Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Posgrado en Ciencias Matématicas

Una Aproximación a la Teoría de Topos

Tesis

que para Obtener el Grado de
Maestro en Ciencias Matemáticas

Presenta:
Rubén Villafán Zamora

Director de Tesis:
Dr. Ivan Fernando Vilchis Montalvo

Junio 2023

BUAP

DR. SEVERINO MUÑOZ AGUIRRE
SECRETARIO DE INVESTIGACIÓN Y
ESTUDIOS DE POSGRADO, FCFM-BUAP
P R E S E N T E:

Por este medio le informo que el C:

RUBÉN VILLAFÁN ZAMORA

estudiante de la Maestría en Ciencias (Matemáticas), ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 26 de mayo de 2023, con la tesis titulada:

Una Aproximación a la Teoría de Topos

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

A T E N T A M E N T E.
H. Puebla de Z. a 26 de mayo de 2023

DR. RAÚL ESCOBEDO CONDE
COORDINADOR DEL POSGRADO
EN MATEMÁTICAS.

Facultad
de Ciencias
Físico Matemáticas

Av. San Claudio y 18 sur, edif. FM1
Ciudad Universitaria, Col. San
Manuel, Puebla, Pue. C.P. 72570
01 (222) 229 55 00 Ext. 7550 y 7552

Dedicado a mamá Caro

Agradecimientos

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), por financiar mis estudios de maestría en el Programa MAESTRÍA EN CIENCIAS: MATEMÁTICAS, inscrito en el Programa Nacional de Posgrado de Calidad (PNPC) en BENEMERITA UNIVERSIDAD AUTONOMA DE PUEBLA en México.

Introducción

Un aspecto a destacar de la teoría topos es que podemos llegar con diferentes descripciones a lo que un topos es, dependiendo de la dirección en que nos aproximemos a la materia. Sin embargo, a pesar de las diferentes descripciones que podamos dar, su interconexión es tal que es imposible apreciar completamente a cualquiera de ellas por sí misma.

La noción original de topos nace en los «Seminaire de Géometrie Algébrique du Bois Marie», durante el año 1963-64, encabezados por A. Grothendieck, que tenían como objetivo resolver las conjeturas de Weil. Aquí los topos eran considerados como «espacios generalizados», convenientes para cargar con las exóticas teorías de cohomología requeridas en geometría algebraica. Podemos ver esta postura en la siguiente cita de SGA4, pag. 301:

«Comme le terme de topos lui-même est censé precisément le suggérer, il semble raisonnable et légitime aux auteurs du présent séminaire de considérer que l'objet de la Topologie est l'étude des topos (et non des seuls espaces topologiques).»

Un topos fue definido a ser una categoría de haces sobre un *sitio* y la elección del nombre se debió a que un gran número de construcciones topológicas pueden generalizarse a estas categorías de haces abstractos. Entre los resultados más importantes que se obtuvieron está el Teorema de J. Giraud que muestra que toda categoría de haces puede ser completamente caracterizada por propiedades de exactitud y condiciones de tamaño. Estas categorías son las que actualmente conocemos como *topos de Grothendieck*.

Por la misma época en 1963, F. W. Lawvere se había enbarcado en el atrevido proyecto de dar una fundamentación puramente categórica de todas las matemáticas, empezando con una axiomatización apropiada para la categoría de conjuntos. Cuando Lawvere giró su atención a los topos de Grothendieck, vio que estos admitían construcciones básicas de la teoría de conjuntos, tales como la formación de un conjunto potencia y un conjunto de funciones entre dos conjuntos. Casi al mismo tiempo, M. Tierney vio que el trabajo de Grothendieck podría llevar a un estudio axiomático de la teoría de haces. Subsecuentemente, Lawvere y Tierney trabajaron juntos y llegaron a la noción de *topos elemental*. Es de esta manera en que un topos es considerado como un «universo de conjuntos generalizado».

Podemos decir que el modo en que nosotros nos aproximaremos a la materia es más algebraica, debido a la gran analogía que existe entre varios conceptos en álgebra y en teoría de topos. Por ejemplo, definimos un anillo (conmutativo) como un conjunto dotado de una operación de suma y una operación de producto que satisfacen ciertas ecuaciones y donde ambas operaciones se relacionan en la llamada *ley distributiva*; un morfismo de anillos es una función que preserva la suma y el producto. Un topos es una categoría que tiene todos los colímites y límites finitos, que también satisface una especie de «ley distributiva»; un morfismo (algebraico) de topos es un funtor que preserva colímites y límites finitos. Una propiedad importante de las categoría que llamamos algebraicas, es la existencia de objetos libres. Recordemos que el anillo libre puede construirse en dos pasos: primero, dado un conjunto, construimos el monoide conmutativo libre sobre dicho conjunto; a continuación, sobre el conjunto subyacente del monoide libre, construimos el grupo abeliano libre. Entonces pasa que este grupo abeliano tiene un producto que lo convierte en anillo, que no es otro que el *anillo monoide*. El topos libre tiene una construcción parecida: dada una categoría pequeña, realizamos su completación finita libre, y sobre esta categoría que ya tiene límites finitos, realizamos su cocompletación libre.

Este aspecto algebraico del topos está mejor motivado por la teoría de marcos. De hecho, para A. Joyal, la teoría de marcos es el buen inicio a la teoría de topos. Todo lo que sucede en la teoría de marcos se repite exactamente en la teoría de topos. Para ver esta afirmación, en el capítulo 1 desarrollamos la teoría básica de marcos; mientras que el capítulo 2 está dedicado a mostrar los análogos correspondientes a los conceptos introducidos en el capítulo previo.

Muchos objetos en matemáticas poseen una doble naturaleza (o varias), dependiendo de la categoría en la que se encuetren. Así, un álgebra booleana, que es un objeto de naturaleza algebraica, también tiene aspecto geométrico, ya que puede ser visto como un espacio topológico compacto, Hausdorff y totalmente disconexo. Esta es la famosa *dualidad de Stone*. Ahora bien, aunque no nos introduciremos a su estudio, no está de más decir que los *locales* representan el lado geométrico de los marcos. También es conveniente usar un término distinto para referirnos al aspecto algebraico de un topos (de Grothendieck), que como ya mencionamos, nació siendo considerado un espacio generalizado, esto es, como un objeto geométrico. Usaremos el término *logos* para este fin; es decir, logos y topos son el mismo objeto, y usaremos uno o el otro nombre dependiendo de cómo lo estemos considerando. La elección de la terminología está motivada por el juego sobre la palabra *topo-logía*. En realidad, en muy pocas ocasiones volveremos a encontrar la palabra «topos», pues, como ya mencionamos, nuestra aproximación a la materia será más algebraica.

Por supuesto, los anillos conmutativos también puede verse como objetos geométricos. El apéndice A está dedicado a este fin. Estos son los llamados *esquemas afines*, que son la materia prima con los que construyen los *esquemas*, los objetos de estudio de la geometría algebraica en la actualidad.

Terminamos con unas observaciones para el lector. Una referencia al Teorema 2.1.5 se refiere al Teorema 1.5 del capítulo 2; dentro del capítulo 2 esto es abreviado a 1.5. La referencia 0.3 se refiere al capítulo 0, sección 3 y dentro del capítulo sólo hacemos referencia a la sección en cuestión.

Índice general

Capítulo 0

Preliminares

Asumimos que el lector está familiarizado con aquellos conceptos que podríamos decir, forman el corazón de un primer curso de categorías, tales como categoría, funtor, transformación natural, límite, adjunción y mónada; y por supuesto, todos los resultados importantes que acompañan a dichos conceptos, así como también varios resultados elementales que muchas veces son dejados como ejercicios para que el estudiante se familiarice con el modo de trabajar en la materia. Todo esto puede hallarse en cualquier texto de teoría de categorías.

Colímites filtrantes y subcategorías reflexiva también son temas básicos en teoría categorías que pueden llegar a tocarse o no dependiendo de los intereses del curso. Por si acaso, dedicamos las secciones 1 y 2 para introducir estos temas.

Los haces llegaron a ser la herramienta favorita de Grothendieck para hacer matemáticas. Todo su trabajo está repleto de ellos. Además, son el ejemplo que dio origen y desarrollo a la teoría de topos. Así que es conveniente tener al menos un pequeño panorama de esta teoría. Nos encargamos de esto en la sección 3.

1. Colímites Filtrantes

En el contexto de límites y colímites de funtores, usualmente consideramos que los funtores están definidos sobre categorías pequeñas, y frecuentemente, sobre categorías finitas. En este contexto, los funtores son también llamados *diagramas*. Esta es la manera en que pensaremos al hablar de límites y colímites.

Definición. Una categoría $\mathbf{J}$ es *filtrante* si todo funtor $D : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbf{J}$ con $\mathbf{I}$ finita, tiene un cocono en $\mathbf{J}$. Equivalentemente

i) $\mathbf{J}$ no es vacía;

ii) para cualesquier dos objetos j, j' en $\mathbf{J}$, existe k en $\mathbf{J}$ y flechas

$$\begin{tikzcd} j \arrow[dr, dashed] & \\ & k \\ j' \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd};$$

iii) para cualesquier par de flechas paralelas $u, v : i \longrightarrow j$ en $\mathbf{J}$, existe k en $\mathbf{J}$ y una flecha $w : j \longrightarrow k$ tal que $wu = wv$ como en el diagrama

$$\begin{tikzcd} & j \arrow[dr, dashed, "w"] & \\ i \arrow[ur, "u"] \arrow[dr, "v"'] & & k \\ & j \arrow[ur, dashed, "w"'] & \end{tikzcd}.$$

Cuando $\mathbf{J}$ es un copo suele llamársele *dirigido*, en lugar de filtrante y las condiciones se resumen a que cualesquier dos elementos a, b en $\mathbf{J}$ tienen una cota superior (no necesariamente una menor cota superior).

Por un *colímite filtrante* entendemos al colímite de un funtor definido sobre una categoría filtrante. Clásicamente, los colímites eran definidos sobre copos (o preodenes) dirigidos.

En lo posterior, nos veremos en la necesidad de calcular colímites filtrantes de funtores valuados en **Set**, la categoría de conjuntos y funciones, por lo que es conveniente tener una descripción de ellos. Para este fin, consideremos una categoría filtrante $\mathbf{J}$ y un funtor $F : \mathbf{J} \longrightarrow \mathbf{Set}$ de $\mathbf{J}$ a **Set**. El colímite de F se construye como sigue: tomamos la unión disjunta $W = \coprod_{j \in J} Fj$ de los conjuntos Fj; sobre W definimos una relación $\sim$ diciendo que x en Fj está relacionado con y en Fj' si y sólo si existe k en $\mathbf{J}$ y flechas $u : j \longrightarrow k$, $v : j' \longrightarrow k$ tales que $Fu(x) = Fv(y)$. Entonces $\sim$ es una relación de equivalencia y uno realmente puede ver que el cociente $L = W/\sim$ junto con las funciones k_j dadas por las composiciones $Fj \hookrightarrow W \twoheadrightarrow W/\sim$ es el colímite de F.

Es fácil ver que todo conjunto es el colímite filtrante del diagrama de todos sus subconjuntos finitos.

La importancia de los colímites filtrantes radica en el siguiente resultado bien conocido.

TEOREMA 1.1. *En* **Set**, *colímites filtrantes conmutan con límites finitos; es decir, dado un funtor* $F : \mathbf{I} \times \mathbf{J} \longrightarrow \mathbf{Set}$ *con* $\mathbf{I}$ *finita y* $\mathbf{J}$ *filtrante, el morfismo canónico*

$$\mathrm{colim}_j \mathrm{lim}_i F \cong \mathrm{lim}_i \mathrm{colim}_\mathrm{j} \mathrm{F}$$

es un isomorfismo.

DEMOSTRACIÓN. Ver [**12**], pág. 214, Teorema 1.

DEFINICIÓN. Sea $\mathbf{C}$ una categoría localmente pequeña que tiene colímites filtrantes. Un objeto c en $\mathbf{C}$ es *finitamente presentable* si el funtor $\mathrm{Hom}(c, \ ) : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{Set}$ preserva colímites filtrantes.

TEOREMA 1.2. *Un colímite finito de objetos finitamente presentables es finitamente presentable.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos un funtor $F : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbf{C}$ con $\mathbf{I}$ finita, donde cada objeto Fi es finitamente presentable y supongamos que el colímite de F existe. Dado un colímite filtrante $l = \mathrm{colím}_j c_j$, tenemos

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(\mathrm{colim}_i Fi, \mathrm{colim}_j c_j) &\cong \mathrm{lim}_i \mathrm{Hom}(Fi, \mathrm{colim}_j c_j) \\ &\cong \mathrm{lim}_i \mathrm{colim}_j \mathrm{Hom}(Fi, c_j) \\ &\cong \mathrm{colim}_j \mathrm{lim}_i \mathrm{Hom}(Fi, c_j) \\ &\cong \mathrm{colim}_j \mathrm{Hom}(\mathrm{colim}_i Fi, c_j). \end{aligned}$$

2. Subcategorías Reflexivas

Una subcategoría $\mathbf{A}$ de $\mathbf{B}$ es *plena* cuando el funtor inclusión $\mathbf{A} \hookrightarrow \mathbf{B}$ es pleno. Decimos que una subcategoría es *repleta* si todo objeto en la categoría grande que es isomorfo a un objeto en la subcategoría, también pertenece a esta última. Por una *subcategoría reflexiva* de $\mathbf{B}$ entendemos a una subcategoría plena y repleta $\mathbf{A}$ para la cual el funtor inclusión tiene un adjunto izquierdo $\mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$, llamado *reflector*.

Si $G : \mathbf{D} \longrightarrow \mathbf{C}$ es un funtor pleno y fiel, entonces correstringiendo G a su imagen $G : \mathbf{D} \longrightarrow G(\mathbf{D})$ obtenemos una equivalencia de categorías. Si en lugar de

$G(\mathbf{D})$ consideramos a la subcategoría $\mathbf{D}$' de $\mathbf{C}$ que contiene a todos aquellos objetos isomorfos a algún $G(d)$, d en $\mathbf{D}$, todavía seguimos teniendo una equivalencia de categorías. Una adjunción $F \dashv G$ es llamada una *reflexión* si el adjunto derecho G es pleno y fiel. Cuando tenemos una reflexión $F \dashv G$, siempre consideraremos la equivalencia entre D y D' como la acabamos de describir.

TEOREMA 2.1. *Para una adjunción* $F : \mathbf{C} \rightleftarrows \mathbf{D} : G$ *con* $F \dashv G$, *se cumple:*

i) *G es fiel si y sólo si cada componente $\epsilon_d : FGd \longrightarrow d$ de la counidad ϵ es un epimorfismo;*

ii) *G es pleno si y sólo si cada ϵ_d es un monomorfismo que se escinde, esto es, cada ϵ_d tiene una inversa izquierda.*

En consecuencia, G es pleno y fiel si y sólo si cada ϵ_d es un isomorfismo.

DEMOSTRACIÓN. Ver [**12**], pág. 90, Teorema 1.

COROLARIO 2.1.1. *Para una reflexión* $F : \mathbf{C} \rightleftarrows \mathbf{D} : G$ *con* $\eta : 1 \longrightarrow GF$ *y* $\epsilon : FG \longrightarrow 1$ *la unidad y counidad de la adjunción, respectivamente, tenemos que*

i) *F lleva a cada componente de la unidad η a un isomorfismo, es decir, para cada c en $\mathbf{C}$, $F\eta_c$ es un isomorfismo.*

ii) *Para cada d en $\mathbf{D}$, η_{Gd} es un isomorfismo.*

DEMOSTRACIÓN. Se sigue por las identidades triangulares $\epsilon_F \circ F\eta = 1_F$, $G\epsilon \circ \eta_G = 1_G$ y que cada componente de la counidad ϵ es un isomorfismo.

Por último, si $\mathbb{T} = \langle T, \eta, \mu \rangle$ es una mónada sobre $\mathbf{C}$ que es *idempotente*, esto es, donde la multiplicación μ de la mónada es un isomorfismo, entonces podemos hacernos de una subcategoría reflexiva de $\mathbf{C}$, a saber, aquella generada por los objetos «fijos» de T, es decir, los objetos c de $\mathbf{C}$ tales que $Tc \cong c$, siendo el mismo funtor T el reflector.

Estos tres conceptos, subcategoría reflexiva, reflexión y mónada idempotente, son esencialmente lo mismo.

Las subcategorías reflexivas tienen propiedades que no necesariamente poseen aquellas que simplemente son subcategorías. Por ejemplo, si $\mathbf{B}$ es una categoría completa y $\mathbf{A}$ una subcategoría reflexiva de $\mathbf{B}$, entonces $\mathbf{A}$ también es completa. El mismo enunciado se cumple si cambiamos la palabra «completa» por «cocompleta». En este último caso, el reflector $\mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$ preserva todos los colímites, por ser adjunto izquierdo. Pero no tenemos como garantizar que el reflector también preserva todos los límites que existen en $\mathbf{B}$. Cuando el reflector preserva límites finitos es un caso de especial interés, como veremos en los temas posteriores.

2.1. Localización. En general, localizar es esencialmente un proceso de agregar inversos formales a una estructura algebraica (ver A.1). En el caso que ahora nos ocupa definiremos la localización de una categoría $\mathbf{C}$ con respecto a una colección de flechas R.

DEFINICIÓN. Sea $\mathbf{C}$ una categoría y R una colección de flechas de $\mathbf{C}$. La *localización* de $\mathbf{C}$ con respecto R está definida, salvo equivalencia de categorías, como una categoría $\mathbf{C}/R$ con un funtor $q^* : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}/R$ que es universal entre todos aquellos funtores $\mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$ que envían a todas las flechas en R a isomorfismos.

Desde el punto de vista de las flechas de $\mathbf{C}$, el nombre de localización queda perfecto, pues representa la idea de una operación que convierte a todas las flechas de R en isomorfismos. Pero desde el punto de vista de los objetos, $q^* : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}/R$ es realmente un cociente, que identifica el dominio y codominio de las flechas $a \longrightarrow b$ en R. Este segundo punto de vista es mejor para nuestros propósitos y realmente diremos que $\mathbf{C}/R$ es el *cociente* de $\mathbf{C}$ por R. La notación que usamos es precisamente por este hecho, distinta a $\mathbf{C}[R^{-1}]$ usada comúnmente.

Cuando la colección de flechas R de $\mathbf{C}$ es un conjunto, la localización siempre existe; más aún, si $\mathbf{C}$ es pequeña, así lo es $\mathbf{C}/R$. (para detalles, ver [**4**] vol. 1, cap. 5).

Ahora mostraremos que, salvo una equivalencia de categorías, toda subcategoría reflexiva es un cociente con respecto una cierta colección de flechas.

TEOREMA 2.2. *Sea $\mathbf{A}$ una subcategoría reflexiva de $\mathbf{B}$ con reflector $F : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$ y R la colección de todas las flechas f en $\mathbf{B}$ tal que Ff es un isomorfismo. Entonces $\mathbf{B}/R$ existe y es equivalente a $\mathbf{A}$.*

DEMOSTRACIÓN. Primero mostremos que para cada b en $\mathbf{B}$, cada componente η_b de la unidad es un miembro de R. Por 2.1, cada componente de la counidad $\epsilon_a : FKa \longrightarrow a$ es un isomorfismo, donde $K : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ denota el funtor inclusión. Ahora, por una de las identidades triangulares, tenemos $\epsilon_{Fb} \circ F\eta_b = 1_{Fb}$. Se sigue que $F\eta_b$ es la inversa de ϵ_{Fb}, luego $F\eta_b$ es un isomorfismo, así que, efectivamente, η_b está en R.

El funtor F hace a cada flecha f en R invertible en $\mathbf{A}$ y si $G : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{C}$ es un funtor tal que cada Gf es un isomorfismo, entonces existe un funtor $\widehat{G} : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{C}$, dado por la composición GK, que satisface $\widehat{G}F = GKF \cong G$, puesto que G, en particular, invierte a cada componente de la unidad $\eta : 1 \longrightarrow KF$.

De la identidad triangular $\eta_K \circ K\epsilon = 1_K$, tenemos que para cada a en $\mathbf{A}$, η_{Ka} es la inversa de $K\epsilon_a$, luego $\widehat{G}\epsilon_a = G(\eta_{Ka}^{-1}) = (G\eta_{Ka})^{-1}$. Ahora, para cualquier $f : a \longrightarrow a'$ en $\mathbf{A}$,

$$\begin{aligned}\widehat{G}f &= \widehat{G}(\epsilon_{a'} \circ FKf \circ \epsilon_a^{-1}) \\ &= \widehat{G}(\epsilon_{a'}) \circ \widehat{G}(FKf) \circ \widehat{G}(\epsilon_a^{-1}) \\ &= (G\eta_{Ka'})^{-1} \circ GKFKf \circ G\eta_{Ka}.\end{aligned}$$

Se sigue que $\widehat{G}$ está completamente determinado por G, el funtor que invierte a cada flechas en R; por la inclusión $K : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$, y por la unidad de la adjunción $F \dashv K$. Esto demuestra la unicidad de $\widehat{G}$. La demostración está completa.

Una *localización reflexiva* es una localización $q^* : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}/R$ tal que q^* tiene un adjunto derecho pleno y fiel. La existencia de un adjunto derecho pleno y fiel a q^* nos permite identificar a todo cociente con una subcategoría reflexiva. Por otro lado, el Teorema 2.2 nos dice que toda subcategoría reflexiva nos otorga una localización reflexiva. Por una *localización exacta izquierda* entendemos a una localización reflexiva $q^* : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}/R$ en la que el funtor q^* preserva límites finitos. La frase «exacta izquierda» es comúnmente usada para decir que un funtor preserva límites finitos, pero nosotros no la usaremos para ningún fin.

Ya hemos mencionado que cuando en una reflexión $F \dashv G$, el funtor F preserva límites finitos, es de especial interés para nosotros.

TEOREMA 2.3. *Sea* $\mathbf{A}$ *una subcategoría reflexiva de* $\mathbf{B}$ *con reflector* $F : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$ *y* R *la colección de todas las flechas de* $\mathbf{B}$ *invertidas por* F. *Entonces son equivalentes:*

i) F *preserva límites finitos;*
ii) R *es estable bajo* pullbacks, *es decir, en un cuadrado* pullback

$$\begin{tikzcd} p \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & b \arrow[d, "v"] \\ a \arrow[r, "g"'] & c \end{tikzcd}$$

si v *está en* R, *entonces también* u *es un miembro de* R.

DEMOSTRACIÓN. Ver [**4**] vol. 1, pág. 218, Proposición 5.6.1.

2.2. Subcategorías de Objetos Locales. Hemos visto que toda subcategoría reflexiva es un cociente con respecto a las flechas invertidas por el reflector. En esta sección daremos otra presentación de una subcategoría reflexiva.

DEFINICIÓN. Un objeto x en una categoría $\mathbf{C}$ es *local con respecto a* una flecha $f : a \longrightarrow b$ de $\mathbf{C}$ si la función inducida

$$f^* : \mathrm{Hom}(b, x) \longrightarrow \mathrm{Hom}(a, x)$$

es biyectiva. En otras palabras, para cada flecha $h : a \longrightarrow x$ existe una única flecha $g : b \longrightarrow x$ tal que $h = gf$.

$$\begin{tikzcd} a \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "h"'] & & b \arrow[dl, dashed, "g"] \\ & x. & \end{tikzcd}$$

Decimos que x es local con respecto a una colección de flechas R de $\mathbf{C}$, o más breve, que x es R-*local*, si es local con respecto a cada flecha de R. Denotamos por $\mathbf{C}^R$ a la subcategoría plena (y repleta) de $\mathbf{C}$ que consiste de todos aquellos objetos locales con respecto a R.

Intuitivamente, esto dice que desde el punto de vista de x, las flechas en R son isomorfismos.

TEOREMA 2.4. *Sea* $\mathbf{A}$ *una subcategoría reflexiva de* $\mathbf{B}$ *con reflector* $F : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$ *y* R *la colección de todas las flechas de* $\mathbf{B}$ *invertidas por* F. *Para un objeto* x *de* $\mathbf{B}$, *las siguiente condiciones son equivalentes:*

i) x *está en* $\mathbf{A}$;
ii) x *es local con respecto a* R;
iii) x *es local con respecto a* η_b, *para cada* b *en* $\mathbf{B}$.

En otras palabras, $\mathbf{A}$ es la subcategoría plena $\mathbf{B}^R$ de $\mathbf{B}$.

DEMOSTRACIÓN. Como $\mathbf{A}$ es una subcategoría reflexiva de $\mathbf{B}$, tenemos una adjunción $F \dashv K$, donde K es el funtor inclusión $\mathbf{A} \hookrightarrow \mathbf{B}$, F el reflector y $\eta : 1 \longrightarrow KF$, $\epsilon : FK \longrightarrow 1$ la unidad y counidad de la adjunción, respectivamente.

Sea x un objeto en $\mathbf{A}$ y $f : a \longrightarrow b$ una flecha en R. Dada $h : a \longrightarrow x$, hacemos la composición con η_x y obtenemos una única flecha $h' : Fa \longrightarrow Fx$ tal que $\eta_x \circ h = h' \circ f$, como en el diagrama

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "\eta_a"] \arrow[dr, "\eta_x \circ h"'] & KFa \arrow[d, dashed, "Kh'=h'"] & Fa \arrow[d, dashed, "h'"] \\ & KFx. & Fx \end{tikzcd}$$

y puesto que $\eta_{Kx} = \eta_x$ es un isomorfismo (Corolario 2.1.1), tenemos que $h = \eta_x^{-1} \circ h' \circ \eta_a$. Sea $u : Fa \longrightarrow x$ la adjunta izquierda de h. Recordemos que h está dada como $h = Ku \circ \eta_a = u \circ \eta_a$. Se sigue que $u = Ku = \eta_x^{-1} \circ h'$.

Como f está en R, Ff es un isomorfismo, y por la naturalidad de η, tenemos que $\eta_a = (KFf)^{-1}\eta_b \circ f$, luego

$$h = Ku \circ \eta_a = Ku \circ (KFf)^{-1} \circ \eta_b \circ f,$$

es una factorización de h a través de f. Veamos que tal factorización es única. Supongamos que $g, g' : b \longrightarrow x = Kx$ son dos morfismos tales que $gf = h = g'f$. Entonces $Fg \circ Ff = Fg' \circ Ff$ y como Ff es iso, $Fg = Fg'$. Por la naturalidad de η, tenemos $\eta_{Kx} \circ g = KFg \circ \eta_b = KFg' \circ \eta_b = \eta_{Kx} \circ g'$, y dado que $\eta_{Kx} = \eta_x$ es iso, obtenemos que $g = g'$.

Que $ii)$ implica $iii)$ es claro, ya que cada componente de la unidad η pertenece a R.

Ahora bien, si x es local con respecto a cada componente de la unidad, entonces, en particular, x es local con respecto η_x. Así que para la identidad 1_x de x, existe una única flecha $\alpha : KFx \longrightarrow x$ tal que $\alpha \circ \eta_x = 1_x$. Como $\eta_x \circ \alpha \circ \eta_x = \eta_x = 1_{KFx} \circ \eta_x$ y dado que η_x es universal, tenemos que $\eta_x \circ \alpha = 1_{KFx}$. Por tanto, η_x es un isomorfismo, con lo cual obtenemos que x está en $\mathbf{A}$, por nuestro supuesto que subcategorías reflexivas son repletas. Esto demuestra que $iii)$ implica $i)$ y completa demostración.

Así, toda subcategoría reflexiva es la subcategoría de objetos locales respecto a la colección de todas las flechas invertidas por el reflector. El llamado *problema de la subcategoría de objetos locales* consiste en hallar condiciones bajo las cuales dada una categoría $\mathbf{C}$ y una colección de flechas R de $\mathbf{C}$, $\mathbf{C}^R$ es una subcategoría reflexiva de $\mathbf{C}$. Daremos una solución hasta el capítulo 2, cuando hablemos de *categorías presentables*.

Supongamos que R es una colección de flechas de $\mathbf{C}$ y que la subcategoría $\mathbf{C}^R$ de objetos R-locales es reflexiva. Entonces el Teorema 2.4 nos dice que $\mathbf{C}^R = \mathbf{C}^\Sigma$, donde Σ denota la colección de todas las flechas invertidas por el reflector. Ahora bien, si el cociente $q^* : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}/R$ es una localización reflexiva, entonces $\mathbf{C}/R$ es equivalente a una subcategoría plena de $\mathbf{C}$. Nos gustaría que dicha subcategoría fuera $\mathbf{C}^R$ y efectivamente, demostraremos que este es el caso.

TEOREMA 2.5. *Sea $\mathbf{C}$ una categoría y R una colección de morfismos de $\mathbf{C}$. La reflexión sobre los objetos R-locales, si existe, tiene la propiedad universal de una localización de categorías con respecto a funtores adjuntos izquierdos que invierten a R.*

DEMOSTRACIÓN. Que $\mathbf{C}^R$ es una subcategoría reflexiva de $\mathbf{C}$ significa que tenemos una adjunción $F : \mathbf{C} \rightleftarrows \mathbf{C}^R : K$, donde K denota el funtor inclusión y

$F \dashv K$. Decimos que un morfismo $f : a \longrightarrow b$ es *R-local* si para cada objeto R-local x de $\mathbf{C}$, tenemos una biyección

$$\mathrm{Hom}(f, \ \ ) = f^* : \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(b, x) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(a, x).$$

Mostremos que los morfismo R-locales son precisamente los morfismo que son llevados a isomorfismos por el reflector F. Para esto consideremos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(b, x) \arrow[r, "f^*"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(a, x) \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}^R}(Fb, Fx) \arrow[r, "(Ff)^*"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}^R}(Fa, Fx).
\end{tikzcd}$$

donde flechas verticales son biyecciones puesto que, para cada b en $\mathbf{C}$ y x en $\mathbf{C}^R$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(b, x) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}^R}(Fb, x) && F \dashv K \\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}^R}(Fb, KFKx) && \eta_{Kx} = \eta_x \text{ es iso} \\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}^R}(Fb, Fx), && Fx = KFKx.
\end{aligned}$$

Cuando f es R-local, la función $(Ff)^*$ es biyectiva, luego, por la inmersión de Yoneda $(\mathbf{C}^R)^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Set}^{\mathbf{C}^R}$, Ff es un isomorfismo. Recíprocamente, si Ff es un isomorfismo, entonces f^* es biyectiva, luego f es R-local.

Ahora consideremos una adjunción $L : \mathbf{C} \rightleftarrows \mathbf{D} : G$, con $L \dashv G$, tal que L invierte a cada morfismo en R. Por la biyección natural

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(Lc, d) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(c, Gd)$$

para cada c en $\mathbf{C}$ y d en $\mathbf{D}$, tenemos que G toma valores en $\mathbf{C}^R$. En efecto, para cada $g : c \longrightarrow c'$ en R y d en $\mathbf{D}$, la función $g^* : \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(c', Gd) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(c, Gd)$ es biyectiva, ya que tanto las flechas verticales, así como la función $(Lg)^*$ en diagrama abajo, son biyecciones.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(c', Gd) \arrow[r, "g^*"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(c, Gd) \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(Lc', d) \arrow[r, "(Lg)^*"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(Lc, d).
\end{tikzcd}$$

Ahora mostremos que L invierte a todos los morfismos R-locales, es decir, a todos los morfismos invertidos por F. Si $f : a \longrightarrow b$ es R-local y d es un objeto en $\mathbf{D}$, tenemos que $(Lf)^*$ es biyectiva (ver diagrama abajo), luego, por la inmersión de Yoneda $(\mathbf{D})^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Set}^{\mathbf{D}}$, Lf es un isomorfismo.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(b, Gd) \arrow[r, "f^*"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(a, Gd) \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(Lb, d) \arrow[r, "(Lf)^*"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(La, d).
\end{tikzcd}$$

Que F posee la propiedad universal de una localización de categorías se sigue por el Teorema 2.2.

Se sigue que, si el cociente $q^* : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}/R$ es una localización reflexiva y $\mathbf{C}^R$ es una subcategría reflexiva de $\mathbf{C}$, entonces $\mathbf{C}/R$ y $\mathbf{C}^R$ son categorías equivalentes, ya que ambos funtores q^* y el reflector $F : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}^R$ tienen la propiedad universal entre aquellos funtores que invierten a R.

$$\begin{tikzcd} \mathbf{C} \arrow[r, "q^*"] \arrow[d, "F"'] & \mathbf{C}/R \arrow[dl, dashed, shift left] \\ \mathbf{C}^R. \arrow[ur, dashed, shift left] & \end{tikzcd}$$

TEOREMA 2.6. *Sea* $\mathbf{A}$ *una subcategoría reflexiva de* $\mathbf{B}$ *con reflector* $F : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$ *y* R *la colección de todas las flechas en* $\mathbf{B}$ *invertidas por* F*. Supongamos que en* $\mathbf{B}$*, cada flecha se factoriza como un monomorfismo seguido de un epimorfismo fuerte y que el reflector* F *preserva límites finitos. Bajo estas condiciones, para cualquier objeto* x *de* $\mathbf{B}$*,* x *está en* $\mathbf{A}$ *si y sólo si* x *es local con respecto cada monomorfismo en* R*.*

Para la definición de epimorfismo fuerte ver 2.1.1.

DEMOSTRACIÓN. Ver [**4**] vol. 1, pág. 226, Proposición 5.6.4.

3. Teoría de Haces

A continuación presentamos la teoría básica de haces de conjuntos. Uno también puede definir haces de grupos abelianos, anillos (como en A.2.3), etcétera, y cada resultado que veremos es válido para cualquier tipo de haces, con sus respectivas modificaciones.

3.1. Espacios Fibrados. Sea X un espacio topológico. Un *espacio fibrado* sobre X es una función continua con codominio X. Un espacio fibrado $f : A \longrightarrow X$ sobre X usualmente lo denotaremos como un par $\langle A, f\rangle$. Un *morfismo de espacios fibrados* $f : A \longrightarrow X$, $g : B \longrightarrow X$ es una función continua $\alpha : A \longrightarrow B$ que hace conmutar al triángulo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "f"'] & & B \arrow[dl, "g"] \\ & X. & \end{tikzcd}$$

Dados morfismos de espacios fibrados $\langle A, f\rangle \xrightarrow{\alpha} \langle B, g\rangle$ y $\langle B, g\rangle \xrightarrow{\beta} \langle C, h\rangle$, la composición $\beta\alpha$ es un morfismo de $\langle A, f\rangle$ a $\langle C, h\rangle$, ya que $h(\beta\alpha) = (h\beta)\alpha = g\alpha = f$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "f"'] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "g"] & C \arrow[dl, "h"] \\ & X. & \end{tikzcd}$$

Denotamos a la categoría de espacios fibrados sobre X por $\mathbf{Sp}/\mathrm{X}$, donde $\mathbf{Sp}$ denota a la categoría de los espacios topológicos y funciones continuas.

Es conveniente pensar a un espacio fibrado $\langle A, f\rangle$ como una familia de conjuntos $\{A_x\}_{x\in X}$ indizada por X, siendo cada A_x la fibra $f^{-1}(x)$ sobre x; al espacio A como la unión disjunta $\amalg_{x\in X} A_x$ de los A_x, y f enviando a cada A_x en x.

Decimos que un espacio fibrado $\langle A, f\rangle$ es un *espacio haz* si f es es un *homeomorfismo local*, esto es, para cualquier a en A, existe una vecindad abierta N de a y una vecindad abierta U de $f(a)$ tal que la restricción de f en los abiertos N y U es un homeomorfismo. Los espacios haz forman una subcategoría de **Sp**/X que denotamos por **LH**/X.

3.2. Prehaces. Sea $\langle A, f\rangle$ un espacio fibrado sobre X. A cada abierto U de X le asociamos el conjunto

$$\Gamma(A,f)(U) = \{U \xrightarrow{s} A \in \mathbf{Sp} \mid fs = i\},$$

de *secciones continuas* de f sobre U, donde $i : U \longrightarrow X$ es la inclusión de U en X. Si U, V son abiertos de X con $V \subseteq U$ y $s : U \longrightarrow A$ es una sección sobre U, entonces la restricción $s|_V$ de s a V es una sección sobre V, ya que para cada x en V, $fs|_V(x) = fs(x) = x$, que no es otra cosa que la inclusión de V en X. Así que tenemos una *función restricción* $\rho^U_V : \Gamma(A,f)(U) \longrightarrow \Gamma(A,f)(V)$ dada por $s \mapsto s|_V$. También podemos ver que si $W \subseteq V \subseteq U$ son abiertos de X, entonces $\rho^U_W = \rho^V_W \rho^U_V$.

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(A,f)(U) \arrow[rr, "\rho^U_W"] \arrow[dr, "\rho^U_V"'] & & \Gamma(A,f)(W) \\
& \Gamma(A,f)(V). \arrow[ur, "\rho^V_W"'] &
\end{tikzcd}$$

En efecto, para cualquier s en $\Gamma(A,f)(U)$, $\rho^V_W\rho^U_V(s) = (s|_V)|_W$. Luego, para cada x en W

$$(s|_V)|_W(x) = s|_V(x) = s(x) = s|_W(x) = \rho^U_W(s)(x).$$

También es claro que ρ^U_U es la identidad en $\Gamma(A,f)(U)$. En otras palabras, para cualquier espacio fibrado $\langle A, f\rangle$ en **Sp**/X, la asignación $\Gamma(A,f) : \mathcal{O}(X)^{op} \longrightarrow \mathbf{Set}$ que manda a cada abierto U de X al conjunto $\Gamma(A,f)(U)$ de secciones de f sobre U y a cada contención de abiertos $V \subseteq U$ a la restricción $\rho^U_V : \Gamma(A,f)(U) \longrightarrow \Gamma(A,f)(V)$, es un funtor, luego, $\Gamma(A,f)$ es un objeto de $\mathbf{Set}^{\mathcal{O}(X)^{\mathrm{op}}}$, la categoría de funtores con valores en **Set** definidos sobre $\mathcal{O}(X)^{\mathrm{op}}$.

Ahora veamos que todo morfismo de espacios fibrados $\langle A, f\rangle \xrightarrow{\alpha} \langle B, g\rangle$ nos da una transfomación natural $\Gamma(A,f) \longrightarrow \Gamma(B,g)$ entre los funtores $\Gamma(A,f)$ y $\Gamma(B,g)$. Sea U un abierto de X y s en $\Gamma(A,f)(U)$ una sección de f sobre U. Entonces la composición αs es una sección de g sobre U, esto es, αs está en $\Gamma(B,g)(U)$ como fácilmente comprobamos: $g(\alpha s) = (g\alpha)s = fs = i$.

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "f"] & & B \arrow[dl, "g"] \\
U \arrow[ur, "s"] \arrow[rr, "i"] & & X. &
\end{tikzcd}$$

Ahora debemos ver que para cualesquier abiertos U, V de X con $V \subseteq U$, el cuadrado

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(A,f)(U) \arrow[r, "\alpha_*"] \arrow[d, "\rho^U_V"'] & \Gamma(B,g)(U) \arrow[d, "\rho'^U_V"] \\
\Gamma(A,f)(V) \arrow[r, "\alpha_*"] & \Gamma(B,g)(V)
\end{tikzcd}$$

conmuta, donde α_* denota la composición con α a la izquierda. Esto significa que para cualquier s en $\Gamma(A,f)(U)$, $(\alpha s)|_V = \alpha(s|_V)$, algo que es claro.

De este modo, tenemos un funtor $\Gamma : \mathbf{Sp}/X \longrightarrow \mathbf{Set}^{\mathcal{O}(X)^{\mathrm{op}}}$ definido como $\langle A, f\rangle \xrightarrow{\alpha} \langle B, g\rangle \mapsto \Gamma(A,f) \xrightarrow{\alpha_*} \Gamma(B,g)$.

Definición. Sea X un espacio topológico. Un *prehaz (de conjuntos)* sobre X es un funtor $F : \mathcal{O}(X)^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Set}$, donde $\mathcal{O}(X)$ es el copo de abiertos de X considerado como una categoría. Llamamos a cada elemento s en $F(U)$ una *sección* de F en U, y *restricción* a la función $\rho^U_V : F(U) \longrightarrow F(V)$, para cada par de abiertos $V \subseteq U$. Denotamos por $\mathbf{Psh}(X)$ a la categoría de prehaces sobre X, esto es, $\mathbf{Psh}(X) = \mathbf{Set}^{\mathcal{O}(X)^{\mathrm{op}}}$.

En el caso general, se define un prehaz (de conjuntos) como un funtor $F : \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Set}$, donde $\mathbf{C}$ es cualquier categoría pequeña, no necesariamente la colección de abiertos de un espacio topológico y $\mathbf{Psh}(\mathbf{C}) = \mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}$ denota la categoría de prehaces sobre $\mathbf{C}$.

3.3. Haces. Para cualquier función continua $g : X \longrightarrow Y$ y cualquier abierto U de X, la restrición $g|_U$ de g a U sigue siendo continua. Ahora supongamos que $\{U_i\}_{i\in I}$ es una cubierta abierta del espacio X. Si para cada abierto U_i tenemos definida una función continua $f_i : U_i \longrightarrow Y$, entonces existe a lo más una función continua $f : X \longrightarrow Y$ tal que $f|_{U_i} = f_i$, es decir, si tal f existe, es única. Garantizamos la existencia de dicha función f si asumimos que $f_i|_{U_i\cap U_j} = f_j|_{U_i\cap U_j}$, para cada par i, j en I. Entonces definimos $f(x) = f_i(x)$, para cada x en U_i.

Ahora consideremos el caso en el que $\langle A, f\rangle$ es un espacio fibrado sobre X, U un abierto de X y $\{U_i\}_{i\in I}$ una cubierta abierta de U, esto es, $U = \bigcup_{i\in I} U_i$. Si para cada abierto U_i tenemos definida una sección $s_i : U_i \longrightarrow A$ con $s_i|_{U_i\cap U_j} = s_j|_{U_i\cap U_j}$, entonces la única función continua $s : U \longrightarrow A$ que existe, también es una sección de f, como mostramos a continuación: si x es un elemento de U, entonces x está en algún U_i, luego

$$fs(x) = f(s(x)) = f(s|_{U_i}(x)) = fs_i(x) = x,$$

esto es, fs es la inclusión de U en X.

Definición. Sea X un espacio topológico y F un prehaz sobre X. Decimos que F es un *haz* si satisface las siguientes condiciones:

i) si para cualquier cubierta abierta $U = \bigcup_{i\in I} U_i$ de un abierto U y cualesquier secciones s, s' en $F(U)$ tales que para cualquier i en I,

$$\rho^U_{U_i}(s) = \rho^U_{U_i}(s'),$$

entonces $s = s'$.

ii) Si para cualquier cubierta abierta $U = \bigcup_{i\in I} U_i$ de un abierto U y cualquier familia $\{s_i\}_{i\in I}$ de secciones con s_i en $F(U_i)$, tales que

$$\rho^{U_i}_{U_i\cap U_j}(s_i) = \rho^{U_j}_{U_i\cap U_j}(s_j)$$

para cualesquier i, j en I, entonces existe una sección s en $F(U)$ tal que $\rho^U_{U_i}(s) = s_i$, para todo i en I.

Un prehaz F que solamente cumple *i*) se llama *separado*. Es común definir un haz en un solo enuciado que incluye ambos *i*) y *ii*) de la definición anterior como sigue: decimos que F es un haz si dada cualquier cubierta abierta $U = \bigcup_{i\in I} U_i$ de un abierto U y cualquier familia $\{s_i\}_{i\in I}$ de secciones con s_i en $F(U_i)$, tales que

$$\rho^{U_i}_{U_i\cap U_j}(s_i) = \rho^{U_j}_{U_i\cap U_j}(s_j)$$

para cualesquier i, j en I, entonces existe una única sección s en $F(U)$ tal que $\rho^U_{U_i}(s) = s_i$, para todo i en I.

Existe incluso un modo más pulcro de dar la condición de haz arriba. Para esto notemos que la sucesión $\{s_i\}_{i\in I}$ es un elemento del producto $\prod_{i\in I} F(U_i)$, mientras que las asignaciones $\{s_i\}_{i\in I} \mapsto \{\rho^{U_i}_{U_i\cap U_j}(s_i)\}_{i\in I}$ y $\{s_i\}_{i\in I} \mapsto \{\rho^{U_j}_{U_i\cap U_j}(s_j)\}_{i\in I}$ definen dos funciones b, c de $\prod_{i\in I} F(U_i)$ al producto $\prod_{(i,j)\in I\times I} F(U_i\cap U_j)$. Luego, si F es un haz, la función $a : F(U) \longrightarrow \prod_{i\in I} F(U_i)$ dada por $s \mapsto \{\rho^U_{U_i}(s) = s_i\}_{i\in I}$ es un igualador de b y c. Recíprocamente, si para toda cubierta abierta $U = \bigcup_{i\in I} U_i$ de cualquier abierto U, el diagrama

$$F(U) \xrightarrow{a} \prod_{i\in I} F(U_i) \underset{c}{\overset{b}{\rightrightarrows}} \prod_{(i,j)\in I\times I} F(U_i\cap U_j) \tag{1}$$

es un igualador, entonces F es un haz.

De la discusión dada al principio de la sección, se sigue que $\Gamma(A, f)$, con $\langle a, f\rangle$ un espacio fibrado, no solamente es un prehaz sobre X, si no que es un haz. Escribimos $\mathbf{Sh}(X)$ para la categoría de haces sobre X y morfismos las transformaciones naturales entre ellos. Luego, $\mathbf{Sh}(X)$ es una subcategoría plena de $\mathbf{Psh}(X)$.

3.4. Tallos y Gérmenes. La representación de un haz F como un haz de secciones $\Gamma(F)$ de un conveniente espacio fibrado depende de la idea de germen de una función. Procedemos a definir dicho concepto.

Definición. Sea F un prehaz sobre un espacio topológico X y x un elemento de X. Denotemos por $\mathcal{V}_x$ a la colección de todas las vecindades abiertas U de x. Definimos el *tallo* F_x de F en el punto x como

$$F_x = \operatorname{colim}_{U\in\mathcal{V}_x} F(U) = \operatorname{colim}_{x\in U} F(U).$$

El tallo F_x viene equipado con funciones $F(U) \longrightarrow F_x$. Luego, para s en $F(U)$, con U una vecindad abierta de x, escribimos s_x para denotar la imagen de s en F_x y la llamamos el *germen* de s en x.

Notemos que $\mathcal{V}_x$ es un copo dirigido con el orden opuesto dado por la contención. El siguiente teorema es una reinterpretación de la construcción de un colímite dirigido en este contexto (ver sección 1).

Teorema 3.1. *Cada germen e en F_x es la imagen de alguna sección s en $F(U)$, para alguna vecindad abierta U de x, esto es, $e = s_x$. Además, dos gérmenes s_x, t_x en F_x, con s en $F(U)$ y t en $F(V)$ digamos, son iguales $s_x = t_x$ si y sólo si existe una vecindad abierta W de x contenida en $U\cap V$ en la cual s y t coinciden, es decir, $\rho|^U_{U\cap V}(s) = \rho|^V_{U\cap V}(t)$.*

Si s, s' son dos secciones en $F(U)$ con $s = s'$, entonces es claro que, para todo x en U, $s_x = s'_x$. En el caso en que F es un haz tenemos el recíproco:

Teorema 3.2. *Sea X es un espacio topológico y F un haz sobre X. Para cualquier abierto U y s, s' en $F(U)$, tenemos que $s = s'$ si y sólo si para todo x en U, $s_x = s'_x$.*

Demostración. En efecto, supongamos que s, s' son dos secciones en $F(U)$ tales que, para cada x en U, sus respectivos gérmenes s_x y s'_x en x son iguales. Entonces, para cada x en U, existe una vecindad abierta U_x de x contenida en U tal que $\rho^U_{U_x}(s) = \rho^U_{U_x}(s')$ (Teorema 3.1). Así, tenemos una cubierta abierta $U = \bigcup_{x\in U} U_x$ de U y secciones s, s' en $F(U)$ tales que $\rho^U_{U_x}(s) = \rho^U_{U_x}(s')$. Por $i)$ de la condición de haz, concluimos que $s = s'$.

3.5. Teorema Fundamental de la Teoría de Haces. Lo siguiente que haremos es mostrar que para cada prehaz F sobre X existe un espacio haz $\mathrm{L}(F)$ y que cualquier morfismo $f : F \longrightarrow G$ de prehaces nos otorga un morfismo $\mathrm{L}(f) : \mathrm{L}(F) \longrightarrow \mathrm{L}(G)$ entre los correspondientes espacios haz $\mathrm{L}(F)$ y $\mathrm{L}(G)$. Para hacer dicha construcción consideremos la colección $\{F_x\}_{x\in X}$ de los tallos de F en cada punto x de X y denotemos $\mathrm{L}(F) = \coprod_{x\in X} F_x$ a la unión disjunta de los tallos F_x. El conjunto $\mathrm{L}(F)$ viene acompañado con una correspondiente función proyección $p : \mathrm{L}(F) \longrightarrow X$ a X que envía a cada tallo F_x a x.

Ahora procedemos a topologizar a $\mathrm{L}(F)$ especificando los subconjuntos de $\mathrm{L}(F)$ que serán la base para una topología. Consideremos cualquier abierto U de X. Si s es un elemento en $F(U)$, entonces tenemos una función $\hat{s} : U \longrightarrow \mathrm{L}(F)$ dada por $x \mapsto s_x$. Los conjuntos de la forma $\hat{s}(U) = \{s_x \in \mathrm{L}(F) \mid x \in U\}$ son los que buscamos, esto es, ellos forman una base para una topología sobre $\mathrm{L}(F)$. En efecto, que la unión de los conjutos $\hat{s}(U)$ es todo $\mathrm{L}(F)$ es inmediato, ya que todo elemento e en $\mathrm{L}(F)$ está en algún tallo F_x y $e = s_x$ para algún s en $F(U)$, con U una vecindad abierta de x. Ahora tomemos e en $\hat{s}(U)\cap\hat{t}(V)$, con s en $F(U)$ y t en $F(V)$. Entonces los gérmenes de s y t coinciden en $x = p(e)$, es decir, $e = s_x = t_x$, así que existe una vecindad W de x contenida en $U \cap V$ en la que $\rho^U_W(s) = \rho^V_W(t)$ (Teorema 3.1), luego $e = \rho^U_W(s)_x = \rho^V_W(t)_x$ está en $\widehat{\rho^U_W(s)}(W) \subseteq \hat{s}(U) \cap \hat{t}(V)$.

Con esta topología sobre $\mathrm{L}(F)$, la proyección $p : \mathrm{L}(F) \longrightarrow X$ es una función continua. Más aún, p es un homeomorfismo local, ya que para cualquier e en $\mathrm{L}(F)$, existe un abierto básico $\hat{s}(U)$ que contiene a e y donde $p|_{\hat{s}(U)}$ tiene inversa continua $\hat{s}$.

Ahora mostremos que todo morfismo de prehaces $f : F \longrightarrow G$ nos otorga un morfismo $\mathrm{L}(f) : \mathrm{L}(F) \longrightarrow \mathrm{L}(G)$. Para cada x en X definimos una función $f_x : F_x \longrightarrow G_x$ entre los tallos F_x y G_x como sigue: primero, cualquier germen e en F_x es de la forma $e = s_x$, para algún abierto U y s en $F(U)$; luego, $f_U(s)$ es una sección en $G(U)$, y $f_U(s)_x$ un germen del tallo G_x. Así que definimos $f_x(e) = f_U(s)_x$. Si $e = t_x$ para algún t en $F(V)$, entonces existe un abierto $W \subseteq U \cap V$ en el que $\rho^U_W(s) = \rho^V_W(t)$. Se sigue que

$$\rho'^U_W f_U(s) = f_W \rho^U_W(s) = f_W \rho^V_W(t) = \rho'^V_W f_V(t),$$

esto es, las seciones $f_U(s)$ y $f_V(t)$ coinciden en W, y por consiguiente, $f_U(s)_x = f_V(t)_x$, así que nuestra función está bien definida. Como $\mathrm{L}(F)$ es la unión disjunta de los tallos F_x, las funciones $f_x : F_x \longrightarrow G_x$ nos otorgan una función $\mathrm{L}(f) : \mathrm{L}(F) \longrightarrow \mathrm{L}(G)$ que es continua y que hace conmutativo al triángulo

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{L}(F) \arrow[rr, "\mathrm{L}(f)"] \arrow[dr, "p"'] & & \mathrm{L}(G) \arrow[dl, "p'"] \\
& X. &
\end{tikzcd}$$

En resumen, existe un funtor $\mathrm{L} : \mathrm{Psh}(X) \longrightarrow \mathrm{Sp}/X$.

Estamos listos para enunciar el Teorema Fundamental de la Teoría de Haces.

TEOREMA 3.3.

i) *El funtor* $\mathrm{L} : \mathbf{Psh}(X) \to \mathbf{Sp}/X$ *es adjunto izquierdo al funtor* $\Gamma : \mathbf{Sp}/(X) \to \mathbf{Psh}(X)$ *y* L *preserva límites finitos.*

ii) *Para cada prehaz* F*, la unidad de la adjunción* $\eta : F \longrightarrow \Gamma\mathrm{L}(F)$ *(que es la asignación* $s \mapsto \hat{s}$*) es un isomorfismo si y sólo si* F *es un haz.*

iii) *Para cada espacio fibrado* $f : A \longrightarrow X$*, la counidad de la adjunción* $\epsilon : \mathrm{L}\Gamma(A, f) \longrightarrow \langle A, f\rangle$ *es un homeomorfismo si y sólo si* f *es un homeomorfismo local.*

DEMOSTRACIÓN. Ver P. T. Johnstone, **[7]**, pág 172 Teorema 1.5.

COROLARIO 3.3.1.

i) *Los funtores* Γ *y* L *se restringen a una equivalencia de categorías entre* $\mathbf{Sh}(X)$ *y* $\mathbf{LH}/X$.

ii) *La inclusión* $\mathbf{Sh}(X) \longrightarrow \mathbf{Psh}(X)$ *tiene adjunto izquierdo* $\Gamma\mathrm{L} : \mathbf{Psh}(X) \longrightarrow \mathbf{Sh}(X)$ *que preserva límites finitos conocido como el* funtor haz asociado *o el* funtor hacificación.

iii) *La inclusión* $\mathbf{LH}/X \longrightarrow \mathbf{Sp}/X$ *preserva límites finitos y tiene por adjunto derecho al funtor* $\mathrm{L}\Gamma : \mathbf{Sp}/X \longrightarrow \mathbf{LH}/X$.

DEMOSTRACIÓN. Ver P. T. Johnstone, **[7]**, pág 173, Corolario 1.5.

3.6. Haz Sobre una Base de la Topología. Ahora mencionaremos un método para la construcción de haces sobre un espacio X a partir de cierta información dada sobre los abiertos de una base para la topología sobre X. Sea $\mathcal{B}$ una base para la topología $\mathcal{O}(X)$ sobre X y supongamos que $\mathcal{B}$ es cerrada bajo intersecciones finitas. Decimos que un prehaz $F : \mathcal{B}^{op} \longrightarrow \mathbf{Set}$ sobre los abiertos de la base $\mathcal{B}$ es un haz si cumple que para cualquier cubierta abierta $U = \bigcup_{i\in I} U_i$ de un básico U por básicos U_i en $\mathcal{B}$, el diagrama

$$F(U) \longrightarrow \prod_{i\in I} F(U_i) \rightrightarrows \prod_{(i,j)\in I\times I} F(U_i \cap U_j)$$

es un igualador (donde las flechas están definidas como en el diagrama (1) arriba), es decir, F cumple la condición de haz sobre los abiertos de la base $\mathcal{B}$. Denotamos por $\mathbf{Sh}(\mathcal{B})$ a la categoría de haces sobre $\mathcal{B}$. Ahora notemos que cualquier prehaz sobre X se restringe a un prehaz sobre $\mathcal{B}$ del modo obvio; más aún, todo haz $F : \mathcal{O}(X) \longrightarrow \mathbf{Set}$ sobre X se restringe a un haz sobre $\mathcal{B}$. Este proceso nos define un funtor $\mathbf{r} : \mathbf{Sh}(X) \longrightarrow \mathbf{Sh}(\mathcal{B})$.

TEOREMA 3.4. *Para cualquier base* $\mathcal{B}$ *de la topología sobre un espacio* X*, la restricción* $\mathbf{r} : \mathbf{Sh}(X) \longrightarrow \mathbf{Sh}(\mathcal{B})$ *es una equivalencia de categorías.*

DEMOSTRACIÓN. Ver S. Mac Lane, I. Moerdijk, **[13]**, pág 69, Teorema 3.

En otras palabras, el Teorema 3.4 nos dice que para obtener un haz sobre todo el espacio topológico, es suficiente con tener los datos de un haz definido solamente sobre los abiertos de una base $\mathcal{B}$ de la topología de dicho espacio. Este resultado es muy útil ya que uno tiene mayor control sobre los abiertos de una base que de un conjunto abierto arbitrario del espacio.

3.7. Cambio de Base. Dada una función continua $f : X \longrightarrow Y$ y un prehaz F sobre X, podemos definir un prehaz f_* sobre Y, llamado la *imagen directa* de F por f como

$$\begin{cases} (f_*F)(U) = F(f^{-1}(U)), & U \text{ un abierto de } Y \\ \\ \rho'^U_V = \rho^{f^{-1}(U)}_{f^{-1}(V)}, & \text{para abiertos } V \subseteq U. \end{cases}$$

Además, si F es un haz, así lo es f_*F; y si $\eta : F \longrightarrow G$ es un morfismo de prehaces sobre X, entonces tenemos un morfismo $f_*\eta : f_*F \longrightarrow f_*G$ definido para cada abierto U de Y como $(f_*\eta)_U = \eta_{f^{-1}(U)}$. Si consideramos a las colecciones de abiertos $\mathcal{O}(X)$ y $\mathcal{O}(Y)$ de X y de Y, respectivamente, como categorías, entonces la función $f^{-1} : \mathcal{O}(Y) \longrightarrow \mathcal{O}(X)$ es un funtor, y el funtor imagen directa f_*F no es otro que la composición

$$\mathcal{O}(Y) \xrightarrow{f^{-1}} \mathcal{O}(X) \xrightarrow{F} \mathbf{Set}.$$

Con la misma función continua $f : X \longrightarrow Y$, pero ahora con un prehaz G sobre Y, construimos un haz f^*G sobre X como sigue: Dado G, consideramos el espacio haz $\langle \mathrm{L}G, p\rangle$ y obtenemos un diagrama

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{L}G \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

de funciones continuas. Ahora tomamos el *pullback*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r] \arrow[d, "p'"'] & \mathrm{L}G \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y, \end{tikzcd}$$

donde $E = \{(e, x) \in \mathrm{L}G \times X \mid p(e) = f(x)\}$ dotado con la topología heredada por la topología producto en $\mathrm{L}G \times X$ y $p' : E \longrightarrow X$, $E \longrightarrow \mathrm{L}G$ las restricciones a E de las proyecciones sobre X y $\mathrm{L}G$, respectivamente.

El par $\langle E, p'\rangle$ es un espacio haz, es decir, p' es un homeomorfismo local, así que al tomar las secciones sobre cada abierto U de X, obtenemos un haz $\Gamma(E, p')$. Entonces definimos $f^*G = \Gamma(E, p')$, llamado la *imagen inversa* de G por f.

Teorema 3.5. *Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función continua. Entonces tenemos un par de funtores*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Sh}(X) \arrow[r, shift left, "f_*"] & \mathbf{Sh}(Y) \arrow[l, shift left, "f^*"] \end{tikzcd}$$

con $f^* \dashv f_*$. Además f^* preserva límites finitos.

Demostración. Ver S. Mac Lane, I. Moerdijk, [**13**], Teorema 2 y 3, pág. 101 y 103, respectivamente.

Capítulo 1

Marcos

1. Retículas

1.1. Copos. Sea A un conjunto. Un *orden parcial* sobre A es una relación binaria $\leq$ que es reflexiva, antisimétrica y transitiva, esto es,

i) para todo a en A, $a \leq a$;
ii) para cualesquier a ,b en A, si $a \leq b$ y $b \leq a$, entonces $a = b$, y
iii) para cualesquier a, b, c en A, si $a \leq b$ y $b \leq c$, entonces $a \leq c$.

Por un *conjunto parcialmente ordenado* (*copo*) entendemos a un conjunto A dotado de un orden parcial.

Sea A un copo y S un subconjunto de A. Decimos que un elemento a en A es un *supremo* para S, y lo escribimos como $a = \bigvee S$, si

1) a es una cota superior para S, es decir, $s \leq a$ para todo s en S, y
2) si b es otra cota superior para S entonces $a \leq b$.

La propiedad *ii*) arriba nos asegura que el supremo de S, si existe, es único. Si S consta de sólo dos elementos a, b, escribimos $a \vee b$ en lugar de $\bigvee\{a, b\}$, y escribimos $0 = \bigvee \emptyset$ para el supremo del conjunto vacío. Claramente $0 \leq a$, para cada a en A. Por último, un *morfismo de orden* es una función entre copos que preserva el orden.

1.2. Semirretículas. En un copo A en el que todo subconjunto finito tiene un supremo (luego existe el elemento 0 en A), podemos definir una operación binaria $\vee : A \times A \longrightarrow A$ como $(a, b) \mapsto a \vee b$. La operación $\vee$ satisface

i) $a \vee a = a$
ii) $a \vee b = b \vee a$
iii) $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$
iv) $a \vee 0 = a$.

Además

v) $a \vee b = b$ si y sólo si $a \leq b$,

para todo a, b, c en A. Esto es, $(A, \vee, 0)$ es un monoide conmutativo en la que todo elemento es idempotente. Recíprocamente,

Teorema 1.1. *Si $(A, \vee, 0)$ es un monoide conmutativo en el que todo elemento es idempotente, entonces existe un único orden parcial $\leq$ sobre A tal que $a \vee b$ es el supremo de a y b y $0 \leq a$, para todo a en A.*

Un copo A en el que todo subconjunto finito tiene un supremo, (o bien, que tiene todos los supremos finitos) es llamado una *sup-semirretícula*. Un *morfismo de sup-semirretículas* $f : A \longrightarrow B$ es una función que preserva todos los supremos finitos, en particular, $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$ y $f(0) = 0$.

1.3. Retículas. Dualmente, en un copo A podemos considerar la noción de *ínfimo*, únicamente volteando las desigualdades en todo lo hecho arriba. Escribimos $\bigwedge S$, $a \wedge b$ y 1 para las correspondientes versiones en *inf-semirretículas* de $\bigvee S$, $a \vee b$ y 0. Una *retícula* es un copo A en el que todo subconjunto finito tiene un ínfimo y un supremo. Esto es equivalente a decir que A es un conjunto dotado de un par de operaciones binarias $\vee$ y $\wedge$ y un par de elementos distinguidos 0 y 1 tal que $(A, \vee, 0)$ y $(A, \wedge, 1)$ son (sup e inf) semirretículas, y que los órdenes inducidos por las operaciones $\vee$ y $\wedge$ son opuestos uno del otro.

TEOREMA 1.2. *Sean $(A, \vee, 0)$ y $(A, \wedge, 1)$ semirretículas. Entonces $(A, \vee, \wedge, 0, 1)$ es una retícula si y sólo si la* ley de absorción

$$a \wedge (a \vee b) = a = a \vee (a \wedge b)$$

se satisface, para todo a, b en A.

1.4. Retículas Distributivas. Existen muchas retículas en las que se satisface la llamada *ley distributiva*

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c). \tag{2}$$

Si pensamos a $\wedge$ como un producto y a $\vee$ como una suma, entonces esta identidad no es más que la ley distributiva usual en los anillos. Sin embargo, una retícula que satisface (2) también satisface la ley distributiva dual $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$. En efecto,

$$\begin{aligned} (a \vee b) \wedge (a \vee c) &= ((a \vee b) \wedge a) \vee ((a \vee b) \wedge c) \\ &= a \vee ((a \wedge c) \vee (b \wedge c)) \\ &= (a \vee (a \wedge c)) \vee (b \wedge c) \\ &= a \vee (b \wedge c), \end{aligned}$$

aplicando (2) dos veces y la ley de absorción.

TEOREMA 1.3. *Sean a, b, c elementos en una retícula distributiva A. Entonces existe a lo más un x en A tal que $x \wedge a = b$ y $x \vee a = c$*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que x e y satisfacen las condiciones en el Teorema. Entonces

$$\begin{aligned} x &= x \wedge (x \vee a) \\ &= x \wedge c = x \wedge (y \vee a) \\ &= (x \wedge y) \vee (x \wedge a) \\ &= (x \wedge y) \vee b. \end{aligned}$$

Como $b \leq x \wedge a \leq x$ y $b \leq y \wedge a \leq y$, tenemos que $b \leq x \wedge y$, luego $x = (x \wedge y) \vee b = x \wedge y$. Análogamente llegamos a que $y = x \wedge y$ y por tanto $x = y$.

1.5. Álgebras Booleanas. En cualquier retícula, un elemento x que satisface $x \wedge a = 0$ y $x \vee a = 1$ es llamado un *complemento* de a. Luego, el Teorema 1.3 nos dice que en una retícula distributiva, los complementos son únicos, siempre que existan. Un *álgebra booleana* es una retícula distributiva A más una operación unaria $\neg : A \longrightarrow A$ tal que $\neg a$ es el complemento de a.

1.6. Álgebras de Heyting. Otra clase de retículas con las que nos encontraremos son las llamadas álgebras de Heyting. La siguiente discusión nos servirá de motivación. Sean a, b elementos en un álgebra booleana A y consideremos al elemento $\neg a \vee b$. Entonces para cualquier c en A, si $c \leq \neg a \vee b$, tenemos que

$$\begin{aligned} c \wedge a &\leq a \wedge (\neg a \vee b) \\ &= (a \wedge \neg a) \vee (a \wedge b) \\ &= 0 \vee (a \wedge b) = a \wedge b \\ &\leq b; \end{aligned}$$

recíprocamente, si $c \wedge a \leq b$, entonces

$$\begin{aligned} \neg a \vee b &\geq \neg a \vee (c \wedge a) \\ &= (\neg a \vee c) \wedge (\neg a \vee a) \\ &= (\neg a \vee c) \wedge 1 \\ &\geq c. \end{aligned}$$

Luego, $\neg a \vee b$ es el mayor elemento en A tal que $(\neg a \vee b) \wedge a \leq b$, es decir, si c es otro elemento tal que $c \wedge a \leq b$, entonces $c \leq \neg a \vee b$. Una retícula A es un *álgebra de Heyting* si para cada par de elementos a, b de A, existe un elemento $a \to b$ tal que $c \leq a \to b$ si y sólo si $c \wedge a \leq b$.

2. Sup-retículas

Hasta ahora sólo hemos considerado copos que tienen ya sea supremos o ínfimos finitos y hemos visto que estos objetos pueden ser definidos por medio de operaciones finitarias que satisfacen ciertas ecuaciones. Ahora consideraremos a copos con supremos o ínfimos arbitrarios, es decir, copos en los que cualquiera de sus subconjunto (ya no sólo finito) tiene un supremo o ínfimo. De hecho, si un copo tiene todos los supremos, entonces también tiene todos los ínfimos y viceversa.

Teorema 2.1. *Un conjunto parcialmente ordenado A en el que todo subconjunto S de A tiene un supremo también tiene todos los ínfimos.*

Demostración. Sea S un subcojunto de A. Consideremos el conjunto T de todas las cotas inferiores de S y sea $a = \bigvee T$. Ya que cada s en S es una superior para T, tenemos que $a \leq s$, luego a es una cota inferior para S, y por como fue definido, es la mayor de tales cotas. Por lo tanto $a = \bigwedge S$.

Obviamente la versión dual también se cumple. Un copo en el que cualquier subconjunto tiene un supremo es llamado una *sup-retícula*. Esta es la generalización a supremos arbitrarios de las sup-semirretículas. Su versión dual, esto es, un copo en el cualquier subconjunto tiene un ínfimo le decimos una *inf-retícula*. Por último, un copo en el cualquier subconjunto tiene un supremo y un ínfimo se llama una *retícula completa*.

Por el Teorema 2.1, pudiera parecer que no necesitamos hacer una diferencia entre tales objetos. Sin embargo, debemos hacer una urgente observación. Como las sup-retículas son la generalización a supremos arbitrarios de las sup-semirretículas, definimos a un *morfismo de sup-retículas* como una función $f : A \longrightarrow B$ que preserva supremos arbitrarios y lleva al cero de A en el cero de B. Aun cuando A tiene al elemento $1 = \bigvee A$, no exigimos que el supremo del conjunto $\{f(a) \mid a \in A\}$

sea el elemento 1 de B (aunque puede pasar). Una misma discusión es para las inf-retículas. Un *morfismo de retículas completas* es una función que preserva supremos e ínfimos arbitrarios y manda cero en cero y uno en uno. Así, las categorías de sup-retículas, inf-retículas y retículas completas, tienen los mismos objetos, pero es cuando consideramos a sus morfismos cuando llegan diferir.

2.1. Operador de Cerradura. Un modo de ver a una sup-retícula A es como una categoría (pequeña) que tiene todos los colímites. Luego, un morfismo de sup-retículas $f : A \longrightarrow B$ es un funtor que preserva todos los colímites. Se sigue, por el Teorema del Funtor Adjunto, que f tiene un adjunto derecho $f_* : B \longrightarrow A$, y la unicidad salvo isomorfismo del adjunto, en este contexto se convierte simplemente en unicidad. Es fácil ver que f_* está definido como

$$f_*(b) = \bigvee\{x \in A \mid f(x) \leq b\}.$$

Entonces la composición $\beta = f_*f$ nos define una mónada sobre A, es decir, β es una función sobre A que satisface: *i)* $\beta(a) \leq \beta(b)$; *ii)* $\beta^2(a) \leq \beta(a)$, y *iii)* $a \leq \beta(a)$, para todo a, b en A. Por *i)* y *iii)* tenemos que $\beta(a) \leq \beta^2(a)$ y puesto que A es un copo, obtenemos $ii)'\beta^2(a) = \beta(a)$, usando *ii)*. Una función definida sobre un copo que satisface *i)*, *ii)'* y *iii)* se conoce como un *operador de cerradura*.

Sea $\beta : A \longrightarrow A$ un operador de cerradura definido sobre una sup-retícula A y sea

$$A_\beta = \{a \in A \mid \beta(a) = a\}.$$

Claramente A_β está contenido en la imagen de β, y ya que $\beta^2 = \beta$, deducimos que $A_\beta = \mathrm{im}\beta$. También tenemos que A_β es cerrado bajo ínfimos arbitrarios. En efecto, Sea S un subconjunto de A_β y consideremos su ínfimo $\bigwedge S$ en A (este elemento existe ya que A es una sup-retícula). Sabemos que $\bigwedge S \leq s$, para toda s en S. Por *i)*, $\beta(\bigwedge S) \leq \beta(s)$, pero $s = \beta(s)$, de modo que $\beta(\bigwedge S)$ es una cota inferior para S, luego $\beta(\bigwedge S) \leq \bigwedge S$. Por *iii)* tenemos que $\bigwedge S \leq \beta(\bigwedge S)$ y por tanto, $\bigwedge S = \beta(\bigwedge S)$.

Hemos visto que el ínfimo de un subconjunto S de A_β es el mismo que en A. Sin embargo, el supremo de S en A no necesariamente es el mismo que en A_β. Pero S tiene un supremo en A_β, a saber, $\beta(\bigvee S)$. Esto se debe a que $s \leq \bigvee S \leq \beta(\bigvee S)$ para todo s en S, es decir, $\beta(\bigvee S)$ es una cota superior para S en A_β; y si t en A_β es otra cota superior para S, entonces $\bigvee S \leq t$, y así, $\beta(\bigvee S) \leq \beta(t) = t$. Luego, considerando a A_β como una sup-retícula, la función $\beta : A \longrightarrow A_\beta$ (la correstricción de β a su imagen, puesta con el mismo nombre) llega a ser un morfismo de sup-retículas suprayectivo y para cualesquier a en A y b en A_β, es claro que

$$a \leq b \text{ si y sólo si } \beta(a) \leq b.$$

Esto último nos dice que la inclusión $A_\beta \hookrightarrow A$ es el adjunto derecho de β.

TEOREMA 2.2. *Existe una biyección entre la colección de todos los subconjuntos cerrados bajo ínfimos de una sup-retícula A y la colección de todos los operadores de cerradura $\beta : A \longrightarrow A$.*

DEMOSTRACIÓN. Si β es un operador de cerradura sobre A, entonces ya vimos que A_β es un subconjunto de A cerrado bajo ínfimos. Ahora bien, si Q es un subconjunto de A cerrado bajo ínfimos, entonces la función $r : A \longrightarrow A$ definida por

$$r(a) = \bigwedge\{x \in Q \mid a \leq x\}$$

es un operador de cerradura sobre A. Para ver esto, primero notemos que $r(a)$ es un elemento de Q, para todo a en A y que dado x en Q, $r(x) = x$; en otras palabras, $Q = \operatorname{im} r$. Se sigue que $r^2(a) = r(r(a)) = r(a)$. Ahora, como a es una cota inferior del conjunto $\{x \in Q \mid a \leq x\}$, tenemos que $a \leq r(a)$. Por último, si $a \leq b$, entonces el conjunto $\{x \in Q \mid b \leq x\}$ está contenido en $\{x \in Q \mid a \leq x\}$; luego, el ínfimo de $\{x \in Q \mid a \leq x\}$ es, en particular, una cota inferior de $\{x \in Q \mid b \leq x\}$, y por tanto, $r(a) \leq r(b)$. De hecho, la correstricción $r : A \longrightarrow Q$ de r a Q es el adjunto izquierdo a la inclusión $Q \hookrightarrow A$ de Q en A. La biyección ahora es evidente.

Los subconjuntos cerrados bajo ínfimos de una sup-retícula A tienen un orden natural dado por la contención. Asimismo, existe un orden parcial en la colección de todos los operadores de cerradura sobre A definido como $\alpha \leq \beta$ si y sólo si $\alpha(a) \leq \beta(a)$, para todo a en A. Ahora bien, si Q y Q' son subconjuntos de A cerrrados bajo ínfimos con $Q \subseteq Q'$, entonces para todo a en A, el conjunto $\{x \in Q \mid a \leq x\}$ está contenido en $\{x \in Q' \mid a \leq x\}$, luego $\bigwedge\{x \in Q' \mid a \leq x\} \leq \bigwedge\{x \in Q \mid a \leq x\}$, es decir, $r'(a) \leq r(a)$, donde r y r' son los correspondientes operadores de cerradura de Q y Q', respectivamente. Recíprocamente, si $\alpha \leq \beta$ son operadores de cerradura, entonces $A_\beta \subseteq A_\alpha$. En caso contrario, existe a_0 en A_β que no está en A_α, luego $\beta(a_0) = a_0 < \bigwedge\{x \in A_\alpha \mid a_0 \leq x\} = \alpha(a_0)$, una contradicción. Se sigue que la biyección en el Teorema 2.2 es una función que invierte el orden.

2.2. Cocientes de Sup-retículas. Una *congruencia* sobre una sup-retícula A es una relación de equivalencia $R \subseteq A \times A$ que también es una sup-retícula con la misma operación de tomar supremos de $A \times A$. Dada una sup-retícula A y R una congruencia sobre A, el conjunto cociente A/R es una sup-retícula y la proyección $\rho : A \longrightarrow A/R$ es un morfismo de sup-retículas que es universal entre todos los morfismos de sup-retículas $f : A \longrightarrow B$ que respetan la congruencia R, esto es, si $f(a) = f(b)$ para todo (a, b) en R, entonces existe un único morfismo de sup-retículas $\hat{f} : A/R \longrightarrow B$ tal que $\hat{f}\rho = f$. Esta propiedad caracteriza completamente a la sup-retícula cociente A/R, salvo isomorfismo.

Un morfismo de sup-retículas $f : A \longrightarrow B$ siempre nos define una congruencia R sobre sobre A definida como

$$(a, b) \in R \text{ si y sólo si } f(a) = f(b),$$

y cuando f es suprayectiva, $B \cong A/R$. Así que, básicamente todo morfismo suprayectivo $f : A \longrightarrow B$ de sup-retículas es la proyección $\rho : A \longrightarrow A/R$ de A sobre un cociente A/R.

TEOREMA 2.3. *Existe una biyección entre los cocientes de una sup-retícula A y los operadores de cerradura de A.*

DEMOSTRACIÓN. Si $f : A \longrightarrow B$ es un cociente de A, entonces ya hemos visto que la composición f_*f es un operador de cerradura sobre A, donde $f_* : B \longrightarrow A$ es el adjunto derecho de f. Recíprocamente, si β es un operador de cerradura, entonces $\beta : A \longrightarrow A_\beta$ es un morfismo de sup-retículas suprayectivo. Como el adjunto derecho de β es la inclusión $A_\beta \hookrightarrow A$, tenemos que la composición

$$A \xrightarrow{\beta} A_\beta \hookrightarrow A$$

es precisamente β, el operador de cerradura con el que empezamos. Así que sólo nos falta demostrar que dado un cociente $f : A \longrightarrow B$ de A, existe un isomorfismo de sup-retículas $A_{f_*f} \longrightarrow B$. Por una de las identidades triangulares de la adjunción

$f \dashv f_*$ tenemos que $ff_*f = f$; como f es suprayectiva, $ff_* = 1_B$, y de esta última igualdad obtenemos que f_* es inyectiva. Por otro lado, como

$$A_{f_*f} = \mathrm{im}(f_*f) = f_*f(A) = f_*(B) = \mathrm{im} f_*,$$

el morfismo $f_* : B \longrightarrow A_{f_*f}$ es un isomorfismo de orden, y por consiguiente, un isomorfismo de sup-retículas.

Dados dos cocientes $f : A \longrightarrow B$, $g : A \longrightarrow C$ de una sup-retícula A, decimos que $g \leq f$ si y sólo si existe un morfismo $h : B \longrightarrow C$ tal que $hf = g$.

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d, "h"] \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "g"'] & C. \end{tikzcd}$$

Esto nos define un orden parcial sobre la colección de todos los cocientes de A. Ahora, si f y g son cocientes de A con $g \leq f$, entonces $f_*h_* = g_*$, por la unicidad de g_*, luego

$$A_{g_*g} = \mathrm{im} g_* = \mathrm{im} f_*h_* \subseteq A_{f_*} = A_{f_*f}.$$

Recíprocamente, si Q y Q' son subconjuntos de A cerrados bajo ínfimos con $Q \subseteq Q'$, entonces sean r y r' los respectivos adjuntos izquierdos de las inclusiones $Q \hookrightarrow A$ y $Q' \hookrightarrow A$. Pero la inclusión $Q \subseteq Q'$ también tiene un adjunto izquierdo $k : Q' \longrightarrow Q$ y es tal que $kr' = r$, nuevamente por la unicidad del adjunto en este contexto.

$$\begin{tikzcd} & Q' \arrow[d, "k"] \\ A \arrow[ur, "r'"] \arrow[r, "r"'] & Q. \end{tikzcd}$$

así, $r \leq r'$ y la biyección entre los subconjuntos cerrados bajo ínfimos de A y sus cocientes es un isomorfismo de orden. En resumen,

Teorema 2.4. *Para cualquier sup-retícula A, existe una biyección entre los siguientes conjuntos:*

i) la colección de todos los cocientes de A;
ii) la colección de todos los subconjuntos cerrados bajo ínfimos de A, y
iii) la colección de todos los operadores de cerradura de A.

La biyección entre i) y ii) preserva orden y las de i) con iii), y ii) con iii) invierten el orden.

Con este Teorema, hemos identificado a cada cociente de una sup-retícula A con un conveniente subconjunto Q de A. Ahora describiremos explícitamente cómo es el cociente de A por la congruencia generada por un subconjunto arbitrario de $A \times A$.

Teorema 2.5. *El cociente de una sup-retícula A por la congruencia generada por un subconjunto R de $A \times A$ coincide con el subconjunto*

$$Q = \{x \in A \mid \text{ para todo } (a, b) \in R, \;\; a \leq x \text{ ssi } b \leq x\}.$$

DEMOSTRACIÓN. Veamos que Q es cerrado bajo ínfimos. Sea S un subconjunto de Q. Entonces, para cualquier (a, b) en R,

$$\begin{aligned} a \leq \bigwedge S &\text{ ssi } a \leq s \text{ para todo } s \text{ en } S \\ &\text{ ssi } b \leq s \text{ para todo } s \text{ en } S \\ &\text{ ssi } b \leq \bigwedge S. \end{aligned}$$

Así, $\bigwedge S$ está en A. El cociente $r : A \longrightarrow Q$ satisface que para cualquier (a, b) en R,

$$\begin{aligned} r(a) &= \bigwedge\{x \in Q \mid a \leq x\} \\ &= \bigwedge\{x \in Q \mid b \leq x\} \\ &= r(b). \end{aligned}$$

Ahora supongamos que $r' : A \longrightarrow Q'$ es un cociente de A tal que $r'(a) = r'(b)$, para todo (a, b) en R (aquí estamos suponiendo que Q' es un subconjunto de A cerrado bajo ínfimos arbitrarios). Si x está en Q' y (a, b) en R, entonces

$$\begin{aligned} a \leq x &\text{ ssi } r'(a) \leq x \\ &\text{ ssi } r'(b) \leq x \\ &\text{ ssi } b \leq x. \end{aligned}$$

Luego, $Q' \subseteq Q$, o traducido a los cocientes, $r' \leq r$. Es decir, existe un único morfismo $k : Q \longrightarrow Q'$ tal que $kr = r'$.

2.3. La Sup-retícula Libre. Ahora abordaremos la construcción de sup-retículas libres sobre un conjunto y sobre un copo. Pero antes veremos quién es la sup-semirretícula libre generada por un conjunto.

TEOREMA 2.6. *La sup-semirretícula libre generada por un conjunto X es el conjunto KX de todos los subconjuntos finitos de X, con la operación de supremo dado por la unión.*

DEMOSTRACIÓN. En efecto, tenemos una función $\eta_X :\longrightarrow KX$ dada por $x \mapsto \{x\}$. Además, cada subconjunto S de KX puede ser expresado de manera única como la unión de todos los conjuntos unitarios $\{x\}$, con x en S. Luego, cualquier función $f : X \longrightarrow A$ de X a una sup-semirretícula A, se extiende a un único morfismo de sup-semirretículas $\widehat{f} : KX \longrightarrow A$ que asigna a cada S en FX el elemento $\bigvee_{x \in S} f(x)$.

Una demostración análoga nos dice que

TEOREMA 2.7. *la sup-retícula generada por un conjunto X es el conjunto potencia $\mathcal{P}X$ de X, con la operación de supremo dado por la unión.*

Una construcción más elaborada se requiere para mostrar la existencia de sup-reticulas libres sobre un copo. Empecemos recordando que un subconjunto I de un copo P es un *conjunto inferior* si siempre que a está en I y $b \leq a$, entonces b está en I. Denotemos por DP a la colección de todos los subconjuntos inferiores del copo P. Es fácil ver que DP es cerrado bajo uniones, así que es una sup-retícula; pero también es cerrado intersecciones arbitrarias. Además, tenemos un evidente morfismo de orden $y : P \longrightarrow DP$ que asigna a cada a en P el conjunto $\downarrow(a) = \{b \in P \mid b \leq a\}$.

TEOREMA 2.8. *La sup-retícula libre generada por un copo P es el conjunto DP con la operación de supremo dado por la unión.*

DEMOSTRACIÓN. Sólo nos resta ver que todo morfismo de orden $f : P \longrightarrow A$, con A una sup-retícula, se extiende a un único morfismo de sup-retículas $\hat{f} : DP \longrightarrow A$. Dado tal f, definimos $\hat{f} : DP \longrightarrow A$ como $\hat{f}(S) = \bigvee\{f(s) \mid s \in S\}$. Evidentemente, $\hat{f}y = f$; también es claro que $\hat{f}$ es un morfismo de orden. Para ver que $\hat{f}$ es un morfismo de sup-retículas, debemos mostrar que para cualquier colección $\{S_i\}_{i\in I}$ con S_i en DP, $\hat{f}\big(\bigcup_{i\in I} S_i\big) = \bigvee_{i\in I} \hat{f}(S_i)$. Escribamos s_i para el elemento $\hat{f}(S_i)$ en A. Para cada s en $\bigcup_{i\in I} S_i$ existe algún índice i en I ta que $f(s) \leq s_i$, así que

$$\hat{f}\Big(\bigcup_{i\in S} S_i\Big) = \bigvee\{f(s) \mid s \in \bigcup_{i\in I} S_i\} \leq \bigvee\{s_i \mid i \in I\},$$

y la otra desigualdad es gracias a que $\hat{f}$ es un morfismo de orden. Si $f' : DP \longrightarrow A$ es otro es otro morfismo de sup-retículas tal que $f'y = f$, entonces, dado que cada S en DP puede ser expresado como $S = \bigcup_{a\in S} \downarrow(a)$, tenemos que

$$f'(S) = f'\Big(\bigcup_{a\in S} \downarrow(a)\Big) = \bigcup_{a\in S} f'y(a) = \bigcup_{a\in S} \hat{f}y(a) = \hat{f}\Big(\bigcup_{a\in S} \downarrow(a)\Big) = \hat{f}(S).$$

Con esto terminamos la demostración.

3. Marcos

Un *marco* es una retícula completa A que satisface la *ley distributiva arbitraria*

$$a \wedge \bigvee S = \bigvee\{a \wedge s \mid s \in S\},$$

para todo a en A y todo subconjunto S de A. Un *morfismo de marcos* es una función $f : A \longrightarrow B$ tal que

$$f(0) = 0, \quad f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b),$$
$$f(1) = 1, \quad f(\bigvee S) = \bigvee\{f(s) \mid s \in S\},$$

para cualesquier a, b en A y cualquier subconjunto S de A.

Para cada elemento a de un marco A podemos considerar la función $a \wedge (\ ) : A \longrightarrow A$. La ley distributiva arbitraria nos dice $a \wedge (\ )$ preserva todos los supremos, luego $a \wedge (\ )$ tiene un adjunto derecho $a \rightarrow (\ )$, esto es, para todo b y c en A,

$$a \wedge c \leq b \text{ si y sólo si } c \leq a \rightarrow b.$$

así que todo marco A es un álgebra de Heyting.

3.1. *Nucleus.* Un morfismo de marcos f tiene un adjunto derecho f_* que preserva ínfimos arbitrarios, luego, la composición $f_* f$ preserva ínfimos finitos. Un operador de cerradura $j : A \longrightarrow A$ sobre un marco A que además cumple que $j(a \wedge b) = j(a) \wedge j(b)$ para todo a, b en A es llamado un *nucleus*.

TEOREMA 3.1. *Para un* nucleus *$j : A \longrightarrow A$ sobre un marco A, el conjunto $A_j = \{a \in A \mid j(a) = a\}$ es un marco y $j : A \longrightarrow A_j$ es un morfismo de marcos, cuyo adjunto derecho es la inclusión $A_j \longrightarrow A$.*

Demostración. Ya sabemos que A_j es una retícula completa, donde los ínfimos en A_j coinciden con los de A y los supremos están dados como $j\big(\bigvee S\big)$ para cualquier subconjunto S de A_j. Además es claro que $j(1) = 1$ y que el elemento menor de A_j es $j(0)$. Con esta descripción de los elementos de A_j y dado que j preserva ínfimos finitos, ya sólo nos resta ver que A_j satisface la ley distributiva arbitraria para demostrar el Teorema. Para ello sean a en A_j y $S \subseteq A_j$. Entonces

$$\begin{aligned} a \wedge \bigvee_{A_j} S &= a \wedge j\Big(\bigvee_A S\Big) \\ &= j(a) \wedge j\Big(\bigvee_A S\Big) \\ &= j\Big(a \wedge \bigvee_A S\Big) \\ &= j\Big(\bigvee_A \{a \wedge s \mid s \in S\}\Big) \\ &= \bigvee_{A_j} \{a \wedge s \mid s \in S\}. \end{aligned}$$

El Teorema queda demostrado.

Teorema 3.2. *Existe una biyección entre los* nucleus *de un marco A y los subconjuntos B de A tales que*

i) B es cerrado bajo ínfimos arbitrarios y
ii) para cualesquier a en A y b en B, $a \to_A b$ está en B.

Demostración. Si j es un *nucleus* de A, entonces sabemos que el conjunto A_j es cerrado bajo ínfimos. Veamos que para cualquier a en A y b en A_j el elemento $a \to_A b$ está en A_j. En efecto, como $a \to_A b \leq a \to_A b$, entonces $a \to_A b \wedge a \leq b$, luego $j(a \to_A b) \wedge j(a) = j(a \to_A b \wedge a) \leq j(b) = b$ y así, $j(a) \leq j(a \to_A b) \to_A b$. Como j tiene por adjunto derecho a la inclusión, la última desigualdad es equivalente a $a \leq j(a \to_A b) \to_A b$ si y sólo si $j(a \to_A b) \wedge a \leq b$ si y sólo si $j(a \to_A b) \leq a \to_A b$. Puesto que $a \to_A b \leq j(a \to_A b)$, obtenemos la igualdad, y con ello, que $a \to_A b$ está en A_j.

Ahora supongamos que B es un subconjunto de A que satisface $i)$ y $ii)$. Por $i)$, existe un operador de cerradura j sobre A tal que $A_j = B$ y j adjunto izquierdo a la inclusión $i : A_j \longrightarrow A$. Así que solamente nos falta demostrar que $j(a \wedge b) = j(a) \wedge j(b)$. De las desigualdades $a \wedge b \leq a$ y $a \wedge b \leq b$, obtenemos que $j(a \wedge b) \leq j(a)$ y $j(a \wedge b) \leq j(b)$, luego $j(a \wedge b) \leq j(a) \wedge j(b)$. Ahora mostremos que $j(a) \wedge j(b) \leq j(a \wedge b)$. Pero

$$\begin{aligned} j(a) \wedge j(b) \leq j(a \wedge b) \text{ ssi } & j(a) \leq j(b) \to_A j(a \wedge b) && \text{definición} \\ \text{ssi } & a \leq j(b) \to_A j(a \wedge b) && j \dashv i \\ \text{ssi } & a \wedge j(b) \leq j(a \wedge b) && \text{definición} \\ \text{ssi } & j(b) \leq a \to_A j(a \wedge b) && \text{definición} \\ \text{ssi } & b \leq a \to_A j(a \wedge b) && j \dashv i \text{ y } ii) \\ \text{ssi } & a \wedge b \leq j(a \wedge b) && \text{definición.} \end{aligned}$$

La biyección se sigue del Teorema 2.2.

3.2. Cocientes de Marcos. Como en las sup-retículas, los cociente de marcos están en biyección con las *congruencias de marcos* (relaciones de equivalecia que son a la vez submarcos) y todo morfismo suprayectivo de marcos es básicamente una proyección a un marco cociente. Ahora mostraremos que cualquier cociente de marcos también está completamente determinado por un *nucleus*.

TEOREMA 3.3. *Para cualquier marco A, existe una biyección entre los* nucleus *sobre A y los cocientes de A.*

DEMOSTRACIÓN. Dado un cociente $f : A \longrightarrow B$ de A, tenemos un *nucleus* f_*f. Recíprocamente, dado un *nucleus* $j : A \longrightarrow A$, obtenemos un morfismo suprayectivo de marcos $A \longrightarrow A_j$ (Teorema 3.1) y es claro que el *nucleus* inducido por este morfismo suprayectivo es nuevamente j. Así que sólo nos falta demostrar que dado un cociente $f : A \longrightarrow B$ de A, existe un isomorfismo $A_{f_*f} \longrightarrow B$. Por una de las identidades triangulares de la adjunción $f \dashv f_*$ tenemos que $ff_*f = f$; como f es suprayectiva, $ff_* = 1_B$, y de esta última igualdad obtenemos que f_* es inyectiva. Por otro lado, como

$$A_{f_*f} = \mathrm{im}(f_*f) = f_*f(A) = f_*(B) = \mathrm{im} f_*,$$

el morfismo $f_* : B \longrightarrow A_{f_*f}$ es un isomorfismo de orden, y por consiguiente, un isomorfismo de marcos.

En resumen,

TEOREMA 3.4. *Para cualquier marco A, existe una biyección entre los siguientes conjuntos:*

i) la colección de todos los cocientes de A;
ii) la colección de todos los subconjuntos B de A cerrados bajo ínfimos y tales que dados a en A y b en B, $a \to_A b$ está en B.
iii) la colección de todos los nucleus *sobre A.*

La biyección entre i) y ii) preserva orden y las de i) con iii), y ii) con iii) invierten el orden.

Tal como lo hicimos para sup-retículas, describimos el cociente Q de un marco A por la congruencia generada por un subconjunto R de $A \times A$. Decimos $R \subseteq A \times A$ es *inf-estable* si para cualquier a en A y cualquier (b, c) en R, $(a \wedge b, a \wedge c)$ está en R.

TEOREMA 3.5. *Sea A un marco R un subconjunto inf-estable de $A \times A$. El cociente de A por la congruencia generada por R está dado por el subconjunto*

$$Q = \{x \in A \mid \text{para todo } (a, b) \in R, \ \ a \leq x \text{ ssi } b \leq x\}.$$

DEMOSTRACIÓN. Por 2.5 y 3.4, solamente tenemos que demostrar que dados a en A y x en Q, $a \to_A x$ está en Q. Sea (b, c) en R. Entonces

$$\begin{aligned} b \leq a \to_A x &\text{ ssi } a \wedge b \leq x \\ &\text{ ssi } a \wedge c \leq x \\ &\text{ ssi } c \leq a \to_A x. \end{aligned}$$

3.3. El Marco Libre. El *marco libre* FX sobre un conjunto X puede ser construido en dos pasos. Primero notemos que la inf-semirretícula libre generada por X es KX^{op}, la sup-semirretícula libre KX considerada con el orden opuesto. Otra cosa que debemos notar es que el conjunto DP de subconjuntos inferiores de un copo P, con las operaciones de unión e intersección de conjuntos, es un marco.

Ahora construimos el marco libre FX sobre un conjunto X como sigue: tomamos la inf-semirretícula libre KX^{op} sobre X; sobre KX^{op} construimos la sup-retícula libre $D(KX^{\mathrm{op}})$. Entonces pasa que $D(KX^{\mathrm{op}})$ es el marco libre sobre X. De hecho, demostraremos lo siguiente:

TEOREMA 3.6. *El marco libre generado por una inf-semirretícula A es el marco DA.*

DEMOSTRACIÓN. Uno fácilmente puede ver que la función $y : A \longrightarrow DA$, $a \mapsto \downarrow (a)$ es un morfismo inf-semirretículas. Si $f : A \longrightarrow B$ es otro morfismo de inf-semirretículas, con B un marco, entonces definimos una función $\hat{f} : DA \longrightarrow B$ como $\hat{f}(S) = \bigvee\{f(s) | s \in S\}$, que es un morfismo de orden y es el único que extiende a f. Así que sólo no resta ver que $\hat{f}$ es un morfismo de marcos. Ya sabemos que $\hat{f}$ preserva supremos arbitrarios; ahora, dados S, T en DA,

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(S) \wedge \hat{f}(T) &= \Big(\bigvee\{f(s) \mid s \in S\}\Big) \wedge \Big(\bigvee\{f(t) \mid t \in T\}\Big) \\
&= \bigvee\{f(s) \wedge f(t) \mid s \in S \text{ y } t \in T\} && \text{ley distributiva} \\
&= \bigvee\{f(s \wedge t) \mid s \in S \text{ y } t \in T\} && f \text{ preserva ínfimos} \\
&= \bigvee\{f(u) \mid u \in S \cap T\} && S \text{ y } T \text{ están en } DA \\
&= \hat{f}(S \cap T).
\end{aligned}$$

La demostración esta completa.

Capítulo 2

Logos

1. Categorías Presentables

Una *categoría presentable* es una categoría cocompleta que, a pesar de ser generalmente grande, todavía puede ser controlada por datos pequeños. Dicho de otra forma, este tipo de categorías posee un *conjunto de generadores* tal que todo objeto es un colímite de un funtor que toma valores en dicho conjunto. En la literatura es común, en especial aquella que pertenece al siglo pasado, encontrarlas con el nombre de *categorías localmente presentables*.

1.1. Generadores. Recordemos que en una categoría, un epimorfismo es *regular* si es el coigualador de un par de flechas. Ahora mencionamos otros tipos de epimorfismos que usaremos.

DEFINICIÓN. Un epimorfismo $f : a \longrightarrow b$ en una categoría es
$i)$ *extremo* si siempre que f se factoriza como $f = i \circ p$ con i un monomorfismo, entonces i necesariamente es un isomorfismo.
$ii)$ *fuerte* si para cada cuadrado conmutativo

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & b \arrow[d, "v"] \arrow[dl, dashed, "w"'] \\ c \arrow[r, "g"'] & d \end{tikzcd}$$

con g un monomorfismo, existe una (única) flecha $w : b \longrightarrow c$ tal que $u = wf$ y $gw = v$.

Uno puede verificar directamente que cada epi regular es extremo. O bien, primero ver que cada epi regular es fuerte y luego mostrar que cada epi fuerte es extremo. Cuando la categoría tiene *pullbacks*, epi fuerte y epi extremo son conceptos equivalentes. También es sabido que un morfismo que es a la vez mono y epi extremo (fuerte) es un isomorfismo; y que si una composición fg es epi extremo (fuerte), entonces f es epi extremo (fuerte).

Estos tipos de epimorfismos nos ayudarán a definir los distintos tipos de conjuntos de generadores de una categoría.

DEFINICIÓN. Un conjunto de objetos G en una categoría $\mathcal{E}$ es un *conjunto de generadores* para $\mathcal{E}$ si para cualquier par de flechas paralelas $f, g : a \longrightarrow b$, la igualdad $fu = gu$ para toda la flecha $u : x \longrightarrow a$, con x en G, implica que $f = g$.

Cuando $\mathcal{E}$ es localmente pequeña, esto es lo mismo que decir que la colección de funtores $\{\mathrm{Hom}(x, \ )\}_{x \in G}$ es *colectivamente fiel*, esto es, para cualesquier morfismos $f, g : a \longrightarrow b$, si $\mathrm{Hom}(x, f) = \mathrm{Hom}(x, g)$ para todo x en G, entonces $f = g$.

En una categoría $\mathcal{E}$ con coproductos tenemos una forma de caracterizar a un conjunto de generadores. Para ver esto consideremos un conjunto G de objetos de $\mathcal{E}$. Para cualquier objeto a de $\mathcal{E}$, todas las flechas $u : x \longrightarrow a$ con dominio algún x en G y codominio a las podemos ver en una sola flecha

$$\epsilon_a : \coprod_{u:x\to a} \mathrm{dom} u \longrightarrow a,$$

y denotamos por $k_u : x \longrightarrow \coprod_{u:x\to a} \mathrm{dom} u$ al morfismo canónico de x al coproducto que cumple $\epsilon_a \circ k_u = u$. Entonces G es un conjunto de generadores si y sólo si ϵ_a es un epimorfismo. En efecto, supongamos que G es un conjunto de generadores. Sean $f, g : a \longrightarrow b$ un par de flechas paralelas tales que $f \circ \epsilon_a = g \circ \epsilon_a$. Entonces

$$f \circ u = f \circ \epsilon_a \circ k_u = g \circ \epsilon_a \circ k_u = g \circ u$$

para cualquier flecha $u : x \longrightarrow a$, así $f = g$. Recíprocamente, si ϵ_a es un epimorfismo y $f, g : a \longrightarrow b$ son un par de flechas con $f \circ u = g \circ u$ para cualquier $u : x \longrightarrow a$, con x en G, entonces

$$f \circ \epsilon_a \circ k_u = f \circ u = g \circ u = g \circ \epsilon_a \circ k_u.$$

Se sigue que $f \circ \epsilon_a = g \circ \epsilon_a$, por la propiedad del coproducto; y dado que ϵ_a es epi, concluimos que f y g son iguales.

Definición. Sea $\mathcal{E}$ una categoría con coproductos y G un conjunto de objetos de $\mathcal{E}$. El conjunto G es un *conjunto de generadores extremo* si para cualquier objeto a de $\mathcal{E}$, el morfismo ϵ_a, definido como arriba, es un epimorfismo extremo.

Es claro que lo que significaría que un conjunto de generadores sea *regular* o *fuerte*. Luego, si $\mathcal{E}$ tiene coproductos y *pullbacks*, conjunto de generadores extremo y conjunto de generadores fuerte son conceptos equivalentes.

Teorema 1.1. *Si $\mathcal{E}$ es localmente pequeña y tiene coproductos, entonces G es un conjunto de generadores extremo si y sólo si la colección de funtores* $\{\mathrm{Hom}(x, \ )\}_{x\in G}$ *es conjuntamente fiel y conjuntamente refleja isomorfismos.*

Demostración. Supongamos que G es un conjunto de generadores extremo. Así que los funtores $\mathrm{Hom}(x, \ )$ son conjuntamente fieles. Para ver que reflejan isomorfismos conjuntamente, supongamos que, dada $f : a \longrightarrow b$ en $\mathcal{E}$, las funciones $f_* = \mathrm{Hom}(x, f)$, con x en G, son biyectivas; esto es, para cualquier $v : x \longrightarrow b$ existe una única flecha $u_v : x \longrightarrow a$ tal que $v = f \circ u_v$. Por la propiedad universal del coproducto, existe una única flecha $g : \coprod_{x \xrightarrow{v} b} \mathrm{dom} v \longrightarrow a$ tal que $g \circ k_v = u_v$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "k_v"] \arrow[dr, "u_v"'] & \coprod_{v:x\to b} \mathrm{dom} v \arrow[d, dashed, "g"] \\ & a. \end{tikzcd}$$

Ya que para cada índice $v : x \longrightarrow b$, $f \circ g \circ k_v = f \circ u_v = v$, tenemos que $\epsilon_b = f \circ g$, y puesto que ϵ_b es epi extremo, se sigue que f es epi extremo. Sólo resta mostrar que f es un monomorfismo para concluir que es un isomorfismo. Sean $\alpha, \beta : c \longrightarrow a$ tales que $f\alpha = f\beta$. Entonces para cualquier $w : x \longrightarrow c$, $f\alpha w = f\beta w$, luego $\alpha w = \beta w$, ya que f_* es biyectiva, y concluimos que $\alpha = \beta$ porque G es un conjunto de generadores.

Ahora supongamos que el conjunto de funtores $\{\mathrm{Hom}(x, \ )\}_{x\in G}$ es conjuntamente fiel y conjuntamente refleja isomorfismos. Que la colección es conjuntamente fiel implica que para cualquier a en $\mathcal{E}$, ϵ_a es epi. Para ver que ϵ_a es extremo, supongamos que $\epsilon_a = m \circ p$, con m un monomorfismo. Mostremos que m es un isomorfismo demostrando que todas las funciones $\mathrm{Hom}(x, m)$, con x en G, son biyectivas. Claramente las funciones mencionadas son inyectivas. Si el dominio de m es c, esto es, $m : c \longrightarrow a$, entonces la función $\mathrm{Hom}(x, m)$ es $m_* : \mathrm{Hom}(x, c) \longrightarrow \mathrm{Hom}(x, a)$. Que $\mathrm{Hom}(x, m)$ es suprayectiva es debido a que, dada $u : x \longrightarrow a$, existe $p \circ k_u : x \longrightarrow c$ tal que $m \circ p \circ k_u = \epsilon_a \circ k_u = u$, así que m_* es suprayectiva y la demostración está completa.

Todavía existe otra noción de conjunto de generadores de la que tendremos oportunidad de hablar. Recordemos que dado un objeto a de $\mathcal{E}$, la categoría $\mathcal{E}/a$ *de objetos sobre* a tiene por objetos flechas $f : b \longrightarrow a$ de $\mathcal{E}$ con codominio a, que lo escribimos como par $\langle b, f\rangle$, y un morfismo de $\langle b, f\rangle$ a $\langle c, g\rangle$ es una flecha $h : b \longrightarrow c$ de $\mathcal{E}$ que hace conmutar al triángulo

$$\begin{tikzcd} b \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & c \arrow[dl, "g"] \\ & a. & \end{tikzcd}$$

De esta construcción obtenemos un evidente funtor $U : \mathcal{E}/a \longrightarrow \mathcal{E}$, $\langle b, f\rangle \mapsto b$. Cuando G es un conjunto de objetos de $\mathcal{E}$ podemos considerar la subcategoría plena $\mathbf{A}$ de $\mathcal{E}$ generada por G y para cualquier objeto a de $\mathcal{E}$, considerar la subcategoría plena $\mathbf{A}/a$ de $\mathcal{E}/a$. Vemos que a junto con las flechas $f : x \longrightarrow a$, con x un miembro de G, forman un cocono para el funtor $U : \mathbf{A}/a \longrightarrow \mathcal{E}$. Entonces decimos que G es un *conjunto de generadores denso*, si para cada objeto a de $\mathcal{E}$, este cocono descrito es el colímite de U.

Supongamos que G es un conjunto de generadores regular, es decir, el morfismo ϵ_a es el coigualador de algún par de flechas $f, g : b \longrightarrow \coprod_{x \xrightarrow{u} a} \mathrm{dom} u$ y consideremos el siguiente diagrama:

$$\coprod_{v : x \to b} \mathrm{dom} v \xrightarrow{\epsilon_b} b \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} \coprod_{u : x \to a} \mathrm{dom} u \xrightarrow{\epsilon_a} a.$$

Ya que ϵ_b es un epimorfismo, tenemos que ϵ_a es el coigualador de $f \circ \epsilon_b$ y $g \circ \epsilon_b$. Así, hemos presentado al objeto a como el coigualador de dos flechas definidas entre dos productos de los objetos generadores. En una categoría con coproductos, todo conjunto de generadores denso es un conjunto de generadores regular. Esto se debe a que todo colímite puede ser visto como un conveniente coigualador de un par de flechas entre dos coproductos. El recíproco se cumple cuando los coproductos son universales (ver sección 2) y la categoría tiene *pullbacks*.

1.2. Objetos Presentables. Un cardinal infinito λ es *regular* si no puede ser expresado como una suma más pequeña que λ de cardinales más pequeños que λ, es decir, si I es un conjunto con $|I| < \lambda$ y $\{\lambda_i\}_{i\in I}$ es cualquier colección de cardinales con $\lambda_i < \lambda$, entonces $\Sigma_{i\in I}\lambda_i < \lambda$. Un resultado de la teoría de conjuntos nos dice que hay «suficientes» cardinales regulares:

dado un conjunto $\{\lambda_i\}_{i\in I}$ de cardinales, existe un cardinal regular $\lambda > \lambda_i$, para cada i en I.

Sea λ un cardinal regular. Por una categoría *λ-pequeña* entendemos a una categoría $\mathbf{I}$ cuya colección de flechas tiene cardinalidad estrictamente menor que λ. Una categoría $\mathbf{J}$ es *λ-filtrante* si todo funtor $F : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbf{J}$, con $\mathbf{I}$ λ-pequeña, tiene un cocono en $\mathbf{J}$. Equivalentemente,

i) $\mathbf{J}$ es no vacía;
ii) para cualquier colección $\{d_i\}_{i\in I}$ de objetos de $\mathbf{J}$, con $|I| < \lambda$, existe un objeto d en $\mathbf{J}$ y morfismos $f_i : d_i \longrightarrow d$, y
iii) para cualquier colección de flechas $\{f_i : a \longrightarrow b\}_{i\in I}$ de $\mathbf{J}$, con $|I| < \lambda$, existe un objeto c en $\mathbf{J}$ y una flecha $g : b \longrightarrow c$ tal que $gf_i = gf_j$, para todo i, j en I.

Notemos que toda categoría λ-filtrante es α-filtrante, para cada cardinal regular $\alpha < \lambda$. Por un *colímite λ-filtrante* en una categoría $\mathcal{E}$, entendemos al colímite de un funtor $D : \mathbf{J} \longrightarrow \mathcal{E}$ definido sobre una categoría λ-filtrante $\mathbf{J}$. Se sigue que cada colímite λ-filtrante es también un colímite α-filtrante, para cada cardinal regular $\alpha < \lambda$. Por último, un *λ-límite* (*λ-colímite*) en $\mathcal{E}$ es el límite (colímite) de un funtor $D : \mathbf{I} \longrightarrow \mathcal{E}$, donde $\mathbf{I}$ es λ-pequeña.

Cuando consideramos al cardinal regular $\aleph_0$, obtenemos los conceptos de categoría filtrante y colímite filtrante vistos en 0.1. Ya que una categoría λ-filtrante es, en particular, filtrante, podemos usar la misma construcción del colímite filtrante de conjuntos para construir colímites λ-filtrantes de conjuntos. Otro resultado que obtenemos por sustituir «finito» por «estrictamente menor que λ» es el siguiente:

TEOREMA 1.2. *Sea λ un cardinal regular. En* $\mathbf{Set}$*, λ-límites conmutan con λ-colímites filtrantes.*

Y como este, muchos resultados más.

DEFINICIÓN. Sea $\mathcal{E}$ una categoría localmente pequeña que tiene colímites λ-filtrantes. Un objeto a en $\mathcal{E}$ es *λ-presentable* si el funtor $\mathrm{Hom}(a, \ \ ) : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbf{Set}$ preserva colímites λ-filtrantes. Un objeto a es *presentable* cuando es λ-presentable, para algún cardinal regular λ.

Otra vez, cuando consideramos el cardinal infinito $\aleph_0$, obtenemos el concepto de objeto finitamente presentable visto en 0.1. Notemos que cada objeto λ-presentable es κ-presentable para cada cardinal regular $\kappa > \lambda$.

TEOREMA 1.3. *Sea $\mathcal{E}$ una categoría localmente pequeña y λ un cardinal regular. En $\mathcal{E}$, un λ-colímite de objetos λ-presentables es λ-presentable.*

DEMOSTRACIÓN. Ver Teorema 0.1.2.

Cuando a es λ-presentable y $\{k_j : a_j \longrightarrow l \mid j \in J\}$ es un colímite λ-filtrante, tenemos el isomorfismo canónico

$$\mathrm{colim}_j \mathrm{Hom}(a, a_j) \longrightarrow \mathrm{Hom}(a, l)$$

obtenido por las funciones $\mathrm{Hom}(a, k_j) : \mathrm{Hom}(a, a_i) \longrightarrow \mathrm{Hom}(a, l)$

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(a, a_j) \arrow[r] \arrow[dr, "\mathrm{Hom}(a,k_j)"'] & \varinjlim_{J} \mathrm{Hom}(a, a_j) \arrow[d, dashed, "\mathrm{iso}"] \\ & \mathrm{Hom}(a, l). \end{tikzcd}$$

Entonces podemos demostrar que

i) para cada morfismo $f : a \longrightarrow l$, existe un morfismo $t : a \longrightarrow a_j$ tal que $f = k_j \circ t$;

ii) si $t_1, t_2 : a \longrightarrow a_j$ son dos morfismos tales que $k_j \circ t_1 = k_j \circ t_2$ para algún morfismo canónico $k_j : a_j \longrightarrow l$ del colímite, entonces existe un morfismo $k_{ji} : a_j \longrightarrow a_i$ tal que $k_{ji} t_1 = k_{ji} t_2$.

Recíprocamente, un objeto a que satisface las condiciones *i)* y *ii)* para todo colímite λ-filtrante, es λ-presentable.

Un conjunto X es finitamente presentable en **Set** si y sólo si X es finito. Supongamos que X es finitamente presentable. Como X es el colímite del diagrama de sus subconjuntos finitos, la identidad 1_X se factoriza a través de uno de los subconjuntos finitos, luego X es finito. Recíprocamente, dado X finito, consideremos un colímite filtrante $\{\mu_j : A_j \longrightarrow Y \mid j \in \mathbf{J}\}$ en **Set**. Para cada función $f : X \longrightarrow Y$ y cada elemento x de X, existe un índice j_x en $\mathbf{J}$ tal que $f(x)$ está en la imagen de de μ_{j_x} (recordar la construcción de un colímite filtrante en **Set**). Como X es finito y $\mathbf{J}$ filtrante, existe un cocono $\{u_x : j_x \longrightarrow k \mid x \in X\}$ en $\mathbf{J}$ de los j_x con vértice k. Así, $f(X) \subseteq \mu_k(A_k)$ y esto implica que f se factoriza a través de μ_k. Supongamos que $g, h : X \longrightarrow A_k$ cumplen que $\mu_k \circ g = f = \mu_k \circ h$. Dado x en X, los elementos $g(x)$ y $h(x)$ coinciden en el colímite Y, luego, existe una flecha $u : k \longrightarrow i$ en $\mathbf{J}$ tal que $A_u(g(x)) = A_u(h(x))$. Esto termina la demostración de la afirmación hecha al principio del párrafo.

1.3. Categorías Presentables.

DEFINICIÓN. Una categoría localmente pequeña $\mathcal{E}$ es *λ-presentable*, con λ un cardinal regular, si

i) $\mathcal{E}$ es cocompleta;

ii) existe un conjunto G de objetos λ-presentables;

iii) cada objeto de $\mathcal{E}$ es un colímite λ-filtrante de un funtor que toma valores en G.

Una categoría $\mathcal{E}$ es *presentable* si es λ-presentable, para algún cardinal regular λ.

Una definición equivalente que podemos encontrar es que una categoría $\mathcal{E}$ es λ-presentable si es cocompleta y tiene un conjunto de generadores fuerte formado por objetos λ-presentables.

Notemos que una categoría λ-presentable $\mathcal{E}$ es κ-presentable para todo cardinal regular $\kappa > \lambda$. Además, ya que cada a en $\mathcal{E}$ es de la forma $a = \mathrm{colim}_{j \in J} a_j$ con J λ-filtrante y a_j en G, podemos elegir un cardinal regular κ mayor que λ y $|J|$, luego a es un κ-colímite de objetos κ-presentables, y por tanto, a es κ-presentable (Teorema 1.3). En pocas palabras,*en una categoría presentable, cada objeto es presentable.*

EJEMPLO.

a) La categoría **Set** de conjuntos y funciones es finitamente presentable. Es cocompleta, cada conjunto es el colímite filtrante del diagrama de sus ubconjuntos finitos y existe, salvo isomorfismo, solamente un conjunto (numerable) de conjuntos finitos.

b) La categoría **FinSet** de conjuntos finitos y funciones no es finitamente presentable, ya que no es cocompleta.

c) Sea $\mathbf{C}$ una categoría pequeña. La categoría $\mathbf{Psh}(\mathbf{C}) = \mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}$ de prehaces sobre $\mathbf{C}$ es presentable. En efecto, $\mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}$ es cocompleta; la colección de funtores representables es un conjunto de generadores denso (todo prehaz es el colímite de funtores representables), luego, un conjunto de generadores fuerte. Que $\mathrm{Hom}(a,\ )$, con a en $\mathcal{E}$ es presentable, es porque el funtor $\mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}(\ ,a),\ ) : \mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{op}} \longrightarrow \mathbf{Set}$ es naturalmente isomorfo al funtor evaluación Ev_a en a y este último preserva todos colímites, en particular, colímites λ-filtrantes.

Teorema 1.4. *Sea λ un cardinal regular y $\mathcal{E}$ una categoría λ-presentable. Sea $\mathbf{A}$ la subcategoría plena de $\mathcal{E}$ generada por el conjunto G de objetos λ-presentables. La cerradura plena $\mathbf{C}$ de $\mathbf{A}$ en $\mathcal{E}$ bajo λ-colímites existe y tiene las siguientes propiedades:*

i) *$\mathbf{C}$ es equivalente a una categoría pequeña;*
ii) *$\mathbf{C}$ tiene λ-colímites y son calculados como en $\mathcal{E}$;*
iii) *cada objeto en $\mathbf{C}$ es λ-presentable;*
iv) *para cada objeto a de $\mathcal{E}$, la categoría $\mathbf{C}/a$ es λ-filtrante;*
v) *los objetos de $\mathbf{C}$ constituyen en $\mathcal{E}$ una familia de generadores densa.*

Demostración. Ver [**4**] vol. 1, pág. 258 y 259, Lemas 5.2.4 y 5.2.5.

Dada una subcategoría plena, pequeña $\mathbf{C}$ de una categoría $\mathcal{E}$, definimos un funtor

$$\Gamma : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}$$

que asigna a cada objeto a en $\mathcal{E}$, el funtor $\mathrm{Hom}(\ ,a) : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{Set}$ (la restricción a $\mathbf{C}$ del funtor representable $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(\ ,a) : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbf{Set}$) y a cada morfismo $f : b \longrightarrow c$ de $\mathcal{E}$ la transformación natural $f_* = \mathrm{Hom}(\ ,f) : \mathrm{Hom}(\ ,b) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\ ,c)$ (nuevamente, $\mathrm{Hom}(\ ,f)$ es la restricción de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(\ ,f)$ a $\mathbf{C}$). Este funtor preserva colímites λ-filtrantes si y sólo si cada objeto de $\mathbf{C}$ es λ-presentable. Además, Γ es pleno y fiel si y sólo si $\mathbf{C}$ es una familia de generadores densa (para detalles, ver [**1**]).

Teorema 1.5. *Para cualquier funtor $A : \mathbf{C} \longrightarrow \mathcal{E}$ de una categoría pequeña $\mathbf{C}$ a una categoría cocompleta $\mathcal{E}$, el funtor $R : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}$ definido por $Ra = \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(A(\ ),a)$ para cada a en $\mathcal{E}$, tiene un adjunto izquierdo.*

Demostración. Para demostrar la existencia de un adjunto izquierdo L al funtor R, mostremos que dado P en $\mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}$, existe un objeto LP de $\mathcal{E}$ y una flecha universal $P \longrightarrow R(LP) = \mathrm{Hom}(A(\ ),LP)$. Sea pues P en $\mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}$ y consideremos la llamada *categoría de elementos de* P, denotada por $\int_{\mathbf{C}} P$ (o algunas veces sólo escrita como $\int P$), que tiene por objetos pares (c,x) con c un objeto de $\mathbf{C}$ y x en Pc, y un morfismo de (c',x') a (c,x) es una flecha de $f : c' \longrightarrow c$ de $\mathbf{C}$ tal que $Pf(x) = x'$. Tenemos un evidente funtor $\pi : \int P \longrightarrow \mathbf{C}$ dado por $(c,x) \mapsto c$. Como $\mathcal{E}$ es cocompleta, el funtor $A \circ \pi$ tiene un colímite $\{\mu_{(c,x)} : A \circ \pi(c,x) = A(c) \longrightarrow e \mid (c,x) \in \int P\}$. Este colímite nos define una transformación natural $\mu : P \longrightarrow \mathrm{Hom}(A(\ ),e)$ definida para cada c en $\mathbf{C}$ como $\mu_c : Pc \longrightarrow \mathrm{Hom}(A(\ ),a)$, $x \mapsto \mu_{(c,x)}$. Si $\varphi : P \longrightarrow \mathrm{Hom}(A(\ ),a)$ es otra transformación natural, entonces para cada objeto c de $\mathbf{C}$ y x en Pc (luego un objeto (c,x) en $\int P$) obtenemos una flecha $\varphi_c(x) : A(c) \longrightarrow a$ en $\mathcal{E}$. Esta colección de flechas indizadas por los objetos (c,x) de $\int P$ forman un cocono para $A \circ \pi$, luego, existe una única flecha $\widehat{\varphi} : e \longrightarrow a$ tal que $\varphi_c(x) = \widehat{\varphi} \circ \mu_{(c,x)}$. La flecha $\widehat{\varphi}$ nos induce una transformación natural $\widehat{\varphi}_* : \mathrm{Hom}(A(\ ),e) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A(\ ),a)$ y es tal que para cada c en $\mathbf{C}$, el triángulo

$$\begin{tikzcd} Pc \arrow[r, "\mu_c"] \arrow[dr, "\varphi_c"'] & \mathrm{Hom}(A(c),e) \arrow[d, "\widehat{\varphi}_{*c}"] \\ & \mathrm{Hom}(A(c),a) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} x \arrow[r, mapsto] \arrow[dr] & \mu_{(c,x)} \arrow[d, mapsto] \\ & \varphi_c(x) = \widehat{\varphi} \circ \mu_{(c,x)} \end{tikzcd}$$

conmuta. En otras palabras, $\widehat{\varphi}_* \circ \mu = \varphi$. Esto termina la demostración.

COROLARIO 1.5.1. *Toda categoría presentable $\mathcal{E}$ es completa.*

De hecho, demostraremos algo más, a saber, que toda categoría presentable es equivalente a una subcategoría reflexiva de $\mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}$, de lo cual se sigue el resultado.

DEMOSTRACIÓN. Si $\mathcal{E}$ es una categoría λ-presentable, tomamos $\mathbf{C}$ en el Teorema anterior a ser la cerradura bajo λ-colímites de su conjunto de generadores y el funtor A como la inclusión $\mathbf{C} \longrightarrow \mathcal{E}$. Entonces el funtor R llega a ser el funtor Γ y dado que $\mathbf{C}$ es una familia de generadores densa, Γ es pleno y fiel. Se sigue que $\mathcal{E}$ es equivalente a una subcategoría reflexiva de $\mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}$ y por tanto $\mathcal{E}$ es completa.

COROLARIO 1.5.2. *Para una categoría $\mathcal{E}$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) *$\mathcal{E}$ es equivalente a una subcategoría reflexiva de una categoría presentable;*
ii) *$\mathcal{E}$ es equivalente a una subcategoría reflexiva de $\mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}$, para alguna categoría pequeña $\mathbf{C}$;*
iii) *$\mathcal{E}$ es cocompleta y tiene una subcategoría densa.*

DEMOSTRACIÓN. Que *iii)* implica *ii)* ya lo hemos observado en el Corolario anterior y *ii)* implica *i)* es claro, así que sólo debemos demostrar que *i)* implica *iii)*. Supongamos que $\mathcal{E}$ es equivalente a una subcategoría reflexiva $\mathbf{A}$ de una categoría λ-presentable $\mathbf{B}$. Obviamente $\mathbf{A}$ es cocompleta y es fácil ver que la imagen bajo el reflector $\mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}$ de la subcategoria densa de $\mathbf{B}$ (que es la cerradura bajo colímites λ-filtrantes de la categoría generada por los generadores de $\mathbf{B}$) es una subcategoría densa de $\mathbf{A}$.

Sea $\mathcal{E}$ una categoría λ-presentable y G su conjunto de generadores. Aun cuando la subcategoría plena generada por G no sea densa, podemos considerar su cerradura bajo λ-colímites, que ya es una subcategoría densa. Así que para una categoría presentable se cumplen los incisos del último Corolario.

1.4. Reflexión Sobre Objetos Locales. Recordemos que el *problema de la subcategoría de objetos locales* consiste en hallar condiciones bajo las cuales dada una categoría $\mathcal{E}$ y una colección de flechas R de $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}^R$ es una subcategoría reflexiva de $\mathcal{E}$.

TEOREMA 1.6. *Sea $\mathcal{E}$ una categoría cocompleta en la que cada objeto es presentable. Dado un conjunto R de flechas de $\mathcal{E}$, la subcategoría $\mathcal{E}^R$ existe y es reflexiva en $\mathcal{E}$.*

DEMOSTRACIÓN. Ver **[4]** vol.1, pag.198, Teorema 5.4.7.

COROLARIO 1.6.1. *Sea $\mathcal{E}$ una categoría presentable y R un conjunto de morfismos de $\mathcal{E}$. La subcategoría $\mathcal{E}^R$ es reflexiva en $\mathcal{E}$.*

Hemos comenzado con una categoría cocompleta $\mathcal{E}$ en la que todos sus objetos son presentables y un conjunto R de flechas de $\mathcal{E}$, y vimos que la categoría $\mathcal{E}^R$ de objetos R-locales es una subcategoría reflexiva de $\mathcal{E}$. También sabemos que toda subcategoría reflexiva es la subcategoría de objetos locales con respecto a la colección Σ de todas las flechas invertidas por el reflector (Teorema 0.2.4), así que $\mathcal{E}^R = \mathcal{E}^\Sigma$. A continuación veremos qué relación existe entre las colecciones R y Σ.

Definición. Sea $\mathcal{E}$ una categoría cocompleta y Σ una colección de mosrfismos de $\mathcal{E}$. Decimos que Σ es cerrada bajo colímites cuando, dada una categoría pequeña J, un par de funtores $F, G : J \longrightarrow \mathcal{E}$ y una transformación natural $\eta : F \longrightarrow G$, si todos los morfismo $\eta_j : Fj \longrightarrow Gj$ están en Σ, entonces el correspondiente morfismo $\mathrm{colim} Fj \longrightarrow \mathrm{colim} Gj$ también pertenece a Σ.

Teorema 1.7. *Sea $\mathcal{E}$ una categoría cocompleta en la que todo objeto es presentable. Consideremos una colección R de flechas de $\mathcal{E}$ y la correspondiente subcategoría reflexiva $\mathcal{E}^R$ de objetos R-locales. La colección Σ de todos los morfismos invertidos por el reflector $\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}^R$ es la menor colección de flechas de $\mathcal{E}$ con las siguientes propiedades:*

i) *Σ contiene a R;*
ii) *todos los isomorfismos pertenecen a Σ;*
iii) *si dos lados de un triangulo conmutativo están en Σ, entonces el tercer lado también lo está;*
iv) *Σ es cerrada bajo colímites.*

Demostración. Ver [**4**] vol. 1, pág. 205, Teorema 5.4.10.

1.5. Cocompletación Libre.

Definición. Sea $\mathbf{C}$ una categoría.

i) Una *cocompletación libre* de $\mathbf{C}$ consiste de una inmersión $E : \mathbf{C} \longrightarrow \widehat{\mathbf{C}}$ de $\mathbf{C}$ en una categoría cocompleta $\widehat{\mathbf{C}}$ tal que cualquier funtor $A : \mathbf{C} \longrightarrow \mathcal{E}$, con $\mathcal{E}$ cocompleta, se extiende a un funtor $\widehat{A} : \widehat{\mathbf{C}} \longrightarrow \mathcal{E}$ que preserva colímites, único salvo isomorfismo natural.
ii) Sea λ un cardinal regular. Una *cocompletación λ-libre* de $\mathbf{C}$ consiste de una inmersión $E : \mathbf{C} \longrightarrow \widehat{\mathbf{C}}$ que preserva todos los λ-colímites que existen en $\mathbf{C}$ en una categoría cocompleta $\widehat{\mathbf{C}}$, de modo que cualquier funtor $A : \mathbf{C} \longrightarrow \mathcal{E}$ que preservan todos los λ-colímites de $\mathbf{C}$, con $\mathcal{E}$ cocompleta, se extiende a un funtor $\widehat{A} : \widehat{\mathbf{C}} \longrightarrow \mathcal{E}$ que preserva colímites, único salvo isomorfismo natural.

Como toda construcción universal, la cocompletación libre (λ-libre) de una categoría, cuando existe, es única, salvo una equivalencia de categorías.

Cuando $\mathbf{C}$ es una categoría pequeña, la cocompletación libre siempre existe y está dado por el funtor de Yoneda.

Teorema 1.8. *Para una categoría pequeña $\mathbf{C}$, el funtor de Yoneda $y : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}$ es la cocompletación libre de $\mathbf{C}$.*

Demostración. Sea $A : \mathbf{C} \longrightarrow \mathcal{E}$ un funtor a de $\mathbf{C}$ a una categoría cocompleta $\mathcal{E}$. En 1.5 hemos demostrado que el funtor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(A(\ ),\ \ ) : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}$ tiene un adjunto iquierdo $L : \mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}} \longrightarrow \mathcal{E}$ y por tanto L preserva colímites. Veamos que el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathbf{C} \arrow[r, "y"] \arrow[dr, "A"'] & \mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}} \arrow[d, "L"] \\ & \mathcal{E} \end{tikzcd}$$

conmuta. Recordemos que L está definido como $LP = \mathrm{colim} A \circ \pi_P$, para cada P en $\mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}$. Si P es un funtor representable $y_c = \mathrm{Hom}(\ \ , c)$, entonces la categoría de elementos $\int y_c$ de y_c tiene un objeto terminal, a saber, el par $(c, 1_c)$. Es fácil ver que el colímite de un funtor con dominio una categoría pequeña que tiene un objeto terminal está dado por evaluar tal funtor en el objeto terminal. En nuestro caso, el colímite de funtor $A \circ \pi_{y_c}$ es el objeto $\mathrm{colim} A \circ \pi_{y_c} = A \circ \pi_{y_c}(c, 1_c) = A(c)$. Entonces, para cada c en $\mathbf{C}$, tenemos

$$L \circ y_c = \mathrm{colim} A \circ \pi_{y_c} = A(c).$$

Si $L' : \mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}} \longrightarrow \mathcal{E}$ es otro funtor que preserva colímites tal que $L \circ y = A$, entonces

$$\begin{aligned} L'P &\cong L'\big(\mathrm{colim} y \circ \pi_P(c,x)\big) \\ &\cong \mathrm{colim} L' \circ y \circ \pi_P(c,x) \\ &\cong \mathrm{colim} A \circ \pi_P(c,x) \cong LP \end{aligned}$$

lo que exhibe la unicidad de L.

Hemos visto que toda categoría pequeña tiene una cocompletación libre. También podemos demostrar que tienen una cocompletación λ-libre, para cualquier cardinal regular λ.

Sea $\mathbf{C}$ una categoría pequeña y λ un cardinal regular. En $\mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}$ consideremos aquellos funtores $F : \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Set}$ que preservan todos los λ-límites que existen en $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$. Estos funtores con transformaciones naturales entre ellos forman una subcategoría plena de $\mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}$ que denotamos por $\mathbf{C}^{\mathrm{Lex}_\lambda}$. Esta categoría tiene buenas propiedades. Por ejemplo, es completa y cocompleta, los λ-límites conmutan con λ-colímites filtrantes y es una subcategoría reflexiva de $\mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}$. Como sabemos, todo prehaz $F : \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Set}$ es un colímite de funtores representables; este colímite es λ-filtrante si y sólo si F preserva λ-límites (para detalles, ver [**4**] vol. 1).

Ya que los funtores representables $\mathrm{Hom}(\ \ , a) : \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Set}$ preservan todos los límites que existen en $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$, tenemos una correstricción del funtor de Yoneda $y : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}^{\mathrm{Lex}_\lambda}$, que sigue siendo una inmersión.

TEOREMA 1.9. *Para cualquier cardinal regular λ, el funtor $y : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}^{\mathrm{Lex}_\lambda}$ es la cocompletación λ-libre de $\mathbf{C}$.*

DEMOSTRACIÓN. Ver [**1**], pág 37, Proposición 1.45.

2. Logos

Las categorías presentables son el análogo en categorías a las sup-retículas. Los marcos son, en particular, sup-retículas en las que supremos arbitrarios se distribuyen sobre ínfimos finitos. Los análogos de los marcos serán, por supuesto, los logos. Ahora veremos cuáles son las condiciones extra que una categoría presentable debe cumplir para que podamos llamarla un logos. No es de extrañar que alguna de estas condiciones sea una que podríamos considerar un tipo de «ley distributiva».

2.1. Colímites Universales. Consideremos una categoría $\mathcal{E}$ con *pullbacks* y un funtor $F : \mathbf{J} \longrightarrow \mathcal{E}$. Dado un cocono $\langle a, \mu\rangle = \{\mu_j : F_j \longrightarrow q \mid j \in \mathbf{J}\}$ para F y un morfismo $f : b \longrightarrow a$ en $\mathcal{E}$, calculamos los *pullbacks*

$$\begin{tikzcd} G_j \arrow[r, "\varphi_j"] \arrow[d, "\nu_j"'] & F_j \arrow[d, "\mu_j"] \\ b \arrow[r, "f"'] & a \end{tikzcd}$$

de cada flecha $\mu_j : F_j \longrightarrow a$ con f. Para cada $u : j \longrightarrow k$ en $\mathbf{J}$, tenemos que $F_u \circ \varphi_j : G_j \longrightarrow F_k$ y $\nu_j : G_j \longrightarrow b$ son un par de flechas tales que $\mu_k \circ (F_u \circ \varphi_j) = f \circ \nu_j$, por tanto, existe una única flecha $G_u : G_j \longrightarrow G_k$ como vemos en el diagrama abajo.

$$\begin{tikzcd} G_j \arrow[rr, "\varphi_j"] \arrow[dr, dashed, "G_u"] \arrow[dd, "\nu_j"'] & & F_j \arrow[dr, "F_u"] \arrow[dd, "\mu_j"' near start] & \\ & G_k \arrow[rr, "\varphi_k" near start] \arrow[dl, "\nu_k"] & & F_k \arrow[dl, "\mu_k"] \\ b \arrow[rr, "f"'] & & a & \end{tikzcd}$$

Las asignaciones $j \mapsto G_j$ y $u \mapsto G_u$ determinan un funtor $G : \mathbf{J} \longrightarrow \mathcal{E}$; las flechas $\nu_j : G_j \longrightarrow b$, un cocono $\langle b, \nu\rangle$ sobre G, y las flechas $\varphi_j : G_j \longrightarrow F_j$, una transformación natural $\varphi : G \longrightarrow F$. Ahora supongamos que $\langle a, \mu\rangle$ es el colímite de F. Decimos que $\langle a, \mu\rangle$ es un *colímite universal* si para cualquier morfismo $f : b \longrightarrow a$, el cocono $\langle b, \nu\rangle$ es un colímite del correspondiente funtor G.

Teorema 2.1. *En* **Set***, los colímites son universales.*

Demostración. Ver [**4**] vol.1, pag. 85, Teorema 2.14.2.

Recordemos que para cada flecha $f : b \longrightarrow a$ tenemos el funtor *cambio de base* $f^* : \mathcal{E}/a \longrightarrow \mathcal{E}/b$ dado por $(c \to a) \mapsto (b \times_a c \to b)$. Para una categoría $\mathcal{E}$ con productos, un cocono en la categoría $\mathcal{E}/a$ es un colímite si y sólo si el correspondiente cocono en $\mathcal{E}$ (obtenido por olvidar las flechas al objeto a) es un colímite. En efecto, el funtor $U : \mathcal{E}/a \longrightarrow \mathcal{E}$ tiene un adjunto derecho $a \times \_ : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}/a$, luego, preserva colímites. Ahora supongamos que

$$\{(x_j \xrightarrow{f_j} a) \xrightarrow{\alpha_j} (q \xrightarrow{g} a) \mid j \in J\}$$

es un cocono en $\mathcal{E}/a$ tal que $\{\alpha_j : x_j \longrightarrow q \mid j \in J\}$ es un colímite en $\mathcal{E}$. Si $\{(x_j \xrightarrow{f_j} a) \xrightarrow{\beta_j} (r \xrightarrow{h} a) \mid j \in J\}$ es un cocono en $\mathcal{E}/a$, por la propiedad universal del colímite $\{\alpha_j : x_j \longrightarrow q \,|\, j \in J\}$, existe una única flecha $\gamma : q \longrightarrow r$ tal que $\beta_j = \gamma\alpha_j$.

$$
\begin{tikzcd}
x_j \arrow[r, "\alpha_j"] \arrow[rr, bend left, "\beta_j"] \arrow[dr, "f_j"'] & q \arrow[r, dashed, "\gamma"] \arrow[d, "g"] & r \arrow[dl, "h"] \\
& a. &
\end{tikzcd}
$$

Luego, en una categoría cocompleta y con límites finitos $\mathcal{E}$, todos los colímites son universales si y sólo si el funtor cambio de base $f^* : \mathcal{E}/a \longrightarrow \mathcal{E}/b$ preserva todos los colímites, para cada flecha $f : b \longrightarrow a$. Notemos que cuando el colímite es un coproducto, tenemos

$$b \times_a \coprod x_j \cong \coprod b \times_a x_j,$$

es decir, el *pullback* se distribuye sobre el coproducto, como lo podemos constatar con el diagrama a continuación.

$$
\begin{tikzcd}
b \times_a x_j \arrow[rr] \arrow[dr, "k'_j"] \arrow[dd, "f'_j"'] & & x_j \arrow[dr, "k_j"] \arrow[dd, "f_j"'] & \\
& b \times_a \coprod x_j \arrow[rr] \arrow[dl, "g'"] & & \coprod x_j \arrow[dl, "g"] \\
b \arrow[rr, "f"'] & & a. &
\end{tikzcd}
$$

Un coproducto $q = \coprod x_j$ de una familia de objetos x_j en $\mathcal{E}$ es *disjunto* si cada morfismo canónico $k_j : x_j \longrightarrow \coprod x_j$ es un monomorfismo y para cada $i \neq j$, el *pullback* $x_i \times_q x_j$ es el objeto inicial de $\mathcal{E}$. Por ejemplo, en **Set** los coproductos son disjuntos.

2.2. Relaciones de Equivalencia. Sea $\mathcal{E}$ una categoría con límites finitos. Una *relación de equivalencia* sobre un objeto a de $\mathcal{E}$ es un monomorfismo $r \longrightarrow a \times a$ que satisface los usuales axiomas de reflexividad, simetría y transitividad, expresados apropiadamente por medio de flechas. Pero dar una flecha $r \longrightarrow a \times a$ es mismo que dar un par de flechas $r \rightrightarrows a$ en $\mathcal{E}$.

Definición. Decimos que un par de flechas $r \underset{v}{\overset{u}{\rightrightarrows}} a$ en $\mathcal{E}$ es

i) una *relación* si $\langle u, v\rangle : r \longrightarrow a \times a$ es un monomorfismo.
ii) *reflexiva* si existe $w : a \longrightarrow r$ con $uw = 1_a = vw$.
iii) *simétrica* si existe $s : r \longrightarrow r$ con $us = v$ y $vs = u$.
iv) *transitiva* si existe $t : r \times_a r \longrightarrow r$, con $r \times_a r$ el *pullback*

$$
\begin{tikzcd}
r \times_a r \arrow[r, "\rho_2"] \arrow[d, "\rho_1"'] & r \arrow[d, "u"] \\
r \arrow[r, "v"'] & a
\end{tikzcd}
$$

tal que $ut = u\rho_1$ y $vt = v\rho_2$.

El *par núcleo* de un morfismo $f : a \longrightarrow b$ es el *pullback*

$$\begin{tikzcd} r \arrow[r, "\rho_2"] \arrow[d, "\rho_1"'] & a \arrow[d, "f"] \\ a \arrow[r, "f"'] & b \end{tikzcd}$$

de f consigo mismo. Uno puede comprobar fácilmente que el par núcleo ρ_1, ρ_2 de f es una relación de equivalencia. También es fácil ver que

i) si f es el coigualador de algún par de flechas y f tiene par núcleo ρ_1, ρ_2, entonces f es el coigualador de ρ_1, ρ_2;

ii) si ρ_1, ρ_2 es el par núcleo de f y ρ_1, ρ_2 tienen un coigualador q, entonces ρ_1, ρ_2 es el par núcleo de q.

Una relación de equivalencia es *efectiva* si es el par núcleo de algún morfismo. En **Set**, dada una relación de equivalencia $R \subseteq A \times A$, podemos formar el conjunto cociente A/R y obtenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, shift left, "\rho_1"] \arrow[r, shift right, "\rho_2"'] & A \arrow[r, "q"] & A/R, \end{tikzcd}$$

donde $\rho_1(a, b) = a$ y $\rho_2(a, b) = b$, para todo (a, b) en R. El coigualador de ρ_1 y ρ_2 es el cociente de A por la menor relación de equivalencia que contiene a los pares $(\rho_1(a, b), \rho_2(a, b))$, con (a, b) en R, es decir, su coigualdor es q. Por otro lado, $q(a) = q(b)$ si y sólo si (a, b) está en R, lo que indica que ρ_1, ρ_2 es el par núcleo de q. Esto muestra que en **Set**, las relaciones de equivalencia son efectivas.

Ahora estamos en condiciones para dar los axiomas de Giraud para un logos.

DEFINICIÓN. Una categoría presentable $\mathcal{E}$ es un *logos* si

i) los colímites son universales;

ii) los coproductos son disjuntos;

iii) todas las relaciones de equivalencia son efectivas.

Un *morfismo de logos* es un funtor $\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ entre logos que preserva todos los colímites y límites finitos.

Un ejemplo inmediato de un logos es la categoría **Set** de conjuntos. Otro ejemplo de logos es la categoría $\mathbf{Psh}(\mathbf{C}) = \mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}$ de prehaces sobre $\mathbf{C}$. Esto debido a que límites y colímites en $\mathbf{Psh}(\mathbf{C})$ se construyen puntualmente. En particular, cuando $\mathbf{C} = \mathcal{O}(X)$ es la colección de abiertos de un espacio topologico X, $\mathbf{Psh}(X)$ es un logos. También veremos que la categoría $\mathbf{Sh}(X)$ de haces sobre X es un logos, haciendo uso de que el funtor haz asociado preserva límites finitos. Ya que dicho funtor también preserva todos los colímites, tenemos nuestro primer ejemplo de un morfismo de logos.

3. Logos de Haces

Esta sección está principalmente dedicada a la construcción de un logos muy importante, a saber, el logos de haces, que es una localización exacta izquierda de la categoría de prehaces $\mathbf{Psh}(\mathbf{C}) = \mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}$ sobre una categoría pequeña $\mathbf{C}$. Fue J. Giraud quién mostró que todo logos es equivalente a un logos de este tipo. Siguiendo nuestra aproximación algebraica a la teoría, podemos dar una presentación de un logos como un par $(\mathbf{C}, J)$ donde $\mathbf{C}$ es una categoría pequeña (el conjunto de generadores) y J un conjunto de flechas (las relaciones). Sin embargo, siendo fieles a la historia y a la práctica común, presentamos el logos de haces por medio de lo que se conoce como un *sitio*. Esto hará evidente su lado geométrico, como ya lo vimos en 0.3.

3.1. Topología de Grothendieck. La noción de prehaz se generaliza fácilmente sobre cualquier categoría pequeña $\mathbf{C}$ como un funtor $P : \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Set}$. Ahora, para definir un haz sobre $\mathbf{C}$ reemplazamos la noción de cubierta abierta por una familia de flechas $\{f_i : c_i \longrightarrow c\}_{i\in I}$ con codominio c, que llamamos *cubierta* de c. Un haz P sobre un espacio topológico requiere que para cualquier cubierta abierta $\{U_i\}_{i\in I}$ de un abierto U y cualquier colección $\{x_i\}_{i\in I}$ con x_i en $P(U_i)$ tales que x_i y x_j coinciden en la intersección $U_i \cap U_j$, para todo i, j, los elementos x_i puedan ser «pegados» en un único elemento x en $P(U)$ con $x \mapsto x_i$, para todo i. Para lo que nos interesa, podemos reemplazar la intersección $U_i \cap U_j$ por el *pullback* $c_i \times_c c_j$ (suponiendo que $\mathbf{C}$ tiene *pullbacks*, por supuesto) como en el diagrama

$$\begin{tikzcd} c_i \times_c c_j \arrow[r, "q_{ij}"] \arrow[d, "p_{ij}"'] & c_j \arrow[d, "f_j"] \\ c_i \arrow[r, "f_i"'] & c. \end{tikzcd}$$

Aplicando P obtenemos el siguiente cuadrado conmutativo

$$\begin{tikzcd} Pc \arrow[r, "Pf_j"] \arrow[d, "Pf_i"'] & Pc_j \arrow[d, "Pq_{ij}"] \\ Pc_i \arrow[r, "Pp_{ij}"'] & P(c_i \times_c c_j). \end{tikzcd}$$

Entonces la condición de haz se traduce en que para cualquier cubierta $\{f_i : c_i \longrightarrow c\}_{i\in I}$ de c y cualquier colección $\{x_i\}_{i\in I}$, con x_i en $P(c_i)$, tal que $P(p_{ij})(x_i) = P(q_{ij})(x_j)$ para todo i, j en I, existe un único x en Pc ta que $Pf_i(x) = x_i$.

Es posible desarrollar una teoría de haces incluso en el caso en que la categoría $\mathbf{C}$ no tenga *pullbacks*, usando como cubiertas a ciertas colecciones de flechas llamadas *cribas*.

DEFINICIÓN. Sea $\mathbf{C}$ una categoría y c un objeto de $\mathbf{C}$. Una *criba* S sobre c es una familia de flechas con codominio c tal que

$$f \in S \text{ implica que } fg \in S,$$

siempre que la composición fg esté definida.

Es fácil ver que dada una criba S sobre c y $h : d \longrightarrow c$ cualquier flecha de $\mathbf{C}$, la colección

$$h^*S = \{g \mid \mathrm{cod} g = d \text{ y } hg \in S\}$$

es una criba sobre d. Más aún, si h está en S, entonces h^*S es la *criba máxima* sobre d, es decir, h^*S consiste de todas las flechas con codominio d. Esto último es porque $h = h \circ 1_d$, esto es, 1_d está en h^*S, y porque toda flecha g con codominio d puede verse como $1_d \circ g$.

Definición. Una *topología de Grothendieck* sobre una categoría pequeña $\mathbf{C}$ es una función J que asigna a cada objeto c de $\mathbf{C}$ una colección Jc de cribas sobre c de tal manera que

i) la criba máxima $t_c = \{f \mid \mathrm{cod} f = c\}$ está en Jc;
ii) (*axioma de estabilidad*) si S es una criba sobre c y $h : d \longrightarrow c$ es cualquier flecha de $\mathbf{C}$, entonces h^*S está en Jd, y
iii) (*axioma de transitividad*) si S está en Jc y R es una criba sobre c tal que para cualquier $h : d \longrightarrow c$ en S, h^*R está en Jd, entonces R pertenece a Jc.

Diremos que una criba S es una *cubierta* de c (o *J-cubierta* si necesitamos ser más específicos) si S está en Jc, para una topología J sobre $\mathbf{C}$.

Observación.

1) Si S está en Jc y R es una criba sobre c que contiene a S, entonces R también está en Jc. En efecto, para cualquier $h : d \longrightarrow c$ en S, h^*S es la criba máxima sobre d. Como h^*S está contenida en h^*R, h^*R debe ser la criba máxima sobre d, así que h^*R esta en Jd. Por el axioma de transitividad, concluimos que R está en Jc.
2) Si S es una cubierta de c y si para cada $f : d_f \longrightarrow c$ en S existe una criba S_f en Jd_f, entonces la colección
$$Q = \{fg \mid f \in S \text{ y } g \in S_f\}$$
también es una cubierta de c. Basta con notar que Q es una criba sobre c tal que para cualquier f en S, $S_f \subseteq f^*Q$. Entonces por 1), f^*Q está en Jd_f y por *iii*), se sigue que Q está en Jc.
3) Dadas cribas S y R en Jc, su intersección $S \cap R$ también está en Jc. Para ver esto, sea $h : d \longrightarrow c$ en S. Entonces es fácil ver que $h^*(S \cap R) = h^*R$. Por *ii*), tenemos que $h^*(S \cap R)$ está en Jd, y por *iii*) se sigue que $S \cap R$ está en Jc.

En general, habrá muchas topologías de Grothendieck que puedan asignársele a una categoría. Entre ellas está la *topología mínima*, en la cual las únicas cribas cubrientes son las cribas máximas t_c, y la *topología máxima*, en la que cada criba es una cubierta.

En el caso de un espacio topológico X, una cubierta abierta de un abierto U es una colección $\{U_i\}_{i\in I}$ de abiertos de U tales que $U = \bigcup_{i\in I} U_i$. En general, la familia $\{U_i\}_{i\in I}$ no es una criba sobre U, pero genera a una criba S, digamos, la colección de todos aquellos abiertos V contenidos en U con $V \subseteq U_i$, para algún U_i. Entonces podemos definir una topología de Grothendieck J sobre $\mathcal{O}(X)$ diciendo que S está en $J(U)$ si y sólo si U está contenido en la unión de todos los abiertos en S.

Las topologías de Grothendieck están parcialmente ordenadas por la inclusión. Uno puede demostrar fácilmente que dado un conjunto de topologías de Grothendieck $\{J_\alpha \mid \alpha \in A\}$ sobre una categoría pequeña $\mathbf{C}$, su intersección $\bigcap_{\alpha\in A} J_\alpha$ también es una topología y es el ínfimo de las J_α. Se sigue que cualquier conjunto de topologías de Grothendieck también tiene un supremo.

Existe una manera más categórica de dar la definición de topología de Grothendieck, por medio de subfuntores de funtores representables. Para una categoría pequeña $\mathbf{C}$, un *subfuntor* de $P : \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Set}$ está definido como otro funtor

$Q : \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Set}$ con Qc un subconjunto de Pc y para cada flecha $f : d \longrightarrow c$, Qf es la restricción $Qf = Pf : Qc \longrightarrow Qd$ de Pf. Es fácil demostrar que para toda criba S de c, tenemos un subfuntor $S \hookrightarrow \mathrm{Hom}(\ ,c)$ de $\mathrm{Hom}(\ ,c)$, donde Sd es el conjunto de todas las flechas f de S con dominio d; recíprocamente, todo subfuntor $S \hookrightarrow \mathrm{Hom}(\ ,c)$ de $\mathrm{Hom}(\ ,c)$ nos define una criba S sobre c, siendo esta la unión de todos los conjuntos Sd, con d en $\mathbf{C}$, y esta correspondencia es biunívoca. Ahora damos la definición de topología de Grothendieck en términos de subfuntores de representables.

Definición (Topología de Grothendieck, Segunda Versión). Una topología de grothendieck J sobre una categoría pequeña $\mathbf{C}$ es una función que asigna a cada objeto c de $\mathbf{C}$ un conjunto Jc de subfuntores del funtor representable $\mathrm{Hom}(\ ,c)$ tales que

i) para cada c en $\mathbf{C}$, $\mathrm{Hom}(\ ,c)$ está en Jc;
ii) (estabilidad por cambio de base) En un cuadrado *pullback*

$$\begin{tikzcd} h^*S \arrow[rr] \arrow[d, "\beta"'] & & S \arrow[d, "\alpha"] \\ \mathrm{Hom}(\ ,d) \arrow[rr, "h^*=y_h"'] & & \mathrm{Hom}(\ ,c) \end{tikzcd}$$

con $h : d \longrightarrow c$, si S está en Jc, entonces R está en Jd, y
iii) si S está en Jc y R es un subfuntor de $\mathrm{Hom}(\ ,c)$ tal que para cualquier $h : d \longrightarrow c$ en S, h^*R está en Jd, entonces R pertenece a Jc.

3.2. Haces Sobre un Sitio. Una categoría pequeña $\mathbf{C}$ dotada con una topología de Grothendieck es llamada un *sitio*, que suele denotarse como un par $(\mathbf{C}, J)$. Podemos definir un haz sobre un sitio $(\mathbf{C}, J)$ similar a como lo hacemos para espacios topológicos. Como siempre, un prehaz sobre $(\mathbf{C}, J)$ es un funtor $P : \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Set}$ y $\mathbf{Psh}(\mathbf{C}) = \mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}$ es la categoría de todos los prehaces sobre $(\mathbf{C}, J)$. Si P es un prehaz y S es una cubierta de un objeto c de $\mathbf{C}$, una *familia compatible* para S de elementos de P, es una función que asigna a cada $f : d \longrightarrow c$ en S un elemento x_f de Pd de tal modo que, para cualquier flecha $g : e \longrightarrow d$,

$$Pg(x_f) = x_{fg},$$

donde x_{fg} es el elemento de Pe correspondiente a la flecha fg de la criba S. Una *fusión* de tal familia compatible es un elemento x en Pc que cumple

$$Pf(x) = x_f,$$

para cada f en S. Entonces P es un *haz* precisamente cuando, para cualquier criba cubriente S de un objeto c de $\mathbf{C}$ y cualquier familia compatible $\{x_f\}_{f \in S}$, existe una única fusión x en Pc; y P es un *prehaz separado* si la condición se satisface cuando sustituimos «existe una única» por «a lo más una», es decir, si x, y en Pc satisfacen que $Pf(x) = Pf(y)$ para todo f en S, entonces $x = y$.

Justo como en los espacios topológicos, podemos definir un haz por medio de un diagrama. En este caso, requerimos que para cada objeto c de $\mathbf{C}$ y cada cubierta S de c, el diagrama

$$P(c) \xrightarrow{a} \prod_{f \in S} P(\mathrm{dom} f) \overset{b}{\underset{c}{\rightrightarrows}} \prod_{\substack{f,g \ f \in S \\ \mathrm{dom} f = \mathrm{cod} g}} P(\mathrm{dom} g) \tag{3}$$

sea un igualador de conjuntos. Aquí a es la función $a(x) = \{Pf(x)\}_{f \in S}$; el segundo producto corre sobre todos los pares componibles f, g, con f en S; la función b es la obtenida por las flechas $\prod_{f \in S} P(\mathrm{dom} f) \to P(\mathrm{dom} f) \to P(\mathrm{dom} g)$, y c está dada por $\{x_f\}_{f \in S} \mapsto \{Pg(x_f)\}$. Así, para cada $\mathbf{x} = \{x_f\}_{f \in S}$ en $\prod_{f \in S} P(\mathrm{dom} f)$, la f, g-componente de $b(\mathbf{x})$ y $c(\mathbf{x})$ es

$$b(\mathbf{x})_{f,g} = x_{fg}, \qquad c(\mathbf{x})_{f,g} = Pg(x_f) \ .$$

Si el diagrama (3) es un igualador, entonces decimos que P *satisface la condición de haz con respecto a la cubierta* S. Usamos esta versión para demostrar que límites de haces son haces.

TEOREMA 3.1. *Sea* $(\mathbf{C}, J)$ *un sitio e* $\mathbf{I} \longrightarrow \mathbf{Psh}(\mathbf{C})$, $i \mapsto P_i$ *un funtor. Si todos los* P_i *son haces, entonces* $\lim P_i$ *es un haz.*

DEMOSTRACIÓN. Sea S una cubierta de un objeto c de $\mathbf{C}$. Por hipótesis, tenemos un diagrama igualador

$$P_i(c) \xrightarrow{a} \prod_{f \in S} P_i(\mathrm{dom} f) \overset{b}{\underset{c}{\rightrightarrows}} \prod_{\substack{f,g \ f \in S \\ \mathrm{dom} f = \mathrm{cod} g}} P_i(\mathrm{dom} g),$$

para cada i en $\mathbf{I}$. Ya que los límites conmutan con límites, obtenemos un diagrama igualador

$$\lim P_i(c) \xrightarrow{a} \prod_{f \in S} \lim P_i(\mathrm{dom} f) \overset{b}{\underset{c}{\rightrightarrows}} \prod_{\substack{f,g \ f \in S \\ \mathrm{dom} f = \mathrm{cod} g}} \lim P_i(\mathrm{dom} g).$$

Concluimos que $\lim P_i$ es un haz.

Todavía existe otro modo de definir un haz sobre un sitio. Si J es una topología de grothendieck sobre $\mathbf{C}$, c un objeto de $\mathbf{C}$ y S en Jc, entonces una familia compatible $\{x_f\}_{f \in S}$ de elementos de P para la cubierta S de c, es lo mismo que una transformación natural $S \longrightarrow P$. Luego P es un haz si y sólo si para cada subfuntor S de $\mathrm{Hom}(\ , c)$, cualquier transformación natural $S \longrightarrow P$ se extiende de manera única a $\mathrm{Hom}(\ , c)$

(4)
$$\begin{tikzcd} S \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathrm{Hom}(\ ,c) \arrow[dl, dashed] \\ & P. & \end{tikzcd}$$

Con esta última definición es fácil ver que todo prehaz es un haz con la topología mínima. Por otro lado, ya que en la topología máxima J_M, cada subfuntor de $\mathrm{Hom}(\ , c)$, con c en $\mathbf{C}$, está en $J_M(c)$, en particular, el subfuntor $\emptyset \rightarrowtail \mathrm{Hom}(\ , c)$ es un miembro de $J_M(c)$. Ya que $\emptyset$ es el objeto inicial en $\mathbf{Psh}(\mathbf{C})$, la condición de haz sobre un prehaz P se reduce a la existencia de un único morfismo $\mathrm{Hom}(\ , c) \longrightarrow P$. Por el Lema de Yoneda, esto significa que Pc es un conjunto con un sólo elmento. Así que el único haz es el objeto terminal en $\mathbf{Psh}(\mathbf{C})$.

TEOREMA 3.2. *Para cualquier prehaz* P*, existe una única topología* J_P *más grande para la cual* P *es un haz.*

Demostración. Definimos J_P diciendo que S está en $J_P(c)$ si y sólo si para cada $h : d \longrightarrow c$, cada morfismo $h^*S \longrightarrow P$ se extiende a un único morfismo $\mathrm{Hom}(\ \ , c) \longrightarrow P$. No es difícil demostrar que J_P es una topología y que P es un J_P-haz para dicha topología. Si J es cualquier otra topología para la cual P es un J-haz, entonces cada S en $J(c)$ también esta en $J_P(c)$.

Se sigue que existe una única topología más grande para la cual cada prehaz de una colección dada de prehaces es un haz. En particular, definimos la *topología canónica* sobre $\mathbf{C}$ a ser la topología más grande para la cual todos los funtores representables son haces; una topología J para cual todos los funtores representables son J-haces es llamada *subcanónica* y siempre está contenida en la topología canónica.

3.3. Funtor Haz Asociado. Los haces sobre un sitio $(\mathbf{C}, J)$ forman una categoría, que denotamos por $\mathbf{Sh}(\mathbf{C}, J)$, con morfismos las transformaciones naturales, que obviamente es una subcategoría plena de $\mathbf{Psh}(\mathbf{C})$. Como sucede con los prehaces sobre un espacio topológico, tenemos un funtor *hacificación* $q^* : \mathbf{Psh}(\mathbf{C}) \longrightarrow \mathbf{Sh}(\mathbf{C}, J)$ que convierte a todo prehaz en un haz.

Sea P un prehaz sobre $\mathbf{C}$ (mejor dicho, sobre un sitio $(\mathbf{C}, J)$). La construcción del funtor $q^* : \mathbf{Psh}(\mathbf{C}) \longrightarrow \mathbf{Sh}(\mathbf{C}, J)$ se realiza en dos pasos: primero construimos un prehaz P^+ a partir de P, que no necesariamente es un haz, pero mostraremos que P^+ es un prehaz separado. Luego demostraremos que P^+ es un haz si P ya era en un principio un prehaz separado. Entonces definimos el funtor q^* como

$$q^*(P) = (P^+)^+.$$

Sea pues P un prehaz, c un objeto de $\mathbf{C}$ y S en Jc. Denotamos por $\mathrm{Comp}(S, P)$ al conjunto de todas las familias compatibles para la cubierta S de c. Observamos que si S y R son cubiertas de c con $R \subseteq S$, entonces tenemos una función de $\mathrm{Comp}(S, P)$ a $\mathrm{Comp}(R, P)$ mediante la asignación $\{x_f\}_{f \in S} \mapsto \{x_f\}_{f \in R}$. Entonces definimos P^+ en c como el colímite filtrante

$$P^+(c) = \mathrm{colim}_{S \in Jc} \mathrm{Comp}(S, P),$$

donde Jc está ordenado con el orden opuesto dado por la inclusión. En otras palabras, un elemento de $P^+(c)$ es una clase de equivalencia de familias compatibles, donde dos familias compatibles $\{x_f\}_{f \in S}$ y $\{y_g\}_{g \in R}$ son equivalentes si existe T en Jc con $T \subseteq S \cap R$ tal que $x_f = y_f$, para todo f en T.

Para ver cual es la asignación en flechas consideremos un morfismo $h : c' \longrightarrow c$ en $\mathbf{C}$. Entonces h^*S está en Jc', así que podemos considerar el conjunto $\mathrm{Comp}(h^*S, P)$ de familias compatibles para la cubierta h^*S de c'. Algunas flechas f de S son de la forma $f = hf'$, con f' en h^*S, así que podemos definir una función $\mathrm{Comp}(S, P) \longrightarrow \mathrm{Comp}(h^*S, P)$ como $\{x_f\}_{f \in S} \mapsto \{x_{hf'}\}_{f' \in h^*S}$. Luego, la composición

$$\mathrm{Comp}(S, P) \longrightarrow \mathrm{Comp}(h^*S, P) \longrightarrow \mathrm{colim}_{S' \in Jc'} \mathrm{Comp}(S', P)$$

es una función de $\mathrm{Comp}(S, P)$ a $P^+(c')$. Se sigue que existe una única función $P^+(h) : P^+(c) \longrightarrow P^+(c')$, que es precisamente aquella que manda a la clase de $\{x_f\}_{f \in S}$ en $P^+(c)$ a la clase de $\{x_{hf'}\}_{f' \in h^*S}$ en $P^+(c')$. Esta asignación en objetos y flechas hacen a P^+ un prehaz sobre $\mathbf{C}$.

La construcción $P \mapsto P^+$ es funtorial de la categoría $\mathbf{Psh}(\mathbf{C})$ en sí misma, pues dado cualquier morfismo $\Phi : P \longrightarrow Q$ de P a Q, si S es una cubierta de c y $\{x_f \mid f : d \to c \in S\}$ es una familia compatible de elementos de P, entonces la colección $\{\Phi_d(x_f) \mid f : d \to c \in S\}$ es una familia compatible de elementos de Q, gracias a la naturalidad de Φ.

$$
\begin{tikzcd}
d & Pd \arrow[r, "\Phi_d"] \arrow[d, "Pg"'] & Qd \arrow[d, "Qg"] & x_f \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \Phi_d(x_f) \arrow[d, mapsto] \\
e \arrow[u, "g"] & Pe \arrow[r, "\Phi_e"'] & Qe & x_{fg} \arrow[r, mapsto] & \Phi_e(x_{fg}) = Qg(\Phi_d(x_f)).
\end{tikzcd}
$$

Esta colección de funciones $\Phi_c^+ : P^+c \longrightarrow Q^+c$ para cada c en $\mathbf{C}$, que asocia a la clase de $\{x_f \mid f : d \to c \in S\}$ a la clase de $\{\Phi_d(x_f) \mid f : d \to c \in S\}$, es una transformación natural de P^+ a Q^+.

Para cada prehaz P tenemos un morfismo canónico $\eta : P \longrightarrow P^+$ definido, para cada c en $\mathbf{C}$ y x en Pc, como

$$\eta_c(x) = \{Pf(x) \mid f \in t_c\},$$

donde t_c es la criba máxima sobre c.

Lema 3.3. *Sea P un prehaz sobre un sitio $(\mathbf{C}, J)$. Entonces*

i) P es separado si y sólo si $\eta : P \longrightarrow P^+$ es un monomorfismo;
ii) P es un haz si y sólo si $\eta : P \longrightarrow P^+$ es un isomorfismo.

Demostración. Supongamos que P es un prehaz separado. Si x, y en Pc son tales que $\eta_c(x) = \eta_c(y)$, esto es,

$$\{Pf(x)\}_{f\in t_c} = \{Pf(y)\}_{f\in t_c}$$

entonces, como P es separado, $x = y$. Ahora supongamos que η es un monomorfismo. Sea S es una cubierta de c y x, y en Pc tales que $Pf(x) = Pf(y)$ para todo f en S. Notemos que las familias $\{Pf(x)\}_{f\in S}$ y $\{Pf(x)\}_{f\in t_c}$ son equivalentes y lo mismo pasa con las familias $\{Pf(y)\}_{f\in S}$ y $\{Pf(y)\}_{f\in t_c}$. Como $Pf(x) = Pf(y)$ para todo f en S, $\eta_c(x) = \eta_c(y)$ y por tanto $x = y$.

Para el inciso *ii*), primero supongamos que P es un haz y mostremos que para todo c, η_c es biyectiva. Consideremos cualquier clase de equivalencia $\{x_f\}_{f\in S}$ en P^+c, con S una cubierta de c. Como P es un haz, existe un único x en Pc tal que $Pf(x) = x_f$, para todo f en S. Esto nos dice que la clase de $\{x_f\}_{f\in S}$ coincide con $\eta_c(x)$, esto es, $\eta_c(x) = \{x_f\}_{f\in S}$ y por tanto η_c es biyectiva. Recíprocamente, dada cualquier cubierta S de c y cualquier familia compatible $\{x_f\}_{f\in S}$, consideremos la clase de $\{x_f\}_{f\in S}$ en P^+c. Puesto que η_c es una biyección, existe un único x en Pc tal $\eta_c(x)$ coincide con la clase de $\{x_f\}_{f\in S}$, esto es, $Pf(x) = x_f$ para todo f en S, y así P es un haz.

Lema 3.4. *Si P es un prehaz y F un haz, entonces todo morfismo $\Phi : P \longrightarrow F$ se factoriza de manera única a través de η como $\Phi = \eta \circ \widehat{\Phi}$:*

$$
\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "\eta"] \arrow[dr, "\Phi"'] & P^+ \arrow[d, dotted, "\widehat{\Phi}"] \\
& F.
\end{tikzcd}
$$

Demostración. Veamos cómo definir $\widehat{\Phi}_c$ para cada c en $\mathbf{C}$. Un elemento $\mathbf{x}$ en P^+c es una clase de equivalencia de una familia compatible $\{x_f\}_{f\in S}$ para alguna cubierta S de c. Si $f : d \longrightarrow c$ está en S, entonces x_f es un elemento de Pd, luego

$\Phi_d(x_f)$ está en Fd. La colección $\{\Phi_d(x_f) \,|\, f : d \to c \in S\}$ es una familia compatible de elementos de F. Como F es un haz, existe un único y en Fc tal que

$$Ff(y) = \Phi_d(x_f)$$

para todo $f : d \longrightarrow c$ en S. Así que definimos $\widehat{\Phi} : P^+c \longrightarrow Fc$ como $\{x_f\}_{f \in S} \mapsto y$, donde y es hallado como arriba. Veamos que $\Phi = \widehat{\Phi} \circ \eta$. Para cada c en $\mathbf{C}$ y x en Pc, $\eta_c(x) = \{Pf(x) \mid f : d \to c \in t_c\}$. La colección $\{\Phi_d(Pf(x)) \mid f : d \to c \in t_c\}$ es una familia compatible de elementos de F, que es un haz, por tanto, existe un único y en Fc tal $Ff(y) = \Phi_d(Pf(x))$. Pero $\Phi_d \circ Pf(x)) = Ff \circ \Phi_c(x)$, así que

$$\Phi_c(x) = y = \widehat{\Phi}_c(\{Pf(x) \mid f \in t_c\}) = \widehat{\Phi}_c \circ \eta_c(x).$$

Lema 3.5. *Para cualquier prehaz P, P^+ es separado.*

Demostración. Sea c un objeto de $\mathbf{C}$ y T cualquier cubierta de c. Supongamos que $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ son elementos de P^+c tales que $P^+h(\mathbf{x}) = P^+h(\mathbf{y})$, para todo h en T. Debemos demostrar que $\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Si $\{x_f\}_{f \in R}$ y $\{y_g\}_{g \in S}$, con R, S en Jc, son representantes de $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, respectivamente, la igualdad $P^+h(\mathbf{x}) = P^+h(\mathbf{y})$ para $h : c' \longrightarrow c$ en T, es la igualdad de las clases $\{x_{hf'} \mid f' \in h^*R\} = \{y_{hg'} \mid g' \in h^*S\}$ en P^+c', lo que significa que existe una cubierta $T_h \subseteq h^*R \cap h^*S$ de c' tal que $x_{hk} = y_{hk}$, para todo k en T_h. Por el inciso 2) de la observación que sigue a la definición de topología de Grothendieck, la colección

$$Q = \{hk \mid h \in T \text{ y } k \in T_h\}$$

es una cubierta de de c, y fácilmente podemos ver que $Q \subseteq R \cap S$. Así, Q es una cubierta de c contenida en R y en S, en la que $x_f = y_f$ para todo f en Q, por tanto, $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

Lema 3.6. *Si P es un prehaz separado, entonces P^+ es un haz.*

Demostración. Sea c un objeto de $\mathbf{C}$, S una cubierta de c y $\{\mathbf{x}_f \mid f : d \to c \in S\}$ una familia compatible para S de elementos de P^+. Debemos demostrar que existe una fusión $\mathbf{y}$ en $P^+(c)$ de la familia $\{\mathbf{x}_f \mid f : d \to c \in S\}$. Para cada $f : d \longrightarrow c$ en S, cada $\mathbf{x}_f$ en P^+d es una familia compatible de elementos de P

$$\mathbf{x}_f = \{x_{f,g} \mid g : e \to d \in S_f\},\ x_{f,g} \in Pe$$

para alguna cubierta S_f de d. Por otro lado, que $\{\mathbf{x}_f \,|\, f : d \to c \in S\}$ es una familia compatible de elementos de P^+, significa que para cualquier morfismo $h : d' \longrightarrow d$, $P^*h(\mathbf{x}_f) = \mathbf{x}_{fh}$, esto es, las familias

$$\{x_{f,hg'} \mid g' \in h^*S_f\} \sim \{x_{fh,g} \mid g \in S_{fh}\}$$

pertenecen a la misma clase de equivalencia. Esto significa que existe una cubierta $T_{f,h} \subseteq h^*S_f \cap s_{fh}$ de d' en la que

$$x_{f,hk} = x_{fh,k} \tag{5}$$

para todo k en $T_{f,h}$. Observemos que para cada $f : d \longrightarrow c$ en la cubierta S de c, existe una cubierta s_f de d, luego la familia $Q = \{fg \mid f \in S \text{ y } g \in S_f\}$ es una cubierta de c. Entonces definimos una familia compatible $\mathbf{y}$ para esta cubierta Q como

$$y_{fg} = x_{f,g} \tag{6}$$

para cada fg en Q. Antes de ver que $\mathbf{y}$ así definida es, efectivamente, una familia compatible, mostremos que esta definición es independiente de la factorización fg.

Supongamos que $fg = f'g'$, con f, f' morfismos en S, g en S_f y g' en $S_{f'}$. Entonces, si $t : d' \longrightarrow d$ está en $T_{f,g} \cap T_{f',g'}$ tenemos

$$\begin{aligned} Pt(x_{f,g}) &= x_{f,gt} && \mathbf{x}_f \text{ es una familia compatible} \\ &= x_{fg,t} && \text{por (5)} \\ &= x_{f'g',t} && \text{por hipótesis} \\ &= x_{f',g't} && \text{por (5)} \\ &= Pt(x_{f',g'}) && \mathbf{x}_{f'} \text{ es una familia compatible.} \end{aligned}$$

Como P es separado y dado que $T_{f,g} \cap T_{f',g'}$ es una cubierta de d', concluimos que $xf, g = x_{f',g'}$. Así, $\mathbf{y}$ está bien definida por 6. Que $\mathbf{y} = \{y_h \mid h \in Q\}$ es una familia compatible se sigue porque cada $\mathbf{x}_f$ es una familia compatible.

Para terminar, tenemos que ver que la clase de $\mathbf{y}$ en P^+c es una fusión de la familia $\{\mathbf{x}_f \mid f : d \to c \in S\}$, es decir, para cada $f : d \longrightarrow c$ en S, $P^+f(\mathbf{y}) = \mathbf{x}_f$, o bien, que

$$P^+f(\mathbf{y}) = \{y_{fh} \mid h \in f^*Q\} \quad \text{y} \quad \mathbf{x}_f = \{x_{f,g} \mid g \in S_f\}$$

representan al mismo elemento de P^+d. Pero esto realmente sucede, ya que S_f está contenido en h^*Q, por la manera que definimos a Q, y para cualquier g en S_f, $y_{fg} = x_{f,g}$, por 6. Esto demuestra la existencia de una fusión y su unicidad se debe que P^+ es separado (Teorema 3.5). Hemos demostrado que P^+ es un haz.

Teorema 3.7. *La inclusión* $\mathbf{Sh}(\mathbf{C}, J) \hookrightarrow \mathbf{Psh}(\mathbf{C})$ *tiene un adjunto izquierdo* $q^* : \mathbf{Psh}(\mathbf{C}) \longrightarrow \mathbf{Sh}(\mathbf{C}, J)$*, conocido como el* funtor hacificación (o funtor haz asociado)*. Además,* q^* *preserva todos los colímites y límites finitos.*

Demostración. Como anunciamos al principio de la sección, definimos el funtor q^* como $q^*(P) = (P^+)^+$. Por los Lemas 3.5 y 3.6, este funtor, efectivamente, nos otorga un haz. Para cada prehaz P, composición

$$P \xrightarrow{\eta_P} P^+ \xrightarrow{\eta_{P^+}} (P^+)^+$$

es un morfismo de P a q^*P que es universal entre todos aquellos morfismos de P a un haz F (Lema 3.4). Esto es precisamente que q^* es adjunto izquierdo a la inclusión.

Por ser adjunto izquierdo, q^* preserva todos los colímites. Para ver que preserva límites finitos, notemos que es suficiente con mostrar que la construcción $P \mapsto P^+$ preserva este tipo de límites. Fijamos ambos, un objeto c de $\mathbf{C}$ y una criba S en Jc, así que tenemos un funtor $\mathrm{Comp}_c(S, \ \ ) : \mathbf{Psh}(\mathbf{C}) \longrightarrow \mathbf{Set}$ dado por $P \mapsto \mathrm{Comp}_c(S, P)$. Ya que una familia compatible $\{x_f\}_{f \in S}$ de elementos de P es lo mismo que una transformación natural $S \longrightarrow P$ de S a P, tenemos un isomorfismo natural entre los funtores $\mathrm{Comp}_c(S, \ \ ) \cong \mathrm{Nat}(S, \ \ )$, luego, $\mathrm{Comp}_c(S, \ \ )$ preserva todos los límites que existen en $\mathbf{Psh}(\mathbf{C})$, ya que $\mathrm{Nat}(S, \ \ )$ lo hace. Sabiendo esto y dado que $P^+c = \mathrm{colim}_{S \in Jc}\mathrm{Comp}(S, P)$, si $\mathbf{I} \longrightarrow \mathbf{Psh}(\mathbf{C})$, $i \mapsto P_i$ es un funtor, con $\mathbf{I}$ es finita, entonces

$$\begin{aligned} (\mathrm{lim} P_i)^+(c) &= \mathrm{colim}_{S \in Jc}\mathrm{comp}(S, \mathrm{lim}_i P_i) \\ &\cong \mathrm{colim}_{S \in Jc}\mathrm{lim}_i \mathrm{Comp}(S, P_i) \\ &\cong \mathrm{lim}_i \mathrm{colim}_{S \in Jc}\mathrm{Comp}(S, P_i) \\ &\cong \mathrm{lim}_i P_i^+(c). \end{aligned}$$

El resultado se sigue del hecho que los límites en $\mathbf{Psh}(\mathbf{C})$ se construyen puntualmente.

3.4. Categorías de Haces son Logos. En esta sección siempre estaremos considerando una categoría de haces $\mathbf{Sh}(\mathbf{C}, J)$ sobre un sitio $(\mathbf{C}, J)$. Nuestro objetivo aquí es demostrar que

TEOREMA 3.8. *Toda categoría de haces sobre un sitio es un logos.*

Comenzamos con el siguiente Lema

LEMA 3.9. *Toda categoría de haces es completa y cocompleta.*

DEMOSTRACIÓN. Que $\mathbf{Sh}(\mathbf{C}, J)$ es completa se sigue de 3.1. Para ver que es cocompleta tomamos el colímite D de un funtor con valores en $\mathbf{Sh}(\mathbf{C}, J)$ en $\mathbf{Psh}(\mathbf{C})$ y luego aplicamos el funtor hacificación.

Una manera más sencilla de demostrar el Teorema anterior es notando que el funtor q^* exhibe a $\mathbf{Sh}(\mathbf{C}, J)$ como una subcategoría reflexiva de $\mathbf{Psh}(\mathbf{C})$. Con esto obtenemos aún más que sólo decir que $\mathbf{Sh}(\mathbf{C}, J)$ es una categoría completa y cocompleta, a saber,

LEMA 3.10. *Toda categoría de haces es presentable.*

DEMOSTRACIÓN. Pues sabemos que los funtores representables son un conjunto de generadores (denso) en $\mathbf{Psh}(\mathbf{C})$ y su imagen bajo q^* otorga un conjunto de generadores (también denso) de $\mathbf{Sh}(\mathbf{C}, J)$, cada uno de ellos siendo presentable.

LEMA 3.11. *En una categoría de haces, los colímites son universales.*

DEMOSTRACIÓN. La propiedad se mantiene en $\mathbf{Psh}(\mathbf{C})$ puesto que en $\mathbf{Set}$ los colímites son universales y en $\mathbf{Psh}(\mathbf{C})$ los colímites se construyen puntalmente. Como el funtor q^* preserva colímites y *pullbacks*, la propiedad se traspasa a $\mathbf{Sh}(\mathbf{C}, J)$.

LEMA 3.12. *En una categoría de haces, los coproductos son disjuntos.*

DEMOSTRACIÓN. Evidentemente, los coproductos son disjuntos en $\mathbf{Set}$. Coproductos, *pullbacks* y objetos iniciales son calculados puntualmente en $\mathbf{Psh}(\mathbf{C})$; luego, los coproductos son disjuntos en $\mathbf{Psh}(\mathbf{C})$. Como q^* preserva, coproductos, *pullbacks* y objetos iniciales, la propiedad se traspasa a $\mathbf{Sh}(\mathbf{C}, J)$.

LEMA 3.13. *En una categoría de haces, las relaciones de equivalencia son efectivas.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $u, v : F \rightrightarrows G$ una relación de equivalencia en $\mathbf{Sh}(\mathbf{C}, J)$. Entonces $u, v : F \rightrightarrows G$ es también una relación de equivalencia en $\mathbf{Psh}(\mathbf{C})$. Si $p : G \longrightarrow Q$ es el coigualador de u, v en $\mathbf{Psh}(\mathbf{C})$, entonces u, v es el par núcleo de p, ya que las relaciones de equivalencia en $\mathbf{Psh}(\mathbf{C})$ son efectivas. Como cada componente de la counidad $\epsilon : q^*i \Longrightarrow 1$ es un isomorfismo (donde i denota el funtor inclusión $\mathbf{Sh}(\mathbf{C}, J) \hookrightarrow \mathbf{Psh}(\mathbf{C})$), obtenemos que $\epsilon_Q^{-1} p : G \longrightarrow q^*Q$ también es el coigualador de u, v. Más aún, u, v es el par núcleo de $q^*p \circ \epsilon_G^{-1}$ y por tanto, $u, v : F \rightrightarrows G$ es una relación de equivalencia efectiva en $\mathbf{Sh}(\mathbf{C}, J)$.

Fue Giraud quien mostró que *todo logos es equivalente a una categoría de haces sobre un sitio*. La demostración puede consultarse en cualquier texto de teoría de topos.

Existen muchas más propiedades categóricas que poseen los logos de haces. Por ejemplo, en este tipo de categorías, límites finitos conmutan con colímites filtrantes. También cumplen que todos los monomorfismos (epimorfismos) en tales categorías son regulares. Se sigue que todo morfismo que es a la vez monomorfismo y epimorfismo, inevitablemente es un isomorfismo. Otra propiedad que cumplen es que todo morfismo se factoriza como un epimorfismo (regular) seguido de un monomorfismo, y está factorización es única salvo isomorfismo.

3.5. El Logos de Haces es una Localización Exacta Izquierda. Hemos definido un prehaz P sobre un sitio $(\mathbf{C}, J)$ a ser un haz si dado c en $\mathbf{C}$ y un subfuntor S de $\mathrm{Hom}(\ ,c)$ en Jc, cada transformación natural $S \longrightarrow P$ se extiende de manera única a $\mathrm{Hom}(\ ,c)$, como en el digrama

$$\begin{tikzcd} S \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathrm{Hom}(\ ,c) \arrow[dl, dashed] \\ & P. & \end{tikzcd}$$

Esto significa que la categoría $\mathbf{Sh}(\mathbf{C}, J)$ de haces sobre el sitio $(\mathbf{C}, J)$ es precisamente la categoría $\mathbf{Psh}(\mathbf{C})^J$ de objetos locales con respecto a las flechas en la topología J. Si denotamos por Σ a la colección de todas los morfismos invertidos por el funtor hacificación, entonces $\mathbf{Psh}(\mathbf{C})^J = \mathbf{Psh}(\mathbf{C})^\Sigma$, ya que $\mathbf{Psh}(\mathbf{C})^J$ es una subcategoría reflexiva de $\mathbf{Psh}(\mathbf{C})$, y dado que q^* preserva límites finitos, concluimos que $q^* : \mathbf{Psh}(\mathbf{C}) \longrightarrow \mathbf{Sh}(\mathbf{C}, J)$ es una localización exacta izquierda.

3.6. El Logos Libre. Vimos que el funtor de Yoneda $y : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{Psh}(\mathbf{C})$ es la cocompletación libre de una categoría pequeña $\mathbf{C}$. También vimos que el mismo funtor y correstringido a la subcategoría $\mathbf{C}^{\mathrm{Lex}_\lambda}$ de los prehaces que preservan λ-límites es la cocompletación λ-libre de $\mathbf{C}$. En particular, cuando $\lambda = \aleph_0$, omitimos el subíndice $\aleph_0$ y decimos que $\mathbf{C}^{\mathrm{Lex}}$ es la *cocompletación finita libre* de $\mathbf{C}$.

Para obtener la completación finita libre de una categoría pequeña $\mathbf{C}$ procedemos de la siguiente manera: dada $\mathbf{C}$, consideramos la cocompletación finita libre $(\mathbf{C}^{\mathrm{op}})^{\mathrm{Lex}}$ de su categoría opuesta $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$. Entonces $\underleftarrow{\mathbf{C}} = \big((\mathbf{C}^{\mathrm{op}})^{\mathrm{Lex}}\big)^{\mathrm{op}}$ es la completación finita libre de $\mathbf{C}$.

Después de estas observaciones, la construcción del logos libre sobre una categoría pequeña $\mathbf{C}$ se sigue fácilmente. En efecto, dada una categoría pequeña $\mathbf{C}$, consideramos su completación finita libre $\underleftarrow{\mathbf{C}}$ y, a continuación, realizamos la cocompletación libre $\mathbf{Psh}(\underleftarrow{\mathbf{C}})$ de $\underleftarrow{\mathbf{C}}$. La categoría $\mathbf{Psh}(\underleftarrow{\mathbf{C}})$ es un logos y tiene la propiedad de que cualquier funtor $F : \mathbf{C} \longrightarrow \mathcal{E}$ de $\mathbf{C}$ a un logos $\mathcal{E}$ se extiende de manera única a un morfismo de logos $\widehat{F} : \mathbf{Psh}(\underleftarrow{\mathbf{C}}) \longrightarrow \mathcal{E}$.

$$\begin{tikzcd} \mathbf{C} \arrow[r] \arrow[drr, "F"'] & \underleftarrow{\mathbf{C}} \arrow[r] \arrow[dr, dashed, "F'"] & \mathbf{Psh}(\underleftarrow{\mathbf{C}}) \arrow[d, dashed, "\widehat{F}"] \\ & & \mathcal{E}. \end{tikzcd}$$

La demostración de que $\widehat{F}$ es un morfismo de logos está fuera del alcance del presente trabajo, así que lo dejamos para un estudio posterior. Una cosa que debemos notar es que el logos libre no siempre existe para toda categoría pequeña $\mathbf{C}$. Pero su existencia está garantizada si la completación finita libre $\underleftarrow{\mathbf{C}}$ de $\mathbf{C}$ sigue siendo pequeña.

Apéndice A

Dualidad Anillos Conmutativos-Esquemas Afines

1. Localizacion de Anillos

Sea R un anillo conmutativo con 1 y S un *subconjunto multiplicativo de* R, esto es, 1 está en S y si s_1, s_2 son elementos de S, entonces su producto $s_1 s_2$ también es un miembro de S. Sobre el producto cartesiano $R \times S$ definimos una relación $\sim$ de la siguiente manera:

$$(r, s) \sim (r', s') \text{ si y sólo si existe } t \in S \text{ tal que } trs' = tr's.$$

La relación $\sim$ es de equivalencia: $(r, s) \sim (r, s)$ ya que $1rs = 1rs$; si $(r, s) \sim (r', s')$, entonces existe t en S tal que $trs' = tr's$, pero esto significa exactamente que $(r', s') \sim (r, s)$; por último, si $(r, s) \sim (r', s')$ y $(r', s') \sim (r'', s'')$, entonces existen t_1, t_2 en S tales que $t_1 rs' = t_1 r's$ y $t_2 r's'' = t_2 r''s'$, luego

$$(t_1 t_2 s')rs'' = t_1 t_2 r'ss'' = t_1 t_2 r''ss' = (t_1 t_2 s')r''s,$$

esto es, existe $t_3 = t_1 t_2 s'$ en S tal que $t_3 rs'' = t_3 r''s$, y por tanto $(r, s) \sim (r'', s'')$. Denotamos por $R[S^{-1}]$ al conjunto cociente $R \times S/\sim$ y por r/s a la clase de equivalencia de (r, s). Hacemos al conjunto $R[S^{-1}]$ un anillo conmutativo con $1 = \overline{(1, 1)}$ y con la suma y producto definidos como

$$\frac{r}{s} + \frac{r'}{s'} = \frac{rs' + r's}{ss'} \text{ y } \frac{r}{s}\frac{r'}{s'} = \frac{rr'}{ss'}.$$

Llamamos al anillo $R[S^{-1}]$ la *localización* de R con respecto de S.

Existe un morfismo canónico $\alpha : R \longrightarrow R[S^{-1}]$ dado por $r \mapsto r/1$. Notemos que bajo este morfismo, la imagen de cada elemento s en S es invertible en $S^{-1}R$ con inverso $1/s$. El morfismo α es universal entre todos aquellos morfismos de anillos que hacen invertible a cada s en S, esto es, si $\varphi : R \longrightarrow A$ es un morfismo de anillos tal que para cada s en S, $\varphi(s)$ es invertible en A, entonces existe un único morfismo de anillos $\widehat{\varphi} : R[S^{-1}] \longrightarrow A$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\varphi"'] & R[S^{-1}] \arrow[d, dashed, "\widehat{\varphi}"] \\ & A \end{tikzcd}$$

conmuta, es decir, $\varphi = \widehat{\varphi}\alpha$. El morfismo $\widehat{\varphi}$ está dado por $r/s \mapsto \varphi(r)\varphi(s)^{-1}$. Esta asignación está bien definida, pues si r/s' y r'/s' representan a la misma clase, entonces existe t en S tal que $trs' = tr's$, luego $\varphi(t)\varphi(r)\varphi(s') = \varphi(t)\varphi(r')\varphi(s)$. Multiplicando por $\varphi(t)^{-1}\varphi(s)^{-1}\varphi(s')^{-1}$ a ambos lados de la igualdad, obtenemos que $\varphi(r)\varphi(s)^{-1} = \varphi(r')\varphi(s')^{-1}$.

Ejemplo. Para cada elemento f en R tenemos un conjunto multiplicativo $\{1, f, f^2, f^3, \ldots\}$. En este caso es más común denotar por R_f a la localización de

R con respecto a $\{1, f, f^2, f^3, \ldots\}$. También notemos que el complemento $R - P$ de un ideal primo P de R es conjunto multiplicativo. En este caso denotamos a la localización de R con respecto a $R - P$ como R_P y nos refererimos a ella sólo como la *localización* de R en P.

TEOREMA 1.1. *El anillo R_P es un anillo local, es decir, tiene un único ideal máximo.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $m_P = \{p/s \,|\, p \in P \text{ y } s \notin P\}$. Veamos que m_P es el único ideal máximo de R_P. Que m_P es un ideal de R_P es inmediato, ya que si p/s, p'/s' están en S, entonces $p/s + p'/s' = (ps' + p's)/ss'$ está en m_P, y para cualquier r/s'' en R_P, tenemos que $(r/s'')(p/s) = (rp)/(s''s)$ también es un elemento de m_P.

El ideal m_P es propio, pues el elemento $1/1$ en R_P no está en m_P. Además, si I es un ideal propio de R_P y x/s es un elemento de I, entonces x está en P. De lo contrario x está en $R - P$, así que x/s es invertible, luego $I = R_P$, lo que es una contradicción.

2. Espectro Primo de un Anillo

2.1. Espectro de un Anillo. Sea R anillo conmutativo con 1. Asociamos con R un espacio topológico como sigue: Denotamos por Spec$R$ al conjunto de todos los ideales primos de R, y para cualquier ideal I de R, definimos el conjunto

$$V(I) = \{P \in \mathrm{Spec}R \,|\, I \subseteq P\}.$$

TEOREMA 2.1.

i) $V(0) = \mathrm{Spec}R$ *y* $V(R) = \emptyset$*;*
ii) $V(\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} V(I_\lambda)$*;*
iii) $V(IJ) = V(I) \cup V(J)$.

DEMOSTRACIÓN. El inciso *i)* es porque todos los ideales tienen al 0 como uno de sus elementos y porque todos los ideales primos de R son propios.

Para *ii)* notemos que si la suma $\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$ está contenida en un ideal primo P, entonces P contiene a cada uno de los sumandos I_λ, así que P está en cada $V(I_\lambda)$ es decir, P está en la intersección $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} V(I_\lambda)$. Podemos regresar sobre los mismos pasos recordando que $\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$ es el menor ideal de R que contiene a cada I_λ.

Por último, como IJ está contenido en ambos ideales I y J, tenemos que cualquier ideal primo P que contiene a I o a J, también contiene a IJ. Por otro lado, si P es un ideal primo que contiene a IJ, entonces P contiene a I o contiene a J y así obtenemos *iii)*.

Se sigue que la colección de todos los subconjuntos de la forma $V(I)$ de Spec$R$ con I un ideal de R, son los conjuntos cerrados de una topología sobre Spec$R$. Esta topología es conocida como la *topología de Zariski o topología espectral* y el espacio topológico Spec$R$ con la topología de Zariski lo llamamos el *espectro primo* del anillo R.

2.2. Base Para la Topología de Zariski. Par cada f en R definimos el conjunto

$$D(f) = \mathrm{R} - V(Rf) = \{P \in \mathrm{Spec}R \,|\, f \notin P\}.$$

TEOREMA 2.2. *La colección $\{D(f) \mid f \in R\}$ es una base para la topología de Zariski sobre Spec$R$. Además cumple que $D(f) \cap D(g) = D(fg)$.*

DEMOSTRACIÓN. Los conjuntos abiertos de $\mathrm{Spec}R$ son de la forma $U = \mathrm{Spec}R - V(I)$, con I un ideal de R. Luego, debemos demostrar que si P está en U, entonces existe un $D(f)$, con f en R, tal que $P \in D(f) \subseteq U$. Sea pues P en $U = \mathrm{Spec}R - V(I)$. Así que I no está contenido en P, es decir, existe un elemento f de I que no está en P, pero esto significa precisamente que P está en $D(f)$. Notemos además que el ideal Rf está contenido en I, así que $V(I) \subseteq V(Rf)$, luego $\mathrm{Spec}R - V(Rf) \subseteq \mathrm{Spec}R - V(I)$, es decir, $D(f) \subseteq U$.

Que $D(f) \cap D(g) = D(fg)$ es porque los ideales $R(fg)$ y $(Rf)(Rg)$ son iguales, luego $V(Rf) \cup V(Rg) = V(R(fg))$, por 2.1*iii*).

Lo que sigue es mostrar que la asignación $R \mapsto \mathrm{Spec}R$ que asocia a cada anillo a su espectro primo es funtorial. Para ello consideremos un morfismo de anillos $\varphi : R \longrightarrow S$. Entonces para cada ideal primo Q de S, su imagen inversa $\varphi^{-1}(Q)$ bajo φ es un ideal primo de R. Esto nos permite definir una función $\Phi : \mathrm{Spec}S \longrightarrow \mathrm{Spec}R$ como $Q \mapsto \varphi^{-1}(Q)$. Para revisar la continuidad de Φ consideremos un abierto básico $D(f)$ en $\mathrm{Spec}R$. Entonces

$$\begin{aligned}\Phi^{-1}(D(f)) &= \{Q \in \mathrm{Spec}S \mid \Phi(Q) \in D(f)\} \\ &= \{Q \in \mathrm{Spec}S \mid f \notin \Phi(Q) = \varphi^{-1}(Q)\} \\ &= \{Q \in \mathrm{Spec}S \mid \varphi(f) \notin Q\} \\ &= D(\varphi(f)).\end{aligned}$$

Así que, efectivamente, Φ es continua y $\mathrm{Spec} : \mathbf{CRing} \longrightarrow \mathbf{Sp}$ es un funtor.

2.3. Haz Sobre spec$R$. El espectro $\mathrm{Spec}R$ de un anillo R no contiene suficiente información como para recuperar al anillo. Para lograr esto agregamos más estructura al espectro definiendo sobre él un haz de anillos. Primero notemos que a cada abierto básico $D(f)$ de $\mathrm{Spec}R$ podemos asociarle un anillo, a saber, la localización R_f. Para ver que esta asignación está bien definida veamos que si f y g son dos elementos de R que nos dan los mismos básicos, es decir, $D(f) = D(g)$, entonces los anillos R_f y R_g, si bien no son iguales, al menos, son isomorfos. Ahora bien, si tenemos la contención $D(g) \subseteq D(f)$, entonces $V(f) \subseteq V(g)$, luego el radical $\sqrt{Rg}$ del ideal Rg está contenido en el radical $\sqrt{Rf}$ de Rf (recordemos que el *radical* $\sqrt{I}$ de un ideal I de R es la intersección de todos los ideales primos que contienen a I; equivalentemente, el conjunto de aquellos r en R tales que r^n está en I, para algún entero $n > 0$). Como g está en $\sqrt{Rg} \subseteq \sqrt{Rf}$, existe $n > 0$ tal que g^n es un elemento de Rf, esto es, $g^n = af$, para algún a en R. Recíprocamente, si $g^n = af$ para algún a en R y un entero $n > 0$, entonces $D(g) \subseteq D(f)$.

Usamos lo anterior para obtener, a partir de la contención $D(g) \subseteq D(f)$, un morfismo $R_f \longrightarrow R_g$ definido como $r/f^m \mapsto a^m r/g^{nm}$. Para definir el morfismo usamos el siguiente truco:

$$\frac{r}{f^m} = \frac{a^m r}{a^m f^m} = \frac{a^m r}{(af)^m} = \frac{a^m r}{(g^n)^m} = \frac{a^m r}{g^{nm}}.$$

Si tenemos la otra contención, entonces existe $k > 0$ y b en R tal que $f^k = bg$ y luego, un morfismo $R_g \longrightarrow R_f$ dado por $s/g^l \mapsto b^l s/f^{kl}$. La composición $R_f \longrightarrow R_g \longrightarrow R_f$ es la identidad, ya que para cualquier elemento r/f^m en R_f, tenemos que $r/f^m \mapsto a^m r/g^{nm} \mapsto b^{nm}(a^m r)/f^{knm}$ y las fracciones r/f^m y $b^{nm}(a^m r)/f^{knm}$ representan al mismo elemento de R_f. En efecto, $r/f^m = b^{nm}a^m r/f^{knm}$ si y sólo si existe t en $\{1, f, f^2, \ldots\}$ tal que $tf^m b^{nm} a^m r = trf^{knm}$, lo que es cierto ya que

$rb^{nm}a^m f^m = rb^{nm}(af)^m = rb^{nm}g^{nm} = r(bg)^{nm} = rf^{knm}$, con $t = 1$. Análogamente se muestra que la composición $R_g \longrightarrow R_f \longrightarrow R_g$ es la identidad en R_g, y por tanto $R_f \cong R_g$.

Denotemos por $\mathcal{B}$ a la colección de los abiertos básicos $D(f)$ de Spec$R$. Las consideraciones de arriba nos permiten definir un prehaz $D(f) \mapsto R_f$ sobre $\mathcal{B}$. Más aún, ya que $D(f) \cap D(g) = D(fg)$, si $D(f) = \bigcup_{i\in I} D(f_i)$ es una cubierta abierta de $D(f)$ por abiertos básico $D(f_i)$, entonces se puede demostrar que el diagrama

$$R_f \longrightarrow \prod_{i\in I} R_{f_i} \rightrightarrows \prod_{(i,j)\in I\times I} R_{f_i f_j}$$

es un igualador (Ver I. G. Macdonald, **[11]**, Proposición 5.1, pág. 37), esto es, tenemos un haz de anillos $\mathcal{O}_{\mathcal{B}}$ definido sobre $\mathcal{B}$ que asocia a cada abierto básico $D(f)$ el anillo de fracciones R_f y a cada contención $D(f) \subseteq D(g)$ el morfismo $R_f \longrightarrow R_g$ definido como arriba. Puesto que existe una equivalencia de categorías $\mathbf{Sh}(\mathcal{B})$ y $\mathbf{Sh}(\mathrm{Spec}R)$ (Teorema 0.3.4), tenemos que el haz $\mathcal{O}_{\mathcal{B}}$ se corresponde con un haz $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}R}$ (o bien, $\mathcal{O}_R$ para más corto) sobre todo el espectro Spec$R$ de R. Notamos que en el caso particular en el que tomamos al abierto $D(1) = \mathrm{Spec}R$, tenemos que $R \cong \mathcal{O}_R(\mathrm{Spec}R)$, así que hemos recuperado al anillo R, al menos hasta isomorfismo.

2.4. Espacios Anillados. Recordemos que un morfismo de anillos $\varphi : R \longrightarrow S$ nos induce una función continua $\Phi : \mathrm{Spec}S \longrightarrow \mathrm{Spec}R$ dada por $Q \mapsto \varphi^{-1}(Q)$. Además, para cada abierto básico $D(f)$ de Spec$R$, tenemos que $\Phi^{-1}(D(f)) = D(\varphi(f))$. Ahora bien, bajo el morfismo $R \xrightarrow{\varphi} S \longrightarrow S_{\varphi(f)}$, el elemento f en R es invertible en $S_{\varphi(f)}$, por tanto, existe un único morfismo $\hat{\varphi} : R_f \longrightarrow S_{\varphi(f)}$, o bien, $\hat{\varphi} : \mathcal{O}_R(D(f)) \longrightarrow \mathcal{O}_S(\Phi^{-1}(D(f)))$ poniéndolo en términos del abierto $D(f)$ de Spec$R$.

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"'] & R_f \arrow[d, dashed, "\hat{\varphi}"] \\ S \arrow[r] & S_{\varphi(f)}. \end{tikzcd}$$

Definición. Un *espacio anillado* es un par $(X, \mathcal{O}_X)$, donde X es un espacio topológico y $\mathcal{O}_X$ un haz de anillos $\mathcal{O}_X$ sobre X. Un *morfismo de espacios anillados* $(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ consiste de una función continua $\varphi : X \longrightarrow Y$ y un morfismo $\theta : \mathcal{O}_Y \longrightarrow (\mathcal{O}_X)_*$ del haz $\mathcal{O}_Y$ al haz imagen directa $(\mathcal{O}_X)_*$.

Así que cada anillo R tiene asociado un espacio anillado $(\mathrm{Spec}R, \mathcal{O}_R)$ y todo morfismo de anillos $\varphi : R \longrightarrow S$ nos provee de un morfismo de espacios anillados $(\mathrm{Spec}S, \mathcal{O}_S) \longrightarrow (\mathrm{Spec}R, \mathcal{O}_R)$ con función continua subyacente $\Phi : \mathrm{Spec}S \longrightarrow \mathrm{Spec}R$ y morfismo de haces $\theta : \mathcal{O}_R \longrightarrow (\mathcal{O}_S)_*$ definido en cada abierto abierto básico $D(f)$ por $\theta_{D(f)} : R_f \longrightarrow S_{\varphi(f)}$, que enseguida mostramos que cumple la condición de naturalidad. Si $D(f)$ y $D(g)$ son abiertos de Spec$R$ con $D(g) \subseteq D(f)$, entonces $g^n = af$ para algún a en R y $n > 0$. Luego $\varphi(g)^n = \varphi(a)\varphi(f)$, así obtenemos el cuadrado

$$\begin{tikzcd} R_f \arrow[r, "\theta_{D(f)}"] \arrow[d] & S_{\varphi(f)} \arrow[d] \\ R_g \arrow[r, "\theta_{D(g)}"'] & S_{\varphi(g)} \end{tikzcd}$$

con las siguientes asignaciones:

$$\begin{array}{ccc} R_f \longrightarrow S_{\varphi(f)} \longrightarrow S_{\varphi(g)} & \text{y} & R_f \longrightarrow R_g \longrightarrow S_{\varphi(g)} \\ \dfrac{r}{f^m} \mapsto \dfrac{\varphi(r)}{\varphi(f)^m} \mapsto \dfrac{\varphi(a)^m\varphi(r)}{\varphi(g)^{mn}} & & \dfrac{r}{f^m} \mapsto \dfrac{ar}{g^{mn}} \mapsto \dfrac{\varphi(a^m r)}{\varphi(g^{mn})} \end{array}$$

lo que significa que el cuadrado conmuta, que es precisamente lo que queríamos.

Definición. Un espacio anillado isomorfo a $(\mathrm{Spec}R, \mathcal{O}_R)$ para algún anillo R, es llamado un *esquema afín*.

El haz $\mathcal{O}_R$ tiene otras propiedades que veremos a continuación. Sea P un ideal primo del anillo R y f cualquier elemento de R que no está en P. Consideremos los anillos R_P y R_f. En R_P todos los elementos que no están en P son invertibles, en particular, aquellos del conjunto $\{1, f, f^2, f^3, \ldots\}$. Luego, existe un morfismo $\alpha_f : R_f \longrightarrow R_P$. De este modo obtenemos una familia de morfismos $\{\alpha_f : R_f \longrightarrow R_P\}_{f\notin P}$. El anillo R_P junto con los morfismos α_f constituyen el colímite de la familia $\{R_f\}_{f\notin P}$. Se sigue que el tallo del haz $\mathcal{O}_R$ sobre $\mathrm{Spec}R$ en el punto P no es otro que la localización de R en P, esto es,

$$\mathcal{O}_{R,P} = \mathrm{colim}_{f\notin P} R_f = R_P.$$

Sea $(\mathrm{Spec}S, \mathcal{O}_S) \overset{(\Phi,\theta)}{\longrightarrow} (\mathrm{Spec}R, \mathcal{O}_R)$ el morfismo de espacios anillados que proviene del morfismo de anillos $\varphi :\longrightarrow S$ y Q un ideal primo de S. Sabemos que $\Phi(Q)$ es un ideal primo de R y es claro que bajo el morfismo $R \overset{\varphi}{\longrightarrow} S \longrightarrow S_Q$, cada elemento f en R que no está en $\Phi(Q)$ es invertible en en S_Q, por tanto, existe un morfismo $R_{\Phi(Q)} \longrightarrow S_Q$ entre los anillos locales $R_{\Phi(Q)}$ y S_Q, es decir, tenemos un morfismo $\mathcal{O}_{R,\Phi(Q)} \longrightarrow \mathcal{O}_{S,Q}$ entre los tallos $\mathcal{O}_{R,\Phi(Q)}$ y $\mathcal{O}_{S,Q}$.

Si recordamos que el ideal máximo $m_{\Phi(Q)}$ de $R_{\Phi(Q)}$ es la colección de todas aquellas fracciones q/r con q en $\Phi(Q)$ y r en $R - \Phi(Q)$, entonces tenemos que el morfismo $R_{\Phi(Q)} \longrightarrow S_Q$ manda a cada q/r en $m_{\Phi(Q)}$ a la fracción $\varphi(q)/\varphi(r)$, donde $\varphi(q)$ es un elemento de Q y $\varphi(r)$ no está en Q, es decir, $\varphi(q)/\varphi(r)$ es un elemento del ideal de máximo m_Q de S_Q. En resumen, el morfismo $R_{\Phi(Q)} \longrightarrow S_Q$ manda al ideal máximo $m_{\Phi(Q)}$ de $R_{\Phi(Q)}$ en el ideal máximo m_Q de S_Q. Este es un ejemplo de lo conoce como un morfismo de anillos locales.

Definición. Decimos que un espacio anillado $(X, \mathcal{O}_X)$ es un *espacio geométrico* si para todo x en X, los tallos $\mathcal{O}_{X,x}$ son anillos locales, es decir, tienen un único ideal máximo que denotamos por m_x. Un *morfismo de espacios geométricos* $(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ es un morfismo de espacio anillados (φ, θ) con la propiedad adicional que para todo x en X, el morfismo de tallos

$$\theta_x : \mathcal{O}_{Y,\varphi(x)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$$

es un *morfismo de anillos locales*, esto es, $\theta_x(m_\varphi(x)) \subseteq m_x$. Denotamos por **GSp** a la categoría de los espacios geométricos y morfismos entre ellos.

2.5. Adjunción GSp-CRing.

Teorema 2.3. *Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un espacio geométrico y R un anillo. Para cada morfismo de anillos $t : R \longrightarrow \mathcal{O}_X(X)$, existe un único morfismo de espacios gemétricos $(g, G) : (X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (\mathrm{Spec}R, \mathcal{O}_R)$ tal que el triángulo*

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "\sim"] \arrow[dr, "t"'] & \mathcal{O}_R(\mathrm{Spec}R) \arrow[d, dashed, "G_{\mathrm{Spec}R}"] & & (\mathrm{Spec}R, \mathcal{O}_R) \\
S & \mathcal{O}_X(X) & & (X, \mathcal{O}_X) \arrow[u, dashed, "(g,G)"']
\end{tikzcd}$$

conmuta. Es decir, el morfismo $R \overset{\sim}{\longrightarrow} \mathcal{O}_R(\mathrm{Spec}R)$ es universal de R al funtor $\mathcal{O} : \mathbf{GSp} \longrightarrow \mathbf{CRing}$ que toma secciones globales.

Demostración. Sea $t : R \longrightarrow \mathcal{O}_X(X)$. Construyamos el morfismo de espacios geométricos

$$(X, \mathcal{O}_X) \overset{(g,G)}{\longrightarrow} (\mathrm{Spec}R, \mathcal{O}_R).$$

Primero definamos la función continua $g : X \longrightarrow \mathrm{Spec}R$. Tal función debe asignar a cada x en X un ideal primo de R. Ahora bien, dado el haz $\mathcal{O}_X$ sobre X y x en X, consideremos el tallo $\mathcal{O}_{X,x}$. Dicho tallo es un anillo local, con ideal máximo m_x y además tenemos un morfismo $\mathcal{O}_X(X) \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$. Luego, la composición

$$R \overset{t}{\longrightarrow} \mathcal{O}_X(X) \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$$

es un morfismo de R a $\mathcal{O}_{X,x}$ que vamos a denotar por t_x. Como m_x es un ideal primo de $\mathcal{O}_{X,x}$, $t_x^{-1}(m_x)$ es un ideal primo de R. Así que definimos $g : X \longrightarrow \mathrm{Spec}R$ por $x \mapsto t_x^{-1}(m_x)$.

Lo que sigue es ver que g es continua. Para ello consideremos f en R. Entonces $t(f)$ en $\mathcal{O}_X(X)$ es una sección sobre X y para cualquier x en X, $t_x(f)$ es el germen de $t(f)$ en el punto x. Sea

$$U = \{x \in X \mid t_x(f) \notin m_x\}.$$

Mostremos que el conjunto U así definido es un conjunto abierto de X. Para este fin, notemos que si x es un punto de U, entonces $f' = t_x(f)$ es una unidad en $\mathcal{O}_{X,x}$, es decir, existe un germen g' en $\mathcal{O}_{X,x}$ tal que $f'g' = 1$, donde $g' = s_x$, para alguna sección s en $\mathcal{O}_X(V)$ y V una vecindad abierta de x. La restricción de $t(f)$ a V (que seguimos denotando por $t(f)$) y por tanto el producto $t(f)s$, es una sección sobre V cuyo germen en el punto x es $(t(f)s)_x = t_x(f)s_x = f'g' = 1$. Obviamente la sección 1 en $\mathcal{O}_X(V)$ también tiene por germen el 1 en el punto x (el segundo 1 es la identidad del tallo $\mathcal{O}_{X,x}$), es decir, los gérmenes de las secciones $t(f)s$ y 1 en el punto x son iguales, luego, existe una vecindad W_x de x contenida en V en la que las restricciones de $t(f)s$ y 1 en W_x son iguales (Teorema 0.3.1). Se sigue que para todo y en W_x,

$$t(f)_y s_y = 1,$$

es decir, el germen $t(f)_y$ de $t(f)$ en el punto y es una unidad en el tallo $\mathcal{O}_{X,y}$, equivalentemente, $t(f)_y$ no está en el ideal máximo m_y de $\mathcal{O}_{X,y}$. En otras palabras, para cada x en U, existe una vecindad W_x de x tal que para todo y en W_x, $t(f)_y$ no está en m_y. Esto es, hemos demostrado que U es vecindad de todos sus puntos, y por tanto, un conjunto abierto de X.

Ahora bien, dado que $D(f)$ es un abierto básico de Spec$R$ y

$$\begin{aligned} g^{-1}(D(f)) &= \{x \in X \mid g(x) \in D(f)\} \\ &= \{x \in X \mid f \notin g(x) = t_x^{-1}(m_x)\} \\ &= \{x \in X \mid t_x(f) \notin m_x\} \\ &= U, \end{aligned}$$

concluimos que la función g es continua.

Para cada f en R y x en U como arriba, podemos restringir la sección $t(f)$ en $\mathcal{O}_X(X)$ a cada abierto W_x, y en cada anillo $\mathcal{O}_X(W_x)$ tenemos que tal restricción tiene un inverso u. También es claro que si u y u' son inversos de la restricción de $t(f)$ en W_x y $W_{x'}$, respectivamente, entonces las restricciones de u y u' en $W_x \cap W_{x'}$ son iguales, por la unicidad del inverso multiplicativo. Por la condición de haz, existe una sección e definida sobre $U = \bigcup_{x\in U} W_x$ tal que la restricción de e en W_x es u, y puesto que para todo x en U,

$$(t(f)e)_x = t(f)_x e_x = t_x(f)u_x = 1,$$

tenemos que $t(f)e = 1$ (Teorema 0.3.2), es decir, e es el inverso multiplicativo de $t(f)$ en $\mathcal{O}_X(U) = \mathcal{O}_X\left(g^{-1}(D(f))\right)$. Se sigue que el morfismo

$$R \xrightarrow{t} \mathcal{O}_X(X) \xrightarrow{\rho_U^X} \mathcal{O}_X(U)$$

invierte a f, por tanto, existe un único morfismo

$$\mathcal{O}_R\left(D(f)\right) = R_f \longrightarrow \mathcal{O}_X(U) = \mathcal{O}_X\left(g^{-1}(D(f))\right)$$

como en el diagrama

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r] \arrow[d, "t"'] & R_f \arrow[d, dashed] \\ \mathcal{O}_X(X) \arrow[r, "\rho_U^X"'] & \mathcal{O}_X(U). \end{tikzcd}$$

Esta familia de flechas nos definen el morfismo de haces $\mathcal{O}_R \xrightarrow{G} (\mathcal{O}_X)_*$ requerido. Observamos que para el abierto $D(1) = \mathrm{Spec}R$, la composición

$$R \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_R(\mathrm{Spec}R) \longrightarrow \mathcal{O}_X(X)$$

es precisamente t.

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "t"'] & \mathcal{O}_R(\mathrm{Spec}R) \arrow[d, dotted] \\ \mathcal{O}_X(X) \arrow[r, equal] & \mathcal{O}_X(X). \end{tikzcd}$$

Para cada x en X, $g(x) = t_x^{-1}(m_x)$ es un ideal primo de R, y el morfismo $t_x : R \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ invierte a cada elemento f de R que no está en $g(x)$, así que que existe un morfismo $G_x : R_{g(x)} = \mathcal{O}_{R,g(x)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$. Si recordamos que los elementos del ideal máximo $m_{g(x)}$ de $\mathcal{O}_{R,g(x)}$ son de la forma r/s con r en $g(x)$ y s en $R - g(x)$, entonces vemos que G_x manda a r/s en $t_x(r)/t_x(s)$, con $t_x(r)$ en m_x y $t_x(s)$ en el complemento de m_x. Concluimos que para cada x en X, G_x es un morfismo de anillos locales, que es lo restaba para demostrar que (g, G) no solamente es un morfismo de espacios anillados, sino un morfismo de espacios geométricos.

Ahora abordamos la unicidad. Para ello mostremos que el proceso de construir el morfismo de espacios anillados $(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (\mathrm{Spec}R, \mathcal{O}_R)$ a partir de un morfismo de anillos $R \longrightarrow \mathcal{O}_X(X)$ como descrito arriba, es el inverso a tomar el morfismo de anillos $\mathcal{O}_R(\mathrm{Spec}R) \longrightarrow \mathcal{O}_X(X)$ y componerlo con el isomorfismo $R \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_R(\mathrm{Spec}R)$. Comencemos pues con un morfismo de espacios geométricos

$$(X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{(g',G')} (\mathrm{Spec}R, \mathcal{O}_R).$$

Entonces tenemos un morfismo $R \longrightarrow \mathcal{O}_X(X)$, como lo acabamos de describir, que llamamos t; y tal morfismo t nos otorga un morfismo de espacios geométricos

$$(X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{(g,G)} (\mathrm{Spec}R, \mathcal{O}_R).$$

Veamos que los morfismos (g', G') y (g, G) son iguales, esto es, $g' = g$ y $G' = G$. Ahora bien, para cada x en X, $g'(x)$ y $g(x)$ son ideales primos de R, donde $g(x) = t_x^{-1}(m_x)$ y m_x es el ideal máximo del anillo local $\mathcal{O}_{X,x}$. Si $g'(x) \neq g(x)$, entonces existe un f en R tal que f está en $g'(x)$ y no está en $g(x)$, o viceversa. En el primer caso, es decir, si f está en $g'(x)$, entonces f no es invertible en $\mathcal{O}_{R,g'(x)}$, ni mucho menos en $\mathcal{O}_{X,x}$, ya que $G'_x(m_{g'(x)}) \subseteq m_x$. Por otro lado, como f no está en $g(x)$, tenemos que f es invertible en $\mathcal{O}_{X,x}$, lo que es una contradicción. El segundo caso es análogo, por lo que concluimos que $g' = g$.

Ahora notemos que para cada f en R, tenemos un par de morfismo

$$R_f = \mathcal{O}_R(D(f)) \underset{G'_{D(f)}}{\overset{G_{D(f)}}{\rightrightarrows}} \mathcal{O}_X\left(g^{-1}(D(f))\right) = \mathcal{O}_X\left(g'^{-1}(D(f))\right),$$

donde ambos hacen invertible a f, así que deben ser el mismo morfismo. Con esto obtenemos que $G = G'$. Un argumento similar sirve para demostrar que los morfismos de anillos locales

$$\mathcal{O}_{R,g(x)} \underset{G'_x}{\overset{G_x}{\rightrightarrows}} \mathcal{O}_{X,x}$$

son iguales. Esto completa la demostración.

Terminamos con la siguiente observación: en realidad, la imagen del funtor Spec está contenida en la subcategoría **Aff** de esquemas afines y morfismos de espacios geométricos de **GSp**. Luego, de la adjunción que acabamos de demostrar, se sigue que si $(X, \mathcal{O}_X)$ es un esquema afín, esto es, $(X, \mathcal{O}_X) \cong (\mathrm{Spec}S, \mathcal{O}_S)$ para algún anillo S, entonces

$$\mathbf{Aff}((\mathrm{Spec}S, \mathcal{O}_S), (\mathrm{Spec}R, \mathcal{O}_R)) \cong \mathbf{CRing}(R, \mathcal{O}_S(\mathrm{Spec}S)) \cong \mathbf{CRing}(R, S).$$

Es decir, el funtor Spec : $\mathbf{CRing} \longrightarrow \mathbf{Aff}$ es pleno y fiel, y ya que todo esquema afín es isomorfo a un espacio anillado $(\mathrm{Spec}R, \mathcal{O}_R)$, para algún anillo R, obtenemos la dualidad que da nombre a este apéndice.

Bibliografía

[1] J. Adámek, J. Rosický, *Locally presentable and accessible categories.* London Mathematical Society Lecture Note Series 189, Cambridge University Press, 1994.

[2] M. Anel, G. Catren, *New Spaces in Mathematics, Formal and conceptual reflections.* Cambridge University Press, 2021.

[3] S. Awodey, *Category Theory.* Oxford Logic Guides 52, 2nd edition, Oxford University Press, 2010.

[4] F. Borceux, *Handbook of categorical algebra* (3 vol). Cambridge University Press, 1994.

[5] J. A. Dieudonné, *History of Algebraic Geometry, An Outline of the History and Development of Algebraic Geometry.* The Wadsworth Mathematical Series, Monterey California: Wadsworth Advanced Books & Software, 1985.

[6] P. T. Johnstone, *Topos Theory.* Dover Publications, Inc., 2014.

[7] P. T. Johnstone, *Stone Spaces.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Vol 3, Cambridge University Press, 1982.

[8] A. Joyal, *A Crash Course in Topos Theory: The Big Picture (I, II y III).* Serie de pláticas en el Topos à l'IHES, 2015. https://www.youtube.com/watch?v=Ro8KoFFdtS4.

[9] A. Joyal, *A Crash course in (higher) topos theory I.* Diapositivas de una plática en el Virtual Workshop on HTT, Barranquilla, Colombia 2020. https://math.uniandes.edu.co/eventos/2020/workshop/

[10] A. Joyal, M. Tierney, *An extension of the Galois theory of Grothendieck.* Memoirs of the American Mathematical Society, 1984.

[11] I. G. MacDonald, *Algebraic Geometry: Introduction to Schemes.* W. A. Benjamin, Inc. 1968.

[12] S. Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician.* Graduates Text in Mathematics, Vol 5, 2nd edition, New York: Springer-verlag, 1998.

[13] S. Mac Lane, I. Moerdijk, *Sheaves in Geometry and Logic, A First Introduction to Topos Theory.* New York: Springer-Verlag, 1994.

[14] B. R. Tennison, *Sheaf Theory.* London Math. Soc. Lectures Notes 20, Cambridge University Press, 1975.