



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

El corrimiento al rojo de fotones emitidos por una partícula
de prueba que orbita un agujero negro de
Reissner-Nordström

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

LICENCIADO EN FÍSICA APLICADA

por

Gerardo Morales Herrera

Asesorado por

Dr. Mehrab Momennia

Dra. Mercedes Paulina Velázquez Quesada

Puebla Pue.
Abril de 2023



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

El corrimiento al rojo de fotones emitidos por una partícula
de prueba que orbita un agujero negro de
Reissner-Nordström

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

LICENCIADO EN FÍSICA APLICADA

por

Gerardo Morales Herrera

Asesorado por

Dr. Mehrab Momennia

Dra. Mercedes Paulina Velázquez Quesada

Puebla Pue.
Abril de 2023

Título: El corrimiento al rojo de fotones emitidos por una partícula de prueba que orbita un agujero negro de Reissner-Nordström

Estudiante: GERARDO MORALES HERRERA

COMITÉ

Dr. Cupatitzio Ramírez Romero
Presidente

Dr. Alfredo Herrera Aguilar
Secretario

Dr. Gerardo Francisco Torres del Castillo
Vocal

Dr. Roberto Cartas Fuentevilla
Vocal

Dr. Mehrab Momennia
Dra. Mercedes Paulina Velázquez Quesada
Asesores

Dedicatoria

A mi familia.

Agradecimientos

Es difícil expresar con palabras la profunda gratitud que siento hacia aquellos que me han brindado su apoyo durante mi carrera. En general estoy bastante feliz porque descubrí que más allá de los títulos, profesores, administrativos, estudiantes, bibliotecarios, etc. hay humanos, dispuestos a ayudar y jamás olvidaré la calidez con que todos me recibieron y orientaron. A los doctores Mehrab y Mercedes por aceptar ser mis asesores de tesis, por ser siempre tan receptivos y guiarme con sus conocimientos. También agradezco al Dr. Alfredo y al Instituto de Física de la Universidad Autónoma de Puebla por confiar en mis capacidades y concederme el apoyo monetario durante mi investigación y desarrollo de esta tesis.

A los miembros del jurado, les agradezco por dedicar su tiempo y paciencia en revisar mi trabajo y por sus comentarios y correcciones que sin duda enriquecieron el contenido de mi investigación.

A mi familia, a quienes debo todos mis logros, ya que sin su constante apoyo, consejos y sacrificios, mi formación académica habría sido mucho más complicada.

Asimismo, agradezco a los docentes de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, quienes comparten día a día su amor por la sabiduría y sus conocimientos, contribuyendo en gran medida a mi formación como profesional. A mis compañeros de clase y amigos de vida, en especial a Josué y Raymundo, cuyo apoyo ha hecho más llevadero este camino. A todas las personas que hacen mi existencia más plena, muchas gracias.

Finalmente, agradezco el interés del lector de este apartado, a quien invito a leer el resto del contenido y espero que encuentre útil y valioso el trabajo aquí presentado.

Índice general

Resumen	XI
1. Introducción	1
1.1. Teorema de no pelo y los parámetros de un agujero negro	2
1.2. La métrica de Reissner-Nordström como una métrica esféricamente simétrica . . .	3
2. Movimiento geodésico de partículas masivas que orbitan un agujero negro de Reissner-Nordström	5
2.1. Deducción matemática	5
2.1.1. Las órbitas circulares estables más internas (ISCOs)	7
3. Movimiento geodésico de fotones que orbitan un agujero de Reissner-Nordström	9
3.1. Parámetro de deflexión de la luz	10
4. Corrimiento al rojo y al azul de los fotones emitidos por cuerpos masivos en órbita alrededor de un agujero negro de Reissner-Nordström	13
4.1. Efecto de la carga sobre el corrimiento total	15
5. Conclusiones	19
Bibliografía	21

Resumen

Un agujero negro con carga eléctrica está descrito por la métrica de Reissner-Nordström [1]. Esta métrica es una solución a las ecuaciones de la relatividad general de Einstein que describe un cuerpo masivo, esféricamente simétrico y estático con carga eléctrica. Este tipo de agujero negro es de gran interés para los físicos ya que representa un caso importante de agujero negro con propiedades electromagnéticas y que ha sido estudiado intensamente los últimos años [1, 2, 3, 4, 5, 6]. Las condiciones astrofísicas que conducen a la formación de este tipo de objetos pueden parecer bastante problemáticas, sin embargo, no hay argumentos teóricos u observacionales que prohíban la existencia de este tipo de agujeros negros [1].

Uno de los fenómenos clave asociados con el agujero negro de Reissner-Nordström es el desplazamiento hacia el rojo gravitacional de los fotones emitidos por partículas (estrellas, gas, etc.) orbitando en su vecindad, que está influenciado tanto por la masa del agujero negro como por su carga eléctrica.

El corrimiento al rojo gravitacional es un fenómeno complejo y fascinante que ha sido objeto de una extensa investigación en los últimos años. Es una manifestación de la curvatura del espacio-tiempo causada por la presencia del agujero negro, que provoca la pérdida de energía de los fotones salientes.

En las siguientes páginas se presenta una deducción de los corrimientos al rojo y al azul totales (corrimiento gravitatorio y cinemático local) de líneas espectrales que experimentan los fotones emitidos por partículas de prueba que orbitan un agujero negro de Reissner-Nordström, con un enfoque particular del impacto de la carga eléctrica en este fenómeno.

En la práctica, la medición de dichos corrimientos es clave para estimar los parámetros de un agujero negro astrofísico, de aquí la importancia de este trabajo.

Capítulo 1

Introducción

Desde la antigüedad, el universo ha sido un objeto de fascinación y misterio para la humanidad. La observación del cielo nocturno y el movimiento de los cuerpos celestes ha llevado a los seres humanos a desarrollar diferentes teorías y modelos para explicar su naturaleza y comportamiento. La comprensión de estos objetos cósmicos ha sido el resultado de un esfuerzo colectivo de una amplia gama de científicos, cuyos estudios individuales en conjunto con los avances en la tecnología y en la metodología científica han permitido una comprensión cada vez más profunda del universo.

Con la publicación de la teoría de la relatividad general de Einstein en 1915, las ideas newtonianas sobre la gravedad y el movimiento en un espacio euclídeo con tiempo absoluto fueron revolucionadas por una percepción totalmente nueva: la idea de eventos ocurriendo en una nueva extensión de cuatro dimensiones llamada espacio-tiempo, en donde tres de las componentes serían espaciales y una temporal. En esta teoría, la mayoría de las fuerzas de la naturaleza son representadas por campos definidos en el nuevo espacio-tiempo (campos eléctricos, campos de corto alcance en las fuerzas subnucleares, etc.). Sin embargo lo que experimentamos como gravedad es, en particular, la curvatura del espacio-tiempo debido a la presencia de materia y/o energía [7, 8].

En general, la curvatura depende de la **métrica**, que define la geometría del espacio-tiempo. En física, las métricas tienen la forma

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (1.1)$$

Las métricas surgen como soluciones a las ecuaciones de campo de Einstein. La primera solución exacta fue desarrollada por Karl Schwarzschild tan solo unos meses después de que Einstein publicara su teoría. Schwarzschild envió una carta a Einstein [9] en la que explicaba el tratamiento matemático para describir el campo gravitatorio alrededor de un objeto masivo, sin rotación y esféricamente simétrico cuyo exterior es vacío. La solución en coordenadas esféricas tiene la forma:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (1.2)$$

Es posible ver que algunos términos divergen cuando $r = 0$ o $r = \frac{2GM}{c^2}$ (radio de Schwarzschild). A estos puntos se les llamó singularidades. La singularidad en $r = 0$ representaba a un punto de densidad infinita curvando el espacio-tiempo en una especie de pozo sin fondo, cuya atracción gravitacional sería tan grande que ni siquiera la luz podría escapar, sin embargo en ese momento no fue posible dar una interpretación a ese resultado [10].

Tiempo después, Robert Oppenheimer, junto a su alumno Hartland Snyder, logró descifrar las implicaciones de la métrica de Schwarzschild y por primera vez se dieron cuenta de toda la importancia del radio de Schwarzschild, al que identificaron correctamente con la presencia de un horizonte. Oppenheimer y Snyder habían descrito el caso esféricamente simétrico donde un cuerpo astronómico se contrae dentro de su radio de Schwarzschild, formando una singularidad de densidad

infinita. Sin embargo, no estaba claro si esto podría suceder en el mundo real y si la suposición de simetría esférica era un requisito previo para el colapso gravitatorio. Roger Penrose se planteó el problema sin suponer simetría esférica, y para su resolución, hizo uso de la topología y desarrolló nuevos métodos matemáticos [11].

Los resultados de Penrose mostraron que estas anormalidades gravitacionales pueden y deben formarse en el universo y que son consecuencia directa de la teoría de la relatividad general. A este fenómeno se le conoce hoy en día como agujero negro.¹

Así pues, la existencia de agujeros negros que inicialmente se consideró una curiosidad matemática, fue adquiriendo grandes evidencias tanto teóricas como observacionales. Desde la década de los 90, los astrofísicos Andrea Ghez y Reinhard Genzel, en conjunto con sus respectivos equipos de estudio han trabajado en la observación directa del centro de nuestra galaxia². Como producto de su arduo trabajo, fue posible el rastreo de las estrellas más cercanas al centro de la Vía Láctea. Dichas observaciones reportaron que las estrellas orbitaban alrededor de un objeto invisible en el centro de la galaxia [12]. A dicho objeto invisible se le llamaría Sagitario A* (Sgr A*).

Ambos equipos de trabajo mostraron interés particular en una estrella a la que el grupo de Genzel llamó S2 (S02 en el grupo de Ghez), debido a su corto periodo orbital alrededor de Sgr A*³.

Además, se detectó una fuente de radio extremadamente compacta en el centro galáctico entre otras observaciones. Esta información confirmó la presencia de objetos masivos y compactos que son consistentes con la hipótesis de la existencia de un agujero negro hospedado en el centro de nuestra galaxia, así como en otras galaxias [13]. La hipótesis fue finalmente confirmada por el **Telescopio del Horizonte de Eventos** en 2019, al publicar la primera imagen de la sombra de un agujero negro supermasivo, localizado en el corazón de la galaxia Messier 87 y, posteriormente, una imagen similar de Sgr A* [14], que se convertirían en las primeras evidencias visuales directas de agujeros negros supermasivos, al mostrar la región alrededor de sus respectivos horizontes de sucesos.

1.1. Teorema de no pelo y los parámetros de un agujero negro

Los agujeros negros están descritos por distintas métricas de acuerdo a las propiedades que éstos poseen. Por ejemplo, para un agujero negro de masa M rotatorio, la métrica de Schwarzschild falla, puesto que esta solución sólo describe cuerpos estáticos sin rotación. En este caso es necesario introducir la métrica de Kerr⁴ [15].

Caracterizar un agujero negro parece ser una tarea bastante difícil que exige la estimación de muchos parámetros. Sin embargo la simplicidad del problema podría sorprender a más de uno. El teorema de no pelo (*no hair theorem* en inglés) establece que es posible caracterizar cualquier agujero negro conociendo solo tres magnitudes: su masa, su carga y su momento angular.

A saber, este teorema supone agujeros negros aislados, es decir, que están presentes en una región del espacio-tiempo que es asintóticamente plana y no contiene otras fuentes [16], por lo que es una aproximación bastante idealizada. En el tratamiento del problema en este trabajo, también se utilizará la suposición de que el agujero negro en cuestión es un cuerpo aislado, con partículas de prueba moviéndose en órbitas circulares estables.

El poder estimar los parámetros indicados por el teorema de no pelo requiere de la combinación de métodos observacionales y teóricos. En el ámbito de la astronomía actual, usualmente se utilizan

¹Se usaron diferentes nombres para referirse a estos objetos cósmicos, sin embargo no fue hasta 1967 que el término agujero negro fue adoptado y popularizado rápidamente por John Wheeler.

²El Premio Nobel de Física 2020 fue otorgado de manera conjunta a Roger Penrose, Reinhard Genzel y Andrea Ghez, por sus contribuciones a la comprensión de los agujeros negros y los objetos supermasivos en el universo.

³A S2 le toma sólo 16 años dar una vuelta completa alrededor de Sgr A* [11]

⁴Este modelo es el más aceptado por los astrofísicos para describir los agujeros negros existentes en nuestro universo.

métodos newtonianos, en ocasiones con correcciones relativistas, para estudiar la dinámica de los cuerpos que orbitan alrededor de agujeros negros supermasivos para inferir cuál es su masa. Este tipo de análisis permite obtener aproximaciones muy aceptables de los parámetros del un agujero negro. Sin embargo recientemente se ha desarrollado un modelo relativista [13] que permite obtener los parámetros del agujero negro, así como información sobre los efectos relativistas presentes en la vecindad de su horizonte de eventos, misma que está codificada en el corrimiento al rojo total (compuesto por el corrimiento gravitacional y el corrimiento cinemático) de los fotones medido en la Tierra.

En este trabajo se presenta la deducción del corrimiento al rojo de los fotones en términos de los parámetros de la métrica (masa y carga eléctrica) y el radio en que orbitan las partículas de prueba.

La estructura en que se presentan los resultados es la siguiente: en el capítulo 2 se presenta una deducción para el movimiento geodésico de partículas que orbitan un agujero negro, en el capítulo 3 se presenta una deducción para el movimiento geodésico de fotones que orbitan un agujero negro, en el capítulo 4 se hace uso de los resultados de las dos secciones anteriores para presentar la deducción de los corrimientos al rojo y al azul de los fotones emitidos por cuerpos masivos orbitando un agujero negro de Reissner-Nordström, y cómo este corrimiento se ve influenciado por la carga. Finalmente, en el capítulo 5 se presentan las conclusiones.

Es importante recalcar que el método mencionado con anterioridad puede ser generalizado a métricas esféricamente simétricas.

1.2. La métrica de Reissner-Nordström como una métrica esféricamente simétrica

La solución que corresponde al campo gravitacional de un objeto de masa M con carga Q , sin rotación y esféricamente simétrico fue desarrollada de manera independiente por Hans Reissner en 1916 y por Gunnar Nordström en 1918. Este caso difiere de la solución de Schwarzschild debido a que presenta la existencia de un campo electrostático provocado por la carga Q . Esto implica que además de las ecuaciones de campo de Einstein se deben satisfacer las ecuaciones de Maxwell [7]. A esta solución se le llama métrica de Reissner-Nordström y es una solución estática para las ecuaciones de campo de Einstein-Maxwell.

En coordenadas esféricas la métrica resulta:

$$ds^2 = -c^2 d\tau^2 = - \left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2} \right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2} \right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2 \theta d\varphi^2), \quad (1.3)$$

donde r_s es el **radio de Schwarzschild** del objeto, dado por $r_s = \frac{2GM}{c^2}$ y $r_Q^2 = k \frac{Q^2 G}{c^4}$. En estas ecuaciones k es la constante de Coulomb, G es la constante gravitatoria y c es la velocidad de la luz. Para simplificar los cálculos de aquí en adelante se hará uso de las unidades naturales $G = c = k = 1$, por lo que la métrica se reduce a:

$$ds^2 = -d\tau^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2 \theta d\varphi^2). \quad (1.4)$$

Esta métrica tiene la forma

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{1}{g(r)}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2), \quad (1.5)$$

que es la generalización para métricas esféricamente simétricas (en este caso $f(r) = g(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}$). Además, es trivial que las componentes se relacionan de la siguiente manera:

$$g_{tt} = -f(r), \quad g_{rr} = \frac{1}{f(r)}, \quad g_{\theta\theta} = r^2, \quad g_{\varphi\varphi} = r^2 \text{sen}^2\theta,$$

de donde es posible notar que los términos de la métrica generalizada (1.5) poseen una dependencia $g_{\mu\nu}(r, \theta)$.

Capítulo 2

Movimiento geodésico de partículas masivas que orbitan un agujero negro de Reissner-Nordström

En un espacio-tiempo curvado, el movimiento libre de las partículas se describe a través de lo que se conoce como movimiento geodésico. Una geodésica es la trayectoria de menor longitud entre dos puntos, y a su vez, la curva a través de la cual se mueve una partícula en caída libre [17] .

2.1. Deducción matemática

Una partícula de prueba masiva que sigue geodésicas descritas en el espacio-tiempo por la métrica (1.4), tiene cuadrivelocidad

$$U^\mu = (U^t, U^r, U^\theta, U^\varphi), \quad U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}, \quad (2.1)$$

cuya normalización es

$$U^\mu U_\mu = -1. \quad (2.2)$$

Además, la métrica (1.4) posee dos vectores de Killing¹ linealmente independientes asociados a las simetrías temporal y esférica respectivamente:

$$\begin{aligned} \xi^\mu &= (1, 0, 0, 0) \quad \text{campo vectorial de Killing tipo temporal,} \\ \psi^\mu &= (0, 0, 0, 1) \quad \text{campo vectorial de Killing tipo rotacional.} \end{aligned} \quad (2.3)$$

El vector de Killing ξ^μ indica que la métrica es invariante en el tiempo lo que significa que hay una cantidad física conservada correspondiente a la energía. De igual manera el vector de Killing ψ^μ indica invarianza bajo rotaciones sobre la coordenada azimutal, la cantidad conservada en este caso corresponde a una componente del momento angular. Por lo tanto, la energía total y el momento angular por unidad de masa en reposo de la partícula de prueba se pueden expresar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} E &= \frac{\bar{E}}{m} = -\xi_\mu U^\mu = -g_{\mu\nu} \xi^\nu U^\mu = -g_{tt} \xi^t U^t = -g_{tt} U^t, \\ L &= \frac{\bar{L}}{m} = \psi_\mu U^\mu = g_{\mu\nu} \psi^\nu U^\mu = g_{\varphi\varphi} \psi^\varphi U^\varphi = g_{\varphi\varphi} U^\varphi. \end{aligned} \quad (2.4)$$

¹Estos vectores son soluciones de la ecuación de Killing, que es una ecuación diferencial que involucra la derivada de Lie, una operación que mide cómo un campo tensorial cambia a lo largo de un campo vectorial. En este sentido, los vectores de Killing representan direcciones en las que una variedad es simétrica y se mantiene invariante bajo ciertas transformaciones.

**Movimiento geodésico de partículas masivas que orbitan un agujero negro de
Reissner-Nordström**
2.1 Deducción matemática

Estas relaciones permiten la obtención de las componentes de la cuadrivelocidad en términos de E y L :

$$\begin{aligned} U^t &= -\frac{E}{g_{tt}} = \frac{E}{1 - (2M/r) + (Q^2/r^2)}, \\ U^\varphi &= \frac{L}{g_{\varphi\varphi}} = \frac{L}{r^2}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Haciendo el desarrollo de la ecuación (2.2) se obtiene:

$$\begin{aligned} -1 &= g_{tt}(U^t)^2 + g_{rr}(U^r)^2 + g_{\theta\theta}(U^\theta)^2 + g_{\varphi\varphi}(U^\varphi)^2 \\ -1 &= g_{tt}\left(-\frac{E}{g_{tt}}\right)^2 + g_{rr}(U^r)^2 + g_{\theta\theta}(U^\theta)^2 + g_{\varphi\varphi}\left(\frac{L}{g_{\varphi\varphi}}\right)^2. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Debido a la simetría de la métrica, las órbitas de las partículas de prueba están confinadas a un plano. Convenientemente en coordenadas esféricas se puede elegir este plano como el plano ecuatorial $\theta = \frac{\pi}{2}$, por lo tanto la componente polar de la cuadrivelocidad es nula ($U^\theta = 0$). La ecuación (2.6) se reduce a:

$$\begin{aligned} -1 &= g_{rr}(U^r)^2 + \frac{E^2}{g_{tt}} + \frac{L^2}{g_{\varphi\varphi}} \\ \Rightarrow 0 &= g_{rr}(U^r)^2 + 1 + \frac{E^2}{g_{tt}} + \frac{L^2}{g_{\varphi\varphi}} \\ \Rightarrow 0 &= g_{rr}(U^r)^2 + V_{eff}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

La relación (2.7) tiene la forma de una ley de la conservación de energía para una partícula no relativista moviéndose bajo un potencial efectivo $V_{eff} = 1 + \frac{E^2}{g_{tt}} + \frac{L^2}{g_{\varphi\varphi}}$.

Este potencial efectivo ofrece información sobre el comportamiento de las órbitas. Para el tratamiento matemático, se impondrá la condición de órbitas circulares ($U^r = 0$) que proporciona un caso particular del problema y simplifica futuros cálculos. Una vez que la componente radial de la cuadrivelocidad desaparece, se tiene que $V_{eff} = 0$ y $V'_{eff} = 0$. A su vez, las órbitas circulares serán estables cuando se tenga un mínimo estable en V_{eff} , es decir, $V''_{eff} > 0$.

$$\begin{aligned} V_{eff} &= 1 + \frac{E^2}{g_{tt}} + \frac{L^2}{g_{\varphi\varphi}}, \\ V'_{eff} &= -\frac{E^2}{g_{tt}^2} \frac{\partial g_{tt}}{\partial r} - \frac{L^2}{g_{\varphi\varphi}^2} \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial r}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Sustituyendo los valores de la métrica $g_{tt} = -f$ y $g_{\varphi\varphi} = r^2 \text{sen}^2\theta$ en (2.8):

$$\begin{aligned} V_{eff} &= 1 - \frac{E^2}{f} + \frac{L^2}{r^2}, \\ V'_{eff} &= \frac{E^2}{f^2} \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{L^2}{(r^2 \text{sen}^2\theta)^2} 2r \text{sen}^2\theta. \end{aligned}$$

Como en el plano ecuatorial $\text{sen}^2\theta = \text{sen}^2(\pi/2) = 1$, el sistema de ecuaciones que se obtiene tras imponer órbitas circulares es:

$$\boxed{V_{eff} = 1 - \frac{E^2}{f} + \frac{L^2}{r^2} = 0, \quad V'_{eff} = \frac{E^2}{f^2} \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{2L^2}{r^3} = 0.}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones para hallar E y L en términos de r y f :

$$\begin{aligned} E &= f \sqrt{\frac{2}{2f - r \frac{\partial f}{\partial r}}}, \\ L &= (\pm)r \sqrt{\frac{r \frac{\partial f}{\partial r}}{2f - r \frac{\partial f}{\partial r}}}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

En términos de la métrica de R-N:

$$\begin{aligned} E &= f \frac{r}{\sqrt{r^2 - 3Mr + 2Q^2}}, \\ L &= (\pm)r \sqrt{\frac{Mr - Q^2}{r^2 - 3Mr + 2Q^2}}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

de donde se pueden obtener las componentes de la cuadrivelocidad:

$$\boxed{\begin{aligned} U^t &= \frac{E}{f} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - 3Mr + 2Q^2}}, \\ U^\varphi &= \frac{L}{r^2} = (\pm) \frac{1}{r} \sqrt{\frac{Mr - Q^2}{r^2 - 3Mr + 2Q^2}}. \end{aligned}} \quad (2.11)$$

2.1.1. Las órbitas circulares estables más internas (ISCOs)

Como se mencionó anteriormente, se muestra interés por los casos en que se obtienen mínimos estables. Si $V'_{eff} = 0$ y $V''_{eff} > 0$, se obtendrán órbitas circulares estables. Por otro lado en $V''_{eff} = 0$, se encuentra el punto de inflexión: aquí el valor de r determina la distancia a la que se encuentra la **órbita circular estable más interna** (ISCO por sus siglas en inglés). Este nuevo parámetro representa la frontera entre partículas de prueba orbitando al agujero negro y partículas de prueba cayendo directamente hacia él.

Para un agujero negro de Schwarzschild, el radio de la órbita circular estable más interna r_{ISCO} se encuentra a una distancia de $r = 6M$.

Para hallar el r_{ISCO} en la métrica de R-N, se busca la segunda derivada del potencial efectivo:

$$\begin{aligned} V''_{eff} &= \frac{2E^2}{g_{tt}^3} \left(\frac{\partial g_{tt}}{\partial r} \right)^2 - \frac{E^2}{g_{tt}^2} \frac{\partial^2 g_{tt}}{\partial r^2} + \frac{2L^2}{g_{\varphi\varphi}^3} \left(\frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial r} \right)^2 - \frac{L^2}{g_{\varphi\varphi}^2} \frac{\partial^2 g_{\varphi\varphi}}{\partial r^2} \\ &\boxed{V''_{eff} = \frac{E^2}{f^2} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \frac{2}{f} \left(\frac{\partial f}{\partial r} \right)^2 \right] + \frac{6L^2}{r^4}}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

sustituyendo los valores de E y L hallados en (2.10), e igualando a cero:

$$V''_{eff} = \frac{2}{2f - r \frac{\partial f}{\partial r}} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \frac{2}{f} \left(\frac{\partial f}{\partial r} \right)^2 + \frac{3}{r} \frac{\partial f}{\partial r} \right] = 0. \quad (2.13)$$

Reescribiendo las derivadas parciales en términos de la métrica:

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{2M}{r^2} - \frac{2Q^2}{r^3}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = \frac{6Q^2}{r^4} - \frac{4M}{r^3}, \quad (2.14)$$

y sustituyendo en (2.13):

**Movimiento geodésico de partículas masivas que orbitan un agujero negro de
Reissner-Nordström**
2.1 Deducción matemática

$$V''_{eff} = \frac{r^2}{r^2 - 3Mr + 2Q^2} \left[\frac{6Q^2}{r^4} - \frac{4M}{r^3} - \frac{2r^2}{r^2 - 2Mr + Q^2} \left(\frac{2M}{r^2} - \frac{2Q^2}{r^3} \right)^2 + \frac{3}{r} \left(\frac{2M}{r^2} - \frac{2Q^2}{r^3} \right) \right] = 0,$$

es claro que el primer factor del potencial efectivo no puede ser cero, por lo tanto el término que está dentro de corchetes debe ser cero. Simplificando la ecuación:

$$\frac{6Q^2}{r^4} - \frac{4M}{r^3} - \frac{2r^2}{r^2 - 2Mr + Q^2} \left(\frac{2M}{r^2} - \frac{2Q^2}{r^3} \right)^2 + \frac{3}{r} \left(\frac{2M}{r^2} - \frac{2Q^2}{r^3} \right) = 0 \quad (2.15)$$

$$\Rightarrow Mr^3 - 6M^2r^2 + 9MQ^2r - 4Q^4 = 0.$$

La solución de (2.15) para r representa al r_{ISCO} , y está dada por²:

$$r_{ISCO} = \frac{a^2 - 3M^2Q^2 + 4M^4}{Ma} + 2M, \quad (2.16)$$

con

$$a = \left(M^2 \left(8M^4 - 9M^2Q^2 + 2Q^4 + Q^2 \sqrt{5M^4 - 9M^2Q^2 + 4Q^4} \right) \right)^{1/3} \quad (2.17)$$

²Es posible ver que cuando $Q = 0$ se obtiene el r_{ISCO} de un agujero negro en la métrica de Schwarzschild.

Capítulo 3

Movimiento geodésico de fotones que orbitan un agujero de Reissner-Nordström

Para analizar el movimiento de los fotones emitidos por las partículas masivas descritas anteriormente, se utilizará un enfoque similar al del capítulo 2. Estos fotones se mueven con un cuadrimomento $k^\mu = (k^t, k^r, k^\theta, k^\varphi)$ a lo largo de geodésicas nulas, lo que se expresa matemáticamente como:

$$k^\mu k_\mu = 0. \quad (3.1)$$

Debido a la simetría esférica, el movimiento de los fotones tiene ciertas cantidades conservadas, específicamente la energía E_γ y el momento angular L_γ . Estas cantidades se obtienen a través de las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} E_\gamma &= -\xi_\mu k^\mu = -g_{\mu\nu} \xi^\nu k^\mu = -g_{tt} \xi^t k^t = -g_{tt} k^t, \\ L_\gamma &= \psi_\mu k^\mu = g_{\mu\nu} \psi^\nu k^\mu = g_{\varphi\varphi} \psi^\varphi k^\varphi = g_{\varphi\varphi} k^\varphi. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Estas relaciones permiten la obtención de las componentes del cuadrimomento en términos de E_γ y L_γ :

$$\begin{aligned} k^t &= -\frac{E_\gamma}{g_{tt}} = \frac{E_\gamma}{1 - (2M/r) + (Q^2/r^2)} \\ k^\varphi &= \frac{L_\gamma}{g_{\varphi\varphi}} = \frac{L_\gamma}{r^2}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Luego, utilizando el desarrollo de (3.1) se llega a la siguiente expresión:

$$0 = g_{tt}(k^t)^2 + g_{rr}(k^r)^2 + g_{\theta\theta}(k^\theta)^2 + g_{\varphi\varphi}(k^\varphi)^2, \quad (3.4)$$

sustituyendo los valores de k^t y k^φ y tomando en cuenta que en el plano ecuatorial la componente polar del cuadrimomento es nula ($k^\theta = 0$)

$$\boxed{0 = g_{rr}(k^r)^2 + \frac{E_\gamma^2}{g_{tt}} + \frac{L_\gamma^2}{g_{\varphi\varphi}}} \quad (3.5)$$

3.1. Parámetro de deflexión de la luz

Al dividir la ecuación (3.5) por E_γ^2 se tiene:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{g_{rr}(k^r)^2}{E_\gamma^2} + \frac{1}{g_{tt}} + \frac{L_\gamma^2}{E_\gamma^2} \frac{1}{g_{\varphi\varphi}}, \\ 0 &= \frac{g_{rr}(k^r)^2}{E_\gamma^2} + \frac{1}{g_{tt}} + b_\gamma^2 \frac{1}{g_{\varphi\varphi}}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

en donde se ha introducido un nuevo parámetro $b_\gamma \equiv \frac{L_\gamma}{E_\gamma}$ que corresponde a la **deflexión de la luz**¹.

$$b_\gamma = \mp \sqrt{-g_{\varphi\varphi} \frac{g_{rr}(k^r)^2}{E_\gamma^2} - \frac{g_{\varphi\varphi}}{g_{tt}}}. \quad (3.7)$$

Es preciso notar que este parámetro se maximiza cuando la componente radial del cuadrivector es nula, es decir $k^r = 0$, por lo tanto el parámetro de deflexión maximizado está dado por:

$$\begin{aligned} b_\gamma &= \mp \sqrt{-\frac{g_{\varphi\varphi}}{g_{tt}}}, \\ \Rightarrow b_\gamma &= \mp \frac{r}{\sqrt{f}}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

que en términos de la métrica se expresa como:

$$b_\gamma = \mp \frac{r}{\sqrt{1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}}}, \quad (3.9)$$

donde el signo (\mp) indica dos valores diferentes de b . Estos valores están definidos por las dos posiciones en que se cumple que $k^r = 0$. Además, este parámetro se conserva a lo largo de toda la geodésica nula seguida por los fotones emitidos ($b_e = b_d$) [15].

El signo positivo será asociado al **corrimiento al azul** y corresponde a la posición de las partículas masivas a la izquierda de la línea de visión; por otro lado el signo negativo está asociado al **corrimiento al rojo** [18] y corresponde a la deflexión de partículas ubicadas a la derecha de la línea de visión como se ilustra en la Fig 3.1.²

En el punto central, la contribución angular es nula ($k^\varphi = 0$), lo que implica que el parámetro de deflexión en el punto central es $b_c = 0$ (véase Fig. 3.1).

En la Figura 3.2 se ilustra la comparativa entre el comportamiento del valor absoluto de b_γ para el caso en que $Q = 0$ (agujero negro de Schwarzschild) y los casos en que agregamos carga. Aquí se ha introducido una nueva variable a las que indentificamos como M_\bullet , y corresponde a la masa de un agujero negro cargado arbitrario.

¹También conocido en el enfoque newtoniano como "parámetro de impacto". Este término desempeña un papel crucial en el análisis matemático de la curvatura de la trayectoria de la luz en presencia de objetos masivos. Este fenómeno es una predicción directa de la teoría de la relatividad general y fue confirmado experimentalmente por primera vez en 1919 por Arthur Eddington [8].

²Esto considerando que las partículas giran alrededor del agujero negro en sentido antihorario, visto por un observador en el plano ecuatorial.

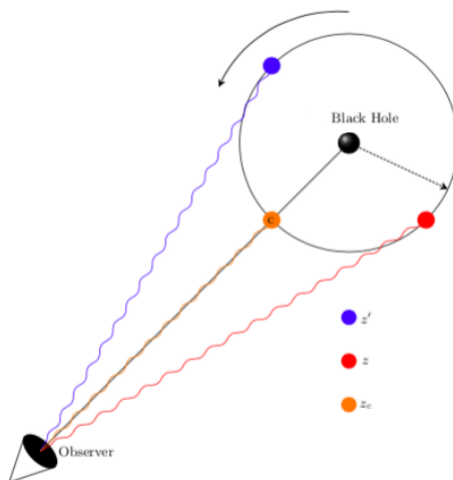


Figura 3.1: : Ilustración que modela el sistema agujero negro - partícula masiva orbitante emitiendo fotones hacia un observador lejano. La línea de visión une el agujero negro con el observador. Créditos: R. A. Lizardo Castro.

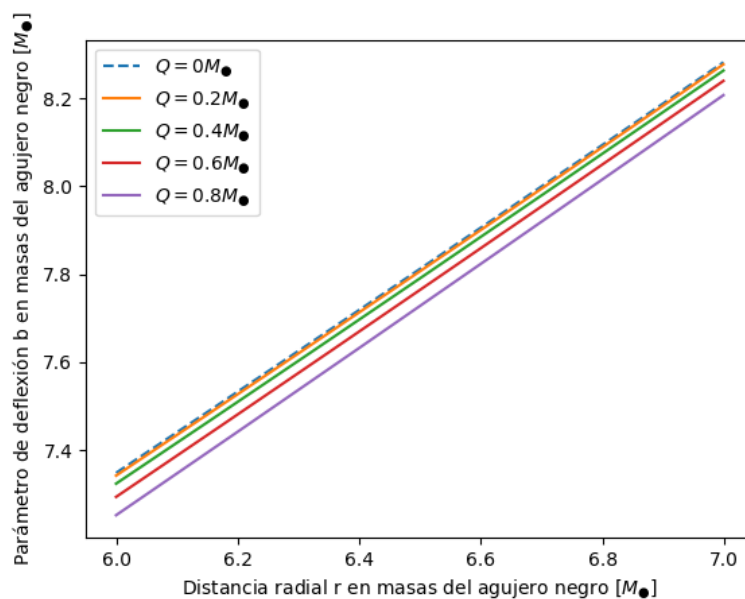


Figura 3.2: Valor absoluto del parámetro de deflexión contra distancia r con masa $M = 1$. Es posible ver que el parámetro b_{γ} disminuye cuanto más grande es Q .

Capítulo 4

Corrimiento al rojo y al azul de los fotones emitidos por cuerpos masivos en órbita alrededor de un agujero negro de Reissner-Nordström

La información que se recolecta de un fotón está dada por su frecuencia o longitud de onda. La frecuencia medida por un observador con cuadrivelocidad U_C^μ en un punto P_C está dada por:

$$\omega_C = -k_\mu U^\mu|_C, \quad (4.1)$$

donde el subíndice C hace distinción entre el punto de emisión (e) y el punto de detección (d) en el espacio P_C correspondiente. Esta cantidad es una invariante en el marco de la relatividad general. El corrimiento de la frecuencia z está dado por la siguiente expresión:

$$1 + z = \frac{\omega_e}{\omega_d}. \quad (4.2)$$

Las frecuencias en los puntos de emisión y detección repectivamente son:

$$\begin{aligned} \omega_e &= -(g_{tt}k^t U^t + g_{rr}k^r U^r + g_{\theta\theta}k^\theta U^\theta + g_{\varphi\varphi}k^\varphi U^\varphi)|_e \\ \omega_d &= -(g_{tt}k^t U^t + g_{rr}k^r U^r + g_{\theta\theta}k^\theta U^\theta + g_{\varphi\varphi}k^\varphi U^\varphi)|_d \end{aligned} \quad (4.3)$$

Sustituyendo las componentes del cuadrimomento halladas en (3.3):

$$\begin{aligned} \omega_e &= - \left(-g_{tt} \frac{E_\gamma U^t}{g_{tt}} + g_{\varphi\varphi} \frac{L_\gamma U^\varphi}{g_{\varphi\varphi}} + g_{rr} k^r U^r + g_{\theta\theta} k^\theta U^\theta \right) \Big|_e \\ \omega_d &= - \left(-g_{tt} \frac{E_\gamma U^t}{g_{tt}} + g_{\varphi\varphi} \frac{L_\gamma U^\varphi}{g_{\varphi\varphi}} + g_{rr} k^r U^r + g_{\theta\theta} k^\theta U^\theta \right) \Big|_d. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Considerando las condiciones del movimiento en el plano ecuatorial: $U^\theta = 0$, $k^\theta = 0$, (4.4) se reduce a:

$$\begin{aligned} \omega_e &= - (-E_\gamma U^t + L_\gamma U^\varphi + g_{rr} k^r U^r) \Big|_e \\ \omega_d &= - (-E_\gamma U^t + L_\gamma U^\varphi + g_{rr} k^r U^r) \Big|_d \end{aligned} \quad (4.5)$$

Corrimiento al rojo y al azul de los fotones emitidos por cuerpos masivos en órbita alrededor de un agujero negro de Reissner-Nordström

Para detectores que se encuentran muy alejados ($r \rightarrow \infty$) las componentes de la cuadrivelocidad U_d^t y U_d^φ tienen los siguientes límites:

$$\begin{aligned}\lim_{r \rightarrow \infty} U_d^t &= \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{r}{\sqrt{r^2 - 3Mr + 2Q^2}} \right) = 1 \\ \lim_{r \rightarrow \infty} U_d^\varphi &= \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{r} \sqrt{\frac{Mr - Q^2}{r^2 - 3Mr + 2Q^2}} \right) = 0.\end{aligned}\tag{4.6}$$

La expresión para el corrimiento detectado a una distancia r bastante grande:

$$1 + z = \frac{(-E_\gamma U^t + L_\gamma U^\varphi + g_{rr} k^r U^r)|_e}{(-E_\gamma U^t + L_\gamma U^\varphi + g_{rr} k^r U^r)|_d} = \frac{(-E_\gamma U^t + L_\gamma U^\varphi + g_{rr} k^r U^r)|_e}{(-E_\gamma + g_{rr} k^r U^r)|_d}.\tag{4.7}$$

Finalmente, para órbitas circulares $U_C^r = 0$:

$$1 + z = \frac{(-E_\gamma U^t + L_\gamma U^\varphi)|_e}{-E_\gamma},\tag{4.8}$$

$$\boxed{1 + z = (U^t - b_\gamma U^\varphi)|_e},\tag{4.9}$$

donde aparece el parámetro de deflexión de la luz ($b_\gamma \equiv \frac{L_\gamma}{E_\gamma}$)

Finalmente, el corrimiento en términos de las componentes de la cuadrivelocidad obtenidas en la sección 2.1 y el parámetro de deflexión hallado en la sección 3.1 está dado por

$$\boxed{1 + z_\pm = \frac{r}{\sqrt{r^2 - 3Mr + 2Q^2}} \pm \sqrt{\frac{Mr^3 - Q^2 r^2}{(r^2 - 2Mr + Q^2)(r^2 - 3Mr + 2Q^2)}}}\tag{4.10}$$

Factorizando el denominador común se obtiene una expresión reducida:

$$1 + z_\pm = \frac{r}{\sqrt{r^2 - 3Mr + 2Q^2}} \left(1 \pm \sqrt{\frac{Mr - Q^2}{r^2 - 2Mr + Q^2}} \right).\tag{4.11}$$

De (4.10) es posible identificar dos términos relevantes:

$$z_g = \frac{r}{\sqrt{r^2 - 3Mr + 2Q^2}} - 1 \quad \text{corrimiento gravitacional}\tag{4.12}$$

y

$$z_{kin\pm} = \pm \sqrt{\frac{Mr^3 - Q^2 r^2}{(r^2 - 2Mr + Q^2)(r^2 - 3Mr + 2Q^2)}} \quad \text{corrimiento cinemático},\tag{4.13}$$

de manera que el corrimiento total es la suma de ambas contribuciones: $z_\pm = z_g \pm z_{kin}$. La contribución z_g no está presente en los análisis newtonianos¹ [19].

En el límite en que $Q \rightarrow 0$, se obtiene la expresión del corrimiento total para un agujero negro de Schwarzschild.

¹Además, es posible notar que está contribución nunca es menor que cero, por lo tanto el corrimiento gravitatorio siempre es al rojo.

4.1. Efecto de la carga sobre el corrimiento total

Para un análisis correcto es necesario establecer las limitaciones de los parámetros M y Q , así como definir las regiones del espacio-tiempo accesibles a nuestras mediciones.

1. Las singularidades de la métrica se encuentran en $r = 0$ (singularidad física), como en el caso de un agujero negro sin carga, y en $1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} = 0$ (singularidad coordenada), cuya solución conduce a:

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2}. \quad (4.14)$$

Existen análisis referentes a los distintos casos que establecen el orden entre los valores de la masa y la carga, como $M^2 < Q^2$, $M^2 = Q^2$ o $M^2 > Q^2$ sin embargo, el caso físico que se toma en cuenta aquí es ($M^2 > Q^2$) [8], lo que conduce a la existencia de dos singularidades coordenadas en las superficies $r = r_-$ y en $r = r_+$.

2. Para las órbitas de nuestras partículas (masivas o no) vamos a considerar eventos ocurriendo a partir del radio de la órbita circular estable más interna del agujero negro ($r \geq r_{ISCO}$).
3. En el caso en que M es demasiado grande en comparación de Q , el agujero negro se asemeja al de Shcwarzschild, por lo que los análisis que aquí se presentan adoptan valores de M y de Q que permitan visualizar el efecto de agregar carga eléctrica al cálculo del corrimiento total.
4. Al igual que en la sección anterior, se tomará en cuenta que M_{\bullet} es la masa de un agujero negro arbitrario.

Valor de Q [M_{\bullet}]	r_{isco} [M_{\bullet}]
0	6
0.2	5.84
0.4	5.76
0.6	5.44
0.8	4.91

Tabla 4.1: Valores del r_{ISCO} para agujeros negros con distintas cargas y de masa $M = 1M_{\bullet}$.

La tabla 4.1 muestra la relación entre la carga del agujero negro y su radio de la órbita circular estable más interna, es posible ver que conforme Q aumenta, r_{ISCO} disminuye. Las figuras 4.1 y 4.2 se grafican a partir del valor mayor $r_{ISCO} = 6M_{\bullet}$ y modelan el comportamiento del corrimiento total al rojo ($z_g + z_{kin}$) y al azul ($z_g - z_{kin}$) respectivamente bajo la presencia de diversos valores para la carga Q , manteniendo una masa constante $M = 1M_{\bullet}$.

La figura 4.1 muestra como el corrimiento al rojo decrece conforme más alejada está la partícula de prueba. Además el efecto de la carga presenta una disminución en dicho corrimiento.

La figura 4.2 indica lo contrario, el corrimiento crece con la distancia y con la carga, lo que se interpreta como un corrimiento al azul. Esto permite inferir que el término dominante en el corrimiento total es la contribución cinemática.

Las figuras 4.3 y 4.4 presentan una comparativa de ambas contribuciones aisladas, para los valores de $M = 1M_{\bullet}$ y $Q = 0,4\bullet$, aunque en general el patrón se debe cumplir para cualquiera de los valores que se han elegido para la carga.

Además de la influencia en el corrimiento, la presencia de carga conduce a una reducción en el radio de la órbita circular estable más interna.

Corrimiento al rojo y al azul de los fotones emitidos por cuerpos masivos en órbita
alrededor de un agujero negro de Reissner-Nordström
4.1 Efecto de la carga sobre el corrimiento total

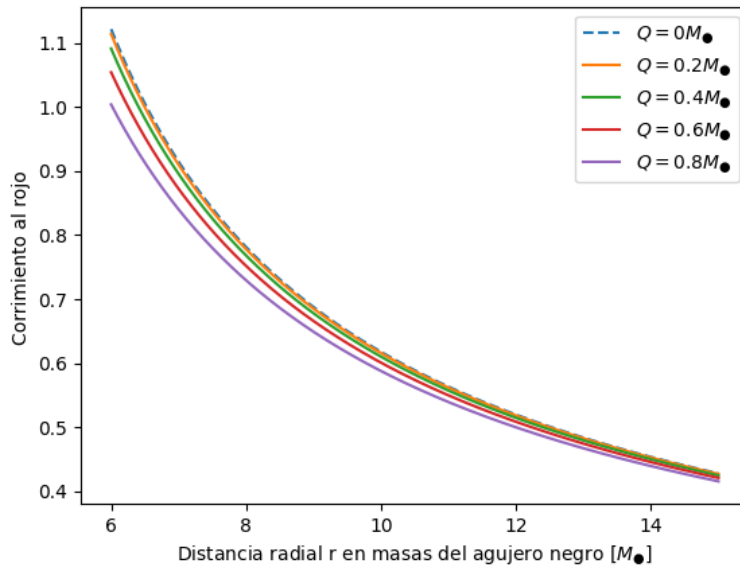


Figura 4.1: Corrimiento al rojo en función de la coordenada radial r en un agujero negro de masa $M = 1M_{\bullet}$.

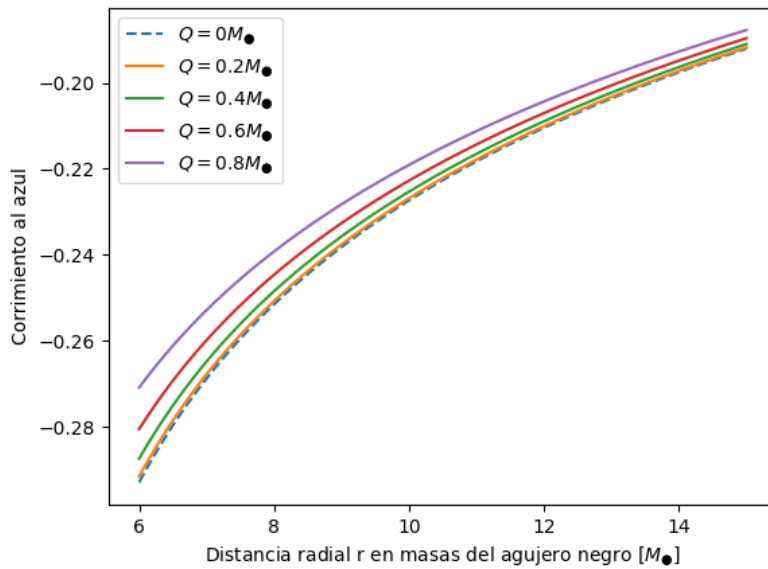


Figura 4.2: Corrimiento al azul en función de la coordenada radial r en un agujero negro de masa $M = 1M_{\bullet}$.

Corrimiento al rojo y al azul de los fotones emitidos por cuerpos masivos en órbita
 alrededor de un agujero negro de Reissner-Nordström
 4.1 Efecto de la carga sobre el corrimiento total

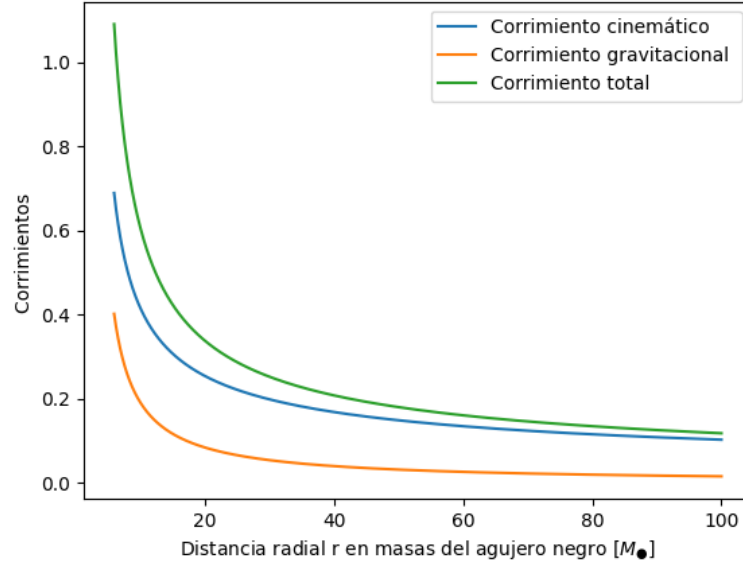


Figura 4.3: Comparativa del corrimiento gravitatorio contra el valor absoluto del corrimiento cinemático para $M = 1M_{\bullet}$ y $Q = 0,4M_{\bullet}$. Aquí se aprecia cómo z_{kin} es el término dominante.

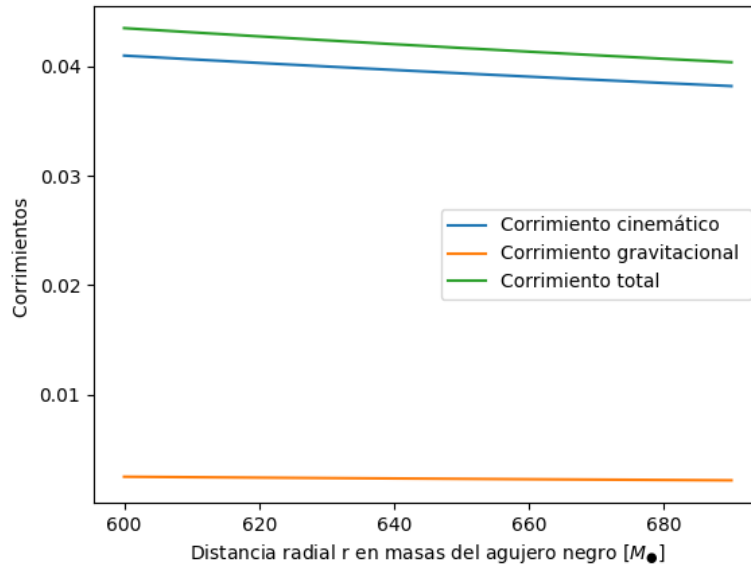


Figura 4.4: Comparativa del corrimiento gravitatorio contra el valor absoluto del corrimiento cinemático para $M = 1M_{\bullet}$ y $Q = 0,4M_{\bullet}$ en una región bastante alejada del cuerpo central. La contribución gravitatoria es casi nula, por lo que el corrimiento total se asemeja al cinemático

Capítulo 5

Conclusiones

Lo resultados de esta deducción teórica para el corrimiento de las líneas espectrales de los fotones emitidos por partículas de prueba alrededor de un agujero cargado arrojan un interesante análisis sobre el efecto de la carga Q sobre dicho corrimiento. En general, se ha tomado como referencia el caso en que esta carga es nula, pues conduce a una comparativa entre la presencia de carga y un caso más simple como lo es el agujero negro de Schwarzschild. Se encontró que el efecto de la carga presenta una reducción en el corrimiento al rojo total de las frecuencias emitidas, mientras que el corrimiento al azul total se incrementa debido a la presencia de dicha carga.

También se analizó el impacto de Q en el valor absoluto del parámetro de deflexión b_γ y en el radio de la órbita circular estable más interna r_{ISCO} . En ambos casos se observó que la carga Q conduce una disminución de estos valores.

Este trabajo puede ser complementado incluyendo el corrimiento causado por la recesión de la galaxia como un todo, agregando una nueva contribución debido al movimiento de la fuente emisora respecto a la Tierra.

A pesar de que actualmente la carga en agujeros negros es descartada en el estudio de la mayoría de agujeros negros astrofísicos [6], este trabajo contribuye al conocimiento de la física detrás de estos objetos extremadamente interesantes y desafiantes de la astrofísica moderna. Los cálculos desarrollados en este trabajo, si bien parten de suposiciones bastante idealizadas sobre los objetos astrofísicos y su entorno, pueden ser útiles para futuros estudios de agujeros negros en general y para la interpretación de observaciones astronómicas relacionadas, además de complementar trabajos futuros que consideren modelos más generales, o trabajos ya publicados que utilizan el mismo método.

Bibliografía

- [1] Iorio, L. (2012) Constraining the electric charges of some astronomical bodies in Reissner-Nordstrom spacetimes and generic r^{-2} -type power-law potentials from orbital motions. *Gen. Relativ. Gravit.* 44. 1753
- [2] Grunau, S. and Kagramanova, V. (2011) Geodesics of electrically and magnetically charged test particles in the Reissner-Nordström space-time: Analytical solutions. *Phys. Rev. D* 83, 044009
- [3] He, G., Pan, C., Zhou, X., Li, W. and Li, L. (2020) Null gravitational redshift by a Reissner-Nordström black hole in the strong field limit *Eur. Phys. J.C* 80, 512
- [4] Schrovén, K. and Grunau, S. (2020) Innermost stable circular orbit of charged particles in Reissner-Nordström, Kerr-Newman, and Kerr-Sen spacetimes. *Phys. Rev. D* 103(2), 024016
- [5] Pugliese, D., Quevedo, H., and Ruffini, R. (2011) Motion of charged test particles in Reissner-Nordström spacetime *Phys. Rev. D* 83, 104052
- [6] Zajacek M. and Tursunov A. (2019) Electric charge of black holes: Is it really always negligible? *Observatory* 139, 231
- [7] Carroll, S. (2003) *Spacetime and Geometry An Introduction to General Relativity*. California USA: Addison Wesley. ISBN: 0-8053-8732-3
- [8] M. P. Hobson, G. P. Efstathiou and A. N. Lasenby (2006) *General Relativity An Introduction for Physicists*. New York USA: Cambridge University Press. ISBN: 0-521-53639-1
- [9] Merriam, A. (2021) *Karl Schwarzschild's Letter to Albert Einstein*. <https://www.cantorsparadise.com/karl-schwarzschilds-letter-to-albert-einstein-6661734dd3e>
- [10] Heather M. Hill (2020) The theory of black hole formation shares the Nobel Prize in Physics *Physics Today* 73 (12), 14–17
- [11] The Royal Swedish Academy of Sciences (2020) *Theoretical foundation for black holes and the supermassive compact object at the Galactic centre*. <https://www.nobelprize.org/uploads/2020/10/advanced-physicsprize2020.pdf>
- [12] A. M. Ghez, S. Salim1,, N. N. Weinberg, J. R. Lu1, T. Do1, J. K. Dunn1, K. Matthews, M. R. Morris1, S. Yelda1, E. E. Becklin1, T. Kremenek1, M. Milosavljevic6, and J. Naiman. (2008) Measuring Distance and Properties of the Milky Way's Central Supermassive Black Hole with Stellar Orbits. *ApJL* 689(2), 1044-1062.
- [13] Herrera-Aguilar A. and Nucamendi U. (2015) Kerr black hole parameters in terms of the redshift/blueshift of photons emitted by geodesic particles. *Phys. Rev. D* 92(4), 045024.
- [14] Billings, L. (2019) *At Last, a Black Hole's Image Revealed*. <https://www.scientificamerican.com/article/at-last-a-black-holes-image-revealed/>

- [15] Banerjee, P., Herrera-Aguilar, A., Momennia, M. and Nucamendi U., (2022) Mass and spin of Kerr black holes in terms of observational quantities: The dragging effect on the redshift. *Phys. Rev. D* 05, 124037.
- [16] Gúrlebeck, N. (2015) No-hair theorem for Black Holes in Astrophysical Environments. *Fis. Rev. Lett.* 114, 151102
- [17] Afkren, G., Weber, H. and Harris, F. (2013) *Mathematical Methods For Physicist* (7th Edition) Massachusetts USA: Elsevier. ISBN: 978-0-12-384654-9
- [18] Villalobos-Ramírez, A., Gallardo-Rivera, O., Herrera-Aguilar, A. and Nucamendi, U. (2022) A general relativistic estimation of the black hole mass-to-distance ratio at the core of TXS 2226-184. *Astron. Astrophys.* 662, L9
- [19] Nucamendi U., Herrera-Aguilar, A., Lizardo-Castro, R. and Lopez-Cruz, O. (2021) Toward the Gravitational Redshift Detection in NGC 4258 and the Estimation of Its Black Hole Mass-to-distance Ratio. *ApJL* 917 L14
- [20] Villaraos, D., Herrera-Aguilar, A., Nucamendi, U., González-Juárez, G., and Lizardo-Castro, R. (2022) A general relativistic mass-to-distance ratio for a set of megamaser AGN black holes *MNRAS* 517, 4213–4219