	23/09/2017	6.1	22	430	30800

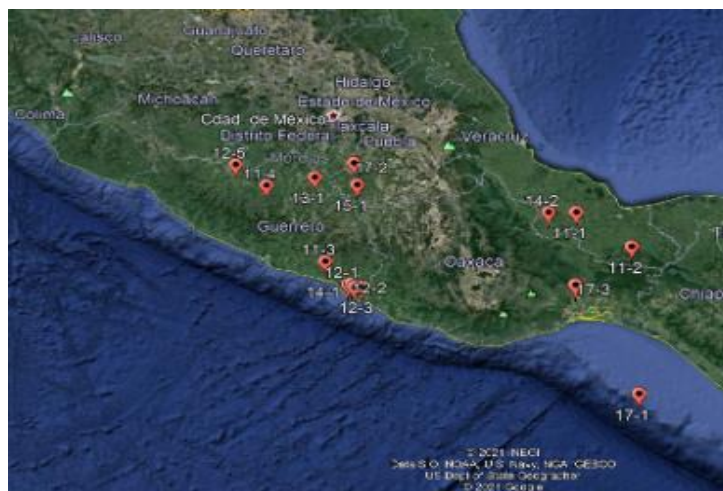


Figura 3-3 Localización geográfica de los eventos seleccionados

Además, se trabajará sólo para los canales de aceleración horizontal en las direcciones N00W y N90W, de manera que se descartará el uso del canal de aceleraciones verticales. La intención es detectar si existe uniformidad relativa con los resultados para aceleraciones horizontales, el cual funcionará como un buen indicador para señalar qué tan independientes son las aceleraciones captadas para el mismo evento en relación con la dirección del movimiento sísmico.

3.3.- Tratamiento preliminar de las series temporales

Cada uno de los acelerogramas seleccionados se sometió a un tratamiento preliminar con la finalidad de eliminar lo más posible tanto la presencia de ruido como de la redundancia generada por datos que sean poco significativos. Para este propósito, se emplea el programa de Seismo Signal (Antoniou & Pinho, 2016), el cual tiene la facilidad de trabajar con series de tiempo. Como se explica en la sección 2.6.- , los procesos que componen el tratamiento preliminar son:

- Corrección de línea base, la cual será de tipo lineal (preestablecida por el programa). En la Figura 3-4 se muestra como ejemplo la aplicación de la corrección de línea base sobre el acelerograma 11-1 del canal horizontal N00W. El programa permite visualizar la diferencia entre la serie original (en gris) y la nueva serie con el tratamiento especificado (en azul).

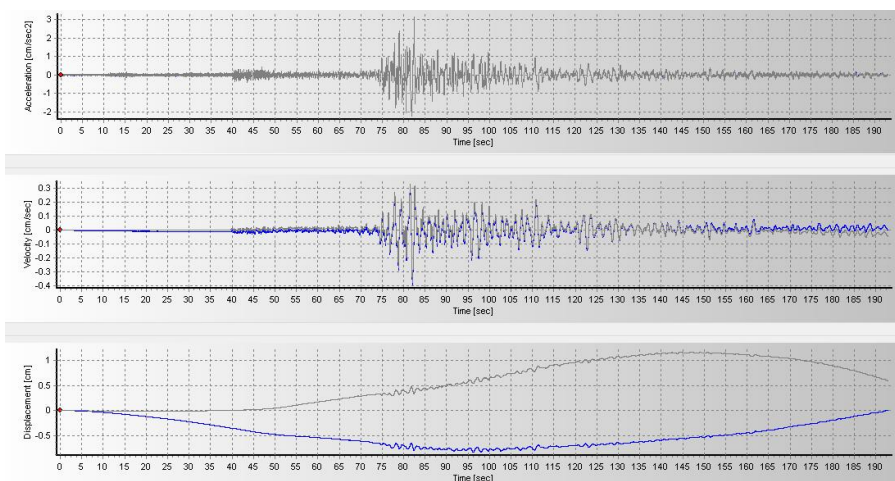


Figura 3-4 Corrección de línea base aplicada en el registro 11-1 dirección N00W

- Filtrado. Se usará un filtro de tipo Pasa banda, cuyas frecuencias a eliminar serán las que se encuentren fuera del intervalo (0.08,25) debido a que las frecuencias en los fenómenos sísmicos por lo general oscilan estos valores (rango de respuesta de los equipos antiguos). De igual forma, la aplicación del filtro especificado en el acelerograma 11-1 dirección N00W con el programa se aprecia en la Figura 3-5.

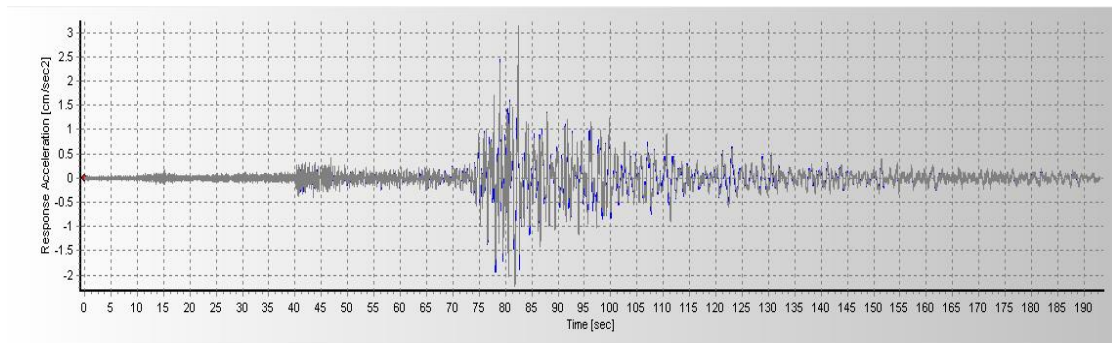


Figura 3-5 Filtro pasa banda aplicado en el registro 11-1 dirección N00W

- Eliminación de intervalos con Intensidad de Arias poco significativa, es decir aquellos datos que se encuentren fuera de la fase intensa del sismo. Esto con la finalidad de reducir el tamaño de las series de tiempo y así evitar largos tiempos en el procesamiento de las señales. En la Figura 3-6 se puede observar la variación en la Intensidad de Arias del sismo 11-1 dirección N00W. En líneas rojas se señalan los límites de la fase intensa (5% y 95%); los datos por debajo y por encima de sus respectivos límites se desechan, de manera que, para el posterior análisis no lineal de la señal, solo se trabaja con el rango de datos que se encuentra entre las líneas azules verticales. Puede notarse que efectivamente, gran parte de la serie registrada es poco significativa para los cálculos que posteriormente se emplean para fines de diseño estructural (puesto que, hasta ahora, solo se requieren los valores máximos de la aceleración).

En la Tabla 3-2 se encuentra el número de datos que representan la fase intensa de cada evento sísmico y en cada dirección, así como también la aceleración máxima capturada.

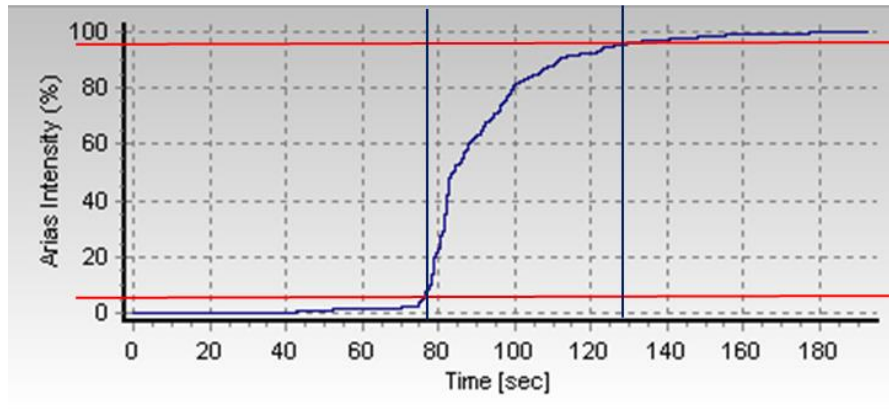


Figura 3-6 Intensidad de Arias del registro 11-1 dirección N00W

Tabla 3-2 Cantidad de muestras de la fase intensa de los sismos

Registro	Magnitud	Muestras iniciales	N00W		N90W	
			Muestras	$a_{\text{máx}}$ (cm/s^2)	Muestras	$a_{\text{máx}}$ (cm/s^2)
11-1	6.0	38600	10296	3.14	10488	-2.71
11-2	6.7	44800	10018	3.48	11306	-3.13
11-3	5.5	35791	7818	2.45	8470	2.07
11-4	6.5	46600	13166	-3.74	12123	6.58
12-1	7.4	64400	13124	13.52	12933	-21.81
12-2	6.0	34000	8994	2.97	9277	-3.18
12-3	5.4	26000	8881	0.77	9408	-1.25
12-5	6.1	37800	10456	1.44	11587	-2.80
13-1	5.8	35400	11898	-2.15	13569	-2.92
14-1	5.7	33600	8039	2.75	7382	-3.04
14-2	6.4	48200	6302	11.93	9182	-5.74
15-1	5.4	36600	9785	3.29	22795	3.49
17-1	8.2	67800	13191	-19.43	11684	18.97
17-2	7.1	59000	5566	93.35	5435	-98.68
17-3	6.1	30800	12929	2.34	11413	2.32

Los registros acelerométricos de la estación con el tratamiento preliminar se encuentran en la sección de Anexos.

3.4.- Aplicación de las herramientas de la teoría del caos en registros acelerográficos

Una vez que se cuenta con los registros seleccionados se agrupan en una sola carpeta para posteriormente ser analizados a través de códigos de programación elaborados mediante el lenguaje de Python. Cabe señalar que estos códigos fueron hechos con base a la librería de NoLiTSA, además de que también se hace uso de algunas de las herramientas de la paquetería de TISEAN (Hegger, Kantz, & Schreiber, 1999).

Tabla 3-3 Herramientas aplicadas para el análisis caótico

Cálculo	Herramienta
Autocorrelación Información mutua Reconstrucción del espacio de fase	Librería: NoLiTSA Códigos importados: <i>delay, noise y utils.</i>
Promedio de Falsos Vecinos	Librería: NoLiTSA Códigos importados: <i>dimension.</i>
Suma de correlación C_r Dimensión de correlación D_2 Entropía de correlación K_2	Para el cálculo: Librería: TISEAN Códigos importados: <i>d2.</i> Para los gráficos: Librería: NoLiTSA Códigos importados: <i>utils.</i> Librería: intertools Códigos importados: <i>groupby.</i>
Máximo exponente de Lyapunov	Librería: TISEAN Códigos importados: <i>lyap_spec</i>

3.5.- Comparaciones entre resultados

Un punto importante de este trabajo consiste en hacer comparaciones con trabajos previamente estudiados para respaldar conclusiones significativas a partir de la interpretación de los resultados obtenidos. Las series con las que se hacen las comparaciones pueden observarse gráficamente en la Figura 3-7 y consisten en lo siguiente:

- Registros acelerográficos provenientes del sismo de Chi Chi (Yang, Yang, & Zhang, 2012).

- Un electrocardiograma obtenido de la base de datos Polisomnográfica del MIT de acceso público (Perc, 2005) y el cual describe los primeros 10 segundos de actividad cardiaca regular de una persona dormida sin ataques de apnea.
- Un registro de la marcha humana proporcionado por el MIT (Perc, 2005) que recoge los datos de sensores colocados dentro del zapato de una persona, los cuales monitorean la variación del peso corporal que actúa sobre los pies al momento de caminar. Tanto en esta serie como en el electrocardiograma las unidades de los datos son dadas por el voltaje captado por los dispositivos de medición de los datos.

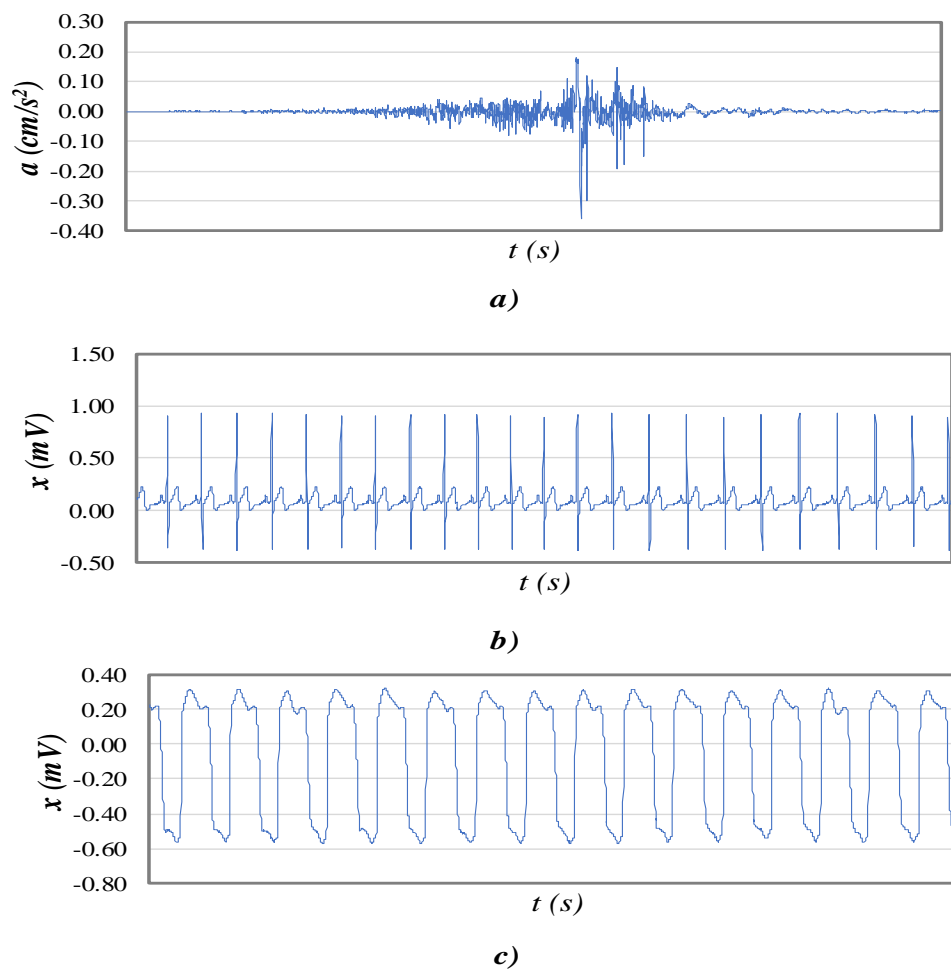


Figura 3-7 Series de tiempo obtenidas de a) sismo de Chi Chi, b) electrocardiograma, c) marcha humana

3.6.- Diagrama de flujo

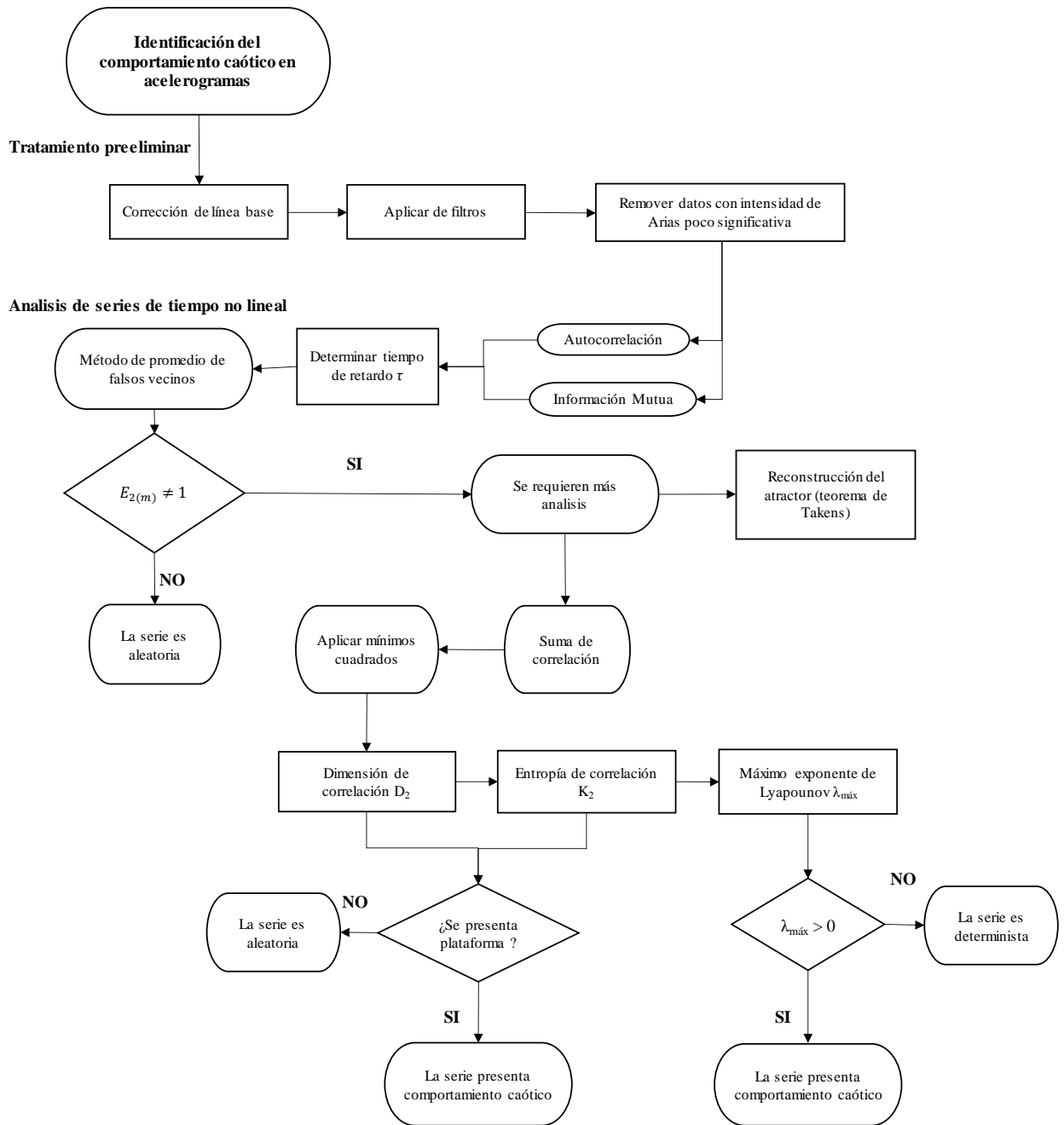


Figura 3-8 Diagrama de flujo de la metodología de trabajo.

CAPÍTULO 4.- RESULTADOS Y DISCUSIONES

4.1.- Resultados

Los resultados de la aplicación de los códigos de programación sobre las series temporales previamente seleccionadas se darán a conocer en esta sección, de acuerdo con el objetivo principal planteado desde un inicio, el cual es, detectar si existen indicios de comportamiento caótico en los registros de aceleraciones sísmicas representativos de la zona céntrica de la ciudad de Puebla.

Una vez completado el tratamiento preliminar de las series, se comienza con el cálculo del tiempo de retardo óptimo empleando los métodos de autocorrelación e información mutua.

Con el método de autocorrelación se obtienen los correlogramas que se muestran en las Figuras

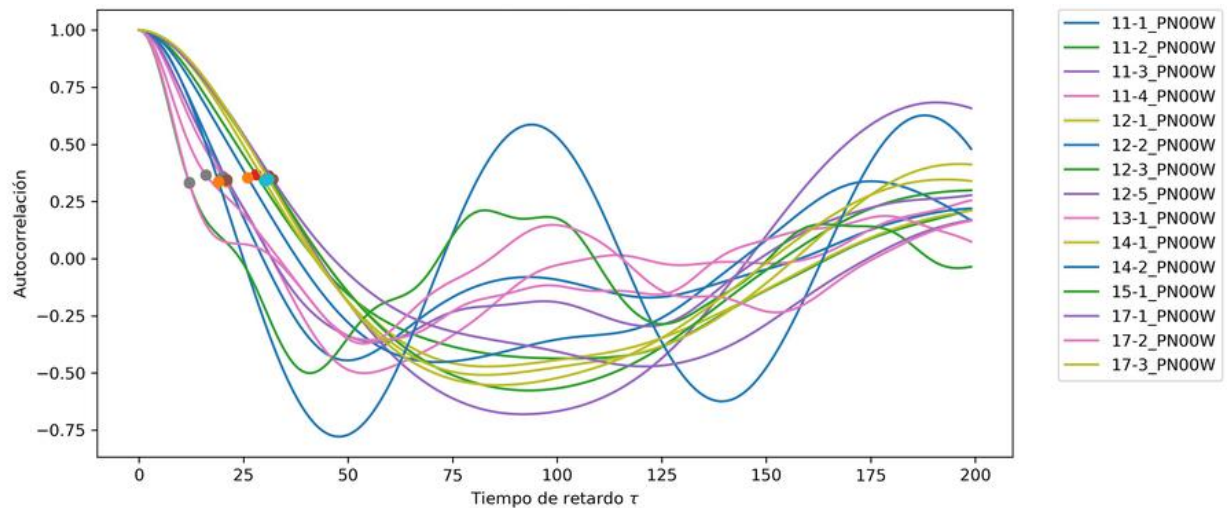


Figura 4-1 y **Figura 4-2**. Como se explicó en la sección 2.4.4.-, el tiempo de retardo óptimo se considera como el valor correspondiente al llamado tiempo de autocorrelación, el cual ocurre cuando la autocorrelación alcanza la magnitud de $1/e$ (aproximadamente 0.3678).

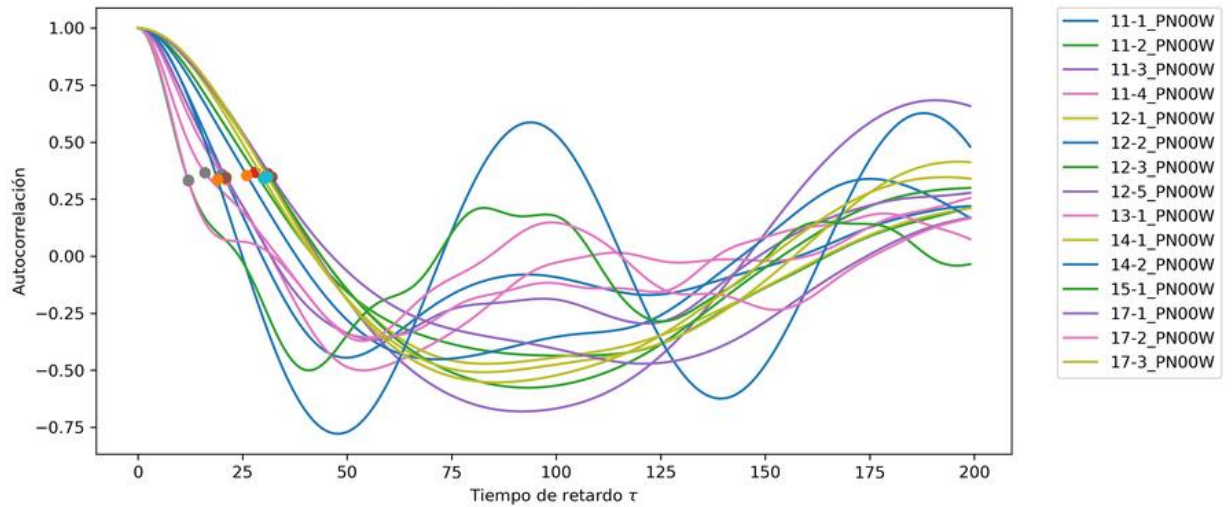


Figura 4-1 Correlogramas de los sismos de Paseo Bravo dirección N00W

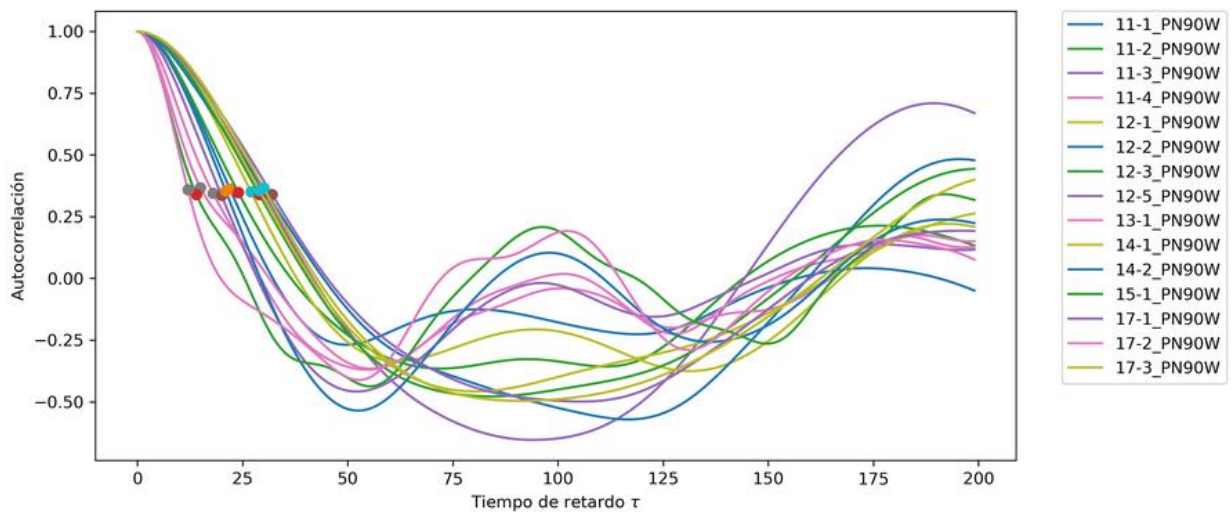


Figura 4-2 Correlogramas de los sismos de Paseo Bravo dirección N90W

Dentro de los correlogramas es posible observar en los puntos remarcados de las figuras anteriores los valores que corresponden a los tiempos de retardo óptimo. El tiempo de retardo de mayor magnitud es para la serie 17-1 con un valor de aproximadamente $\tau_{Ac} \approx 30$ tanto para el canal N00W como para el N90W, mientras que por otro lado el menor tiempo de retardo se obtuvo del registro 15-1 siendo su valor de $\tau_{Ac} \approx 15$ de igual manera para ambas direcciones, por lo tanto, los resultados a partir del método de autocorrelación parecen ser independientes de la dirección del sismo, a pesar de que luego de superar el valor óptimo cada correlograma presenta un comportamiento notablemente

distinto. Esta cualidad puede ser un indicador de confianza importante del tiempo de retardo que posteriormente es utilizado en el cálculo de las invariantes dinámicas.

Aplicando el método de información mutua se obtienen los resultados mostrados

de

las

Figuras

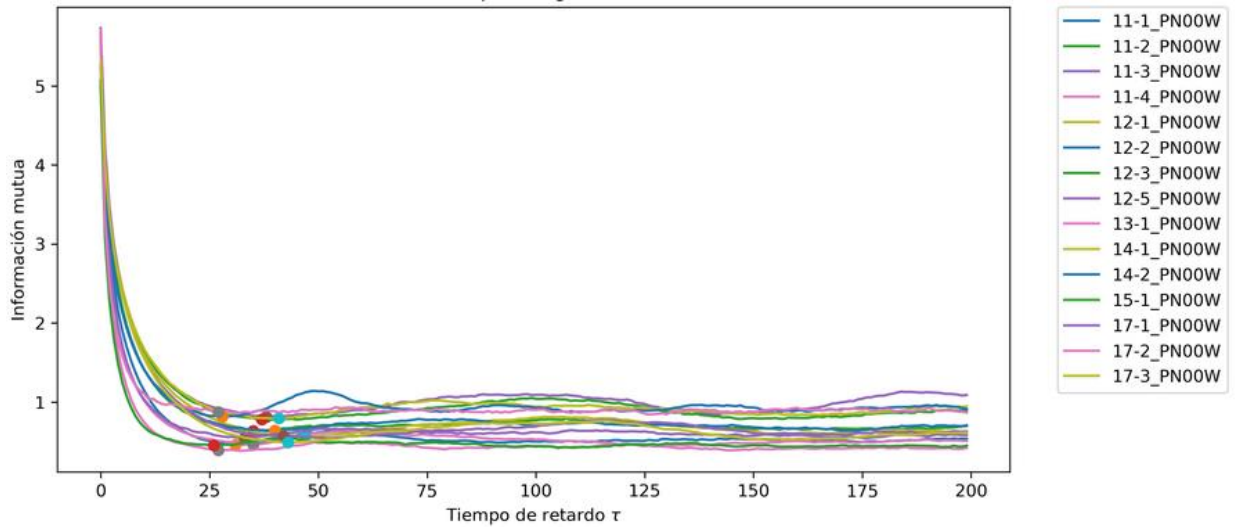


Figura 4-3 y

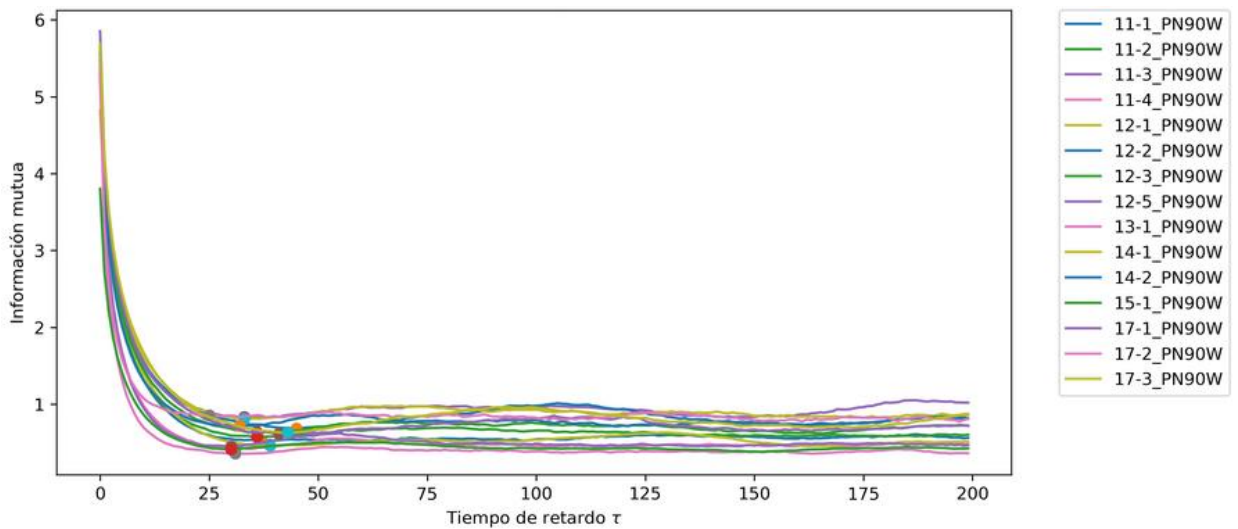


Figura 4-4. En este caso el tiempo de retardo óptimo se ubica en el primer valor mínimo que tiene la función de información mutua, que de igual forma es marcado con puntos de colores en las figuras. Puede notarse que, contrariamente a los resultados obtenidos con autocorrelación, hay mayor discrepancia entre los valores calculados en cada dirección para un mismo evento sísmico, ya que por ejemplo, los tiempos de retardo

menores en la dirección N00W se obtuvieron de los registros 13-1, 14-2, 15-1 y 17-2 (donde $\tau_{IM} \approx 25$), mientras que para la dirección N90W ese mismo valor solo se produjo en el evento 17-2, puesto que en los registros 13-1, 14-2 y 15-1 el resultado del tiempo de retardo óptimo es aproximadamente $\tau_{IM} \approx 30$. Respecto al mayor valor generado se tiene $\tau_{IM} \approx 45$ en el registro 12-1 para la dirección N00W y casi el mismo valor en el registro 12-2 para el canal N90W.

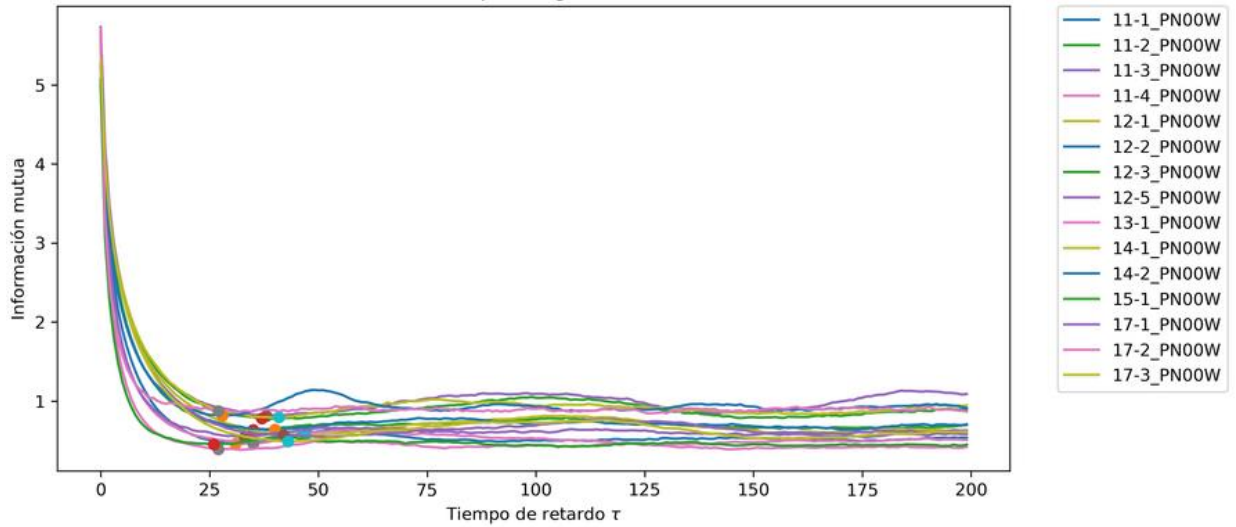


Figura 4-3 Información mutua en sismos de Paseo Bravo dirección N00W

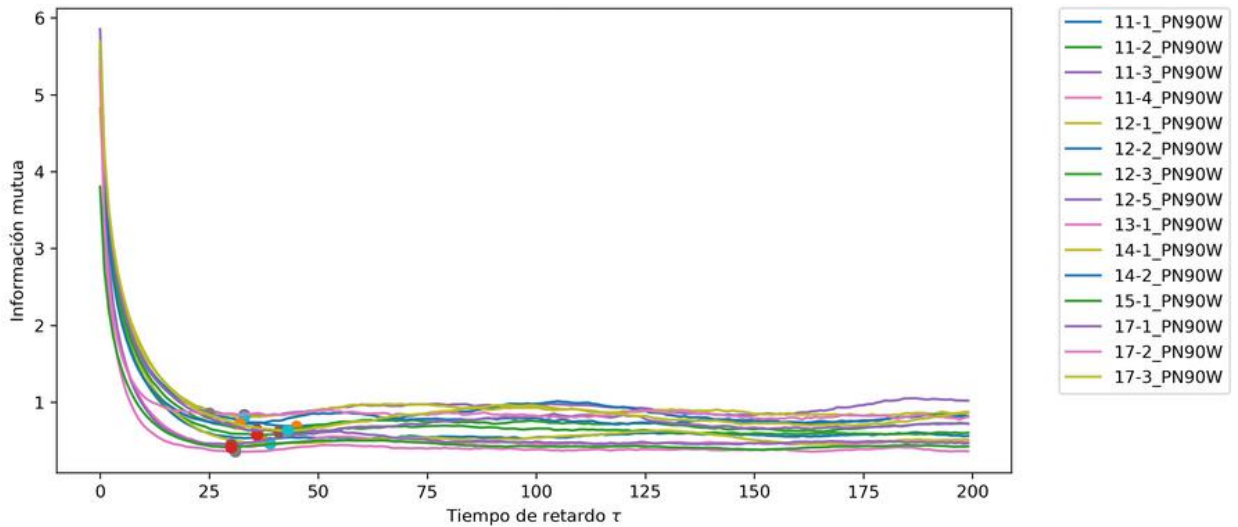


Figura 4-4 Información mutua en sismos de Paseo Bravo dirección N90W

Los tiempos de retardo óptimo calculados con ambos métodos se muestran en la Figura 4-5 **Tabla 3-1** con la intención de apreciar la variación de los resultados entre ambos canales. Como se ha mencionado anteriormente, los tiempos de retardo generados a partir de autocorrelación para el canal de dirección N00W presentan una baja discrepancia respecto a la dirección N90W, caso contrario a lo que ocurre con los resultados generados con función de información mutua. Por esta razón se utilizaron los tiempos de autocorrelación para los cálculos posteriores que requieren del tiempo de retardo, sin embargo, cabe mencionar que esta recomendación es solo válida para este trabajo.

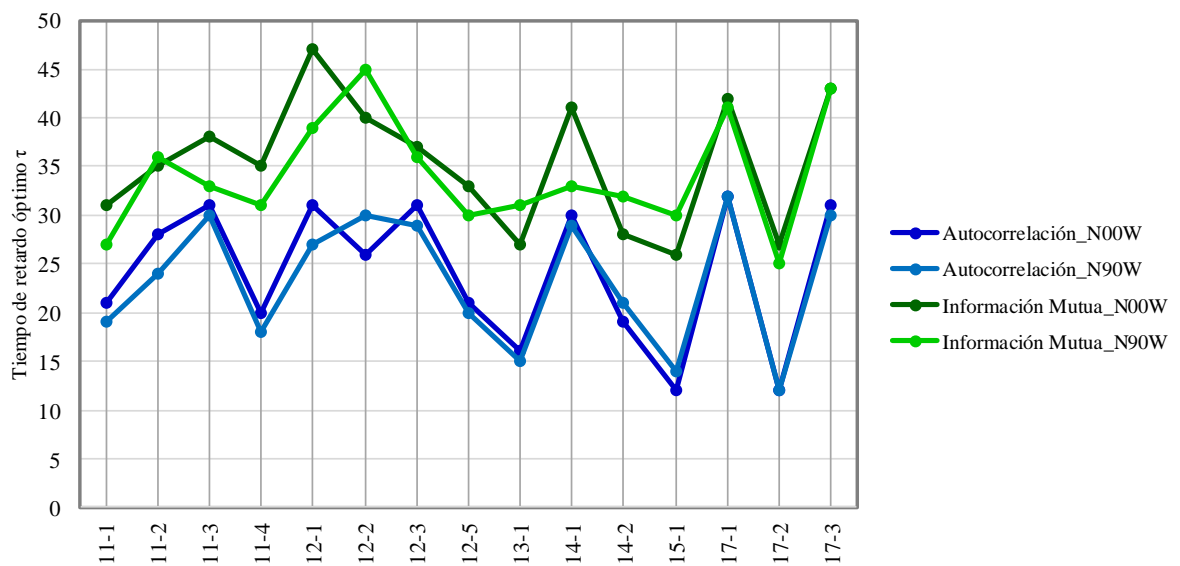


Figura 4-5 Valores de autocorrelación e información mutua en sismos de Paseo Bravo

Una vez teniendo los valores del retardo, se procedió a determinar la dimensión de incrustación m adecuada para el desenvolvimiento de la dinámica de los registros acelerométricos usando el método de promedio de falsos vecinos más cercanos descrito en la sección 2.4.5.-

En las Figuras Figura 4-6 y Figura 4-7 puede visualizarse la relación entre la cantidad $E_1(m)$ con distintas dimensiones de incrustación m que se obtiene aplicando el método de promedio de falsos vecinos para los registros en dirección N00W y N90W respectivamente. Se puede apreciar que, si bien las curvas son distintas entre sí (siendo el

registro 14-1 el que se estabiliza más prontamente y los 15-1 y 13-1 los que tardan más en hacerlo, esto para ambas direcciones), el parámetro $E_1(m)$ comienza a estabilizarse de manera general para todos los registros cuando la dimensión de incrustación alcanza el valor $m = 6$, por lo tanto podría proponerse que el sistema desarrollado por las señales registradas en el terreno estratificado de la zona de Paseo Bravo requiere de conocer por lo menos 6 variables.

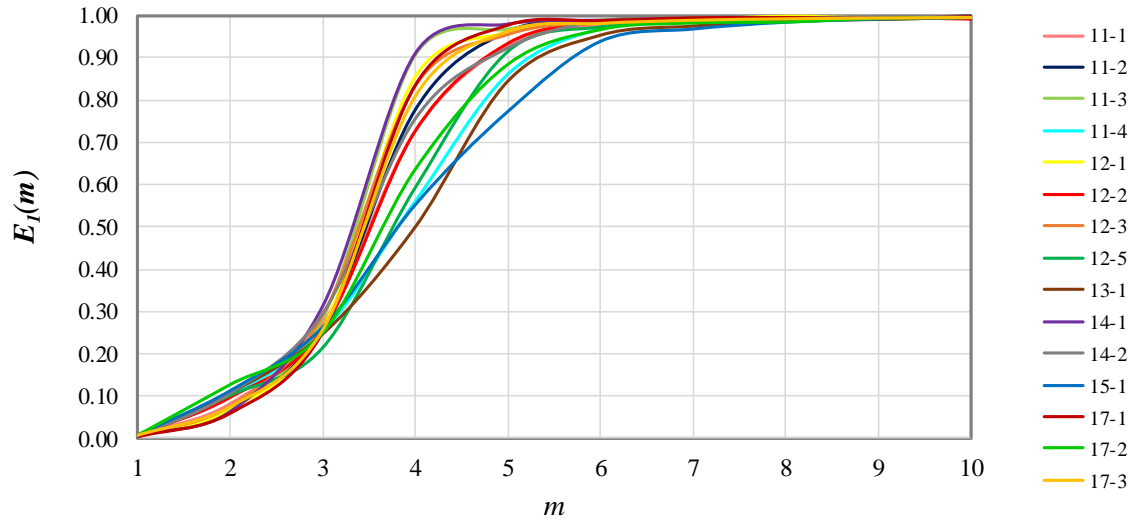


Figura 4-6 Cálculo de $E_1(m)$ para registros de Paseo Bravo en dirección N00W

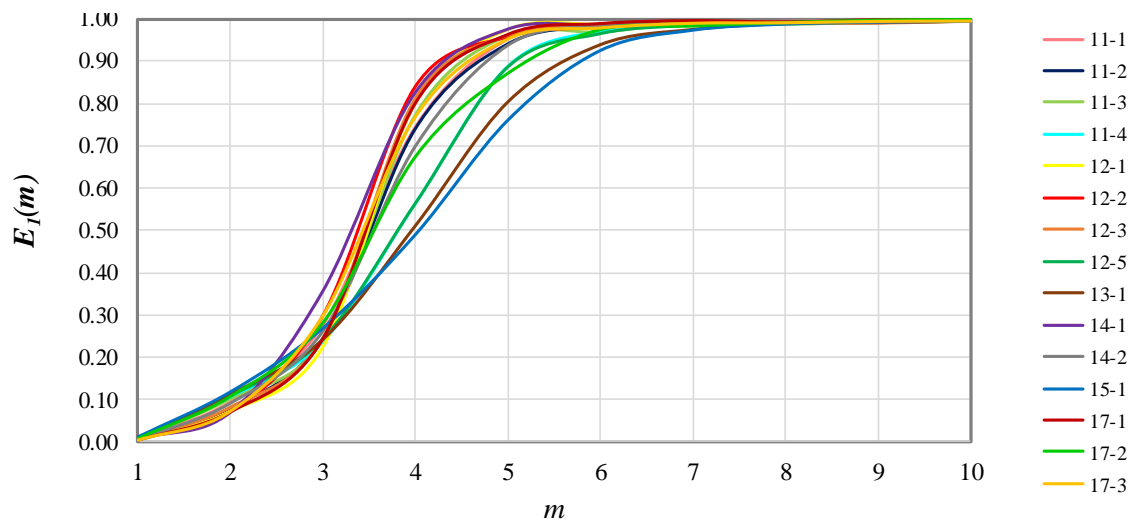


Figura 4-7 Cálculo de $E_1(m)$ para registros de Paseo Bravo en dirección N90W

Por su parte, el parámetro $E_2(m)$ es empleado para detectar si la señal procesada es aleatoria, lo cual ocurre si todos los valores de $E_2(m)$ son muy cercanos a la unidad desde el inicio. Tanto en la Figura 4-8 como en la Figura 4-9 puede observarse que en dimensiones de incrustación bajas las curvas se comportan de manera muy distinta al de una señal aleatoria ya que presenta un comportamiento parecido a una semi parábola (a excepción del acelerograma 15-1) que suavemente llegan el valor de 1 cuando la dimensión de incrustación alcanza valores mayores a 7.

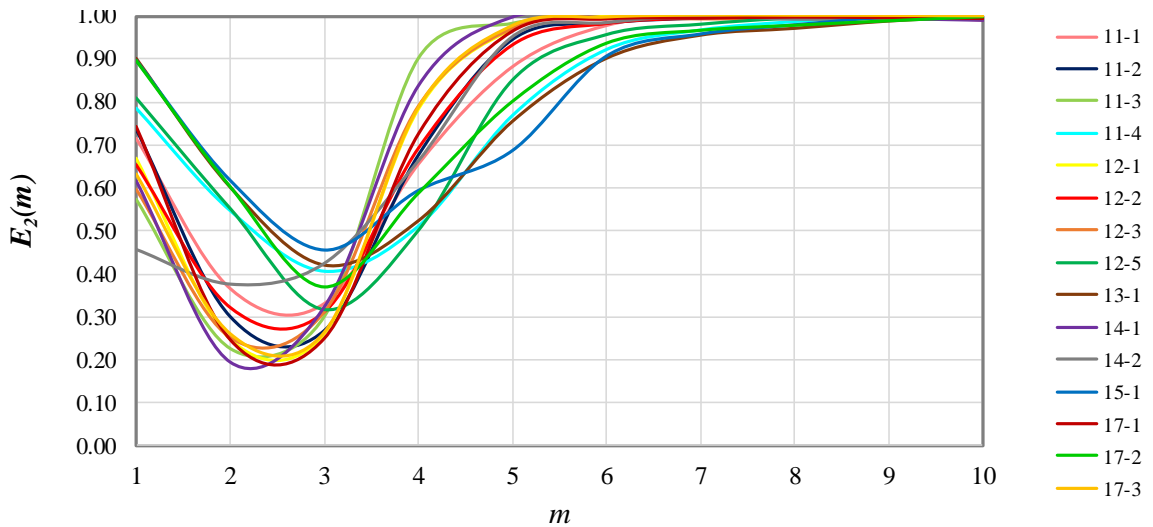


Figura 4-8 Cálculo de $E_2(m)$ para registros de Paseo Bravo en dirección N00W

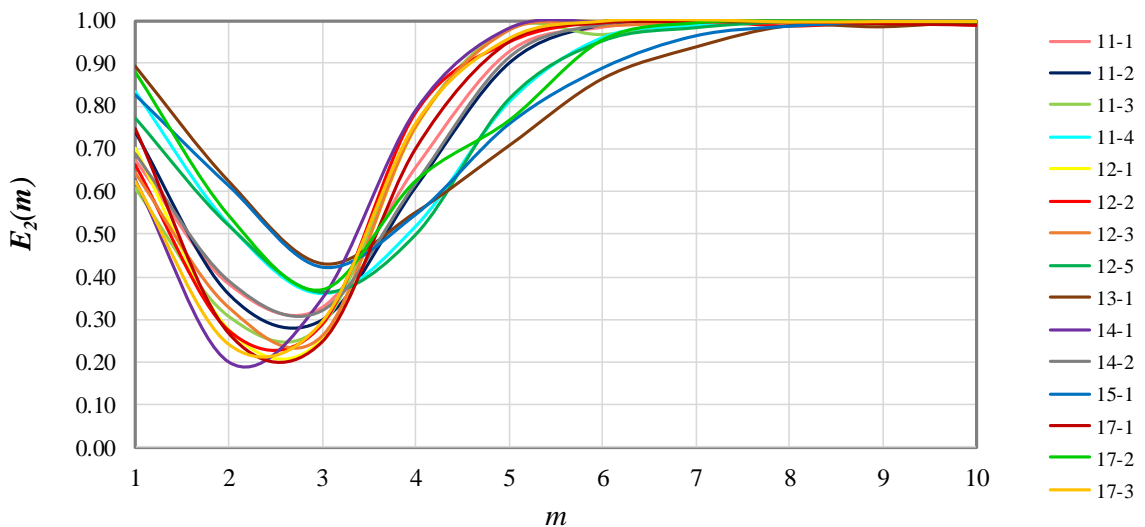


Figura 4-9 Cálculo de $E_2(m)$ para registros de Paseo Bravo en dirección N90W

Una vez obtenidos el tiempo de retardo óptimo y la dimensión de incrustación, se aplica el método de coordenadas de retardo de acuerdo con el Teorema de Takens, para poder apreciar la forma y tipo de atractor en el sistema dinámico estudiado. Si bien la máxima dimensión física para poder visualizar el atractor es tridimensional, hay que tener en cuenta que la dinámica subyacente de la señal requiere de por lo menos 6 coordenadas para desenvolverse de manera correcta de acuerdo con la dimensión de incrustación obtenida.

Por comodidad, de aquí en adelante se mostrarán los resultados para un solo evento sísmico, aunque para ambas direcciones horizontales puesto que, tal como se mencionó en el CAPÍTULO 3.-, se pretende observar si existe discrepancia entre los registros de un solo evento que esté relacionada con la posición del acelerógrafo. En este caso se visualizarán las características del evento 17-2 que corresponde al conocido sismo del 19 de septiembre de 2017. Los resultados para todos los demás registros se encuentran en la sección de Anexos.

Los atractores reconstruidos a partir del registro acelerométrico 17-2 se muestran en las Figuras Figura 4-10 y Figura 4-11. Por la forma en la que se muestra el comportamiento de la serie, puede considerarse como un atractor extraño disipativo, ya que, a pesar de que desde los acelerogramas se conoce que todos los valores de la aceleración finalizarán en cero, existe una amplia variedad de trayectorias por las que el valor tiene que pasar. Por ello es que puede notarse que las trayectorias tienen un comportamiento más turbulento en el centro del atractor que corresponde a aceleraciones pequeñas, lo cual es de esperarse sabiendo que estos valores suelen ser alterados de manera significativa por el ruido y por movimientos externos cerca de la estación sísmica y que no sean propios del evento sísmico.

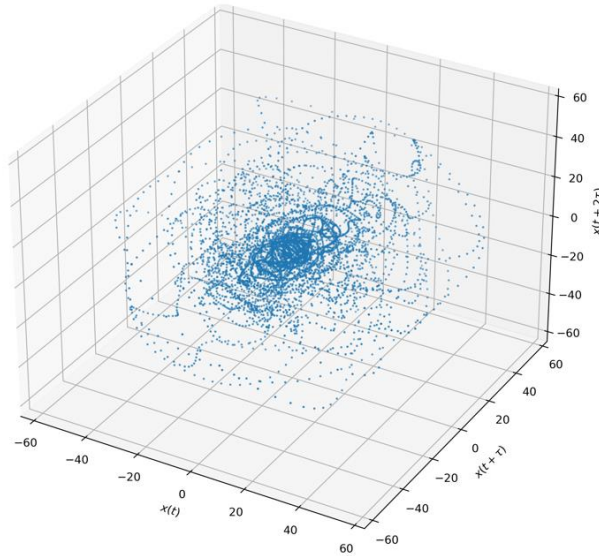


Figura 4-10 Atractor reconstruido para el registro 17-2 de Paseo Bravo en dirección N00W

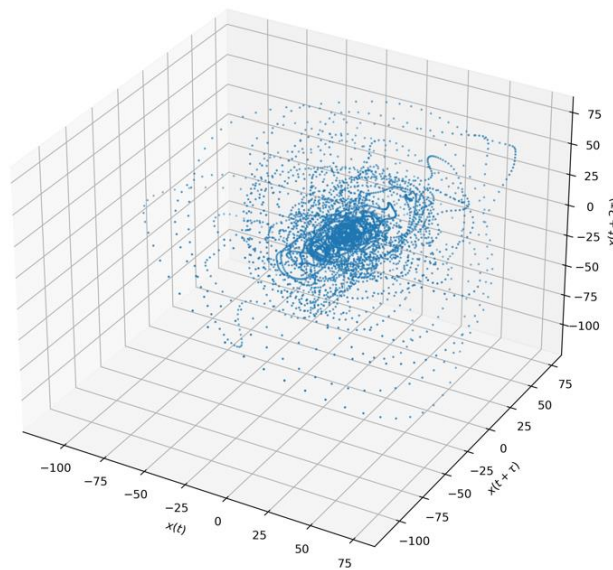


Figura 4-11 Atractor reconstruido para el registro 17-2 de Paseo Bravo en dirección N90W

Con los atractores reconstruidos se procede al cálculo de las invariantes dinámicas, que son los parámetros más importantes para determinar si el comportamiento de los registros acelerométricos corresponde a un fenómeno caótico ya que aparentemente los atractores como los que se muestran describen fluctuaciones propias de un movimiento estocástico.

En las Figuras Figura 4-12 y Figura 4-13 se muestran las relaciones entre las sumas de correlación $C(r)$ y los distintos radios de vecindad r en una gráfica doblemente logarítmica. Se observa que, mientras más se aumenta el radio, el valor de la suma de correlación se nivela hasta acercarse a la unidad con pendiente de cero; por el contrario, mientras r se haga más pequeña aparecerán discrepancias entre las series puesto que las curvas se desplazan hacia la derecha conforme se aumenta la dimensión de incrustación.

Hay que aclarar que el cálculo de las pendientes se llevó a cabo mediante el enfoque de mínimos cuadrados locales ya que en cada curva $C(r)$ se pueden identificar diferentes regiones de escala.

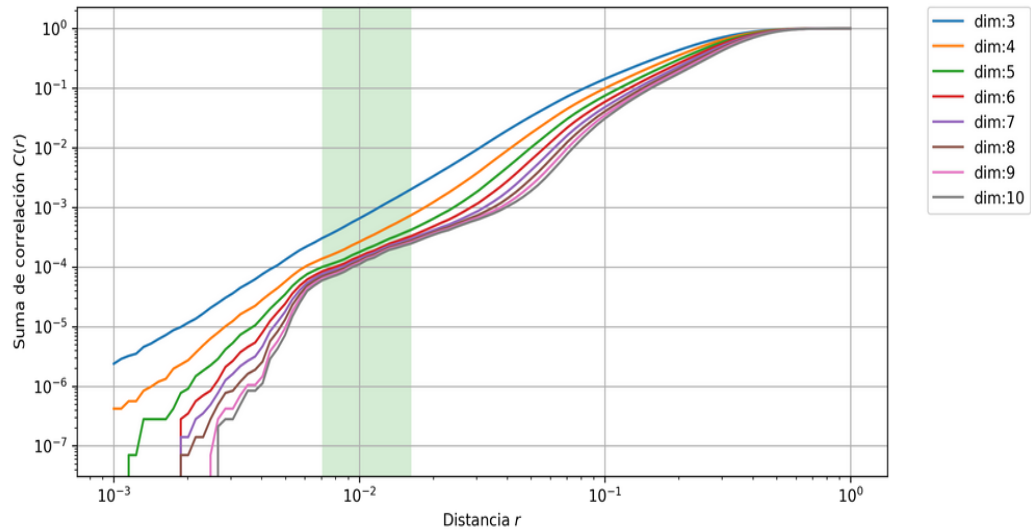


Figura 4-12 Suma de correlación $C(r)$ del sismo 17-2 de Paseo Bravo dirección N00W

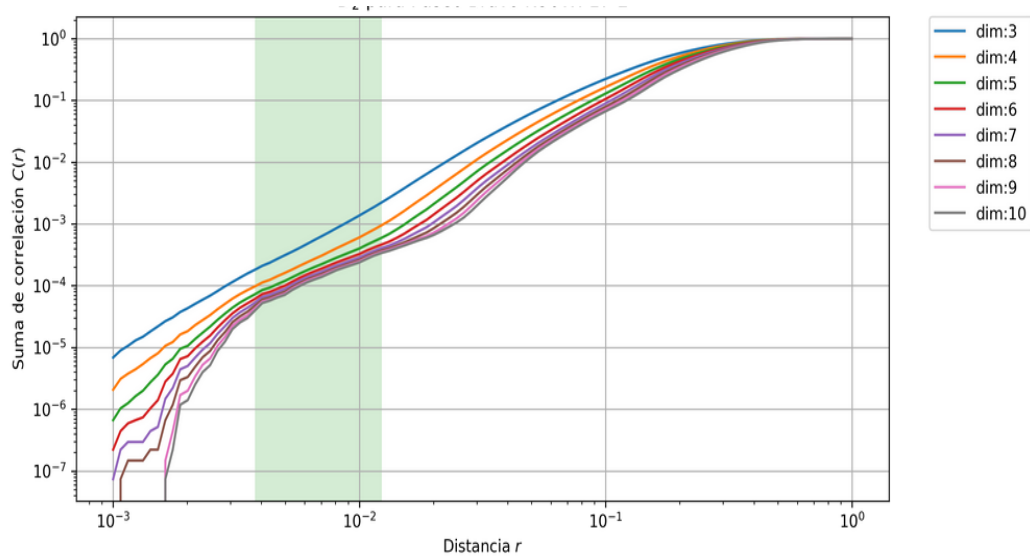


Figura 4-13 Suma de correlación $C(r)$ del sismo 17-2 de Paseo Bravo dirección N90W

Una vez que se calcularon las pendientes de las diferentes sumas de correlación, los valores obtenidos se grafican tal como se muestra en las Figuras Figura 4-14 y Figura 4-15. Generalmente se destacan tres regiones importantes en las gráficas obtenidas.

- Para un radio muy pequeño existen variaciones intensas en la estimación de las pendientes, lo que hace imposible el cálculo de la dimensión de correlación, sin embargo, cabe mencionar que la pendiente siempre será positiva debido a la propiedad acumulativa de las sumas de correlación. Esta zona tiene esta forma debido a que en radios de vecindad muy pequeños no se puede llegar a distinguir entre el ruido y la dinámica real de los acelerogramas con claridad (ya que, por lo general, tiene magnitudes bajas en comparación con los valores de aceleración). Este fenómeno también puede notarse en la abundancia de trayectorias en el centro de los atractores reconstruidos. Al observar esta zona en ambas Figuras, puede apreciarse que la presencia de ruido es más notable en los datos de la serie en dirección N00W.
- Conforme se aumenta el radio la suma de correlación se va acercando al atractor reconstruido y a su vez la intervención del ruido deja de ser significativa. Se marca con fondo color verde la región de escala considerada como adecuada para determinar la pendiente que, en el caso del registro de dirección N00W se

encuentra en el intervalo $r = \{7.05 \times 10^{-3}, 1.63 \times 10^{-2}\}$, mientras que para la dirección N90W $r = \{3.76 \times 10^{-3}, 1.23 \times 10^{-2}\}$. En esta región puede observarse que las curvas de la pendiente calculada en dimensiones de incrustación mayores a 5 comienzan a entrelazarse entre sí, de manera que, gráficamente se obtiene una pseudo meseta (puede notarse que es más pronunciada en la serie de dirección N90W). Sobre esta pseudo meseta se traza una línea recta que surge a partir de promediar las pendientes para cada dimensión de incrustación contempladas dentro de la región de escala. Dicha línea recta será igual a la dimensión de correlación calculada que, en el caso del sismo 17-2 da un valor de $D_2 = 1.6898$ en la dirección N00W y $D_2 = 1.6533$ en la dirección N90W.

- Si se incrementa el radio por encima de la región de escala, las pendientes alcanzan magnitudes mayores al valor de la dimensión de correlación conforme se aumenta la dimensión de incrustación, de manera que visualmente lucen como un pico plegado, el cual se irá reduciendo poco a poco hasta el valor de cero. Esto debido a que los radios alcanzan magnitudes que envuelven la totalidad del atractor reconstruido.

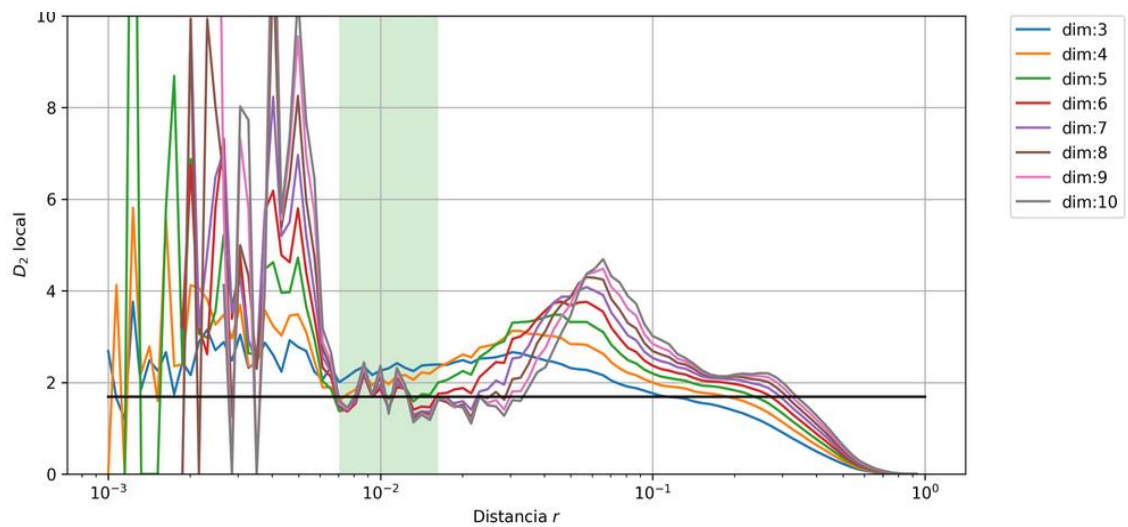


Figura 4-14 Dimensión de correlación D_2 del sismo 17-2 de Paseo Bravo dirección N00W

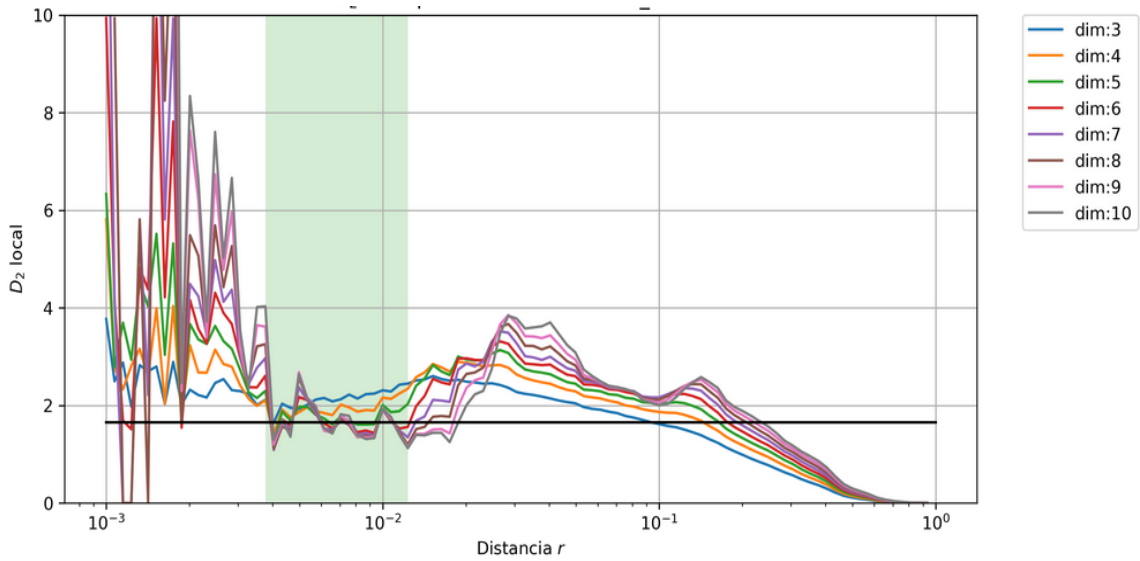


Figura 4-15 Dimensión de correlación D_2 del sismo 17-2 de Paseo Bravo dirección N90W

Si bien la dimensión de incrustación se calculó con la función $E_1(m)$, mediante la condición de $m \geq 2D_2 + 1$ proporcionada por el Teorema de Takens, se obtiene una dimensión de incrustación promedio de $m = 2(1.6898) + 1 = 4.38 \approx 5$ para la dirección N00W y $m = 2(1.6533) + 1 = 4.30 \approx 5$ para N90W, que resultan ser una unidad menor al valor calculado con la función $E_1(m)$, lo cual es razonable considerando la diferencia en el grado de precisión de ambos métodos.

En las Figuras Figura 4-16 y Figura 4-17 se muestran los resultados obtenidos del cálculo de la entropía de correlación K_2 . Al igual que en el cálculo de dimensión de correlación, pueden destacarse tres regiones de importancia en las gráficas obtenidas:

- Para radios muy pequeños las fluctuaciones provocadas por la presencia de ruido se hacen presentes generando valores elevados de entropía, lo cual es de esperarse ya que la incertidumbre y desorden generados por el ruido son características propias de los sistemas con alta entropía.
- La región de escala señalada en color verde recomendada para el cálculo de la entropía de correlación es la misma que para el cálculo de dimensión de correlación. De igual manera es posible apreciar que se forma una pseudo meseta con las curvas correspondientes a dimensiones inmediatamente superiores a la

dimensión de incrustación. Promediando los valores en la región de escala se obtiene que para el sismo 17-2 el valor de la entropía $K_2 = 0.1508$ en la dirección N00W y $K_2 = 0.1395$ en la dirección N90W.

- A partir de radios fuera de la región de escala, las curvas de entropía de correlación comienzan a plegarse y finalmente converger al valor de cero. Esto debido a que, mientras se van envolviendo las trayectorias del atractor en esferas de radios cada vez mayores, estas van disminuyendo en cantidad por lo que se va teniendo mayor probabilidad de saber en qué esfera estará contenida una trayectoria dada, hasta el punto en que la totalidad del atractor esté dentro de una sola esfera. En esta situación ya se tiene la certeza absoluta de que todas las trayectorias inestables del sistema estarán contenidas en dicha esfera, lo cual es indicio de baja incertidumbre y alta predictibilidad, las cuales están asociadas a una entropía nula.

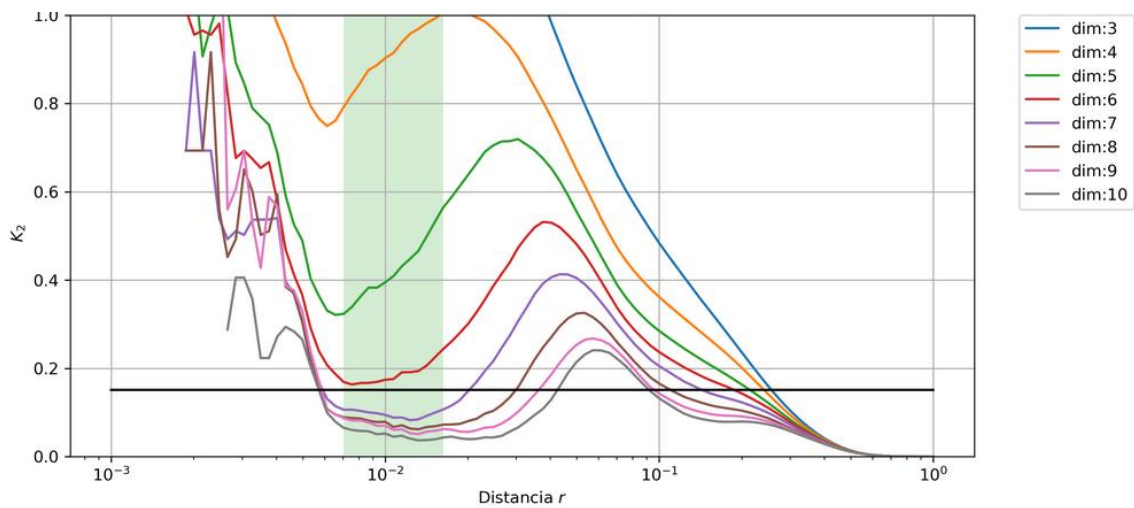


Figura 4-16 Entropía de correlación K_2 del sismo 17-2 de Paseo Bravo dirección N00W

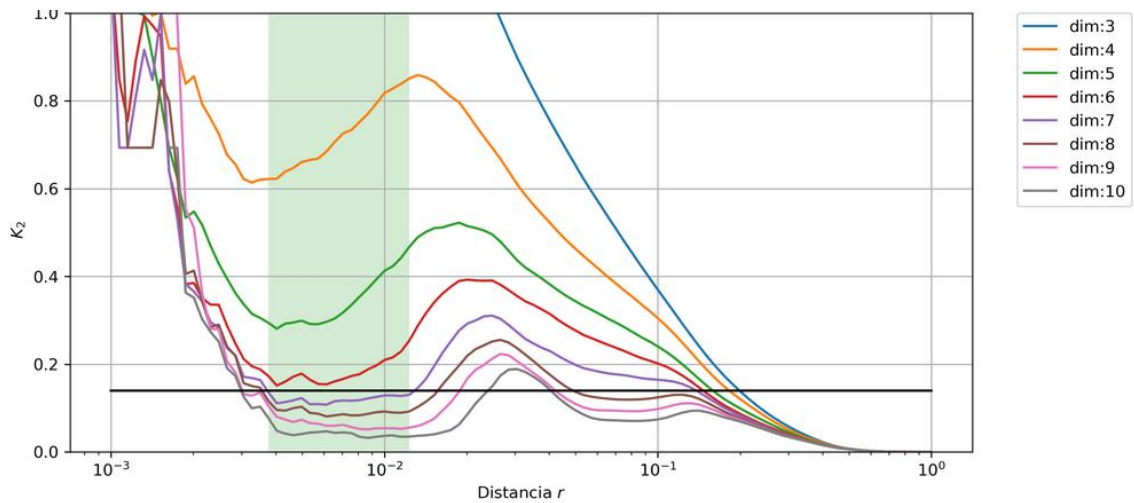


Figura 4-17 Entropía de correlación K_2 del sismo 17-2 de Paseo Bravo dirección N90W

Finalmente se muestran en la Tabla 4-1 los resultados del cálculo del máximo exponente de Lyapunov junto con las demás invariantes dinámicas para los registros en ambas direcciones. Como puede apreciarse, todos los exponentes de Lyapunov en la tabla son mayores a cero, lo cual es indicador de la presencia de comportamiento caótico en las series de tiempo analizadas.

Tabla 4-1 Invariantes dinámicas de los registros de Paseo Bravo

Registro	N00W			N90W		
	D_2	K_2	λ_{max}	D_2	K_2	λ_{max}
11-1	1.60	0.186	0.0881	1.53	0.1199	0.0827
11-2	1.54	0.103	0.0904	1.56	0.1249	0.0862
11-3	1.52	0.099	0.0764	1.52	0.1193	0.0883
11-4	1.55	0.156	0.1093	1.71	0.1499	0.1035
12-1	1.37	0.106	0.0713	1.40	0.0992	0.0766
12-2	1.45	0.125	0.0979	1.58	0.1118	0.0868
12-3	1.59	0.122	0.0824	1.68	0.1144	0.0852
12-5	1.68	0.133	0.1046	1.77	0.1511	0.1096
13-1	1.86	0.163	0.1187	1.80	0.1730	0.1244
14-1	1.43	0.077	0.0614	1.47	0.1145	0.0617
14-2	1.60	0.118	0.0660	1.83	0.1312	0.0816
15-1	1.86	0.210	0.1271	1.40	0.0806	0.1221
17-1	1.43	0.098	0.0684	1.60	0.1065	0.0779

17-2	1.69	0.151	0.0892	1.65	0.1395	0.0848
17-3	1.52	0.126	0.0831	1.58	0.1312	0.0674

4.2.- Discusiones

En esta sección se desarrollará principalmente uno de los objetivos particulares planteados en la investigación que es precisamente hacer una comparación de las invariantes dinámicas obtenidas para los registros de la estación Paseo Bravo y los resultados presentados por Yang, *et.al.* (2012) para el sismo de Chi Chi de 1999. La intención fue precisamente comprobar si sus conclusiones son similares a las de este trabajo. De igual forma se abordan otros objetivos secundarios como comparar los resultados obtenidos con los de series experimentales, ya antes comprobadas como sistemas caóticos deterministas, tal como se describe en la sección 3.5.- Estas series corresponden a una serie de ejemplos desarrollados principalmente por Perc (2005), los cuales consisten en un electrocardiograma y un registro de la marcha humana. Finalmente, se lleva a cabo una comparación contra los mismos registros acelerométricos de la estación de Paseo Bravo que se obtienen sin eliminar la fase no intensa del sismo. Esto con la intención de determinar si los datos desechados en la metodología no generan anomalías con el cálculo de las invariantes dinámicas.

Comenzando con los valores obtenidos con el método de promedio de falsos vecinos aplicado en los registros del sismo de Chi Chi, puede observarse en la Figura 7 de la sección 5.1 del artículo de Yang, *et.al.* (2012) el comportamiento de la función $E_2(m)$. Al igual que en los resultados de este trabajo, la curva inicia en forma de semi parábola hasta estabilizarse en el valor de 1 cuando la dimensión de incrustación alcanza magnitudes de 8 en adelante. Por lo tanto, el comportamiento caótico descrito por el método parece ser una propiedad inherente de los fuertes movimientos de tierra y que la complejidad del mismo aumenta conforme más cerca se esté de la zona de falla.

En la Figura 4-18 se comparan los resultados tanto de la función $E_1(m)$ como de $E_2(m)$ para la fase intensa del sismo 17-2 que se analizó en el inciso 4.1.-, junto con las mismas funciones aplicadas en la totalidad del registro (los cuales se indican con *), con la finalidad de abordar otro de los objetivos secundarios en este trabajo, que es comprobar si al eliminar la fase no intensa del sismo se mejoran los resultados. Puede notarse que,

efectivamente en los registros acelerométricos en los que no se elimina la fase inicial y final del sismo que presenta baja intensidad, la función $E_1(m)$ se estabiliza cuando $m > 8$, es decir, la dimensión de incrustación que se necesita para envolver la dinámica en este caso es mayor que la requerida solo en la fase intensa, lo que da un indicio de que los datos con poca intensidad de Arias son más susceptibles a ser alterados por el ruido y, por lo tanto, conducir a una percepción engañosa en el análisis caótico.

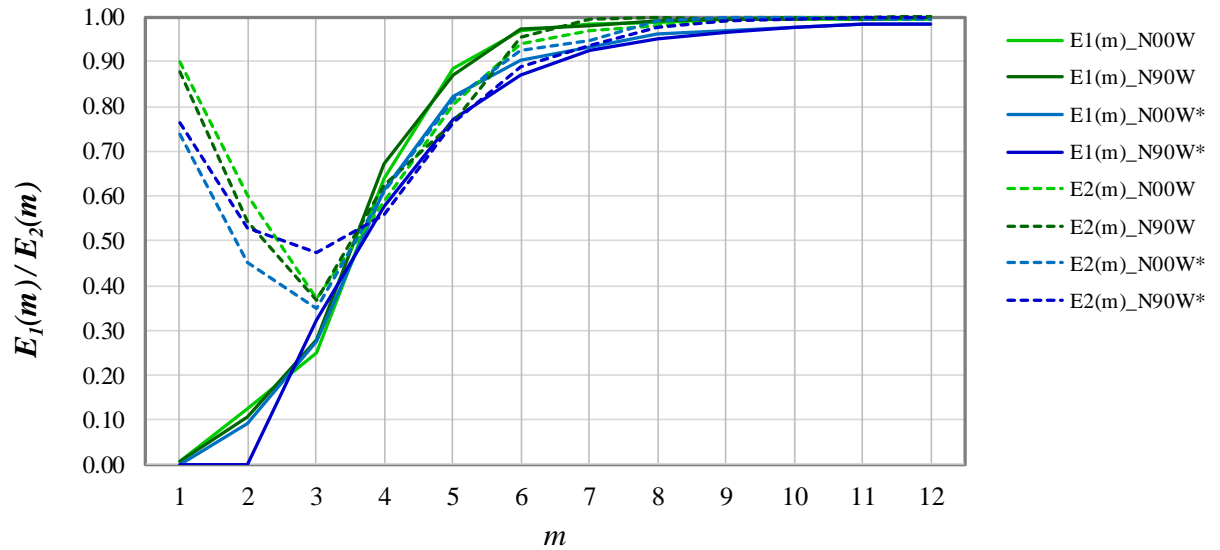


Figura 4-18 Cálculo de funciones $E_1(m)$ y $E_2(m)$ para el sismo 17-2 de Paseo Bravo, tanto de la fase intensa como del registro entero

Analizando los resultados de dimensión de correlación, en la Tabla 2 de la sección 5 del trabajo de Yang, *et.al.* (2012) se obtiene un valor promedio $\overline{D_2} = 2.8418$; los registros de mayor y menor magnitud arrojaron datos de $D_2 = 3.7051$ y $D_2 = 2.2245$, respectivamente. Si se compara con los resultados obtenidos en esta investigación en la que se obtuvo una dimensión de correlación promedio de $\overline{D_2} = 1.579$ para la dirección N00W y $\overline{D_2} = 1.605$ en el caso de N90W, lo que representa un poco más de la mitad de lo obtenido para el sismo de Chi Chi. Sin embargo, en ambos casos la dimensión de correlación es un número no entero, lo cual es propio de las características fractales en los sistemas caóticos.

Respecto a la entropía de correlación, los registros del sismo de Chi Chi generan valores dentro del rango de 0.1383 a 0.9622, de manera que la entropía de correlación promedio es de $\overline{K_2} = 0.5189$. Este valor es por mucho mayor que lo obtenido para los

registros de Paseo Bravo que es igual a $\overline{K_2} = 0.132$ para la dirección N00W y $\overline{K_2} = 0.124$ para N90W. En ambos casos se tienen valores positivos, lo cual es efectivamente un indicio de presencia de caos, aunque hay que destacar que tales parámetros indican que los sismos captados en la zona céntrica de la ciudad de Puebla tienen un menor grado de desorden (o tal vez influye el tipo de suelo).

Por último, se abordan los resultados del máximo exponente de Lyapunov en ambos casos. Mientras que los sismos captados por la estación de Paseo Bravo producen resultados del rango de 0.0614 a 0.1271 (en dirección N00W) y de 0.0617 a 0.1244 (en dirección N90W), Yang, *et.al.* (2012) obtuvieron valores entre 0.0665 y 0.8654. Si bien ambos casos reflejan la presencia de caos, cabe destacar que en esta ocasión el menor exponente es parecido para ambos trabajos, lo que parece indicar que los movimientos sísmicos en general tienen cierto límite inferior de divergencia exponencial en sus trayectorias y de ahí pueden crecer indefinidamente dependiendo de las características locales. Sin embargo, para poder comprobar esta hipótesis hacen falta análisis con datos de otras estaciones sísmicas. Por su parte, en el cálculo del máximo exponente de Lyapunov para las series experimentales, los resultados presentados por Perc (2005) fueron de 0.015 y 0.21 para el electrocardiograma y el registro de la marcha humana respectivamente, de manera que estos sistemas resultan tener menor complejidad que los sismos.

Una explicación a la discrepancia considerable de ambos resultados para todas las invariantes dinámicas podría ser que los registros captados para estudiar el movimiento del sismo de Chi Chi corresponden a zonas más cercanas a la falla, mientras que los epicentros en los registros captados por la estación de Paseo Bravo se encuentran en sitios mucho más lejanos, por lo que su comportamiento podría estabilizarse debido al amortiguamiento del suelo a lo largo del camino hasta el punto estudiado. Otra explicación puede deberse a que probablemente en el trabajo de Yang, *et.al.* (2012) no se llevó a cabo la eliminación de la fase no intensa del sismo que, tal como se mencionó anteriormente, juega un papel importante a la hora de determinar el nivel de complejidad de la serie de tiempo resultante.

Una vez recogidos los resultados de las invariantes dinámicas, en las Figuras Figura 4-19 y Figura 4-20 se muestran los atractores para las series de tiempo en las que

se pueden apreciar de manera más visual los distintos niveles de complejidad en los sistemas mostrados como referencia de comparación. Puede observarse un comportamiento levemente parecido entre las Figuras Figura 4-19, Figura 4-10 y Figura 4-11. Si bien los tres atractores son extraños con comportamiento final de punto fijo, hay una abundancia de trayectorias de apariencia turbulenta que envuelven la parte central, es decir, el valor de cero, y trayectorias mejor definidas (aunque irregulares) correspondientes a las aceleraciones máximas.

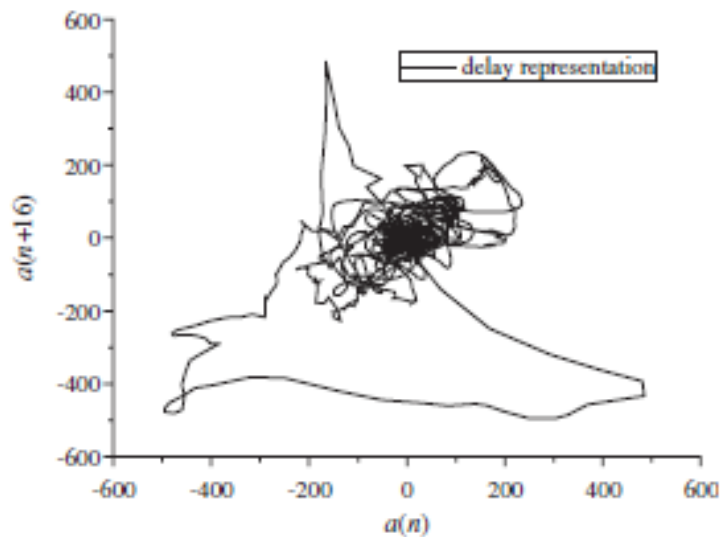
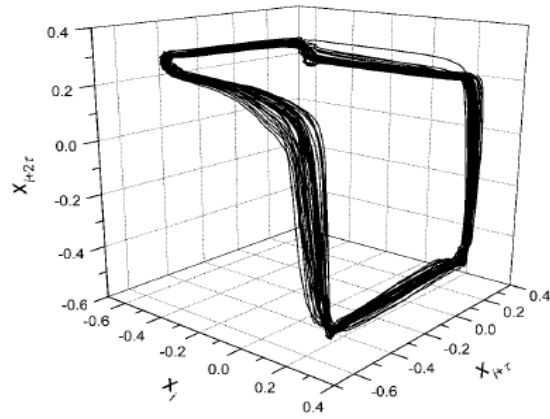
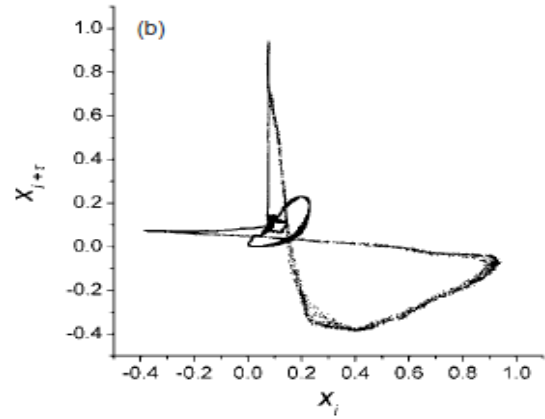


Figura 4-19 Atractor generado por el sismo de Chi Chi (Yang, Yang, & Zhang, 2012).

Por otro lado, en la Figura 4-20 pueden verse los atractores generados por las series caóticas experimentales analizadas por Perc (2005), los cuales resultan ser caóticos con comportamiento final de ciclo límite (aunque el de la marcha humana también tiene apariencia de punto fijo). Por las características de las series temporales originales es deducible la forma del atractor ya que, a diferencia de los sismos que son fenómenos que comienzan y terminan en un valor de cero, los latidos del corazón y la marcha humana tienen un comportamiento regular que no se degrada conforme transcurre el tiempo en que se hacen las mediciones.



a)



b)

Figura 4-20 Atractores generados para las series experimentales: a) electrocardiograma (Perc, *Nonlinear time series analysis of the human electrocardiogram*, 2005) y b) registro de marcha humana (Perc, *The dynamics of human gait*, 2005).

CONCLUSIONES

La irregularidad y complejidad (presentes en el comportamiento de los acelerogramas) han sido las razones por las que la construcción de espectros de respuesta sísmica para el diseño estructural (que se encuentran contemplados en varios reglamentos de construcción) tiene un enfoque probabilístico, sin embargo, proporciona sólo una idea limitada y aproximada que puede diferir de la dinámica propia de este tipo de fenómenos. Si bien estos métodos actuales proporcionan un alto grado de confianza, los análisis de ingeniería pueden resultar más precisos empleando modelos completamente correspondientes con la dinámica natural de los movimientos sísmicos. Por eso los análisis caóticos en series de tiempo sísmicas como los de este trabajo de investigación pueden contribuir a largo plazo a la creación de nuevos métodos más eficientes en el futuro.

El cálculo de las invariantes dinámicas del caos en las series temporales provenientes de los acelerogramas de la estación Paseo Bravo es solo uno de tantos trabajos, que se sugiere deberían efectuarse con la intención de determinar si existen límites precisos de los valores que se obtendrían para determinada área geográfica. Al igual que en el análisis efectuado por Yang, *et.al.* (2012), que se tomó como antecedente principal de la presencia de caos en los fenómenos sísmicos, las invariantes dinámicas de los sismos captados en la estación de Paseo Bravo indican que existe evidencia de comportamiento caótico dentro de las mismas, e inclusive arrojan una complejidad menor. Tal como se discutió en la sección anterior, la menor complejidad podría deberse a que los epicentros de los sismos estudiados se encontraban a una distancia considerablemente lejana de la estación, aspecto contrario a los registros estudiados para el sismo de Chi Chi que captaron movimientos en la zona de falla.

Cabe destacar que, para el sismo de Chi Chi, se contó con los resultados a partir de la información de un solo evento sísmico captada en diferentes puntos, mientras que en este trabajo se usaron múltiples eventos registrados en una sola estación sísmica. Sin embargo, esa diferencia no es relevante considerando que en esta investigación solamente se buscó detectar comportamiento caótico en todos los registros acelerométricos. Si se quisieran hacer relaciones más precisas derivadas de los múltiples valores obtenidos para

un solo evento sísmico, será necesario replicar la misma metodología expuesta en este trabajo sobre los datos obtenidos de estaciones sísmicas cercanas a la estación Paseo Bravo.

Respecto a objetivos secundarios de esta investigación, se llega a que la mayor parte de las series en la dirección N00W presentan invariantes dinámicas de mayor magnitud que sus contrapartes en dirección N90W. Además, de que se sugiere que el trabajar sólo con la fase intensa del sismo no afecta de manera significativa en los resultados finales y al contrario, contribuyen a la mejoría de los mismos así como a simplificar los tiempos de cálculo, por lo tanto, análisis posteriores pueden solo trabajar con la fase intensa del sismo con total confianza de que los resultados serán significativos.

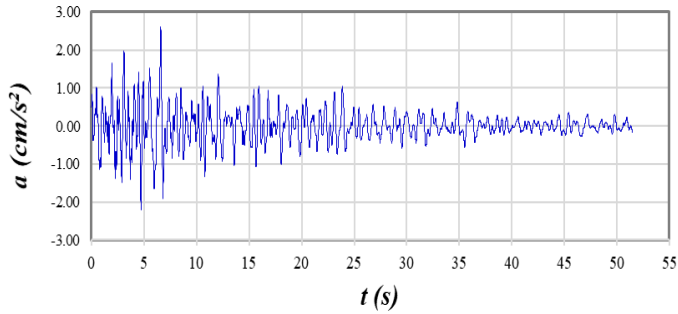
De manera general, se sugiere la elaboración de más estudios en distintos puntos de la ciudad de Puebla con distintos tipos de suelo, con la intención de obtener indicadores generales que permitan determinar si es posible la obtención de un atractor de sitio.

BIBLIOGRAFÍA

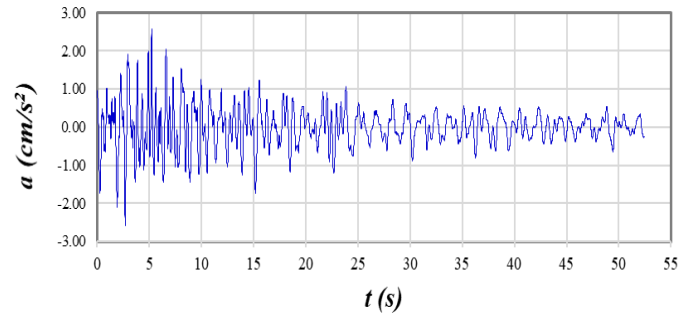
- Antoniou, S., & Pinho, R. (2016). SeismoSignal. Obtenido de <https://seismosoft.com/products/seismosignal/>
- Bradley, E. (2019). Nonlinear Dynamics: Mathematical and Computational Approaches [MOOC]. Complexity explorer. Obtenido de <https://www.complexityexplorer.org/courses/136-nonlinear-dynamics-mathematical-and-computational-approaches>
- Bradley, E., & Kantz, H. (2015). Nonlinear time-series analysis revisited. *Chaos*, 25(9), 097610.
- Cao, L. (1997). Practical method for determining the minimum embedding dimension of a scalar time series. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 110(1), 43-50. doi:[https://doi.org/10.1016/S0167-2789\(97\)00118-8](https://doi.org/10.1016/S0167-2789(97)00118-8)
- Galka, A. (2000). *Topics in non linear time series analysis* (Vol. 14). London: World Scientific.
- Grassberger, P., & Procaccia, I. (1983a). Estimation of the Kolmogorov entropy from a chaotic signal. *Phys. Rev. A*, 28(4), 2591-2593. doi:10.1103/PhysRevA.28.2591
- Grassberger, P., & Procaccia, I. (1983b). Measuring the strangeness of strange attractors. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 9(1), 189-208. doi:[https://doi.org/10.1016/0167-2789\(83\)90298-1](https://doi.org/10.1016/0167-2789(83)90298-1)
- Hegger, R., Kantz, H., & Schreiber, T. (Junio de 1999). Practical implementation of nonlinear time series methods: The TISEAN package. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 9(2), 413-435. doi:10.1063/1.166424
- Huang, J., & Turcotte, D. L. (1990). Are earthquakes an example of deterministic chaos? *Geophysical Research Letters*, 17(3), 223-226. doi:[doi:doi.org/10.1029/GL017i003p00223](https://doi.org/10.1029/GL017i003p00223)
- Kantz, H., & Schreiber, T. (2003). *Nonlinear Time Series Analysis* (2nd ed.). Cambridge: Cambridge University Press. doi:10.1017/CBO9780511755798
- Kodba, S., Perc, M., & Marhl, M. (2004). Detecting chaos from a time series. *European Journal of Physics*, 205-215.
- Perc, M. (2005). Nonlinear time series analysis of the human electrocardiogram. *European Journal of Physics*, 757-768.
- Perc, M. (2005). The dynamics of human gait. *European Journal of Physics*, 525-534.
- RACP-II/BUAP-10. (Noviembre de 2011). La red de acelerógrafos de la Ciudad de Puebla. Puebla.

- RAII-UNAM. (2018). Base de datos de registros acelerométricos de la RAI-UNAM. Instituto de Ingeniería UNAM. Obtenido de <http://aplicaciones.iingen.unam.mx/acelerogramasrsm/redacelerografica.aspx>
- Sawada, M., & Sawada, Y. (1985). Measurement of the Lyapunov Spectrum from a Chaotic Time Series. *Physical Review Letters*, 1082-1085.
- Schmidt, V. (2008). Correlaciones a partir de la intensidad de Arias para los datos acelerográficos de Costa Rica. *Revista Geológica de América Central*, 95-117.
- Shalaleh, M., & Noorzad, A. (2009). Detecting Chaos in Earthquake Time Series for Seismic Hazard Prediction. *3rd IASME / WSEAS International Conference on GEOLOGY and SEISMOLOG* (págs. 17-20). Cambridge: WSEAS Press.
- Strogatz, S. H. (2015). *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering* (2nd ed.). Boca Raton: CRC Press.
- Villagrán, E. I., Posada, A. E., & Escobar, J. A. (2011). Caracterización de acelerogramas como series de tiempo caóticas. *XVIII Congreso Nacional de Ingeniería Sísmica*. Aguascalientes.
- Williams, G. P. (1997). *Chaos Theory Tamed*. Washington, DC: CRC Press.
- Yang, D., Yang, P., & Zhang, C. (2012). Chaotic characteristic analysis of strong earthquake ground motions. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 22(03), 1250045.

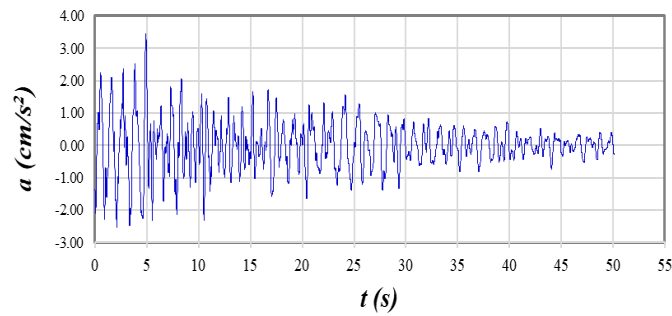
ANEXO 1.- REGISTROS ACELEROMÉTRICOS DE PASEO BRAVO CON TRATAMIENTO PREELIMINAR



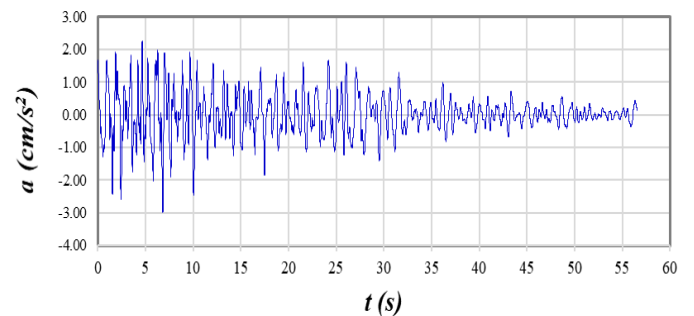
Registro 11-1 N00W



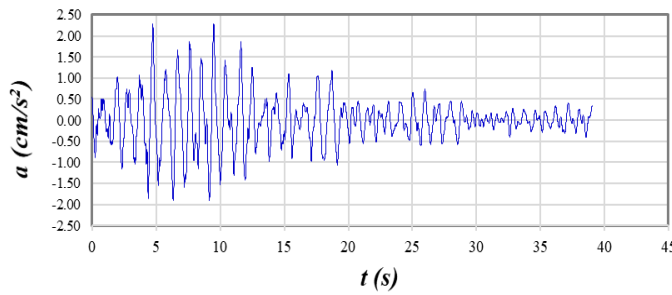
Registro 11-1 N90W



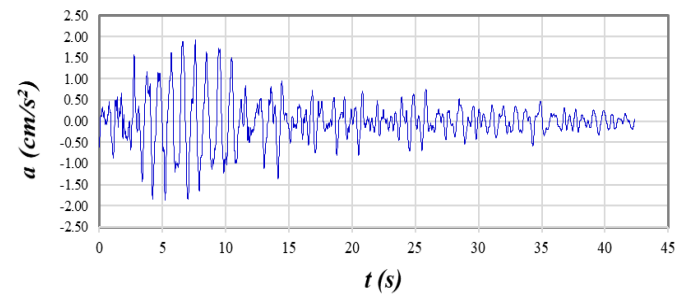
Registro 11-2 N00W



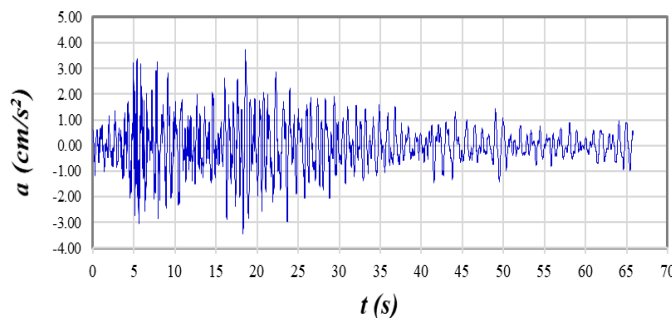
Registro 11-2 N90W



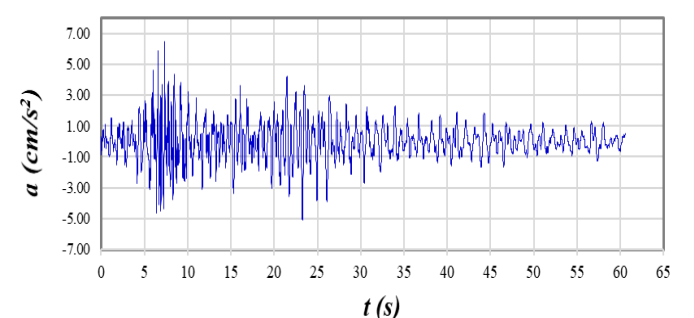
Registro 11-3 N00W



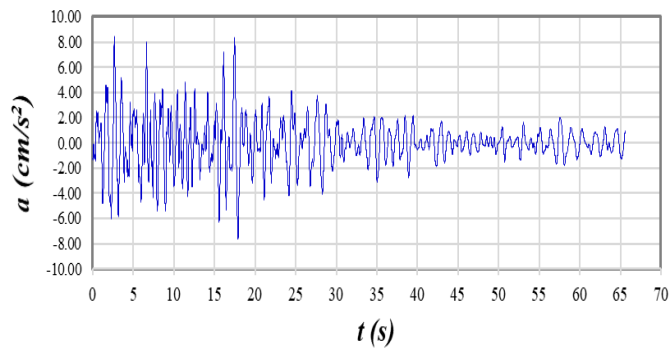
Registro 11-3 N90W



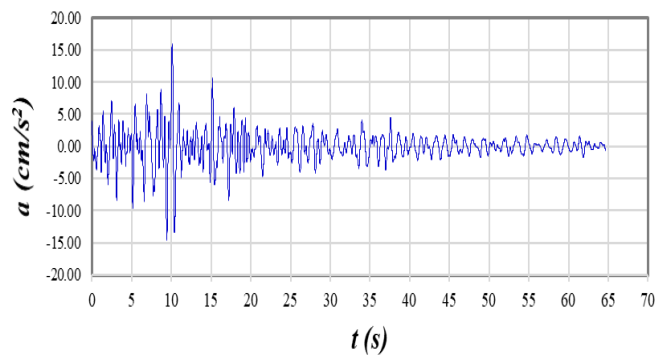
Registro 11-4 N00W



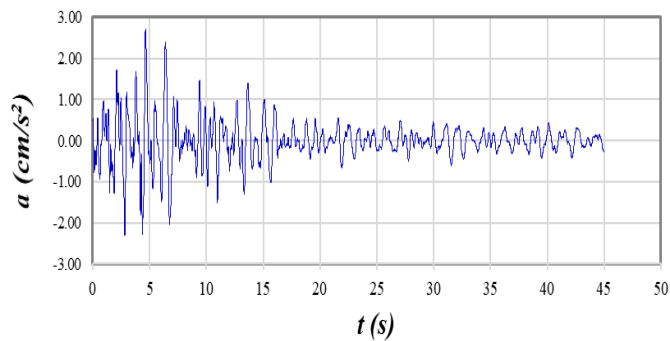
Registro 11-4 N90W



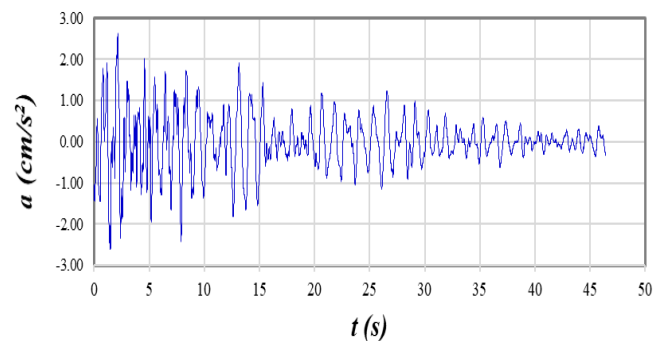
Registro 12-1 N00W



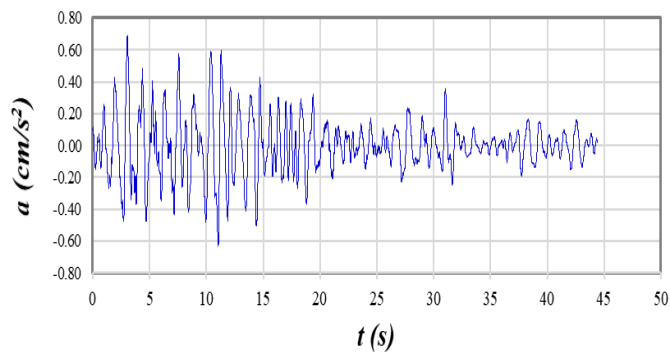
Registro 12-1 N90W



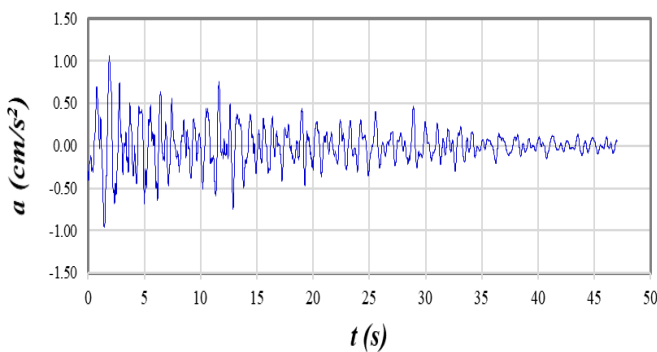
Registro 12-2 N00W



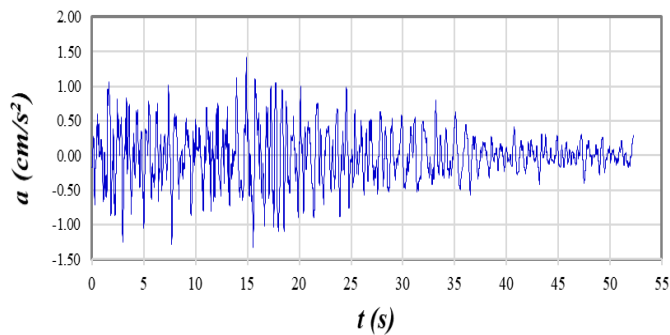
Registro 12-2 N90W



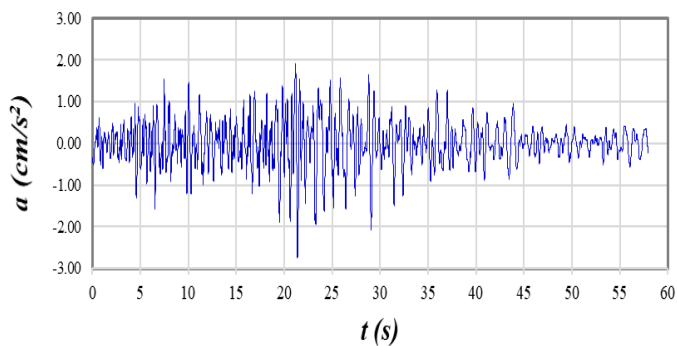
Registro 12-3 N00W



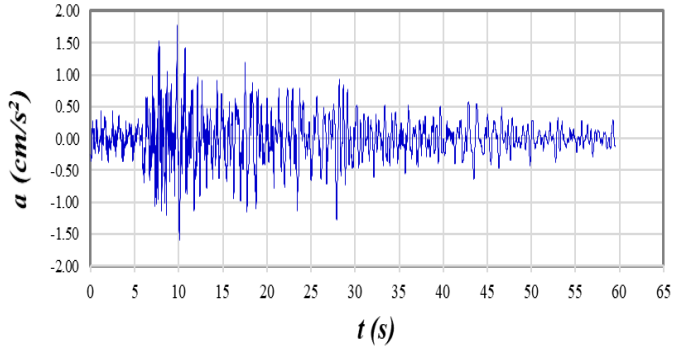
Registro 12-3 N90W



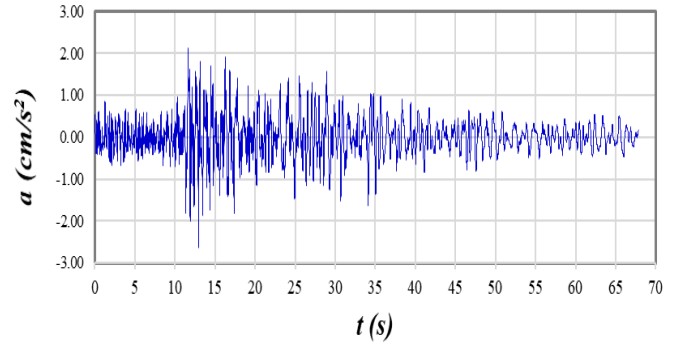
Registro 12-5 N00W



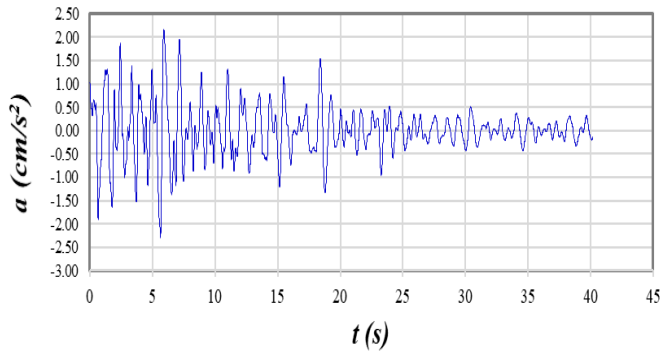
Registro 12-5 N90W



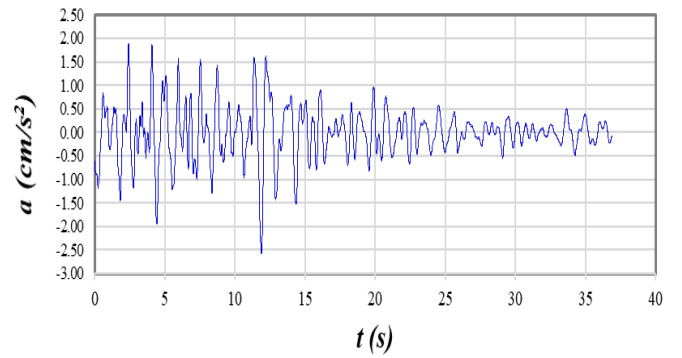
Registro 13-1 N00W



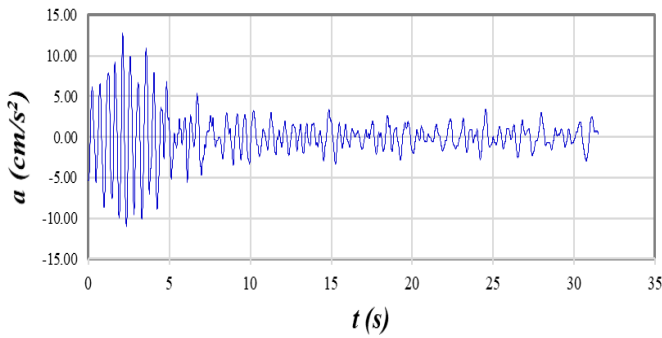
Registro 13-1 N90W



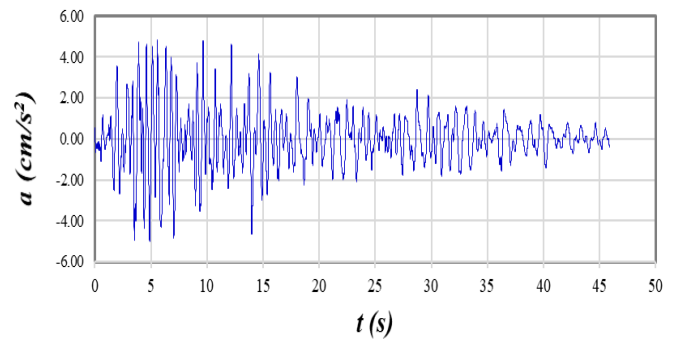
Registro 14-1 N00W



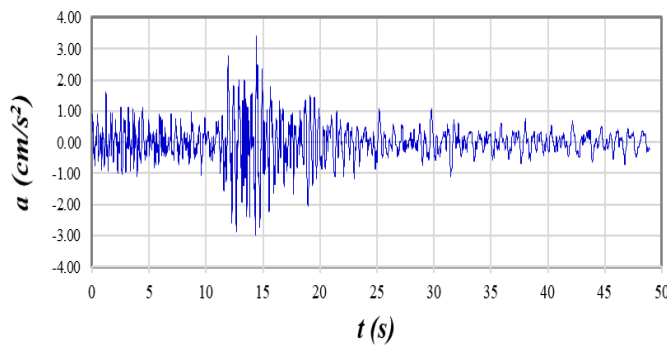
Registro 14-1 N90W



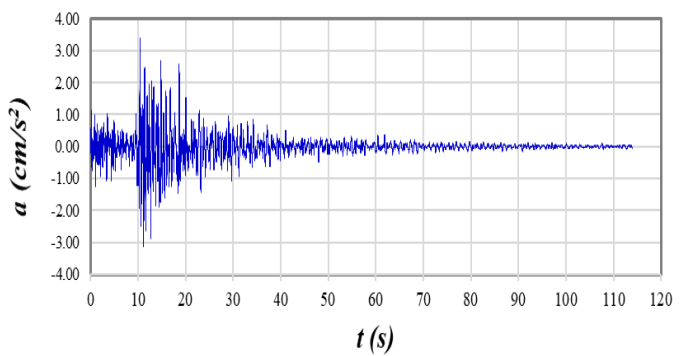
Registro 14-2 N00W



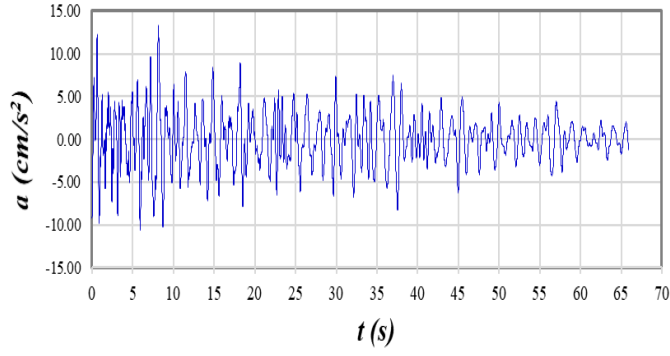
Registro 14-2 N90W



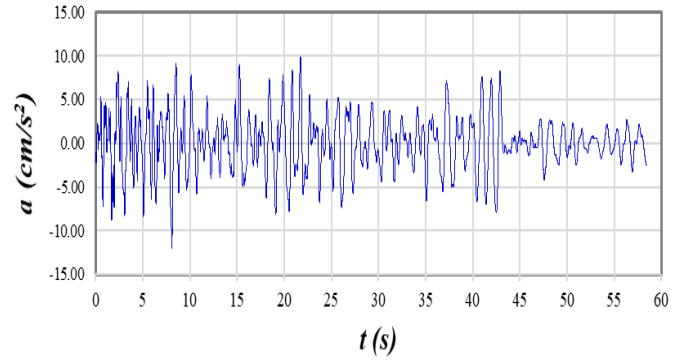
Registro 15-1 N00W



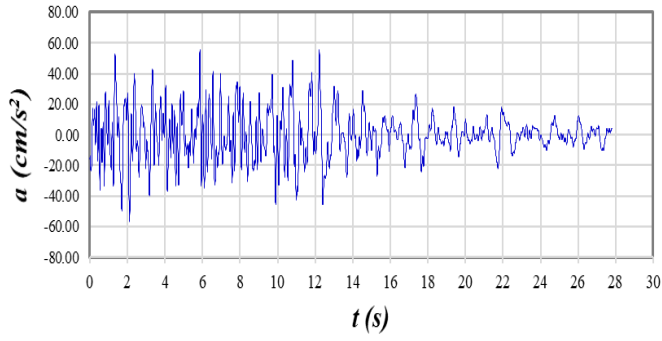
Registro 15-1 N90W



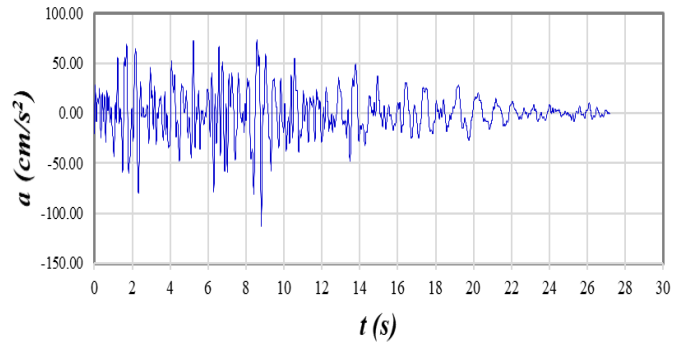
Registro 17-1 N00W



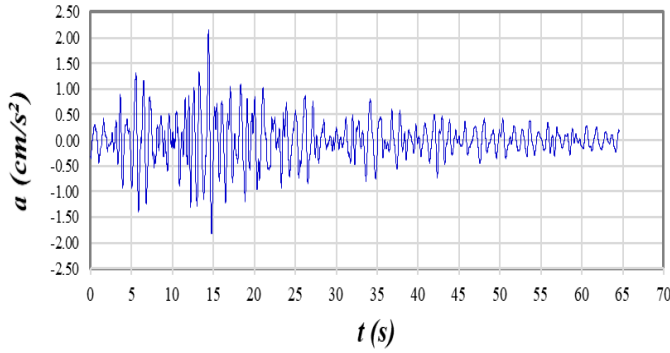
Registro 17-1 N90W



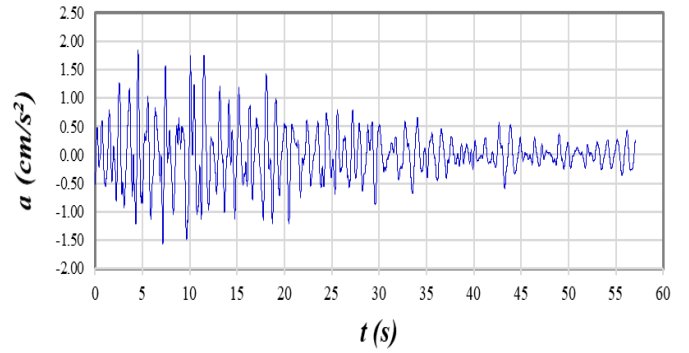
Registro 17-2 N00W



Registro 17-2 N90W

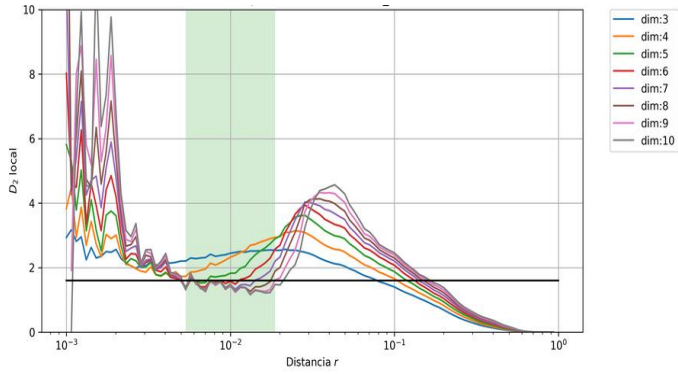


Registro 17-3 N00W

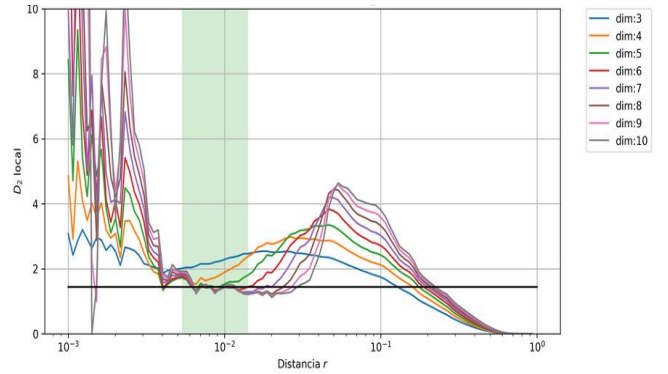


Registro 17-3 N90W

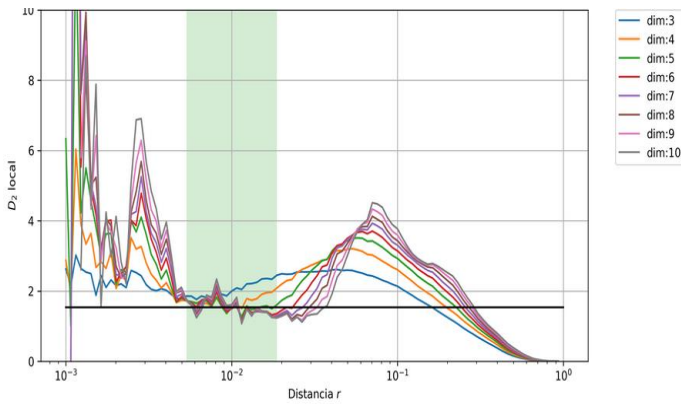
ANEXO 1I.- RESULTADOS DE DIMENSIÓN DE CORRELACIÓN EN REGISTROS DE PASEO BRAVO



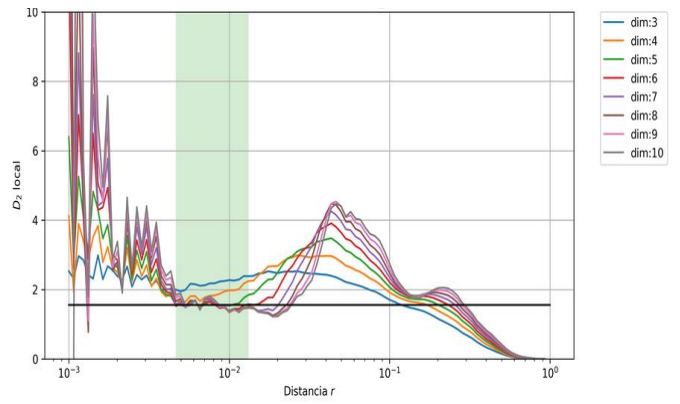
Registro 11-1 N00W



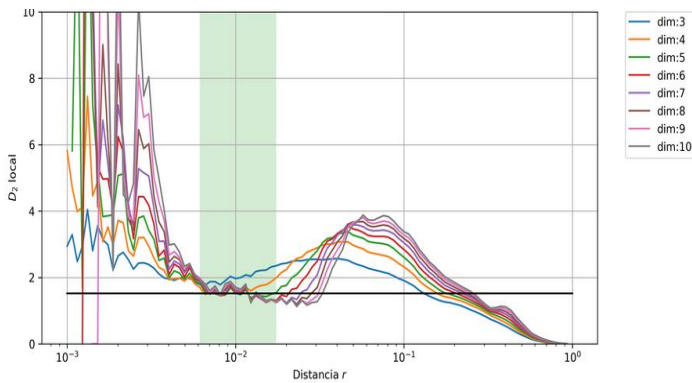
Registro 11-1 N90W



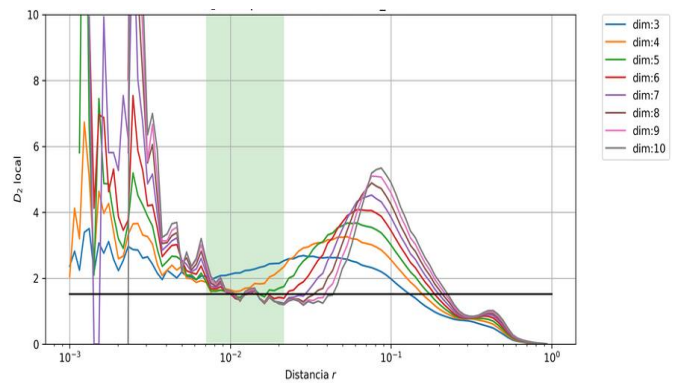
Registro 11-2 N00W



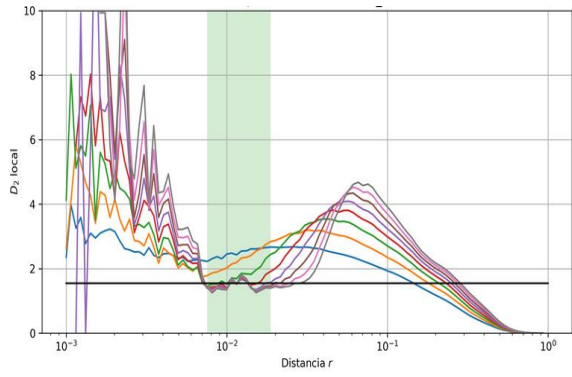
Registro 11-2 N90W



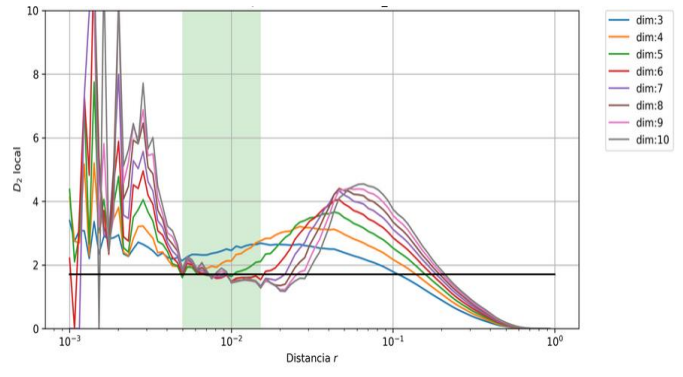
Registro 11-3 N00W



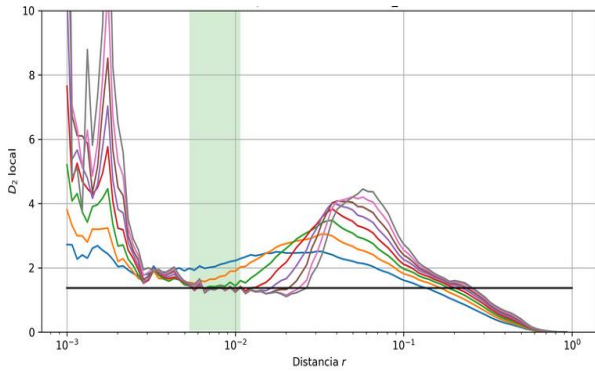
Registro 11-2 N90W



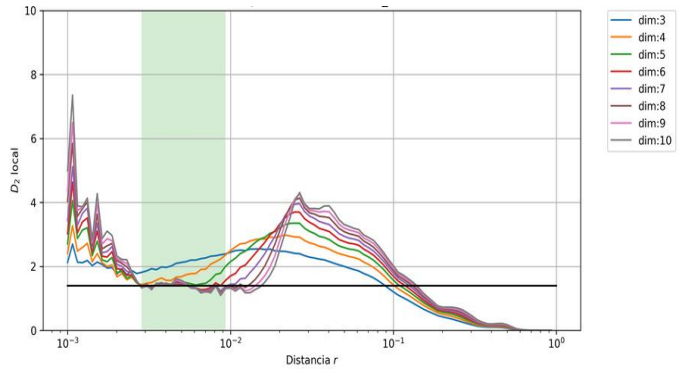
Registro 11-4 N00W



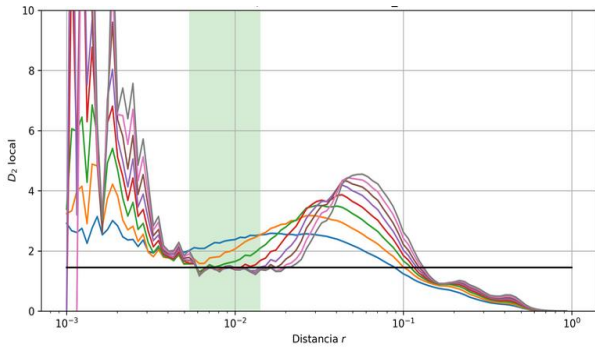
Registro 11-4 N00W



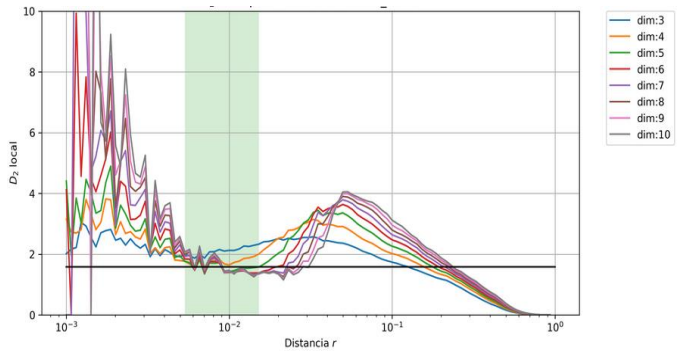
Registro 12-1 N00W



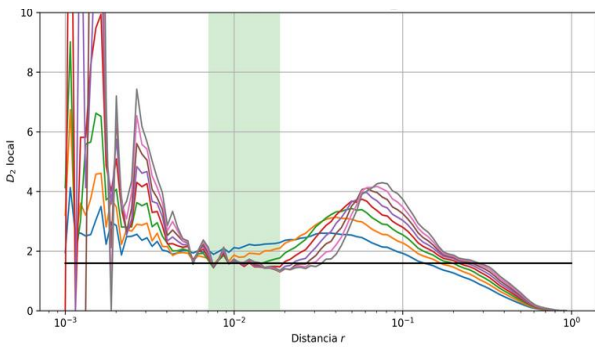
Registro 12-1 N90W



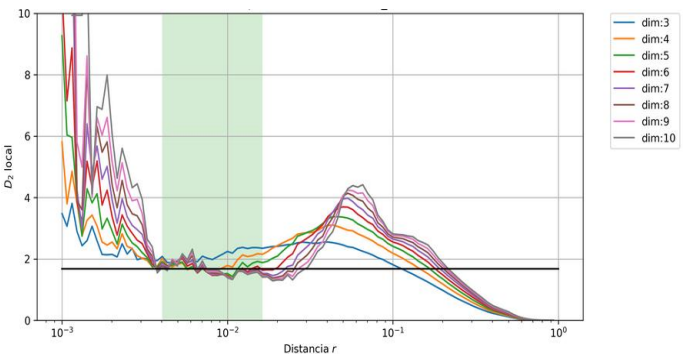
Registro 12-2 N00W



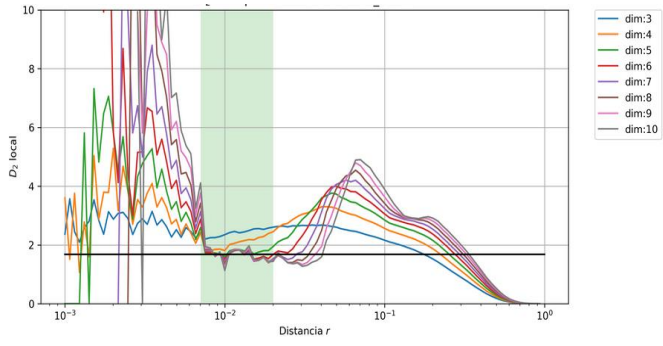
Registro 12-2 N90W



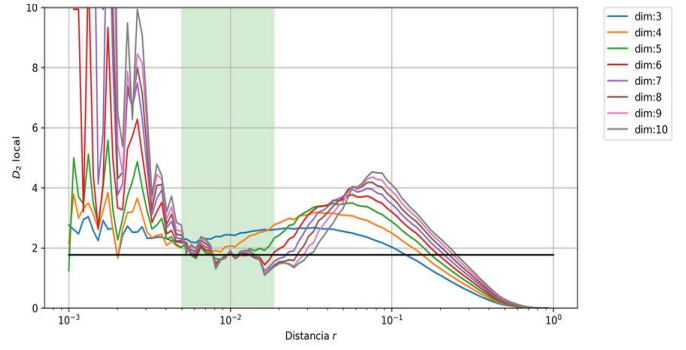
Registro 12-3 N00W



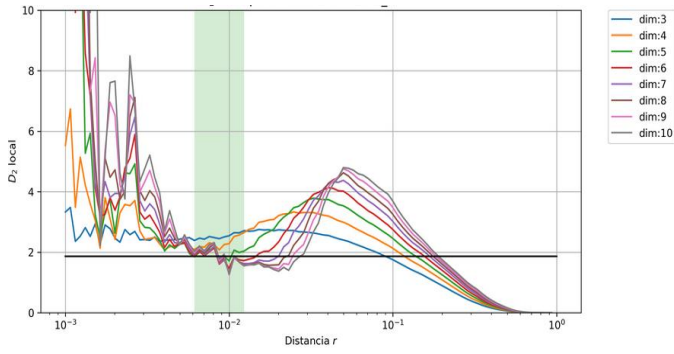
Registro 12-3 N90W



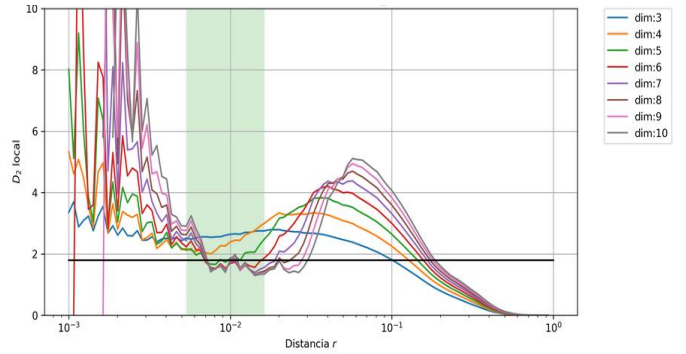
Registro 12-5 N00W



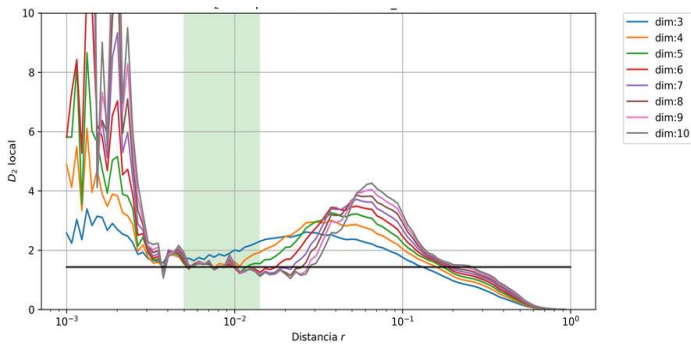
Registro 12-5 N90W



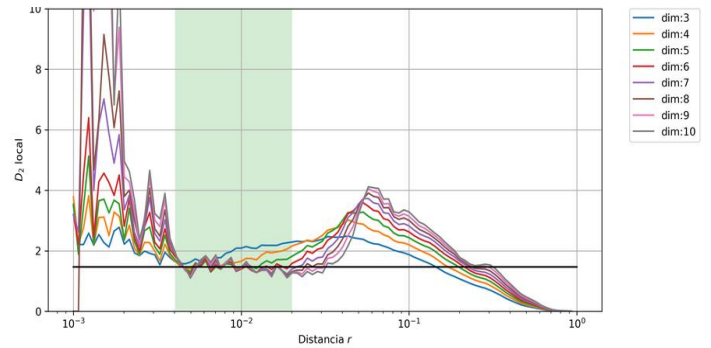
Registro 13-1 N00W



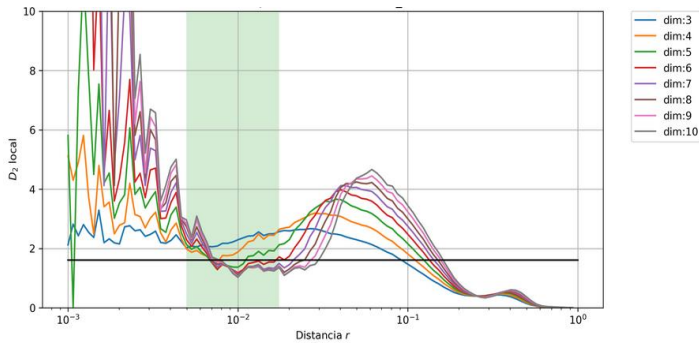
Registro 13-1 N90W



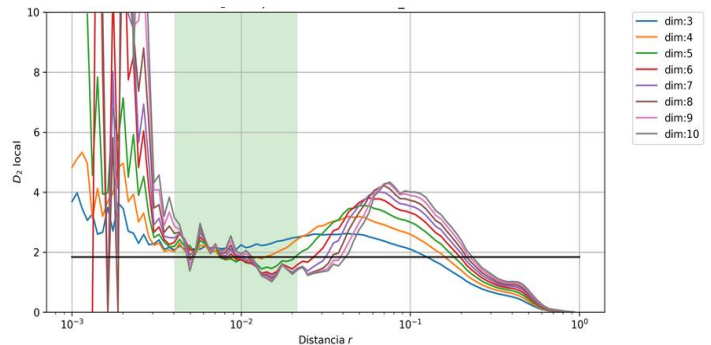
Registro 14-1 N00W



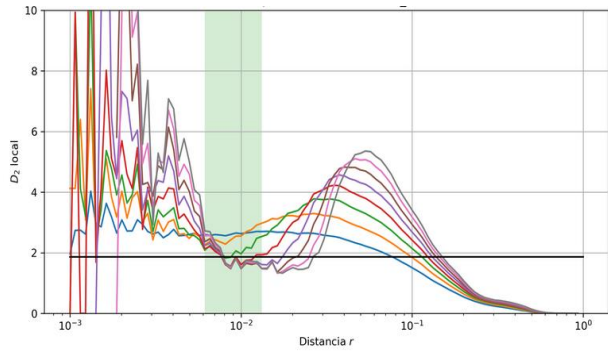
Registro 14-1 N90W



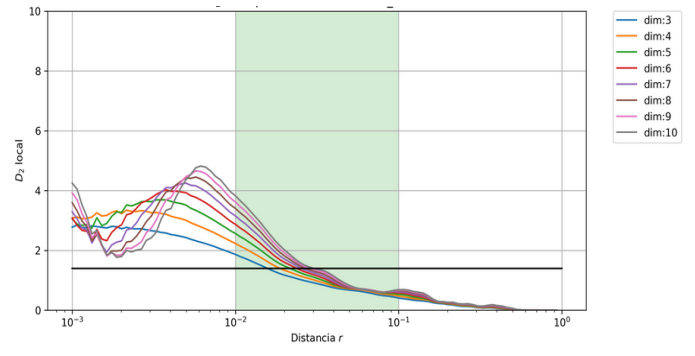
Registro 14-2 N00W



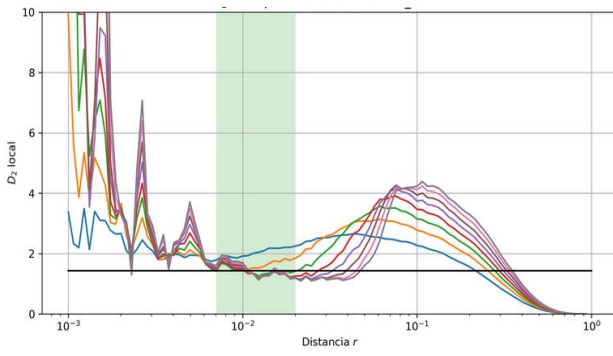
Registro 14-2 N90W



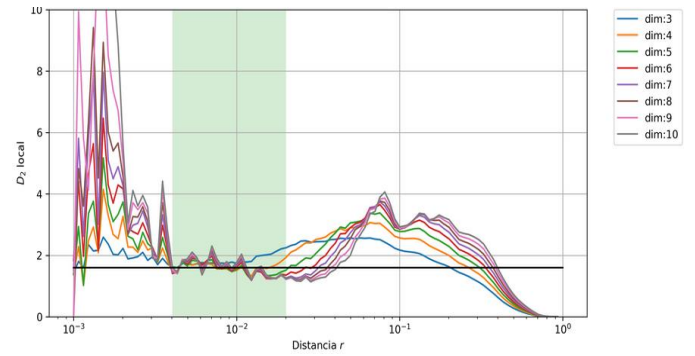
Registro 15-1 N00W



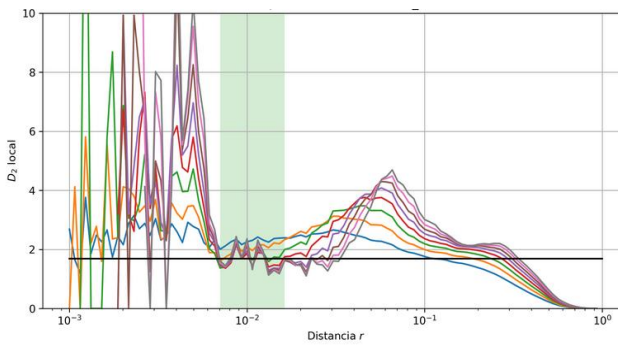
Registro 15-1 N90W



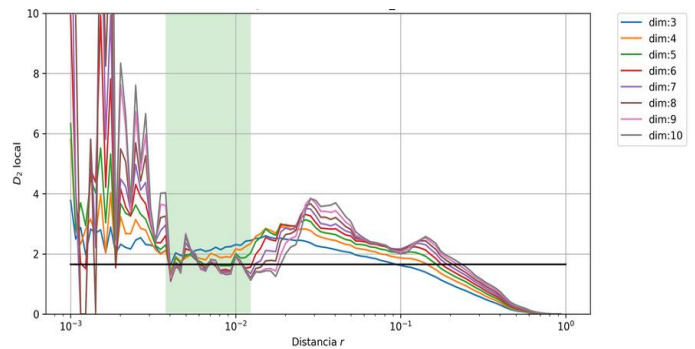
Registro 17-1 N00W



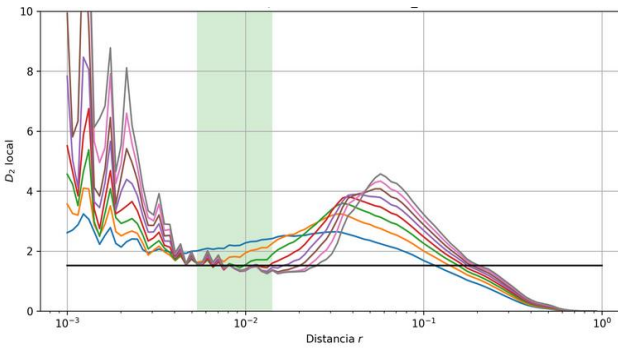
Registro 17-1 N90W



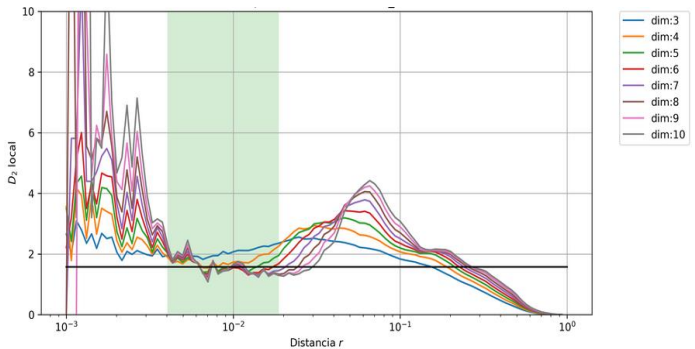
Registro 17-2 N00W



Registro 17-2 N90W

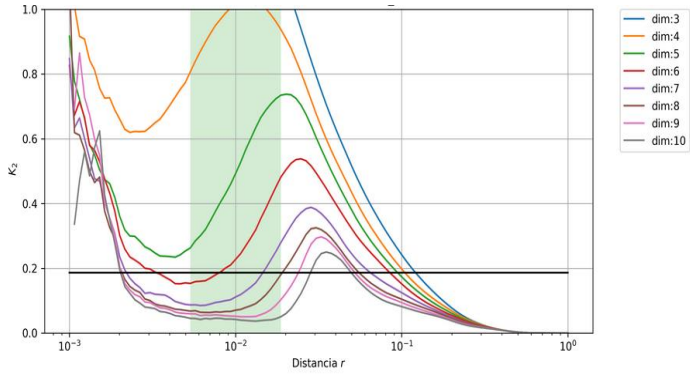


Registro 17-3 N00W

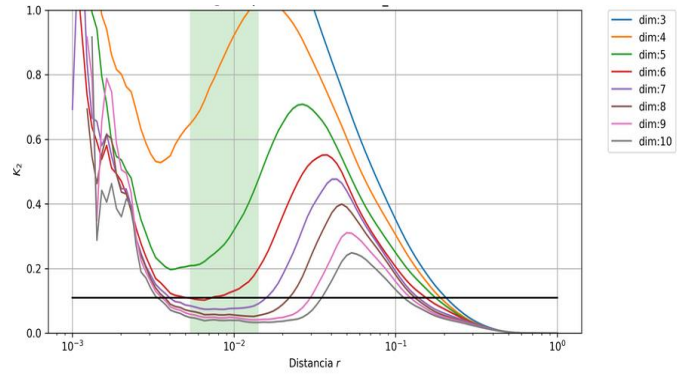


Registro 17-3 N90W

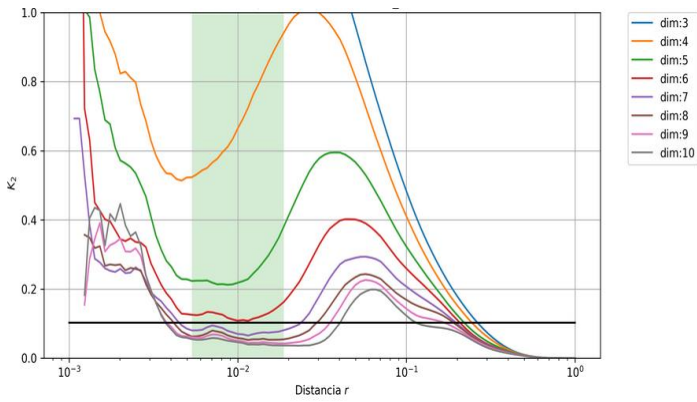
ANEXO III.- RESULTADOS DE ENTROPÍA DE CORRELACIÓN EN REGISTROS DE PASEO BRAVO



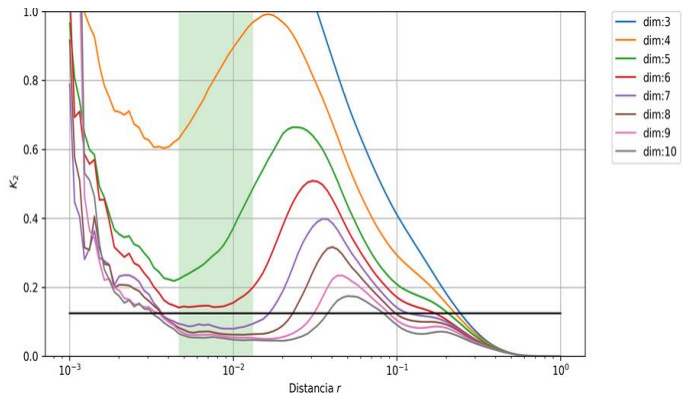
Registro 11-1 N00W



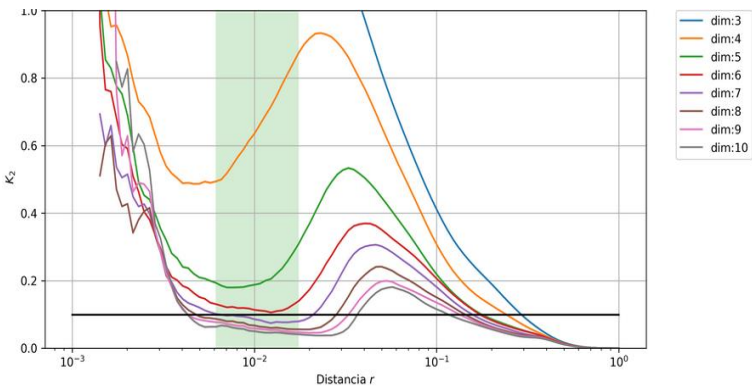
Registro 11-1 N90W



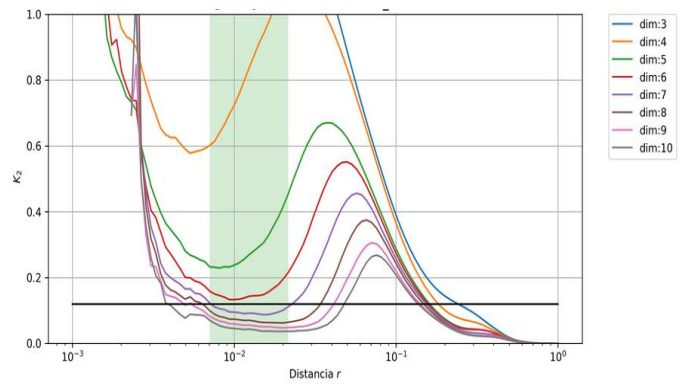
Registro 11-2 N00W



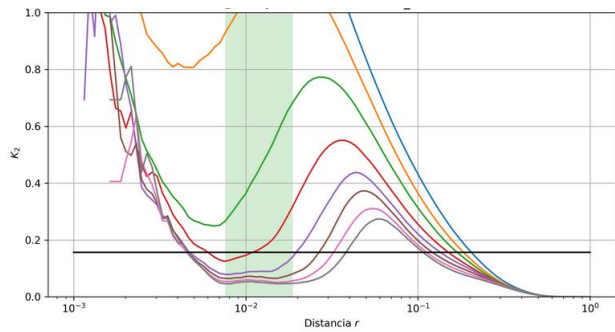
Registro 11-2 N90W



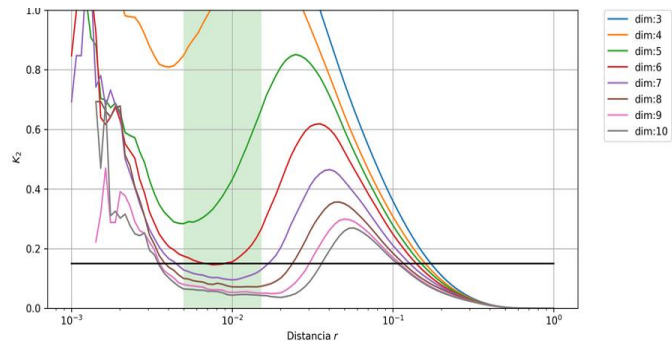
Registro 11-3 N00W



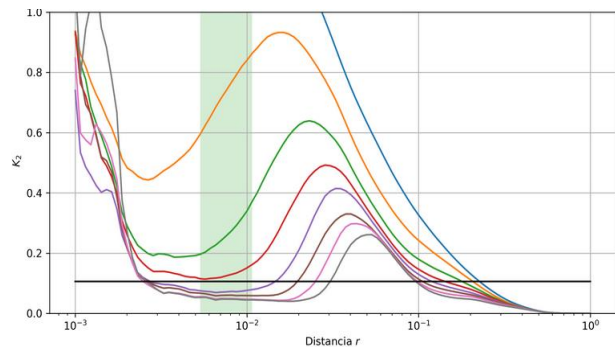
Registro 11-3 N90W



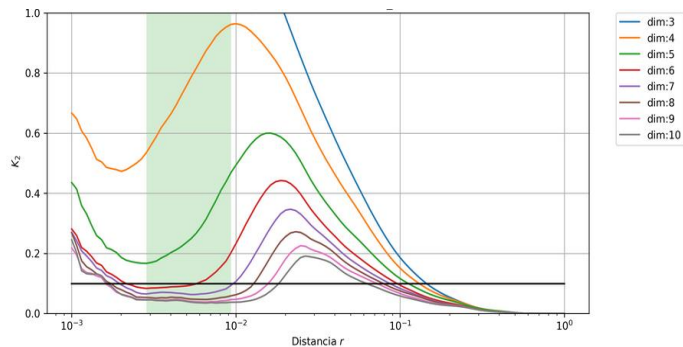
Registro 11-4 N00W



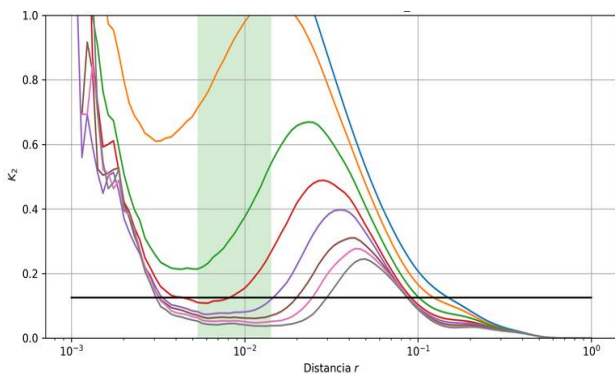
Registro 11-4 N90W



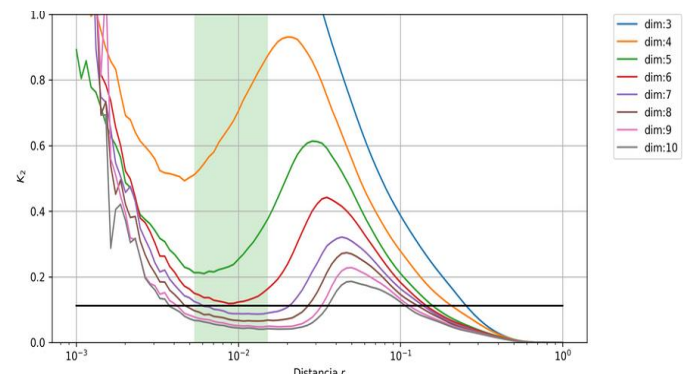
Registro 12-1 N00W



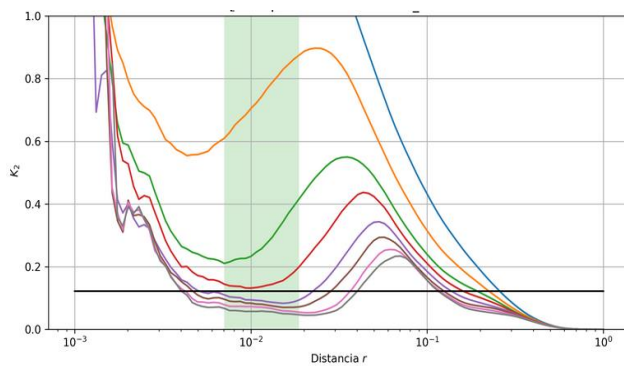
Registro 12-1 N90W



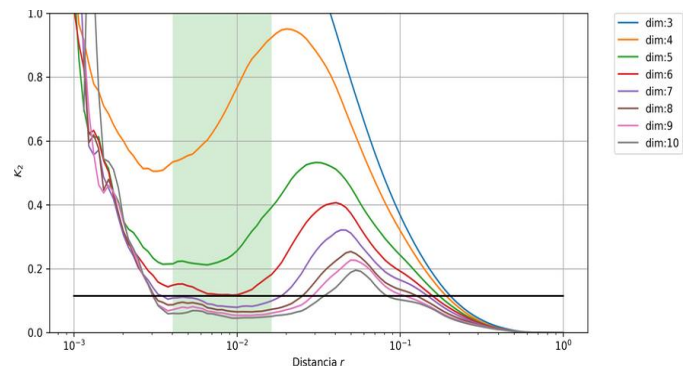
Registro 12-2 N00W



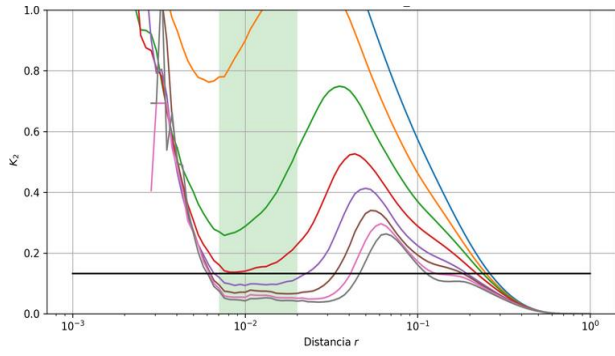
Registro 12-2 N90W



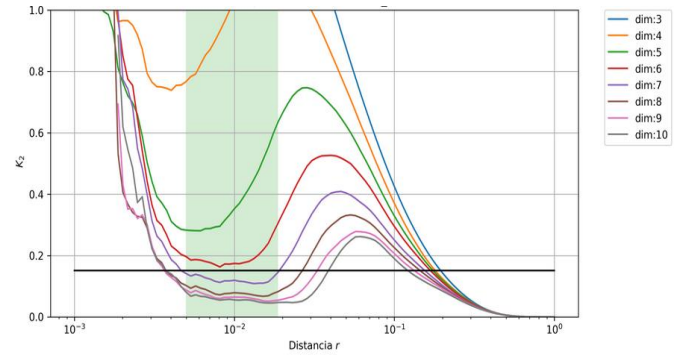
Registro 12-3 N00W



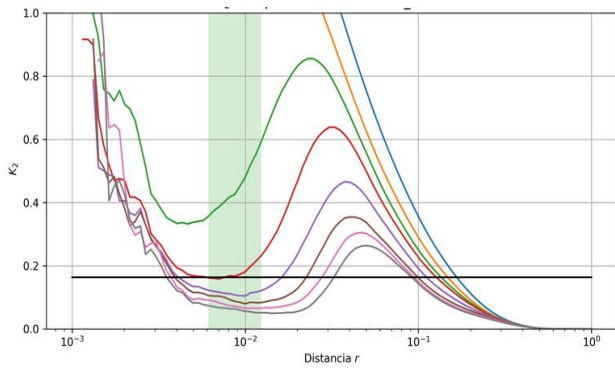
Registro 12-3 N90W



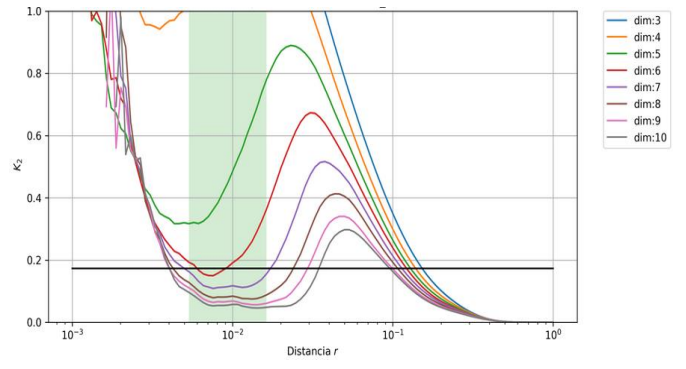
Registro 12-5 N00W



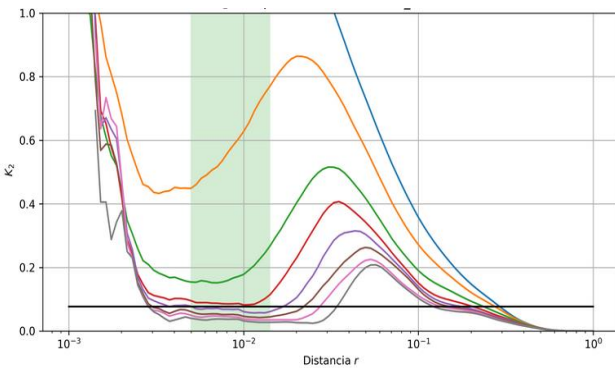
Registro 12-5 N90W



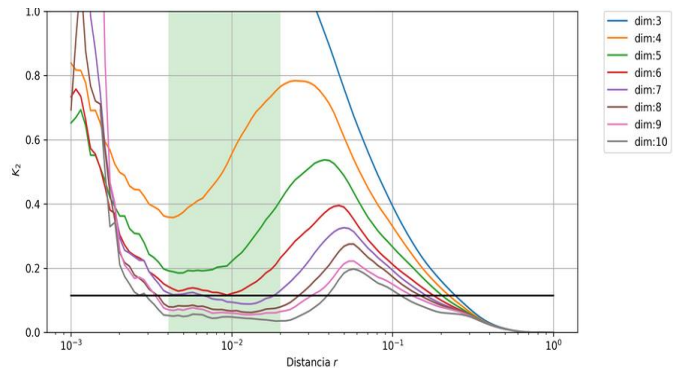
Registro 13-1 N00W



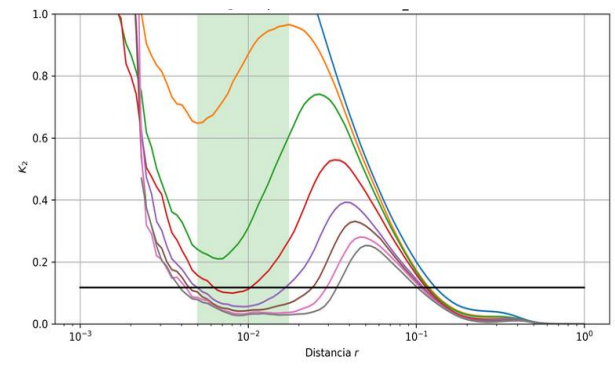
Registro 13-1 N90W



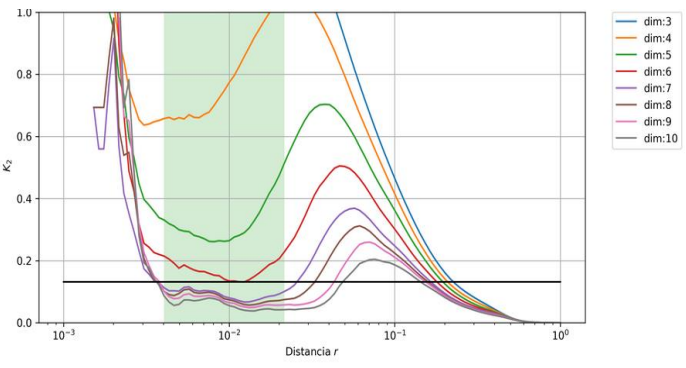
Registro 14-1 N00W



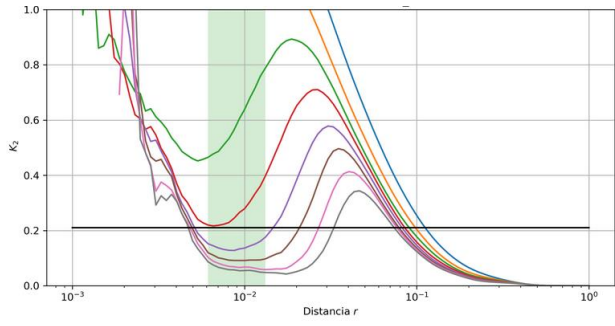
Registro 14-1 N90W



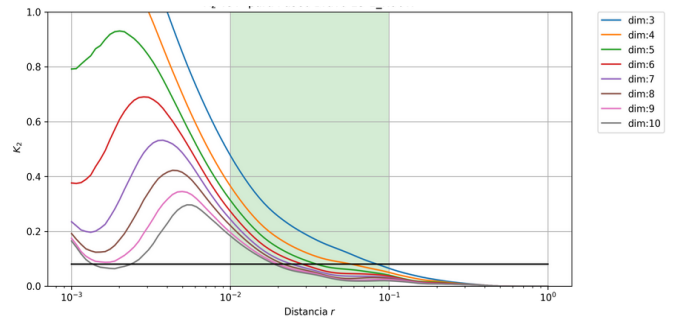
Registro 14-2 N00W



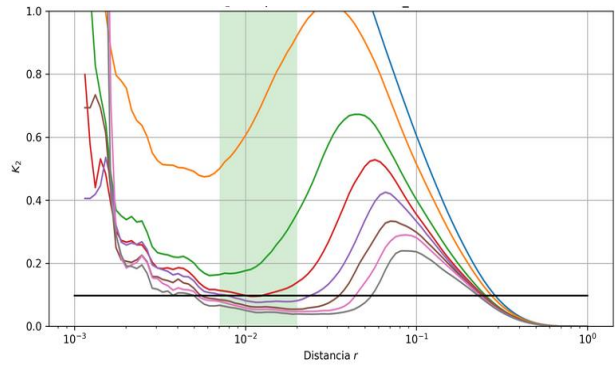
Registro 14-2 N90W



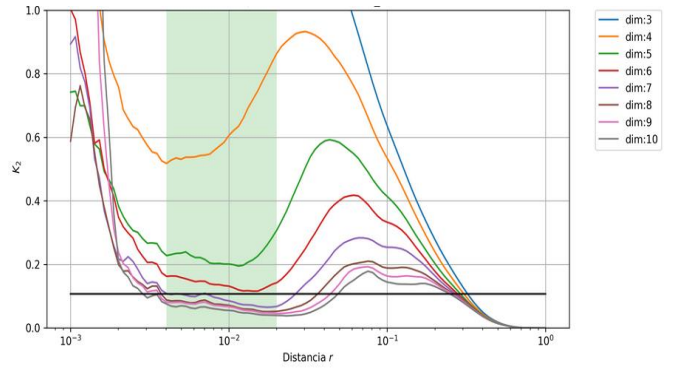
Registro 15-1 N00W



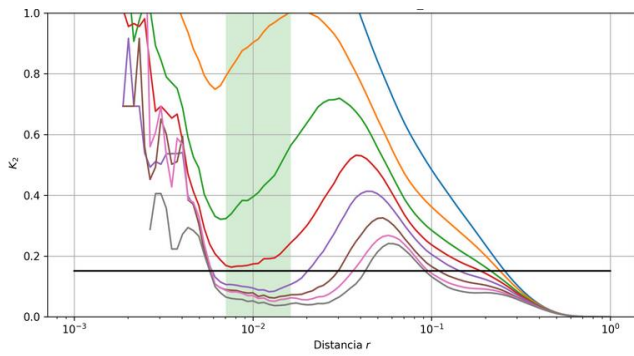
Registro 15-1 N90W



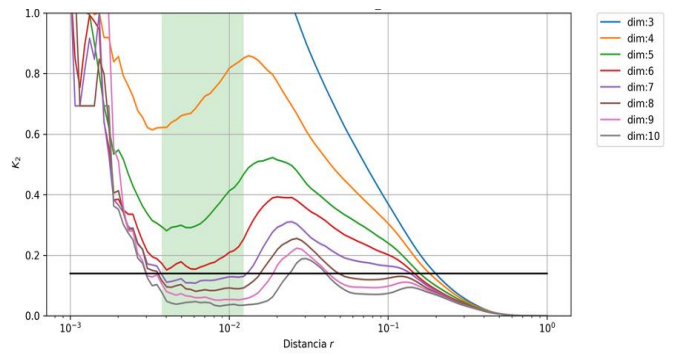
Registro 17-1 N00W



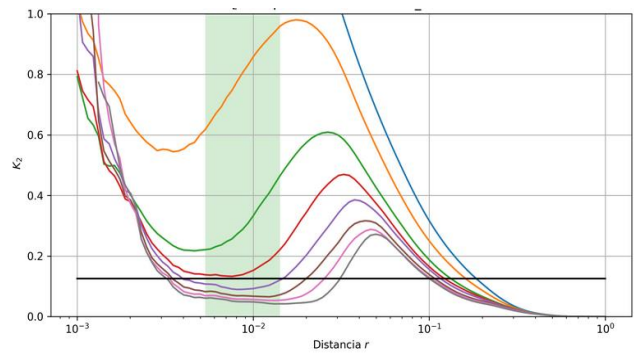
Registro 17-1 N90W



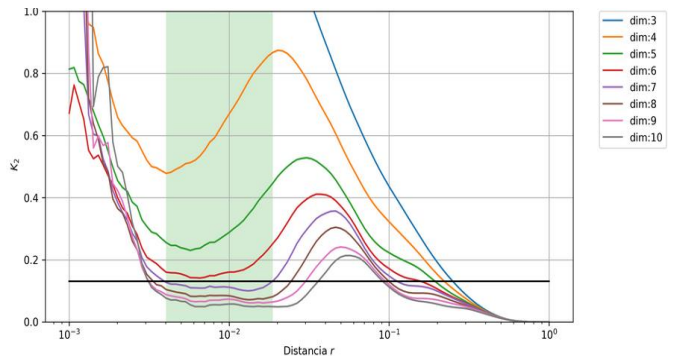
Registro 17-2 N00W



Registro 17-2 N90W

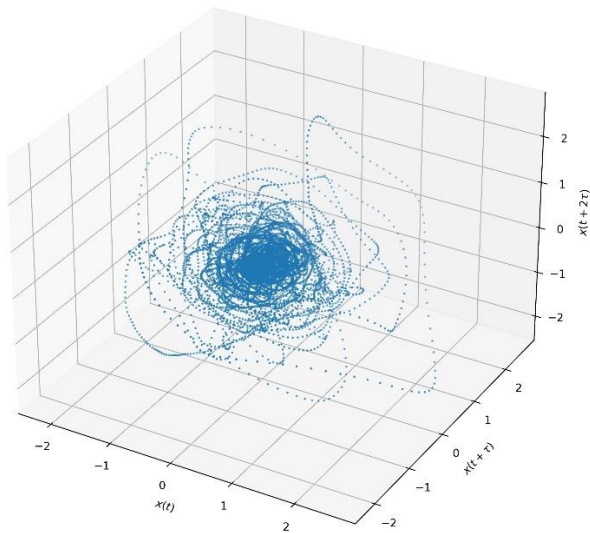


Registro 17-3 N00W

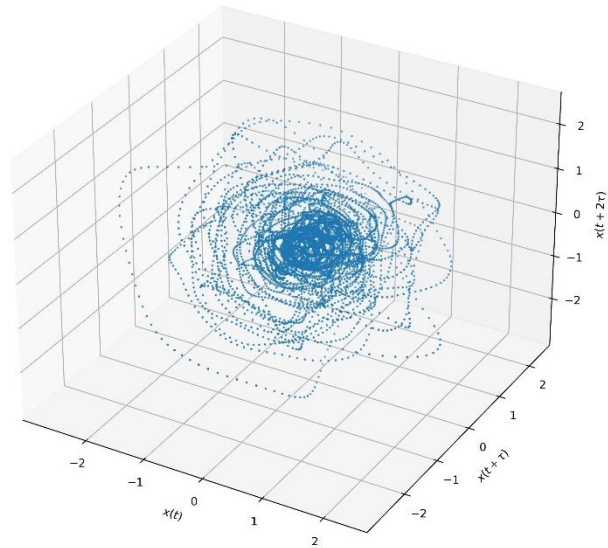


Registro 17-3 N90W

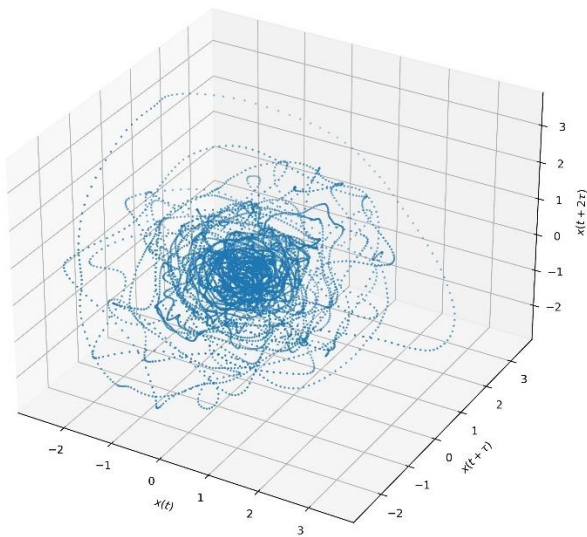
**ANEXO IV.- ATRACTORES RECONSTRUÍDOS PARA REGISTROS DE
PASEO BRAVO**



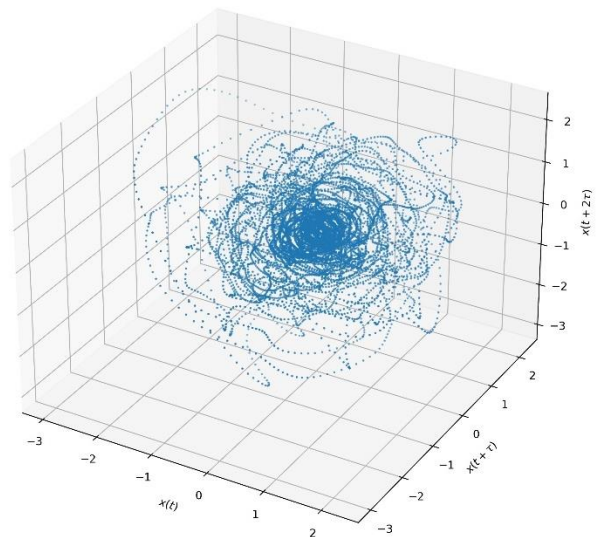
Registro 11-1 N00W



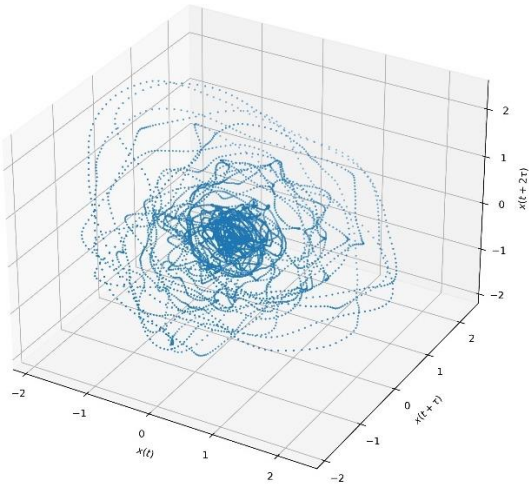
Registro 11-1 N90W



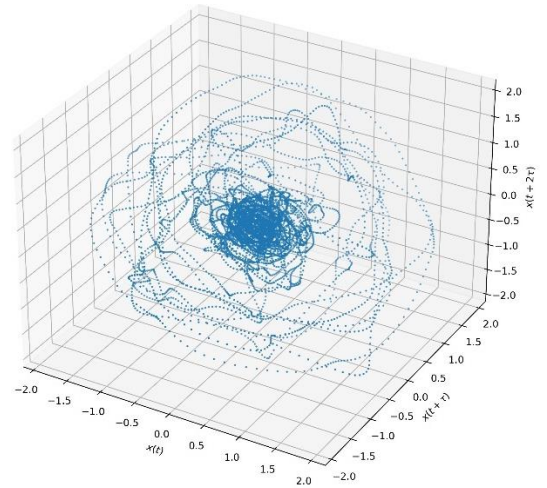
Registro 11-2 N00W



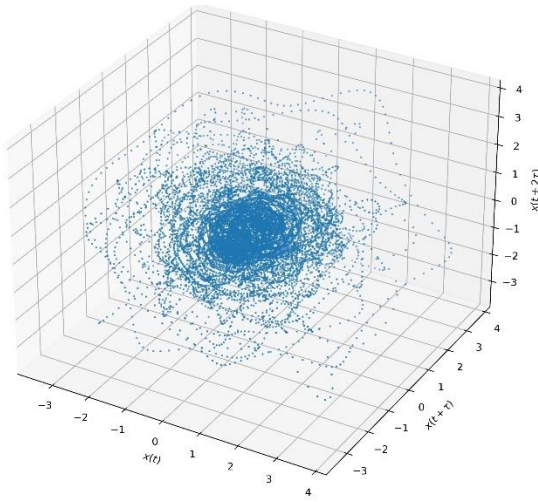
Registro 11-2 N90W



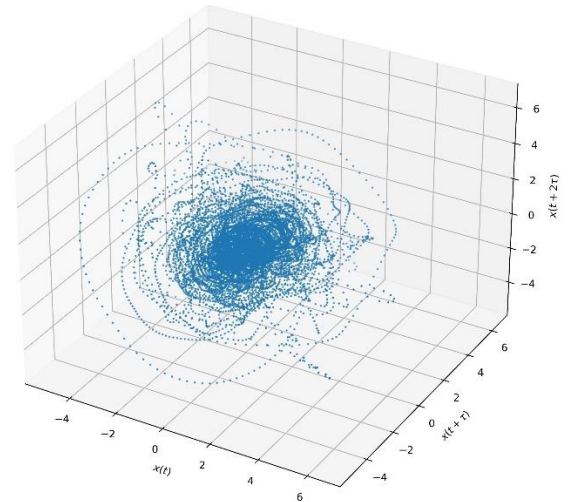
Registro 11-3 N00W



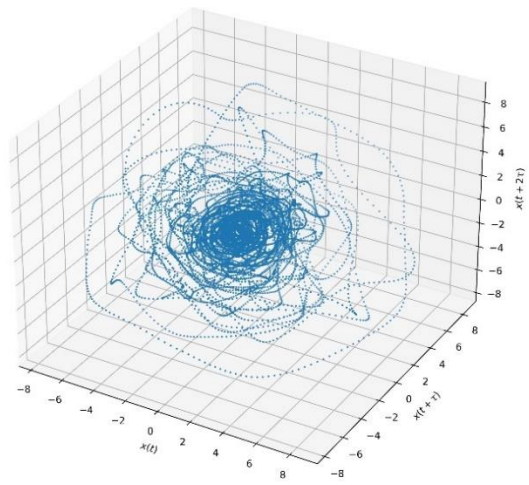
Registro 11-3 N90W



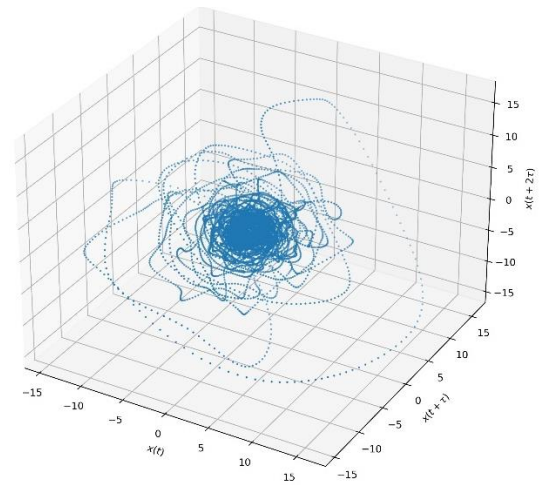
Registro 11-4 N00W



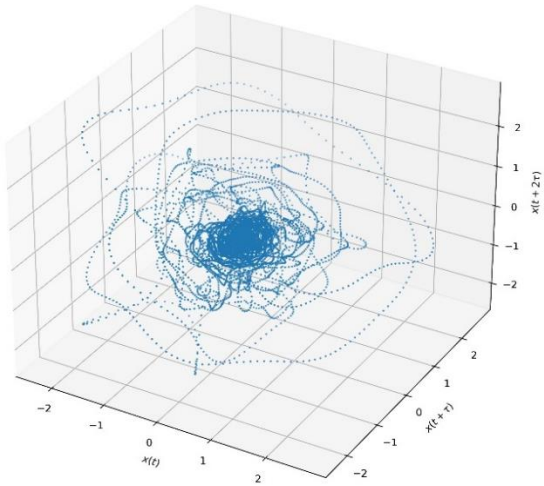
Registro 11-4 N90W



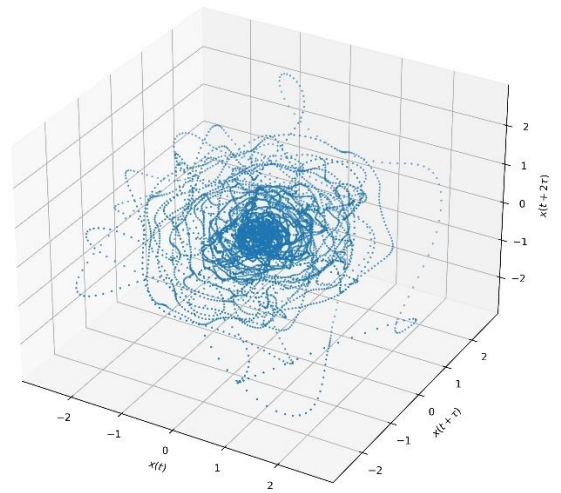
Registro 12-1 N00W



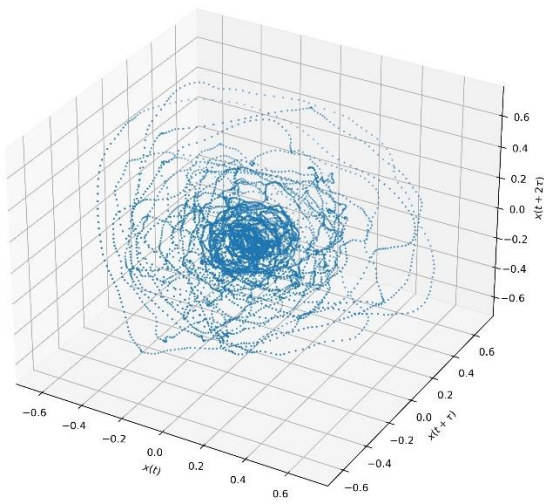
Registro 12-1 N90W



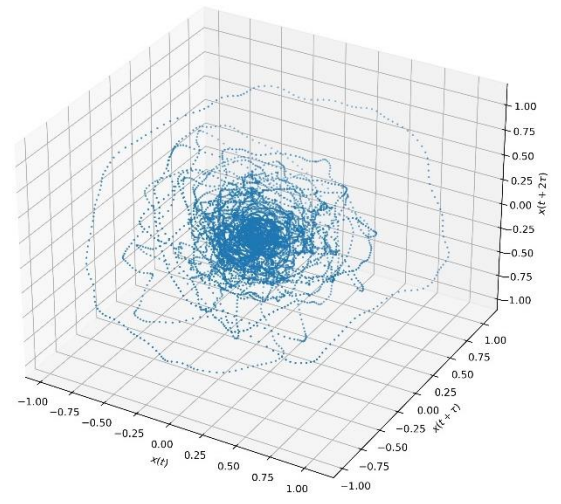
Registro 12-2 N00W



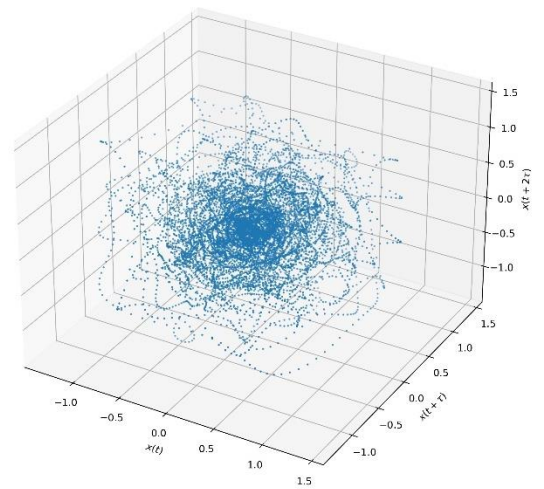
Registro 12-2 N90W



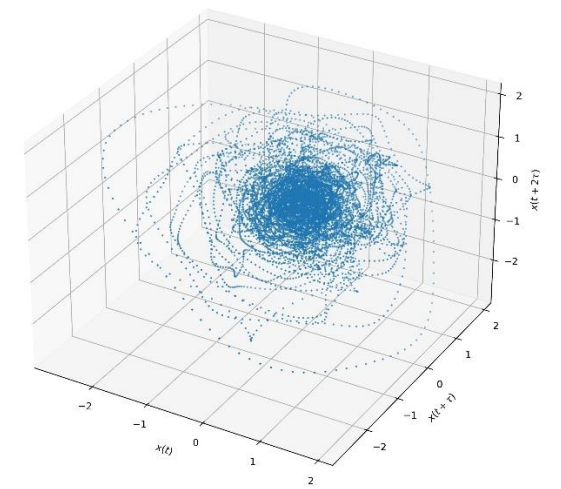
Registro 12-3 N00W



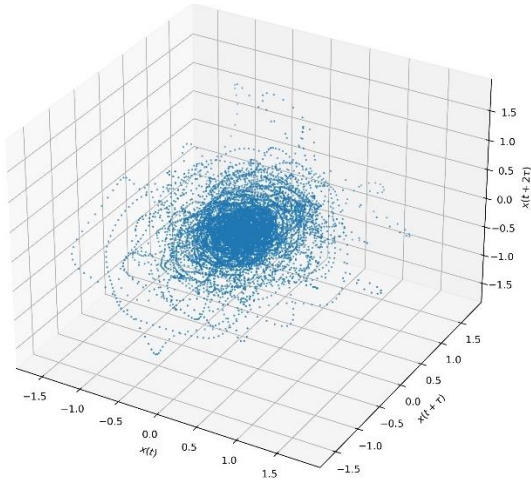
Registro 12-3 N90W



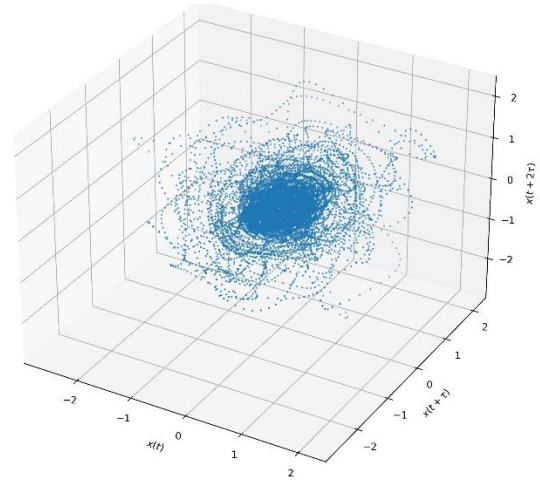
Registro 12-5 N00W



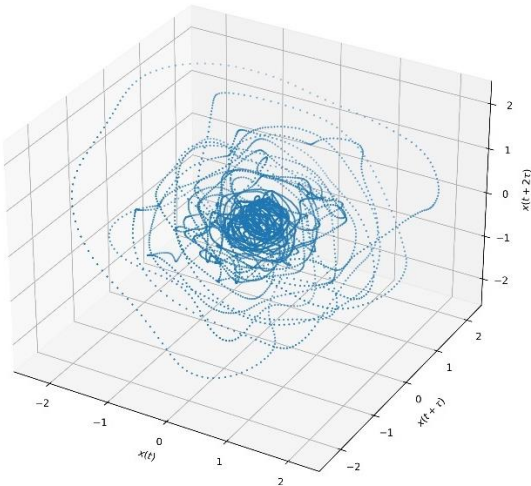
Registro 12-5 N90W



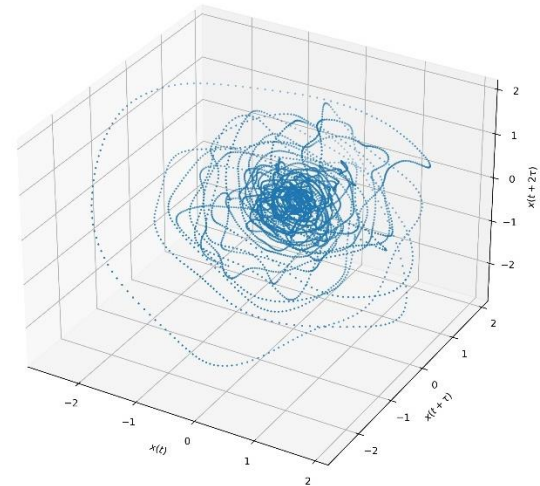
Registro 13-1 N00W



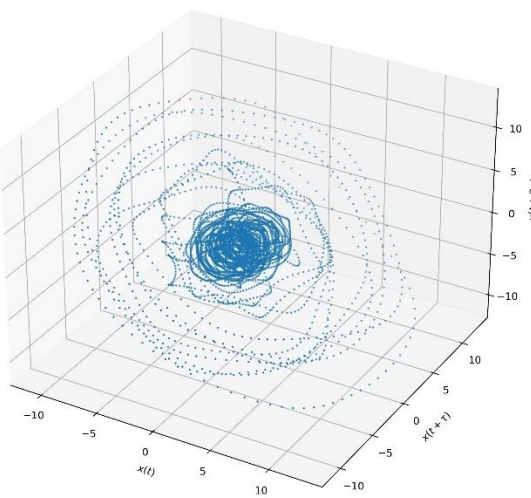
Registro 13-1 N90W



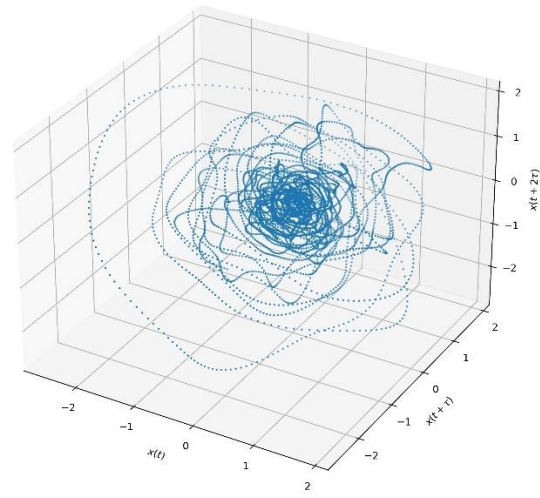
Registro 14-1 N00W



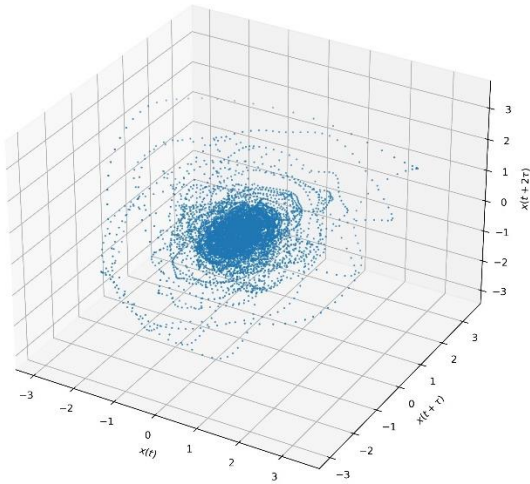
Registro 14-1 N90W



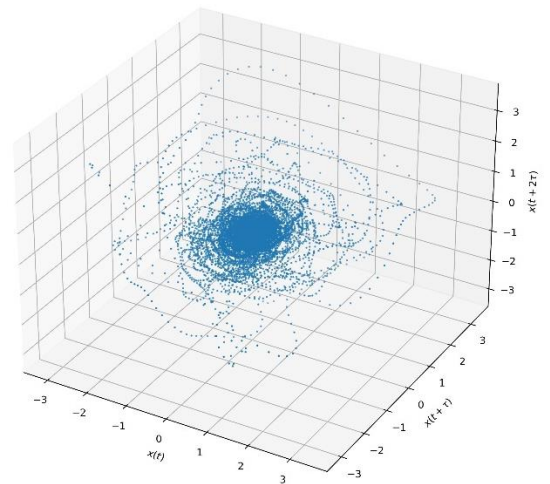
Registro 14-2 N00W



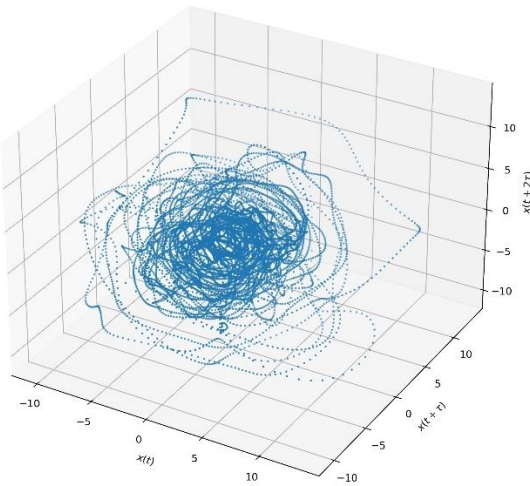
Registro 14-2 N90W



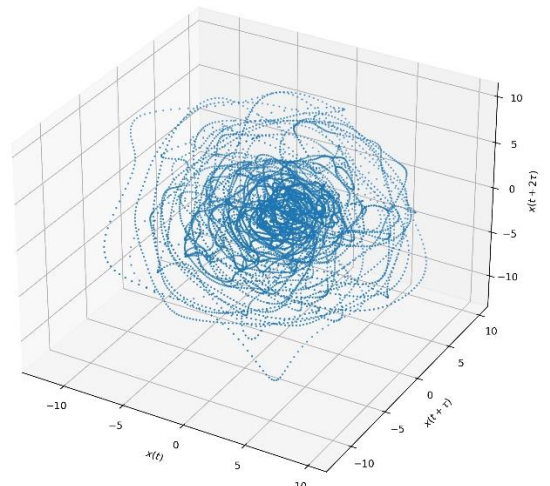
Registro 15-1 N00W



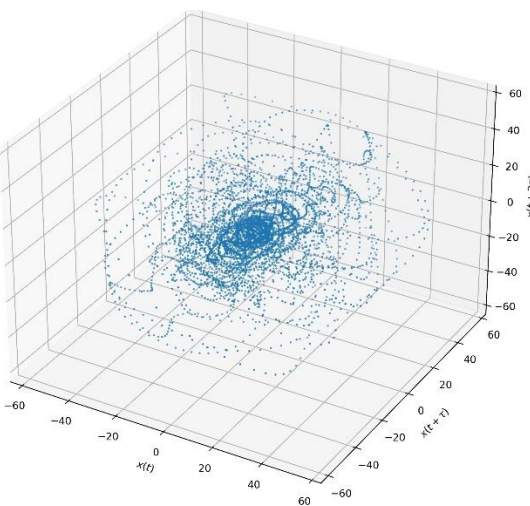
Registro 15-1 N90W



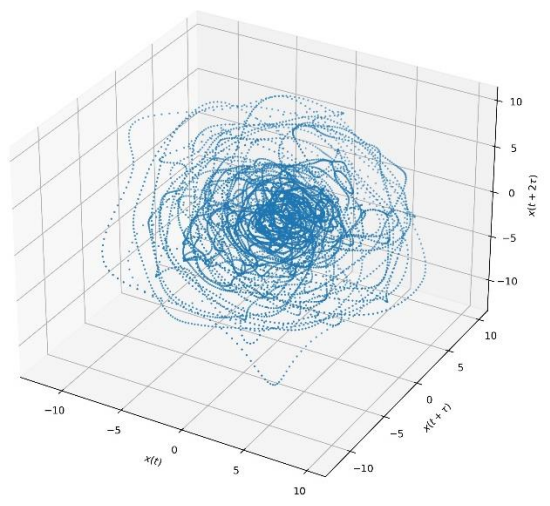
Registro 17-1 N00W



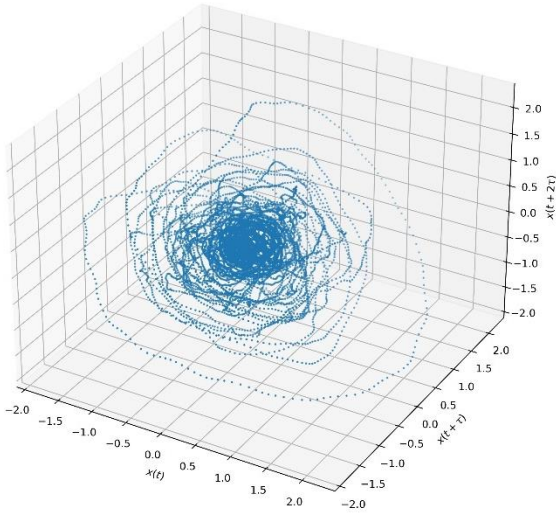
Registro 17-1 N90W



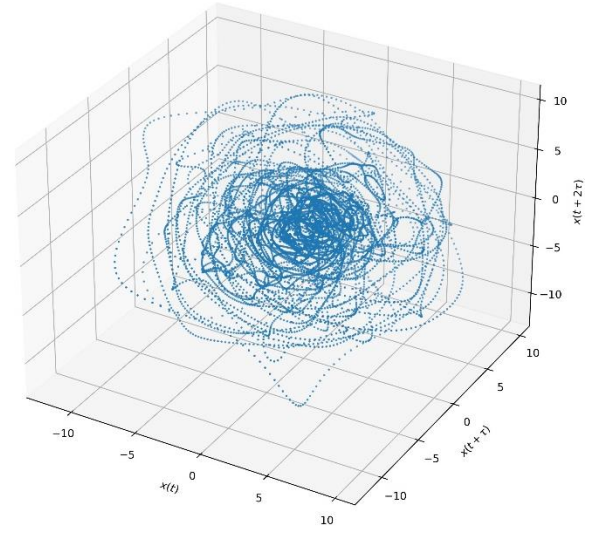
Registro 17-2 N00W



Registro 17-2 N90W



Registro 17-3 N00W



Registro 17-3 N90W