



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

**Series de Fourier fraccionarias con aplicaciones en
ecuaciones diferenciales**

Tesis presentada al

Colegio de Matemáticas

como requisito parcial para la obtención del grado de

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS APLICADAS

por

Julio César López Morgado

Asesorado por

Dr. José Jacobo Oliveros Oliveros

Dr. José Julio Conde Mones

Puebla Pue.
23 de octubre de 2025



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

**Series de Fourier fraccionarias con aplicaciones en
ecuaciones diferenciales**

Tesis presentada al

Colegio de Matemáticas

Que para obtener el grado de:

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS APLICADAS

por

Julio César López Morgado

Asesorado por

Dr. José Jacobo Oliveros Oliveros

Dr. José Julio Conde Mones

Puebla Pue.
23 de octubre de 2025

**Título de Tesis: Series de Fourier fraccionarias con
aplicaciones en ecuaciones diferenciales**
Aspirante: Julio César López Morgado

COMITÉ

Dr. Carlos Arturo Hernández Gracidas
Presidente

Dra. María Monserrat Morín Castillo
Secretario

M.C. Felix Augusto Aquino Camacho
Vocal

Dr. José Jacobo Oliveros Oliveros
Asesores

Dr. José Julio Conde Mones

Índice general

1. Introducción	5
1.1. Antecedentes históricos del cálculo fraccional	5
1.2. Aplicaciones de las derivadas fraccionarias	7
1.3. Objetivos de la tesis	8
1.4. Descripción de la tesis en su contenido	8
2. Ecuaciones Diferenciales y su solución por series de Fourier	9
2.1. Ecuaciones diferenciales Clásicas	9
2.2. Series de Fourier Clásicas	12
2.3. Solución de Ecuaciones Diferenciales Clásicas usando series de Fourier	16
3. Operadores fraccionarios y ecuaciones diferenciales fraccionarias.	19
3.1. Operadores Fraccionarios	19
3.2. Derivadas fraccionarias	19
3.3. Ecuaciones Diferenciales Fraccionarias	24
3.3.1. Motivación y definiciones básicas	24
4. Series de Fourier y Ecuaciones Diferenciales Fraccionarias	27
4.1. Definición y ejemplos	27
4.1.1. Ejemplos gráficos	33
4.2. Solución de Ecuaciones Diferenciales Fraccionarias Utilizando Series de Fourier Fraccionarias (SFF).	36
4.3. Conclusiones	50
A. Desarrollo ecuación 2.1	53
B. Desarrollo ecuación 2.7	61
C. Desarrollo ecuación 2.8	63

Índice general

Resumen

En el desarrollo de las diversas áreas de estudios de la Matemática, se encuentra el análisis matemático, el cual ha tenido un gran desarrollo y una de sus líneas es el cálculo fraccionario, donde se ha profundizado en extender los elementos del cálculo tradicional. Para ello, se toman operadores fraccionarios en lugar de enteros. Se realiza una pequeña recopilación de la historia del cálculo fraccional y de las diferentes aportaciones de algunos matemáticos al cálculo fraccional así como la explicación de los diferentes operadores fraccionarios. Estos conceptos nos permiten profundizar en algunos otros conceptos como lo son las ecuaciones diferenciales y las series de Fourier y su convergencia basada en el criterio de Dini para poder extenderlas al caso fraccionario. Una parte interesante del cálculo fraccional es la resolución de ecuaciones diferenciales fraccionarias y una forma de hacerlo es a través de series de Fourier fraccionarias y que para su mejor comprensión se incluyen diferentes definiciones que complementan las condiciones de dichas series y de las cuales se desprenden los α -coeficientes de Fourier que son los que se emplean para encontrar las series de Fourier fraccionarias. Se incluyen ejemplos resueltos analíticamente y gráficos aplicando programación en MATLAB que nos muestran la relación entre una función y su α -serie de Fourier que proporcionan una mejor idea para la comprensión de estos conceptos.

Capítulo 1

Introducción

En la actualidad el análisis Matemático ha mostrado un gran desarrollo y una nueva línea de éste es el cálculo fraccionario también llamado método de integración y derivación de orden arbitrario, el cual es objeto de investigación en base a las aplicaciones de derivadas e integrales de orden fraccionario. Esto significa que se trata del estudio de operadores que no son enteros sino que son de orden fraccionario y que pueden ser de dominio real o complejo así como sus aplicaciones. Estos operadores fraccionarios surgen con un objetivo, que es el de hacer una generalización sobre los conceptos de integración y derivación para valores no enteros, sin perder o restar importancia y mucho menos sustituir al cálculo tradicional, sino de poderlo acrecentar o extender, teniendo en cuenta que posee sus propios conceptos fraccionarios. Y aunque aún no existen bases para las interpretaciones físicas y geométricas del cálculo fraccionario, este tiene diversas aplicaciones y la parte teórica que va creciendo día con día, pues tiene varias definiciones de la derivada fraccional como la de Caputo, Riemman, Liouville entre otras.

Aunque existen diversas definiciones para la derivada fraccionaria, la primera aproximación de derivada fraccionaria se puede dar solo utilizando la definición básica de derivada”. Como ya se mencionó el cálculo fraccionario es una rama del análisis matemático dentro de la parte de las matemáticas puras. Sin embargo, su estudio tiene aplicaciones en la química, economía, medicina, física, ingeniería, biología, por mencionar algunas. Entre los problemas que se pueden estudiar con esta teoría, se hallan el movimiento vertical en un campo gravitacional, explorar el comportamiento de los sistemas biológicos, en funciones de la familia de exponenciales y sinusoidales que están en las ecuaciones diferenciales lineales ordinarias, en modelizaciones de aplicaciones de física como en la ley de Hooke, fluidos de Newton, solo por mencionar algunos [16].

1.1. Antecedentes históricos del cálculo fraccional

El cálculo fraccionario tiene alrededor de un poco más 350 años de historia pues Gottfried Wilhem Leibniz (1646-1716) al tener contacto con Guillaume François Antoine , marqués de l'Hôpital (1641-1704), el 30 de Septiembre de 1695, le cuestiona sobre qué sucedería si n fuera $\frac{1}{2}$ en la notación $\frac{d^n y}{dx^n}$. Al hacer un análisis Leibniz muestra su respuesta y aproximación de lo que sería la derivada fraccional y respondió: “Usted puede ver con eso, señor, que uno puede expresar por una serie infinita una cantidad tal como $d^{\frac{1}{2}xy}$ o $d^{1:2}xy$. Aunque la serie infinita y la geométrica son relaciones distantes, la serie infinita admite solamente el uso de exponentes que son enteros positivos y negativos, y aún no conoce el uso de exponentes fraccionarios” [22].

Aunque esta situación se dio en el siglo XVII no fue hasta el siglo XVIII en el año 1738 que se hace la primera referencia de derivada fraccional y que fue escrita por Leonhard Paul Euler (1707-1783) en uno de sus artículos y en el cual hace uso de la interpolación factorial para poder generar la definición del orden fraccionario. Sin embargo, Euler no fue el único en estudiar

el cálculo fraccionario y por mencionar a algunos matemáticos que han aportado en este estudio como Lagrange, Cauchy, Fourier, Laplace, Letnikov, Hadamard, Elzaki, Riemman, Liouville siendo estos dos últimos grandes aportadores al estudio del cálculo fraccional.

Una primera aproximación al concepto de derivada fraccionaria puede realizarse partiendo de la definición clásica de derivada de diferente orden. [22] :

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \\
 f''(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}, \\
 &= \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{\lim_{h_2 \rightarrow 0} \frac{f(x+h_1+h_2) - f(x+h_1)}{h_2} - \lim_{h_2 \rightarrow 0} \frac{f(x+h_2) - f(x)}{h_2}}{h_1}, \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2}, \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 \frac{d^n f}{dx^n}(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{0 \leq m \leq n} (-1)^m \binom{n}{m} f(x + (n-m)h)}{h^n}.
 \end{aligned}$$

con

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad 0 \leq k \leq n$$

Si el concepto de factorial lo consideramos mediante la Función Gamma, de la cual hablaremos y utilizaremos en capítulos posteriores y con la cual obtendremos una definición de derivada fraccionaria la cual es la definición de GrÄunwald-Letnikov [24]:

$$\begin{aligned}
 D^q f(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^q} \sum_{0 \leq m < \infty} (-1)^m \binom{q}{m} f(x + (q-m)h), \\
 D^q f(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\alpha} \sum_{m=0}^{\frac{x-\alpha}{h}} (-1)^m \frac{\Gamma(\alpha+1)}{m! \Gamma(\alpha-m+1)} f(x-mh).
 \end{aligned}$$

Otra forma de hacerlo es [19]:

Si se tiene que $y(x) = f(x) = x^n$ se puede calcular la derivada n -ésima:

$$\begin{aligned}
 y &= x^n, \\
 y' &= n(x^{n-1}), \\
 y'' &= n(n-1)(x^{n-2}), \\
 y''' &= n(n-1)(n-2)(x^{n-3}), \\
 y^{(IV)} &= n(n-1)(n-2)(n-3)(x^{n-4}), \\
 &\vdots \\
 y^{(n)} &= n(n-1)(n-2)(n-3)\dots(n-(n-1))(x^{n-n}) = n!,
 \end{aligned}$$

donde

$$y^{(n+1)} = 0.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} y^{(m)} &= (n)(n-1)(n-2)(n-3)\dots(n-(m-1))(x^{n-m}) \\ &= (n)(n-1)(n-2)(n-3)\dots(n-m+1)(x^{n-m}). \end{aligned}$$

Entonces

$$y^{(m)} = \frac{n!}{(n-m)!} (x^{n-m}).$$

Al empezar una generalización del factorial a través de la Función Gamma $\Gamma(z) = (z-1)!$ la cual se explica más adelante, obtenemos que:

$$y^{(m)} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-m+1)} x^{n-m}$$

y generalizando ésta fórmula para derivadas fraccionarias podemos escribir que:

$$y^{(\alpha)} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-\alpha+1)} x^{n-\alpha}$$

y si tomamos $\alpha = \frac{1}{2}$ y $n = 1$ obtenemos que:

$$y^{(\frac{1}{2})} = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{3}{2})} x^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} x^{\frac{1}{2}}.$$

Así, la expresión anterior define derivadas fraccionarias [21].

1.2. Aplicaciones de las derivadas fraccionarias

Así como las derivadas de orden entero positivo tienen diversas aplicaciones, las derivadas de orden fraccionario tienen diversas aplicaciones de las cuales mencionaremos algunas en esta sección.

La transformada de Elzaki.

La transformada de Elzaki es una transformada integral la cual se emplea para resolver ecuaciones diferenciales e integro-diferenciales fraccionarias en las que también están incluidas las que tienen condiciones iniciales donde también se puede utilizar en lugar de la transformada de Laplace debido a su gran compatibilidad [7]. La transformada de Elzaki tiene diferentes áreas de aplicación como son en ingeniería, física, finanzas, electrónica por mencionar algunas. Más específicamente [7], [8], [19]: El análisis de circuitos de redes eléctricas, la resolución de ecuaciones diferenciales simultáneas y problemas de polinomios de Laguerre, para la ecuación de láser de electrones libres, para obtener la fórmula de Euler para la carga crítica o de pandeo, en el modelo de distribución de carga sobre una cuerda y en el modelo de transferencia de calor en estado estacionario. En el área de las finanzas se da uso en los modelos de riesgo colectivo. Se aplica para la resolución de problemas de Cauchy de orden fraccionario que involucran la derivada fraccionaria de Hilfer-Prabhakar. También en las ecuaciones diferenciales parciales, la transformada de Elzaki, permite encontrar soluciones particulares de problemas de valor inicial con condiciones de frontera como por ejemplo la ecuación de Laplace, la ecuación de onda, la ecuación de calor homogénea en una dimensión espacial, la ecuación de telegrafía por mencionar algunas.

La derivada de Caputo.

La derivada de Caputo, es otro operador fraccionario que generalmente se utiliza para resolver ecuaciones diferenciales fraccionarias (EDFs), incluyendo aquellas que no tienen soluciones analíticas, las cuales no se tratan en este trabajo. Esto impulsa la necesidad de desarrollar

métodos numéricos robustos para obtener sus soluciones, especialmente para casos prácticos. La derivada de Caputo presentan un método novedoso para el cálculo aproximado de las derivadas del mismo nombre y de orden y términos variables. Este método se basa en una expansión de la función sub-integral mediante series de Taylor y al hacerlo, el operador fraccionario se transforma en una serie de derivadas de orden entero superior [2].

El método basado en series de Taylor y algunos otros métodos numéricos utilizados para resolver EDFs con el operador de Caputo son: [2]:

- Métodos de Runge–Kutta.
- Métodos de pasos múltiples.
- Fórmulas de diferencias finitas de orden superior.
- Regla de cuadratura de Gauss–Jacobi.
- Método de polinomios de Bernstein.
- Método de colocación basado en wavelets.
- Regla trapezoidal.
- Esquema de diferencia central.

1.3. Objetivos de la tesis

El objetivo de esta tesis es el dar soluciones a algunas ecuaciones diferenciales fraccionarias mediante series de Fourier fraccionarias, mostrando previamente teoría de series de Fourier para la resolución de ecuaciones diferenciales clásicas.

Los objetivos más específicos de esta tesis son:

1. Analizar las ecuaciones diferenciales fraccionarias.
2. Construir ejemplos propios que cumplan con las condiciones de las ecuaciones diferenciales fraccionarias.
3. Resolver numéricamente las ecuaciones diferenciales fraccionarias propuestas mediante el uso del software MATLAB.

1.4. Descripción de la tesis en su contenido

En este trabajo de tesis, se describen los elementos que se van aplicando en las ecuaciones diferenciales fraccionarias, como lo son los operadores fraccionarios, se muestran ejemplos resueltos y propios de como se aplican las series de Fouries fraccionarias para poder resolver ecuaciones diferenciales fraccionales por el método de separación de variables. Durante el desarrollo de los capítulos se va dando parte de la teoría desde las ecuaciones diferenciales clásicas pasando por las series de Fourier, mostrando los operadores fraccionarios y revisando las diferentes definiciones que son dadas para las ecuaciones diferenciales fraccionarias y llegando al uso de series de Fourier fraccionarias para su resolución.

Se concluye mostrando los resultados de los ejemplos propuestos y dando paso a extender el proceso para resolver otras ecuaciones diferenciales fraccionales parciales.

Por último se incluyen las conclusiones, perspectivas y bibliografía de esta tesis.

Capítulo 2

Ecuaciones Diferenciales y su solución por series de Fourier

2.1. Ecuaciones diferenciales Clásicas

Cuando se tiene una igualdad entre dos expresiones matemáticas, a esta se le llama ecuación, y a las expresiones que la conforman se les denomina miembros de la ecuación, en los cuales aparecen incógnitas, valores o datos conocidos y los cuales se relacionan a través de operaciones matemáticas. Las ecuaciones son clave fundamental en la matemática por lo que las hace muy importante en todas las aplicaciones las cuales nos ayudan a entender mejor al mundo que nos rodea.

La matemática es una ciencia importante a nivel global en todas sus ramas, pero el cálculo aunque su estudio es antiguo es una rama que se esta actualizando constantemente y una de sus formas más comunes de utilizarlo es estableciendo ecuaciones que contengan una función desconocida $y = f(x)$ y su derivada, a esto se le conoce como ecuación diferencial.

Una ecuación que relaciona las derivadas de una o más variables respecto a una o más variables independientes se dice que es una ecuación diferencial(ED).

Las ecuaciones diferenciales son muy importantes y útiles para poder modelar y resolver diferentes situaciones en las que se observa un cambio continuo y también tienen una gran aplicación en diferentes ramas como la física, química, economía, biología, ingeniería por mencionar algunas.

Aunque no se tienen datos tan precisos de la historia de las ecuaciones diferenciales, se tienen e identifican como primeras contribuciones en el siglo XVII y en gran principio se debe a Isacc Newton (1642-1727) y a Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Newton aunque trabajó muy poco con ecuaciones diferenciales, su desarrollo en el cálculo y en los principios de la mecánica, dieron lugar a la base de aplicaciones de esas ramas. Leibniz aunque tuvo resultados en cálculo y denotó la notación actual de derivada $\frac{dx}{dy}$ y el símbolo de integral, también descubrió el método de separación de variables en el año de 1691 así como el método de resolución de ecuaciones lineales de primer orden. Leibniz también trabajó con los hermanos Jakob y Johann Bernoulli, sin embargo Jakob Bernoulli (1654-1705) en 1694 pudo resolver la ecuación diferencial $y' = \left[\frac{a^3}{b^2y - a^3} \right]^{\frac{1}{2}}$, así como Johann Bernoulli (1667-1748) también pudo resolver las ecuación $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{ax}$ aún y sin saber que $d(\ln(x)) = \frac{dx}{x}$. Uno de los problemas donde trabajaron juntos fue el de la braquistócrona (la curva de descenso más rápido), este problema también fue resuelto por Newton y Leibniz. Leonhard Euler (1707-1783) un brillante matemático del siglo XVIII, logró identificar las condiciones para la exactitud de las ecuaciones diferenciales de primer orden, desarrolló los factores integrales y dió solución general de las ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes y estudió ecuaciones diferenciales no homogéneas, aplicó las series de potencias para resolver ecuaciones diferenciales, procedimientos numéricos. Joseph Louis Lagrange (1736-1813), demostró la solución

general de una ecuación diferencial lineal homogénea de n -ésimo orden, trabajó ecuaciones diferenciales parciales y el cálculo de variaciones. Con el paso del tiempo se han ido descubriendo más métodos para resolver ecuaciones diferenciales hasta llegar en la actualidad con las aproximaciones numéricas, también se han desarrollado diferentes algoritmos, programas de software y computadoras cada vez más poderosas para tratar estos métodos numéricos y poder realizar las gráficas [25].

Definición 2.1.1. *Una ecuación diferencial es aquella que contiene derivadas de una función, de una o más variables. La ecuación se denomina ordinaria cuando las derivadas que aparecen en ella, corresponden a una función en una variable independiente $y(x)$.*

Las ecuaciones diferenciales se pueden clasificar de acuerdo a su orden y linealidad, a continuación se da otra definición seguida de ejemplos de ecuaciones diferenciales.

Definición 2.1.2. *Una ecuación diferencial ordinaria de orden n es una ecuación que es, o puede expresarse de la forma: $y^n = F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$, donde $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$ son evaluadas todas en x .*

En general, las ecuaciones diferenciales ordinarias o parciales tienen un orden, que lo define la derivada más alta. El grado de una ecuación diferencial, es el exponente de la derivada que determina el orden.

Ejemplos:

1. $\frac{dy}{dx} + 4xy = 8.$
2. $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = 5.$
3. $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 - x\frac{dy}{dx} + 3y = n.$
4. $\frac{d^2x}{dt^2}m = F.$
5. $\left(\frac{dw}{dt}\right)^2 + \frac{d^2w}{dt^2} = 20.$

Dando una breve explicación sobre estas ecuaciones diferenciales tenemos que:

En el ejemplo 1, aparece una función desconocida $y(x)$ (incógnita) y su primera derivada. En este caso, es una ecuación diferencial ordinaria lineal, de orden uno (respecto a la variable independiente y), de grado uno. En el ejemplo 2, aparece una función desconocida, así como su primera y su segunda derivadas. El ejemplo 2 es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden lineal, de grado uno. En el ejemplo 3, tenemos que aparece la segunda derivada de $y(x)$ aparece elevada al cuadrado y la primera y segunda derivada de la función $y(x)$, así como la función $y(x)$. Este es un ejemplo de una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden no lineal, de grado dos. En el ejemplo 4, aparece la segunda derivada de la función $x(t)$ con respecto a t . Este es un ejemplo de una ecuación diferencial ordinario lineal de segundo orden, de grado uno. En el ejemplo 5, aparece la primera y segunda derivada de la función $w(t)$. Este último, muestra una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden no lineal, de grado uno. Más ejemplos pueden ser hallados en [25].

Una ecuación diferencial se denomina parcial, cuando las derivadas que aparecen, corresponden a una función de dos o más variables independientes.

Ejemplos:

A. $\frac{\partial z}{\partial x} + 2xz \frac{\partial z}{\partial y} = 5y.$

B. $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^3 = ux.$

C. $\left(\frac{dx}{dt}\right)^3 + \frac{\partial^3 x}{\partial v^3} + 2 = \left(\frac{\partial^2 x}{\partial v \partial t}\right)^3$

A estas ecuaciones diferenciales se les denomina, ecuaciones diferenciales parciales [25].

Dando una breve descripción sobre estas ecuaciones diferenciales tenemos que:

En el ejemplo A, tenemos que aparecen la primera derivada parcial de x y y de la función $z(x, y)$. Aquí tenemos una ecuación diferencial parcial de primer orden, de grado uno.

En el ejemplo B, tenemos que aparece la segunda derivada parcial de la función $u(x, y)$ con respecto a x y y , elevada al cuadrado, y la derivada parcial de la función $u(x, y)$ con respecto a y , elevada al cubo. Es un ejemplo donde se presenta una ecuación diferencial parcial de segundo orden no lineal, de grado dos.

En el ejemplo C, tenemos que aparece la primera, segunda y tercera derivada parcial de $x(t, v)$ con respecto a t y v respectivamente. En este caso, tenemos una ecuación diferencial parcial de tercer orden no lineal, de grado tres.

Otros ejemplos de ecuaciones diferenciales son los siguientes:

- $\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)^3 - x \frac{dy}{dx} + 5y = 0$. Es una ecuación diferencial es ordinaria de segundo orden y tercer grado.
- $\frac{dy}{dx} = \frac{4}{x^2} - \frac{1}{x}y + y^2$. Es una ecuación diferencial es ordinaria de primer orden y primer grado.
- $u_t = 4u_{xx} - 3(u - 1)$. Es una ecuación diferencial es parcial de primer orden y primer grado.

En la siguiente imagen tomada de [24], nos muestra diferentes formas de poder representar una ecuación diferencial de orden n .

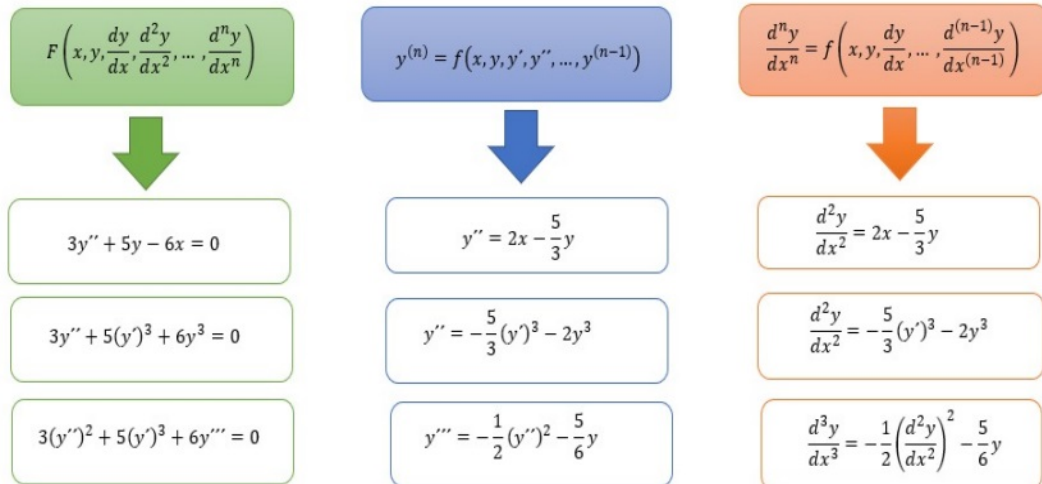


Figura 3.1: Ejemplos de representación de una ecuación diferencial.

Imagen tomada de Vergel M, 2022. Ecuaciones diferenciales y aplicaciones, recuperado de <https://sired.udenar.edu.co/7344/1/Ecuaciones-20diferenciales.pdf>.

2.2. Series de Fourier Clásicas

Para este capítulo nuestro principal objetivo es el de presentar y dar algunos conceptos ya conocidos y el de dar la definición de las series básicas de Fourier, así como el de establecer algunos hechos elementales.

Supongamos que tenemos una función con periodo 2π es decir $f(x + 2\pi) = f(x)$, y donde la gráfica de este tipo de función periódica se obtiene mediante la repetición periódica de la función en cualquier intervalo de longitud 2π , los ejemplos más comunes y representativos son las funciones senoidales y cosenoidales. Si nuestra función f es periódica en 2π veremos que se puede representar por medio de serie trigonométrica que es de la forma.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)). \quad (2.1)$$

Para esta representación de serie geométrica debemos suponer que la serie converge, y que su suma será una función periódica de periodo 2π por lo que en un principio, solo tiene sentido buscar representaciones de este tipo para funciones periódicas de periodo 2π . Esto nos indica que como la serie es convergente de algún modo, es decir, de forma uniformemente continua, puntual o en media, lo cual dependerá del problema que se esté considerando, sin embargo, es este caso, vamos a suponer que converge de manera uniforme y así poder integrar los términos de $[-\pi, \pi]$.

Entonces retomando (2.1) y con las condiciones ya mencionadas suponemos que se puede integrar término a término lo que nos da como resultado $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) dx = 0$ y $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) dx = 0$ para cualquier valor de $n = 1, 2, 3, \dots$, porque al hacer la integración de término a término da, $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = a_0\pi$, lo que nos reduce a,

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx. \quad (2.2)$$

Esto muestra que el término $\frac{1}{2}a_0$ es constante y que no es más que el valor medio de f sobre en intervalo. Análogamente se calcula el coeficiente a_n . Tomando

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)].$$

y multiplicando por $\cos(kx)$ obtenemos:

$$f(x) \cos(kx) = \frac{a_0}{2} \cos(kx) + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) \cos(kx) + b_n \sin(nx) \cos(kx)].$$

y cuando se realizan las operaciones y sustituciones correspondientes obtenemos que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos(nx) \cos(kx) dx = 0,$$

y

$$\int_{-\pi}^{\pi} a_n \sin(nx) \cos(kx) dx = 0.$$

Cuando integramos término a término la expresión (2.2) obtenemos que:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx. \quad (2.3)$$

Para b_n se aplica un procedimiento similar, solo que ahora se hará multiplicando (2.1) por $\sin(nx)$ y se integrará término a término, lo que lleva a:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx. \quad (2.4)$$

Los cálculos de los coeficientes están desarrollados en el apéndice A.

Si la función f es de clase C^1 , entonces su serie de Fourier dada en (2.1) es uniformemente convergente y los coeficientes a_n y b_n se podrán obtener a partir de f a través de las fórmulas encontradas anteriormente. [13].

De lo anterior se llega a la siguiente.

Definición 2.2.1. *Serie de Fourier*

Sea $f(x)$ una función de período 2π e integrable de $[-\pi, \pi]$ se definen sus coeficientes de Fourier por

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx, \end{aligned}$$

para toda $n = 1, 2, 3, \dots$. La serie definida de la manera siguiente:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)], \quad (2.5)$$

es llamada la serie de Fourier asociada a $f(x)$ o generada por $f(x)$.

Un problema de interés consiste en encontrar condiciones para garantizar que:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)). \quad (2.6)$$

Al realizar todos los cálculos nos muestran que si (2.1) es convergente uniformemente entonces los coeficientes a_n , b_n , se calculan en base a las expresiones ya encontradas.

Sin embargo existen condiciones menos restrictivas para que su serie de Fourier de f converja a la propia función f como se menciona a continuación.

Criterio de Dini para convergencia puntual

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 2π periódica de forma que $f|_{[-\pi, \pi]} \in L^1(-\pi, \pi)$. Sea $x \in [0, 2\pi]$ tal que existe un número positivo $\delta < \pi$, verificando que la función $g : [0, \delta] \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, definida como

$g(\tau) = \frac{f(x+\tau)-f(x)}{2}$, y sea $s(x) = g(0^+) = \lim_{\tau \rightarrow 0^+} g(\tau)$. Si el límite $s(x)$ existe y si existe la integral de Lebesgue

$$\int_0^\delta \frac{g(t) - s(x)}{t} dt,$$

para un cierto $\delta < \pi$. Entonces

$$s(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \right),$$

donde a_n y b_n son los coeficientes de Fourier de f (Teorema 11.13, pp. 389 de [3]).

Observación 1: Obsérvese que

$$f(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \right),$$

si la función f es continua en x .

Nota: Cuando hablamos de $L^1(-\pi, \pi)$, este lo definimos como $L^1(-\pi, \pi) = \{f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}\}$ tal que f es medible (en sentido de Lebesgue) y $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx$, existe y es finita.

Si tenemos una función que es periódica y queremos que se desarrolle con una serie trigonométrica que sea convergente de manera uniforme, obligatoriamente debemos tener definidos a a_n , b_n que son los coeficientes de Fourier. Sin embargo, para poder armar la serie de Fourier, no es necesario suponer que f sea continua, pero si es fundamental que en a_n , b_n existan las integrales y para esto es necesario que f sea integrable en $[-\pi, \pi]$ [9].

A continuación veamos algunos ejemplos de como calcular los coeficientes a_n , b_n de algunas funciones clásicas y utilizadas en la práctica, como la función de salto o la función valor absoluto que tienen diversas aplicaciones. Por ejemplo, la función de salto es aplicada en electrónica, en el escalón unitario de Heaviside o la señal rectangular. La función valor absoluto se aplica en la resolución de ecuaciones diferenciales [13].

Función de salto. Consideremos a la función f definida de la manera siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{en } -\pi \leq x < 0, \\ 1, & \text{en } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases} \quad (2.7)$$

Se deben calcular los coeficientes de Fourier de f :

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx,$$
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx.$$

Después de laboriosos cálculos se halla que:

$$a_n = 0.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi n} [2 - 2 \cos(-\pi n)].$$



Figura 2.1: La gráfica de la función de salto está dada en rojo y en azul la gráfica de su serie de Fourier truncada con $N = 10$ (azul).

Por lo tanto, la serie de Fourier para la función de salto es

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi n} [2 - 2 \cos(-\pi n)] \sin(nx) \right).$$

Los detalles de los cálculos están desarrollados en el Apéndice B (los coeficientes a_n son cero ya que la función es impar).

Función valor absoluto

Sea

$$f(x) = |x|, \text{ con } -\pi \leq x \leq \pi. \quad (2.8)$$

Dada la función valor absoluto calcularemos los coeficientes de Fourier:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx.$$

Después de realizar los cálculos se halla que:

$$a_0 = \pi,$$

$$a_n = \frac{2}{n^2} [((-1)^n - 1)], \quad n = 1, 2, \dots$$

$$b_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Por lo tanto, la serie de Fourier para la función valor absoluto es

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \cos(n\theta).$$

Los cálculos de los coeficientes están desarrollados en la parte de la Apéndice C.

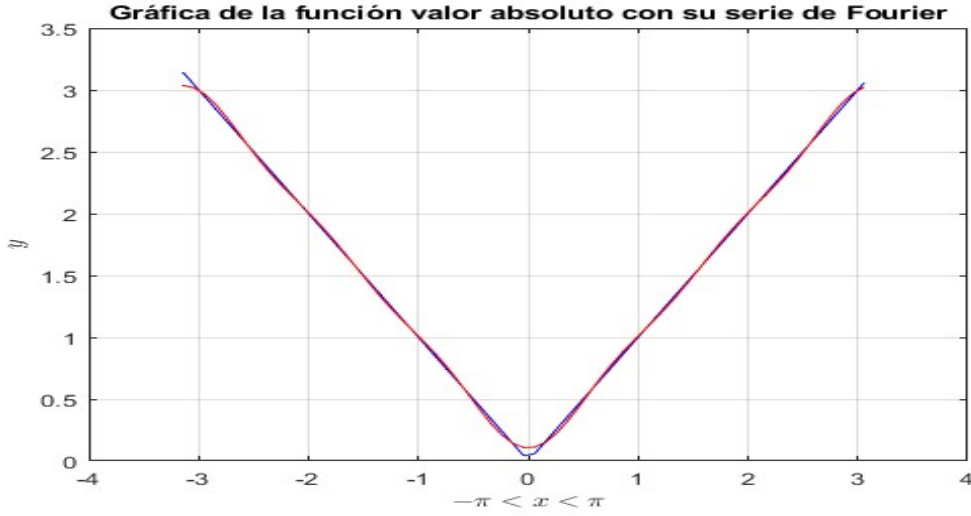


Figura 2.2: La gráfica de la función valor absoluto en azul y en rojo la gráfica de su serie de Fourier truncada con $N = 5$.

2.3. Solución de Ecuaciones Diferenciales Clásicas usando series de Fourier

En esta parte se hallará la solución de ecuaciones diferenciales usando series de Fourier. Esto se ilustra en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 2.1:

Hallar la solución de la ecuación diferencial $y'' + y = 0$ por serie de Fourier.

Para hallar la solución se propone que

$$y = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

La primera derivada está dada por: $y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-na_n \sin(nx) + nb_n \cos(nx))$ y la segunda derivada por

$$y''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-n^2 a_n \cos(nx) - n^2 b_n \sin(nx)).$$

Ahora sustituyendo en la ecuación diferencial, obtenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-n^2 a_n \cos(nx) - n^2 b_n \sin(nx)) + \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) = 0.$$

Si agrupamos los términos $a_n \cos(nx)$ y $b_n \sin(nx)$ obtenemos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx)(1 - n^2) + b_n \sin(nx)(1 - n^2)) + \frac{a_0}{2} = 0.$$

Ecuaciones Diferenciales y su solución por series de Fourier
2.3 Solución de Ecuaciones Diferenciales Clásicas usando series de Fourier

dada esta ecuación tenemos que $a_0 = 0$. Además, los coeficientes $(1-n^2)a_n = 0$ y $(1-n^2)b_n = 0$ de donde entonces $a_n = 0$ y $b_n = 0$ si $n \neq 1$, y cuando $n = 1$ tenemos que $a_1 \in \mathbb{R}$ y $b_1 \in \mathbb{R}$, lo que da como solución.

$$y(x) = a_1 \cos(x) + b_1 \sin(x).$$

Ejemplo 2.2: Hallar solución de la ecuación diferencial $y'' - 2y' + y = 0$ por serie de Fourier. Sea la solución $y = A \cos(x) + B \sin(x)$ entonces aplicando la solución por serie de Fourier tenemos que:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

obteniendo la primera derivada tenemos que:

$$y'(x) = 0 + \sum_{n=1}^{\infty} (-na_n \sin(nx) + nb_n \cos(nx)),$$

obteniendo la segunda derivada tenemos que:

$$y''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-n^2 a_n \cos(nx) - n^2 b_n \sin(nx)).$$

Ahora sustituyendo en la ecuación diferencial, obtenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-n^2 a_n \cos(nx) - n^2 b_n \sin(nx)) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-na_n \sin(nx) + nb_n \cos(nx)) +$$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) = 0.$$

Si agrupamos los términos $a_n \cos(nx)$ y $b_n \sin(nx)$ obtenemos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx)(1 - n - n^2) + b_n \sin(nx)(1 + n - n^2)) + \frac{a_0}{2} = 0.$$

Dada esta ecuación tenemos que si los coeficientes $(1 - n - n^2)a_n = 0$ y $(1 + n - n^2)b_n = 0$, entonces $\frac{a_0}{2} = 0$, lo que nos da como resultado que $a_0 = 0$.

Si tomamos el caso de que $n \neq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $n \neq \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ entonces obtenemos que $a_n = 0$ y $b_n = 0$.

Sin embargo cuando $n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $n = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ tenemos que $a_1 \in \mathbb{R}$ y $b_1 \in \mathbb{R}$ esto nos da como solución.

$$y(x) = a_1 \cos(x) + b_1 \sin(x).$$

Por lo tanto, tenemos que $A = a_1$ y $B = b_1$.

Ejemplo 2.3: Encuentre la solución por serie de Fourier para la ecuación diferencial $y'' + 2y = 3x$ con las condiciones de contorno $y(0) = y(1) = 0$. Sea $f(x) = 3x$ y sabemos que

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)].$$

con

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx. \end{aligned}$$

Tomando $f(x) = 3x$ y sustituyendo en a_0 se obtiene

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 3x dx = \frac{3}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx = \frac{3}{\pi} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{3}{\pi} \left[\frac{\pi^2}{2} - \frac{(-\pi)^2}{2} \right] = \frac{3}{\pi} \left[\frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{2} \right] = \frac{3}{\pi} [0] = 0.$$

Tomando $f(x) = 3x$ y sustituyendo en a_n :

$$a_n = \frac{3}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos(nx) dx.$$

Al integrar por partes hacemos:

$$u = x, \quad du = dx, \quad dv = \cos(nx), \quad v = \frac{1}{n} \sin(nx).$$

Así,

$$a_n = \frac{3}{\pi} \left[\frac{x}{n} \sin(nx) \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{n} \sin(nx) dx \right].$$

Después algunos cálculos, se halla

$$a_n = \frac{3}{\pi} \left[\frac{x}{n} \sin(nx) \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n^2} \cos(nx) \Big|_{-\pi}^{\pi} \right],$$

de donde

$$a_n = \frac{3}{\pi} \left[\frac{x}{n} (\sin(n\pi) - \sin(-n\pi)) + \frac{1}{n^2} (\cos(n\pi) - \cos(-n\pi)) \right].$$

Después de evaluar se encuentra que

$$a_n = 0.$$

Tomando $f(x) = 3x$ y sustituyendo en b_n se obtiene

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 3x \sin(nx) dx = \frac{3}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx) dx.$$

Al integrar por partes hacemos:

$$u = x, \quad du = dx, \quad dv = \sin(nx) dx, \quad v = -\frac{1}{n} \cos(nx).$$

Entonces

$$b_n = \frac{3}{\pi} \left[-\frac{x}{n} \cos(nx) \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} -\frac{1}{n} \cos(nx) dx \right] = \frac{3}{\pi} \left[-\frac{x}{n} \cos(nx) \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} \sin(nx) \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} \right],$$

y se obtiene

$$b_n = \frac{3}{\pi} \left[-\frac{2\pi}{n} (-1)^n + 0 \right] = \frac{6}{n} (-1)^{(n+1)}.$$

Por lo tanto, al sustituir el resultado obtenido en (2.1) se llega a la solución:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{6}{n} (-1)^{(n+1)} \sin(nx) \right].$$

Capítulo 3

Operadores fraccionarios y ecuaciones diferenciales fraccionarias.

3.1. Operadores Fraccionarios

En este capítulo de operadores fraccionarios podremos observar y entender que la derivada y la integral básica se pueden generalizar con las integrales y derivadas fraccionarias. sin embargo aún no tenemos una definición generalizada sobre el qué son las derivadas e integrales fraccionarias como lo menciona (Lombardero, 2014) [12]. Dentro de los operadores fraccionarios que estaremos mencionando en este capítulo, tienen la peculiaridad de poder facilitar su extensión con continuidad al semiplano $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathbb{R}(z) > 0\}$, donde $\mathbb{R}(z)$ es la parte real de z y debe ser mayor a cero [12].

3.2. Derivadas fraccionarias

Para llegar a la definición formal de derivada fraccionaria, se consideraron en principio los resultados conocidos, empezando con el desarrollo de n -ésima derivada con números naturales dada por Lacroix y la cual fue tomada por Lioville como su punto de inicio para poder hacer una extensión a diferentes ordenes de la derivada [22].

Para motivar la definición de derivada fraccionaria, se consideró a la función exponencial. Si tomamos la función e^{ax} y le aplicamos la n -ésima derivada entonces obtenemos que $D^n e^{ax} = a^n e^{ax}$ para $n \in \mathbb{N}$. En este punto nos podemos preguntar ¿pero que pasa si en vez de tomar n como natural, lo tomamos como $n = \frac{1}{2}$, o si fuera un número racional? Claramente la respuesta a esta pregunta es fundamental para la definición buscada.

Consideremos ahora a la función $f(x) = x^p$ con p entero. Para $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{df}{dx} = px^{(p-1)},$$

y aplicando las derivadas repetidamente se va obteniendo

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = (p)(p-1)x^{(p-2)},$$

$$\frac{d^3 f}{dx^3} = (p)(p-1)(p-2)x^{(p-3)},$$

$$\frac{d^4 f}{dx^4} = (p)(p-1)(p-2)(p-3)x^{(p-4)},$$

de donde obtenemos la derivada n -ésima:

$$\frac{d^n f}{dx^n} = (p)(p-1)(p-2)(p-3)\dots(3)(2)(1)x^{(p-n)}.$$

Lo que es igual a:

$$\frac{d^n f}{dx^n} = \frac{p!}{(p-n)!} x^{(p-n)}.$$

Sin embargo, al intentar cambiar n por algún número cualquiera α tendremos que basarnos y apoyarnos en una función llamada Gamma (definida más adelante), y así poder darle un valor a $p!$ y $(p-n)!$ cuando estos no sean números naturales, esta función fue definida por Legendre, quién fue un físico-matemático que hizo varias aportaciones como en la teoría de números en la teoría del potencial, funciones elípticas, resolución de ecuaciones indeterminadas de segundo grado [22], [23].

Definición 3.2.1. *Función Gamma:*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{(z-1)} dt, \quad \text{con } z \in \mathbb{C} \text{ y } \Re(z) > 0.$$

Esta función tiene la propiedad de que para un número entero z :

$$\Gamma(z+1) = z!.$$

Por otra parte, la n -ésima derivada de $f(x) = x^p$ está dada por

$$\frac{d^n f}{dx^n} = \frac{p!}{(p-n)!} x^{(p-n)}, \quad (3.1)$$

que en términos de la función Gamma se expresa en la forma [5]:

$$\frac{d^n f}{dx^n} = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-n+1)} x^{(p-n)}.$$

Una vez que tenemos la función Gamma, podemos reemplazar a n por un número cualquiera α y la expresión que se obtiene es:

$$\frac{d^\alpha f}{dx^\alpha} = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)} x^{(p-\alpha)}.$$

Una forma de tratar de entender esto es hacer una sustitución, si cambiamos a α por $\frac{1}{2}$ se obtiene lo siguiente:

$$\frac{d^{\frac{1}{2}} f}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+\frac{1}{2})} x^{(p-\frac{1}{2})}.$$

Este resultado es el que obtuvo Lacroix y expresa la $\frac{1}{2}$ derivada de $f(x) = x^p$.

También Lacroix cuando tomó a $f(x) = x$ obtuvo el siguiente resultado:

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}f}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{3}{2})}x^{(\frac{1}{2})} = \frac{1!}{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}x^{(\frac{1}{2})} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}.$$

Por otra parte, si una función puede ser desarrollada mediante una serie de Taylor con potencia x entonces podríamos calcular la derivada fraccionaria [18]. Consideremos la serie de Taylor para la función exponencial:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n.$$

Si aplicamos esta serie a la n -ésima derivada aplicada a la función Gamma entonces obtenemos:

$$\frac{d^n f}{de^x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-\alpha+1)} x^{(n-\alpha)}$$

por propiedades de la función Gamma tenemos que:

$$\frac{d^n f}{de^x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{n!}{\Gamma(n-\alpha+1)} x^{(n-\alpha)}.$$

Por lo tanto,

$$\frac{d^n f}{de^x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)} x^{(n-\alpha)}.$$

Si consideramos

$$n = [\alpha] + 1.$$

tenemos:

$$D^{(\alpha)}\varphi(x) = D^n D^{-(n-\alpha)}\varphi(x).$$

Lo que es equivalente a:

$$D^{(\alpha)}\varphi(x) = D^n I^{(n-\alpha)}\varphi(x).$$

Para poder trabajar en las derivadas fraccionarias también es necesario el uso de operadores fraccionarios y a continuación se describen algunos. Empezaremos definiendo la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville en un intervalo finito de la recta y mencionaremos algunas de sus propiedades de funciones continuas [1], [21].

Definición 3.2.2. (de Riemann Liouville): Si n es un entero positivo con $\alpha \in [n-1, n]$, la derivada α -ésima de f de orden fraccionario α está definida por:

$$D_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{f(x)}{(t-x)^{\alpha-n+1}} dx.$$

Definición 3.2.3. (de Elzaki) Dado el conjunto de funciones

$$A = \left\{ f(t) : \exists M, k_1, k_2 > 0, |f(t)| < M e^{\frac{|t|}{k_j}}, t \in (-1)^j x[0, \infty] \right\}$$

La transformada de Elzaki se define como:

$$E[f(t)](v) = T(v) = v \int_0^\infty f(t) e^{-\frac{t}{v}} dt, \quad t \geq 0, k_1 \leq v \leq k_2.$$

La inversa de la transformada de Elzaki se denota por: $E^{-1}[T(v)] = f(t), t \geq 0$.

Para el caso en que α es un número racional

$$E[t^\alpha] = \Gamma(\alpha + 1) v^{\alpha+2}.$$

Otra definición muy útil e importante es la de Caputo que a continuación se enuncia:

Definición 3.2.4. La derivada de Caputo de orden α se define como

$${}_a^c D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-u)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(u) du, \quad n-1 < \alpha \leq n.$$

Definición 3.2.5. La transformada de Elzaki de la derivada fraccionaria de Caputo para $\alpha = 0$ se define como:

$$E[{}_a^c D_t^\alpha f(t)] = \frac{T(v)}{v^\alpha} - \sum_{k=0}^{n-1} v^{(k-\alpha+2)} f^{(k)}(0), \quad n-1 < \alpha \leq n$$

Cuando Riemann desarrolló la teoría del cálculo fraccionario, buscó una generalización de la serie de Taylor, en la que definió el coeficiente diferencial n -ésimo de una función $f(x)$ como un coeficiente que acompaña a k^n en la expansión de $f(x+k)$ con las potencias enteras de h . Con esta idea se trata de generalizar la definición de potencias no enteras de donde:

$$f(x+k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{n+\alpha} (\delta_x^{n+\alpha} f)(x) k^{(n+\alpha)}.$$

Esto tiene validez para $n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}$, el factor $C_{n+\alpha}$ se determina por la condición $\delta^\beta(\delta^\alpha f) = \delta^{\beta+\alpha}(f)$ y al hacer eso se determinó que era $\frac{1}{\Gamma(n+\alpha+1)}$. Riemann también tuvo la idea de derivar esta expresión con $-\alpha$ y obteniendo:

$$\delta^\alpha(f) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_x^k (x-t)^{(-1-\alpha)} f(t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} K_n \frac{x^{(-n-\alpha)}}{\Gamma(-n-\alpha+1)},$$

donde k y K_n son constantes. También Aleksey Vasilievich Letnikov y Anton Karl Grünwald hicieron una propuesta de derivada fraccionaria empezando por la definición de derivada clásica donde iteraron n veces el operador, obteniendo [10]:

$$D^n f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(x - kh), \text{ con } n \in \mathbb{N}.$$

De estos se tiene que:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(n-k+1)}.$$

De lo anterior, obtuvieron la derivada fraccionaria de orden $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$D_a^\alpha f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\frac{x-a}{h}} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(x - kh),$$

$$D_a^\alpha f(x) = \lim_{h \rightarrow \infty} \left(\frac{x-a}{n} \right)^{-\alpha} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{\alpha}{k} f \left[\left(x - k \frac{x-a}{n} \right) \right],$$

donde $a < x$.

Dado lo anterior se quiere buscar que las diferentes definiciones de derivada fraccional satisfagan las propiedades habituales de la derivada estándar. La única propiedad heredada por todas las definiciones de derivada fraccionaria es la propiedad de linealidad. Sin embargo, los siguientes son los contratiempos de una u otra definición [11], [1]:

- (i) La derivada de Riemann-Liouville no se satisface $D_a^\alpha(1) = 0$ ($D_a^\alpha(1) = 0$ para la derivada de Caputo), si α no es un número natural.
- (ii) No satisface la regla del producto $D_a^\alpha(fg) = fD_a^\alpha(g) + gD_a^\alpha(f)$.
- (iii) No se satisface la regla del cociente $D_a^\alpha\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gD_a^\alpha(f) - fD_a^\alpha(g)}{g^2}$.
- (iv) No satisface la regla de la cadena $D_a^\alpha(fog)(t) = f^{(\alpha)}g(t)g^{(\alpha)}(t)$.
- (v) No se satisface en general $D^\alpha D^\beta f = D^{\alpha+\beta} f$.
- (vi) La definición de Caputo se aplica solo para funciones derivables.
- (vii) Sea $T(\lambda) = 0$ para todas las funciones constantes $f(t) = \lambda$.

Debido a la situación y motivados por las dificultades que presentan estos operadores fraccionarios se introduce una definición de derivada fraccionaria que ayuda a simplificar los cálculos y la cual cumple con cuatro de las primeras propiedades mencionadas anteriormente y la cual tiende a ser una extensión natural de la derivada común, ya que coincide con las derivadas fraccionarias conocidas de los polinomios [11].

En una nueva definición se introdujo la denominada **derivada fraccionaria conformable**.

Entonces para la función f , la derivada fraccionaria conformable de orden $\alpha \in (0, 1]$ se define por [9]:

Definición 3.2.6.

$$T_\alpha(f)(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{(f^{[\alpha]-1})(t + \epsilon t^{[\alpha]-\alpha}) - f^{([\alpha]-1)}(t)}{\epsilon},$$

donde $[\alpha]$ es la parte entera de α . Llamaremos T_α a la derivada fraccionaria de f de orden α y que denotaremos como $f^{[\alpha]}(t)$ para $T_\alpha(f)(t)$.

La nueva definición satisface:

1. $T_\alpha(af + bg) = aT_\alpha(f) + bT_\alpha(g)$ para todo $a, b \in \mathbb{R}$.
2. $T_\alpha(\lambda) = 0$ para toda función constante $f(t) = \lambda$, además para $\alpha \in (0, 1]$, f y g son α -diferenciable en el punto t con $g(t) \neq 0$.
3. $T_\alpha(fg) = fT_\alpha(g) + gT_\alpha(f)$.
4. $T_\alpha\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gT_\alpha(f) - fT_\alpha(g)}{g^2}$.

También se enumeran las derivadas fraccionarias de algunas funciones, esto con el fin de poder comparar algunos resultados de la nueva definición con la definición tradicional de la derivada [10]:

1. $T_\alpha(t^p) = pt^{p-\alpha}$.
2. $T_\alpha(\sin_\alpha t^\alpha) = \cos_\alpha t^\alpha$.
3. $T_\alpha(\cos_\alpha t^\alpha) = -\sin_\alpha t^\alpha$.
4. $T_\alpha(e^{\frac{1}{\alpha}t^\alpha}) = e^{\frac{1}{\alpha}t^\alpha}$.

3.3. Ecuaciones Diferenciales Fraccionarias

3.3.1. Motivación y definiciones básicas

Si trabajamos con cálculo básico los métodos de derivación e integración nos hacen que de una u otra forma en algún momento tengamos que trabajar con ciertos conceptos más avanzados como lo son las ecuaciones diferenciales y eso mismo nos sucede en el cálculo fraccionario, pues también nos induce al concepto de ecuaciones diferenciales pero fraccionarias (EDF) [12].

Cuando tenemos relacionados uno, dos o más operadores fraccionarios como la integral o derivada fraccionaria de Riemann-Liouville, la derivada fraccionaria de Caputo u otros y estos están aplicados a cualquier función desconocida f , a esta se le conoce como ecuación diferencial fraccionaria [12].

En parte de la teoría de ecuaciones diferenciales si tenemos una ecuación de la forma $y^{(\alpha)}(x) = f[x, y(x), \dots, y^{(\alpha-1)}(x)]$ diremos que es una ecuación de orden α y donde a x se le conoce como variable independiente; también llamamos problema con valor inicial a una ecuación diferencial de orden α con α condiciones iniciales. Dada esta idea podemos decir que una ecuación diferencial es fraccionaria si en al menos una de sus derivadas es de orden fraccionario y su orden se va a definir como el menor entero mayor o igual que todas las derivadas que aparecen en la ecuación diferencial [17].

En las ecuaciones diferenciales fraccionarias las condiciones iniciales van a depender del tipo de derivada que estemos trabajando. Por ejemplo, para una ecuación diferencial fraccionaria de orden α se necesita que tengan $[\mathbb{R}(\alpha)] + 1$ condiciones iniciales para ser resuelta, donde α puede ser complejo o real [18].

Cabe mencionar que se tendrán diferentes EDF porque existen diferentes operadores fraccionario cada cual con su significado [12].

En la teoría de EDF sucede lo mismo que en las ecuaciones diferenciales tradicionales; éstas se dividen en lineales, homogéneas, no homogéneas y con coeficientes constantes o variables.

Las siguientes definiciones pueden ser halladas en [16].

Definición 3.3.1. Una ecuación diferencial fraccionaria de orden α y $(\mathbb{R}(\alpha) > 0)$ es una relación del tipo

$$(D_a^\alpha y)(x) = f[x, y(x), (D_a^{\alpha_1} y)(x), (D_a^{\alpha_2} y)(x), \dots, (D_a^{\alpha_{m-1}} y)(x)] \quad (3.2)$$

donde $y(x)$ es una función compleja desconocida de dominio real, $f[x, y, y_1, y_2, \dots, y_{m-1}]$ es una función conocida y $(D_a^{\alpha_k} (k = 1, 2, \dots, m-1))$ son operadores diferenciales fraccionarios verificando que $0 < \mathbb{R}(\alpha_1) < \mathbb{R}(\alpha_2) < \dots < \mathbb{R}(\alpha_{m-1}) < \mathbb{R}(\alpha)$ y $m \geq 2$.

Nota: En la definición anterior se dan varias condiciones para $(D_a^{\alpha_k})$ que deben ser operadores de tipo diferencial, lo cual también da por entendido que se representan derivadas fraccionarias del mismo tipo (Riemann-Liouville, Caputo, etc.) y donde se tiene un límite inferior de integración a en común [12].

Definición 3.3.2. Se denomina solución de la ecuación diferencial fraccionaria anterior a cualquier función compleja de variable real $y(x)$ que cumpla con la igualdad (3.2).

Definición 3.3.3. Una ecuación diferencial fraccionaria lineal de orden α y $(\mathbb{R}(\alpha) > 0)$ es una relación del tipo,

$$(D_a^\alpha y)(x) = a_0(x)y(x) + \sum_{k=1}^{m-1} a_k(x)(D_a^{\alpha_k} y)(x) + b(x) \quad (3.3)$$

donde $y(x)$ es una función compleja desconocida de dominio en los reales, $a_k(x) (k = 1, 2, \dots, m-1)$ y $b(x)$ son funciones complejas conocidas y $(D_a^{\alpha_k} (k = 1, 2, \dots, m-1))$ son operadores diferenciales fraccionarios verificando que $0 < \mathbb{R}(\alpha_1) < \mathbb{R}(\alpha_2) < \dots < \mathbb{R}(\alpha_{m-1}) < \mathbb{R}(\alpha)$ y $m \geq 2$.

En este caso tenemos que si las funciones $a_k(x) (k = 1, 2, 3, \dots, m-1)$ y $b(x)$ son constantes se dice que la ecuación diferencial es de coeficientes constantes y en el caso que ocurra que $b(x) = 0$ se denomina ecuación diferencial fraccionaria lineal homogénea.

Definición 3.3.4. Al utilizar derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville y queremos encontrar la solución $y(x)$ de la ecuación diferencial fraccionaria:

$$(D_a^\alpha y)(x) = f[x, y(x), (D_a^{\alpha_1} y)(x), (D_a^{\alpha_2} y)(x), \dots, (D_a^{\alpha_{m-1}} y)(x)]$$

restringida a las n condiciones $(D_a^{\alpha-k} y)(a) = b_k$, con $b_k \in \mathbb{C} (k = 1, 2, \dots, n)$ donde $n = [\mathbb{R}(\alpha)] + 1$ si $\alpha \notin \mathbb{N}$ y $n = \alpha$ si $\alpha \in \mathbb{N}$, decimos que estamos ante un problema de tipo Cauchy con derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville.

Definición 3.3.5. *En el caso de utilizar las derivadas fraccionarias de Caputo y queremos encontrar la solución $y(x)$ de la ecuación diferencial fraccionaria.*

$$({}^c D_a^\alpha y)(x) = f[x, y(x), ({}^c D_a^{\alpha_1} y)(x), ({}^c D_a^{\alpha_2} y)(x), \dots, ({}^c D_a^{\alpha_{m-1}} y)(x)]$$

restringida a las n condiciones:

$$\left(\frac{d^k}{dx^k} y \right) (a) = b_k, b_k \in \mathbb{C}, (k = 0, 1, 2, \dots, n-1),$$

donde $n = [\mathbb{R}(\alpha)] + 1$, decimos que estamos ante un problema tipo Cauchy con derivadas fraccionarias de Caputo.

Capítulo 4

Series de Fourier y Ecuaciones Diferenciales Fraccionarias

4.1. Definición y ejemplos

Las series de Fourier tienen una gran importancia en el área de las ciencias. Se pueden aplicar para resolver ecuaciones diferenciales y para encontrar alguna series numéricas. Asimismo, las series de Fourier Fraccionarias (SFF) tienen muchas aplicaciones en física e ingeniería [1].

Para definir las SFF, consideremos lo siguiente: $0 < \alpha \leq 1$ y $\varphi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\varphi(t) = \frac{t^\alpha}{\alpha}$ y $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ sea cualquier función. Sea $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(t) = g(\varphi(t))$. Por ejemplo si: $g(t) = \cos(t)$, entonces $f(t) = \cos\left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)$. Con esto se tienen las siguientes definiciones que pueden ser halladas en [1]:

Definición 4.1.1. Una función f es α periódica con periodo p si para todo $t \in [0, \infty)$ se cumple:

$$f(t) = g(\varphi(t)) = g\left(\varphi(t) + \frac{p^\alpha}{\alpha}\right).$$

Definición 4.1.2. Dos funciones f, h son llamadas α ortogonales en $[0, b]$ si:

$$\int_0^b \frac{f(t)h(t)}{t^{1-\alpha}} dt = 0.$$

Definición 4.1.3. Sea $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ continua a trozos, α -periódica y con periodo p entonces tenemos que:

i) Los α coeficientes de Fourier de f asociados al coseno son:

$$a_n = \frac{2\alpha}{p^\alpha} \int_0^p f(t) \cos\left(n \frac{t^\alpha}{\alpha}\right) \frac{dt}{t^{1-\alpha}}, \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

ii) Los α coeficientes de Fourier de f asociados al seno son:

$$b_n = \frac{2\alpha}{p^\alpha} \int_0^p f(t) \sin\left(n \frac{t^\alpha}{\alpha}\right) \frac{dt}{t^{1-\alpha}}, \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

Por ejemplo, los coeficientes de la función $f(t) = \cos(2\sqrt{t})$ son: $a_1 = 1$ y $a_n = 0$, para todo $n \neq 1$, donde $p = (\alpha 2\pi)^{\frac{1}{\alpha}}$ y $\alpha = \frac{1}{2}$.

Definición 4.1.4. Sea $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ continua a trozos, α -periódica y con periodo p . La serie de Fourier f α -fraccional asociada al intervalo $[0, \pi]$ está dada por:

$$S(f)(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(n \frac{t^\alpha}{\alpha}\right) + b_n \sin\left(n \frac{t^\alpha}{\alpha}\right).$$

Los ejemplos 1, 2, y 3 fueron tomados de [4]. Para mejor comprensión del lector, se incluyeron más detalles que los que aparecen en el mencionado artículo.

Proposición 1: Las funciones $\cos\left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)$ y $\cos\left(2\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)$ son α -ortogonal en $\left[0, (\alpha 2\pi)^{\frac{1}{\alpha}}\right]$.

Demostración. Hagamos

$$I = \int_0^{(a2\pi)^{\frac{1}{\alpha}}} \frac{\cos\left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right) \cos\left(2\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)}{t^{1-\alpha}} dt.$$

Haciendo el cambio de variable $\frac{t^\alpha}{\alpha} = x$, se halla que $dx = \frac{\alpha t^{\alpha-1}}{\alpha} = t^{\alpha-1} dt = \frac{1}{t^{1-\alpha}} dt$. Cuando $t = 0$, $x = 0$ y cuando $t = (a2\pi)^{\frac{1}{\alpha}}$, $x = 2\pi$. se tiene:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \cos(x) \cos(2x) dx \\ &= \int_0^{2\pi} \cos(x) (\cos^2(x) - \sin^2(x)) dx \\ &= \int_0^{2\pi} \cos(x) (1 - \sin^2(x) - \sin^2(x)) dx \\ &= \int_0^{2\pi} \cos(x) (1 - 2\sin^2(x)) dx \\ &= \int_0^{2\pi} \cos(x) - 2\sin^2(x) \cos(x) dx \\ &= \int_0^{2\pi} \cos(x) dx - \int_0^{2\pi} 2\sin^2(x) \cos(x) dx \\ &= \sin(x) \Big|_0^{2\pi} - 2 \int_0^{2\pi} \sin^2(x) \cos(x) dx \\ &= \sin(2\pi) - \sin(0) - 2 \int_0^{2\pi} \sin^2(x) \cos(x) dx \\ &= -2 \int_0^{2\pi} \sin^2(x) \cos(x) dx. \end{aligned}$$

Para calcular la última integral, se hace el cambio de variable $p = \sin(x)$, $dp = \cos(x)$. Así,

$$\begin{aligned} I &= 2 \int_0^{2\pi} p^2 dp \\ &= -2 \frac{p^3}{3} \Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{-2}{3} [\sin^3(x)] \Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{-2}{3} (\sin^3(2\pi) - \sin^3(0)) = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\cos\left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)$ y $\cos\left(2\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)$ son α -ortogonales.

Ejemplo 4.1:

Sea

$$f_1(t) = \begin{cases} 2\sqrt{t}, & \text{si } 0 \leq t \leq (\frac{\pi}{2})^2, \\ 2\sqrt{t} - 2\pi, & \text{si } (\frac{\pi}{2})^2 < t \leq \pi^2, \end{cases}$$

con $p = \pi^2$ en el intervalo $[0, \pi^2]$, entonces para $\alpha = \frac{1}{2}$ se tiene

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2\alpha}{p^\alpha} \int_0^p f_1(t) \cos\left(n \frac{t^\alpha}{\alpha}\right) \frac{dt}{t^{1-\alpha}} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi^2} f_1(t) \cos(n2\sqrt{t}) \frac{dt}{\sqrt{t}}. \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{(\frac{\pi}{2})^2} 2\sqrt{t} \cos(n2\sqrt{t}) \frac{dt}{\sqrt{t}} + \frac{1}{\pi} \int_{(\frac{\pi}{2})^2}^{\pi^2} (2\sqrt{t} - 2\pi) \cos(n2\sqrt{t}) \frac{dt}{\sqrt{t}}. \end{aligned}$$

Usando el cambio de variable de $\theta = 2\sqrt{t}$, $d\theta = \frac{dt}{\sqrt{t}}$, $\theta = 0$ si $t = 0$ y $\theta = \pi$, se halla que $t = (\frac{\pi}{2})^2$ y $\theta = 2\pi$ si $t = \pi^2$. De aquí,

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \theta \cos(n\theta) d\theta + \int_\pi^{2\pi} (\theta - 2\pi) \cos(n\theta) d\theta = 0.$$

Similarmente,

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \theta \sin(n\theta) d\theta + \int_\pi^{2\pi} (\theta - 2\pi) \sin(n\theta) d\theta = \frac{4}{2n+1} - \frac{1}{n^2}.$$

De lo anterior se llega a que

$$S(f_1)(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{2n+1} - \frac{1}{n^2} \right) \sin(2n\sqrt{t}).$$

El siguiente ejemplo es original de este trabajo.

Ejemplo 4.2:

Sea

$$f_2(t) = \begin{cases} \cos(\sqrt{t}), & \text{si } 0 \leq t \leq (\frac{\pi}{2})^2, \\ \cos(\sqrt{t}) - 2\pi, & \text{si } (\frac{\pi}{2})^2 < t \leq \pi^2, \end{cases}$$

con $p = \pi^2$ en el intervalo $[0, \pi^2]$, entonces para $\alpha = \frac{1}{2}$ se obtiene

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2\alpha}{p^\alpha} \int_0^p f_2(t) \cos\left(n \frac{t^\alpha}{\alpha}\right) \frac{dt}{t^{1-\alpha}} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi^2} f_2(t) \cos(n2\sqrt{t}) \frac{dt}{\sqrt{t}}. \end{aligned}$$

Entonces

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{(\frac{\pi}{2})^2} \cos \sqrt{t} \cos(n2\sqrt{t}) \frac{dt}{\sqrt{t}} + \frac{1}{\pi} \int_{(\frac{\pi}{2})^2}^{\pi^2} (\cos \sqrt{t} - 2\pi) \cos(n2\sqrt{t}) \frac{dt}{\sqrt{t}}.$$

Usando el cambio de variable de $\theta = \sqrt{t}$, obtenemos $2d\theta = \frac{dt}{\sqrt{t}}$, $\theta = 0$ si $t = 0$ y $\theta = \pi$ entonces $t = (\frac{\pi}{2})^2$, y $\theta = 2\pi$ si $t = \pi^2$. Por lo tanto la integral a_n se convierte en

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos(n\theta) d\theta + \int_\pi^{2\pi} \cos\left(\frac{\theta}{2} - 2\pi\right) \cos(n\theta) d\theta. \\
 a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{1}{2} \left[\cos\left(\frac{\theta}{2} - n\theta\right) + \cos\left(\frac{\theta}{2} + n\theta\right) \right] d\theta \\
 &\quad \frac{1}{\pi} \int_\pi^{2\pi} \frac{1}{2} \left[\cos\left(\frac{\theta}{2} - 2\pi - n\theta\right) + \cos\left(\frac{\theta}{2} - 2\pi + n\theta\right) \right] d\theta \\
 a_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \left[\cos\left(\theta\left(\frac{1}{2} - n\right)\right) + \cos\left(\theta\left(\frac{1}{2} + n\right)\right) \right] d\theta \\
 &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_\pi^{2\pi} \left[\cos\left(\theta\left(\frac{1}{2} - n\right) - 2\pi\right) + \cos\left(\theta\left(\frac{1}{2} + n\right) - 2\pi\right) \right] d\theta. \\
 a_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \cos\left(\theta\left(\frac{1}{2} - n\right)\right) d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \cos\left(\theta\left(\frac{1}{2} + n\right)\right) d\theta \\
 &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_\pi^{2\pi} \cos\left(\theta\left(\frac{1}{2} - n\right) - 2\pi\right) d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_\pi^{2\pi} \cos\left(\theta\left(\frac{1}{2} + n\right) - 2\pi\right) d\theta.
 \end{aligned}$$

Usando los cambios de variable en cada integral obtenemos que: $u = \theta(\frac{1}{2} - n)$ derivando, $\frac{2}{1-2n} du = d\theta$, $v = \theta(\frac{1}{2} + n)$ derivando, $\frac{2}{1+2n} dv = d\theta$, $r = \theta(\frac{1}{2} - n)$ derivando, $\frac{2}{1-2n} dr = d\theta$, $s = \theta(\frac{1}{2} + n)$ derivando, $\frac{2}{1+2n} ds = d\theta$, obtenemos que:

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \cos(u) \frac{2}{1-2n} du + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \cos(v) \frac{2}{1+2n} dv \\
 &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_\pi^{2\pi} \cos(r) \frac{2}{1-2n} dr + \frac{1}{2\pi} \int_\pi^{2\pi} \cos(s) \frac{2}{1+2n} ds. \\
 a_n &= \frac{1}{\pi(1-2n)} \int_0^\pi \cos(u) du + \frac{1}{\pi(1+2n)} \int_0^\pi \cos(v) dv + \\
 &\quad \frac{1}{\pi(1-2n)} \int_\pi^{2\pi} \cos(r) dr + \frac{1}{\pi(1+2n)} \int_\pi^{2\pi} \cos(s) ds. \\
 a_n &= \frac{1}{\pi(1-2n)}(0) + \frac{1}{\pi(1+2n)}(0) + \frac{1}{\pi(1-2n)}(0) + \frac{1}{\pi(1+2n)}(0) = 0. \\
 b_n &= \frac{2\alpha}{p^\alpha} \int_0^p f_3(t) \cos\left(n \frac{t^\alpha}{\alpha}\right) \frac{dt}{t^{1-\alpha}} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi^2} f_3(t) \cos(n2\sqrt{t}) \frac{dt}{\sqrt{t}}. \\
 b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{(\frac{\pi}{2})^2} \sin \sqrt{t} \cos(n2\sqrt{t}) \frac{dt}{\sqrt{t}} + \frac{1}{\pi} \int_{(\frac{\pi}{2})^2}^{\pi^2} (\sin \sqrt{t} - 2\pi) \cos(n2\sqrt{t}) \frac{dt}{\sqrt{t}}.
 \end{aligned}$$

Usando el cambio de variable de $\theta = \sqrt{t}$, obtenemos $2d\theta = \frac{dt}{\sqrt{t}}$, $\theta = 0$ si $t = 0$ y $\theta = \pi$ entonces $t = (\frac{\pi}{2})^2$, y $\theta = 2\pi$ si $t = \pi^2$. Por lo tanto la integral b_n se convierte en

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(u) \cos(nu) 2du + \frac{1}{\pi} \int_\pi^{2\pi} \sin(u - 2\pi) \cos(nu) 2du \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin(u) \cos(nu) du + \frac{2}{\pi} \int_\pi^{2\pi} \sin(u - 2\pi) \cos(nu) du
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos(u) \cos(nu) du + \frac{2}{\pi} \int_\pi^{2\pi} \sin(u - 2\pi) \cos(nu) du \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos(u) \cos(nu) du + \frac{2}{\pi} \int_\pi^{2\pi} [\sin(u) \cos(2\pi) - \sin(2\pi) \cos(u)] \cos(nu) du \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos(u) \cos(nu) du + \frac{2}{\pi} \int_\pi^{2\pi} [\sin(u) - 0] \cos(nu) du \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos(u) \cos(nu) du + \frac{2}{\pi} \int_\pi^{2\pi} \sin(u) \cos(nu) du \\
 &= \frac{-4n}{\pi(1-n)(1+n)} = \frac{-4n}{\pi(1-n^2)}.
 \end{aligned}$$

De lo anterior se llega a que

$$S(f_2)(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-4n}{\pi(1-n^2)} \right) \sin(2n\sqrt{t}).$$

Ejemplo 4.3:

Sea

$$f_3(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t = 0, \\ \frac{\pi - \sqrt{t}}{2}, & \text{si } 0 < t < \pi^2, \\ 0, & \text{si } t = \pi^2. \end{cases} \quad (4.1)$$

Tomando los α -coeficientes de Fourier del *coseno* y del *seno* se tiene que

$$a_n = \frac{2\alpha}{p^\alpha} \int_0^p f_3(t) \cos\left(n \frac{t^\alpha}{\alpha}\right) \frac{dt}{t^{1-\alpha}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Resolviendo para a_n con $\alpha = \frac{1}{2}$ se obtiene

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{2(\frac{1}{2})}{(\pi^2)^{\frac{1}{2}}} \int_0^{(\frac{1}{2}2\pi)^2} \frac{\pi - \sqrt{t}}{2} \cos\left(n \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right) \frac{dt}{t^{1-\frac{1}{2}}} \\
 a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi^2} \frac{\pi - \sqrt{t}}{2} \cos\left(n \frac{\sqrt{t}}{\frac{1}{2}}\right) \frac{dt}{\sqrt{t}} \\
 a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi^2} \frac{\pi - \sqrt{t}}{2} \cos(2n\sqrt{t}) \frac{dt}{\sqrt{t}}
 \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable $u = \sqrt{t}$, $du = \frac{1}{2\sqrt{t}} dt$ entonces tenemos que los límites de integración quedan de la siguiente manera: tomando $u = \sqrt{t}$ con $t = 0$ $u = 0$ y $u = \sqrt{t}$ con $t = \pi^2$ entonces $u = \pi$.

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\pi - u) \cos(2nu) du \\
 a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \pi \cos(2nu) du - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi u \cos(2nu) du
 \end{aligned}$$

Resolviendo cada una de las integrales por medio de un cambio de variable e integración por partes. Más específicamente, $p = 2nu$ de donde el cambio de variable queda de la siguiente manera $\frac{1}{2n} dp = du$ con $p = 2nu$ y teniendo los límites de integración de la siguiente manera: $p = 0$ y

$p = 2n\pi$ y para la integración por partes $r = u$, $dr = du$ y $dv = \cos(2nu)du$, $v = \frac{1}{2n} \sin(2nu)$. Esto nos lleva a

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^{2n\pi} \cos(p) \frac{1}{2n} dp - \frac{1}{\pi} \left(u \frac{1}{2n} \sin(2nu) \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \frac{1}{2n} \sin(2nu) \right) \\ &= \frac{1}{2n} \sin(2nu) \Big|_0^{2n\pi} - \frac{1}{\pi} \left(u \frac{1}{2n} \sin(2nu) \Big|_0^\pi - \frac{1}{2n} \left(-\frac{1}{2n} \cos(2nu) \right) \Big|_0^\pi \right) \end{aligned}$$

de donde, al realizar la sustitución, se llega a

$$a_n = 0.$$

Pasemos al caso de b_n

$$b_n = \frac{2\alpha}{p^\alpha} \int_0^p f_3(t) \operatorname{sen} \left(n \frac{t^\alpha}{\alpha} \right) \frac{dt}{t^{1-\alpha}}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Para el caso de $a = \alpha = \frac{1}{2}$ se tiene que

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2^{\frac{1}{2}}}{\pi^{2^{\frac{1}{2}}}} \int_0^{(\frac{1}{2} 2\pi)^2} \frac{\pi - \sqrt{t}}{2} \operatorname{sen} \left(n \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right) \frac{dt}{t^{1-\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi^2} \frac{\pi - \sqrt{t}}{2} \operatorname{sen} \left(n \frac{\sqrt{t}}{\frac{1}{2}} \right) \frac{dt}{\sqrt{t}} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi^2} \frac{\pi - \sqrt{t}}{2} \operatorname{sen}(2n\sqrt{t}) \frac{dt}{\sqrt{t}} \end{aligned}$$

Haciendo cambio de variable $u = \sqrt{t}$, $du = \frac{1}{2\sqrt{t}} dt$ entonces tenemos que los límites de integración quedan de la siguiente manera: tomando $u = \sqrt{t}$ con $t = 0$, $u = 0$ y $u = \sqrt{t}$ con $t = \pi^2$ entonces $u = \pi$.

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\pi - u) \operatorname{sen}(2nu) du \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \pi \operatorname{sen}(2nu) du - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi u \operatorname{sen}(2nu) du \end{aligned}$$

Procediendo de manera similar al caso anterior, obtenemos

$$b_n = \int_0^\pi \operatorname{sen}(p) \frac{1}{2n} dp - \frac{1}{\pi} \left(u \frac{1}{2n} \cos(2nu) \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \frac{1}{2n} \cos(2nu) \right)$$

Resolviendo cada una de las integrales por medio de un cambio de variable e integración por partes. Más específicamente, $p = 2nu$ de donde el cambio de variable queda de la siguiente manera $\frac{1}{2n} dp = du$ con $p = 2nu$ y teniendo los límites de integración de la siguiente manera: $p = 0$ y $p = 2n\pi$ y para la integración por partes $r = u$, $dr = du$ y $dv = \cos(2nu)du$, $v = \frac{1}{2n} \sin(2nu)$. Esto nos lleva a que

$$b_n = \frac{1}{2n} \cos(2nu) \Big|_0^{2n\pi} - \frac{1}{\pi} \left(u \frac{1}{2n} \cos(2nu) \Big|_0^\pi - \frac{1}{2n} \left(-\frac{1}{2n} \sin(2nu) \right) \Big|_0^\pi \right)$$

Al realizar la sustitución se llega a que

$$b_n = \frac{1}{n}.$$

De lo anterior se llega a que

$$S(f_3)(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \right) \operatorname{sen}(2n\sqrt{t}).$$

Este ejemplo se empleará en la siguiente sección en la que se resuelven ecuaciones diferenciales fraccionarias.

4.1.1. Ejemplos gráficos

En esta Subsección se emplearan programas elaborados en MATLAB para calcular de manera numerica la α -serie de Fourier de dos funciones diferentes para observar el comportamiento gráfico de la α -serie de Fourier de cada función f tomando diferentes valores de α .

Ejemplo 4.4: Para este ejemplo, consideremos la función $f(x) = 1 - x$ en el intervalo $[0, 2\pi]$. Aplicando la programación en MATLAB, podemos observar en las siguientes gráficas el comportamiento gráfico de la α -serie de Fourier de la función $f(x) = 1 - x$, tomando diferentes valores de $\alpha = 0.5, 0.95, 0.99$, y 1 . Se puede observar de las gráficas que la α -serie de Fourier de f converge a la función f . En este caso, se tomaron $N = 10$ términos para la α -serie de Fourier de f .

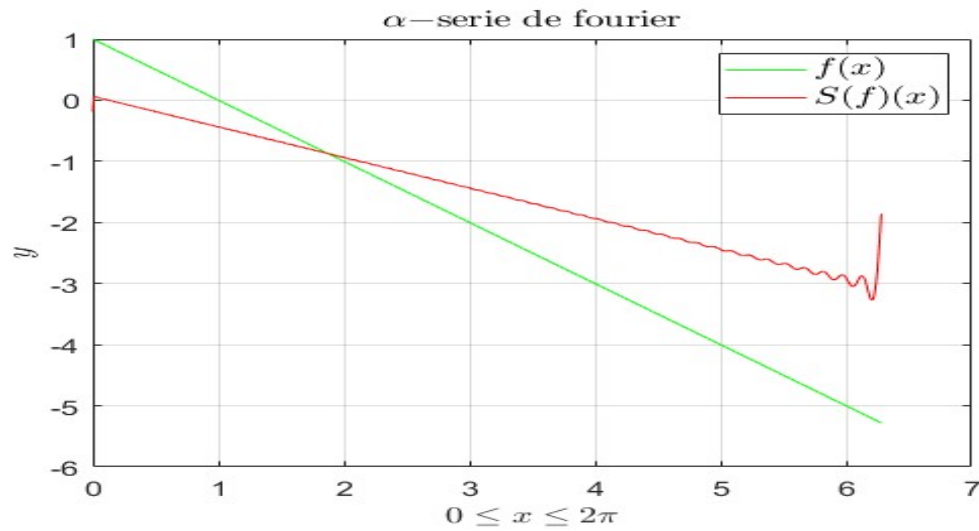


Figura 4.1: Gráficas de la función $f(x) = 1 - x$ y su α -serie de Fourier $S(f)(x)$ con $\alpha = 0.5$.

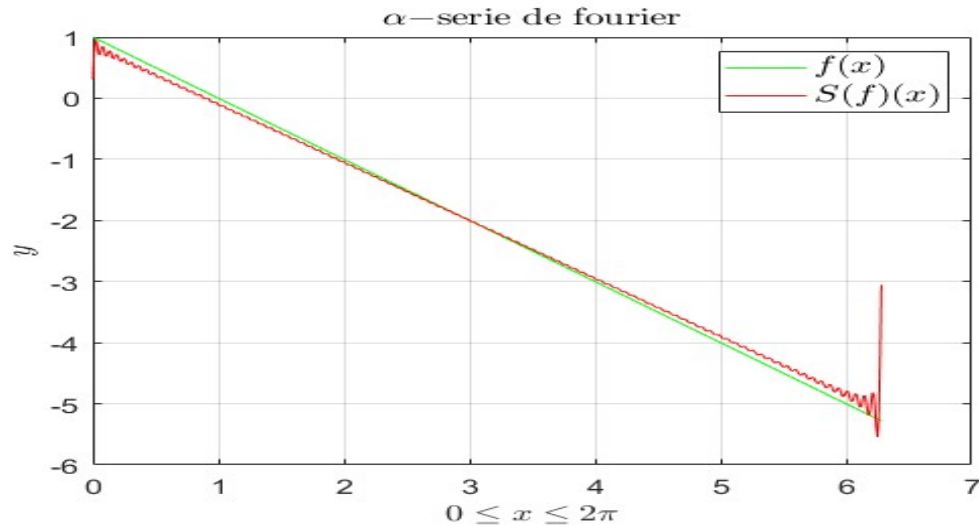


Figura 4.2: Gráficas de la función $f(x) = 1 - x$ y su α -serie de Fourier con $\alpha = 0.95$

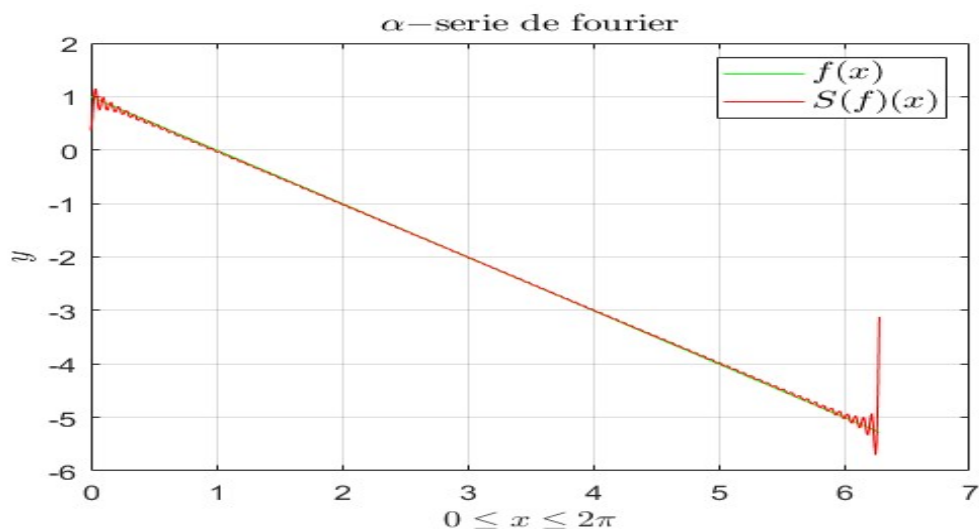


Figura 4.3: Gráficas de la función $f(x) = 1 - x$ y su α -serie de Fourier con $\alpha=0.99$

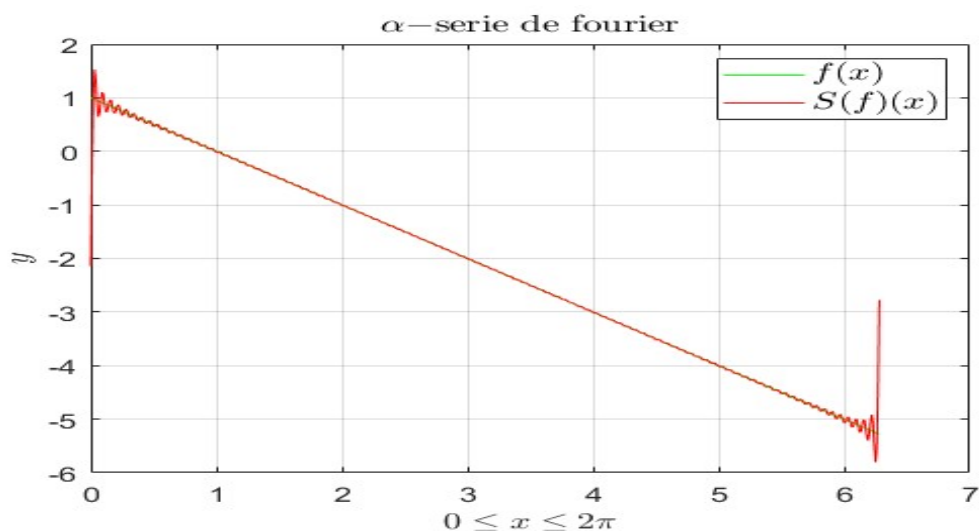


Figura 4.4: Gráficas de la función $f(x) = 1 - x$ y su α -serie de Fourier con $\alpha = 1$.

Ejemplo 4.5: Consideremos la función $f(x) = 1 - x^2$ en el intervalo $[0, 2\pi]$. Aplicando la programación en MATLAB, podemos observar en las siguientes gráficas el comportamiento gráfico de la α -serie de Fourier de la función f , tomando diferentes valores de $\alpha = 0.5, 0.99$, y 1 . Se puede observar de las gráficas que la α -serie de Fourier de f converge a la función f . Aquí también se tomaron $N = 10$ términos para la α -serie de Fourier de f .

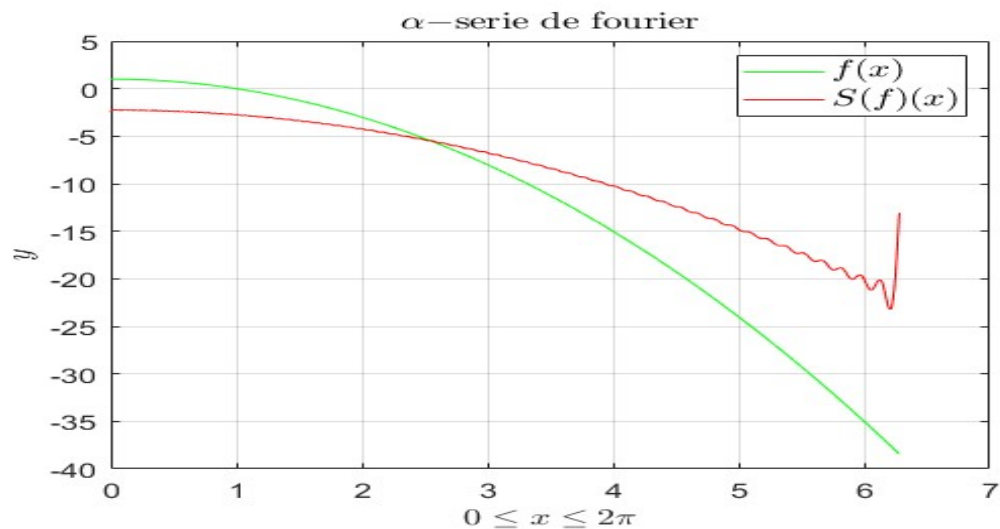


Figura 4.5: Gráficas de la función $f(x) = 1 - x^2$ y su α -serie de Fourier con $\alpha = 0.5$.

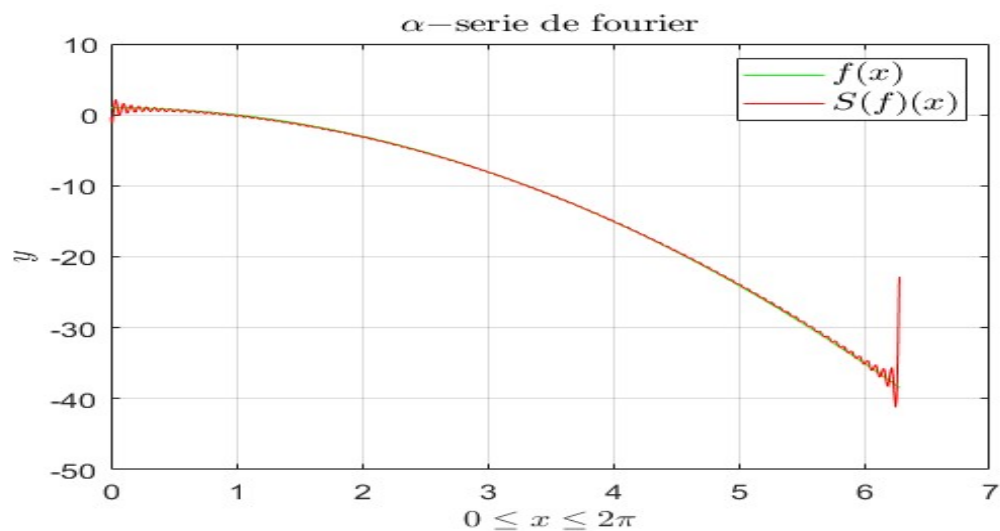


Figura 4.6: Gráficas de la función $f(x) = 1 - x^2$ y su α -serie de Fourier con $\alpha = 0.99$.

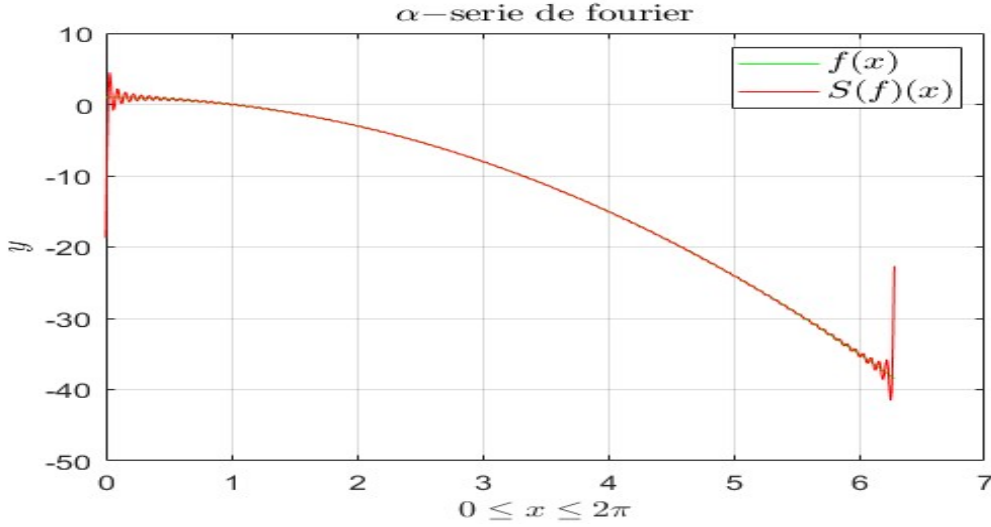


Figura 4.7: Gráficas de la función $f(x) = 1 - x^2$ y su α -serie de Fourier con $\alpha = 1$.

El siguiente ejemplo es tomado de [1]. Cabe mencionar que a este ejemplo se le realizaron algunas modificaciones porque no existía la solución en su forma original, esto para poder resolverlo de manera numérica, lo cual es otra contribución de este trabajo.

4.2. Solución de Ecuaciones Diferenciales Fraccionarias Utilizando Series de Fourier Fraccionarias (SFF).

El siguiente ejemplo es una modificación del presentado en [1] y es una contribución original del trabajo.

Ejemplo 4.4: Consideremos el siguiente problema de contorno con condiciones iniciales de tipo fraccionario:

$$\frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^\beta u(x, t)}{\partial t^\beta}, \quad (4.2)$$

con

$$0 < \alpha \leq 1, \quad 0 < \beta \leq 1,$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad (4.3)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad (4.4)$$

y

$$u(x, 1) = f(x), \quad 0 < x < L, \quad (4.5)$$

donde $f(x)$ esta dada en (4.1).

Solución del problema (4.2)-(4.5): Aplicando la separación de variables tenemos que:

$$P^{(\alpha)}(x)Q(t) = P(x)Q^{(\beta)}(t).$$

Separando variables se halla que

$$\frac{P^{(\alpha)}(x)}{P(x)} = \frac{Q^{(\beta)}(t)}{Q(t)}.$$

Debido a que x y t son variables independientes tenemos que:

$$\frac{P^{(\alpha)}(x)}{P(x)} = \frac{Q^{(\beta)}(t)}{Q(t)} = \lambda.$$

De esto,

$$P^{(\alpha)}(x) - \lambda P(x) = 0 \quad (4.6)$$

y

$$Q^{(\beta)}(t) - \lambda Q(t) = 0. \quad (4.7)$$

Aplicando las condiciones dadas en (4.3) a (4.6) se llega a las tres posibilidades para λ :

1. Si $\lambda = 0$ la ecuación (4.3) se convertirá en $P^{(\alpha)}(x) = 0$ y en donde por la propiedad (2) de la derivada fraccional conformable se obtiene que $P(x) = c$ que junto condición (4.2) lleva a que $c = 0$.
2. Si $\lambda > 0$ la ecuación (4.3) se convertirá en $P^{(\alpha)}(x) = \lambda P(x)$ y en donde por la fórmula (4) de la derivada fraccional conformable se obtiene que $P(x) = ce^{\sqrt[\lambda]{\lambda} \frac{x^\alpha}{\alpha}}$. De la condición (4.2), se muestra que $c = 0$.
3. Si $\lambda < 0$ la ecuación (4.3) se convertirá en $P^{(\alpha)}(x) + \mu^2 P(x) = 0$ y en donde usando las fórmulas (2) y (3) de la derivada fraccional conformable se obtiene que:

$$P(x) = c_1 \cos\left(\mu \frac{x^\alpha}{\alpha}\right) + c_2 \sin\left(\mu \frac{x^\alpha}{\alpha}\right). \quad (4.8)$$

De la condición (4.2), se llega a que $c_1 = 0$.

Si $P(x) = c_2 \sin\left(\mu \frac{x^\alpha}{\alpha}\right)$, al aplicar la condición dada en (4.3) hallamos:

$$\sin\left(\mu \frac{L^\alpha}{\alpha}\right) = 0,$$

de donde

$$\mu = n\pi \frac{\alpha}{L^\alpha} \quad \text{para} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.9)$$

De lo anterior,

$$P(x) = c_2 \sin\left(n\pi \frac{x^\alpha}{L^\alpha}\right). \quad (4.10)$$

Regresando a la ecuación (4.7) para obtener la solución de $Q^{(\beta)}(t) - \mu^2 Q(t) = 0$, se usa la fórmula (4) de derivada fraccional conformable lo que lleva a:

$$Q(x) = a_1 e^{\mu \frac{t^\beta}{\beta}} + a_2 e^{-\mu \frac{t^\beta}{\beta}}. \quad (4.11)$$

De la condición (4.3) se obtiene que $a_2 = -a_1$ y de ello:

$$Q(x) = 2a_1 \sinh\left(\mu \frac{t^\beta}{\beta}\right). \quad (4.12)$$

Al combinar las ecuaciones (4.10) y (4.12) obtenemos que:

Series de Fourier y Ecuaciones Diferenciales Fraccionarias

4.2 Solución de Ecuaciones Diferenciales Fraccionarias Utilizando Series de Fourier Fraccionarias (SFF).

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen} \left(n\pi \frac{x^\alpha}{L^\alpha} \right) \operatorname{senh} \left(n\pi \frac{\alpha}{L^\alpha} \frac{t^\beta}{\beta} \right). \quad (4.13)$$

Ahora si aplicamos la condición $u(x, 1) = f_3(x)$ tenemos que

$$f_3(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen} \left(n\pi \frac{x^\alpha}{L^\alpha} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{senh} \left(n\pi \frac{\alpha}{L^\alpha} \frac{1}{\beta} \right) \operatorname{sen} \left(n\pi \frac{x^\alpha}{L^\alpha} \right)$$

de donde

$$B_n = \frac{1}{n \operatorname{senh} \left(n\pi \frac{\alpha}{L^\alpha} \frac{1}{\beta} \right)}. \quad (4.14)$$

Calculando numéricamente los α coeficientes de Fourier de f asociados a la función *seno*, empleando programas propios elaborados en MATLAB, podemos observar el comportamiento de las series en diferentes valores de α que se muestran en la descripción de cada gráfica.

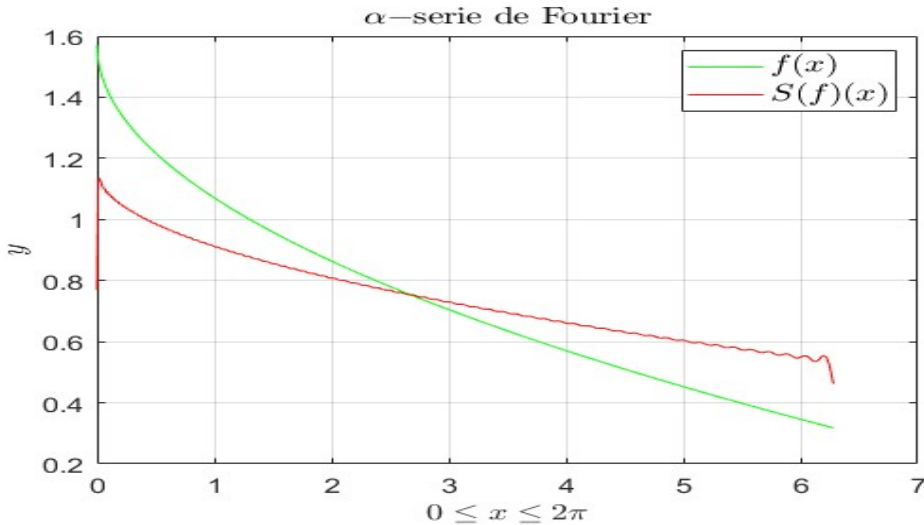


Figura 4.8: Gráficas de la función $f_3(x) = \frac{\pi - \sqrt{x}}{2}$ y su α -serie de Fourier con valor de $\alpha = 0.5$ y $\beta = 1$.

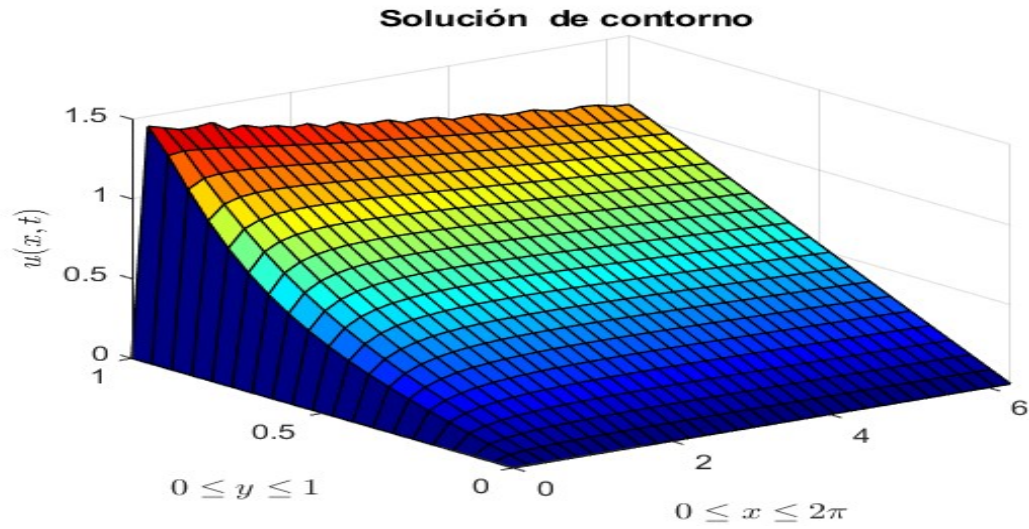


Figura 4.9: Gráfica de la solución u de problema de contorno (4.2)-(4.5) con $\alpha = 0.5$ y $\beta = 1$, para la condición inicial $f = f_3$, en $t = 1$.

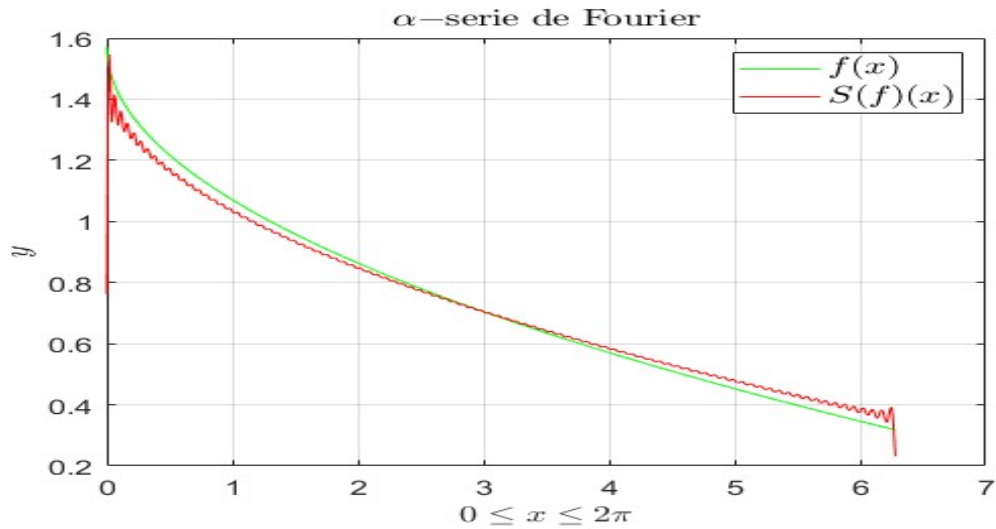


Figura 4.10: Gráficas de la función $f_3(x) = \frac{\pi - \sqrt{x}}{2}$ y su α -serie de Fourier con valor de $\alpha = 0.9$ y $\beta = 1$.

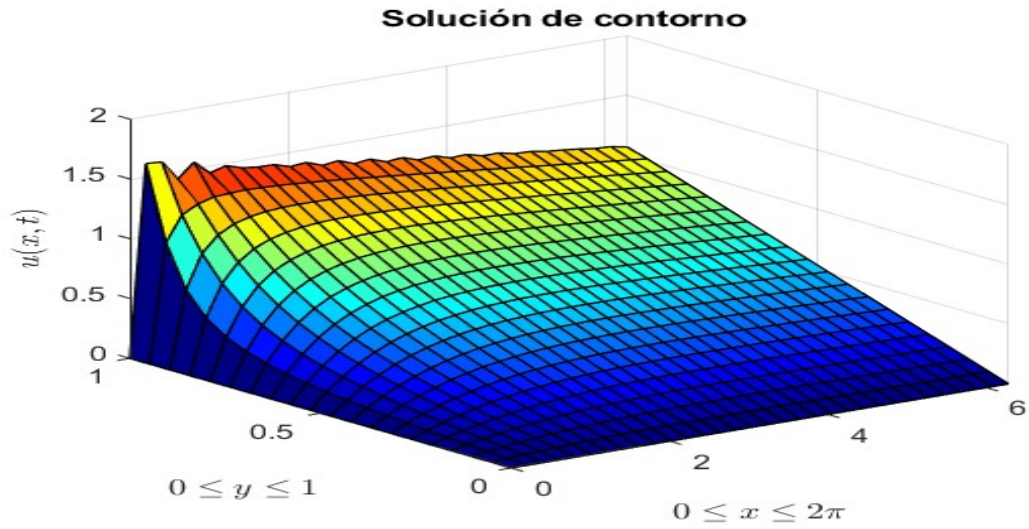


Figura 4.11: Gráfica de la solución u de problema de contorno (4.2)-(4.5) con $\alpha = 0.9$ y $\beta = 1$ para la condición inicial $f = f_3$, en $t = 1$.

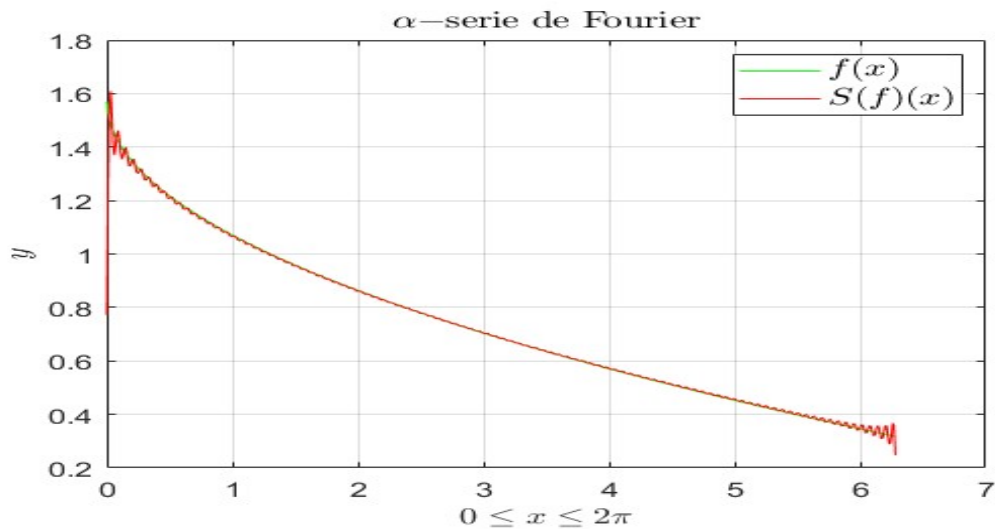


Figura 4.12: Gráficas de la función $f_3(x) = \frac{\pi - \sqrt{x}}{2}$ y su α -serie de Fourier con valor de $\alpha = 0.99$ y $\beta = 1$.

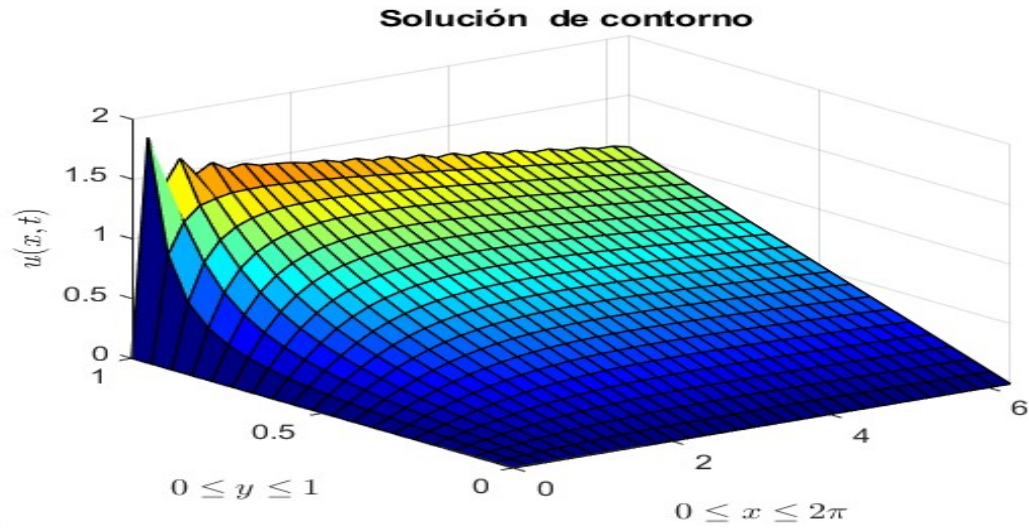


Figura 4.13: Gráfica de la solución u de problema de contorno (4.2)-(4.5) con $\alpha = 0.99$ y $\beta = 1$, para la condición inicial $f = f_3$, en $t = 1$.

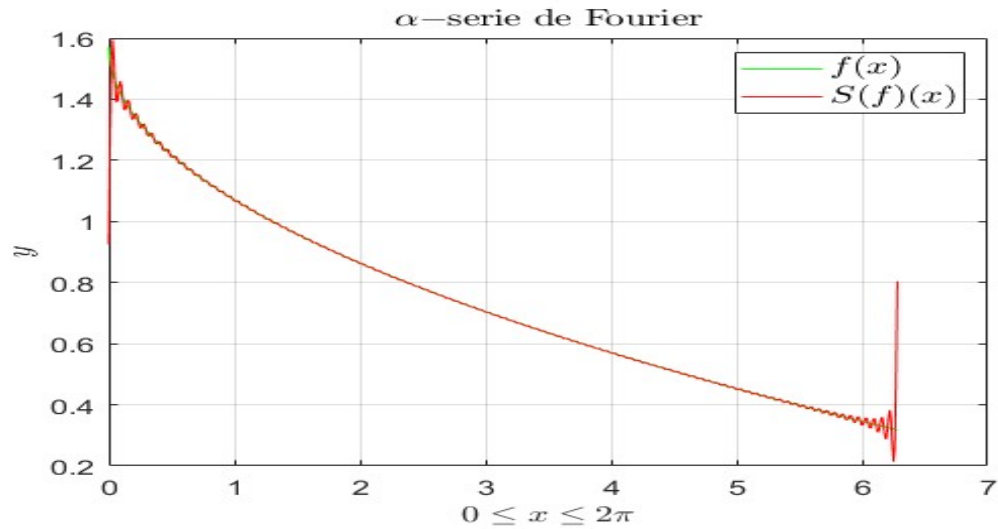


Figura 4.14: Gráficas de la función $f_3(x) = \frac{\pi - \sqrt{x}}{2}$ y su α -serie de Fourier con valor de $\alpha = 1$ y $\beta = 1$.

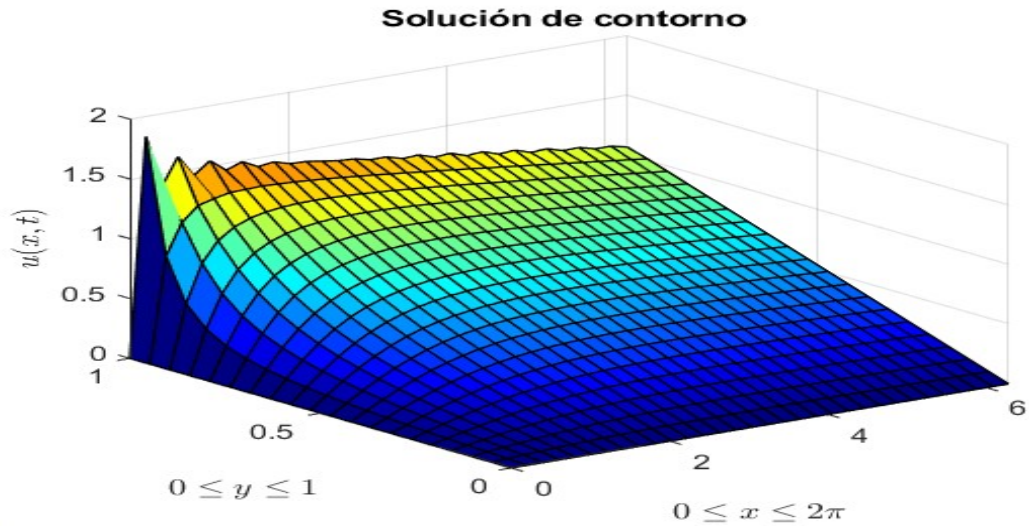


Figura 4.15: Gráfica de la solución u de problema de contorno (4.2)-(4.5) con $\alpha = 1$ y $\beta = 1$, para la condición inicial $f = f_3$, en $t = 1$.

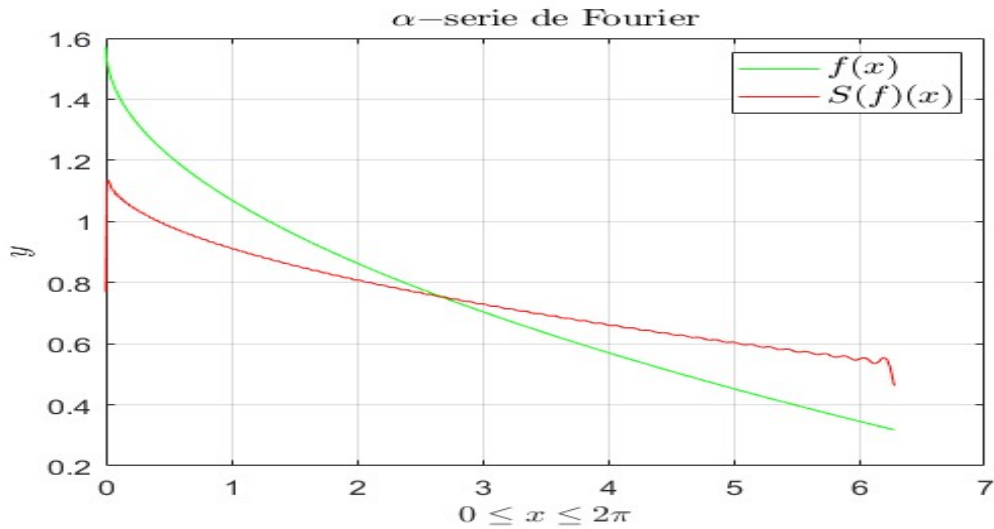


Figura 4.16: Gráficas de la función $f_3(x) = \frac{\pi - \sqrt{x}}{2}$ y su α -serie de Fourier con valor de $\alpha = 0.5$ y $\beta = 0.6$.

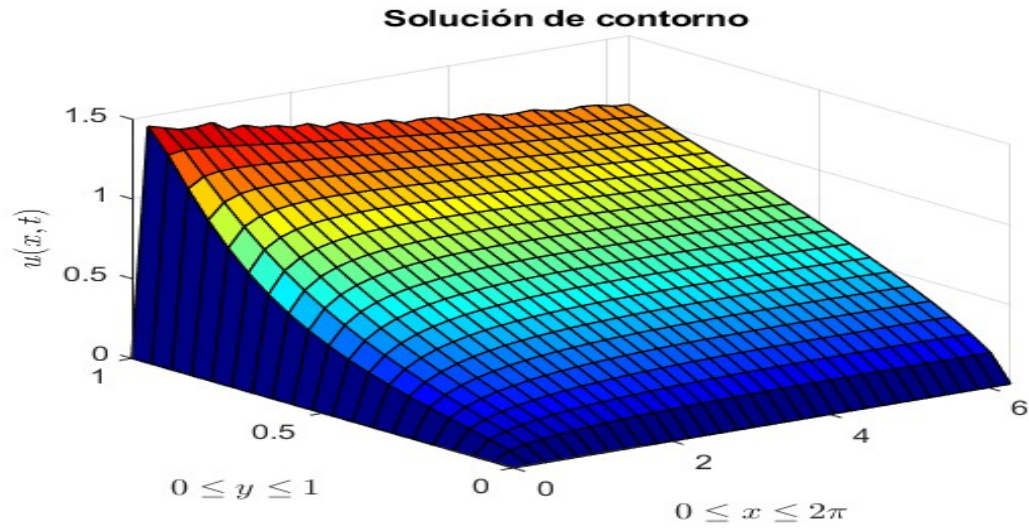


Figura 4.17: Gráfica de la solución u de problema de contorno (4.2)-(4.5) con $\alpha = 0.5$ y $\beta = 0.6$, para la condición inicial $f = f_3$, en $t = 1$.

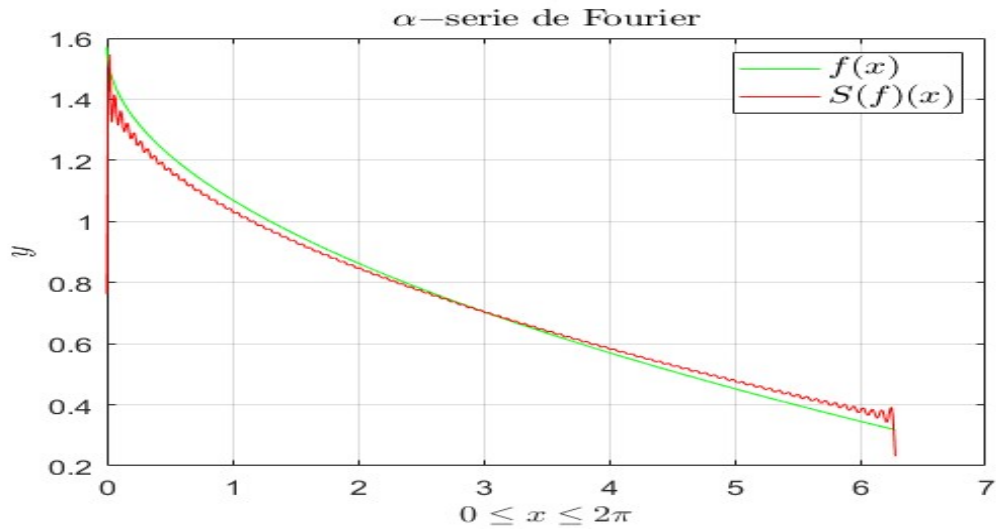


Figura 4.18: Gráficas de la función $f_3(x) = \frac{\pi - \sqrt{x}}{2}$ y su α -serie de Fourier con valor de $\alpha = 0.9$ y $\beta = 0.6$.

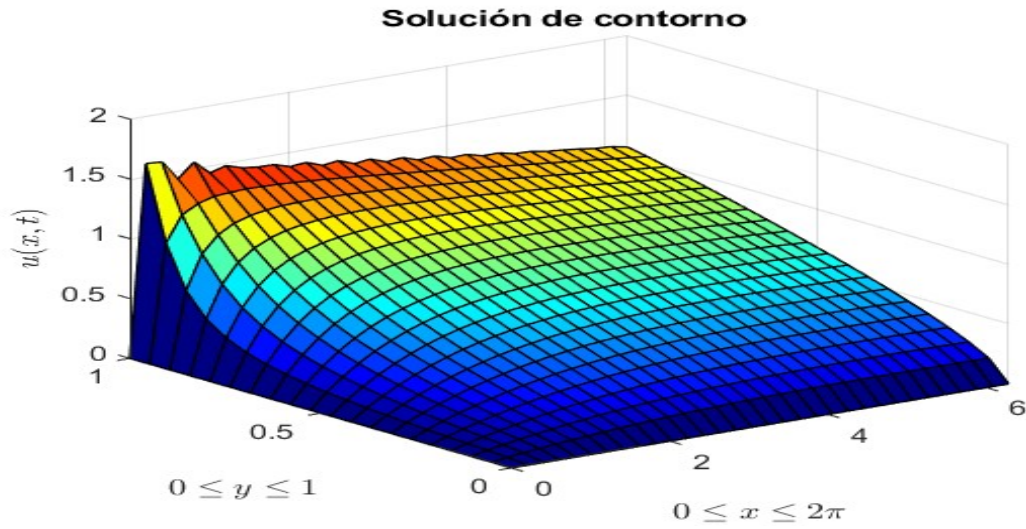


Figura 4.19: Gráfica de la solución u de problema de contorno (4.2)-(4.5) con $\alpha = 0.9$ y $\beta = 0.6$, para la condición inicial $f = f_3$, en $t = 1$.

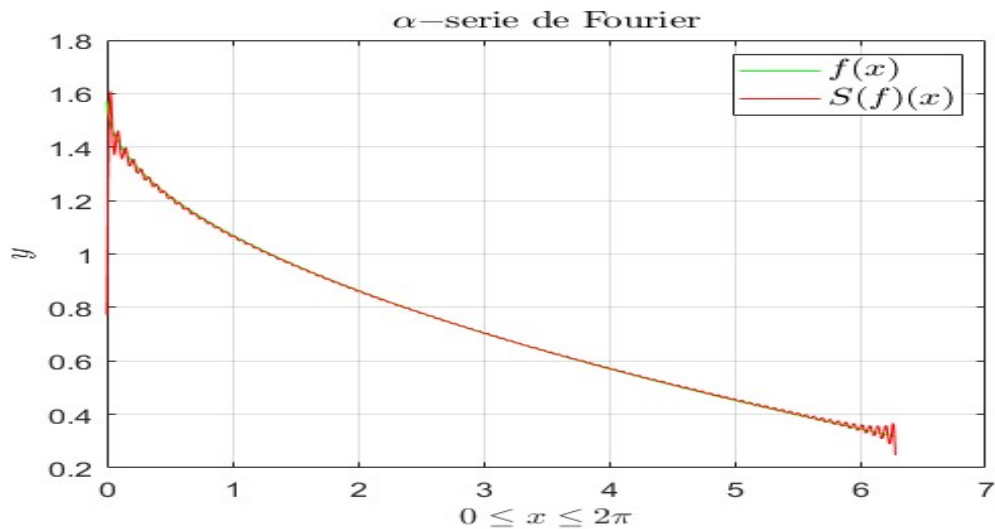


Figura 4.20: Gráficas de la función $f_3(x) = \frac{\pi - \sqrt{x}}{2}$ y su α -serie de Fourier con valor de $\alpha = 0.99$ y $\beta = 0.6$.

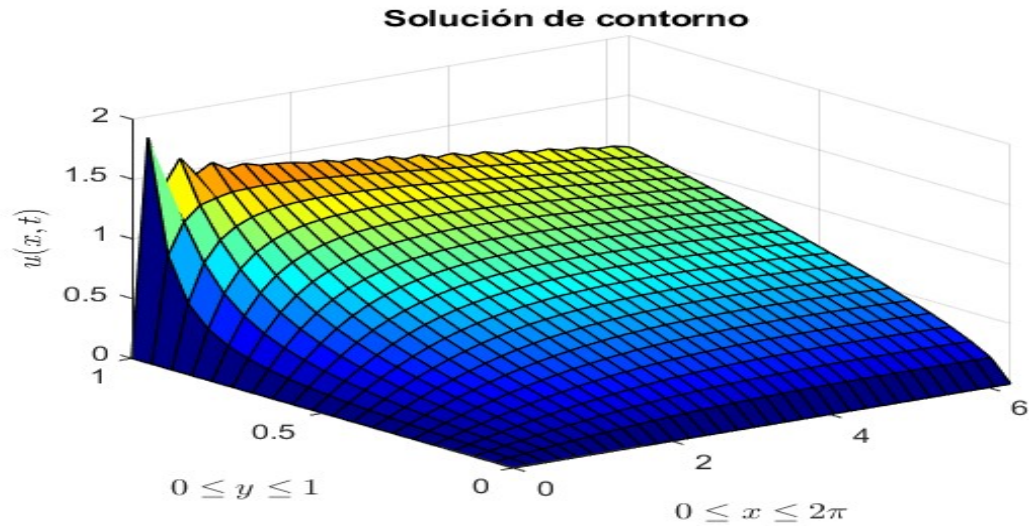


Figura 4.21: Gráfica de la solución u de problema de contorno (4.2)-(4.5) con $\alpha = 0.99$ y $\beta = 0.6$, para la condición inicial $f = f_3$, en $t = 1$.

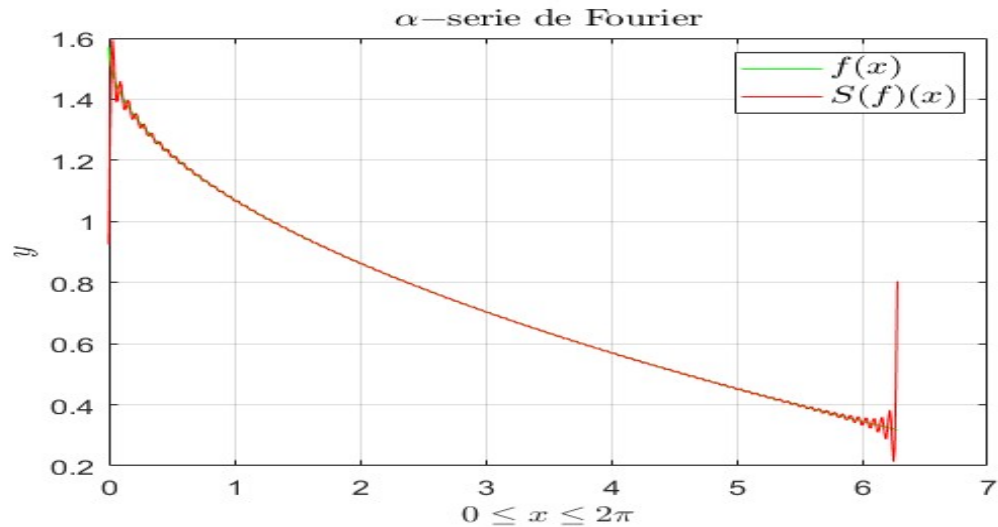


Figura 4.22: Gráficas de la función $f_3(x) = \frac{\pi - \sqrt{x}}{2}$ y su α -serie de Fourier con valor de $\alpha = 1$ y $\beta = 0.6$.

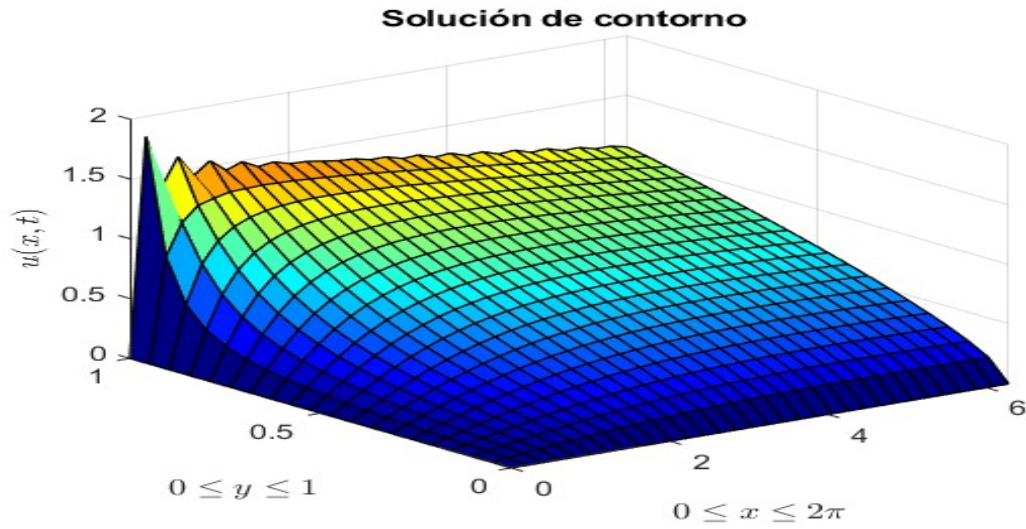


Figura 4.23: Gráfica de la solución u de problema de contorno (4.2)-(4.5) con $\alpha = 1$ y $\beta = 0.6$, para la condición inicial $f = f_3$, en $t = 1$.

Gráficas del ejemplo 4.2, original de este trabajo.

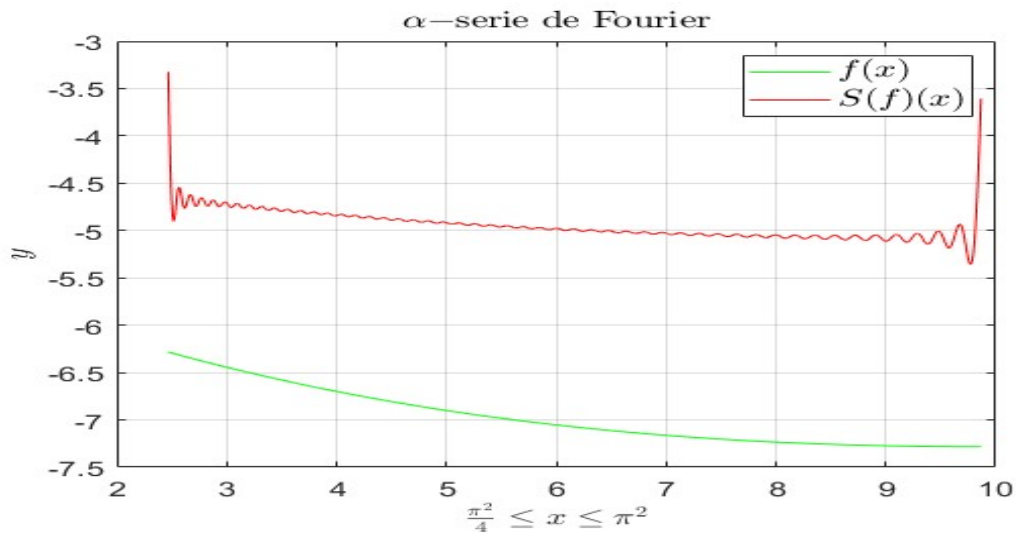


Figura 4.24: Gráficas de la función $f_2(x) = \cos(\sqrt{x}) - 2\pi$ y su α -serie de Fourier con valor de $\alpha = 0.5$ y $\beta = 0.6$.

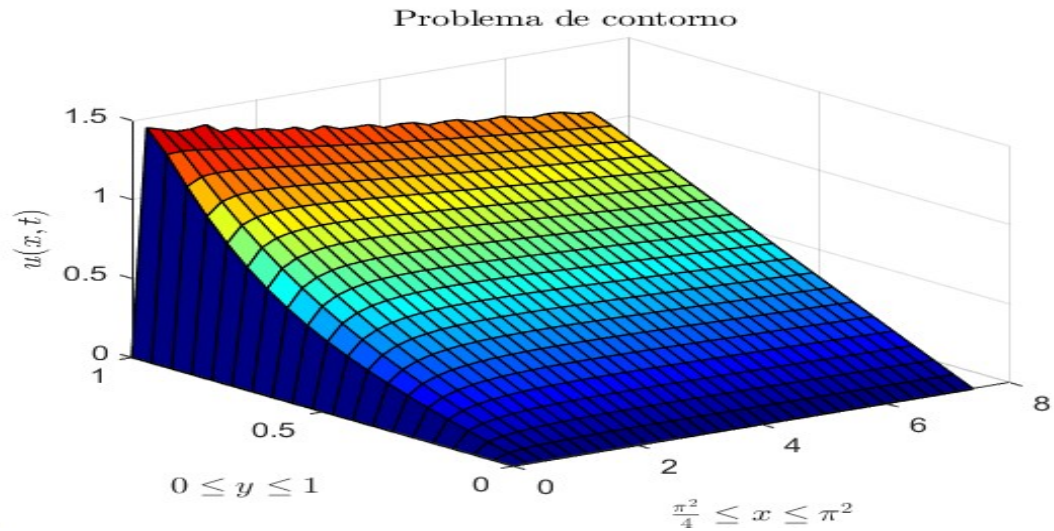


Figura 4.25: Gráfica de la solución u de problema de contorno (4.2)-(4.5) con $\alpha = 0.5$ y $\beta = 0.6$, para la condición inicial $f = f_2$, en $t = 1$.

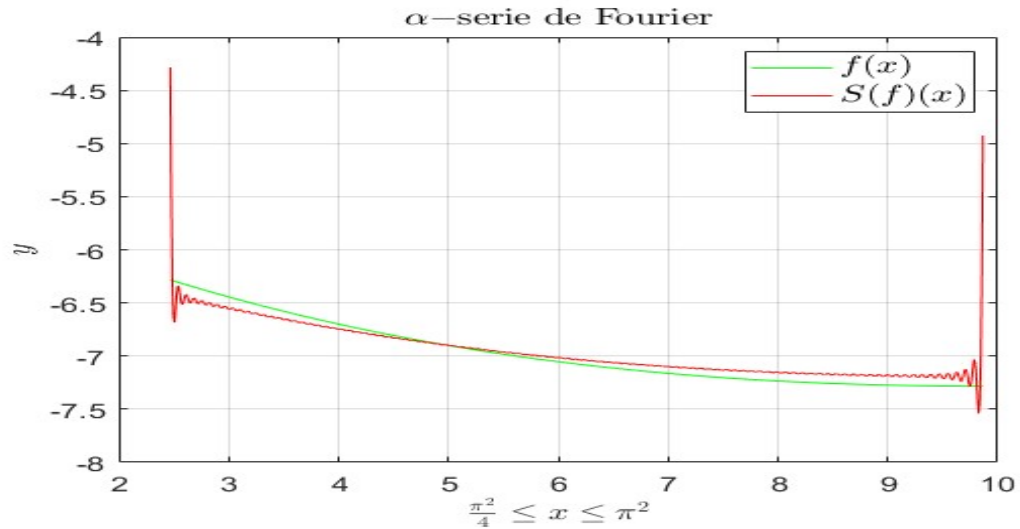


Figura 4.26: Gráficas de la función $f_2(x) = \cos(\sqrt{x}) - 2\pi$ y su α -serie de Fourier con valor de $\alpha = 0.9$ y $\beta = 0.6$.

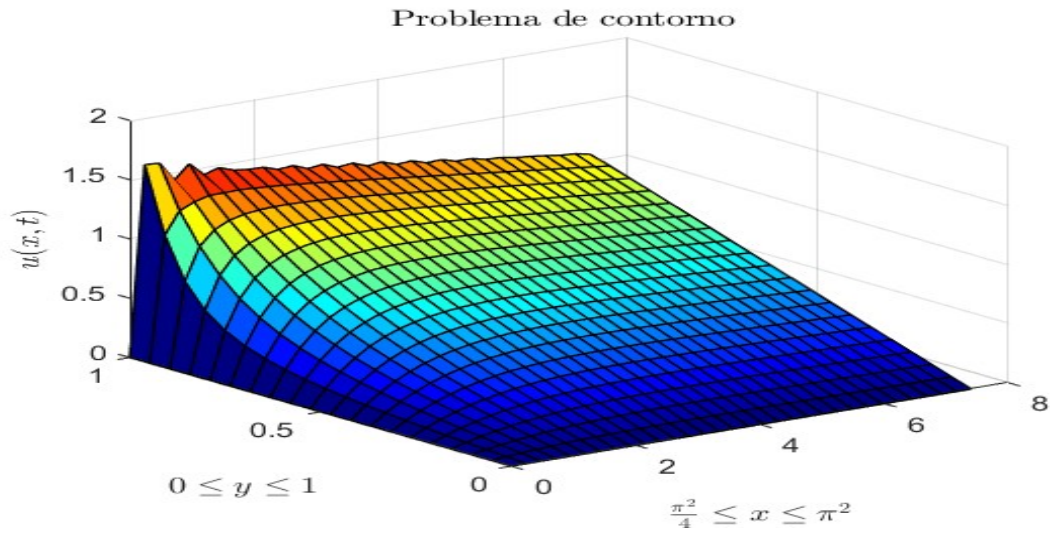


Figura 4.27: Gráfica de la solución u de problema de contorno (4.2)-(4.5) con $\alpha = 0.9$ y $\beta = 0.6$, para la condición inicial $f = f_2$, en $t = 1$.

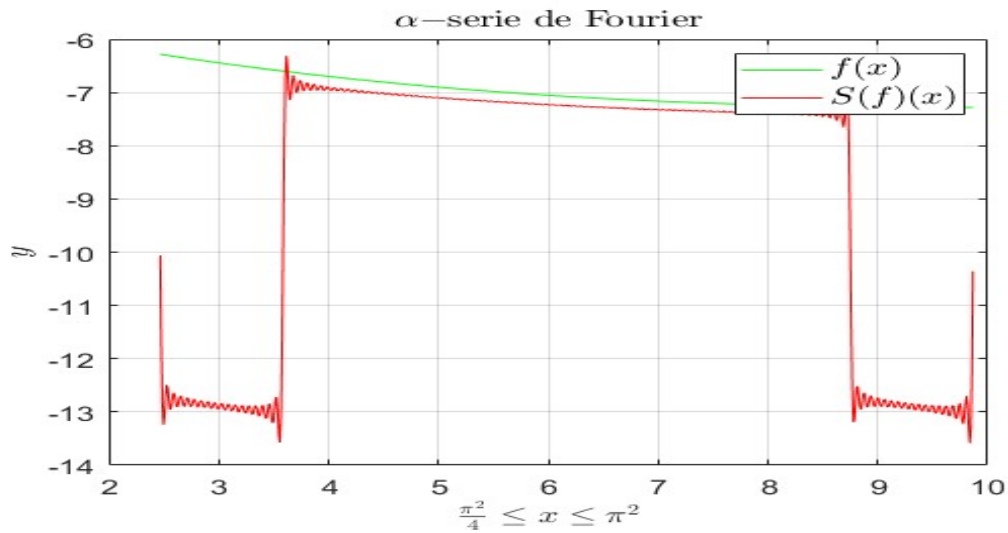


Figura 4.28: Gráficas de la función $f_2(x) = \cos(\sqrt{x}) - 2\pi$ y su α -serie de Fourier con valor de $\alpha = 1$ y $\beta = 0.6$.

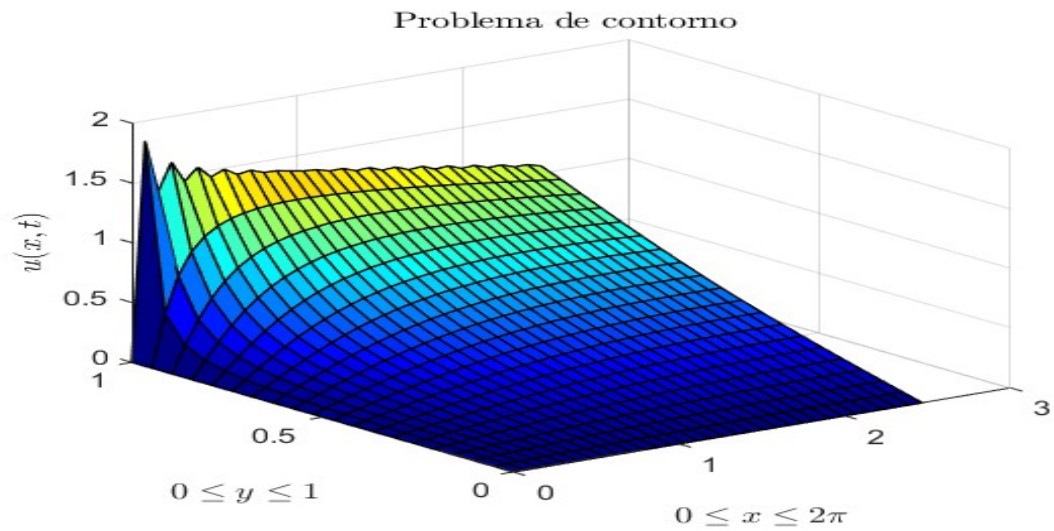


Figura 4.29: Gráfica de la solución u de problema de contorno (4.2)-(4.5) con $\alpha = 1$ y $\beta = 0.6$, para la condición inicial $f = f_2$, en $t = 1$.

4.3. Conclusiones

En esta tesis, se presentaron elementos para dar solución a ciertas ecuaciones diferenciales fraccionarias utilizando las series de Fourier fraccionarias. Para ello, se presentaron los elementos que permiten hallar dichas soluciones. De forma didáctica, se presentaron en la primera parte los elementos de las series de Fourier clásicas y su convergencia basada en el criterio de Dini y cómo estas sirven para hallar soluciones de ecuaciones diferenciales con derivadas enteras. Además, se mostraron ejemplos numéricos tanto de series de Fourier como de las soluciones de algunas ecuaciones diferenciales. Todo ello, para que la transición al caso fraccionario fuera suave, es decir, que tomando los elementos del caso clásico, se pudiera entender más fácilmente el caso fraccionario. Para los ejemplos numéricos se desarrollaron programas en MATLAB. Entre los ejemplos, se tomaron los casos clásicos de funciones con salto, continuas con pico (valor absoluto), así como funciones suaves. Para el caso fraccionario, se tomaron funciones similares. Para la solución de las ecuaciones diferenciales fraccionarias, se utiliza la técnica de separación de variables como en el caso clásico. En todos estos casos, se obtienen buenos resultados numéricos.

Entre las perspectivas se encuentran extender los resultados para otra familia de ecuaciones diferenciales parciales. Así como, el planteamiento de problemas inversos para estas familias. En particular para la ecuación del calor y sus problemas inversos para la ecuación del calor resultan por demás interesantes tanto por su interés matemático en sí mismo como por sus aplicaciones.



Apéndice A

Desarrollo ecuación 2.1

Sea $f \in L_1(-\pi, \pi)$, entonces su Serie de Fourier está dada por

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)),$$

donde los coeficientes a_0, a_n, b_n son los coeficientes de Fourier de f .

Para calcular el coeficiente a_0 , se integra a ambos lados, de donde se halla

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx) \right] dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)] dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} [a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)] dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos(nx) dx + \int_{-\pi}^{\pi} b_n \operatorname{sen}(nx) dx. \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable de $u = nx$, $\frac{du}{n} = dx$, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(u) \frac{du}{n} + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(u) \frac{du}{n} \right) \\ &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(u) du + \frac{b_n}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(u) du \right). \end{aligned}$$

Integrando las integrales de la derecha obtenemos

$$\begin{aligned}
 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx &= \frac{a_0}{2} (\pi - (-\pi)) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n} (\sin(u)|_{-\pi}^{\pi}) + \frac{b_n}{n} (-\cos(u)|_{-\pi}^{\pi}) \right) \\
 &= \frac{a_0}{2} (\pi + (\pi)) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n} (\sin(u)|_{-\pi}^{\pi}) - \frac{b_n}{n} (\cos(u)|_{-\pi}^{\pi}) \right) \\
 &= \frac{a_0}{2} (2\pi) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n} (\sin(nx)|_{-\pi}^{\pi}) - \frac{b_n}{n} (\cos(nx)|_{-\pi}^{\pi}) \right) \\
 &= a_0\pi + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n} (\sin(\pi n) - \sin(-\pi n)) \right) - \left(\frac{b_n}{n} \cos(\pi n) - \cos(-\pi n) \right) \\
 &= a_0\pi + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n} (0) - \frac{b_n}{n} (0) \right) \\
 &= a_0\pi.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx.$$

Para calcular los coeficientes a_n y b_n , multipliquemos la serie de Fourier de f por $\cos(kx)$ obtenemos

$$f(x) \cos(kx) = \frac{a_0}{2} \cos(kx) + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) \cos(kx) + b_n \sin(nx) \cos(kx)]. \quad (\text{A.1})$$

Integrando en ambos lados en el intervalo $(-\pi, \pi)$, se obtiene

$$\begin{aligned}
 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{a_0}{2} \cos(kx) + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) \cos(kx) + b_n \sin(nx) \cos(kx)] \right] dx \\
 &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \cos(kx) dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) \cos(kx) + b_n \sin(nx) \cos(kx)] dx \\
 &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \cos(kx) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos(nx) \cos(kx) dx + \int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin(nx) \cos(kx) dx \right).
 \end{aligned}$$

Sean

$$a = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \cos(kx) dx, \quad (\text{A.2})$$

$$c_n = \int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos(nx) \cos(kx) dx, \quad (\text{A.3})$$

$$d_n = \int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin(nx) \cos(kx) dx. \quad (\text{A.4})$$

Para A.2 se halla

$$a = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \cos(kx) dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) dx.$$

Haciendo ahora el cambio de variable de $u = kx$, $\frac{du}{k} = dx$, se halla

$$a = \frac{a_0}{2k} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(u) du = \frac{a_0}{2k} (\sin(u)|_{-\pi}^{\pi}) = 0.$$

Para A.3 tomamos $n \neq k$, obtenemos

$$\begin{aligned}
 c_n &= \int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos(nx) \cos(kx) dx \\
 &= \int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos(nx) \cos(kx) dx \\
 &= a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(kx) dx \\
 &= a_n \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} (\cos(n+k)x + \cos(n-k)x) dx \\
 &= \frac{a_n}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(n+k)x + \cos(n-k)x) dx \\
 &= \frac{a_n}{2} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+k)x dx + \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-k)x dx \right] dx.
 \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable $u = (n+k)x$, $\frac{du}{n+k} = dx$, $v = (n-k)x$, $\frac{dv}{n-k} = dx$, obtenemos

$$\begin{aligned}
 c_n &= \frac{a_n}{2} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \cos(u) \frac{du}{n+k} + \int_{-\pi}^{\pi} \cos(v) \frac{dv}{n-k} \right] \\
 &= \frac{a_n}{2} \left[\frac{1}{n+k} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(u) du + \frac{1}{n-k} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(v) dv \right] \\
 &= \frac{a_n}{2} \left[\frac{1}{n+k} [\sin(u)|_{-\pi}^{\pi}] + \frac{1}{n-k} [\sin(v)|_{-\pi}^{\pi}] \right] \\
 &= \frac{a_n}{2} \left[\frac{1}{n+k} [\sin(n+k)x|_{-\pi}^{\pi}] + \frac{1}{n-k} [\sin(n-k)x|_{-\pi}^{\pi}] \right] \\
 &= \frac{a_n}{2} \left[\frac{1}{n+k} (\sin \pi(n+k) - \sin \pi(n+k)) + \frac{1}{n-k} (\sin \pi(n-k) - \sin \pi(n-k)) \right] \\
 &= \frac{a_n}{2} \left[\frac{1}{n+k} (0) + \frac{1}{n-k} (0) \right] \\
 &= \frac{a_n}{2} (0) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Para A.4 y resolviendo la integral con $n = k$

$$\begin{aligned}
 d_n &= \int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos(nx) \cos(kx) dx \\
 &= \int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos(nx) \cos(nx) dx \\
 &= \int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos^2(nx) dx \\
 &= a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx) dx \\
 &= a_n \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + \cos(2nx)}{2} dx
 \end{aligned}$$

$$= \frac{a_n}{2} \int_{-\pi}^{\pi} 1 + \cos(nx) dx.$$

Haciendo sustitución $u = (nx)$ derivando y despejando obtenemos $\frac{du}{n} = dx$

$$\begin{aligned} d_n &= \frac{a_n}{2} \int_{-\pi}^{\pi} 1 + \cos(u) \frac{du}{n} \\ &= \frac{a_n}{2} \left[\int_{-\pi}^{\pi} 1 du + \int_{-\pi}^{\pi} \cos(u) \frac{du}{n} \right] \\ &= \frac{a_n}{2} [\pi - (-\pi) + \text{sen}(u)|_{-\pi}^{\pi}] \\ &= \frac{a_n}{2} [(2\pi) + \text{sen}(nx)|_{-\pi}^{\pi}] \\ &= \frac{a_n}{2} [(2\pi) + [\text{sen}(n\pi) - \text{sen}(-n\pi)]] \\ &= \frac{a_n}{2} [(2\pi) + [0 - 0]] = a_n \pi. \end{aligned}$$

Tomando A.4 y resolviendo la integral

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} b_n \text{sen}(nx) \cos(kx) dx &= b_n \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(nx) \cos(kx) dx \\ &= b_n \int_{-\pi}^{\pi} (\text{sen}(n+k)x + \text{sen}(n-k)x) dx \\ &= \frac{b_n}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\text{sen}(n+k)x + \text{sen}(n-k)x) dx \\ &= \frac{b_n}{2} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(n+k)x + \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(n-k)x \right] dx. \end{aligned}$$

Haciendo sustitución en ambas integrales $u = (n+k)x$ derivando y despejando obtenemos $\frac{du}{n+k} = dx$
 $v = (n-k)x$ derivando y despejando obtenemos $\frac{dv}{n-k} = dx$ se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} b_n \text{sen}(nx) \cos(kx) dx &= \frac{b_n}{2} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(u) \frac{du}{n+k} + \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(v) \frac{dv}{n-k} \right] \\ &= \frac{b_n}{2} \left[\frac{1}{n+k} \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(u) du + \frac{1}{n-k} \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(v) dv \right] \\ &= \frac{b_n}{2} \left[\frac{1}{n+k} (-\cos(u)|_{-\pi}^{\pi}) + \frac{1}{n-k} (-\cos(v))|_{-\pi}^{\pi} \right] \\ &= \frac{b_n}{2} \left[-\frac{1}{n+k} (\cos(u)|_{-\pi}^{\pi}) - \frac{1}{n-k} (\cos(v)|_{-\pi}^{\pi}) \right] \\ &= \frac{b_n}{2} \left[-\frac{1}{k} (\cos(n+k)x|_{-\pi}^{\pi}) - \frac{1}{n-k} (\cos(n-k)x|_{-\pi}^{\pi}) \right] \\ &= \frac{b_n}{2} \left[-\frac{1}{n+k} (\cos(n+k)(\pi) - \cos(n+k)(-\pi)) - \left[\frac{1}{n-k} \cos(n-k)(\pi) - \cos(n-k)(-\pi) \right] \right] \\ &= \frac{b_n}{2} \left[-\frac{1}{n+k} (-1 - (-1)) - \left[\frac{1}{n-k} (-1 - (-1)) \right] \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{b_n}{2} \left[-\frac{1}{n+k}(0) - \left[\frac{1}{n-k}(0) \right] \right] \\
 &= \frac{b_n}{2}(0) = 0.
 \end{aligned}$$

Regresando a A.1

$$\begin{aligned}
 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx &= \frac{a_0}{2} \cos(kx) + \\
 \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos(nx) \cos(kx) dx &+ \int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin(nx) \cos(kx) dx,
 \end{aligned}$$

haciendo las sustituciones de los resultados anteriores, tenemos que

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx = 0 + 0 + a_n(\pi) + 0.$$

Por lo tanto,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx = a_n(\pi).$$

Despejando a_n de la ecuación anterior, se obtiene que

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx.$$

Análogamente tomando 2.1 y multiplicando por $\sin(kx)$ e integrando obtendremos.

$$f(x) \sin(kx) = \frac{a_0}{2} \sin(kx) + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) \sin(kx) + b_n \sin(nx) \sin(kx)],$$

integrando ambos lados de $(-\pi, \pi)$ se obtiene

$$\begin{aligned}
 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \sin(kx) + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \sin(nx) \cos(kx) + b_n \sin(nx) \sin(kx)] dx \\
 &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \sin(kx) dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) \sin(kx) + b_n \sin(nx) \sin(kx)] dx \\
 &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \sin(kx) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos(nx) \sin(kx) dx + \int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin(nx) \sin(kx) dx \right).
 \end{aligned}$$

Sean

$$a = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \sin(kx) dx, \tag{A.5}$$

$$c_n = \int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos(nx) \sin(kx) dx, \tag{A.6}$$

$$d_n = \int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin(nx) \sin(kx) dx. \tag{A.7}$$

Tomando A.5 y resolviendo la integral

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \sin(kx) dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) dx.$$

Haciendo el cambio de variable $u = kx$, se halla $\frac{du}{k} = dx$ y tenemos que

$$\begin{aligned}
 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \operatorname{sen}(kx) dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(u) \frac{du}{k} \\
 &= \frac{a_0}{2k} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(u) du \\
 &= \frac{a_0}{2k} (-\cos(u)) \Big|_{-\pi}^{\pi} \\
 &= -\frac{a_0}{2k} (\cos(kx)) \Big|_{-\pi}^{\pi} \\
 &= -\frac{a_0}{2k} (\cos(\pi(k)) - \cos(-\pi(k))) \\
 &= \frac{a_0}{2k} (0 - 0) = 0.
 \end{aligned}$$

Tomando A.6 y resolviendo la integral

$$\begin{aligned}
 c_n &= \int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos(nx) \operatorname{sen}(kx) dx \\
 &= \int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos(nx) \operatorname{sen}(kx) dx \\
 &= a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \operatorname{sen}(kx) dx \\
 &= a_n \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} (\operatorname{sen}(n+k)x + \operatorname{sen}(n-k)x) dx \\
 &= \frac{a_n}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\operatorname{sen}(n+k)x + \operatorname{sen}(n-k)x) dx \\
 &= \frac{a_n}{2} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(n+k)x dx + \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(n-k)x dx \right] dx.
 \end{aligned}$$

Haciendo sustitución en las dos integrales anteriores $u = (n+k)x$, derivando y despejando obtenemos $\frac{du}{n+k} = dx$, $v = (n-k)x$, derivando y despejando obtenemos $\frac{dv}{n-k} = dx$

$$\begin{aligned}
 \int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos(nx) \operatorname{sen}(kx) dx &= \frac{a_n}{2} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(u) \frac{du}{n+k} + \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(v) \frac{dv}{n-k} \right] \\
 &= \frac{a_n}{2} \left[\frac{1}{n+k} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(u) du + \frac{1}{n-k} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(v) dv \right] \\
 &= \frac{a_n}{2} \left[\frac{1}{n+k} [(-\cos(u)) \Big|_{-\pi}^{\pi}] + \frac{1}{n-k} [(-\cos(v)) \Big|_{-\pi}^{\pi}] \right] \\
 &= \frac{a_n}{2} \left[-\frac{1}{n+k} - \cos(n+k)x \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n-k} (\cos(n-k)x \Big|_{-\pi}^{\pi}) \right] \\
 &= \frac{a_n}{2} \left[-\frac{1}{n+k} [(\cos \pi(n+k) - \cos \pi(n+k))] - \frac{1}{n-k} (\cos \pi(n-k) - \cos \pi(n-k)) \right] \\
 &= \frac{a_n}{2} \left[\frac{1}{n+k} (-1 - (-1)) - \frac{1}{n-k} (-1 - (-1)) \right] \\
 &= \frac{a_n}{2} \left[\frac{1}{n+k} (0) - \frac{1}{n-k} (0) \right]
 \end{aligned}$$

$$= \frac{a_n}{2}(0) = 0.$$

Tomando A.7 y resolviendo la integral con $n = k$ se obtiene

$$\begin{aligned} d_n &= \int_{-\pi}^{\pi} b_n \operatorname{sen}(nx) \operatorname{sen}(kx) dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} b_n \operatorname{sen}(nx) \operatorname{sen}(nx) dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} b_n \operatorname{sen}^2(nx) dx \\ &= b_n \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2(nx) dx \\ &= b_n \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \cos(2nx)}{2} dx \\ &= \frac{b_n}{2} \int_{-\pi}^{\pi} 1 - \cos(2nx) dx. \end{aligned}$$

Haciendo sustitución $u = (2nx)$, derivando y despejando obtenemos $\frac{du}{2n} = dx$

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} b_n \operatorname{sen}(nx) \operatorname{sen}(kx) dx &= \frac{b_n}{2} \int_{-\pi}^{\pi} 1 - \cos(u) \frac{du}{2n} \\ &= \frac{b_n}{2} \left[\int_{-\pi}^{\pi} 1 du - \int_{-\pi}^{\pi} \cos(u) \frac{du}{2n} \right] \\ &= \frac{b_n}{2} \left[(\pi - (-\pi)) - \frac{1}{2n} (\operatorname{sen}(u)|_{-\pi}^{\pi}) \right] \\ &= \frac{b_n}{2} \left[(\pi) - (-\pi) - \frac{1}{2n} (\operatorname{sen}(2nx)|_{-\pi}^{\pi}) \right] \\ &= \frac{b_n}{2} \left[(2\pi) - \frac{1}{2n} \operatorname{sen}(2nx)|_{-\pi}^{\pi} \right] \\ &= \frac{b_n}{2} \left[(2\pi) - \frac{1}{2n} [\operatorname{sen}(2n\pi) - \operatorname{sen}(-2n\pi)] \right] \\ &= \frac{b_n}{2} \left[(2\pi) - \frac{1}{2n} [0 - 0] \right] \\ &= \frac{b_n}{2} (2\pi) = b_n \pi. \end{aligned}$$

Tomando A.7 y resolviendo la siguiente integral con $n \neq k$:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} b_n \operatorname{sen}(nx) \operatorname{sen}(kx) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} b_n \operatorname{sen}(nx) \operatorname{sen}(kx) dx \\ &= b_n \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(nx) \operatorname{sen}(kx) dx \\ &= b_n \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(n-k)x - \cos(n+k)x}{2} dx \\ &= \frac{b_n}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-k)x - \cos(n+k)x dx \end{aligned}$$

$$= \frac{b_n}{2} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-k)x dx - \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+k)x dx \right].$$

Haciendo sustitución $u = (n-k)x$, $v = (n+k)x$, derivando y despejando obtenemos $\frac{du}{n-k} = dx$, $\frac{dv}{n+k} = dx$

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin(nx) \sin(kx) dx &= \frac{b_n}{2} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \cos(u) \frac{du}{n-k} - \int_{-\pi}^{\pi} \cos(v) \frac{dv}{n+k} \right] \\ &= \frac{b_n}{2} \left[\frac{1}{n-k} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(u) du - \frac{1}{n+k} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(v) dv \right] \\ &= \frac{b_n}{2} \left[\frac{1}{n-k} [(\sin(n-k)x)|_{-\pi}^{\pi}) - \frac{1}{n+k} (\sin(n+k)x)|_{-\pi}^{\pi}) \right] \\ &= \frac{b_n}{2} \left[\frac{1}{n-k} (\sin(n-k)(\pi) - \sin(n-k)(-\pi)) - \frac{1}{n+k} (\sin(n+k)(\pi) - \sin(n+k)(-\pi)) \right] \\ &= \frac{b_n}{2} \left[\frac{1}{n-k} (0 - 0) - \frac{1}{n+k} (0 - 0) \right] \\ &= \frac{b_n}{2} \left[\frac{1}{n-k} (0) - \frac{1}{n+k} (0) \right] \\ &= \frac{b_n}{2} (0) = 0. \end{aligned}$$

Regresando a A.1

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \sin(kx) + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin(nx) \cos(kx) + b_n \sin(nx) \sin(kx)) dx,$$

haciendo las sustituciones de los resultados anteriores, tenemos que

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx = 0 + 0 + b_n(\pi) + 0.$$

Por lo tanto,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx = b_n(\pi).$$

Despejando b_n de la ecuación anterior obtenemos que

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx.$$

Apéndice B

Desarrollo ecuación 2.7

Función de salto

Sea la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} -1, & : -\pi < x < 0, \\ 1, & : 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Tomando los coeficientes

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

y

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx.$$

Calculemos los coeficientes de Fourier de f empezando con a_n . Para ello, sea

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 (-1) \cos(nx) dx + \int_0^{\pi} (1) \cos(nx) dx \right],$$

haciendo la sustitución $u = (nx)$, derivando y despejando obtenemos $\frac{du}{n} = dx$, de donde

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 -\cos(u) \frac{du}{n} + \int_0^{\pi} \cos(u) \frac{du}{n} \right] \\ &= \frac{1}{\pi n} \left[\int_{-\pi}^0 -\cos(u) du + \int_0^{\pi} \cos(u) du \right] \\ &= \frac{1}{\pi n} \left[-\sin(u) \Big|_{-\pi}^0 + \sin(u) \Big|_0^{\pi} \right] \\ &= \frac{1}{\pi n} \left[-\sin(nx) \Big|_{-\pi}^0 + (\sin(nx) \Big|_0^{\pi}) \right] \\ &= \frac{1}{\pi n} [-(\sin(0) - \sin(-\pi n)) - ((\sin(\pi n) - \sin(0)))] = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$a_n = 0.$$

Ahora, calculemos los coeficientes de Fourier:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 (-1) \sin(nx) dx + \int_0^{\pi} (1) \sin(nx) dx \right],$$

haciendo sustitución $u = (nx)$, derivando y despejando obtenemos $\frac{du}{n} = dx$. Así,

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 -\operatorname{sen}(u) \frac{du}{n} + \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(u) \frac{du}{n} \right] \\
 &= \frac{1}{\pi n} \left[\int_{-\pi}^0 -\operatorname{sen}(u) du + \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(u) du \right] \\
 &= \frac{1}{\pi n} [\cos(u)|_{-\pi}^0 - (\cos(u)|_0^{\pi})] \\
 &= \frac{1}{\pi n} [\cos(nx)|_{-\pi}^0 - (\cos(nx)|_0^{\pi})] \\
 &= \frac{1}{\pi n} [(\cos(0) - \cos(-\pi n)) - ((\cos(\pi n) - \cos(0)))] \\
 &= \frac{1}{\pi n} [(1 - \cos(-\pi n)) - (\cos(\pi n) + 1)] \\
 &= \frac{1}{\pi n} [2 - 2\cos(-\pi n)].
 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$b_n = \frac{1}{\pi n} [2 - 2\cos(-\pi n)].$$

Apéndice C

Desarrollo ecuación 2.8

Función valor absoluto

Sea la función valor absoluto:

$$f(x) = |x|, \text{ con } -\pi \leq x \leq \pi, \quad (\text{C.1})$$

dada en (2.8).

Calculemos los coeficientes de Fourier de f para senos y cosenos. Calculemos primero

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx.$$

Sustituyendo la función en la integral tenemos que:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 |x| dx + \int_0^{\pi} |x| dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 -x dx + \int_0^{\pi} x dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[- \int_{-\pi}^0 x dx + \int_0^{\pi} x dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[- \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-\pi}^0 + \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi} \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[- \left[\frac{0^2}{2} - \frac{(-\pi)^2}{2} \right] + \left[\frac{\pi^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right] \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{(\pi)^2}{2} + \frac{\pi^2}{2} \right] \\ &= \frac{1}{\pi} (\pi^2) = \pi. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$a_0 = \pi.$$

Ahora, calculemos a_n dada por

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

sustituyendo (2.8) en a_n obtenemos

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos(kx) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 |x| \cos(kx) dx + \int_0^{\pi} |x| \cos(kx) dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 -x \cos(kx) dx + \int_0^{\pi} x \cos(kx) dx \right], \end{aligned}$$

Calculando por separado las dos integrales anteriores. Para la primera integral

$$\int_{-\pi}^0 -x \cos(kx) dx,$$

haciendo cambio de variables e integración por partes

$$p = kx, \quad dk = \frac{dp}{k},$$

$$u = p, \quad du = dp, \quad dv = \cos(p), \quad v = \text{sen}(p),$$

se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^0 -x \cos(kx) dx &= - \int_{-\pi}^0 \frac{p}{k} \cos(kx) \frac{dp}{k} dx \\ &= - \int_{-\pi}^0 \frac{p}{k} \cos(kx) \frac{dp}{k} dx \\ &= - \frac{1}{k^2} \int_{-\pi}^0 p \cos(p) dp \\ &= - \frac{1}{k^2} \left[p \text{sen}(p) \Big|_{-\pi}^0 - \int_{-\pi}^0 \text{sen}(p) dp \right] \\ &= - \frac{1}{k^2} \left[p \text{sen}(p) \Big|_{-\pi}^0 + \cos(p) \Big|_{-\pi}^0 \right] \\ &= - \frac{1}{k^2} \left[(kx) \text{sen}(xk) \Big|_{-\pi}^0 + \cos(kx) \Big|_{-\pi}^0 \right] \\ &= - \frac{1}{k^2} \left[(0) \text{sen}(0) - (k\pi) \text{sen}(-k\pi) + (\cos(0) - \cos(-\pi)) \right], \\ &= - \frac{1}{k^2} \left[0 - 0 + (1 - (-1)^n) \right] \\ &= \frac{1}{k^2} \left[(-1)^n - 1 \right]. \end{aligned}$$

Para la segunda integral

$$\int_0^{\pi} x \cos(kx) dx,$$

haciendo cambio de variables e integración por partes $p = nx$, $k = \frac{dp}{n}$, $u = p$, $du = dp$, $dv = \cos(p)$, $v = \text{sen}(p)$, se obtiene

$$\int_0^{\pi} x \cos(kx) dx = \int_0^{\pi} \frac{p}{k} \cos(kx) \frac{dp}{n} dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\pi \frac{p}{k} \cos(nx) \frac{dp}{n} dx \\
&= \frac{1}{k^2} \int_0^\pi p \cos(p) dp \\
&= \frac{1}{n^2} \left[p \operatorname{sen}(p) \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \operatorname{sen}(p) dp \right] \\
&= \frac{1}{n^2} [p \operatorname{sen}(p) \Big|_0^\pi + \cos(p) \Big|_0^\pi] \\
&= \frac{1}{n^2} [(nx) \operatorname{sen}(nx) \Big|_0^\pi + \cos(nx) \Big|_0^\pi] \\
&= \frac{1}{n^2} [(n\pi) \operatorname{sen}(n\pi) - (0) \operatorname{sen}(0) + (\cos(n\pi) - \cos(0))] \\
&= \frac{1}{n^2} [0 - 0 + ((-1)^n - 1)] \\
&= \frac{1}{n^2} [((-1)^n - 1)].
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi f(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{n^2} [((-1)^n - 1)] + \frac{1}{n^2} [((-1)^n - 1)] = \frac{2}{n^2} [((-1)^n - 1)] \\
&= \frac{2}{n^2} [((-1)^n - 1)].
\end{aligned}$$

Sustituyendo (2.8) en b_n

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi |x| \operatorname{sen}(kx) dx \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 |x| \operatorname{sen}(nx) dx + \int_0^\pi |x| \operatorname{sen}(nx) dx \right] \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 -x \operatorname{sen}(nx) dx + \int_0^\pi x \operatorname{sen}(nx) dx \right],
\end{aligned}$$

Calculando por separado las dos integrales anteriores. Para la primera integral

$$\int_{-\pi}^0 -x \operatorname{sen}(nx) dx,$$

haciendo cambio de variables e integración por partes $p = nx$, $dk = \frac{dp}{n}$, $u = p$, $du = dp$, $dv = \operatorname{sen}(p)$, $v = -\cos(p)$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^0 -x \operatorname{sen}(nx) dx &= - \int_{-\pi}^0 \frac{p}{k} \operatorname{sen}(p) \frac{dp}{n} dx \\
&= - \int_{-\pi}^0 \frac{p}{n} \operatorname{sen}(p) \frac{dp}{n} dx \\
&= - \frac{1}{n^2} \int_{-\pi}^0 p \operatorname{sen}(p) dp \\
&= - \frac{1}{n^2} \left[-p \cos(p) \Big|_{-\pi}^0 - \int_{-\pi}^0 \cos(p) dp \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{n^2} [-p \cos(p)|_{-\pi}^0 - \operatorname{sen}(p)|_{-\pi}^0] \\
&= -\frac{1}{n^2} [-(nx) \cos(nk)|_{-\pi}^0 - \operatorname{sen}(nx)|_{-\pi}^0] \\
&= -\frac{1}{n^2} [(0) \cos(0) - (-n\pi) \cos(-k\pi) + (\operatorname{sen}(0) - \operatorname{sen}(-\pi))] \\
&= -\frac{1}{n^2} [0 + \pi(-1)^n + 0 - 0] \\
&= -\frac{1}{n^2} [\pi(-1)^n] \\
&= -\frac{\pi}{k^2} [(-1)^n].
\end{aligned}$$

Para la segunda integral

$$\int_0^\pi x \operatorname{sen}(nx) dx,$$

haciendo cambio de variables e integración por partes $p = (nx)$, $\frac{dp}{n} = dx$ $u = p$, $du = dp$, $dv = \operatorname{sen}(p)$, $v = -\cos(p)$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi x \operatorname{sen}(nx) dx &= \int_0^\pi \frac{p}{n} \operatorname{sen}(p) \frac{dp}{n} dx, \\
&= \int_0^\pi \frac{p}{k} \operatorname{sen}(p) \frac{dp}{n} dx \\
&= \frac{1}{n^2} \int_0^\pi p \operatorname{sen}(p) dp \\
&= \frac{1}{n^2} \left[-p \cos(p) \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \cos(p) dp \right] \\
&= \frac{1}{n^2} [-p \cos(p) \Big|_0^\pi - \operatorname{sen}(p) \Big|_0^\pi] \\
&= \frac{1}{n^2} [-(kx) \cos(nx) \Big|_0^\pi - \operatorname{sen}(nx) \Big|_0^\pi] \\
&= \frac{1}{n^2} [-(n\pi) \cos(n\pi) - (0) \cos(0)] - (\operatorname{sen}(\pi) - \operatorname{sen}(0)) \\
&= \frac{1}{n^2} [-[-\pi(-1)^n - 0 - 0 + 0]] \\
&= \frac{1}{n^2} [\pi(-1)^n n] \\
&= \frac{\pi}{n^2} [(-1)^n].
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi f(x) \operatorname{sen}(kx) dx = -\frac{1}{k^2} [\pi(-1)^n] + \frac{1}{k^2} [\pi(-1)^n] = 0.$$

Despejando b_n de la ecuación anterior se tiene

$$b_n = 0.$$

Retomando la serie de Fourier de f :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)],$$

y sustituyendo los coeficientes de fourier a_0 , a_n , b_n en la serie de fourier de f obtenemos

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2\pi} [(-1)^n - 1] \cos(nx).$$

Bibliografía

- [1] Abu Hammad, I. and Khalil, R. (2014). Fractional Fourier series with applications. *Am. J. Comput. Appl. Math.*, 4(6), 187-191.
- [2] Ameen, IG, Baleanu, D. y Hussien, HS (2024). Método eficiente para la resolución de ecuaciones integrodiferenciales fraccionarias de núcleo singular débil no lineal. *AIMS Math*, 9, 15819-15836.
- [3] Apostol, T. M. (1986). *Análisis matemático*, Editorial reverté.
- [4] De la Vega, E., & CALABRESE, C. C. (2021). Ecuaciones fraccionarias y sus aplicaciones: aportes a una ecología integral.
- [5] Di Teodoro, A. (2020). Cálculo fraccionario para ecuaciones diferenciales. *ACI Avances en Ciencias e Ingenierías*, 12(2), 24-24.
- [6] Duoandikoetxea, J. (2003). Lecciones sobre las series y transformadas de Fourier. Recuperado de <http://www.ugr.es/acanada/docencia/matematicas/analisisdefourier/Duoandikoetxeafourier.pdf>
- [7] Elzaki, T. M. (2012). On The New Integral Transform"Elzaki Transform"Fundamental Properties Investigations and Applications. *Global Journal of Mathematical Sciences: Theory and Practical*, 4(1), 1-13.
- [8] Elzaki, T. M. (2011). The new integral transform Elzaki transform. *Global Journal of pure and applied mathematics*, 7(1), 57-64.
- [9] Feng, Z., Ye, L., and Zhang, Y. (2020). On the fractional derivative of Dirac delta function and its application. *Advances in Mathematical Physics*, 2020, 1-7.
- [10] Guía-Calderón, M., Rosales-García, JJ, Guzmán-Cabrera, R., González-Parada, A., y Álvarez-Jaime, JA (2015). El calculo diferencial e integral fraccionario y sus aplicaciones. *Acta universitaria*, 25 (2), 20-27.
- [11] Khalil, R., Al Horani, M., Yousef, A., Sababheh, M. (2014). A new definition of fractional derivative. *Journal of computational and applied mathematics*, 264, 65-70.
- [12] Ozores, A. L. (2014). Cálculo fraccionario y dinámica newtoniana. *Pensamiento Matemático*, 4(1), 77-105.
- [13] Medina, J. (2010). Análisis de Fourier para el tratamiento de señales. *Proc. XII Encuentro de Matemáticas y sus Aplicaciones*, EPN-Quito, Ecuador.
- [14] Miller, K. S., and Ross, B. (1993). *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*. (No Title) (libro extracto)

- [15] Muñoz, J. M. S. (2011). Historias de Matemáticas Génesis y desarrollo del Cálculo Fraccional. *Pensamiento Matemático*, (1), 4.
- [16] Ozoires, A. L. (2014). Cálculo Fraccionario y dinámica newtoniana. *Pensamiento Matemático*, 4(1), 77-105.
- [17] Puente-Córdova, J. G. (2020). La derivada conformable y sus aplicaciones en ingeniería. *Ingenierías*, 23(88), 20-31.
- [18] Rodríguez Martín, M. (2020). Introducción al cálculo fraccionario y a los modelos de crecimiento tumoral clásicos y fraccionarios.
- [19] Singh, Y., Gill, V., Kundu, S. y Kumar, D. (2019). Sobre la transformada de Elzaki y sus aplicaciones en la ecuación del láser de electrones libres fraccional. *Acta Univ. Sapientiae Math* , 11 (2), 419-429.
- [20] Svirin Alex, Phd. (2009-2024). Cálculo, Series de Fourier. <https://math24.net/fourier-series-applications-differential-equations.html>
- [21] Sumiati, I., Sukono, K., & Bon, A. T. (2020). Solution of Fractional Ordinary Differential Equations Using the Elzaki-Adomian Decomposition Method. In *Proceedings of the 5th NA International Conference on Industrial Engineering and Operations Management*, Detroit, Michigan, USA, August (pp. 10-14).
- [22] Torres-Hernández, A.& Brambila, Fernando. (2017). Introducción al Cálculo Fraccional.
- [23] Trentin, P. H. (2011). MATEMÁTICA NO BRASIL: As Traduções de Manoel Ferreira de Araújo Guimarães (1777-1838) das obras de Adrien Marie Legendre.
- [24] Vasquez, L., & Velasco, P. (2011). El cálculo fraccionario como Instrumento de modelización. *Prepublicaciones del departamento de matemática aplicada*, 3(4), 1-15.
- [25] Vergel Ortega, M., Rincón Leal, O. L., & Ibargüen-Mondragón, E. (2022). Ecuaciones diferenciales y aplicaciones.