



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Corrimientos al rojo y al azul en un agujero negro de
Schwarzschild no conmutativo

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

LICENCIADO EN FÍSICA

por

Jonathan Tonacatl Guevara

Asesorado por

Dr. Alfredo Herrera Aguilar

Dr. Cupatitzio Ramírez Romero

Puebla, Pue.
29 de mayo de 2024

Corrimientos al rojo y al azul en un agujero negro de
Schwarzschild no conmutativo

Jonathan Tonacatl Guevara

29 de mayo de 2024

Título: Corrimientos al rojo y al azul en un agujero negro de Schwarzschild no conmutativo

Estudiante: JONATHAN TONACATL GUEVARA

COMITÉ

Gerardo Francisco Torres del Castillo
Presidente

Iraís Rubalcava García
Secretario

Roberto Cartas Fuentevilla
Vocal

Dr. Alfredo Herrera Aguilar
Asesor

Agradecimientos

Este camino ha sido largo y extenuante; sin embargo, se concluye con la satisfacción de haber aprendido y conocido.

Agradezco a mis padres por darme su infinito amor y apoyo durante estos años. Cuando el camino se volvió poco claro, ellos fueron la lámpara en la oscuridad. Agradezco su guía y sus palabras de afecto y amor que me consolaron en tiempos de tristeza y angustia.

A mis hermanos, por darme una razón más para continuar. Fueron mi ejemplo a seguir y cada uno aporta algo importante a mi vida. Gracias por esos días de felicidad y risas.

A mi princesa y a mi superhéroe, porque llegaron en el momento justo. Que la vida nunca acabe con sus sonrisas.

A aquellos amigos de la universidad, que volvieron la vivencia en la universidad más amena. Por muchos más juegos como aquellos entre clases.

A mi asesor, el Dr. Alfredo Herrera, por su paciencia y apoyo en esta tesis. Sin duda, estos meses fueron una travesía ardua, pero el conocimiento adquirido no tiene comparación.

Al jurado, por darme parte de su precioso tiempo para leer este trabajo y hacerme observaciones productivas.

Índice general

| | |
|---|-----------|
| Resumen | IX |
| Introducción | XI |
| 1. Notación y convenciones | 1 |
| 2. Antecedentes | 3 |
| 2.1. Conmutatividad en gravedad y otras teorías | 3 |
| 2.2. La sustitución de la delta de Dirac δ por una función gaussiana | 3 |
| 2.3. Gravedad no conmutativa de estudio | 6 |
| 3. Métrica de Schwarzschild deformada | 9 |
| 4. Corrimiento de frecuencia en Schwarzschild | 13 |
| 5. Horizonte de eventos y movimiento geodésico en el espacio no conmutativo | 19 |
| 5.1. Horizonte de eventos | 19 |
| 5.2. Movimiento en el espacio-tiempo | 21 |
| 6. Corrimiento de frecuencia en Schwarzschild no conmutativo | 25 |
| Conclusión | 31 |
| Bibliografía | 32 |

Resumen

En este trabajo se obtendrá una expresión para los corrimientos al rojo y al azul de fotones emitidos por un objeto de prueba masivo que orbita un agujero negro de Schwarzschild deformado (no conmutativo). La métrica de este agujero negro es obtenida al considerar una distribución gaussiana que codifica la no conmutatividad del espacio-tiempo en la componente T^0_0 del tensor de energía-momento, en vez de la convencional delta de Dirac para una fuente puntual. Estos corrimientos se expresarán en términos de la masa M del agujero negro y del parámetro no conmutativo η de la teoría. Este último da cuenta de la no conmutatividad de las coordenadas, de tal modo que en el límite $\eta \rightarrow 0$ recuperamos las expresiones comunes para los corrimientos al rojo y al azul de un agujero negro de Schwarzschild. El hecho de considerar la métrica deformada se traduce en un agujero negro regular, sin singularidad física. Primero obtenemos la expresión para el corrimiento de la frecuencia en la solución original de Schwarzschild y a continuación se calcula su formulación análoga en la métrica no conmutativa. Se concluye con una comparación de ambas expresiones.

Introducción

Con la presentación de la relatividad general al mundo en su reconocida charla ante la Academia Prusiana de las Ciencias en Berlín el 25 de noviembre de 1915 por parte de Albert Einstein, se abrieron las puertas al avance en el conocimiento humano y al tecnológico, como el desarrollo del GPS. Esta rama de la física desde entonces se ha diversificado en otras áreas del saber, importantes en nuestros días, como la cosmología, la cual intenta responder preguntas sobre el inicio, el desarrollo y el final de nuestro universo (*¿de dónde venimos y adónde vamos?*). Preguntas que la teoría de la gravedad de Newton no podía responder ahora encuentran una respuesta, como la precesión de la órbita de Mercurio descubierta por el astrónomo Le Verrier en 1859.

Nunca sabremos si las teorías físicas son ciertas del todo o si son la última palabra en su campo de estudio, sino solo si son capaces de predecir lo que ya conocemos y preguntarse lo que pueden predecir. En el caso de la relatividad general, esta predijo la deflexión de la luz debido a la curvatura del espacio-tiempo, confirmada por Arthur Eddington en el eclipse de 1919, y más reciente, la radiación gravitacional en forma de onda debido a eventos cósmicos masivos confirmados al detectar las ondas gravitacionales en 2015. Otra de las predicciones hechas por esta teoría es sobre el final de las vidas de las estrellas, en el cual, para estrellas suficientemente masivas (mayores a 1.4 masas solares) predice un colapso gravitacional, derivando en un objeto estelar sorprendente, un agujero negro. Se estima que en el centro de cada galaxia existe un objeto de este tipo. Estos cuerpos se caracterizan por el hecho de que tienen un campo gravitacional tan fuerte que ni la luz puede escapar de él, como comúnmente se dice. Los primeros registros que se tiene de una descripción similar son, sorprendentemente, las estrellas negras imaginadas por John Michell en 1783, quien las describe como objetos tan masivos y densos que ni la luz puede escapar de ellas.

Si uno quiere poner toda una teoría en una sola ecuación, no hay nada tan admirable como lo que hace la teoría de la relatividad general en sus famosas ecuaciones de campo, las cuales relacionan materia y energía con la curvatura del espacio-tiempo, lo que habitualmente se conoce como campo gravitacional. Poco tiempo después de que Einstein presentara sus ecuaciones de campo, ya había una solución a estas, la presentada por Karl Schwarzschild un par de meses después; dicha métrica describe el campo gravitacional de un objeto esféricamente simétrico en un punto en el vacío. Esta solución no es la única exacta, en el libro [1] se presentan 97 soluciones exactas a dichas ecuaciones de campo.

La relatividad general se presenta como la descripción del mundo macroscópico, mientras que la mecánica cuántica lo hace con el mundo microscópico y, así, se manifiesta como una de las grandes teorías de la física en la actualidad. Grandes y largas investigaciones se han hecho para unificar ambas teorías y dar una descripción unificada del mundo, entre ellas están la teoría de cuerdas. También se han hecho estudios para dar una visión general y específica de los agujeros negros en nuevas teorías de la gravedad, algunos ejemplos son: los agujeros negros en gravedad cuántica de lazos [2], los dados en *gravity's rainbow* [3] o en la gravedad no conmutativa [4]. Con el fin de proponerse la siguiente gran teoría, cada uno de ellos intenta resolver algún problema del mundo macro desde el punto de vista microscópico, por ejemplo, intentan eliminar o curar los sinsentidos físicos que se dan en la teoría de la relatividad, como la singularidad física en cuya región circundante se predice una completa ruptura de las leyes físicas; también se considera hacer algunas correcciones en estos nuevos modelos, como en la termodinámica de los agujeros negros [4, 5], o investigar de

manera más minuciosa la evaporación de estos últimos [6]. El presente trabajo se ofrece como una extensión de estudios previos, es decir, amplía y complementa la investigación realizada en los trabajos anteriormente mencionados, para la gravedad no conmutativa, pero utilizando el enfoque del tensor momento-energía para calcular los corrimientos al rojo y al azul, conceptos importantes, por ejemplo, para estimar velocidades de objetos estelares.

Este trabajo consiste en derivar de manera detallada las expresiones para el corrimiento al azul o al rojo de fotones emitidos por objetos en movimiento circular alrededor de un agujero negro que describe un espacio-tiempo no conmutativo tipo Schwarzschild y obtener el caso Schwarzschild común en el límite cuando hacemos desaparecer la no conmutatividad. En el capítulo 2 se describe la historia de la conmutatividad en relatividad general y describimos brevemente algunos modelos no conmutativos, tanto dentro de la relatividad como fuera de este. El mejor modelo para tomar en cuenta la no conmutatividad es la sustitución de la delta de Dirac en el producto escalar, en el contexto de la mecánica cuántica, por una función gaussiana que codificada el parámetro de no conmutatividad, y luego esta idea es extendida a relatividad general. En el capítulo 3 se deriva la métrica de Schwarzschild no conmutativa suponiendo un espacio-tiempo esféricamente simétrico y se muestra la regularidad, con ayuda de los escalares de Ricci y de Kretschmann, del espacio-tiempo en el origen, quitando la singularidad física del caso Schwarzschild conmutativo. En el capítulo 4 se detalla el procedimiento para obtener los corrimientos en el caso Schwarzschild conmutativo con ayuda de constantes de movimiento, energía total y momento angular. En el capítulo 5 se describen brevemente algunos conceptos relacionados y de importancia en agujeros negros, como el horizonte de eventos y el movimiento geodésico, en particular, para el movimiento circular. Finalmente en el capítulo 6 se derivan, de modo completamente análogo al caso conmutativo, los corrimientos para la métrica de Schwarzschild deformada y se muestra que en el límite cuando el parámetro no conmutativo tiende a cero recuperamos las expresiones comunes, tanto de la métrica como de los corrimientos.

Capítulo 1

Notación y convenciones

Ahora estableceremos cuáles son las notaciones y convenciones que se usarán a lo largo del documento. Esto debido a que en diferentes fuentes (comúnmente en libros) pueden utilizarse diferentes convenciones; como por ejemplo, uno puede encontrar distintas ‘definiciones’ del tensor de Riemann, que al final son equivalentes, donde la diferencia radica en cómo acomodamos los términos de la definición y sus signos, compárense los índices en la ecuación (17.7) de [7] con los de la ecuación (3.4) en [8].

La primera convención que se hará será con respecto al sistema de coordenadas que utilizaremos. El único sistema de coordenadas que se utilizará en los cálculos de este trabajo será el esférico y su relación con el cartesiano vendrá dada por

$$x_1 = x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad x_2 = y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad x_3 = z = r \cos \theta, \quad (1.0.1)$$

donde r será la distancia del origen al punto de interés y θ será el ángulo polar de este, así como φ será el ángulo azimutal. Un esquema de esto se puede ver en la Figura 1.

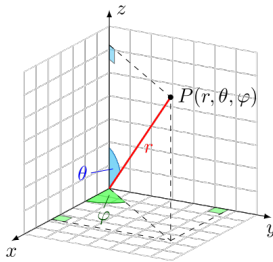


Figura 1.1: Autor: Cristian Quinzacara. Diagrama de coordenadas esféricas a rectangulares. Wikipedia.

Vayamos a las convenciones usualmente hechas en relatividad general. En un espacio-tiempo dado, los índices griegos correrán del 0 al 3 y así etiquetarán a las coordenadas de un punto general del espacio-tiempo; índices latinos correrán del 1 al 3 y etiquetarán las coordenadas espaciales, por tanto, el índice 0 será para etiquetar la coordenada temporal. La signatura del espacio-tiempo que se usará a partir de la siguiente sección es $(-, +, +, +)$.

Una vez especificado lo anterior podemos continuar definiendo los tensores y símbolos comúnmente usados en relatividad general y que serán empleados a lo largo del trabajo con esta convención; entre ellos están los símbolos de Christoffel, los cuales están definidos por

$$\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\partial_{\beta} g_{\alpha\nu} + \partial_{\alpha} g_{\beta\nu} - \partial_{\nu} g_{\alpha\beta}), \quad (1.0.2)$$

donde el símbolo ∂_{α} será usado para indicar derivada parcial con respecto a x^{α} y g será exclusivo para indicar el tensor métrico.

Otro tensor importante será el tensor de Riemann, el cual, para nosotros, será definido por

$$R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} = \partial_{\mu} \Gamma^{\alpha}_{\beta\nu} - \partial_{\nu} \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\gamma} \Gamma^{\gamma}_{\beta\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\gamma} \Gamma^{\gamma}_{\beta\mu}. \quad (1.0.3)$$

El tensor de Ricci será definido al contraer el primer y el tercer índice de (1.0.3)

$$R_{\beta\nu} = R^{\alpha}_{\beta\alpha\nu}. \quad (1.0.4)$$

Por tanto, el escalar de Ricci será dado al contraer ambos índices de este tensor $R = R^\beta_\beta$. Todo cálculo que involucre estos tensores o los símbolos serán hechos usando estas convenciones.

Por simplicidad, tomaremos el valor de la constante gravitacional como $G = 1$ y del mismo modo la velocidad de la luz, $c = 1$, esto con el objetivo del volver los cálculos un poco más fáciles de manejar. Siguiendo esta convención y dada la signatura anterior podemos escribir la solución de Schwarzschild, la cual resuelve las ecuaciones de Einstein con tensor momento-energía igual a cero, como

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \text{sen}^2 \theta d\varphi^2, \quad (1.0.5)$$

donde M , siendo estrictos, debe ser GM/c^2 y en esta última expresión M es la masa del agujero negro; pero por la convención tomaremos M en (1.0.5) como la masa del agujero negro.

En trabajos que tratan la gravedad no conmutativa, el parámetro de no conmutatividad es denotado como θ , pero en su lugar, a lo largo de este trabajo este parámetro es denotado como η , a excepción de la sección de antecedentes, donde se queda con θ para coincidir con los autores de los artículos comentados. El cambio se hace para evitar posible confusión con la notación del ángulo polar. Por tanto, la relación de no conmutatividad entre coordenadas es

$$[x^\alpha, x^\beta] = \eta^{\alpha\beta}. \quad (1.0.6)$$

A excepción de cuando se utilice la letra γ como superíndice o subíndice, esta se referirá a la función gamma incompleta inferior, cuya definición es

$$\gamma(a, x) = \int_0^x t^{a-1} e^{-t} dt. \quad (1.0.7)$$

Todas las propiedades usadas en las siguientes secciones pueden leerse en [9, 10]. En estos trabajos o en las referencias ahí citadas pueden verse las demostraciones de dichas propiedades.

Ocasionalmente, haremos mención de la función error $\text{erf}(z)$, cuya relación con la función gamma anterior es dada por

$$\text{erf}(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \gamma\left(\frac{1}{2}, z^2\right). \quad (1.0.8)$$

Habrán dos regiones que distinguiremos en el trabajo, aquella que llamaremos de radios pequeños y la de radios grandes. En la primera se cumple $r/\sqrt{\eta} \ll 1$ y en la segunda $r/\sqrt{\eta} \gg 1$. Cuando hablemos de estas regiones nos estaremos refiriendo a que en esta región, según sea el caso, se cumple alguna de estas relaciones.

Capítulo 2

Antecedentes

2.1. Conmutatividad en gravedad y otras teorías

Las cuestiones de la conmutatividad en gravedad surgen del mismo problema, pero desde una perspectiva más general, a la de la geometría no conmutativa. Sin embargo, esta última no es una materia aparte, uno originalmente entiende conceptos geométricos desde una visión física. Cuestiones físicas, como la naturaleza del espacio-tiempo a escalas infinitamente pequeñas, se traducen a relaciones métricas del espacio (donde la conexión a la geometría es dada por la geometría de Riemann). Algunas de estas tocan la naturaleza cuántica del espacio-tiempo, que se ven reflejadas por relaciones de no conmutación entre coordenadas, en analogía a la relación de incertidumbre de Heisenberg. Como mencionamos, hay una dualidad entre la no conmutatividad de la física y la de la geometría, los ejemplos que la física proporciona para espacios cuya álgebra coordenada ya no es conmutativa son ricos, por mencionar algunos, los espacios fase de la mecánica clásica o de la mecánica cuántica o algunos más complicados, como el toro no conmutativo que aparece en teoría de cuerdas y en la teoría M. Considerar la no conmutatividad en física, así también en matemáticas, puede hacerse en diversas maneras. Una de ellas es considerar deformaciones de estructuras matemáticas ya establecidas, lo que nos permite sondear el vecindario conmutativo y así, bajo ciertas condiciones, podemos volver a este mundo; por lo tanto, la no conmutatividad se presenta como una extensión de la conmutatividad. Así también podemos presentar la no conmutatividad de manera ya no tan directa, como se da en los grupos cuánticos de la física, donde esta característica está en el tipo de álgebra (de Weyl, por poner un ejemplo sencillo) que se usa para relacionar este a los grupos.

2.2. La sustitución de la delta de Dirac δ por una función gaussiana

Los conceptos relacionados con la conmutatividad, visto como una operación en la cual no importa el orden en la que se realiza, aparecen naturalmente en los cursos de física a nivel superior, así, aunque los estudiantes rara vez reparan en ellos forman parte de sus materias a nivel fundamental y como dos ejemplos comunes son la mecánica teórica y física cuántica, donde relaciones de no conmutación suceden en sus álgebras (álgebra de Poisson y el álgebra de Heisenberg o de operadores lineales, respectivamente).

Para tratar más formalmente estos dos ejemplos vayamos a la definición de una álgebra en matemáticas, cuya estructura viene regida por dos operaciones, una suma y una multiplicación con reglas que regulan la interacción de estas, y un producto escalar que junto con la suma la vuelve un espacio vectorial. Es casi inmediato pensar en algunos ejemplos más generales de álgebras, como el

álgebra de matrices, de funciones en los reales o bien, las álgebras de Lie en geometría diferencial. Pero para tratar con los ejemplos de a principio, se pide una estructura de álgebra de Lie, este no es más que un espacio vectorial con una estructura adicional, definida por los corchetes de Lie $[_, _] : V \times V \rightarrow V$ (o la podemos visualizar como una álgebra con una multiplicación que cumple la definición 1 de [11]), que cumple las siguientes propiedades: bilinealidad, antisimetría y la identidad de Jacobi. En toda álgebra asociativa se tiene una estructura de álgebra de Lie (ejemplo (9) [11]) si uno define los siguientes corchetes de Lie $[x, y] = xy - yx$, dados a través de la multiplicación del álgebra. Es esta última relación la que es reconocida por estudiantes, por ejemplo, en la aplicación sucesiva de operadores lineales en mecánica cuántica y sus conmutadores. Para la estructura de Poisson (álgebra más estructura de Lie con regla de Leibniz) de la mecánica analítica se dan las siguientes relaciones entre coordenadas canónicas y momentos asociados, a través de los corchetes de Poisson (como se suelen conocer en esta materia)

$$\{q_i, q_j\} = 0, \quad \{p_i, p_j\} = 0, \quad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij}. \quad (2.2.1)$$

De la última ecuación vemos un álgebra no conmutativa. Para mecánica cuántica, en su álgebra de operadores lineales, los corchetes de Lie se dan entre los operadores de posición y los de momento, la relación de interés es

$$[X_i, P_j] = i\hbar\delta_{ij}. \quad (2.2.2)$$

Aunque los otros corchetes, posición-posición y momento-momento son cero, se han hecho algunas investigaciones sobre qué pasaría si uno supone que estos últimos corchetes no son nulos, efectos magnéticos externos surgen y correcciones al modelo del átomo de hidrógeno son sugeridos [12, 13, 14]. En trabajos sobre mecánica clásica donde se supone que los corchetes de Poisson posición-posición o momento-momento son diferentes de cero en (2.2.1), no se hace una reformulación completa de la teoría, sino que se busca implementar dichas relaciones utilizando lo que es ya conocido, por ello uno de los caminos que sugieren es utilizar transformaciones canónicas, una formulación que es equivalente a tomar directamente en cuenta dichas relaciones, como se muestra en [15, 13]. Es esto, basarse en lo ya conocido, lo que nos resultará de utilidad, como más adelante pondremos de manifiesto.

Otra sugerencia hecha en el contexto de la mecánica clásica y de las pocas que mencionaremos es la que se basa en una deformación, la conocida deformación alfa estrella del paréntesis de Poisson en el álgebra de Poisson de mecánica analítica. En ella uno define un nuevo producto en términos de los productos conmutativos de las funciones involucradas, este nuevo producto es [15, 16]

$$(f \star_\alpha g)(u) = \exp \left[\frac{1}{2} \alpha^{ab} \partial_a^{(1)} \partial_b^{(2)} \right] f(u_1)g(u_2)|_{u_1=u_2=u}, \quad (2.2.3)$$

donde α^{ab} es una matriz antisimétrica constante a bloques y las derivadas actúan en cada una de las variables u_1 o u_2 según indica el superíndice. Al final, el nuevo paréntesis de Poisson es definido por

$$\{f, g\}_\alpha = f \star_\alpha g - g \star_\alpha f. \quad (2.2.4)$$

Se puede tratar con diferentes definiciones de α^{ab} , pero de manera general se cumple

$$\{x_i, x_j\}_\alpha = \theta_{ij}, \quad \{p_i, p_j\}_\alpha = \beta_{ij}, \quad (2.2.5)$$

donde θ_{ij} y β_{ij} son elementos de los bloques en la diagonal de la matriz α . Cuando uno toma, según la dimensión del espacio que se maneje,

$$\alpha^{ab} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.2.6)$$

se recuperan los paréntesis de Poisson ya conocidos. Debe notarse, de nuevo, la no reformulación completa de la teoría.

Ahora podemos aplicar la no conmutatividad, corchetes diferentes de cero, a variables arbitrarias \hat{x}^i en el álgebra de polinomios en las variables \hat{x}^i [17]. Las relaciones de no conmutatividad se leen

$$[\hat{x}^i, \hat{x}^j] = i\theta^{ij}. \quad (2.2.7)$$

Se extiende el álgebra de polinomios a un álgebra de funciones de las variables no conmutativas al usar el desarrollo en serie de las funciones. Nos gustaría relacionar esta álgebra con su contraparte conmutativa en la cual sus variables son x^i . Esta relación, morfismo de álgebras, se da a través de un mapeo $\mu : \mathcal{A}_{\hat{x}} \rightarrow \mathcal{A}_x$ y relaciona las bases de cada álgebra y por extensión se aplica a una función arbitraria, además cumple que si $\hat{f}(\hat{x}), \hat{g}(\hat{x}) \in \mathcal{A}_{\hat{x}}$ luego $\hat{f}\hat{g}(\hat{x}) \in \mathcal{A}_{\hat{x}}$ es llevado a

$$f \star g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i}{2}\right)^n \frac{1}{n!} \theta^{\rho_1 \sigma_1} \dots \theta^{\rho_n \sigma_n} (\partial_{\rho_1} \dots \partial_{\rho_n} f(x)) (\partial_{\sigma_1} \dots \partial_{\sigma_n} g(x)), \quad (2.2.8)$$

un producto de funciones ordinarias. En lo anterior, para economizar, las θ^{ij} son elementos de α . Al producto estrella en (2.2.8) se le conoce como producto Moyal-Weyl [18]. Es una ‘representación’ fiel del espacio de variables no conmutativas en un espacio casi ordinario, casi debido al producto tan intrincado que introduce. Pero tratar con tal producto para fines de cálculos está más allá de nuestras capacidades, es por eso que uno lo expande y considera solo términos de bajo orden.

Al considerar este producto para formular una teoría de campos cuánticos no conmutativa se tiene problemas de divergencias UV no renormalizables, debido a que solo se considera algunos términos en la expansión para fines prácticos. Así, se busca caminos alternativos para aplicar la no conmutatividad, quizá de manera indirecta. Se trata de una formulación que se apoya en estados coherentes dentro de la teoría cuántica de campos, sirviendo como un reemplazo para el producto \star , el cual es finito en el ultravioleta de manera explícita [19], la que mejores resultados da para hacer cálculos. Discutir dichas correcciones derivadas de este enfoque está más allá del alcance de este trabajo y una discusión completa puede verse en la biografía citada. Aquí solo nos concentraremos en la parte clave de este enfoque.

Un estado coherente $|\xi\rangle$, desde el marco de trabajo de la óptica cuántica [20, 21], es definido como un eigenestado del operador de destrucción a , el cual es introducido en el contexto del oscilador armónico cuántico, con eigenvalor $\xi \in \mathbb{C}$,

$$a|\xi\rangle = \xi|\xi\rangle, \quad (2.2.9)$$

con la notación estándar en la que ξ etiqueta tanto el eigenestado como el eigenvalor.

El estado ‘profundo’ o de energía más baja $|0\rangle$ es un estado coherente con $\xi = 0$. En esta teoría uno define el operador desplazamiento D como

$$D(\xi) = e^{\xi a^\dagger - \xi^* a}, \quad (2.2.10)$$

donde $\xi = |\xi|e^{i\varphi} \in \mathbb{C}$ es un número complejo y a^\dagger y a son los operadores de creación y destrucción. Con lo anterior uno demuestra que

$$|\xi\rangle = D(\xi)|0\rangle. \quad (2.2.11)$$

Por lo tanto, se encuentra

$$|\xi\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\xi|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\xi a^\dagger)^n}{n!} |0\rangle. \quad (2.2.12)$$

Lo siguiente reúne los resultados mostrados en [22], referente a este enfoque. Por simplicidad tomemos un plano bidimensional no conmutativo, el cual tiene un conjunto de coordenadas q_1, q_2 que cumple, para el parámetro no conmutativo θ ,

$$[q_1, q_2] = i\theta, \quad (2.2.13)$$

Se construyen los siguientes operadores de destrucción y creación en términos de coordenadas solamente

$$A \equiv q_1 + iq_2, \quad A^\dagger \equiv q_1 - iq_2. \quad (2.2.14)$$

Esta definición está basada en que ahora los operadores de posición ya no tienen eigenvectores de posición comunes, debido a (2.2.13), y así no podemos tomar la definición clásica de mecánica cuántica. Los estados (2.2.12) son eigenestados para ambos operadores, por lo que resulta conveniente trabajar con ellos.

Definimos los nuevos estados coherentes $|\xi\rangle$ con base en los anteriores operadores. Los valores esperados de las coordenadas no conmutativas entre estados coherentes viene a definirse por

$$\langle \xi | q_1 | \xi \rangle = \Re(\xi) = x_1, \quad \langle \xi | q_2 | \xi \rangle = \Im(\xi) = x_2. \quad (2.2.15)$$

Se interpreta a $\vec{x} = (x_1, x_2)$ como la posición media de la partícula sobre el plano no conmutativo. Si $\vec{p} = (p_1, p_2)$ es otro vector real de dos componentes, se obtiene la versión no conmutativa del operador de onda plana $\exp(i\vec{p} \cdot \vec{q})$ y su valor medio será

$$\langle \xi | e^{i(\vec{p} \cdot \vec{q})} | \xi \rangle = \exp\left(-\theta \frac{\vec{p}^2}{4} + i\vec{p} \cdot \vec{x}\right). \quad (2.2.16)$$

La función de onda de una partícula puntual libre en el plano no conmutativo es dada por

$$\langle \vec{p} | \vec{x} \rangle_\theta \equiv \exp\left(-\theta \frac{\vec{p}^2}{4} + i\vec{p} \cdot \vec{x}\right). \quad (2.2.17)$$

Con ello el producto escalar, amplitud, entre dos estados de diferente posición media es

$$\begin{aligned} \langle \vec{y} | \vec{x} \rangle &= \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \langle \vec{y} | \vec{p} \rangle \langle \vec{p} | \vec{x} \rangle \\ &= \frac{1}{2\pi\theta} \exp\left(-\frac{(\vec{x} - \vec{y})^2}{2\theta}\right). \end{aligned} \quad (2.2.18)$$

Es de esto último que uno nota la sustitución de la función delta de Dirac que se tiene en mecánica cuántica usual (conmutativa) por una función gaussiana en el producto escalar para el caso no conmutativo. Un paso que será clave a la hora de considerar no conmutatividad en gravedad, donde no formularemos una teoría completa, sino que basta hacer un pequeño cambio (como aquí, donde el resultado del enfoque es cambiar una función por otra).

2.3. Gravedad no conmutativa de estudio

Aunque el producto Moyal-Weyl definido por (2.2.8) fue originalmente formulado en el contexto de la mecánica cuántica, resulta un buen candidato para formular una teoría de la gravedad no conmutativa, ya que con ayuda de este podemos deformar la teoría clásica de la gravedad. Al hacer uso de este producto, uno reformula las bases de la teoría de relatividad general, la geometría Riemanniana.

Un primer paso consiste en que si ya sabemos cómo opera el producto Moyal-Weyl sobre funciones, entonces ya sabemos cómo actúa en campos vectoriales, ya que estos operan sobre funciones

$$\hat{\xi}^\rho \hat{\partial}_\rho f = \xi^\rho \star \partial_\rho f = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i}{2}\right)^n \frac{1}{n!} \theta^{\rho_1 \sigma_1} \dots \theta^{\rho_n \sigma_n} (\partial_{\rho_1} \dots \partial_{\rho_n} \xi^\rho) (\partial_{\sigma_1} \dots \partial_{\sigma_n} \partial_\rho f), \quad (2.3.1)$$

donde el primer miembro está definido en el espacio no conmutativo con un campo vectorial $\hat{\xi}^\rho$ que actúa sobre la función \hat{f} , mientras que los demás miembros lo están en el espacio usual

(conmutativo). Con lo anterior podemos considerar operadores diferenciales de mayor orden en el álgebra $\mathcal{A}_{\hat{x}}$

$$\hat{X}\hat{f} = \sum_r \hat{\xi}_r^{\mu_1 \dots \mu_r} \hat{\partial}_{\mu_1} \dots \hat{\partial}_{\mu_r} \hat{f}. \quad (2.3.2)$$

Este operador puede llevarse al espacio \mathcal{A}_x , $X \star f = \bar{\Xi}_X$, siendo el último un operador similar en forma al dado en (2.3.1).

Considerar escalares, campos vectoriales, vectores contravariantes o en general, tensores en $\mathcal{A}_{\hat{x}}$, es considerar sus leyes de transformación bajo un cambio de coordenadas; campos vectoriales generan transformaciones coordenadas, difeomorfismos, es por ello que se considera deformar el álgebra de difeomorfismos en esta teoría de la gravedad. Sabiendo como debe comportarse todo, podemos comenzar a construir los elementos de la relatividad general: conexiones, derivadas covariantes, tensores de torsión y de Riemann y en especial el tensor métrico [18]. Pero a cada paso que damos en esta teoría, los cálculos se vuelven más complejos; aunque teóricamente esta es una teoría interesante que vale la pena revisar, para cuestiones prácticas se vuelve imposible de tratar, de ahí que se consideren perturbaciones si se sigue este camino.

Otro enfoque es reformular la teoría de la gravedad en términos de campos tetrada, el cual tiene la ventaja de llevar la métrica a una de Minkowski y luego considerar las deformaciones de estos campos que ahora involucran un parámetro de no conmutatividad [23, 24].

Sin embargo, este trabajo está basado en la idea presentada en el modelo de gravedad no conmutatividad dada en [25, 4] y se le conoce como modelo ‘inspirado en geometría no conmutativa’. La idea es simple, si las propiedades intrínsecas del espacio como la curvatura o la no conmutatividad pueden reformularse en propiedades externas, como en la materia o la energía, a través de las ecuaciones de Einstein, por qué no mejor codificar la no conmutatividad en el tensor momento-energía. En [6] se sugiere la sustitución de la delta para un objeto puntual de la componente temporal del tensor momento-energía por una función adecuada para un objeto difuminado. El argumento es que debido a la no conmutatividad de los operadores de posición,

$$[x^\mu, x^\nu] = i\theta^{\mu\nu}, \quad (2.3.3)$$

estos estarán sujetos a un principio de incertidumbre basado en (2.3.3). Así el significado de objeto puntual pierde sentido y se debe reemplazar por otro que sea difuminado en el espacio, la materia ya no está localizada; una buena sugerencia es una distribución gaussiana, ya que en el límite cuando el parámetro de no conmutatividad tienda a cero uno regresa a la delta de Dirac, por tanto, la componente 00 del tensor de energía-momento es cambiada por

$$\rho_\theta(r) = \frac{M}{(2\pi\theta)^{3/2}} e^{-\frac{r^2}{4\theta}}. \quad (2.3.4)$$

Esta distribución de masa satisface la ecuación de Poisson, en una dimensión espacial,

$$\nabla^2 \phi = 4\pi \rho_\theta(r) \quad (2.3.5)$$

Si uno sustituye el valor de ϕ , el cual se encuentra fácilmente por funciones de Green, en la métrica

$$ds^2 = -(1 + 2\phi)dt^2 + (1 + 2\phi)^{-1}dr^2, \quad (2.3.6)$$

cuya forma es sugerida por la métrica (1+1)-dimensional de Schwarzschild, uno obtiene la siguiente métrica

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r\sqrt{\pi}} \gamma \left(\frac{1}{2}, \frac{r^2}{4\theta} \right) \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r\sqrt{\pi}} \gamma \left(\frac{1}{2}, \frac{r^2}{4\theta} \right) \right)^{-1} dr^2. \quad (2.3.7)$$

Siguiendo la forma (2.3.4), en [26] se hace la modificación del potencial $\phi(r)$ debido a la fluctuación de la componente 00 del tensor momento-energía a través del propagador. Al integrar, siendo ambas funciones gaussianas, se llega a la misma forma que (2.3.7).

Debido a la sustitución de la delta de Dirac por una función gaussiana, (2.2.18) y (2.3.4), se espera seguir el mismo camino para el caso cuadrimensional, pero ahora siguiendo un procedimiento más sistemático.

Capítulo 3

Métrica de Schwarzschild deformada

La forma general de una métrica esféricamente simétrica es, en coordenadas de Schwarzschild [4],

$$ds^2 = -e^{\mu(r)} dt^2 + e^{\nu(r)} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2. \quad (3.0.1)$$

Si se considera esta métrica en el vacío, la solución de Schwarzschild tiene la propiedad de que $-g_{tt} = 1/g_{rr}$; esta característica no es única para el vacío, uno puede encontrarla también en la solución con constante cosmológica y en la solución de Reissner-Nordström, la primera describiendo un agujero negro tipo Schwarzschild inmerso en un universo en expansión y la segunda, un agujero negro cargado. Con esta condición tipo Schwarzschild como *ansatz*, la métrica se vuelve

$$ds^2 = -e^{\mu(r)} dt^2 + e^{-\mu(r)} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2. \quad (3.0.2)$$

Supongamos que la densidad de energía para una fuente difusa, no conmutativa, estática y esféricamente simétrica está dada por

$$\rho_\eta(r) = \frac{M}{(4\pi\eta)^{3/2}} e^{-\frac{r^2}{4\eta}}. \quad (3.0.3)$$

Esta es la versión tridimensional de aquella dada en (2.3.4) para el caso con sola una dimensión espacial.

En Schwarzschild el tensor momento-energía es considerado como nulo, pero se sabe de las ecuaciones de Einstein,

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (3.0.4)$$

siendo $G_{\mu\nu}$ el tensor de Einstein, que la materia y la energía deforman el espacio-tiempo, a la vez el espacio-tiempo curvado le dice a la materia como moverse, pero si no hay materia o alguna clase de energía uno debe esperar que no haya curvatura del espacio y así llegar al espacio-tiempo plano de Minkowski, sin embargo, tomando esta configuración (momento-energía igual a cero) en (3.0.4) se encuentra la solución de Schwarzschild; al ser está diferente al espacio-tiempo plano, uno se replantea qué es lo que verdaderamente ‘curva’ el espacio-tiempo debido a que ahora hay una masa M que entra en la solución. Desde hace un tiempo se sabe que si uno toma en cuenta una fuente puntual (matemáticamente expresada por una delta de Dirac en la densidad de energía) llega a la misma conclusión o puede partir de esta solución y llegar a la conclusión que la fuente es puntual [27, 28]. Con ello hacemos el reemplazo de la función delta δ en la componente temporal del tensor momento-energía por (3.0.3) (ecuación (50) de [4])

$$T^0_0 = -\rho_\eta(r). \quad (3.0.5)$$

El signo menos está con el objetivo de mantener el mismo signo en la componente g_{tt} de la métrica. Ya que tenemos una fuente esféricamente simétrica, esperamos que el espacio-tiempo también lo

sea, esto es lo que está plasmado en la forma de la métrica (3.0.2).

Con lo anterior uno puede comenzar a resolver las ecuaciones de campo, las cuales son

$$G^0_0 = \frac{\mu_r e^\mu r + e^\mu - 1}{8\pi r^2} = T^0_0, \quad (3.0.6)$$

$$G^1_1 = \frac{\mu_r e^\mu r + e^\mu - 1}{8\pi r^2} = T^1_1, \quad (3.0.7)$$

$$G^2_2 = G^3_3 = \frac{(\mu_r^2 r + \mu_{rr} r + 2\mu_r) e^\mu}{16\pi r} = T^2_2 = T^3_3. \quad (3.0.8)$$

Todas las demás componentes son cero, así el tensor momento-energía es diagonal. El índice r hace referencia a diferenciación con respecto a r .

De la primera ecuación (3.0.6)

$$\frac{\mu_r e^\mu r + e^\mu - 1}{8\pi r^2} = -\frac{M}{(4\pi\eta)^{3/2}} e^{-\frac{r^2}{4\eta}}, \quad (3.0.9)$$

uno obtiene la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{d}{dr}(e^\mu r) = 1 - \frac{\pi M r^2 e^{-\frac{r^2}{4\eta}}}{(\pi\eta)^{\frac{3}{2}}}. \quad (3.0.10)$$

Resolviendo esta ecuación diferencial obtenemos

$$e^\mu r = r - \frac{\pi M}{(\pi\eta)^{\frac{3}{2}}} \left[-2r\eta e^{-\frac{r^2}{4\eta}} + 2\eta^{\frac{3}{2}} \sqrt{\pi} \operatorname{erf} \left(\frac{r}{2\sqrt{\eta}} \right) \right]. \quad (3.0.11)$$

Al integrar por partes en (1.0.7) se obtiene la siguiente relación

$$\frac{1}{2} \gamma \left(\frac{1}{2}, z^2 \right) = \gamma \left(\frac{3}{2}, z^2 \right) + z e^{-z^2}, \quad (3.0.12)$$

recordando que la función γ es la función gamma inferior incompleta. Usando esta última identidad en (3.0.11) da

$$e^\mu = 1 - \frac{4M}{r\sqrt{\pi}} \gamma \left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\eta} \right). \quad (3.0.13)$$

Esta es la forma de los coeficientes en (3.0.2) para el espacio-tiempo no conmutativo, cuyo parámetro de no conmutatividad está codificado en el tensor momento-energía en vez de las coordenadas, como podría sugerir la relación (1.0.6); la forma final de la métrica será entonces

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{4M}{r\sqrt{\pi}} \gamma \left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\eta} \right) \right) dt^2 + \left(1 - \frac{4M}{r\sqrt{\pi}} \gamma \left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\eta} \right) \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2. \quad (3.0.14)$$

De ello podríamos comenzar a calcular algunas cosas, sabiendo que estamos en un espacio ordinario (conmutativo), por ejemplo, el escalar de Ricci

$$R = \frac{M e^{-\frac{r^2}{4\eta}} (-r^2 + 8\eta)}{2\eta^{\frac{5}{2}} \sqrt{\pi}}. \quad (3.0.15)$$

En el origen este es finito

$$R(0) = \frac{4M}{\eta^{3/2} \sqrt{\pi}}. \quad (3.0.16)$$

Si hacemos desaparecer la no conmutatividad ($\eta \rightarrow 0$) en el invariante (3.0.15) recuperamos $R = 0$. El escalar de Kretschmann para la métrica de Schwarzschild tiene una singularidad física en el origen. En el caso de la geometría no conmutativa, en la región cercana al origen obtenemos (con un poco de ayuda de Maple)

$$\lim_{r \rightarrow 0} R_{\alpha\beta\mu\nu} R^{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{8M^2}{3\pi\eta^3}, \quad (3.0.17)$$

y al igual que antes, cuando la no conmutatividad desaparece, regresamos al comportamiento divergente de este invariante.

De la aproximación para radios pequeños

$$\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\eta}\right) \approx \frac{r^3}{12\eta^{\frac{3}{2}}}\left(1 - \frac{7r^2}{20\eta}\right), \quad (3.0.18)$$

observamos que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\gamma(r, \eta)}{r} = 0, \quad (3.0.19)$$

y, por lo tanto, los coeficientes de (3.0.14) en $r = 0$ son finitos, junto con (3.0.17), a diferencia del caso conmutativo, donde tenemos una singularidad física, aquí ha desaparecido (se ha regularizado la singularidad en el origen para esta nueva geometría).

Más adelante se verá que a largas distancias recuperamos la métrica de Schwarzschild y como se verifica de (3.0.15)

$$\lim_{r \rightarrow \infty} R = 0. \quad (3.0.20)$$

Así, lejos de la fuente no hay curvatura, como debería suceder si se aleja de lo que distorsiona el espacio-tiempo. Estando en completa concordancia con la suposición del límite.

Para terminar de especificar la forma del tensor momento-energía, realicemos los cálculos en la ecuación (3.0.8); se encuentra que

$$\begin{aligned} T^2_2 = T^3_3 &= \frac{M e^{-\frac{r^2}{4\eta}} (r^2 - 4\eta)}{32(\pi\eta)^{3/2}\eta} \\ &= -\rho_\eta(r) - \frac{r}{2} \frac{d\rho_\eta(r)}{dr}, \end{aligned} \quad (3.0.21)$$

$$T^1_1 = -\rho_\eta(r). \quad (3.0.22)$$

Así, existe una diferencia entre las presiones de la entrada 11 (3.0.22) y las de las entradas 22 y 33 (3.0.21), por tanto, contrario al caso del fluido perfecto, no hay una presión isotropa. Por supuesto, en el límite $\eta \rightarrow 0$, las presiones son iguales y tenemos el caso del fluido perfecto.

Capítulo 4

Corrimiento de frecuencia en Schwarzschild

El método presentado aquí y en aquella sección para el caso no conmutativo para encontrar los corrimientos basados en cantidades conservadas, siguen notas tomadas durante un curso de relatividad general en el semestre de otoño del 2023 en el IFUAP (BUAP), al mismo tiempo, este método se presenta de manera general en [29].

Recordemos que la solución esféricamente simétrica a las ecuaciones de Einstein en el vacío es dada por (1.0.5)

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2. \quad (4.0.1)$$

Como parte de la definición, rotacionalmente invariante, la anterior métrica es invariante bajo las siguientes rotaciones

$$x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}, \quad y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y}, \quad x \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial x}, \quad (4.0.2)$$

lo cuales se dan alrededor de cada uno de los ejes coordenados. Utilizando el cambio de coordenadas (1.0.1) podemos expresar lo anterior como

$$(\text{sen } \varphi) \frac{\partial}{\partial \theta} + (\cos \varphi \cot \theta) \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad (\cos \varphi) \frac{\partial}{\partial \theta} - (\text{sen } \varphi \cot \theta) \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad (4.0.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi}. \quad (4.0.4)$$

Por tanto, si uno aplica la derivada de Lie a la métrica con respecto a cualquiera de los anteriores campos, dará cero

$$\mathcal{L}_X g = 0. \quad (4.0.5)$$

Debido a que campos vectoriales de Killing ‘generan’ isometrías, es que podemos hablar de simetrías del espacio-tiempo. La ecuación anterior es la condición para que un campo arbitrario X sea un vector de Killing, o si la desarrollamos, es equivalente a $\nabla_{(\mu} X_{\nu)} = 0$.

Si uno aplica la condición de invariancia rotacional a otro campo Y , tomando en cuenta, por ejemplo, el campo vectorial (4.0.4), nos da que las componentes de Y , expresadas en el sistema de coordenadas esféricas, no deberán depender de la coordenada φ y, por tanto, cualquier cambio en esta coordenada no dará ningún efecto en Y ; así hablamos de una invariancia bajo el grupo uni-paramétrico de difeomorfismos ϕ_t , con X siendo el generador infinitesimal de este grupo [3], es decir, bajo este grupo, la imagen será igual (isométrica) a la variedad original. Lo mismo sucede

con (4.0.1), debido a la invariancia, g no depende de la coordenada φ , esta independencia hace que cualquier cambio de esta coordenada no de efecto alguno en la métrica (esta simetría, invariancia con respecto a algo, lleva a cantidades conservadas). Inversamente, si la métrica no depende de alguna coordenada x^α , luego un vector de Killing será $\partial/\partial x^\alpha$, y es de esto que, debido a la independencia de la métrica (4.0.1) de la coordenada t , otro vector de Killing, esta vez temporal, será

$$\frac{\partial}{\partial t}. \tag{4.0.6}$$

Poniendo (4.0.4) y (4.0.6) en componentes da

$$\xi^\mu = (1, 0, 0, 0), \tag{4.0.7}$$

$$\psi^\mu = (0, 0, 0, 1). \tag{4.0.8}$$

Sabemos que, dado un campo vectorial de Killing X , si C es una geodésica en la variedad (el espacio-tiempo cuya métrica es definida por el agujero negro) con métrica (4.0.1), luego la cantidad $g(X, C')$ es constante a lo largo de la geodésica (proposición 6.33 de [30]), donde C' denota el vector tangente a la curva. Para una partícula masiva, esta seguirá una geodésica tal que podemos parametrizar la curva a través de su tiempo propio y así su vector tangente coincidirá con su cuadrivelocidad $(C')^\mu = U^\mu$; para una partícula sin masa, como los fotones, la convención es que se tome el parámetro afín tal que su vector tangente coincida con su cuádrimomento k^μ . Con esto, la cantidad constante mencionada anteriormente es

$$g(X, C') = g_{\mu\nu} X^\mu U^\nu = \text{cte}. \tag{4.0.9}$$

Al utilizar los vectores de Killing (4.0.4) y (4.0.6) tenemos

$$g_{tt}U^t = A, \quad g_{\varphi\varphi}U^\varphi = B. \tag{4.0.10}$$

Desarrollando las ecuaciones de la geodésica, directamente o a través de la lagrangiana $\mathcal{L} = g_{\mu\nu}(dC^\mu/ds)(dC^\nu/ds)$, se puede mostrar que la primera constante corresponde a menos la energía total de la partícula y la segunda constante a la magnitud del momento angular de la partícula, por supuesto, ambos por unidad de masa. Por ejemplo, uno puede usar la ecuación de Lagrange para la variable t y la ecuación para la energía medida por un observador con cuadrivelocidad U^μ para una partícula con cuádrimomento k_μ , $E = -k_\mu U^\mu$, y considerar un observador en el infinito y demostrar que A es igual a $-E$. Con ello

$$g_{tt}U^t = -E, \quad g_{\varphi\varphi}U^\varphi = L. \tag{4.0.11}$$

Además, será útil tener en consideración la condición de normalización, que debido a nuestra convención inicial toma la forma $g_{\mu\nu}U^\mu U^\nu = -1$ o al desarrollar esto

$$g_{tt}(U^t)^2 + g_{rr}(U^r)^2 + g_{\theta\theta}(U^\theta)^2 + g_{\varphi\varphi}(U^\varphi)^2 = -1. \tag{4.0.12}$$

Que el espacio-tiempo sea esféricamente simétrico equivale a decir que sea invariante bajo rotaciones espaciales. Así como el campo vectorial (4.0.7) está asociado a simetrías temporales, es decir, a una invariancia con respecto a desplazamientos en el tiempo, simultáneamente está conectado con la conservación de la energía. La invariancia bajo rotaciones espaciales se asocia a la conservación del momento angular; el campo vectorial (4.0.8) está relacionado con la conservación de su magnitud, los otros dos campos de Killing (4.0.3) se asocian a la conservación de la dirección del momento angular y es debido a esto que el movimiento se desarrolla en un plano, por conveniencia tomamos el plano ecuatorial $\theta = \pi/2$. Esto hace que se simplifiquen algunas cosas, por ejemplo, que podamos tomar $U^\theta = 0$; de ello y con la ayuda de (4.0.11) es posible expresar (4.0.12) como

$$g_{rr}(U^r)^2 + \frac{E^2}{g_{tt}} + \frac{L^2}{g_{\varphi\varphi}} + 1 = 0. \tag{4.0.13}$$

Reordenando lo anterior

$$E^2 = -g_{rr}g_{tt}(U^r)^2 - g_{tt} \left(\frac{L^2}{g_{\varphi\varphi}} + 1 \right). \quad (4.0.14)$$

El primer término del lado izquierdo tiene la forma de una energía cinética y la ecuación completa la podemos considerar como una ecuación de conservación de la energía para una partícula no relativista bajo el efecto del potencial efectivo

$$V_{\text{eff}} = -g_{tt} \left(\frac{L^2}{g_{\varphi\varphi}} + 1 \right). \quad (4.0.15)$$

Si pedimos que la partícula de prueba se mueva en una órbita circular alrededor del agujero negro ($V'_{\text{eff}} = 0$) con coordenada radial constante ($U^r = 0$) y que dicha órbita sea estable ($V''_{\text{eff}} > 0$), entonces de las primeras dos condiciones obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{E^2}{g_{tt}} + \frac{L^2}{g_{\varphi\varphi}} + 1 &= 0, \\ -\frac{L^2}{g_{\varphi\varphi}^2} \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial r} - \frac{E^2}{g_{tt}^2} \frac{\partial g_{tt}}{\partial r} &= 0. \end{aligned} \quad (4.0.16)$$

Utilizando que para la métrica (4.0.1) $g_{tt} = -(1 - 2M/r)$ y $g_{\varphi\varphi} = r^2$, con esto en lo anterior y despejando para E y L obtenemos

$$E = \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{3M}{r}}}, \quad L = \pm r \sqrt{\frac{M}{r - 3M}}, \quad (4.0.17)$$

donde el signo \pm será según la dirección del momento angular que escojamos y para nosotros lo tomaremos como positivo.

Introduciendo estas cantidades en (4.0.11) nos da

$$U^t = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{3M}{r}}}, \quad U^\varphi = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{M}{r - 3M}}. \quad (4.0.18)$$

Fijémonos ahora en partículas sin masa, fotones, los cuales siguen una geodésica nula $g(k, k) = 0$ o al desarrollar esto último

$$g_{tt}(k^t)^2 + g_{rr}(k^r)^2 + g_{\varphi\varphi}(k^\varphi)^2 = 0, \quad (4.0.19)$$

donde, tal como se comentó anteriormente, $k^\mu = (k^t, k^r, k^\theta, k^\varphi)$ será el vector tangente a la geodésica que sigue el fotón y este coincide con su cuadrivector. En (4.0.19) se ha tomado en cuenta el hecho de que el movimiento se desarrolla en el plano $\theta = \pi/2$. De los vectores de Killing (4.0.4) y (4.0.6)

$$k^t = E_\gamma / (1 - 2M/r), \quad (4.0.20)$$

$$k^\varphi = L_\gamma / r^2, \quad (4.0.21)$$

con E_γ y L_γ denotando la energía y magnitud del momento angular del fotón. Usando lo anterior en la condición de nulidad (4.0.19) obtenemos

$$g_{rr}(k^r)^2 - \frac{E_\gamma^2}{1 - \frac{2M}{r}} + \frac{L_\gamma^2}{r^2} = 0. \quad (4.0.22)$$

La frecuencia de un fotón medido por un observador con cuadrivector U_C^μ en el evento P_C es

$$\omega_C = -(k_\mu U^\mu)|_C, \quad (4.0.23)$$

donde el índice C puede referirse a los puntos de emisión (e) o de detección (d). Basándonos en lo mencionado, la frecuencia de la luz que un observador, que se mueve junto con la partícula de prueba, mide en el punto de emisión (e) es la siguiente

$$\omega_e = -(k_\mu U^\mu)|_e. \quad (4.0.24)$$

Por otro lado, la frecuencia detectada (d) por un observador situado lejos de la fuente viene dada por

$$\omega_d = -(k_\mu U^\mu)|_d. \quad (4.0.25)$$

Al desarrollar (4.0.23) y con la ayuda de (4.0.20) y (4.0.21) obtenemos

$$\omega_C = (-g_{\mu\nu} k^\mu U^\nu)|_C \quad (4.0.26)$$

$$= (E_\gamma U^t - L_\gamma U^\varphi - g_{rr} k^r U^r)|_C. \quad (4.0.27)$$

El cambio en la frecuencia o el corrimiento de esta, viene dado por

$$z = \frac{\omega_e - \omega_d}{\omega_d}, \quad (4.0.28)$$

$$\Rightarrow 1 + z = \frac{\omega_e}{\omega_d}. \quad (4.0.29)$$

Sustituyendo (4.0.27) en esto último da

$$1 + z = \frac{(E_\gamma U^t - L_\gamma U^\varphi - g_{rr} k^r U^r)|_e}{(E_\gamma U^t - L_\gamma U^\varphi - g_{rr} k^r U^r)|_d}. \quad (4.0.30)$$

A manera de calcular explícitamente lo anterior nos fijaremos en órbitas circulares ($U^r = 0$), cuyas expresiones para U^t y U^φ ya tenemos (4.0.18).

Introduzcamos el parámetro $b_\gamma = E_\gamma/L_\gamma$, que es conocido como parámetro de deflexión o parámetro de impacto aparente. Como E_γ y L_γ son constantes a lo largo de la trayectoria seguida por el fotón, así también lo será b_γ , por tanto $b_\gamma|_e = b_\gamma|_d$. Por lo que (4.0.30) se simplifica a

$$1 + z = \frac{(U^t - b_\gamma U^\varphi)|_e}{(U^t - b_\gamma U^\varphi)|_d}. \quad (4.0.31)$$

Tomemos el caso concreto de cuando el receptor está en el infinito ($r \rightarrow \infty$) o lo suficientemente lejos de la fuente, en cuyo caso su cuadrivelocidad será

$$U_d^\mu = (1, 0, 0, 0), \quad (4.0.32)$$

lo cual se ve de las expresiones para U^t y U^φ en (4.0.18). Esto en (4.0.31) da

$$1 + z = U_e^t - b_\gamma U_e^\varphi \quad (4.0.33)$$

Utilizando las expresiones encontradas para el movimiento circular de U^t y U^φ en lo anterior obtenemos

$$1 + z = \frac{1}{\sqrt{1 - 3M/r}} - \frac{b_\gamma}{r} \sqrt{\frac{M}{r - 3M}}. \quad (4.0.34)$$

Si una partícula de prueba sigue cierta trayectoria, la puede recorrer en dos direcciones opuestas y cuando está sobre la línea de visión, las direcciones serán cuando se aleje del receptor (redshift) o cuando se acerque a él (blueshift). Caso similar sucede para una trayectoria circular alrededor del agujero negro, yendo en sentido positivo o negativo.

Podemos determinar el valor b_γ en puntos donde $k^r = 0$, aquellos puntos donde el vector posición del emisor sea perpendicular a la línea de visión, ya que en este caso

$$-\frac{E_\gamma^2}{1 - \frac{2M}{r}} + \frac{L_\gamma^2}{r^2} = 0, \quad (4.0.35)$$

$$\Rightarrow b_\gamma = \frac{L_\gamma}{E_\gamma} = \mp \frac{r}{\sqrt{1 - 2M/r}}; \quad (4.0.36)$$

el primer signo es para el redshift y el segundo para el blueshift. Finalmente, la sustitución de (4.0.36) en (4.0.34) da la expresión buscada para el corrimiento de frecuencia en la solución de Schwarzschild conmutativa:

$$1 + z_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{1 - 3M/r}} \pm \sqrt{\frac{M}{(1 - 2M/r)(r - 3M)}}. \quad (4.0.37)$$

Esta es la frecuencia medida por un observador que está lejos de la fuente (estas expresiones se obtienen cuando el parámetro de rotación tiende a cero y el radio del detector tienda al infinito en las expresiones (50) y (51) de [29]).

Capítulo 5

Horizonte de eventos y movimiento geodésico en el espacio no conmutativo

Antes de tratar con algún detalle el movimiento de partículas en la geometría no conmutativa, primero comentaremos brevemente sobre el horizonte de eventos para un agujero negro en un espacio-tiempo con métrica (3.0.14).

5.1. Horizonte de eventos

Algo que distingue los agujeros negros de cualquier otro objeto estelar es su horizonte de eventos. Como se dice habitualmente, nada puede escapar de él y esta es la razón por la cual un agujero negro lleva ese nombre: ni siquiera la luz puede escapar de un agujero negro una vez entra en el horizonte de eventos, de ahí que sea negro. Recordemos que, en el caso de la métrica de Schwarzschild conmutativa (1.0.5), este horizonte de eventos viene dado por la superficie $r = 2M$ y tal como se demuestra, este horizonte es una membrana de un solo sentido, es decir, cuando un objeto se va acercando al horizonte de eventos su cono de luz se ve afectado, este se inclina hasta rotar 45° y es de ello que después de pasarlo, toda señal que intente enviar al exterior terminará en la singularidad, este también es el destino del emisor. Sin embargo, no todo horizonte de eventos tiene este carácter; si nos fijamos en la solución de Reissner-Nordström cuyos horizontes son dados por

$$R_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2}, \quad (5.1.1)$$

con Q la carga del agujero negro, uno muestra que pasado el segundo horizonte, el interior, las señales y el mismo objeto pueden salir fuera de la región delimitada por este horizonte. De igual manera, podemos tratar de echar un poco de luz acerca del horizonte de eventos en esta nueva geometría. Para este fin, se puede tratar de resolver la ecuación

$$-g_{00} = 0, \quad (5.1.2)$$

pero se notará que no es una tarea muy fácil. Para el modelo 2D propuesto en [6] se da la siguiente aproximación para el horizonte de eventos

$$r_H = 2M \left(1 - \sqrt{\frac{\eta}{\pi}} \frac{1}{M} e^{-\frac{M^2}{\theta}} \right). \quad (5.1.3)$$

Debido a lo anterior, si uno hace decrecer el radio del horizonte y, por tanto, la región donde se ve concentrada la masa del agujero negro, se llegará al límite donde el significado de agujero negro pierde sentido [6]. Así, en este modelo la no conmutatividad implica una masa mínima

$$M_0 = 0,5\sqrt{\pi\eta}, \quad (5.1.4)$$

la cual se obtiene al poner la masa en (5.1.2) como función de la coordenada r y tomar el límite cuando este tiende a cero.

En el caso del espacio-tiempo cuatridimensional, intentar hacer una aproximación como en (5.1.3) ya no es factible debido a que ahora la función gamma ha aumentado de complejidad, como se ve de (3.0.12).

Por eso es mejor tratar de aproximarlos numéricamente [4]. En la siguiente figura se grafica $-g_{00}$ como función de $r/\sqrt{\eta}$ para distintos valores de $M/\sqrt{\eta}$

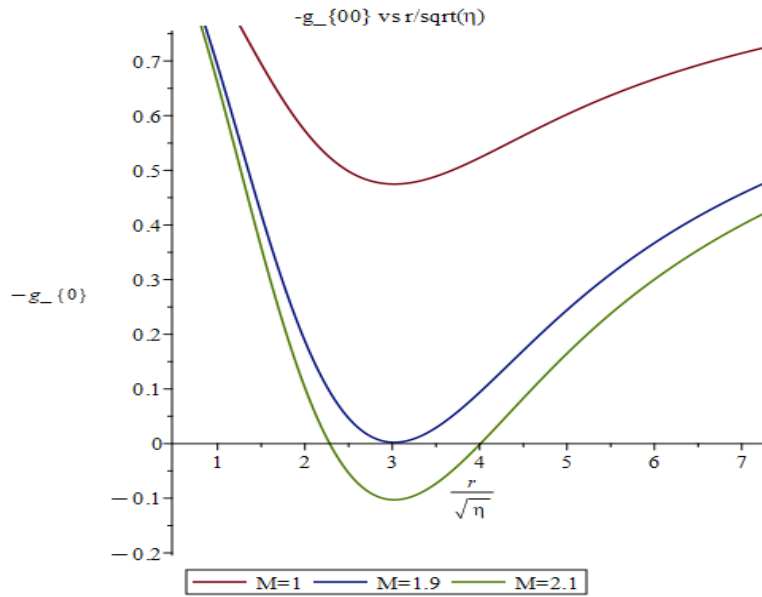


Figura 5.1: Gráfica de $-g_{00}$ como función de $r/\sqrt{\eta}$ para distintos valores de $M/\sqrt{\eta}$.

Según la figura anterior, la masa mínima, antes de la cual no hay horizonte de eventos, es dada por

$$M_0 \approx 1,9\sqrt{\eta}. \quad (5.1.5)$$

Para toda masa superior a esta existen dos horizontes de eventos debido a que en dos puntos diferentes la función $-g_{00}$ se hace cero, como se nota de la curva verde en la figura. Como en el caso de un agujero negro cargado, se puede notar que cuando uno se aproxima al horizonte de evento exterior y lo cruza hasta antes de llegar al segundo horizonte, el carácter del campo vectorial estático $\partial/\partial t$, y el de $\partial/\partial r$, cambia debido al cambio de signo en los coeficientes de la métrica. Por ello, una vez que pasan el primer horizonte de eventos, el cono de luz habrá girado, como en el caso de Schwarzschild, pero pasado el segundo horizonte vuelve a hacerlo.

5.2. Movimiento en el espacio-tiempo

Las ecuaciones para las geodésicas vienen a ser dadas por

$$\frac{d^2 C^\mu(\tau)}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu C^\alpha(\tau) C^\beta(\tau) = 0 \quad (5.2.1)$$

siendo $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$ las conexiones métricas y C^μ curvas parametrizadas por τ . Una geodésica, en el contexto de la física, es aquella trayectoria que sigue una partícula por el espacio-tiempo y minimiza localmente la distancia entre puntos. Inclusive aquellas partículas sin masa debe moverse según el espacio se curve (a través de un camino que minimice puntos ‘vecinos’); una idea contraintuitiva desde el punto de vista de la gravedad de Newton, ya que en esta última las partículas sin masa no deberían verse afectadas por la gravedad, pero en relatividad todo debe moverse por medio de geodésicas. Así, resolver dicho sistema de ecuaciones es equivalente a conocer la historia de la partícula, dónde estuvo, adónde estará y cómo se moverá, pero es un sistema de ecuaciones de segundo orden no lineal, resultando en una tarea casi titánica resolverlas, a menos que podamos realizar algunas simplificaciones que se deriven del contexto en el que estemos, por ejemplo si se buscan movimientos circulares. Derivar dichas ecuaciones puede tomar cierto tiempo y en ocasiones se busca una formulación que arroje ecuaciones equivalentes o iguales, pero con menos tiempo empleado, un ejemplo es utilizar la formulación basada en las ecuaciones de Lagrange (sección 6.2 de [30]) con una lagrangiana dada por

$$\mathcal{L} = g_{\mu\nu} \frac{dC^\mu}{d\tau} \frac{dC^\nu}{d\tau}. \quad (5.2.2)$$

En el caso de Schwarzschild uno considera la simetría esférica del espacio para argumentar que podemos tomar el movimiento siendo descrito en un plano (por simplicidad se toma el plano $\theta = \pi/2$) y así si C es la trayectoria de una partícula masiva, sus componentes son tales que $(C')^\theta = 0$, esto en coordenadas esféricas. Para estas partículas, el parámetro afín es el tiempo propio de la partícula y una visión más física del movimiento está dada, en este caso, por el vector tangente a la trayectoria: su cuadrivelocidad. Tomando $\theta = \pi/2$ en las ecuaciones de la geodésica se llega a las siguientes ecuaciones diferenciales,

$$\frac{dt}{d\tau} = (t')_0 \left(\frac{1 - 2M/r_0}{1 - 2M/r} \right), \quad (5.2.3)$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{L}{r^2}, \quad (5.2.4)$$

$$\left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 = 2E + \frac{2M}{r} - \frac{L^2}{r^2} + \frac{2ML^2}{r^3}, \quad (5.2.5)$$

con

$$L = r_0^2 \left(\frac{d\varphi}{d\tau} \right)_0, \quad (5.2.6)$$

$$E = -\frac{1}{2} \left[1 - \left(1 - \frac{2M}{r_0} \right)^2 (t')_0^2 \right], \quad (5.2.7)$$

las cuales son más sencillas que las originales. E y L denotan la energía y el momento angular de la partícula, estas son constantes a lo largo de la geodésica. La última ecuación geodésica tiene la apariencia de una ecuación de energía donde la partícula se ve influenciada por un potencial efectivo,

$$V_{\text{eff}} = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{L^2}{r^2} - \frac{2ML^2}{r^3}; \quad (5.2.8)$$

esta es la definición que se suele tomar de dicho potencial. Se puede llegar a la ecuación de la energía de la condición de norma, $U_\mu U^\mu = -1$ y de cantidades conservadas. Se hace de esta manera para

mostrar que las ecuaciones de la geodésica pueden ser de utilidad. En la expresión del potencial hay algunos términos análogos a los que se tienen en gravedad clásica y uno no: el término de Newton, una barrera de potencial y un término adicional ($\sim 1/r^3$); este término nuevo es la contribución de la relatividad general a la mecánica de Newton. Dicho término modifica el comportamiento a corta distancia de la partícula de prueba; esto permite movimientos más sofisticados (por ejemplo, movimientos en los que una partícula no puede salir de ciertas circunferencias y en los cuales se encuentra en un vaivén entre estos radios).

El potencial (5.2.8) dicta el movimiento de la partícula y en ocasiones estamos interesados en situaciones particulares, por ejemplo, en movimientos circulares (esto se hizo en la sección anterior). Esta última condición pone restricciones sobre las demás componentes de la cuadrivelocidad y sobre la misma trayectoria. En este último caso, no se permiten órbitas circulares por debajo de $3M$, estas órbitas son inestables en el rango $3M < r < 6M$ y son estables por arriba de $6M$ [7, 31]. Consideraciones similares se pueden hacer para partículas sin masa, partículas como los fotones, pero ahora la condición de norma sobre el vector tangente a su trayectoria es $k_\mu k^\mu = 0$. Esta última condición modifica la forma del potencial y una de sus consecuencias es que solo permite órbitas inestables (se modifica la propagación de la luz en el régimen de campo fuerte).

Todo lo anterior se puede aplicar a las geodésicas en el espacio descrito por (3.0.14), solo que ahora un tratamiento similar para llegar a ecuaciones parecidas a (5.2.3) se vuelve imposible. Así, es mejor partir de la condición de norma $U_\mu U^\mu = -1$ y de las cantidades conservadas $g_{tt}U^t = -E$ y $g_{\varphi\varphi}U^\varphi = L$, teniendo el mismo significado que en el caso anterior.

El potencial efectivo que ahora se obtiene es dado por

$$V_{\text{eff}} = \left(1 - \frac{4M}{r\sqrt{\pi}}\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\eta}\right)\right) \left(\frac{L^2}{g_{\varphi\varphi}} + 1\right). \quad (5.2.9)$$

Se puede desarrollar un poco, para fines de claridad:

$$V_{\text{eff}} = 1 - \frac{4M\gamma}{r\sqrt{\pi}} + \frac{L^2}{r^2} - \frac{4M\gamma L^2}{r^3\sqrt{\pi}}. \quad (5.2.10)$$

Haciendo una comparación con (5.2.8) se notan algunas similitudes, como el término lineal y la barrera de potencial, sin embargo, el término newtoniano y el cúbico se ven modificados por $\gamma(3/2, r^2/4\eta)$.

Dicho potencial influencia el movimiento de las partículas masivas, por ejemplo, para tener órbitas circulares se debe estar en los valores extremos de este potencial para que se esté en un radio determinado y no haya ‘aceleración’ que nos haga salir de la órbita ($\ddot{r} = 0 = -\partial_r V_{\text{eff}}$). Por lo tanto, se intenta buscar soluciones a la ecuación $\partial_r V_{\text{eff}} = 0$, ayudándonos de la condición $U^r = 0$. Estando en este tipo de órbita hace que se tenga ciertos valores de L y E , de energía total y de momento angular, los cuales dependerán del radio de la órbita

$$L = r \left(\frac{M\beta}{8M\eta^{\frac{3}{2}}\gamma - 2\sqrt{\pi}\eta^{\frac{3}{2}}r - M\beta} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad E = \left(1 - \frac{4M}{r\sqrt{\pi}}\gamma\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{8M\eta^{\frac{3}{2}}\gamma - 2\sqrt{\pi}\eta^{\frac{3}{2}}r}{8M\eta^{\frac{3}{2}}\gamma - 2\sqrt{\pi}\eta^{\frac{3}{2}}r - M\beta} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (5.2.11)$$

siendo β definido por (6.0.13) y γ la función gamma incompleta de (3.0.13).

Sin embargo, no toda órbita circular es de interés, sino solo aquellas que sean estables, es decir, solo aquellas que no permitan que bajo la mínima influencia exterior haga que termine en el agujero negro la partícula. Esta condición es impuesta al pedir que el extremo del potencial sea un mínimo, $\partial^2 V_{\text{eff}}/\partial r^2 > 0$. De ello existirá un radio mínimo por debajo del cual las órbitas sean inestables y por arriba de este, estables. En el caso de Schwarzschild, como se mencionó anteriormente, este radio está en $r = 6M$. Dicho radio se le conoce como radio de la órbita circular estable más interna o radio ISCO. Este radio se encuentra al fijarnos en la condición de estabilidad marginal $\partial^2 V_{\text{eff}}/\partial r^2 = 0$, así, este estará en el límite de lo estable e inestable. Apliquemos la condición a (5.2.10), con el valor del momento angular de la partícula masiva dado por (5.2.11). Derivando

con respecto a r dos veces e igualando a cero dicha expresión, después de algunas simplificaciones, encontramos

$$M \left(r^3 \frac{e^{-\frac{r^2}{4\eta}}}{\eta^{\frac{3}{2}}} - 4\gamma \right) \left(r^4 \sqrt{\pi} - 8r^3 M \gamma + \frac{M r^6}{12} \frac{e^{-\frac{r^2}{4\eta}}}{\eta^{\frac{5}{2}}} (r^2 + 8\eta) \right) + \left(12M\gamma - 2\sqrt{\pi}r - r^3 M \frac{e^{-\frac{r^2}{4\eta}}}{\eta^{\frac{3}{2}}} \right) \left(\frac{M r^8}{12} \frac{e^{-\frac{r^2}{4\eta}}}{\eta^{\frac{5}{2}}} - \frac{4}{3} r^3 M \gamma \right) = 0. \quad (5.2.12)$$

La forma en que se ha puesto es para notar que en el límite $\eta \rightarrow 0$ obtenemos

$$-2M\sqrt{\pi} (r^4 \sqrt{\pi} - 4r^3 M \sqrt{\pi}) + (6M\sqrt{\pi} - 2\sqrt{\pi}r) \left(-\frac{2}{3} r^3 M \sqrt{\pi} \right) = 0 \quad (5.2.13)$$

$$\Rightarrow r = 6M. \quad (5.2.14)$$

Es decir, cuando desaparecemos el parámetro de no conmutatividad obtenemos r_{ISCO} para Schwarzschild. En el caso general, intentar resolver analíticamente (5.2.12) es imposible, por ello, al igual que antes, se aproxima este radio numéricamente. En las siguientes figuras se grafica la función del primer miembro en (5.2.12) como función de $r/\sqrt{\eta}$ para $M = 1,9\sqrt{\eta}$ y $M = 2,1\sqrt{\eta}$,

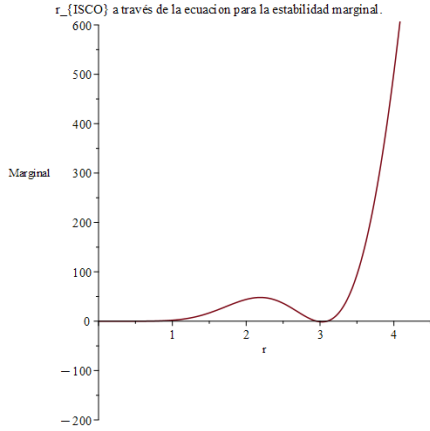


Figura 5.2: Ecuación para la estabilidad marginal en el caso $M/\sqrt{\eta} = 1,9$.

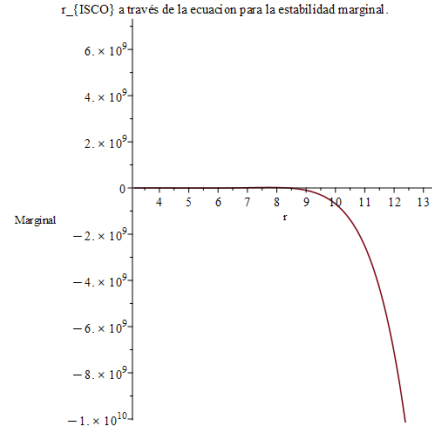


Figura 5.3: Ecuación para la estabilidad marginal en el caso $M/\sqrt{\eta} = 2,1$.

En el primer caso, $r_{\text{ISCO}} \approx 2,953\sqrt{\eta}$ y para el segundo $r_{\text{ISCO}} \approx 8,39\sqrt{\eta}$. Con ello, el primero está muy cerca del horizonte de eventos, como se ve de la Figura 5.1 y para el segundo, este se encuentra fuera y alejado del primer horizonte de eventos, en la zona donde hemos denominado de radios grandes. Este último comportamiento se espera si nos fijamos en masas mayores a 1,9.

Capítulo 6

Corrimiento de frecuencia en Schwarzschild no conmutativo

La siguiente sección es una copia casi idéntica de aquella conmutativa, debido a que estamos tratando con coordenadas conmutativas y la no conmutatividad se ha codificado en el tensor momento-energía (3.0.5) y este al mismo tiempo ha modificado la métrica. La métrica resultante es (3.0.14)

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{4M}{r\sqrt{\pi}} \gamma \left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\eta} \right) \right) dt^2 + \left(1 - \frac{4M}{r\sqrt{\pi}} \gamma \left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\eta} \right) \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (6.0.1)$$

donde γ es la función gamma inferior. Algunos comentarios adicionales serán hechos para poder usar los resultados de la sección 5.

De la definición de la métrica anterior y de la ausencia de las coordenadas t y φ en los coeficientes, es inmediato que dos vectores de Killing son $\partial/\partial t$ y $\partial/\partial \varphi$, cuyas componentes en el sistema coordenado esférico son $(1, 0, 0, 0)$ y $(0, 0, 0, 1)$, respectivamente, igual que en el caso conmutativo.

Tal como su contraparte, la simetría esférica (ambas tienen la forma general (3.0.2)) nos permite tener el movimiento de las partículas de prueba y los fotones en el plano central $\theta = \pi/2$ o si no están en él hacer una rotación para que se tenga ahí el movimiento.

Para las partículas masivas, el parámetro afín que parametriza su trayectoria, la geodésica que sigue, será el tiempo propio y así su vector tangente será su cuadrivelocidad U^μ . Debido a los vectores de Killing (4.0.4) y (4.0.6) hay dos cantidades conservadas a lo largo de sus trayectorias y son

$$g \left(\frac{\partial}{\partial t}, U \right) = g_{tt} U^t = A, \quad g \left(\frac{\partial}{\partial \varphi}, U \right) = g_{\varphi\varphi} U^\varphi = B. \quad (6.0.2)$$

Debe notarse que para la región de radios grandes se cumple

$$\gamma \left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\eta} \right) \approx \frac{\sqrt{\pi}}{2} + \frac{r}{2\sqrt{\eta}} e^{-r^2/4\eta}, \quad (6.0.3)$$

$$\Rightarrow -g_{tt} \approx 1 - \frac{2M}{r} - \frac{2M}{\sqrt{\pi}\sqrt{\eta}} e^{-r^2/4\eta}. \quad (6.0.4)$$

El último término determina la contribución de la no conmutatividad a la gravedad; cuando nos vamos alejando del centro del agujero negro este contribuye cada vez menos. Así, para grandes radios

$$g_{tt} \approx - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \quad (6.0.5)$$

es decir, se reduce al caso Schwarzschild conmutativo y es de esto que podemos interpretar las constantes A y B en (6.0.2) como la energía total y magnitud del momento angular, por unidad de masa, de la partícula de prueba, respectivamente, siendo estas constantes a lo largo de la geodésica. Por ello

$$g_{tt}U^t = -E, \quad g_{\varphi\varphi}U^\varphi = L. \quad (6.0.6)$$

Hemos hecho solo referencia a la simetría esférica para mantener el movimiento en un plano, pero como complemento, debido a la conservación del momento angular, podemos mantener la dirección de este invariante, tal como se hizo en el caso conmutativo.

De la condición de normalización $U_\mu U^\mu = -1$ y de las cantidades conservadas (6.0.6) obtenemos

$$E^2 = -g_{rr}g_{tt}(U^r)^2 - g_{tt}\left(\frac{L^2}{g_{\varphi\varphi}} + 1\right). \quad (6.0.7)$$

Una ecuación con forma semejante a una ecuación de conservación de energía (energía total=energía cinética + energía potencial), donde el movimiento de una partícula de prueba se ve ‘influenciado’ por el siguiente potencial efectivo

$$V_{\text{eff}} = -g_{tt}\left(\frac{L^2}{g_{\varphi\varphi}} + 1\right) \quad (6.0.8)$$

$$= \left(1 - \frac{4M}{r\sqrt{\pi}}\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\eta}\right)\right)\left(\frac{L^2}{g_{\varphi\varphi}} + 1\right). \quad (6.0.9)$$

El movimiento es permitido donde $E^2 \geq V_{\text{eff}}$, con puntos de retorno dados por la condición $E^2 = V_{\text{eff}}$.

Por simplicidad busquemos en órbitas circulares para partículas de prueba masivas alrededor del agujero negro. Dichas órbitas vienen dadas por las condiciones $\partial_r V_{\text{eff}} = 0$ y $U^r = 0$. Estas condiciones impuestas en (6.0.7) y (6.0.9) dan como resultado el sistema de ecuaciones (4.0.16) o al desarrollar obtenemos

$$E^2 = \left(1 - \frac{4M}{r\sqrt{\pi}}\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\eta}\right)\right)\left(\frac{L^2}{g_{\varphi\varphi}} + 1\right), \quad (6.0.10)$$

$$- \frac{2L^2}{r^3} - \left(1 - \frac{4M}{r\sqrt{\pi}}\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\eta}\right)\right)^{-2} E^2 \frac{M}{r^2\sqrt{\pi}\eta^{\frac{3}{2}}}\left(r^3 e^{-r^2/4\eta} - 4\eta^{\frac{3}{2}}\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\eta}\right)\right) = 0, \quad (6.0.11)$$

donde se ha hecho uso de la identidad (3.0.12). La sustitución de (6.0.10) en (6.0.11) da como resultado

$$L = r \sqrt{\frac{M\beta(r, \eta)}{8M\eta^{\frac{3}{2}}\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\eta}\right) - 2\sqrt{\pi}\eta^{\frac{3}{2}}r - M\beta(r, \eta)}}, \quad (6.0.12)$$

donde hemos definido

$$\beta(r, \eta) = r^3 e^{-\frac{r^2}{4\eta}} - 4\eta^{\frac{3}{2}}\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\eta}\right). \quad (6.0.13)$$

De aquí en adelante tomaremos la siguiente notación

$$\beta(r, \eta) = \beta, \quad \gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\eta}\right) = \gamma. \quad (6.0.14)$$

En (6.0.12) ya hemos tomado la misma convención de signo como la que se hizo en el caso conmutativo con respecto a la dirección del momento angular.

Para E^2 obtenemos de (6.0.10)

$$E^2 = \left(1 - \frac{4M}{r\sqrt{\pi}}\gamma\right)\left(\frac{8M\eta^{\frac{3}{2}}\gamma - 2\sqrt{\pi}\eta^{\frac{3}{2}}r}{8M\eta^{\frac{3}{2}}\gamma - 2\sqrt{\pi}\eta^{\frac{3}{2}}r - M\beta}\right). \quad (6.0.15)$$

Nos hemos ‘extendido’ en la región de radios grandes, ahora consideremos brevemente la otra región. Dado que a corta distancia se cumple

$$\gamma \left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\eta} \right) \Big|_{\frac{r^2}{4\eta} \ll 1} \approx \frac{r^3}{12\eta^{\frac{3}{2}}} \left(1 - \frac{7}{20} \frac{r^2}{\eta} \right), \quad (6.0.16)$$

buscando en la forma de $-g_{tt}$, se obtiene un término con apariencia, debido a la analogía que se tiene, de la componente de una métrica de Sitter (en la literatura se hace mención a un núcleo de Sitter [4])

$$1 - \frac{4M}{r\sqrt{\pi}} \gamma \left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\eta} \right) \approx 1 - \frac{Mr^2}{3\sqrt{\pi}\eta^{\frac{3}{2}}} + \dots \quad (6.0.17)$$

La constante cosmológica que se tiene por analogía es

$$\Lambda = \frac{M}{\sqrt{\pi}\eta^{\frac{3}{2}}} > 0. \quad (6.0.18)$$

Aun no sabiendo nada del horizonte de eventos, es decir, desconociendo dónde se encuentra, (6.0.17) y (6.0.18) son buenos indicadores para buscar órbitas circulares en $r^2/4\eta \geq 1$, y esto concuerda con los resultados de la anterior sección, donde órbitas circulares estables las encontramos en esta región.

A partir de la expresión para L (6.0.12) se ve que r debe cumplir

$$8M\eta^{\frac{3}{2}}\beta^{-1}\gamma - 2\sqrt{\pi}\eta^{\frac{3}{2}}\beta^{-1}r > M. \quad (6.0.19)$$

Debe tenerse en cuenta que para $r > r_0$ entonces $\beta < 0$, donde r_0 es tal que $\beta(r_0) = 0$. De lo anterior podemos calcular U^t y U^φ con ayuda de las expresiones (6.0.12) y (6.0.15)

$$U^t = \left(1 - \frac{4M}{r\sqrt{\pi}} \gamma \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{8M\eta^{\frac{3}{2}}\gamma - 2\sqrt{\pi}\eta^{\frac{3}{2}}r}{8M\eta^{\frac{3}{2}}\gamma - 2\sqrt{\pi}\eta^{\frac{3}{2}}r - M\beta} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (6.0.20)$$

$$U^\varphi = \frac{1}{r} \left(\frac{M\beta}{8M\eta^{\frac{3}{2}}\gamma - 2\sqrt{\pi}\eta^{\frac{3}{2}}r - M\beta} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (6.0.21)$$

Debido a los vectores de Killing (4.0.4) y (4.0.6), ahora aplicados a las geodésicas que siguen los fotones, obtenemos

$$k^t = E_p / \left(1 - (4M/r\sqrt{\pi})\gamma \right), \quad (6.0.22)$$

$$k^\varphi = L_p / r^2, \quad (6.0.23)$$

donde E_p y L_p son la energía y magnitud del momento angular del fotón y la geodésica se ha parametrizado de manera que su vector tangente coincida con el cuadrivector de la partícula. La condición de geodésica nula, la cual cumple toda partícula sin masa, es

$$g_{rr}(k^r)^2 - \frac{E_p^2}{1 - \frac{4M}{r\sqrt{\pi}}\gamma} + \frac{L_p^2}{r^2} = 0. \quad (6.0.24)$$

La frecuencia de un fotón con cuadrivector k^μ medida por un observador cuya cuadrivelocidad es U^μ en el evento P_C es dada por

$$\omega_C = -(k_\mu U^\mu)|_C. \quad (6.0.25)$$

El subíndice hace referencia a los puntos de emisión (e) o de detección (d) de un fotón emitido por la partícula de prueba o detectado por algún observador. Desarrollando la anterior ecuación obtenemos algo igual a (4.0.27):

$$\omega_C = (E_\gamma U^t - L_\gamma U^\varphi - g_{rr} k^r U^r) |_C. \quad (6.0.26)$$

Conociendo la definición de cambio o corrimiento de frecuencia, dado por (4.0.29), y fijándonos en órbitas circulares alrededor del agujero negro (cuya situación ya hemos estudiado), nos da como resultado para el corrimiento

$$1 + z = \frac{(U^t - b_p U^\varphi)|_e}{(U^t - b_p U^\varphi)|_d}. \quad (6.0.27)$$

En lo anterior hemos introducido el parámetro de deflexión $b_p = L_p/E_p$, el cual es constante a lo largo de la trayectoria que sigue el fotón del punto de emisión al punto de detección.

Debido a que a largas distancias recuperamos Schwarzschild (6.0.5), podemos considerar observadores en el infinito del mismo modo a como se hizo en el caso conmutativo, el cual tiene cuadrivelocidad

$$U_d^\mu = (1, 0, 0, 0). \quad (6.0.28)$$

De esto y considerando (6.0.27) nos da

$$1 + z = U_e^t - b_p U_e^\varphi. \quad (6.0.29)$$

Al igual que su contraparte conmutativa, la condición $k^r = 0$ hace posible determinar el parámetro de deflexión, el resultado para los puntos que cumplen esta condición es

$$0 = \frac{E_p^2}{g_{tt}} + \frac{L_p^2}{g_{\varphi\varphi}}, \quad (6.0.30)$$

$$\Rightarrow b_p = \mp \frac{r}{\left(1 - \frac{4M}{r\sqrt{\pi}}\gamma\right)^{\frac{1}{2}}}, \quad (6.0.31)$$

donde los signos $+$ o $-$ corresponden a cuando el emisor se aleja o se acerca, respectivamente. Más adelante consideraremos el caso general para este parametro.

Al sustituir las expresiones para el caso del movimiento circular de U^t y U^φ , dadas por (6.0.20) y (6.0.21), y la expresión anterior en (6.0.29) dan finalmente el cambio de frecuencia buscado

$$1 + z_{1,2} = \left(1 - \frac{4M}{r\sqrt{\pi}}\gamma\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{8M\eta^{\frac{3}{2}}\gamma - 2\sqrt{\pi}\eta^{\frac{3}{2}}r}{8M\eta^{\frac{3}{2}}\gamma - 2\sqrt{\pi}\eta^{\frac{3}{2}}r - M\beta}\right)^{\frac{1}{2}} \pm \left(\frac{M\beta}{\left(8M\eta^{\frac{3}{2}}\gamma - 2\sqrt{\pi}\eta^{\frac{3}{2}}r - M\beta\right)(1 - 4M\gamma/r\sqrt{\pi})}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (6.0.32)$$

con β dado por (6.0.13). Los subíndices en $z_{1,2}$ indican el caso cuando es *redshift* o *blueshift*, respectivamente.

Si uno desprecia los efectos de la no conmutatividad, deberíamos obtener todas las expresiones conocidas para el caso de Schwarzschild conmutativo, en particular, al tomar el límite $\eta \rightarrow 0$ en las expresiones (6.0.32) deberíamos obtener como resultado (4.0.37). Pero antes de calcular tal límite, nótese que

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \gamma \left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\eta}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (6.0.33)$$

lo cual es evidente de la aproximación (6.0.3), ya que al tomar este último límite es equivalente a que el segundo argumento de γ tienda al infinito.

Es debido a que se cumple (6.0.33) que se tiene

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} ds_{\text{NC}}^2 = ds_{\text{C}}^2, \quad (6.0.34)$$

el lado izquierdo se refiere al caso no conmutativo y el derecho al usual, conmutativo. Esto sugiere fuertemente que deberíamos obtener el límite mencionado para (6.0.32).

Tomemos el primer término del segundo miembro de (6.0.32) y pongámoslo en una forma conveniente, esto debido a la complejidad en sí misma de la expresión

$$\left[\frac{r}{r - \frac{4M}{\sqrt{\pi}}\gamma - \frac{rM\beta}{8M\eta^{\frac{3}{2}}\gamma - 2\sqrt{\pi}\eta^{\frac{3}{2}}r} + \frac{4M^2\gamma\beta}{\sqrt{\pi}(8M\eta^{\frac{3}{2}}\gamma - 2\sqrt{\pi}\eta^{\frac{3}{2}}r)}} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (6.0.35)$$

De la definición de β tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\beta}{8M\eta^{\frac{3}{2}}\gamma - 2\sqrt{\pi}\eta^{\frac{3}{2}}r} &= \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{r^3 e^{-\frac{r^2}{4\eta}} / \eta^{\frac{3}{2}}\gamma - 4}{8M - \frac{2\sqrt{\pi}r}{\gamma}} \\ &= \frac{1}{r - 2M}. \end{aligned} \quad (6.0.36)$$

Con lo anterior, al tomar el límite cuando η tienda a cero en (6.0.35)

$$\begin{aligned} \left[\frac{r}{r - 2M + \frac{4rM}{8M} - \frac{8M^2}{8M-4r}} \right]^{\frac{1}{2}} &= \left[\frac{r}{r - 2M - \frac{M(8M-4r)}{8M-4r}} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\frac{r}{r - 3M} \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (6.0.37)$$

Este es el primer miembro de (4.0.37). Haciendo un procedimiento similar para el segundo término, obtenemos

$$\begin{aligned} \lim_{\eta \rightarrow 0} \left(\frac{M\beta}{(8M\eta^{\frac{3}{2}}\gamma - 2\sqrt{\pi}\eta^{\frac{3}{2}}r - M\beta)(1 - 4M\gamma/r\sqrt{\pi})} \right)^{\frac{1}{2}} &= \lim_{\eta \rightarrow 0} \left(\frac{M}{\left(\frac{8M\eta^{\frac{3}{2}}\gamma - 2\sqrt{\pi}\eta^{\frac{3}{2}}r}{\beta} - M \right) (1 - 4M\gamma/r\sqrt{\pi})} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\frac{M}{\left(\frac{4r-8M}{4} - M \right) (1 - 2M/r)} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\frac{M}{(r - 3M)(1 - 2M/r)} \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

el cual es el segundo miembro de (4.0.37). Por lo tanto, hemos recuperado las expresiones usuales para Schwarzschild.

Aunque los puntos $\varphi = \pm\pi/2$, de máxima y mínima emisión (los cuales se les conoce como puntos en la ‘línea de en medio’), nos permitieron tomar en cuenta la relación $k^r = 0$ para hallar b_p , no son los únicos sobre la órbita circular para la emisión de fotones. También encontramos el punto sobre la línea de visión $\varphi = 0$, en el cual se cumple $k^\varphi = 0$, y donde el corrimiento total se vuelve el corrimiento gravitatorio. De manera general, podemos considerar el valor de b_p para cualquier punto sobre la órbita [32]. Para ello uno introduce el vector bidimensional K a través de las relaciones

$$k^r = K \cos(\varphi) \quad rk^\varphi = K \sin(\varphi), \quad (6.0.38)$$

y usando esto en la condición de norma $k_\mu k^\mu = 0$, junto con la definición de b_p y las cantidades conservadas, obtenemos la siguiente relación

$$b_p = \frac{g_{\varphi\varphi} \sin(\varphi)}{\sqrt{(-g_{tt}g_{\varphi\varphi} \sin^2(\varphi) - r^2 g_{tt}g_{rr} \cos^2(\varphi))}}, \quad (6.0.39)$$

Corrimiento de frecuencia en Schwarzschild no conmutativo

donde los coeficientes son los de la métrica (6.0.1). A partir de esta relación (al derivar) encontramos que los puntos $\varphi = \pm\pi/2$ son los valores extremos de la función b_p , cuando es considerada como función de φ , y, por tanto, en estos puntos, el corrimiento de frecuencias alcanza su valor máximo y mínimo. Podemos considerar también la función b_p cuando los coeficientes son los de la métrica (4.0.1) (expresión (10) de [33]) y comparar ambas expresiones para valores dados de r y M . La siguiente figura muestra tal comparación para $r_e = 6$ y $M = 1$,

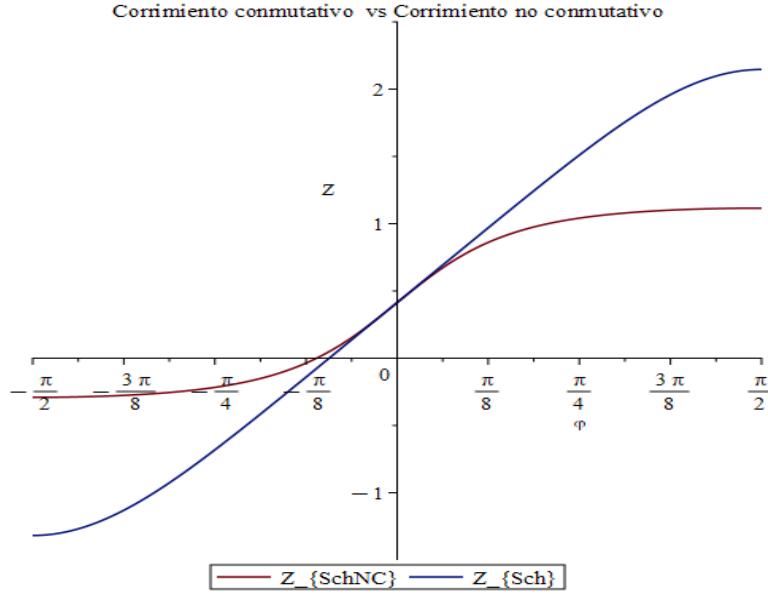


Figura 6.1: Comparación de las expresiones para los corrimientos para el caso conmutativo y no conmutativo, como funciones del ángulo azimutal φ , con $r_e = 6$ y $M = 1$.

Debemos recordar que estamos considerando observadores en el infinito y, por lo tanto, la distancia angular la podemos hacer cero.

De la figura se ve que cerca de la línea de visión apenas hay una diferencia perceptible de ambas expresiones.

Conclusión

A lo largo de este trabajo se ha intentado dar en detalle algunos aspectos acerca de los agujeros negros y la emisión de fotones para partículas de prueba en movimiento circular alrededor de este. El modelo de la gravedad que se usó está descrito por una métrica de Schwarzschild deformada en el sentido no conmutativo; en el límite cuando desaparece la no conmutatividad, recuperamos la métrica usual (6.0.34). Se obtuvieron las expresiones para los corrimientos al rojo y al azul en este nuevo espacio-tiempo, de tal manera que, como se debe esperar, cuando el parámetro de no conmutatividad tiende a cero se recuperan las expresiones comunes (4.0.37). Como complemento para un trabajo posterior, de ambas expresiones (6.0.32) obtenemos un sistema de ecuaciones para las variables M y η , así, podemos poner estos dos últimos parámetros en términos de cantidades observacionales: la distancia al centro del agujero negro de la partícula de prueba y los corrimientos, los cuales pueden ser medidos; para obtener dichas expresiones podemos usar una expansión para grandes radios y así obtener ecuaciones más fáciles de manejar. Se obtienen estas expresiones para dar una aproximación del parámetro no conmutativo en términos de cantidades observables. Adicionalmente, se logra obtener la regulación de la solución de Schwarzschild en el origen coordenado (3.0.16) y así también la teoría predice una masa mínima por debajo de la cual no hay agujero negro y más de allá de esta se obtiene un doble horizonte de eventos dado por (5.1.5).

Bibliografía

- ¹H. Stephani, D. Kramer, M. MacCallum, C. Hoenselaers y E. Herlt, *Exact solutions of Einstein's field equations* (Cambridge University Press, 2009).
- ²A. Perez, «Black holes in loop quantum gravity», *Reports on Progress in Physics* **80**, 126901 (2017).
- ³J. Magueijo y L. Smolin, «Gravity's rainbow», *Classical and Quantum Gravity* **21**, 1725 (2004).
- ⁴P. Nicolini, «Noncommutative black holes, the final appeal to quantum gravity: a review», *International Journal of Modern Physics A* **24**, 1229-1308 (2009).
- ⁵J. Lopez-Dominguez, O. Obregon, M. Sabido y C. Ramirez, «Towards noncommutative quantum black holes», *Physical Review D* **74**, 084024 (2006).
- ⁶P. Nicolini, A. Smailagic y E. Spallucci, «The fate of radiating black holes in noncommutative geometry», en *Beyond Einstein-Physics for the 21st Century*, vol. 637 (2006).
- ⁷M. P. Hobson, G. Efstathiou y A. Lasenby, *General relativity, An introduction for physicists* (Cambridge University Press, 2013).
- ⁸S. M. Carroll, *Spacetime and geometry, An introduction to general relativity*, Pearson new international edition (Pearson Education, 2014).
- ⁹F. W. J. Olver, D. W. Lozier, R. F. Boisvert y C. W. Clark, eds., *NIST handbook of mathematical functions* (Cambridge University Press, 2010).
- ¹⁰G. J. O. Jameson, «*The incomplete gamma functions*», *The Mathematical Gazette* **100**, 298-306 (2016).
- ¹¹N. Jacobson, *Lie Algebras*, Dover books on advanced mathematics (Dover, 1979).
- ¹²P. S. Ghoderao y P. Ramadevi, «Are we living in Non-Commutative Space?—revisiting the classic hydrogen atom system», arXiv preprint arXiv:1912.04846 (2019).
- ¹³A. Djemai y H. Smail, «On quantum mechanics on noncommutative quantum phase space», *Communications in Theoretical Physics* **41**, 837 (2004).
- ¹⁴L. Gouba, «A comparative review of four formulations of noncommutative quantum mechanics», *International Journal of Modern Physics A* **31**, 1630025 (2016).
- ¹⁵A. E. F. Djemai, «Noncommutative classical mechanics», *International Journal of Theoretical Physics* **43**, 299-314 (2004).
- ¹⁶W. Gao-Feng, L. Chao-Yun, L. Zheng-Wen, Q. Shui-Jie y F. Qiang, «Classical mechanics in non-commutative phase space», *Chinese Physics C* **32**, 338 (2008).
- ¹⁷M. Dimitrijevic y J. Wess, «Deformed bialgebra of diffeomorphisms», arXiv preprint hep-th/0411224 (2004).
- ¹⁸P. Aschieri, C. Blohmann, M. Dimitrijević, F. Meyer, P. Schupp y J. Wess, «A gravity theory on noncommutative spaces», *Classical and Quantum Gravity* **22**, 3511 (2005).

- ¹⁹A. Smailagic y E. Spallucci, «UV divergence-free QFT on noncommutative plane», *Journal of Physics A: Mathematical and General* **36**, 517 (2003).
- ²⁰R. LaPierre, *Getting Started in Quantum Optics* (Springer Nature, 2022).
- ²¹R. A. Bertlmann y N. Friis, «Theoretical physics T2 quantum mechanics», T2–Script of Summer semester (2008).
- ²²A. Smailagic y E. Spallucci, «Feynman path integral on the non-commutative plane», *Journal of Physics A: Mathematical and General* **36**, 467 (2003).
- ²³T. Mei, «On the vierbein formalism of general relativity», *General Relativity and Gravitation* **40**, 1913-1945 (2008).
- ²⁴M. Chaichian, A. Tureanu, M. Setare y G. Zet, «On black holes and cosmological constant in noncommutative gauge theory of gravity», *Journal of High Energy Physics* **2008**, 064 (2008).
- ²⁵M. Schneider y A. DeBenedictis, «Noncommutative black holes of various genera in the connection formalism», *Physical Review D* **102**, 024030 (2020).
- ²⁶A. Gruppuso, «Newton’s law in an effective non-commutative space–time», *Journal of Physics A: Mathematical and General* **38**, 2039 (2005).
- ²⁷H. Balasin y H. Nachbagauer, «The energy-momentum tensor of a black hole, or what curves the Schwarzschild geometry?», *Classical and Quantum Gravity* **10**, 2271 (1993).
- ²⁸A. DeBenedictis, «Developments in black hole research: Classical, semi-classical, and quantum», arXiv preprint arXiv:0711.2279 (2007).
- ²⁹A. Herrera-Aguilar y U. Nucamendi, «Kerr black hole parameters in terms of the redshift/blueshift of photons emitted by geodesic particles», *Physical Review D* **92**, 045024 (2015).
- ³⁰G. F. T. del Castillo, *Differentiable manifolds, A theoretical physics approach*, Second edition (Birkhäuser, 2020).
- ³¹R. M. Wald, *General relativity* (University of Chicago Press, 2010).
- ³²P. Banerjee, A. Herrera-Aguilar, M. Momennia y U. Nucamendi, «Mass and spin of Kerr black holes in terms of observational quantities: The dragging effect on the redshift», *Physical Review D* **105**, 124037 (2022).
- ³³M. Momennia, P. Banerjee, A. Herrera-Aguilar y U. Nucamendi, «Schwarzschild black hole and redshift rapidity: A new approach towards measuring cosmic distances», arXiv preprint arXiv:2312.07426 (2023).