Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Agujeros negros con violación de hiperescala en una teoría tenso-escalar

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

Licenciado en Física

por

Alexis Tepale Luna

Asesorado por

Dr. Alfredo Herrera Aguilar

Puebla Pue.
20 de julio de 2020

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Agujeros negros con violación de hiperescala en una teoría tenso-escalar

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

Licenciado en Física

por

Alexis Tepale Luna

Asesorado por

Dr. Alfredo Herrera Aguilar

Puebla Pue.
20 de julio de 2020

Título: Agujeros negros con violación de hiperescala en una teoría tenso-escalar
Estudiante: ALEXIS TEPALE LUNA

COMITÉ

Dr. Gerardo Francisco Torres del Castillo
Presidente

Dr. Alberto Escalante Hernández
Secretario

Dr. Ulises Nucamendi Gómez
Vocal

Dra. Mercedes Paulina Velázquez Quesada
Vocal

Dr. Alfredo Herrera Aguilar
Asesor

Dedicatoria.
A mis padres
y a mis hermanos.

Agradecimientos

Este trabajo representa la culminación de estos cinco relativamente largos años de mi preparación académica como estudiante de física, mismo que tuve la fortuna de vivir en la facultad más *especial* de la universidad, ha sido un honor pertenecer a esta unidad académica, en este tiempo tuve la dicha de pasar por bastantes gratos, y amargos, momentos, que después de todo han contribuido en muchos aspectos personales, asimismo he tenido la dicha de rodearme y convivir de gente asombrosa. Quiero aprovechar este espacio para agradecer a todos aquellos quienes me han acompañado en esta travesía, es lo menos que puedo hacer luego de todo lo que ustedes me han brindado.

En primer lugar, a mis padres, *Yanet* y *José Manuel*, por todo su amor incondicional, por acompañarme y orientarme en cada momento de mi vida, por todas sus charlas y regaños, por nunca dejarme solo y apoyarme en cada decisión, por esperarme cada noche con los brazos extendidos luego de un largo día de escuela, por todo su esfuerzo que me permitió cumplir esta meta, los amo.

A mis hermanos *Emmanuel* y *Oscar Yeshua*, mis eternos compañeros de habitación, por todos sus apapachos, por sus sabios consejos, por su paciencia luego de cada típica *pelea de hermanos*, por esa admiración mutua, por ser mi soporte en los momentos más frustrantes de la carrera, por permitirme vivir con ustedes los momentos más graciosos y ocurrentes, por compartirme sus gustos en tan variadas actividades, mejores hermanos no me pudieron haber tocado.

A mis abuelas y abuelos, *Guadalupe y Manuel*, *Constantina y Francisco* (Q.E.P.D.), a todas mis tías y tíos, a mis primas y mis primos, por toda su unión y apoyo, moral, emocional y económico, por toda su disposición y atención, me hacen sentir orgulloso de tener una familia tan genuina.

A ustedes, *mi squad*, *Majo, Mari, Ingrid, Angie, Aldo y Joseph*, por hacer de estos últimos cinco años de mi estancia en la facultad unos de los mejores en mi vida, por cada clase compartida, tanto teórica como experimental, que de no haber sido por su compañía seguramente el aburrimiento y el tedio me habrían llevado por otro camino, por sus *pasteles sorpresa* no tan sorpresa, por pasar muchos de sus ratos libres conmigo, ya sea compartiendo una pizza en las palapas o esos riquísimos tacos de mixiote, por acompañarme en biblioteca para alguna sesión de estudio, por todas las fiestas, reuniones y posadas, por estrecharme la mano luego de ese fatídico quinto semestre, por esas inolvidables charlas en la escaleras del segundo piso del FM9 mientras esperábamos nuestro momento para hacer esos exámenes orales de *matemáticas básicas* con el profesor *Manuel Ibarra*, nuestro primer profesor de matemáticas en la facultad, de quien también estoy sumamente agradecido por todos su compromiso y labor docente, por todas sus excelentes clases, por su insistencia en formarnos el hábito de la una buena comunicación de nuestra ideas y por todos sus valiosos consejos que, personalmente, me ayudaron a desenvolverme en la carrera de una manera más eficiente, por transmitirme su gusto por las matemáticas. A *Diana Vanessa* por compartir su gusto por la física teórica y alentarme a estudiar temas relacionados, por las pláticas en el STU devuelta a casa que culminaban con una caminata por las calles de Cholula mientras degustábamos de una deliciosa empanada, por los momentos bonitos, y los dolorosos también, por su amistad y su ejemplo de vida. A *Baruch*, por compartir todo su gusto por las matemáticas, por sus sugerencias para no perder la cabeza en algún momento no tan grato de mi carrera, por su disposición y compañía.

A *Fernando*, por todas esas pláticas que me ayudaron a aclarar el panorama cada vez que me sentía sofocado por mis pensamientos, por siempre estrecharme la mano y ayudarme a salir del calabozo, por las veces que fuimos al TacoGame y por toda la atención que siempre me tuviste.

A *Virginia Aurora*, por sus visitas a la biblioteca y sus amenas conversaciones, por enseñarme y darme una perspectiva muy profunda sobre aspectos de mi vida que en su momento llegué a ignorar, por todo su apoyo moral y emocional, por regalarme aquellas sonrisas aun cuando no nos conocíamos, por su enorme amabilidad, por ayudarme a creer en mi, y que, de no haber sido por ella no habría conocido a *Ricardo, Ceci* y *Adrían*, a quienes, a pesar de haber conocido de hace poco, he llegado a apreciar bastante.

A *Manuel Badillo* y *Adriana*, mis queridos compañeros, que por alguna curiosa razón siempre estaban en el momento justo luego de alguna ruptura amorosa, gracias por escucharme y alentarme, por todos sus consejos y paciencia. A *Edmundo*, por todas esas interesantes pláticas de filosofía, historia, matemáticas y demás temas, por sus recomendaciones cinematográficas y de videojuegos, por compartir su inmenso conocimiento. A *Grethel* y *Charly*, por su sincera amistada y apoyo, y por esas ocasiones que me acompañaron a la hora de la comida, o el desayuno, al Mesón de Dorita. A *Christian, Nestor, Ian, Marlenne, Lupita, John, Hugo, Pablo, Pamela, Garza, Willy, Ricardo Toriz, Jonathan, Misael, Amaury, Efraín, Addí, Paco, Beto, Abner, Freddy, Javi, Cazu, Nuria, Dr. Oswaldo, Manuel Hernández, Neri, Maggie, Hugo, Maggy Vega, Jenni, Alejandro Chávez y Julio*, a ustedes amigos de la FCFM.

También quiero agradecer a mis sinodales por toda su disponibilidad y disposición para participar como parte del jurado, por sus valiosas observaciones para hacer de éste un mejor trabajo. En particular quiero agradecer a la *Dra. Mercédes Velázquez*, una de las profesoras que más admiro tanto por su labor docente como científica, por permitirme colaborar para llevar a cabo mi participación en un congreso de física, por toda su amabilidad y atención, también quiero agradecer al *Dr. Alberto Escalante* por compartir su pasión por la física-matemáticas y la física teórica, por transmitirnos el valor del trabajo duro y por esas charlas que nos motivaban a querer aprender más.

A mi asesor, el *Dr. Alfredo Herrera* quien me recibió cordialmente en cuanto le expresé mi interés para realizar ésta tesis, por ser mi primer instructor en el mundo de la investigación y por darme las facilidades para empezar a desenvolverme en el mismo, por su apoyo en becas, su tiempo, por invitarme a participar en varias charlas en el seminario de Teoría de campos, gravitación y cosmología del IFUAP y en un workshop sobre agujeros negros, por todo su tiempo, disposición y por enseñarme a *no tirar la toalla* en cuestiones académicas a pesar de las adversidades.

Finalmente, más no al final, a ti *Alexis*, por todo ese esfuerzo, esmero, dedicación y actitud que te ha permitido alcanzar estos objetivos, porque estás consciente de todo el trabajo realizado y porque de no ser por tu compañía, no hubiera alcanzado lo que ahora soy.

¡Gracias a todos!

Resumen

En esta tesis presentamos una familia de soluciones exactas a las ecuaciones de campo de una teoría tenso-escalar, discutimos sobre la elección de los parámetros contenidos en la solución que da origen a configuraciones de campo tipo agujero negro que asintóticamente toman la forma de las llamadas geometrías con violación de hiperescala, finalmente reportamos la temperatura y entropía de Bekenstein-Hawking para dichos agujeros negros.

Introducción

En el marco de la teoría General de la Relatividad es de particular interés la búsqueda y el análisis de soluciones exactas a las ecuaciones de campo de Einstein. Es bien conocido que, de acuerdo con una adecuada configuración de materia acoplada al campo gravitatorio, es viable encontrar una solución tipo agujero negro [1, 2, 3, 4, 5].

Durante la edad de oro de la Relatividad General, comprendida aproximadamente entre los años 1960 y 1975, se fue profundizando en la comprensión del concepto de agujero negro, se prestó bastante atención a los llamados horizontes de eventos y eventualmente se logró construir una fuerte analogía entre las propiedades de los agujeros negros y las leyes de la termodinámica clásica, estos resultados fueron sintetizados en una serie de cuatro enunciados designados como *Las Cuatro Leyes de la Mecánica de los Agujeros Negros* [6, 7].

Ahora bien, con la llegada de la Correspondencia AdS/CFT, también conocida como Dualidad Holográfica [8], tal interés por estudiar agujeros negros ha ido en incremento, ya que, inspirándonos en todo este bagaje, el tratamiento de teorías de Sistemas de Materia Condensada (SMC) en correspondencia con teorías de gravedad no es algo que suene descabellado. A través de la Dualidad Holográfica uno puede relacionar teorías de campo cuánticas altamente correlacionadas con teorías de gravedad débilmente acopladas y extraer información sobre alguna de ellas a partir de la teoría dual. La idea fundamental de AdS/CFT es estudiar tales teorías de campo cuánticas, definidas en un espacio de dimensión inferior como si se tratase de la frontera de un espacio-tiempo de dimensión superior; esta frontera puede ser por ejemplo el horizonte de eventos de algún agujero negro. Para visualizar con mayor nitidez este último hecho podemos pensar en una configuración esféricamente simétrica con una singularidad física ubicada en el centro del agujero negro y un horizonte de eventos dado por los puntos con coordenada radial $r = r_h$, la región del espacio-tiempo definida por los puntos con coordenada radial $r > r_h$ es entonces completamente regular y la frontera de ésta coincide con el horizonte de eventos, por lo que nuestra atención quedará enfocada únicamente en este último sector del espacio-tiempo.

En la búsqueda de la descripción de SMC en la vecindad de puntos críticos es necesario que las herramientas proporcionadas por la Dualidad Holográfica sean extendidas más allá del dominio relativista usual, i.e. de los espacios Anti de-Sitter (AdS).

En las proximidades de los puntos críticos las observables exhiben un comportamiento de escalamiento dado por un colectivo de exponentes críticos, por ejemplo, algunos sistemas críticos cuánticos exhiben una simetría de escalamiento anisótropo que puede ser parametrizada por el llamado Exponente Dinámico Crítico $z : (t, \vec{x}) \rightarrow (\lambda^z t, \lambda\vec{x})$. Por el lado de gravedad una familia de entornos que poseen esta misma simetría de escalamiento son los llamados Espacios de Lifshitz [4, 9, 10], que son una generalización de los espacios AdS. Una consecuencia de tal escalamiento anisótropo es que, a bajas temperaturas, los calores específicos dependen de la temperatura como $c_V \sim T^{D/z}$ donde D es el número de dimensiones del espacio frontera, los agujeros negros asintóticamente Lifshitz presentan un comportamiento termodinámico similar [4], por lo que son buenos candidatos para la descripción holográfica de los sistemas cuánticos en cuestión. Este y otros resultados han servido como motivación para estudiar la termodinámica de agujeros negros, pues su entendimiento nos ha servido como puente para tener una mejor compresión entre posibles candidatas a teorías duales [5, 9].

En el tratamiento de sistemas cuánticos se ha encontrado que existen puntos críticos que pueden ser caracterizados por algunos otros exponentes críticos además de z. En agrupación, estos exponentes pueden cumplir un conjunto de relaciones y por tanto depender funcionalmente entre ellos, a estas relaciones se les conocen en la literatura como relaciones de hiperescala, una de las más interesantes es la relación de Josephson [11]. A nivel de sistemas cuánticos críticos esta última relación puede ser violada por la presencia de acoplamientos irrelevantes, y se muestra que las teorías que violan esta relación tienen un calor específico $c_V \sim T^{(D-\theta)/z}$ [12], el nuevo parámetro θ es llamado el exponente de violación de hiperescala. En el contexto de gravedad este parámetro puede ser implementado con ayuda de una nueva clase de geometrías conocidas como Geometrías con Violación de Hiperescala (GVHE) [5, 9], estas últimas son una generalización de las geometrías de Lifshitz.

Se ha reportado en [5] una familia de soluciones tipo agujero negro que corresponden asintóticamente con GVHE en el contexto de una teoría Einstein-Maxwell-Dilaton generalizada y se muestra que con la elección adecuada de los exponentes críticos y la dimension del espacio de fondo, las propiedades termodinámicas de tales agujeros negros coinciden con las propias de un sistema líquido-gas de Van der Waals, hecho que pone en manifiesto la muy posible dualización de esta teoría y que nos sirve como punto de partida para realizar un análisis similar en una teoría más simple que comprende únicamente el acoplamiento entre el campo gravitacional y un campo escalar dinámico sujeto a un potencial, esta última pertenece a las llamadas teorías tenso-escalares.

La estructura de esta tesis es presentada de la siguiente manera. En el capítulo 1 enunciamos el Principio de Hamilton, presentamos los elementos básicos de Relatividad General que nos permiten introducir las ecuaciones de campo de Einstein, derivamos estas últimas a partir de la acción de Einstein-Hilbert, mostramos la solución tipo agujero negro de Schwarzchild, y hacemos una breve introducción a los espacios de Lifshitz y las GVHE. En el capítulo 2 explicamos en qué consisten las teorías tenso-escalares y damos algunos ejemplos relevantes en la física teórica, presentamos las ecuaciones de campo para una teoría particular, procedemos a proponer un ansatz para la métrica y el campo escalar que incluye a los exponentes críticos z y θ. Luego de ello exhibimos los elementos para escribir las ecuaciones de campo, indicamos el sistemas de ecuaciones diferenciales a resolver y finalmente reportamos la familia de soluciones exactas para el mismo. En el capítulo 3 realizamos un análisis sobre los invariantes de curvatura asociados a nuestra métrica y discutimos sobre la elección de los exponentes críticos contenidos en nuestra solución que da lugar a soluciones tipo agujero negro. Con el fin de embarcarnos en el estudio de la termodinámica de los agujeros negros comenzamos el capítulo 4 dando una breve motivación para el estudio de la física de los agujeros negros, en seguida enunciamos y detallamos las cuatro leyes de la mecánica de los agujeros negros, luego de ello incluimos un enfoque moderno para obtener la temperatura de tales objetos en el contexto de las GVHE. Con propósitos ilustrativos presentamos la fórmula de Bekenstein-Hawking para la entropía de un agujero negro y aplicamos este resultados a nuestras soluciones. En el último capítulo exponemos nuestras conclusiones relativas a este trabajo de investigación.

Índice general

Capítulo 1

Preliminares de Teoría Clásica de Campos y Relatividad General

En este capítulo presentaremos las herramientas básicas de Teoría Clásica de Campos enfocadas al estudio del acoplamiento entre el campo gravitacional y los diversos campos de materia, haremos énfasis en los elementos básicos de Relatividad General (RG) que nos permitirán trabajar con las ecuaciones de Einstein, mostraremos la solución tipo agujero negro de Schwarzschild e introduciremos de manera breve a los espacios de Lifshitz y las GVHE.

1.1. El Principio de Hamilton

La descripción dinámica de sistemas físicos es usualmente codificada en un conjunto de ecuaciones diferenciales, tal es el caso de los sistemas mecánicos compuestos por partículas puntuales regidos por la Segunda Ley de Newton. Otro enfoque orientado a las ecuaciones de movimiento de sistemas mecánicos lo ofrece el Principio de d'Alembert, este principio físico resulta sumamente poderoso debido a su equivalencia con las ecuaciones de Euler-Lagrange y sirve como punto de partida para la formulación de Lagrange de la mecánica clásica [13, 14].

Supongamos que el estado físico de un sistema mecánico puede ser descrito por un conjunto de coordenadas generalizadas (q^a). El Principio de Hamilton (PH) establece que dadas dos configuraciones, $q_1^a = q^a(t_1)$ inicial y $q_2^a = q^a(t_2)$ final, la trayectoria física $q^a = q^a(t)$ descrita por el sistema será aquella que haga estacionaria a la funcional de acción

$$S[q^a] = \int_{t_1}^{t_2} L(q^a, \dot{q}^a; t)\mathrm{d}t. \tag{1.1}$$

El parámetro t, que usualmente se asocia con el tiempo, es conocido como el parámetro de evolución y L es llamada función Lagrangiana. La tarea de encontrar de entre todas las trayectorias que conectan los estados $q^a(t_1)$ y $q^a(t_2)$, aquella que cumpla la condición de hacer estacionaria a S suena a una labor complicada, sin embargo existe una manera sistemática de encontrar tal curva, o al menos un conjunto de ecuaciones diferenciales que la describan, para ello se recurre al concepto de derivación funcional o variación funcional[1]. Con esta nueva herramienta matemática podemos enunciar el PH como sigue[2]

$$\frac{\delta S}{\delta q^a(t)} = 0. \tag{1.2}$$

[1]El lector interesado en un desarrollo más detallado de este concepto enfocado en la física puede consultar [15].
[2]Además de la condición (1.2), debemos asumir que las variaciones infinitesimales $\delta q^a(t)$ se anulan en t_1 y t_2.

Aplicando la relación (1.2) a la funcional de acción (1.1) se derivan las ecuaciones de Euler-Lagrange (E-L)

$$\frac{\partial L}{\partial q^a} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}\right) = 0, \tag{1.3}$$

las ecuaciones (1.3) representan un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias cuyas variables dependientes son las funciones $q^a = q^a(t)$. Concluimos entonces que una curva $(q^a(t))$ hace estacionaria a S si ésta cumple con las ecuaciones de E-L.

En lo que sigue etiquetaremos a las coordenadas espacio-temporales por $(x^\mu) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$, como es usual la coordenada x^0 está asociada con el tiempo y las restantes con las coordenadas espaciales, además haremos uso de la notación $\partial/\partial x^\mu \equiv \partial_\mu$. Para establecer el PH en Teoría de Campos las reglas del juego cambian un poco, primeramente ya no solo el tiempo es el único parámetro de evolución, sino que las coordenadas espaciales también lo son, entre tanto a los objetos que nombrábamos anteriormente por coordenadas generalizadas aquí serán los campos físicos en sí.

Sea pues, supongamos que un sistema físico está descrito por un conjunto de funciones $\phi^i = \phi^i(x^\mu)$, que hacen el papel de los campos físicos de la teoría en cuestión. La funcional de acción ahora está dada por

$$S[\phi^i] = \int_{\mathcal{M}} \mathcal{L}(\phi^i, \partial_\mu \phi^i; x^\mu) \mathrm{d}^4 x. \tag{1.4}$$

En este caso, la función $\mathcal{L}$ es denominada densidad lagrangiana ya que es una función integrada sobre un dominio $\mathcal{M}$ contenido en el cuadriespacio. En analogía al caso de sistemas mecánicos, enunciamos el PH a través de la siguiente ecuación[3]

$$\frac{\delta S}{\delta \phi^i(x^\mu)} = 0. \tag{1.5}$$

Tras desarrollar la anterior derivada funcional e igualar a cero obtenemos el siguiente conjunto de ecuaciones también conocidas como Ecuaciones de Euler-Lagrange o Ecuaciones de Campo[4,5]

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^i} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^i)}\right) = 0. \tag{1.6}$$

Una de las cualidades de la formulación Lagrangiana en Teoría de Campos es la facilidad de obtener teorías que estén de acuerdo con el Principio de Covariancia, motivo que hace del enfoque Lagrangiano un ambiente natural para formular RG a partir de una funcional de acción, como veremos en las secciones posteriores.

1.2. Elementos de Relatividad General

El propósito de esta sección es mostrar las definiciones básicas y enunciar algunos resultados importantes de RG que serán usados en secciones posteriores[6].

Consideremos un par de sistemas de referencia cuyas coordenadas estén etiquetadas por (x^μ) y (x'^μ), que además sean diferenciables al menos una vez con derivadas parciales de primer orden continuas.

[3] Asumiendo, además, que las variaciones $\delta\phi^i(x^\mu)$ se anulan en la frontera del dominio $\mathcal{M}$.

[4] De ahora en adelante haremos uso del convenio de suma de Einstein, es decir, asumiremos implícitamente una suma en los pares de índices repetidos.

[5] Este resultando sigue siendo válido para teorías descritas con un número arbitrario (finito) de parámetros de evolución, i.e., realizando la integración (1.4) sobre dominios n-dimensionales.

[6] Para un tratamiento más detallado y especializado de estos conceptos recomendamos al lector consultar las referencias [1, 2, 3]

Diremos que la transformación definida por $x'^{\mu} = x'^{\mu}(x^{\nu})$ es *admisible* si

$$\left|\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}\right| \neq 0. \tag{1.7}$$

la condición previa es suficiente para poder invertir, al menos localmente, la transformación $x'^{\mu} = x'^{\mu}(x^{\nu})$. De ahora en adelante asumiremos que todas las transformaciones empleadas son admisibles a menos que se especifique lo contrario.

Decimos que un objeto $T^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_p}_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_q}$ es un tensor si se transforma de acuerdo con la siguiente regla

$$T'^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_p}_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_q}(x'^{\mu}) = \frac{\partial x'^{\alpha_1}}{\partial x^{\sigma_1}}\frac{\partial x'^{\alpha_2}}{\partial x^{\sigma_2}}\cdots\frac{\partial x'^{\alpha_p}}{\partial x^{\sigma_p}}\frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x'^{\beta_1}}\frac{\partial x^{\nu_2}}{\partial x'^{\beta_2}}\cdots\frac{\partial x^{\nu_q}}{\partial x'^{\beta_q}}T^{\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_p}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_q}(x^{\mu}). \tag{1.8}$$

Diremos que el conjunto de funciones $T^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_p}_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_q}$ es un *tensor de rango* (p,q) o bien que es un (p,q)-*tensor*.

Para nuestros propósitos estaremos tratando con variedades diferenciables[7] $\mathcal{M}$ que son subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, así cada punto $p \in \mathcal{M}$ está caracterizado por un conjunto de n parámetros reales, por decir $p = (x^{\mu})$. Sea una carta local ϕ que lleva puntos $p \in \mathcal{M}$ a elementos $\phi(p) = \vec{r} \in \mathbb{R}^n$, definimos la *base de vectores tangentes covariante* a través de

$$e_{\mu} := \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^{\mu}}, \tag{1.9}$$

y con ello las *componentes covariantes del tensor métrico* del espacio $\mathcal{M}$ como

$$g_{\mu\nu} := e_{\mu}\cdot e_{\nu}, \tag{1.10}$$

donde $\cdot$ denota el producto interno usual en $\mathbb{R}^n$.

Definimos el elemento de línea en $\mathcal{M}$ como

$$\mathrm{d}s^2 := g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^{\mu}\mathrm{d}x^{\nu}, \tag{1.11}$$

es común encontrar en la literatura que a este objeto se le refiera por *métrica*.

En general, para un espacio-tiempo curvo el determinante $|g_{\mu\nu}|$ no es una cantidad estrictamente positiva y el producto interno inducido por esta métrica tampoco será definido positivo, las variedades equipadas con esta clase de métricas son llamadas *variedades pseudoriemannianas* y son con las que trabajaremos a lo largo de toda esta tesis.

Una vez más supongamos que un punto $p \in \mathcal{M}$ está etiquetado por n parámetros (x^{μ}) de tal forma que dada una carta local ϕ, podamos escribir $\phi(p) = y^{\alpha}(x^{\mu})\hat{E}_{\alpha}$, donde los vectores $\hat{E}_{\alpha}$ corresponden con los de la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Definimos la *base de vectores tangentes contravariante* por

$$e^{\mu} := \nabla x^{\mu}, \tag{1.12}$$

donde las n funciones $\mathbb{R}$-valuadas $x^{\mu} = x^{\mu}(y^{\alpha})$ se obtienen invirtiendo las relaciones $y^{\alpha} = y^{\alpha}(x^{\mu})$. Con esta nueva base, definimos las *componentes contravariantes del tensor métrico* como

$$g^{\alpha\beta} := e^{\alpha}\cdot e^{\beta}.$$

Con ayuda de las componentes del tensor métrico definimos los *símbolos de Christoffel de primera clase* o *de primera especie* como

$$[\mu\nu,\beta] := \frac{1}{2}\left(\partial_{\mu}g_{\nu\beta} + \partial_{\nu}g_{\mu\beta} - \partial_{\beta}g_{\mu\nu}\right), \tag{1.13}$$

y los *símbolos de Christoffel de segunda clase* o *de Segunda Especie* a través de

[7] Para información más detallada sobre estos tópicos de geometría diferencial y su aplicación en la física teórica el lector puede consultar [16, 17].

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} := g^{\alpha\beta}[\mu\nu, \beta]. \tag{1.14}$$

Es importante señalar que los símbolos de Christoffel de segunda clase no se transforman como tensores. Se puede probar el siguiente conjunto de identidades, conocidas como relaciones de Christoffel [18]

$$\Gamma'^{\nu}_{\ \mu\lambda} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\lambda}}\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\sigma}}\Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta} + \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}\partial x'^{\lambda}}. \tag{1.15}$$

Sin embargo los símbolos de Christoffel de segunda clase nos permiten construir una regla de derivación que al ser aplicada a un tensor nos conceda un nuevo tensor.

Definimos la *derivada covariante* de un tensor de rango (p, q) como[8,9]

$$\begin{aligned}\nabla_{\mu}T^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_p}_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_q} := \partial_{\mu}T^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_p}_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_q} &+ \Gamma^{\alpha_1}_{\mu\sigma}T^{\sigma\alpha_2\cdots\alpha_p}_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_q} + \cdots + \Gamma^{\alpha_p}_{\mu\sigma}T^{\alpha_1\alpha_2\cdots\sigma}_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_q} \\ &- \Gamma^{\sigma}_{\mu\beta_1}T^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_p}_{\sigma\beta_2\cdots\beta_q} - \cdots - \Gamma^{\sigma}_{\mu\beta_q}T^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_p}_{\beta_1\beta_2\cdots\sigma}.\end{aligned} \tag{1.16}$$

Definimos las componentes del *tensor de Riemann* como

$$R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} := \partial_{\mu}\Gamma^{\alpha}_{\nu\beta} - \partial_{\nu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\nu\beta} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\mu\beta}. \tag{1.17}$$

este objeto contiene toda la información sobre la curvatura de la variedad, grosso modo nos indica sobre la desviación del tensor métrico con respecto a la métrica euclideana $\delta_{\mu\nu}$ (o con respecto a la de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ según sea la estructura local de la variedad). En el contexto de RG, es una de las herramientas matemáticas centrales debido a que la curvatura del espacio-tiempo que está íntimamente relacionada con la presencia de un campo gravitacional es, en principio, una cantidad observable a través de la *desviación geodésica*[10].

Definimos las componentes *tensor de Ricci* como

$$R_{\mu\nu} := R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu} \tag{1.18}$$

y el *escalar de Ricci* o *escalar de Curvatura* por

$$R := R^{\mu}{}_{\mu} \equiv g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}. \tag{1.19}$$

Una propiedad muy importante que cumplen las componentes del tensor de Riemann son las llamadas identidades de Bianchi

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} + R_{\alpha\nu\beta\mu} + R_{\alpha\mu\nu\beta} = 0 \tag{1.20}$$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu;\rho} + R_{\alpha\beta\rho\mu;\nu} + R_{\alpha\beta\nu\rho;\mu} = 0 \tag{1.21}$$

nombradas *primera y segunda identidad de Bianchi* respectivamente. A expensas de la segunda identidad podemos realizar un par de contracciones, emplear las definiciones (1.18), (1.19) y obtener el siguiente resultado

$$\nabla_{\nu}\left(R^{\nu}{}_{\rho} - \frac{1}{2}g^{\nu}{}_{\rho}R\right) = 0,$$

[8] También se suele emplear la notación $\nabla_{\alpha}T \equiv T_{;\alpha}$.

[9] En particular, la derivada covariante coincide con la derivada parcial usual si la aplicamos a un campo escalar.

[10] La desviación geodésica describe la tendencia entre dos objetos a acercarse o alejarse entre sí mientras se mueven bajo la influencia de un campo gravitacional.

conocido como *identidad contraída de Bianchi*, la cual nos permite definir el *tensor de Einstein* a través de

$$G_{\mu\nu} := R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R, \tag{1.22}$$

el tensor de Einstein es simétrico además de ser covariantemente conservado.

Definimos un *tensor relativo de peso w* ó *densidad tensorial de peso w* como un conjunto de n^{p+q} funciones, $T^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_p}_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_q}$, que se transforman como

$$T'^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_p}_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_q}(x'^\mu) = \left|\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\right|^w \frac{\partial x'^{\alpha_1}}{\partial x^{\sigma_1}}\frac{\partial x'^{\alpha_2}}{\partial x^{\sigma_2}}\cdots\frac{\partial x'^{\alpha_p}}{\partial x^{\sigma_p}}\frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x'^{\beta_1}}\frac{\partial x^{\nu_2}}{\partial x'^{\beta_2}}\cdots\frac{\partial x^{\nu_q}}{\partial x'^{\beta_q}} T^{\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_p}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_q}(x^\mu), \tag{1.23}$$

y diremos que una función K es una *densidad escalar de peso w* si se transforma como

$$K'(x'^\alpha) = \left|\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\right|^w K(x^\alpha). \tag{1.24}$$

En particular notemos que si $g := \det(g_{\mu\nu}) \equiv |g_{\mu\nu}|$, entonces

$$\sqrt{|g'|} = \sqrt{\left|\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g_{\alpha\beta}\right|} = \left|\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu}\right|^{-1}\sqrt{|g|},$$

es decir $\sqrt{|g|}$ es una densidad escalar de peso -1.

Definimos, por otro lado, la *derivada covariante de un tensor relativo de peso w*, $T^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_p}_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_q}$, como

$$\begin{aligned}\nabla_\mu T^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_p}_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_q} := \partial_\mu T^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_p}_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_q} + w\Gamma^\alpha_{\alpha\mu} T^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_p}_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_q} + \Gamma^{\alpha_1}_{\mu\sigma} T^{\sigma\alpha_2\cdots\alpha_p}_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_q} + \cdots + \Gamma^{\alpha_p}_{\mu\sigma} T^{\alpha_1\alpha_2\cdots\sigma}_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_q} \\ - \Gamma^\sigma_{\mu\beta_1} T^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_p}_{\sigma\beta_2\cdots\beta_q} - \cdots - \Gamma^\sigma_{\mu\beta_q} T^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_p}_{\beta_1\beta_2\cdots\sigma},\end{aligned} \tag{1.25}$$

para densidades escalares nos quedaremos únicamente con los primeros dos términos de la definición (1.25), por ejemplo supongamos una variedad pseudoriemanniana con $g < 0$, la derivada covariante $\nabla_\mu\sqrt{-g}$ está dada por[11]

$$\begin{aligned}\nabla_\mu\sqrt{-g} &= \partial_\mu\sqrt{-g} - \Gamma^\alpha_{\alpha\mu}\sqrt{-g} = \partial_\mu\sqrt{-g} - \partial_\mu\left(\log\sqrt{-g}\right)\sqrt{-g} \\ &= \partial_\mu\sqrt{-g} - \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\left(\sqrt{-g}\right)\sqrt{-g} = 0.\end{aligned}$$

Para finalizar esta sección comentaremos brevemente sobre cálculo integral. Si deseamos integrar alguna función escalar f definida en alguna región $\mathcal{U}$ contenida en nuestro espacio-tiempo, debemos tomar en cuenta el volumen dado por

$$dV := \sqrt{|g|}\mathrm{d}x^0\mathrm{d}x^1\cdots\mathrm{d}x^{n-1} \equiv \sqrt{|g|}\mathrm{d}^n x. \tag{1.26}$$

esta última cantidad es invariante. Para calcular la integral de f en $\mathcal{U}$ habremos de evaluar la siguiente expresión

$$\int_{\mathcal{U}} f(x^\mu)\sqrt{|g|}\mathrm{d}^n x.$$

[11] Mediante un cálculo directo se puede probar que $\Gamma^\alpha_{\alpha\mu} = \partial_\mu \log\sqrt{g}$ siempre que $g > 0$.

1.3. Ecuaciones de Einstein y acción de Einstein-Hilbert

La conclusión más importante de RG son las ecuaciones de Einstein, estas ecuaciones equiparan la curvatura del espacio-tiempo con la distribución de materia y energía contenida en ese mismo espacio. En un espacio-tiempo vacío, las Ecuaciones de Einstein se escriben como

$$R_{\mu\nu} = 0, \tag{1.27}$$

estas relaciones representan un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden cuyas variables dependientes son las componentes del tensor métrico.

En un espacio no vacío las ecuaciones de Einstein no toman la misma forma. La presencia de materia y energía es capaz de distorsionar la geometría del espacio-tiempo y por ende repercutir en su dinámica, por ello es necesario introducir un nuevo elemento llamado *Tensor de energía-momento*, que usualmente se denota por $T_{\mu\nu}$.

En 1915, Einstein propone sus famosas ecuaciones de campo[12]

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \tag{1.28}$$

donde la constante de acoplamiento está dada por $\kappa = 8\pi G/c^4$ (en unidades naturales toma el valor de la unidad).

A continuación presentaremos una funcional de acción tal que al aplicar el PH, recuperemos las ecuaciones (1.28). La primera formulación lagrangiana para RG fue propuesta por Hilbert en el año de 1915, y es conocida como la *acción de Einstein-Hilbert* dada por

$$S_{EH}[g_{\mu\nu}] = -\frac{1}{16\pi G}\int \mathrm{d}^D x\sqrt{-g}R,$$

partiendo de esta funcional de acción podemos recuperar las ecuaciones de Einstein en el vacío. Para derivar las ecuaciones (1.28) es necesario agregar un término que contenga la información de los campos de materia presentes en la teoría,

$$S_{EH+M} = -\frac{1}{16\pi G}\int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}^D x\sqrt{-g}\left(R + \mathcal{L}_{\mathrm{M}}\right), \tag{1.29}$$

el nuevo término $\mathcal{L}_{\mathrm{M}}$ es conocido como Lagrangiano de materia, esta función debe ser expresada necesariamente en forma invariante para preservar la covariancia de las ecuaciones de Einstein, la siguiente derivación es una traducción del desarrollo mostrado en [18] salvo con algunos pasos intermedios detallados. Apliquemos entonces el PH a la acción (1.29)

$$\delta S_{EH+M} = -\frac{1}{16\pi G}\int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}^D x\left[\delta\left(\sqrt{-g}R + \sqrt{-g}\mathcal{L}_{\mathrm{M}}\right)\right] = -\frac{1}{16\pi G}\int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}^D x\left[\delta\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}\right) + \delta\left(\sqrt{-g}\mathcal{L}_{\mathrm{M}}\right)\right],$$

suponemos que $-g > 0$ en $\mathcal{M}$. Tratemos por separado las variaciones de cada término, primeramente

$$\begin{aligned}
\delta\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}\right) &= g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}\delta\sqrt{-g} + \sqrt{-g}R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} \\
&= R\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial g_{\mu\nu}}\delta g_{\mu\nu} + \sqrt{-g}R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} \\
&= R\left(-\frac{1}{2\sqrt{-g}}\frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}}\delta g_{\mu\nu}\right) + \sqrt{-g}R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}.
\end{aligned}$$

[12] Es preciso mencionar que a lo largo de esta sección y en los capítulos posteriores haremos uso del sistema de unidades naturales, i.e., fijaremos $c = 8\pi G = \hbar = k_B = 1$.

Sea $Q^{\mu\nu}$ la matriz de co-factores de $g_{\mu\nu}$, esto es $g^{\mu\nu} = Q^{\mu\nu}/g$, de manera que $g = g_{0\alpha}Q^{0\alpha}$, ahora procedemos a derivar este determinante

$$\frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}} = \frac{\partial g_{0\alpha}}{\partial g_{\mu\nu}}Q^{0\alpha} + \frac{\partial Q^{0\alpha}}{\partial g_{\mu\nu}}g_{0\alpha} = \delta_0^\mu \delta_\alpha^\nu Q^{0\alpha} = Q^{\mu\nu} = gg^{\mu\nu},$$

de esta última relación obtenemos

$$-\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}}\delta g_{\mu\nu} = \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}.$$

Puesto que $g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = D$, entonces $g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}$, por tanto

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}}\frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}}\delta g_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}.$$

Ahora desarrollamos el término $\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}$,

$$\begin{aligned}\delta R_{\mu\nu} = \delta R^\alpha{}_{\mu\alpha\nu} &= \delta\left(\partial_\alpha\Gamma^\alpha_{\nu\mu} - \partial_\nu\Gamma^\alpha_{\alpha\mu} + \Gamma^\alpha_{\alpha\sigma}\Gamma^\sigma_{\nu\mu} - \Gamma^\alpha_{\nu\sigma}\Gamma^\sigma_{\alpha\mu}\right) \\ &= \partial_\alpha\delta\Gamma^\alpha_{\nu\mu} - \partial_\nu\delta\Gamma^\alpha_{\alpha\mu} + \delta\Gamma^\alpha_{\alpha\sigma}\Gamma^\sigma_{\nu\mu} + \Gamma^\alpha_{\alpha\sigma}\delta\Gamma^\sigma_{\nu\mu} - \delta\Gamma^\alpha_{\nu\sigma}\Gamma^\sigma_{\alpha\mu} - \Gamma^\alpha_{\nu\sigma}\delta\Gamma^\sigma_{\alpha\mu},\end{aligned} \tag{1.30}$$

dado que las variaciones $\delta\Gamma^\alpha_{\nu\mu}$ y $\delta\Gamma^\alpha_{\alpha\mu}$ representan cambios infinitesimales, podemos pensar en estos objetos como si fueran tensores y calcular sus derivadas covariantes, realizar este paso es conveniente ya que podemos reemplazar las derivadas parciales que aparecen en (1.30) por derivadas covariantes más algunos términos que contienen símbolos de Christoffel, siendo así

$$\partial_\alpha\delta\Gamma^\alpha_{\nu\mu} = \nabla_\alpha\delta\Gamma^\alpha_{\nu\mu} - \Gamma^\alpha_{\alpha\sigma}\delta\Gamma^\sigma_{\nu\mu} + \Gamma^\sigma_{\nu\alpha}\delta\Gamma^\alpha_{\sigma\mu} + \Gamma^\sigma_{\mu\alpha}\delta\Gamma^\alpha_{\nu\sigma},$$

y de manera similar para $\partial_\nu\delta\Gamma^\alpha_{\alpha\mu}$. Sustituyendo estas últimas relaciones en (1.30) y cancelando términos similares obtenemos

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\alpha\delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \nabla_\mu\delta\Gamma^\sigma_{\sigma\nu}.$$

De este modo

$$\begin{aligned}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} &= \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\left[\nabla_\alpha\delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \nabla_\mu\delta\Gamma^\sigma_{\sigma\nu}\right] = \sqrt{-g}\left[\nabla_\alpha\left(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu}\right) - \delta^\alpha_\mu\nabla_\alpha\left(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\sigma_{\sigma\nu}\right)\right] \\ &= \sqrt{-g}\nabla_\alpha\left(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \delta^\alpha_\mu g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\sigma_{\sigma\nu}\right) = \sqrt{-g}\nabla_\alpha\omega^\alpha,\end{aligned}$$

donde $\omega^\alpha = g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \delta^\alpha_\mu g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\sigma_{\sigma\nu}$. Dado que $\nabla_\alpha\sqrt{-g} = 0$, podemos introducir el factor $\sqrt{-g}$ en la derivada covariante, para obtener así la densidad tensorial $\sqrt{-g}\omega^\alpha$ de peso -1 cuya derivada covariante corresponde con

$$\nabla_\alpha\left(\sqrt{-g}\omega^\alpha\right) = \partial_\alpha\left(\sqrt{-g}\omega^\alpha\right) - \Gamma^\alpha_{\alpha\beta}\sqrt{-g}\omega^\beta + \Gamma^\alpha_{\alpha\beta}\sqrt{-g}\omega^\beta = \partial_\alpha\left(\sqrt{-g}\omega^\alpha\right).$$

Por lo tanto

$$\delta\left(\sqrt{-g}R\right) = \sqrt{-g}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right)\delta g^{\mu\nu} + \partial_\alpha\left(\sqrt{-g}\omega^\alpha\right).$$

Ahora tratemos con el término de materia

$$\delta\left(\sqrt{-g}\mathcal{L}_{\mathrm{M}}\right) = \delta(\sqrt{-g})\mathcal{L}_{\mathrm{M}} + \sqrt{-g}\,(\delta\mathcal{L}_{\mathrm{M}}) = -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\mathcal{L}_{\mathrm{M}} + \sqrt{-g}\frac{\delta\mathcal{L}_{\mathrm{M}}}{\delta g^{\mu\nu}}\delta g^{\mu\nu}$$
$$= \sqrt{-g}\left(-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{L}_{\mathrm{M}} + \frac{\delta\mathcal{L}_{\mathrm{M}}}{\delta g^{\mu\nu}}\right)\delta g^{\mu\nu}.$$

Definimos el *Tensor de energía-momento* como

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{L}_{\mathrm{M}} - \frac{\delta\mathcal{L}_{\mathrm{M}}}{\delta g^{\mu\nu}}. \tag{1.31}$$

Finalmente

$$\delta S_{EH+M} = -\frac{1}{16\pi G}\int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}^D x \left[\sqrt{-g}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - T_{\mu\nu}\right)\delta g^{\mu\nu} + \partial_\alpha\left(\sqrt{-g}\omega^\alpha\right)\right]. \tag{1.32}$$

Notemos que el último sumando de la expresión (1.32) es un término de frontera pues haciendo uso del Teorema de Stokes podemos llevar su integración en $\mathcal{M}$ a una integral sobre la frontera $\partial\mathcal{M}$. En este punto asumiremos que la integración se realiza sobre todo el espacio[13] [18], por lo tanto se cumple que

$$\int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}^D x\ \partial_\alpha\left(\sqrt{-g}\omega^\alpha\right) = 0. \tag{1.33}$$

En conclusión, dado que las funciones $\delta g^{\mu\nu}$ son arbitrarias, la única forma en que $\delta S_{EH+M} = 0$ es que ocurra

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - T_{\mu\nu} = 0$$

que son precisamente las ecuaciones de Einstein.

1.4. Solución tipo agujero negro de Schwarszchild

La primera solución a las ecuaciones de Einstein al vacío fue hallada por el físico alemán Karl Schwarzschild en el año de 1916 y está representada por

$$\mathrm{d}s^2 = -c^2\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)\mathrm{d}t^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 + r^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2\right). \tag{1.34}$$

Esta solución se interpreta como un campo gravitacional generado por un objeto estático esféricamente simétrico y el parámetro M es interpretado como su masa. Es de suma importancia notar que al menos una de las componentes del tensor métrico se indetermina en los puntos con coordenada radial $r = 0$ o $r = 2GM/c^2$. Con el paso de los años se fue dando una intepretación física más profunda a la solución de Schwarzschild, particularmente se prestaba atención a estas indeterminaciones en la métrica, de allí el advenimiento de los *agujeros negros*.

La cantidad $r_h := 2GM/c^2$ está asociada con el llamado *horizonte de eventos*, este concepto fue introducido por D. Finkelstein en el año de 1958 y hace referencia a una superficie de *no retorno*. Esta aparente "singularidad" puede evitarse haciendo un cambio de coordenadas adecuado[14], a este tipo de singularidades se les suele llamar *singularidades coordenadas*. Sin embargo es imposible remover la singularidad que existe en el punto $r = 0$, un buen argumento que justifica este hecho consiste en fijarse en los invariantes de curvatura del espacio-tiempo. En primera instancia el escalar

[13] Cuando tratamos una teoría sobre una variedad $\mathcal{M}$ con frontera podemos añadir el término de Gibbons-Hawking para tener una acción bien definida (Veáse Apéndice A).

[14] Véase por ejemplo las coordenadas de Eddington–Finkelstein o la Extensión de Kruskal [1].

de curvatura $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ es nulo a expensas de las ecuaciones de Einstein al vacío, sin embargo podemos calcular el invariante de curvatura llamado *escalar de Kretschmann* definido por

$$\mathcal{K} := R^{\mu\nu\alpha\beta} R_{\mu\nu\alpha\beta}$$

y concluir que para la solución de Schwarzschild,

$$\mathcal{K} = \frac{48G^2M^2}{c^4 r^6}$$

es un invariante de curvatura indeterminado en $r = 0$. Este punto recibe el nombre de *singularidad física*, y en conjunto con el horizonte de eventos, hacen dos de las propiedades que permiten definir a un agujero negro. En caso de que obtengamos una métrica cuyos invariantes de curvatura colapsen en el radio del horizonte de eventos, decimos que estamos tratando con una *singularidad desnuda*.

Notemos que los coeficientes g_{tt} y g_{rr} de la solución de Schwarrzchild son funciones que dependen únicamente de la coordenada radial y cumplen con ser inversamente proporcionales, i.e. $g_{tt} = c^2/g_{rr}$, además de presentar el comportamiento asintótico $g_{tt} \to 1$ y $g_{rr} \to c^2$ cuando $r \to \infty$. En la búsqueda de soluciones tipo agujero negro no requerimos, en general, que las funciones g_{tt} y g_{rr} preserven el comportamiento anterior, ya sea en $r \to \infty$ o en $r \to 0$, ni tampoco que sean inversamente proporcionales una de la otra, sin embargo suele ser muy conveniente expresar los coeficientes g_{tt} y g_{rr} como producto de funciones, por decir $g_{tt} = f(t, r, \theta, \varphi)h(r)$ y $g_{rr} = k(t, r, \theta, \varphi)/h(r)$, donde la función $h(r)$ presente un comportamiento asintótico de tal suerte que el tensor métrico tienda a una geometría muy específica, decimos entonces que la función $h(r)$ es un *factor de ennegrecimiento* si $h(r) \to 1$ en el límite $r \to \infty$ (o bien cuando $r \to 0$) y $h(r_h) = 0$ para algún $r_h > 0$, este valor define el horizonte de eventos. La presencia de un factor de ennegrecimiento en la métrica es buen indicio de que estamos tratando con una solución tipo agujero negro.

1.5. Espacios de Lifshitz y geometrías con violación de hiperescala

Para finalizar este capítulo introduciremos muy brevemente un par de geometrías que serán esenciales en el siguiente capítulo.

Los espacios de Lifshitz son una familia de geometrías representadas por la siguiente métrica

$$\mathrm{d}s^2 = -\frac{\mathrm{d}t^2}{r^{2z}} + \frac{\mathrm{d}r^2}{r^2} + \frac{\mathrm{d}\vec{x}_D^2}{r^2}, \tag{1.35}$$

donde $\mathrm{d}\vec{x}_D^2 := \delta_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j$ y la coordenada r está restringida a tomar únicamente valores reales positivos. El parámetro z es el llamado *exponente dinámico crítico*[15]. El motivo de referirnos a estos espacios por "Lifshitz" yace en que el caso $z = 2$ es dual a una teoría crítica cuántica con las misma simetrías que la teoría multi-crítica de Lifshitz [9, 10]. En un espacio-tiempo $(1 + 2)$-dimensional, la teoría de campo de Lifshitz a nivel clásico se puede describir por la siguiente acción

$$S[\phi] = \int \mathrm{d}^2x \; \mathrm{d}t \left[(\partial_t\phi)^2 - \kappa \left(\nabla^2\phi\right)^2 \right],$$

esta teoría de campo clásica presenta un comportamiento de escalamiento no convencional que se manifiesta en fenómenos críticos de algunos SMC dados por

$$(t, \vec{x}) \to (\lambda^z t, \lambda x), \quad \text{siempre que } z = 2. \tag{1.36}$$

A nivel de gravedad las geometrías de Lifshitz tienen una simetría de escalamiento muy similar dada por

[15]El caso $z = 1$ representa al espacio-tiempo AdS con dimension $D + 2$.

$$(t, r, \vec{x}_D) \rightarrow (\lambda^z t, \lambda r, \lambda \vec{x}_D)\,, \tag{1.37}$$

es por ello que los espacios de Lifshitz son fuertes candidatos a describir holográficamente a los SMC que exhiben comportamientos de escala similares a (1.36). Adicionalmente, los espacios de Lifshitz poseen las simetrías de traslación espacio-temporal

$$(t, \vec{x}_D) \rightarrow (t + t_0, \vec{x}_D + \vec{x}_{0D}),$$

rotaciones espaciales

$$x^i \rightarrow M^i{}_j x^j$$

e inversión temporal

$$t \rightarrow -t.$$

Una clase más general de métricas toman la forma

$$\mathrm{d}s^2 = r^{2\theta/D}\left(-\frac{\mathrm{d}t^2}{r^{2z}} + \frac{\mathrm{d}r^2 + \mathrm{d}\vec{x}_D^2}{r^2}\right), \tag{1.38}$$

y son las llamadas *geometrías con violación de hiperescala*, esta familia de entornos viola la simetría de escalamiento (1.37) ya que bajo esta transformación la métrica toma la forma $\mathrm{d}s^2 \rightarrow \lambda^{2\theta/D}\mathrm{d}s^2$. El nuevo parámetro θ es nombrado como *exponente de violación de hiperescala*.

Tanto las geometrías de Lifshitz como las GVHE incluyen a la coordenada r como una *coordenada auxiliar*, su utilidad en el proceso de dualización es imprescindible ya que otorga información sobre la escala de energía de la teoría de campo dual.

Capítulo 2

Una familia de soluciones a las ecuaciones de una teoría tenso-escalar

En este capítulo haremos una introducción a las teorías tenso-escalares y presentaremos las ecuaciones de campo para una teoría particular; comentaremos sobre las motivaciones y el desarrollo que nos guiaron a encontrar una familia de soluciones exactas a las ecuaciones de campo para una de teoría que acopla el campo gravitacional con un campo escalar. En la última sección reportaremos la familia de soluciones exactas encontrada.

2.1. Teorías tenso-escalares

Las teorías tenso-escalares son teorías que describen el acoplamiento entre el campo gravitacional y un campo escalar, podemos pensarlas como las teorías de gravedad más simples después de gravedad pura. Son teorías de gran interés debido a la estructura relativamente simple de sus ecuaciones de campo, lo que permite encontrar soluciones exactas que se encuentran en situaciones físicamente relevantes. Un estudio exhaustivo de estas teorías puede encontrarse en [19, 20]. Por mencionar algunas, podemos encontrar a la teoría de Brans-Dicke, descrita a través de la acción

$$S = -\frac{1}{16\pi G}\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\left(\phi R - \frac{\omega_0}{\phi}\left(\nabla\phi\right)^2 - V(\phi) + \mathcal{L}_{\mathrm{M}}\right),$$

donde ϕ es un campo escalar sujeto al potencial $V(\phi)$, el término $\left(\nabla\phi\right)^2 := \nabla^\mu\phi\nabla_\mu\phi$ se conoce como término cinemático del campo escalar, ω_0 es conocido como el parámetro de Brans-Dicke y $\mathcal{L}_{\mathrm{M}}$ es un lagrangiano de materia que contiene información sobre algunos otros campos acoplados. En esta teoría existe un acoplamiento no mínimo entre la gravedad y el campo escalar que trata de forma *efectiva* a la constante de acoplamiento de Newton como si fuese un campo. También tenemos la teoría nombrada Gravedad Einstein-Escalar-Gauss Bonnet dada por

$$S = -\frac{1}{16\pi G}\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\left(R - \frac{1}{2}\left(\nabla\phi\right)^2 - f(\phi)R^2_{\mathrm{GB}}\right)$$

donde R_{GB} es el invariante de Gauss-Bonnet que en un espacio-tiempo de cuatro dimensiones toma la forma $R^2_{\mathrm{GB}} = R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R^2$, el cual constituye un término de frontera [21] y por ello es necesario multiplicarlo por la función $f(\phi)$ para que genere una contribución a las ecuaciones de campo.

Una familia de teorías tenso-escalares sumamente importante corresponde con gravedad Einsteniana acoplada mínimamente a un campo escalar dinámico sujeto a un potencial

$$S = -\frac{1}{16\pi G}\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\left(R - \frac{1}{2}\left(\nabla\phi\right)^2 - V(\phi)\right).$$

En dicha familia está contenida gravedad acoplada a un campo tipo Klein-Gordon haciendo $V(\phi) = k^2\phi^2/2$. A pesar de ser una familia de teorías de gravedad relativamente simples, la presencia de un campo escalar sujeto a un potencial $V(\phi)$ incrementa la posibilidad de obtener soluciones exactas a las ecuaciones de campo que contengan exponentes críticos tales como z y θ.

Nuestra atención estará enfocada en el estudio de una teoría de gravedad descrita a través de la siguiente acción

$$S[g_{\mu\nu},\phi] = -\frac{1}{16\pi G}\int \mathrm{d}^{D+2}x\sqrt{-g}\left(R - \frac{1}{2}\left(\nabla\phi\right)^2 - V(\phi)\right). \tag{2.1}$$

De entrada estamos tratando con un espacio de fondo $(D+2)$-dimensional para ofrecer una descripción lo más general posible de esta clase de teorías. Las D-dimensiones hacen referencia a las coordenadas espaciales, mientras que el par de dimensiones restantes están ligadas con la coordenada temporal y la coordenada auxiliar justo como en las definiciones de los espacios de Lifshitz y las GVHE dadas en las última sección del capítulo anterior.

La motivación por estudiar esta clase teorías yace en la búsqueda de soluciones exactas a las ecuaciones de Einstein tipo agujero negro. Tanto las geometrías de Lifshitz como las GVHE son entornos que no pueden ser soportados en un espacio-tiempo tipo *Ricci flat*[1]; sin embargo la presencia del término cinemático y un potencial asociados con el campo escalar facilitan la obtención de soluciones analíticas a las ecuaciones de campo que incluyan a los exponentes críticos z y θ, por tanto son buenas teorías candidatas a soportar soluciones tipo agujero negro asintóticamente GVHE.

A continuación nos centraremos en la obtención de las ecuaciones de campo propias de la acción (2.1). Primeramente, de la variación de la funcional de acción con respecto a las componentes del tensor métrico obtenemos las ecuaciones de Einstein

$$G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}, \tag{2.2}$$

las componentes del tensor de energía-momento contenido en las ecuaciones anteriores viene dado por la siguiente expresión

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\left(-\frac{1}{2}\left(\nabla\phi\right)^2 - V(\phi)\right) - \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}}\left(-\frac{1}{2}\left(\nabla\phi\right)^2 - V(\phi)\right) \\ &= -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\left(\frac{1}{2}\left(\nabla\phi\right)^2 + V(\phi)\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial g^{\mu\nu}}\left(g^{\alpha\beta}\left(\nabla_\alpha\phi\right)\left(\nabla_\beta\phi\right)\right) \\ &= -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\left(\frac{1}{2}\left(\nabla\phi\right)^2 + V(\phi)\right) + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi\right)\left(\partial_\nu\phi\right). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Así pues, las ecuaciones de Einstein (2.2) para la acción (2.1) están dadas a través de las siguientes relaciones

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi\right)\left(\partial_\nu\phi\right) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\left(\frac{1}{2}\left(\nabla\phi\right)^2 + V(\phi)\right). \tag{2.4}$$

[1] Se dice que una variedad es Ricci flat si todas las componentes del tensor de Ricci son idénticamente cero, por ejemplo, el espacio-tiempo de Schwarzschild.

Para obtener la ecuación de campo asociada al campo escalar habremos de efectuar la variación de la acción respecto a ϕ e igualarla a cero, sin embargo haremos uso de las ecuaciones de E-L para obtenerla de manera más directa. Por un lado

$$\frac{\partial}{\partial\phi}\left[\sqrt{-g}\left(R-\frac{1}{2}\left(\nabla\phi\right)^2-V(\phi)\right)\right]=-\sqrt{-g}\frac{\partial V}{\partial\phi},$$

mientras que

$$\begin{aligned}\partial_\mu\left\{\frac{\partial}{\partial\left(\partial_\mu\phi\right)}\left[\sqrt{-g}\left(R-\frac{1}{2}\left(\nabla\phi\right)^2-V(\phi)\right)\right]\right\}&=-\frac{1}{2}\partial_\mu\left\{\sqrt{-g}g^{\alpha\nu}\frac{\partial}{\partial\left(\partial_\mu\phi\right)}\left[\left(\partial_\alpha\phi\right)\left(\partial_\nu\phi\right)\right]\right\}\\&=-\partial_\mu\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi\right)=-\partial_\mu\left(\sqrt{-g}\partial^\mu\phi\right).\end{aligned}$$

Recordando que $\sqrt{-g}\partial^\mu\phi$ es una densidad tensorial de peso -1 podemos usar la definición de derivada covariante para densidades tensoriales y obtener que

$$\nabla_\mu\left(\sqrt{-g}\partial^\mu\phi\right)=\partial_\mu\left(\sqrt{-g}\partial^\mu\phi\right)-\Gamma^\sigma_{\sigma\mu}\sqrt{-g}\partial^\mu\phi+\Gamma^\mu_{\mu\alpha}\sqrt{-g}\partial^\alpha\phi=\partial_\mu\left(\sqrt{-g}\partial^\mu\phi\right),$$

Por las ecuaciones de E-L (1.6), la ecuación de campo para ϕ toma la forma

$$-\sqrt{-g}\frac{\partial V}{\partial\phi}+\nabla_\mu\left(\sqrt{-g}\partial^\mu\phi\right)=0,$$

en el capítulo 1 mostramos que $\nabla_\mu\sqrt{-g}=0$, entonces podemos extraer el factor $\sqrt{-g}$ de la derivada covariante involucrada en la ecuación anterior, factorizarlo de forma global y cancelarlo. Definimos el operador D'Alembertiano como $\Box:=\nabla_\mu\nabla^\mu\equiv\nabla^\mu\nabla_\mu$, que aplicado a un campo escalar toma la forma $\Box\phi=\nabla_\mu\left(\partial^\mu\phi\right)$, por lo tanto la ecuación de campo asociada con ϕ es

$$\Box\phi=\frac{\partial V}{\partial\phi}. \tag{2.5}$$

2.2. Desarrollo de las ecuaciones de campo

En esta sección presentaremos el desarrollo que nos permitió a encontrar una familia de soluciones exactas a las ecuaciones (2.4) y (2.5). Nuestra principal motivación es encontrar soluciones tipo agujero negro que asintóticamente correspondan con GVHE, siendo así, comenzamos proponiendo el siguiente ansatz para la métrica

$$\mathrm{d}s^2=r^{2\theta/D}\left(-\frac{f(r)}{r^{2z}}\mathrm{d}t^2+\frac{\mathrm{d}r^2}{r^2f(r)}+\frac{\mathrm{d}\vec{x}_D^2}{r^2}\right), \tag{2.6}$$

donde $\mathrm{d}\vec{x}_D^2:=\delta_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j$, los índices latinos $(i,j,k,l=1,2,\cdots,D)$ harán referencia a las coordenadas espaciales, emplearemos índices griegos para referirnos a todas las coordenadas espacio-temporales $(x^\mu)=(t,r,x^1,\ldots,x^D)$.

Un requerimiento fundamental en la construcción de soluciones tipo agujero negro es pedir que para algún punto $r=r_h$, la función $f(r)$ se anule, esta región determinará el horizonte de eventos. Como es usual, podríamos esperar que $f(r)\to1$ en la frontera asintótica, es decir, cuando $r\to0$ o bien cuando $r\to\infty$, dependiendo de cómo se elija el ansatz para la métrica, pues ambas fronteras están relacionadas por la transformación de la coordenada $r\to1/r$, como detallaremos en seguida.

Indagar sobre el comportamiento asintótico de las geometrías enfocándonos únicamente en la forma funcional de las componentes de su tensor métrico es una manera muy práctica para estudiar soluciones a las ecuaciones de Einstein, pero puede resultar muy limitada si la comparamos con el alcance que nos ofrece el estudio de los invariantes de curvatura como mostraremos en el capítulo posterior.

Es muy importante enfatizar que para seleccionar entre alguno de los límites $r \to 0$ o $r \to \infty$ como frontera asintótica uno debe estudiar el comportamiento asintótico de los invariantes de curvatura y no solo enfocarse en el comportamiento del factor de ennegrecimiento $f(r)$.

Aunque es más común encontrar soluciones con frontera asintótica en $r \to \infty$ que en $r \to 0$, estos límites se relacionan con la transformación de coordenadas $r \to 1/r$, para puntualizarlo de una mejor manera notemos que bajo esta última transformación una GVHE toma la forma

$$\mathrm{d}s^2 = r^{-2\theta/D}\left(-r^{2z}\mathrm{d}t^2 + \frac{\mathrm{d}r^2}{r^2} + r^2\mathrm{d}\vec{x}_D^2\right),$$

mientras que el ansatz (2.6) se escribe como

$$\mathrm{d}s^2 = r^{-2\theta/D}\left(-r^{2z}h(r)\mathrm{d}t^2 + \frac{\mathrm{d}r^2}{r^2h(r)} + r^2\mathrm{d}\vec{x}_D^2\right), \quad \text{donde } h(r) := f(1/r). \tag{2.7}$$

Si por ejemplo suponemos que la frontera asintótica está ubicada en el infinito y además $f(r) \to 1$ cuando $r \to \infty$, entonces $h(r) \to 1$ cuando $r \to 0$, luego la métrica (2.7) toma la forma de una GVHE en el límite $r \to 0$. Análogamente si la frontera asintótica está ubicada en $r = 0$ y $f(r) \to 1$ cuando $r \to 0$, entonces $h(r) \to 1$ cuando $r \to \infty$, de manera que (2.7) corresponde asintóticamente con una GVHE en el límite $r \to \infty$. Esta pequeña discusión se resumen en que podemos *invertir* la ubicación de la frontera realizando el cambio de coordenadas $r \to 1/r$, cabe mencionar que las soluciones seguirán siendo físicamente equivalentes como consecuencia de la covariancia de las ecuaciones de Einstein.

Como es usual en los modelos holográficos, la coordenada auxiliar r, también conocida como *coordenada holográfica*, es mapeada en una escala de energía de la teoría de campo dual. En particular para $\theta < D$, el sistema de coordenadas adaptado por el ansatz (2.7) nos permite describir la región infrarroja (IR) en el límite $r \to 0$, mientras que la región ultravioleta (UV) es descrita en el límite $r \to \infty$ [5]. Si realizamos el cambio de coordenadas $r \to 1/r$, nos remitiríamos al sistema de coordenadas dado por (2.6), en este caso la región IR de la teoría de campo dual se describe en el límite $r \to \infty$, mientras que podemos describir la región UV con el límite $r \to 0$ como se menciona en [9]. Esta información es imprescindible en el proceso de dualización, sin embargo esta tarea queda lejos de los alcances de esta tesis. En lo que sigue solamente nos enfocaremos en la búsqueda y el estudio de soluciones a las ecuaciones de campo (2.4) y (2.5) basándonos únicamente en el ansatz (2.6)

Con respecto al campo escalar, consideraremos la dependencia $\phi = \phi(r)$, además no impondremos una forma específica para el potencial $V(\phi)$. Más adelante mostraremos cómo podemos obtener su forma funcional a partir del sistema de ecuaciones diferenciales ligado a las ecuaciones de campo para nuestro ansatz.

En la literatura podemos encontrar soluciones más elaboradas donde la topología del horizonte de eventos del agujero negro sea hiperbólica o esférica, para ello basta con reemplazar el término $\mathrm{d}\vec{x}_D^2 =: \mathrm{d}\Omega^2_{k=0,D}$ que corresponde con un horizonte de eventos con topología plana, por

$$\mathrm{d}\Omega^2_{k=1,D} := \mathrm{d}\xi_0^2 + \sin^2(\xi_0)\mathrm{d}\xi_1^2 + \ldots + \sin^2(\xi_0)\cdots\sin^2(\xi_{D-2})\mathrm{d}\xi_{D-1}^2$$

para el caso esférico, mientras que para el caso hiperbólico debemos usar

$$\mathrm{d}\Omega^2_{k=-1,D} := \mathrm{d}\xi_0^2 + \sinh^2(\xi_0)\mathrm{d}\Omega^2_{k=1,D-1},$$

donde ξ_i representan los ángulos estándar. Sin embargo el tratamiento de las ecuaciones de campo con los ansatz anteriores permanece fuera del propósito de esta tesis.

Para proceder con la resolución a las ecuaciones de campo debemos tener a la mano todos los ingredientes involucrados.

Los símbolos de Christoffel de segunda clase no nulos asociados al tensor métrico (2.6) son

$$\Gamma^t_{tr} = \frac{\theta - zD}{Dr} + \frac{f'}{2f}, \qquad \Gamma^r_{tt} = \frac{r^{1-2z} f}{2D}\left(2(\theta - zD)f + Drf'\right),$$

$$\Gamma^r_{rr} = \frac{\theta - D}{Dr} - \frac{f'}{2f}, \qquad \Gamma^r_{ij} = \frac{D-\theta}{Dr} f\delta_{ij}, \qquad \Gamma^i_{rj} = \frac{\theta - D}{Dr}\delta^i_j.$$

Usando las definiciones (1.17), (1.18) y (1.19) procedemos a construir el tensor de Einstein. Las componentes del tensor de Riemann no nulas están dadas por

$$R_{trtr} = \frac{r^{2\theta/D-2z-2}}{2D}\left[2z(zD-\theta)f + (D - 3zD + 2\theta)rf' + Dr^2 f''\right], \tag{2.8}$$

$$R_{titj} = (\theta - D) r^{2\theta/D-2z-2}\left(\frac{\theta - zD}{D^2} f + \frac{rf'}{2D}\right) f\delta_{ij}, \tag{2.9}$$

$$R_{rirj} = \frac{\theta - D}{2D} r^{2\theta/D-4}\left(2f - rf'\right)\frac{\delta_{ij}}{f}, \tag{2.10}$$

$$R_{ijkl} = \left(\frac{\theta - D}{D}\right)^2 r^{2\theta/D-4} f\left(\delta_{il}\delta_{kj} - \delta_{ik}\delta_{lj}\right). \tag{2.11}$$

Resulta más económico tratar con las componentes del tensor de Riemann cuyos índices son únicamente covariantes al momento de realizar el cálculo del escalar de Kretschmann. Las componentes del tensor de Ricci toman la siguiente forma

$$R_{tt} = \frac{r^{-2z} f}{2D}\left\{Dr^2 f'' + \left[D(1 - D - 3z) + \theta(D+2)\right] rf' + 2(\theta - zD)(\theta - z - D)f\right\},$$

$$R_{rr} = -\frac{f''}{2f} + \frac{D(3z + D - 1) - \theta(D+2)}{2D}\frac{f'}{rf} + \frac{D(\theta - D) + z(\theta - zD)}{Dr^2},$$

$$R_{ij} = \frac{D-\theta}{Dr^2}\left[rf' + (\theta - z - D)f\right]\delta_{ij}.$$

Para encontrar el escalar de Ricci basta calcular la traza del tensor de Ricci, afortunadamente el tensor métrico sobre el cual estamos trabajando tiene representación matricial diagonal que permite realizar los cálculos de una manera relativamente sencilla.

Siendo así, obtenemos

$$R = r^{-2\theta/D}\left\{-r^2 f'' + \left[D(3z + 2D - \theta - 1) - \theta(D+2)\right]\frac{rf'}{D} + \left[D(D-\theta)(\theta - D - z - 1) + (\theta - zD)(2z - \theta + D)\right]\frac{f}{D}\right\}.$$

Tras una serie de cálculos (mucho cuidado y paciencia) obtenemos las componentes no nulas del tensor de Einstein

$$G_{tt} = \frac{(D-\theta)r^{-2z} f}{2D}\left[Drf' + (D(\theta - D - 1) - \theta)f\right], \tag{2.12}$$

$$G_{rr} = \frac{\theta - D}{2}\left\{\frac{f'}{2f} + \frac{1}{Dr^2}\left[D(\theta - D - 2z + 1) + \theta\right]\right\}, \tag{2.13}$$

$$\begin{aligned} G_{ij} = \Big\{ \frac{1}{2}f'' + [3(1-z) + 2(\theta - D)]\frac{f'}{2r} + \big[D(D^2 + 2z(z-1) + D(2z-1)) \\ -2D\theta(D + z - 1) + \theta^2(D-1)\big]\frac{f}{2Dr^2}\Big\}\delta_{ij}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Por otra parte, a expensas del ansatz métrico y del campo escalar podemos simplificar los cálculos para el tensor de energía-momento, resultando así

$$T_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\left[\frac{1}{2}g^{rr}\left(\phi'\right)^2 + V(\phi)\right] + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial_\nu\phi).$$

Por tanto las componentes no nulas del tensor de energía-momento están dadas a través de las siguientes expresiones

$$T_{tt} = \frac{1}{2}r^{-2z}f\left[\frac{1}{2}r^2\left(\phi'\right)^2 f + r^{2\theta/D}V(\phi)\right], \tag{2.15}$$

$$T_{rr} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\phi'\right)^2 - \frac{r^{2(\theta/D-1)}}{f}V(\phi)\right], \tag{2.16}$$

$$T_{ij} = -\frac{r^{-2}}{2}\left[\frac{1}{2}r^2\left(\phi'\right)^2 f + r^{2\theta/D}V(\phi)\right]\delta_{ij}. \tag{2.17}$$

Es importante notar que las ecuaciones $G_{ii} = T_{ii}$ (sin suma en el índice i) son idénticas para todo valor $i = 1, \ldots, D$, es entonces suficiente considerar $G_{11} = T_{11}$.

Ahora desarrollemos el D'Alembertiano involucrado en la ecuación (2.5)

$$\Box\phi = \nabla_\mu(\partial^\mu\phi) = g^{\mu\nu}\nabla_\mu\partial_\nu\phi = g^{\mu\nu}\left(\partial_{\mu\nu}\phi - \Gamma^\sigma_{\mu\nu}\partial_\sigma\phi\right) = g^{rr}\phi'' - g^{\mu\nu}\Gamma^r_{\mu\nu}\phi',$$

mediante un cálculo sencillo podemos encontrar que

$$g^{\mu\nu}\Gamma^r_{\mu\nu} = -\frac{1}{r^{2\theta/D}}\left[r^2f' + (\theta + 1 - z - D)rf\right],$$

así pues

$$\Box\phi = \frac{1}{r^{2\theta/D}}\left\{r^2f\phi'' + \left[r^2f' + (\theta + 1 - z - D)rf\right]\phi'\right\}. \tag{2.18}$$

Finalmente, haciendo uso de las expresiones (2.12)-(2.18) podemos escribir las ecuaciones de campo de la siguiente forma

$$D(D-\theta)rf' + (D-\theta)[D(\theta - D - 1) - \theta]f = \frac{D}{2}r^2\left(\phi'\right)^2 f + Dr^{2\theta/D}V(\phi), \tag{2.19}$$

$$D(\theta - D)rf' + (\theta - D)\left[D(\theta - D - 2z + 1) + \theta\right]f = \frac{D}{2}r^2\left(\phi'\right)^2 f - Dr^{2\theta/D}V(\phi), \tag{2.20}$$

$$\begin{aligned} Dr^2f'' + D\left[3(1-z) + 2(\theta - D)\right]rf' + \big[D(D^2 + 2z(z-1) + D(2z-1)) \\ -2D\theta(D + z - 1) + \theta^2(D-1)\big]f = -\frac{D}{2}r^2\left(\phi'\right)^2 f - Dr^{2\theta/D}V(\phi), \end{aligned} \tag{2.21}$$

$$r^2f\phi'' + \left[r^2f' + (\theta + 1 - z - D)rf\right]\phi' - r^{2\theta/D}\frac{\partial V}{\partial\phi} = 0. \tag{2.22}$$

2.3. Solución exacta a las ecuaciones de campo

En esta sección mostraremos el procedimiento para encontrar la solución al sistema de ecuaciones diferenciales comprendido por las relaciones (2.19)-(2.22).

Para encontrar la forma funcional de $\phi = \phi(r)$ habremos de sumar las ecuaciones (2.19) y (2.20), de manera que el campo escalar debe cumplir con la ecuación diferencial

$$r^2 (\phi')^2 = \frac{2(D-\theta)(D(z-1)-\theta)}{D}, \tag{2.23}$$

esta ecuación se puede integrar directamente. Sumando las ecuaciones (2.19) y (2.21) obtendremos una ecuación diferencial lineal de segundo orden que únicamente involucra a la función f, a saber

$$r^2 f'' + (3(1-z)+\theta-D) r f' + 2(z-1)(z+D-\theta) f = 0, \tag{2.24}$$

de igual manera esta ecuación diferencial puede solucionarse con los métodos convencionales. Luego de proponer una solución de la forma $f(r) = r^{\alpha}$ y sustituir en la ecuación diferencial uno mismo puede convencerse de que $\alpha = z + D - \theta$ o bien $\alpha = 2(z-1)$, por tanto la solución general a (2.24) está dada por

$$f(r) = c_1 r^{z+D-\theta} + c_2 r^{2(z-1)}. \tag{2.25}$$

Ahora nos ocuparemos en hallar el potencial $V(\phi)$. Si sustituimos el resultado (2.23) ya sea en la ecuación (2.19) o en (2.20) y realizamos las respectivas simplificaciones algebraicas, podemos percatarnos de que ambas ecuaciones se reducen a la misma relación. Por tanto suena sensato que el potencial se pueda obtener a través de un despeje directo de alguna de las ecuaciones anteriormente mencionadas. Partiendo de (2.20), tomando en cuenta (2.23) y empleando la solución de f obtenemos

$$\begin{aligned} V(\phi) &= -\frac{1}{r^{2\theta/D}} \left((\theta - D) r f' + \frac{(\theta-D)\left(D(\theta-D-2z+1)+\theta\right)}{D} f - \frac{1}{2} r^2 (\phi')^2 f \right) \\ &= \frac{D-\theta}{r^{2\theta/D}} \left(r f' + (\theta - D - z) f \right) = (D-\theta)(\theta-D+z-2) c_2 r^{2(z-1-\theta/D)}. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Dado que la solución $\phi = \phi(r)$ para la ecuación (2.23) es logarítmica, podemos invertir tal relación para escribir $r = r(\phi)$ y en seguida expresar el potencial en función del campo escalar. En efecto, la solución general a la ecuación (2.23) es

$$\phi_{\pm}(r) = \pm\sqrt{\frac{2(D-\theta)(D(z-1)-\theta)}{D}} \log(r) + \phi_0,$$

de manera que

$$r = \exp\left[\pm\sqrt{\frac{D}{2(D-\theta)(D(z-1)-\theta)}} (\phi_{\pm} - \phi_0) \right]. \tag{2.27}$$

Usando el resultado anterior obtenemos

$$\begin{aligned} V(\phi) &= (D-\theta)(\theta-D+z-2) c_2 r^{2(z-1-\theta/D)} \\ &= (D-\theta)(\theta-D+z-2) c_2 \left\{ \exp\left[\pm\sqrt{\frac{D}{2(D-\theta)(D(z-1)-\theta)}} (\phi_{\pm} - \phi_0) \right] \right\}^{2(D(z-1)-\theta)/D} \\ &= (D-\theta)(\theta-D+z-2) c_2 \exp\left[\pm \frac{2(D(z-1)-\theta)}{\sqrt{2D(D-\theta)(D(z-1)-\theta)}} (\phi_{\pm} - \phi_0) \right]. \end{aligned}$$

Dado que no conocemos el signo de $D(z-1)-\theta$, usaremos que

$$D(z-1)-\theta=\sigma|D(z-1)-\theta|=\sigma\sqrt{(D(z-1)-\theta)^2}, \tag{2.28}$$

donde $\sigma=\mathrm{sign}[D(z-1)-\theta]$, por lo tanto

$$\exp\left[\pm\frac{2(D(z-1)-\theta)}{\sqrt{2D(D-\theta)(D(z-1)-\theta)}}\left(\phi_\pm-\phi_0\right)\right]=\exp\left[\pm\sigma\sqrt{\frac{2(D(z-1)-\theta)}{D(D-\theta)}}(\phi_\pm-\phi_0)\right]$$

y así podemos escribir al potencial V en función de $\phi_\pm$.

Tratar con sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales es un problema sumamente no trivial, no existe una manera sistemática de obtener sus soluciones generales en forma analítica, por tanto, una vez halladas las posibles soluciones para las funciones incógnitas es importante corroborar que cada una de las ecuaciones que componen al sistema de ecuaciones se cumpla. A lo largo de esta construcción empleamos primordialmente las ecuaciones (2.19) y (2.20), no es sorpresa que estas últimas relaciones se satisfagan al sustituir las expresiones halladas para f, ϕ y V. Por otro lado podríamos esperar que al realizar la sustitución de nuestra posible solución en las ecuaciones (2.21) y (2.22) tengamos que fijar al menos a alguno de los parámetros z o θ, o en su defecto imponer alguna condición que relacione funcionalmente a este conjunto de parámetros para que estas ecuaciones diferenciales restantes se cumplan. La genialidad de este sistema de ecuaciones yace en que no requerimos imponer condiciones sobre los exponentes críticos, salvo exigir que el campo escalar sea real todas las ecuaciones diferenciales se cumplen idénticamente (¡invitamos al lector a comprobarlo!).

En conclusión, una familia de soluciones exactas a las ecuaciones de campo (2.4)-(2.5) está dada por

$$\mathrm{d}s^2=r^{2\theta/D}\left(-\frac{\left(c_1r^{z+D-\theta}+c_2r^{2(z-1)}\right)}{r^{2z}}\mathrm{d}t^2+\frac{\mathrm{d}r^2}{r^2\left(c_1r^{z+D-\theta}+c_2r^{2(z-1)}\right)}+\frac{\mathrm{d}\vec{x}_D^2}{r^2}\right), \tag{2.29}$$

el campo escalar es

$$\phi_\pm(r)=\pm\sqrt{\frac{2(D-\theta)(D(z-1)-\theta)}{D}}\log(r)+\phi_0, \tag{2.30}$$

con la condición

$$(D-\theta)(D(z-1)-\theta)>0, \tag{2.31}$$

con ϕ sujeto al potencial

$$V(\phi_\pm)=(D-\theta)(\theta-D+z-2)c_2\exp\left[\pm\sigma\sqrt{\frac{2(D(z-1)-\theta)}{D(D-\theta)}}(\phi_\pm-\phi_0)\right], \tag{2.32}$$

siempre que

$$(D(z-1)-\theta)/(D-\theta)>0, \tag{2.33}$$

mientras que $\sigma=\mathrm{sign}[D(z-1)-\theta]$ y c_1, c_2, ϕ_0 son constantes de integración.

Notemos que las condiciones (2.31) y (2.33) son completamente equivalentes, en particular emplearemos (2.31) para realizar un análisis más detallado de esta familia de soluciones.

A pesar de que la desigualdad

$$(D-\theta)(D(z-1)-\theta) \geq 0 \tag{2.34}$$

nos garantiza obtener un campo escalar real, la relación de orden estricta (2.31) es impuesta para evitar indeterminaciones en la ecuación (2.27). Los casos en que el producto anterior se vuelve cero los comentamos a continuación.

Si hacemos $\theta = D(z-1)$, la ecuación (2.23) implica que el campo escalar ϕ se hace constante por tanto $(\nabla\phi)^2 = 0$, es decir, el campo escalar no se hace presente en la acción de la teoría, sin embargo el potencial toma el valor constante $V(\phi) = D(z-D-2)$, y la acción está dada por

$$S = -\frac{1}{16\pi G}\int \mathrm{d}^{D+2}x\sqrt{-g}(R - D(z-D-2)).$$

Este caso es particularmente interesante por contener una solución tipo agujero negro asintóticamente AdS, volveremos a esta observación en el siguiente capítulo.

El caso $\theta = D$ nos conduce a una teoría de gravedad pura pues el potencial $V(\phi)$ se anula por la presencia del factor $D-\theta$ en la expresión (2.26) y el término cinético también se hace cero pues la ecuación (2.23) implica que $\phi = cte$, por tanto la acción de la teoría es

$$S = -\frac{1}{16\pi G}\int \mathrm{d}^{D+2}x\sqrt{-g}R.$$

Aunque el tensor métrico (2.29) toma una forma muy inusual bajo la condición impuesta a θ, es interesante que al hacer $z = 1$ obtengamos

$$\mathrm{d}s^2 = -(c_2 + c_1 r)\mathrm{d}t^2 + \frac{\mathrm{d}r^2}{c_2 + c_1 r} + \mathrm{d}\vec{x}_D^2, \tag{2.35}$$

haciendo $c_2 = 1$ y $c_1 = -1/(2M)$ podríamos pensar en la métrica anterior como una hermana de la solución Schwarschild que toma la forma de un espacio de Minkowski $(D+2)$-dimensional en el límite $r \to 0$ y con un posible horizonte de eventos definido por $r = 2M$, sin embargo esta solución no es un agujero negro. Para convencernos efectuemos, primeramente, el siguiente cambio de coordenadas

$$\begin{cases} u = \dfrac{2}{c_1}\sqrt{c_2 + c_1 r} \\ v = \dfrac{c_1}{2}t, \end{cases}$$

siempre que c_1 sea distinta de cero[2], luego (2.35) toma la forma

$$\mathrm{d}s^2 = -u^2\mathrm{d}v^2 + \mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}\vec{x}_D^2,$$

los más experimentados en RG identificarán inmediatamente la anterior como la métrica de Minkowski $(D+2)$-dimensional. Para terminar de convencer al lector de que este último hecho es totalmente cierto podemos efectuar otro cambio de coordenadas dado por

$$\begin{cases} t = u\sinh v \\ r = u\cosh v \end{cases}$$

y obtener

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}r^2 + \mathrm{d}\vec{x}_D^2. \tag{2.36}$$

[2]Notemos que a partir $c_1 = 0$ y $c_2 = 1$ recuperamos inmediatamente el espacio de Minkowski.

Es decir, la métrica (2.35) no es más que el espacio de Minkowski descrito por un sistema de coordenadas distinto al que todos conocemos. Tomando en cuenta (2.36) podemos comprobar directamente que las cantidades R, $R^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ y $\mathcal{K}$ son idénticamente cero, es por esta razón que a menudo nos referimos al espacio de Minkowski como un espacio plano. La principal propiedad de estos invariantes de curvatura es que su valor no depende del sistema de coordenadas utilizado para la descripción del espacio-tiempo, por tanto una manera indirecta, pero muy poderosa, que nos permite comprobar que (2.35) representa al espacio de Minkowski consiste en calcular sus invariantes de curvatura y verificar que todos ellos se anulan. Otra manera más directa consiste calcular las componentes del tensor de Riemann y verificar que todas se anulan, en efecto, usando las expresiones (2.8)-(2.11) podemos comprobar fácilmente este hecho.

Sin hacer referencia al espacio de Minkowski remitámonos de nueva cuenta al tensor métrico (2.35), dado que esta métrica es una solución a las ecuaciones de Einstein en el vacío, se sigue que el escalar de curvatura R y la cantidad definida por $R^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ son ambas idénticamente cero, justo como ocurre con (2.36). Más adelante mostraremos las expresiones de los invariantes de curvatura para la métrica genérica (2.6) y verificaremos que para (2.35) también se cumple que $\mathcal{K} = 0$.

Capítulo 3

Construcción de agujeros negros con violación de hiperescala

En este capítulo mostraremos un análisis detallado sobre la solución exacta a las ecuaciones de campo encontrada en el capítulo anterior enfocado en la búsqueda de soluciones tipo agujero negro. Después de haber establecido una relación en los exponentes críticos y fijar convenientemente las constantes de integración, dirigiremos nuestra atención a los invariantes de curvatura pues nos servirán como criterio para discernir si estamos tratando con un agujero negro y nos permitirán realizar una clasificación entre las posibles singularidades que existen en nuestra solución.

3.1. Invariantes de curvatura

Los invariantes de curvatura, R, $\mathcal{K}$ y $\mathfrak{R} := R^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$, son por definición cantidades independientes del sistema de coordenadas adaptado que nos permiten estudiar a nuestra variedad de una manera muy profunda pues contienen información intrínseca de ella[1]. Por ejemplo, en geometría diferencial clásica, el teorema de Gauss-Bonnet nos permite realizar una clasificación de las superficies compactas sin frontera con ayuda de la curvatura gaussiana [22, 23], esta última se relaciona estrechamente con el tensor de Riemann. Otro resultado importante establece que todas las componentes del tensor de Riemann son idénticamente cero en cualquier punto si el espacio es plano. Sin embargo si todas las componentes del tensor de Ricci son nulas, no necesariamente podemos inferir que estamos tratando con un espacio plano, por eso es importante no perder de vista a ninguno de los invariantes.

Aunque dar una interpretación geométrica de estas cantidades en un espacio de dimensión arbitraria resulta una tarea complicada, en RG nos sirven como un criterio directo para identificar y discernir entre singularidades físicas y singularidades coordenadas como se mostró en el caso del espacio-tiempo de Schwarzschild, y por tanto interpretar una solución a las ecuaciones de Einstein como un agujero negro.

Empecemos tomando en cuenta el tensor métrico (2.29). Es natural pensar que a partir de los casos $\theta = z + D$ o $z = 1$ obtengamos soluciones tipo agujero negro, pues la función f toma la forma $f(r) = c_1 + c_2 r^{2(z-1)}$ o bien $f(r) = c_1 r^{D+1-\theta} + c_2$, luego podemos fijar las constantes de integración como

[1] Siendo más estrictos, estas cantidades no son los únicos invariantes de curvatura, a través de la operación de dualización podemos definir a los escalares de Chern–Pontryagin y Euler, dados por $\mathcal{K}_1 = \star R_{\mu\nu\alpha\beta} R^{\mu\nu\alpha\beta}$ y $\mathcal{K}_2 = \star R \star_{\mu\nu\alpha\beta} R^{\mu\nu\alpha\beta}$ respectivamente, para más detalles de las definiciones anteriores véase [24], también podemos construir invariantes con derivadas de estos escalares.

$$f(r) = 1 - \left(\frac{r}{r_h}\right)^{2(z-1)} \quad \text{si } \theta = z + D, \tag{3.1}$$

mientras que

$$f(r) = 1 - \left(\frac{r}{r_h}\right)^{D+1-\theta} \quad \text{para } z = 1. \tag{3.2}$$

En ambos casos la constante de integración relacionada con $r_h > 0$ define el horizonte de eventos, en particular cerca de la frontera asintótica podríamos esperar que $f(r) \to 1$. Tampoco debemos olvidar que la elección de los exponentes críticos debe ser compatible con la condición $(D(z-1)-\theta)(D-\theta) > 0$. Dada la forma de la función f y por la presencia del *factor conforme*[2] dado por $r^{2\theta/D}$, nuestra solución puede contener singularidades físicas genuinas[3](enfatizaremos este hecho en las dos secciones posteriores de este capítulo). En este punto es importante realizar un análisis detallado de los invariantes de curvatura para poder clasificar las distintas singularidades.

Cuando tratemos con un agujero negro es importante identificar la ubicación de la frontera asintótica y la ubicación de alguna singularidad física. Por ejemplo para el agujero negro de Schwarzschild la frontera asintótica está ubicada en $r \to \infty$ pues la métrica toma la forma de Minkowski en dicho límite, mientras que en $r = 0$ el invariante $\mathcal{K}$ está indeterminado y allí mismo habita la singularidad. Intuitivamente podemos pensar que la frontera asintótica y la singularidad física se encuentran ubicadas en los *extremos opuestos de la ciudad*, o al menos este hecho puede ocurrir en configuraciones estáticas con simetría esférica, tal idea será de motivación al estudiar los invariantes de curvatura asociados a nuestra solución.

En el resto de esta tesis nos referiremos a las soluciones tipo agujero negro que asintóticamente toman la forma de una GVHE simplemente por agujeros negros con violación de hiperescala.

Sea pues, comencemos con el análisis de los invariantes para nuestra solución. Los invariantes de curvatura para la métrica genérica (2.6) toman la siguiente forma

$$\begin{aligned} R = \frac{1}{r^{2\theta/D}} \Bigg\{ & -r^2 f'' + \left[D(3z + 2D - \theta - 1) - \theta(D+2)\right] \frac{rf'}{D} \\ & + \left[D(D-\theta)(\theta - D - z - 1) + (\theta - zD)(2z - \theta + D)\right] \frac{f}{D} \Bigg\}, \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{K} = \frac{1}{r^{4\theta/D}} \Bigg\{ & \left[\frac{z(zD-\theta)}{D} f + \frac{D - 3Dz + 2\theta}{2D} r f' + \frac{1}{2} r^2 f''\right]^2 \\ & + D(D-\theta)^2 \left[\left(\frac{\theta - zD}{D^2} f + \frac{rf'}{2D}\right)^2 + \frac{1}{4D^2}\left(rf' - 2f\right)^2\right] \\ & + 2D(D-1)\left(\frac{\theta - D}{D} f\right)^2 \Bigg\}, \end{aligned} \tag{3.4}$$

[2]Una función $u(x^\alpha)$ positiva es un factor conforme si aparece multiplicando a todos los términos del tensor métrico, es decir, que podemos escribir $g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu = u(x^\alpha) h_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu$.

[3]También existen agujeros negros regulares, es decir, soluciones exactas a las ecuaciones de Einstein con un horizonte de eventos y que son libres de singularidades en los invariantes de curvatura R, $\mathcal{K}$ y $\mathfrak{R}$ [25, 26].

$$\begin{aligned}\mathfrak{R} = \frac{1}{r^{4\theta/D}} \Bigg\{ &\left[\frac{(\theta - zD)(\theta - D - z)}{D} f + \frac{D(1 - D - 3z) + \theta(D+2)}{2D} r f' + \frac{1}{2} r^2 f''\right]^2 \\ &+ \left[\frac{D(\theta - D) + z(\theta - zD)}{D} f + \frac{D(3z + D - 1) - \theta(D+2)}{2D} r f' - \frac{1}{2} r^2 f''\right]^2 \\ &+ \frac{(D-\theta)^2}{D} \left[r f' + (\theta - D - z) f\right]^2 \Bigg\} .\end{aligned} \tag{3.5}$$

Basta con hacer $f(r) = 1$ y usar las relaciones anteriores para inferir que en una GVHE, $R = \alpha/r^{2\theta/D}$, $\mathcal{K} = \beta/r^{4\theta/D}$ y $\mathfrak{R} = \gamma/r^{4\theta/D}$, donde α, β y γ son constantes que dependen de los parámetros z, θ y D. Es interesante notar que en esta clase de geometrías todos los invariantes estallan cuando $r \to 0$ o bien si $r \to \infty$ dependiendo del signo del exponente crítico θ, mientras que para el espacio AdS y los espacios de Lifshitz estos invariantes de curvatura son constantes.

Recordemos el caso particular en que consideramos $z = 1$ y $\theta = D$ el cual nos conduce a la solución (2.35), utilizando las expresiones anteriores podemos corroborar que todos estos invariantes de curvatura se anulan. Este hecho es totalmente natural puesto que la métrica (2.35) es el espacio de Minkowski $(D+2)$-dimensional, pero que está siendo descrito por un sistema de coordenadas distinto al que acostumbramos.

Para nuestra solución más general (2.29) tendremos que emplear $f(r) = c_1 r^{z+D-\theta} + c_2 r^{2(z-1)}$, de modo que los invariantes de curvatura están dados por las siguientes expresiones

$$R = \frac{1}{r^{2\theta/D}} \left(c_1 \alpha_1 r^{z+D-\theta} + c_2 \alpha_2 r^{2(z-1)}\right),$$

$$\mathcal{K} = \frac{1}{r^{4\theta/D}} \left(c_1^2 \beta_1 r^{2(z+D-\theta)} + c_1 c_2 \beta_2 r^{3z+D-\theta-2} + c_2^2 \beta_3 r^{4(z-1)}\right),$$

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{r^{4\theta/D}} \left(c_1^2 \gamma_1 r^{2(z+D-\theta)} + c_1 c_2 \gamma_2 r^{3z+D-\theta-2} + c_2^2 \gamma_3 r^{4(z-1)}\right),$$

de igual manera, los coeficientes α_i, β_i y γ_i dependen de z, θ, D y están dados por

$$\begin{aligned}\alpha_1(z,\theta,D) &= \frac{(D-\theta)(D(z-1)-\theta)}{D}, \\ \alpha_2(z,\theta,D) &= \frac{(D-\theta)(2(z-1)-D+\theta)}{D}, \\ \beta_1(z,\theta,D) &= \frac{1}{4D^2}\big\{[D(D-\theta)^2 + (D+1-z+\theta)^2][D(D+1-2z-\theta)+2\theta]^2 \\ &\qquad + D(D-\theta)^2[(D+1-\theta)^2 + 8(D-1)]\big\}, \\ \beta_2(z,\theta,D) &= \frac{1}{D^2}\big\{(D-\theta)[D(D+1-2z-\theta)+2\theta][D(D-\theta)^2 - (D+1-z-\theta)] \\ &\qquad + D(D-\theta)^2[(z-2)(D+1-\theta) + 4(D-1)]\big\}, \\ \beta_3(z,\theta,D) &= \left(\frac{D-\theta}{D}\right)^2 \big[(2D+1)(z-2)^2 + D(D-1)\big],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_1(z,\theta,D) &= \frac{1}{4D^2}\left\{(z-1)^2[4D(D-\theta)^2+(D(D+1-2z-\theta)+2\theta)^2]\right.\\
&\quad \left.+[D(3D+1-2z)(z-1)+(D-3Dz+2(z-1))\theta+2\theta^2]^2\right\},\\
\gamma_2(z,\theta,D) &= \frac{1}{2D^2}\left\{2(z-1)(\theta-D)(z+\theta-D-2)[2D(D-\theta)+D(D+1-2z-\theta)+2\theta]\right.\\
&\quad \left.+(D+1)(D-\theta)(z-2)[D(3D+1-2z)(z-1)+(D-3Dz+2(z-1))\theta+2\theta^2]\right\},\\
\gamma_3(z,\theta,D) &= \frac{1}{2D^2}\left\{(D+1)(D-\theta)^2[2(z+\theta-D-2)^2+(D+1)(z-2)^2]\right\}.
\end{aligned}$$

Notemos que sin importar la manera en cómo fijemos a los exponentes críticos y elijamos la dimension D, siempre y cuando se cumpla la condición (2.31), las expresiones para R, $\mathcal{K}$ y $\mathfrak{R}$ van a involucrar únicamente potencias de r, que como sabemos, son funciones bien definidas en el conjunto de números reales positivos. Por ende los invariantes de curvatura no se indeterminarán en los horizontes de eventos definidos en las funciones (3.1) y (3.2), en ninguno de los casos estaremos tratando con singularidades desnudas, las singularidades definidas en tales horizontes de eventos son singularidades coordenadas.

Tomando en cuenta la función (3.1) los invariantes de curvatura toman la siguiente forma

$$R = \alpha_1 r^{-2(z+D)/D} - \left(\frac{\alpha_2}{r_h^{2(z-1)}}\right) r^{2(z-1)-2(z+D)/D}, \tag{3.6}$$

$$\mathcal{K} = \beta_1 r^{-4(z+D)/D} - \left(\frac{\beta_2}{r_h^{2(z-1)}}\right) r^{2(z-1)-4(z+D)/D} + \left(\frac{\beta_3}{r_h^{4(z-1)}}\right) r^{4(z-1)-4(z+D)/D}, \tag{3.7}$$

$$\mathfrak{R} = \gamma_1 r^{-4(z+D)/D} - \left(\frac{\gamma_2}{r_h^{2(z-1)}}\right) r^{2(z-1)-4(z+D)/D} + \left(\frac{\gamma_3}{r_h^{4(z-1)}}\right) r^{4(z-1)-4(z+D)/D}, \tag{3.8}$$

donde los coeficientes α_i, β_i y γ_i están evaluados en $\theta = z + D$.

Para la función (3.2) los invariantes de curvatura asociados son

$$R = \alpha_2 r^{-2\theta/D} - \left(\frac{\alpha_1}{r_h^{D+1-\theta}}\right) r^{D+1-\theta-2\theta/D}, \tag{3.9}$$

$$\mathcal{K} = \beta_3 r^{-4\theta/D} - \left(\frac{\beta_2}{r_h^{D+1-\theta}}\right) r^{D+1-\theta-4\theta/D} + \left(\frac{\beta_1}{r_h^{2(D+1-\theta)}}\right) r^{2(D+1-\theta)-4\theta/D}, \tag{3.10}$$

$$\mathfrak{R} = \gamma_3 r^{-4\theta/D} - \left(\frac{\gamma_2}{r_h^{D+1-\theta}}\right) r^{D+1-\theta-4\theta/D} + \left(\frac{\gamma_1}{r_h^{2(D+1-\theta)}}\right) r^{2(D+1-\theta)-4\theta/D}, \tag{3.11}$$

de manera análoga, los coeficientes α_i, β_i y γ_i están evaluados en $z = 1$.

Podemos prescindir del conocimiento del valor específico de los coeficientes α_i, β_i y γ_i en todas las expresiones anteriores, lo que realmente nos interesa es averiguar el comportamiento asintótico de los invariantes de curvatura en los límites $r \to \infty$ y $r \to 0$.

El hecho de que en una GVHE los invariantes de curvatura sean de la forma $R \sim 1/r^{2\theta/D}$ y $\mathcal{K}, \mathfrak{R} \sim 1/r^{4\theta/D}$, nos señala que de acuerdo con el signo de θ, dichas geometrías pueden ser asintóticamente planas, asintóticamente Anti-de Sitter o asintóticamente de Sitter[4] en alguno de

[4]Los espacios de Sitter y Anti-de Sitter se caracterizan por tener invariantes de curvatura negativos y positivos respectivamente.

los límites $r \to 0$ o $r \to \infty$, es decir, que $R, \mathcal{K}$ y $\mathfrak{R}$ sean asintóticamente constantes, ya sea nulos, positivos o negativos, en alguno de los límites anteriores, estos son los espacios en que estaremos interesados, la justificación es la siguiente:

Si tenemos un agujero negro con violación de hiperescala con horizonte de eventos r_h, entonces la región del espacio-tiempo definida por $r_h < r$ será completamente regular siempre que las cantidades $R, \mathcal{K}$ y $\mathfrak{R}$ sean asintóticamente constantes en el límite $r \to \infty$, más aún, puede existir una singularidad física en $r = 0$. Análogamente, la región del espacio-tiempo definida por $0 < r < r_h$ será completamente regular cuando $R, \mathcal{K}$ y $\mathfrak{R}$ sean asintóticamente constantes en el límite $r \to 0$, además es muy probable la existencia de una singularidad física en $r \to \infty$.

Tomando en cuenta la idea del párrafo anterior, para llevar a cabo la construcción de soluciones tipo agujero negro a partir de (3.1) o (3.2) vamos a exigir que los invariantes de curvatura (3.6)-(3.11) sean asintóticamente constantes, para ello es suficiente que tales expresiones involucren únicamente potencias de r negativas para asegurar que las cantidades $R, \mathcal{K}$ y $\mathfrak{R}$ tiendan a un valor constante en el límite $r \to \infty$, o bien que involucren únicamente potencias positivas para asegurar que los invariantes de curvatura sean asintóticamente constantes en el límite $r \to 0$.

3.2. Análisis asintótico: $r \to \infty$

Como se mencionó anteriormente, el hecho de que los invariantes de curvatura contengan únicamente potencias de r menores o iguales a cero asegura que en el límite $r \to \infty$, las cantidades $R, \mathcal{K}, \mathfrak{R}$ tiendan asintóticamente a alguna constante, a continuación realizamos un análisis de los invariantes para este límite y mostramos de qué manera podemos seleccionar a los parámetros z, θ y D con el propósito de obtener soluciones asintóticamente regulares. Es importante añadir que las condiciones anteriores pueden implicar, matemáticamente, la existencia de una singularidad física en $r = 0$ pues todos los invariantes se indeterminarán en aquel punto.

3.2.1. Caso $\theta = z + D$

Consideremos la función (3.1), para asegurar que todas las potencias de los invariantes (3.6)-(3.8) sean menores o iguales a cero y el campo escalar contenido en nuestra solución sea real requerimos que se cumpla el siguiente conjunto de desigualdades

$$\begin{cases} -(z+D) \leq 0 \\ z - 1 - 2(z+D)/D \leq 0 \\ z - 1 - (z+D)/D \leq 0 \\ -z(z(D-1) - 2D) > 0, \end{cases} \tag{3.12}$$

la última desigualdad se obtuvo de sustituir $\theta = z + D$ en (2.31), seguiremos este esquema en los demás conjuntos de desigualdades que se presenten.

Empleando la primera desigualdad de (3.12) se sigue que $(z + D)/D \leq 2(z + D)/D$, por tanto podemos omitir la segunda desigualdad pues será consecuencia de la tercera. En particular, la tercera desigualdad puede reescribirse en la siguiente forma $z(D - 1) \leq 2D$.

Si $D = 1$, la primera desigualdad impone la condición $-1 \leq z$ mientras que la tercera se satisface, la última desigualdad se convierte en $2z > 0$ y restringe el conjunto de valores de z. Por lo tanto $z > 0$ y $D = 1$ hacen válido el sistema de desigualdades (3.12) y definen configuraciones asintóticamente regulares.

Si $D \geq 2$, la primera desigualdad impone la restricción $-D \leq z$ y la tercera desigualdad impone una cota superior dada por $z \leq 2D/(D - 1)$. La última desigualdad es válida solamente en el caso $z(D - 1) - 2D < 0$ y $-z < 0$ e impone una nueva cota inferior $0 < z$. Dado que $0 < 2D/(D - 1)$ para todo $D \geq 2$, concluimos que los valores $0 < z < 2D/(D - 1)$ con $D \geq 2$ también hacen válido el sistema de inecuaciones que estamos tratando, por lo tanto, definen configuraciones de campo asintóticamente regulares.

Notemos que para $0 < z < 1$ la función $f(r) = 1 - (r/r_h)^{2(z-1)}$ toma valores positivos para todo $r > r_h$, y como $2(z-1) < 0$, entonces $f(r) \to 1$ cuando $r \to \infty$, así este conjunto de valores para z con $D \geq 1$ define configuraciones de campo tipo agujero negro con una singularidad física en $r = 0$, este último hecho se puede verificar a partir de las expresiones de los invariantes de curvatura (3.6)-(3.8).

Por otro lado si $z > 1$, la función $f(r) = 1 - (r/r_h)^{2(z-1)}$ es positiva en el sector $0 < r < r_h$, esta región del espacio-tiempo corresponderá con la región físicamente relevante. Notemos, además, que aún cuando la función $f(r) \to 1$ en el límite $r \to 0$, en el punto $r = 0$ habita una singularidad física, basta con echar un vistazo a los invariantes de curvatura (3.6)-(3.8) para convencerse de este hecho. Con respecto al sector $r > r_h$, allí la función $f(r)$ toma valores negativos, más aún $f(r) \to -\infty$ cuando $r \to \infty$, por tanto en los casos $z > 1$ con $D = 1$ y $1 < z < 2D/(D-1)$ con $D \geq 2$, la signatura de la métrica es $(+1, -1, +1 \ldots, +1)$ en el respectivo sector del espacio-tiempo, i.e. la coordenada t toma carácter de una coordenada espacial y la coordenada holográfica r toma el carácter temporal.

Si hacemos $z = 1$, la función (3.1) se hace idénticamente cero, por lo que habrá problemas con el coeficiente g_{rr} esto principalmente por la manera en cómo asignamos los valores a las constantes de integración, no obstante haciendo $\theta = z + D$ y $z = 1$ en la función (2.25) obtenemos $f(r) = c_1 + c_2$, que es constante y podemos tomar como $f(r) = 1$. En la métrica asociada a esta función no tendremos horizonte de eventos y por ende tampoco soluciones tipo agujero negro. Este caso no deja de ser importante, pues la condición (2.34) que garantiza obtener un campo escalar real toma la siguiente forma

$$(-1)(D - 1 - 2D) \geq 0,$$

la cual siempre es válida, de modo que para todo $D \geqslant 1$ podemos obtener soluciones que son puramente GVHE con los exponentes críticos sujetos a $z = 1$ y $\theta = D + 1$, más aún, estas soluciones son asintóticamente planas en $r \to \infty$ pues $\theta > 0$.

3.2.2. Caso $z = 1$

Al evaluar el parámetro $z = 1$, la función $f(r)$ toma la forma (3.2), por tanto debemos estudiar a los invariantes de curvatura (3.9)-(3.11). Pediremos que todas las potencias de r involucradas en los invariantes sean menores o iguales a cero para asegurar soluciones asintóticamente regulares en el límite $r \to \infty$, para conseguir esto es necesario que se cumpla el siguiente conjunto de desigualdades

$$\begin{cases} -\theta \leq 0 \\ D + 1 - \theta - 2\theta/D \leq 0 \\ D + 1 - \theta - 4\theta/D \leq 0 \\ -\theta(D - \theta) > 0. \end{cases} \tag{3.13}$$

De la primera desigualdad se desprende que $\theta(1+2/D) \leq \theta(1+4/D)$, de aquí podemos deducir que la tercera desigualdad es una implicación de la segunda, más aún, la segunda desigualdad impone una cota inferior para el conjunto de valores de θ dada por $\theta \geq D(D+1)/(D+2)$.

Dado que $-\theta \leq 0$, la única manera en que se cumpla la última desigualdad de (3.13) es que ocurra $D - \theta < 0$. Usando $D > D(D+1)/(D+2)$ podemos concluir que los valores $\theta > D$ y $z = 1$ generan soluciones asintóticamente regulares pues satisfacen el sistema de inecuaciones (3.13).

Es importante notar que para $\theta > D + 1$ la función $f(r) = 1 - (r/r_h)^{D+1-\theta}$ es positiva en el sector $r > r_h$, además $f(r) \to 1$ en el límite $r \to \infty$, por tanto este conjunto de soluciones definen agujeros negros con violación de hiperescala con una singularidad física en $r = 0$, para convencerse de este último hecho basta con revisar las expresiones de los invariantes de curvatura (3.9)-(3.11), además en esta configuración de campo se preserva la signatura $(-1, +1, +1, \ldots, +1)$ del tensor métrico en tal sector del espacio-tiempo.

Por otro lado para $D < \theta < D + 1$, la función $f(r)$ toma valores positivos en el sector $0 < r < r_h$, allí la solución es físicamente relevante y la signatura que define a las GVHE se preserva, esto es, $(-1, +1, +1 \ldots, +1)$. No obstante en el punto $r = 0$ habita una singularidad física, para convencernos de esto podemos revisar los invariantes de curvatura (3.9)-(3.11). Ahora bien, si nos remitimos al sector $r > r_h$, allí la función $f(r)$ toma valores estrictamente negativos, más aún $f(r) \to -\infty$ cuando $r \to \infty$. Por tanto este conjunto de valores para θ define configuraciones de campo en que la coordenada r se comporta como la variable temporal y la coordenada t toma el carácter de una coordenada espacial, basta echar un vistazo a la signatura de la métrica.

El caso $\theta = D + 1$ nos lleva a una función $f(r)$ constante el cual fue tratado al final de la subsección previa.

3.3. Análisis asintótico: $r \to 0$

En la presente sección nos enfocaremos en hallar condiciones sobre los exponentes críticos z y θ, así como la dimension D, que reproduzcan soluciones asintóticamente regulares en el límite $r \to 0$. Para que los invariantes de curvatura $R, \mathcal{K}$ y $\mathfrak{R}$ sean asintóticamente constantes en el límite indicado anteriormente es suficiente que todas las potencias de la variable r involucradas en las expresiones (3.6)-(3.11) sean mayores o iguales a cero. Como consecuencia de imponer estas condiciones a los parámetros z, θ y D, los invariantes de curvatura pueden estallar cuando $r \to \infty$, es decir, obtendremos soluciones con una singularidad física ubicada en el infinito.

3.3.1. Caso $\theta = z + D$

Comencemos haciendo $\theta = z + D$, nos enfocaremos en estudiar los invariantes de curvatura (3.6)-(3.8) ligados con la función (3.1). Para asegurar que todos los invariantes de curvatura sean asintóticamente constantes en el límite $r \to 0$ deben cumplirse las siguiente desigualdades

$$\begin{cases} -(z+D) \geq 0 \\ z - 1 - 2(z+D)/D \geq 0 \\ z - 1 - (z+D)/D \geq 0 \\ -z(z(D-1) - 2D) > 0. \end{cases} \tag{3.14}$$

Si evaluamos $D = 1$, la tercera desigualdad del sistema anterior toma la forma $0 \geq 2$, luego este caso queda descartado. Para $D \geq 2$, la tercera desigualdad impone la restricción $z \geq 2D/(D-1) > 0$, sin embargo esta última condición entra en conflicto con la primera desigualdad $z \leq -D$, en conclusión es imposible construir soluciones asintóticamente regulares en $r \to 0$ con $\theta = z + D$.

3.3.2. Caso $z = 1$

Ahora consideremos los invariantes de curvatura asociados a la función (3.2) para asegurar que los invariantes de curvatura (3.9)-(3.11) sean asintóticamente constantes en $r \to 0$ debemos hallar el conjunto solución del siguiente sistema de inecuaciones

$$\begin{cases} -\theta \geq 0 \\ D + 1 - \theta - 2\theta/D \geq 0 \\ D + 1 - \theta - 4\theta/D \geq 0 \\ -\theta(D - \theta) > 0. \end{cases} \tag{3.15}$$

La segunda y tercera desigualdad son consecuencia de la primera $\theta \leq 0$, y aprovechando esta condición podemos inferir de manera inmediata que la última desigualdad se cumple solamente si $D - \theta > 0$. Podemos concluir que el conjunto solución al sistema de desigualdades (3.15) es $\theta < 0$

y $D \geqslant 1$, es decir, a partir de este conjunto de valores podemos obtener soluciones asintóticamente regulares con frontera asintótica en $r \to 0$.

Es importante mencionar que haciendo $\theta = 0$ y $z = 1$, la condición (2.34) para que el campo escalar sea real siempre se cumple y el factor de ennegrecimiento toma la forma

$$f(r) = 1 - \left(\frac{r}{r_h}\right)^{D+1}, \tag{3.16}$$

este corresponde con la solución *AdS-Schwarzschild* [9] y representa un agujero negro asíntóticamente AdS con frontera asintótica en $r \to 0$, esta solución se encuentra contenida en el caso $\theta = D(z-1)$ mencionado en el capítulo anterior.

Finalmente tenemos que para todo $\theta \leq 0$, el factor de ennegrecimiento $f(r) = 1 - (r/r_h)^{D+1-\theta}$ es positivo para todo $0 < r < r_h$, de manera que la signatura de la métrica está dada por $(-1, +1, \ldots, +1)$, además $f(r) \to 1$ en el límite $r \to 0$ pues la potencia de r involucrada en la función anterior es positiva, así este conjunto de valores para θ define soluciones tipo agujero negro con una singularidad física en $r \to \infty$. En este último análisis, contrario a lo que ocurre con la configuraciones con frontera asintótica en $r \to \infty$, no es necesario hacer una *división* en el conjunto de los exponentes críticos, pues la potencia de r que aparece en la función $f(r)$ siempre es positiva.

3.4. Sumario de resultados

A continuación agregamos una tabla que resume el análisis anterior de los exponentes críticos:

Exp. de Lifshitz z	Exp. de VHE θ	Dim. D	Frontera asintótica	Singularidad	f en la frontera asintótica
$1 < z$	$\theta = z + D$	$D = 1$	$r \to \infty$	$r = 0$	$f(r) \to -\infty$
$1 < z < 2D/(D-1)$	$\theta = z + D$	$D \geq 2$	$r \to \infty$	$r = 0$	$f(r) \to -\infty$
$0 < z < 1$	$\theta = z + D$	$D \geq 1$	$r \to \infty$	$r = 0$	$f(r) \to 1$
$z = 1$	$D < \theta < D + 1$	$D \geq 1$	$r \to \infty$	$r = 0$	$f(r) \to -\infty$
$z = 1$	$\theta > D + 1$	$D \geq 1$	$r \to \infty$	$r = 0$	$f(r) \to 1$
$z = 1$	$\theta < 0$	$D \geq 1$	$r = 0$	$r \to \infty$	$f(r) \to 1$
$z = 1$	$\theta = 0$	$D \geq 1$	$r = 0$	$r \to \infty$	$f(r) \to 1$

Tabla 3.1: Exponentes críticos que generan configuraciones asintóticamente regulares.

En la tabla anterior reportamos algunas soluciones que son asintóticamente regulares y tales que el factor de ennegrecimiento $f(r)$ diverge en la frontera asintótica y no tiende al valor 1 como es usual. Atribuimos este hecho a la presencia del factor conforme $r^{2\theta/D}$ del tensor métrico, así como la presencia de los términos $r^{-2z}f(r)$ y $1/(r^2 f(r))$ en los coeficientes g_{tt} y g_{rr} respectivamente, sin olvidar que en algunas soluciones existe una dependencia entre los parámetros z y θ, y que además estas soluciones no corresponden con configuraciones tipo agujero negro.

Retomando la definición de las GVHE (1.38), requerimos que las soluciones preserven la signatura $(-1, +1+1, \ldots, +1)$, por tanto, de las soluciones anteriores, solamente aquellas en que $f(r)$ toma valores positivos en el sector regular del espacio-tiempo definen configuraciones tipo agujero negro con violación de hiperescala. De manera que los casos

- $0 < z < 1$ y $\theta = z + D$,
- $z = 1$ y $\theta > D + 1$,
- $z = 1$ y $\theta \leq 0$,

corresponden con las soluciones de nuestro interés y que consideraremos en el capítulo posterior.

Capítulo 4

Introducción a la termodinámica de agujeros negros

Existen grandes similitudes entre la física de los agujeros negros y la termodinámica clásica, la más intrigante de ellas se asocia con el comportamiento del área del horizonte de eventos y la entropía. En el trabajo de Bekenstein, Hawking, Bardeen y Carter reportado en [6, 7] se encuentran algunos de los primeros y más importantes resultados sobre la física de los agujeros negros, y en estos artículos podemos encontrar una serie de enunciados relativos a las propiedades de estos objetos que son completamente análogos con las leyes de la termodinámica. El propósito de esta capítulo es abordar de manera introductoria algunos de estos curiosos resultados, para ello comencemos presentando una de las soluciones tipo agujero negro más importantes, la llamada solución de Kerr-Newman [27]

$$\mathrm{d}s^2 = \left(\mathrm{d}t - a\sin^2\theta\mathrm{d}\phi\right)^2 \frac{\Delta}{\rho^2} - \left(\left(r^2+a^2\right)\mathrm{d}\phi - a\mathrm{d}t\right)^2 \frac{\sin^2\theta}{\rho^2} - \left(\frac{\mathrm{d}r^2}{\Delta} + \mathrm{d}\theta^2\right)\rho^2, \tag{4.1}$$

donde

$$\rho^2 = r^2 + a^2\cos^2\theta, \tag{4.2}$$

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2 \tag{4.3}$$

y $a = J/M$. La métrica anterior se interpreta como un agujero negro rotatorio, axisimétrico y cargado eléctricamente, el parámetro J corresponde con su momento angular. La relevancia de la solución (4.1) es que podemos generar cualquier solución tipo agujero negro en una teoría al vacío o con la presencia de un campo electromagnético a partir de ella[1] ajustando únicamente los parámetros de masa, carga y momento angular. Por ejemplo, para recuperar la solución de Schwarszchild debemos pensar en un espacio-tiempo estático vacío, es decir, anular la carga eléctrica Q y el momento angular J en (4.1). O bien para recuperar la solución de Reissner-Nordström debemos pensar en un espacio-tiempo estático, basta entonces anular J. También podemos obtener la solución de Kerr haciendo $Q = 0$, esta última representa un agujero negro rotatorio en un espacio-tiempo vacío. En cierto sentido podemos concluir que un agujero negro se encuentra caracterizado por su masa M, su carga eléctrica Q y su momento angular J.

El horizonte de eventos para la métrica de Kerr-Newman se define a partir de los valores r tales que $\Delta|_r = 0$, de manera que $r_\pm = M \pm \left(M^2 - Q^2 - a^2\right)^{1/2}$ se asocian con los horizontes interno y

[1] Curiosamente, una manera de obtener la solución de Kerr-Newmann consta en partir de la solución de Reissner-Nordström [28].

externo respectivamente. Supongamos que el momento angular J es un vector tridimensional $\vec{J}$ y $\vec{a} := \vec{J}/M$. El área del horizonte de eventos del agujero negro de Kerr-Newmann es

$$A = 4\pi\rho^2|_{r=r_+,\theta=0} = 4\pi(2Mr_+ - Q^2),$$

donde ρ^2 está definida por (4.2), diferenciando la relación anterior obtenemos para $\mathrm{d}M$ la siguiente expresión

$$\mathrm{d}M = \frac{\Theta}{4\pi}\mathrm{d}A + \vec{\Omega}\cdot\mathrm{d}\vec{J} + \Phi\mathrm{d}Q \tag{4.4}$$

donde $\Theta = \pi(r_+ - r_-)/A$, $\vec{\Omega} = 4\pi\vec{a}/A$ y $\Phi = 4\pi Q r_+/A$. La ecuación (4.4) es completamente análoga con la bien conocida expresión termodinámica

$$\mathrm{d}U = T\mathrm{d}S - p\mathrm{d}V.$$

Los términos $\vec{\Omega}\cdot\mathrm{d}\vec{J}$ y $\Phi\mathrm{d}Q$ representan el trabajo realizado sobre el agujero negro por un agente externo que incrementa el momento angular y carga eléctrica por $\mathrm{d}\vec{J}$ y $\mathrm{d}Q$ respectivamente. Entonces $\vec{\Omega}\cdot\mathrm{d}\vec{J} + \Phi\mathrm{d}Q$ es el análogo de $-p\mathrm{d}V$, el trabajo hecho en un sistema termodinámico. La ecuación (4.4) sugiere una semejanza entre la entropía S y el área del horizonte de eventos A, desde luego que no podemos relacionar tales cantidades de manera directa ya que hasta este momento las deducciones son de naturaleza puramente formal y principalmente porque al área y la entropía difieren en dimensiones.

La discusión anterior es un extracto del artículo *Black Holes and Entropy* de J. D. Bekenstein [6], en este artículo podemos encontrar un tratamiento para la física de los agujeros negros desde el punto de vista de la teoría de la información y se hace un especial énfasis en la entropía.

Por otro lado, en el artículo de J. M. Bardeen, B. Carter y S. W. Hawking [7], se derivan las Cuatro Leyes de la Mecánica de los Agujeros Negros, en la siguiente sección presentamos una traducción de las ideas sustanciales contenidas en el trabajo anteriormente citado.

4.1. Las Cuatro Leyes de la Mecánica de los Agujeros Negros

En seguida enunciaremos una serie de propiedades para las soluciones a las ecuaciones de Einstein que son axisimétricas, estacionarias[2] y conteniendo un agujero negro rodeado de materia.

Aunque los elementos de RG mostrados en el capítulo 1 no son suficientes para poder presentar una demostración rigurosa de los siguiente resultados, alentamos al lector a revisar los tópicos sobre hipersuperficies, vectores de Killing y la derivada de Lie, así como profundizar más sobre las soluciones tipo agujero negro (unas buenas referencias son [1, 2]), y en seguida aventurarse en la lectura del artículo *The Four Laws of Black Hole Mechanics* [6]. Sea pues, comencemos enunciando:

La ley cero: *La gravedad de superficie κ de un agujero negro estacionario es constante sobre el horizonte de eventos.*

La gravedad de superficie κ, a nivel Newtoniano, se interpreta como la aceleración debida a la gravedad experimentada por una masa de prueba que está muy cercana a la superficie del objeto que genera el campo gravitatorio. En RG, sin embargo, el concepto de aceleración Newtoniana resulta no ser claro, para un agujero negro el tratamiento debe ser relativista, uno no puede definir la gravedad de superficie como la aceleración experimentada por un objeto de prueba ubicado en la superficie del objeto, esto es porque la aceleración en el horizonte de eventos puede divergir. Cuando uno habla acerca de la gravedad de superficie de un agujero negro, se hace referencia a la noción Newtoniana de κ, pero no son la misma cosa. La gravedad de superficie para un agujero negro general es una cantidad que no está bien definida, sin embargo uno puede definir la gravedad de superficie de un agujero negro cuyo horizonte de eventos es un *horizonte de Killing.* La gravedad

[2] Decimos que un espacio-tiempo es estacionario si el tensor métrico no depende de la coordenada temporal y además puede rotar, no confundir con un espacio estático [29].

de superficie κ de un horizonte de Killing estático es la aceleración, como si se ejerciera desde el infinito, necesaria para mantener un objeto en tal horizonte. Por ejemplo, para la solución de Kerr-Newman [30]

$$\kappa = \frac{r_+ - r_-}{2\left(r_+^2 + a^2\right)} = \frac{\sqrt{M^2 - Q^2 - a^2}}{2M^2 - Q^2 + 2M\sqrt{M^2 - Q^2 - a^2}}.$$

Para probar el siguiente resultado se asumió que la materia exterior al horizonte de eventos es un fluido perfecto en una órbita circular alrededor del agujero negro. Enunciamos entonces:

La primera ley: *Cualesquiera dos soluciones vecinas estacionarias axisimétricas que contienen un fluido perfecto con un flujo circular y un agujero negro central están relacionadas por*

$$\delta M = \frac{\kappa}{8\pi}\delta A + \Omega_H \delta J_H + \int \Omega \delta \mathrm{d}J + \int \overline{\mu} \delta \mathrm{d}N + \int \overline{\theta} \delta \mathrm{d}S. \tag{4.5}$$

la última ecuación es una generalización del resultado (4.4), la primera diferencia radica que en la ecuación (4.5) estamos tomando en cuenta el comportamiento de la materia, tanto interna como externa al horizonte de eventos. Recordemos que un fluido perfecto puede ser descrito por una densidad de energía, que es función de la densidad de número de partículas y la densidad de entropía. El término $\Omega_H \delta J_H$ hace referencia al incremento en el momento angular del horizonte de eventos, $\delta \mathrm{d}J$ es el cambio en el momento angular del fluido que atraviesa un elemento infinitesimal $\mathrm{d}\Sigma$ de superficie del horizonte, $\delta \mathrm{d}N$ es el cambio en el número de partículas atravesando $\mathrm{d}\Sigma$, $\delta \mathrm{d}S$ es el cambio en la entropía cruzando $\mathrm{d}\Sigma$, $\overline{\mu}$ es el potencial químico y $\overline{\theta}$ la temperatura del fluido.

En la literatura es muy común encontrar una relación análoga a la ecuación (4.5) expresada mediante formas diferenciales

$$\mathrm{d}M = \frac{\kappa}{8\pi}\mathrm{d}A + \Omega_H \mathrm{d}J + \Phi dQ, \tag{4.6}$$

y es conocida como la *fórmula de Smarr*, este es el resultado deseado de la primera ley para agujeros negros rotatorios y cargados en dimensiones arbitrarias.

Como podemos notar, el término $\kappa/(8\pi)$ es análogo con la temperatura de la misma manera que el área del horizonte de eventos A es análogo con la entropía, pero debemos enfatizar que $\kappa/(8\pi)$ y A son distintos de la temperatura y la entropía de un agujero negro. Esta última analogía se remarca todavía más con el siguiente resultado:

La segunda ley: *El área A del horizonte de eventos de cada agujero negro no decrece con el tiempo, i.e.,*

$$\delta A \geqslant 0.$$

Esta última relación indica la tendencia del área del horizonte de eventos a incrementarse de manera irreversible, justo como lo hace la entropía en los sistemas termodinámicos cerrados.

Escrito en otras palabras, si dos agujeros negros colisionan, el área del horizonte de eventos final será mayor que la suma de las áreas de los horizontes iniciales, i. e.

$$A_f > A_1 + A_2.$$

La segunda ley de la mecánica de los agujeros negros es ligeramente más fuerte que la ley termodinámica correspondiente. En termodinámica uno puede transferir la entropía de un sistema a otro, y solamente es requerido que la entropía total no decrezca. Sin embargo uno no puede transferir el área de un agujero negro a otro puesto que no pueden bifurcarse [31].

Para extender aún más la analogía de la física de los agujeros negros con la termodinámica uno podría postular:

La tercera ley: *Es imposible mediante cualquier proceso, sin importar cuan idealizado sea, reducir a cero la gravedad de superficie κ por una sucesión finita de operaciones.*

Esta ley tiene un estatus diferente a las demás, ya que no hay una prueba matemática rigurosa de este hecho. Sin embargo hay fuertes razones para creer en ella, por ejemplo, si uno intenta reducir el valor de κ de un agujero negro de Kerr arrojando partículas para incrementar el momento angular, uno encuentra que el decremento de κ por partícula arrojada se vuelve más y más pequeño a la vez que la masa y el momento angular tiende a la razón crítica $J/M^2 = 1$ para la cual κ es cero. Si bien existen procesos de acreción para los cuales $J/M^2 \to 1$ [32], estos requieren de una divisibilidad infinita de la materia y un tiempo infinito.

4.2. Sobre la termodinámica de agujeros negros con violación de hiperescala

En la dualidad holográfica ha sido imprescindible extender las ideas subyacentes en las cuatro leyes de la mecánica de los agujeros negros a los llamados agujeros negros con violación de hiperescala, agujeros negros tipo AdS y Lifshitz, en lo que sigue comentaremos una manera *sistemática* para obtener la temperatura de un agujero con violación de hiperescala.

En 1974, S. Hawking descubrió un proceso cuántico que da lugar a un flujo térmico de partículas desde un agujero negro, implicando que, en efecto, tales objetos se comportan como un sistema termodinámico [33]. Los agujeros negros tienen una temperatura bien definida, que de hecho es proporcional a la gravedad de superficie

$$T = \frac{\hbar}{2\pi k_B}\kappa, \tag{4.7}$$

sin embargo tomaremos un *atajo* para calcular tal temperatura para nuestras soluciones sin tener que recurrir a la definición de gravedad de superficie κ.

En la física estadística es muy común mezclar ideas de teorías clásicas y modernas, tales como la mecánica clásica y la mecánica cuántica, para dar solución a problemas aparentemente paradójicos o simplemente para obtener una respuesta de manera más directa, y en el caso de la física de agujeros negros estos llamados tratamientos semiclásicos o semicuánticos se hacen muy presentes. La *rotación de Wick* es uno de esos trucos, que nos permite obtener la temperatura de un agujero negro con violación de hiperescala de una manera muy simple, aunque con muchas sutilezas detrás.

La rotación de Wick está motivada en la observación de que podemos relacionar la métrica de Minkowski

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2,$$

con la métrica euclidiana tetradimensional

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\tau^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2,$$

siempre que permitamos a t tomar valores puramente imaginarios. En cierto sentido, estamos llevando un problema en el espacio de Minkowski a un problema en el espacio euclidiano con ayuda de la transformación $t = -i\tau$, que en algunas ocasiones es más fácil de resolver, y desde luego que podemos invertir la transformación y dar con la solución al problema original [34].

La rotación de Wick, además, conecta la mecánica estadística con la mecánica cuántica reemplazando el inverso de la temperatura $\beta = 1/T$ por it, con esta transformación podemos relacionar una teoría de campos cuántica con un modelo de mecánica estadística sobre un tubo $\mathbb{R}^n \times S^1$, donde $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ es la circunferencia de radio unitario, con la coordenada imaginaria τ siendo periódica de periodo β [35].

4.2.1. Temperatura y Fórmula de Bekenstein-Hawking

Inspirados con estas ideas tomemos la métrica genérica (2.6) y apliquemos la rotación de Wick $t = -i\tau$, así

$$\mathrm{d}s^2 \to \mathrm{d}s_e^2 = r^{2\theta/D}\left(\frac{f(r)}{r^{2z}}\mathrm{d}\tau^2 + \frac{\mathrm{d}r^2}{r^2 f(r)} + \frac{\mathrm{d}\vec{x}_D^2}{r^2}\right). \tag{4.8}$$

En el capítulo anterior hemos encontrado soluciones tipo agujero negro relacionadas con esta última métrica que son completamente regulares en el horizonte de eventos r_h, este radio entonces define la versión euclidiana del horizonte de eventos de un agujero negro de la forma (4.8). La coordenada radial estará definida entre $0 < r < r_h$ si la singularidad física se ubica en $r \to \infty$, o bien en el sector $r_h < r$ siempre que la singularidad habite en $r = 0$. En estas regiones, nuestras soluciones tipo agujero negro son regulares.

Realizamos entonces una expansión de la métrica cerca del horizonte de eventos y encontramos

$$\mathrm{d}s_e^2 = r_h^{2\theta/D}\left(\frac{|f'(r_h)|(r_h - r)}{r_h^{2z}}\mathrm{d}\tau^2 + \frac{\mathrm{d}r^2}{r_h^2|f'(r_h)|(r_h - r)} + \frac{\mathrm{d}\vec{x}_D^2}{r_h^2}\right) + \cdots .$$

Ahora efectuamos el siguiente cambio de coordenadas

$$\rho^2 = \frac{4r_h^{2\theta/D-2}}{|f'(r_h)|}\left(r_h - r\right), \qquad \varphi = \frac{|f'(r_h)|}{2r_h^{z-1}}\tau. \tag{4.9}$$

Por tanto, cerca del horizonte de eventos la métrica euclideana toma la forma

$$\mathrm{d}s_e^2 = \rho^2\mathrm{d}\varphi^2 + \mathrm{d}\rho^2 + \frac{\mathrm{d}\vec{x}_D^2}{r_h^{2-2\theta/D}} + \cdots .$$

Esta última métrica se reconoce inmediatamente como un espacio plano en coordenadas cilíndrico-polares. Para evitar la singularidad en $\rho = 0$ debemos realizar la identificación $\varphi \sim \varphi + 2\pi$, y como φ se definió en términos de τ a través de (4.9), entonces τ tiene también periodicidad $\tau \sim \tau + 1/T$ donde

$$T = \frac{|f'(r_h)|}{4\pi r_h^{z-1}},$$

que se interpreta precisamente como la temperatura del agujero negro [9]. Para nuestras soluciones, las temperaturas están dadas por

$$T = \frac{|z-1|}{2\pi r_h^z} \quad \text{para el caso } \ \theta = z + D, \tag{4.10}$$

mientras que

$$T = \frac{|D + 1 - \theta|}{4\pi r_h} \quad \text{para } z = 1. \tag{4.11}$$

Con la temperatura a la mano, uno puede calcular la entropía como una función de la temperatura. Un resultado general en gravedad semiclásica es la llamada *Fórmula de Bekenstein-Hawking* [36], que relaciona la entropía de un agujero negro con el área del horizonte de eventos a través de la ecuación

$$\mathcal{S}_{BH} = \frac{k_B A}{4L_P^2} = \frac{k_B c^3 A}{4G\hbar}, \tag{4.12}$$

donde $L_P = \sqrt{G\hbar/c^3}$ es la longitud de Planck.

Para calcular el área del horizonte de eventos de un agujero negro de la forma (2.6) debemos remitirnos a un tiempo fijo $t = t_0$, realizar un corte radial $r = r_h$ e integrar la siguiente expresión

$$A = \int_U d^D x \sqrt{g_{11} \cdot g_{22} \cdot \ldots \cdot g_{DD}} \Big|_{r=r_h}, \tag{4.13}$$

donde $U \subset \mathbb{R}^D$ es un dominio con volumen finito. La integral anterior es inmediata ya que todas las componentes $g_{11} = g_{22} = \ldots = g_{DD}$ dependen únicamente de la variable r. Empleando el sistema de unidades naturales y realizando la integración obtenemos que

$$\mathcal{S}_{BH} = \frac{V_D}{4G} r_h^{\theta - D},$$

donde $V_D = Vol(U)$. Usando las ecuaciones (4.10) y (4.11) obtenemos la entropía para los respectivos agujeros negros como función de su temperatura.

Para el caso $\theta = z + D$ hallamos

$$\mathcal{S}_{BH} = \frac{|z-1| V_D}{8\pi G} \frac{1}{T}. \tag{4.14}$$

Por otro lado, para el caso $z = 1$

$$\mathcal{S}_{BH} = \frac{V_D}{4G} \left(\frac{|D + 1 - \theta|}{4\pi} \right)^{\theta - D} T^{D-\theta}. \tag{4.15}$$

4.2.2. Sobre la primera ley de la termodinámica de los agujeros negros

Notemos que al combinar las ecuaciones (4.7) y (4.12) obtenemos la siguiente igualdad

$$T\mathcal{S}_{BH} = \frac{\kappa}{8\pi G} A$$

la expresión anterior sugiere una manera equivalente de expresar la fórmula de Smarr en términos de la temperatura y la entropía de Bekenstein-Hawking, en particular para agujeros negros estáticos y sin carga eléctrica esta relación se escribe como

$$\mathrm{d}M = T \mathrm{d}\mathcal{S}$$

en la literatura a esta relación se le suele referir como la primera ley de la termodinámica de los agujeros negros. Para tener una *termodinámica* consistente al tratar con un agujero negro es necesario que se cumpla una relación como la anterior. Para ello se deben calcular de manera separada la masa, la entropía y la temperatura y verificar que tales cantidades cumplen con la primera ley, en particular para nuestras soluciones el cálculo de la masa permanece pendiente. Una manera de tratar con este problema consiste en usar el método de cargas cuasi-locales conservadas basado en el formalismo ADT [37], la ventaja de este tratamiento es que puede aplicarse a agujeros negros con violación de hiperescala, Lifshitz y AdS, y obtener resultados consistentes como se muestra por ejemplo en [38, 39]. Es inevitable recurrir a este método para verificar, o en su defecto, descartar, que nuestras soluciones satisfacen la primera ley de la termodinámica de los agujeros negros y por tanto dar paso a un estudio más profundo de su termodinámica, sin embargo aplicar todas estas ideas están lejos del alcance de esta tesis.

Capítulo 5

Conclusiones

En esta tesis hemos presentado un estudio detallado y exhaustivo sobre una familia de soluciones exactas a las ecuaciones de campo de una teoría de gravedad acoplada con un campo escalar real dinámico sujeto a un potencial.

Con el propósito de obtener un resultado lo más general posible consideramos como soporte un espacio-tiempo $(D+2)$-dimensional y hallamos una familia de soluciones a las ecuaciones de campo a partir de un ansatz inspirado en la métrica que define a las llamadas GVHE. Dicha solución contiene el llamado exponente de Lifshitz z y el exponente de violación de hiperescala θ, mismos que están sujetos, junto con la dimensión D, a la restricción (2.34) para obtener un campo escalar real.

De las condiciones $\theta = D$ y $z = 1$ recuperamos, curiosamente, la métrica de Minkowski expresada en un sistema de coordenadas no convencional y comprobamos que, efectivamente, los invariantes de curvatura R, $\mathcal{K}$, $\mathfrak{R}$ y las componentes del tensor de Riemman se anulan.

Haciendo analogía con la solución de Schwarzschild y Reissner-Nordström, la presencia de la función $f(r) = c_1^{z+D-\theta} + c_2 r^{2(z-1)}$ en las componentes del tensor métrico g_{tt} y g_{rr} fue fundamental en la construcción de las soluciones tipo agujero negro. En particular haciendo $\theta = z + D$ o $z = 1$ se obtiene una forma funcional para $f(r)$ muy conveniente que nos permitió definir un horizonte de eventos y, por tanto, nos dio indicios de la existencia de configuraciones tipo agujero negro.

La presencia del factor conforme $r^{2\theta/D}$ en la métrica (2.29), así como las potencias r^{2z} en g_{rr} y r^{-2} en g_{rr} y las restricciones los parámetros z, θ y D ponen de manifiesto ese caracter *restrictivo* que tiene conseguir soluciones inspiradas en GVHE. Para obtener resultados más profundos y certeros sobre la existencia de soluciones tipo agujero negro contenidos en la familia de soluciones exactas nos ocupamos en estudiar los invariantes de curvatura, y pusimos de manifiesto el gran alcance que tiene estudiar tales cantidades, como reportamos en el capítulo 3.

Entre los aspectos más importantes de nuestra familia de soluciones, destaca el hecho de que podemos construir soluciones puramente GVHE haciendo $z = 1$ y $\theta = D + 1$, cabe mencionar que dichas soluciones requieren la presencia de un campo escalar dinámico sujeto a un potencial, con esta observación hacemos énfasis en la necesidad de acoplar campos de materia a gravedad para construir soluciones GVHE, en realidad estas geometrías no pueden ser soportadas en un espacio-tiempo vacío.

Por otro lado mostramos que fijando los exponentes críticos como $0 < z < 1$ y $\theta = z + D$, podemos obtener agujeros negros con violación de hiperescala para cualquier dimension D con frontera asintótica en $r \to \infty$. Asimismo, identificamos que las soluciones con exponentes críticos $z = 1$ y $\theta \leq 0$ generan configuraciones tipo agujero negro con frontera asintótica en $r \to 0$ para cualquier dimension D, esta familia contiene la solución particular AdS-Schwarzschild.

Un aspecto curioso de nuestra solución, derivado del análisis de los invariantes de curvatura para el caso $z > 1$ para $D = 1$ y $1 < z < 2D/(D-1)$, es que pudimos construir soluciones, tales que en el sector *interior* al horizonte de eventos, esto es $0 < r < r_h$, se preserva la signatura

$(-1, +1, +1, \ldots, -1)$ y en el punto $r = 0$ habita una singularidad física, mientras que en la región *exterior*, la signatura de la métrica toma la forma $(+1, -1, +1, \ldots, +1)$, es decir, que la coordenada t y la coordenada r intercambian sus roles, todo ello a pesar de que el espacio-tiempo es asintóticamente regular en $r \to \infty$.

En el capítulo 4 obtuvimos la temperatura y la entropía de Bekenstein-Hawking. Con respecto a la temperatura es interesante que en ambos casos se preservó la dependencia $T \sim r_h^{-z}$ como se señala en [9].

Para poder realizar un tratamiento completo de la termodinámica de nuestras soluciones es fundamental verificar la primera ley de la termodinámica de los agujeros negros en la forma

$$\mathrm{d}M = T\mathrm{d}\mathcal{S}. \tag{5.1}$$

Desde luego que el tratamiento de la masa es una tarea no trivial, en la literatura podemos encontrar una gran variedad de tratamientos enfocados a soluciones tipo agujero negro cuya métrica es asintóticamente Minkowski pero que pueden dar lugar a inconsistencias cuando se aplican a otro tipo de soluciones como los agujeros negros AdS. Afortunadamente, como se mencionó al final del capítulo previo, existe un método para calcular cargas cuasi-locales conservadas para una extensa variedad de teorías de gravedad, que en particular es útil para conocer la masa de soluciones tipo agujero negro .Este formalismo ha sido empleado de manera satisfactoria para extender la primera ley de la termodinámica de agujeros negros a configuraciones más elaboradas como algunos agujeros negros AdS, Lifshitz o GVHE [38, 39], queda como trabajo a futuro aplicar este formalismo a nuestras soluciones.

Apéndice A

Término de Gibbons-Hawking

En este apéndice analizaremos el término de frontera de Gibbons-Hawking, para tal propósito ahondaremos un poco en el concepto de hipersuperficie, vectores normales e introduciremos el concepto de curvatura extrínseca, luego efectuaremos la variación del término S_{GH} y comprobaremos que al añadir S_{GH} a la acción S_{EH+M} podemos obtener una funcional de acción bien definida para teorías descritas en variedades con frontera, gran parte de éste apéndice fue extraído de [40], consideramos esta última como una buena referencia para el lector interesado en ahondar sobre las matemáticas empleadas en la física de los agujeros negros.

En lo que sigue emplearemos el convenio de signos $(-1, +1, +1, \ldots, +1)$ para la métrica. Al modelar un espacio-tiempo, el tensor métrico $g_{\mu\nu}$ induce un producto interno entre cualesquiera dos vectores V^μ y U^μ dado por

$$V^\mu U_\mu := g_{\mu\nu} V^\mu U^\nu,$$

que en general no es definido positivo, es decir, la cantidad $V^2 := V^\mu V_\mu$ puede ser negativa, idénticamente cero o bien estrictamente positiva. Para hacer una distinción entre estos tipos de vectores seguiremos el siguiente convenio

$$\textit{Si se cumple que } \; V^2 \begin{cases} < 0 \quad , \; V^\mu \quad \textit{es temporal.} \\ \\ = 0 \quad , \; V^\mu \quad \textit{es luxoidal o nulo.} \\ \\ > 0 \quad , \; V^\mu \quad \textit{es espacial.} \end{cases}$$

En un espacio-tiempo D-dimensional una hipersuperficie es una variedad de dimensión $D-1$ encajada en ese mismo espacio-tiempo, que puede ser temporal, nula o espacial.

Una hipersuperficie particular Σ puede ser seleccionada imponiendo una constricción en las coordenadas

$$f(x^\mu) = C, \tag{A.1}$$

o bien a través de un conjunto de ecuaciones paramétricas

$$x^\mu = x^\mu(y^a), \tag{A.2}$$

donde y^a son las llamadas coordenadas intrínsecas a la hipersuperficie y $a = 1, 2, \ldots, D-1$. De ahora en adelante emplearemos los índices latinos a, b, c para etiquetar a las coordenadas de la hipersuperficie, mientras que usaremos indices griegos para referirnos a las coordenadas espacio-temporales $(\mu = 0, 1, 2, \ldots, D-1)$.

Si la hipersuperficie en cuestión Σ es no nula, podemos introducir un vector unitario normal n_μ, definido por

$$n^\mu n_\mu = \varepsilon, \tag{A.3}$$

donde $\varepsilon = 1$ si Σ es temporal (y n_μ es normal espacial) o bien $\varepsilon = -1$ si Σ es espacial (y n_μ es normal temporal).

Por ejemplo tomando en cuenta la hipersuperficie Σ definida por la ecuación (A.1) y calculando la diferencial obtenemos

$$0 = \mathrm{d}f = \partial_\nu f \ \mathrm{d}x^\nu = \nabla f \cdot \mathrm{d}\vec{r},$$

donde $\mathrm{d}\vec{r}$ es un vector infinitesimal tangente a Σ. Esta última ecuación nos dice que $\partial_\nu f$ es un vector normal a la hipersuperficie. Definimos entonces un vector unitario normal a Σ como

$$n_\alpha = \frac{\varepsilon \partial_\alpha f}{\sqrt{|g^{\mu\nu}(\partial_\mu f)(\partial_\nu f)|}},$$

implementamos ε para que n_α apunte en la dirección de incremento de f, es decir $n^\mu \partial_\mu f > 0$.

Partiendo de una parametrización para la hipersuperficie de la forma (A.2), podemos definir un conjunto de $(D-1)$-vectores tangenciales a la hipersuperficie. Dado un índice fijo a definimos las componentes del vector tangente e_a como

$$e^\mu_a := \frac{\partial x^\mu}{\partial y^a},$$

y son tales que para todo vector n_μ normal a la hipersuperficie

$$n_\mu e^\mu_a = 0 \qquad \text{para todo } a = 1, 2, \ldots, D-1.$$

En adición, Σ tiene una métrica inducida por las coordenadas paramétricas y^a dada por

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu = g_{\mu\nu}\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial y^a}\mathrm{d}y^a\right)\left(\frac{\partial x^\nu}{\partial y^b}\mathrm{d}y^b\right) = g_{\mu\nu}e^\mu_a e^\nu_b \mathrm{d}y^a \mathrm{d}y^b = h_{ab}\mathrm{d}y^a \mathrm{d}y^b,$$

cuyas componentes se definen por $h_{ab} := e^\mu_a e^\nu_b g_{\mu\nu}$.

Introducimos la *métrica transversal* definida por

$$l_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \varepsilon n_\mu n_\nu, \tag{A.4}$$

esta métrica se encarga de aislar la parte de la métrica $g_{\mu\nu}$ que es trasversal al vector n_μ, es decir, el tensor $l^\mu{}_\nu = \delta^\mu_\nu - \varepsilon n^\mu n_\nu$ nos da la proyección transversal de un vector u^ν al vector normal n^α. Por ejemplo, si $u^\mu = \lambda n^\mu$, entonces $l^\mu{}_\nu u^\nu = 0$, o bien si $u^\mu n_\mu = 0$, entonces $l^\mu{}_\nu u^\nu = u^\mu$. Asimismo usando (A.4),

$$h_{ab} = g_{\mu\nu}e^\mu_a e^\nu_b = (l_{\mu\nu} + \varepsilon n_\mu n_\nu)e^\mu_a e^\nu_b = l_{\mu\nu}e^\mu_a e^\nu_b.$$

Definimos la inversa de h_{ab} como h^{ab} de manera que

$$l^{\mu\nu} = e^\mu_a e^\nu_b h^{ab}, \tag{A.5}$$

donde $l^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - \varepsilon n^\mu n^\nu$.

Con estas herramientas a nuestra disposición definimos el *término de Gibbons-Hawking* como

$$S_{GH} := -\frac{1}{8\pi G}\int_{\partial\mathcal{M}} \mathrm{d}^{D-1}y \ \varepsilon\sqrt{h}K, \tag{A.6}$$

donde $\varepsilon = \pm 1$ dependiendo si $\partial\mathcal{M}$ es espacial o temporal siguiendo la definición (A.3) y h es el determinante de la métrica inducida h_{ab} por las coordenadas y^a de la frontera.

El factor K de la definición anterior es la traza de la *curvatura extrínseca* cuyas componentes se definen por

$$K_{\mu\nu} = n_{\mu;\nu},$$

donde n_μ es un vector unitario normal a $\partial\mathcal{M}$. Usando la métrica transversal (A.4) podemos reescribir la traza de $K_{\mu\nu}$ como

$$K = n^\mu{}_{;\mu} = g^{\mu\nu} n_{\mu;\nu} = (\varepsilon n^\mu n^\nu + l^{\mu\nu}) n_{\mu;\nu} = \varepsilon n^\mu n^\nu n_{\mu;\nu} + l^{\mu\nu} n_{\mu;\nu},$$

dado que $0 = (\varepsilon)_{;\nu} = (n^\mu n_\mu)_{;\nu} = 2n^\mu n_{\mu;\nu}$, entonces

$$K = l^{\mu\nu} n_{\mu;\nu} = l^{\mu\nu}(\partial_\nu n_\mu - \Gamma^\sigma_{\mu\nu} n_\sigma). \tag{A.7}$$

Sea pues, calculemos la variación de K, tenemos el siguiente resultado

$$\begin{aligned}\delta K &= \delta\left(l^{\alpha\beta}\left(n_{\alpha,\beta} - \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} n_\gamma\right)\right) = -l^{\alpha\beta}\delta\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} n_\gamma = -l^{\alpha\beta} n^\mu g_{\mu\gamma}\delta\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} \\ &= -l^{\alpha\beta} n^\mu g_{\mu\gamma}\frac{1}{2} g^{\gamma\sigma}\left(\delta g_{\sigma\alpha,\beta} + \delta g_{\sigma\beta,\alpha} - \delta g_{\alpha\beta,\sigma}\right) \\ &= -\frac{1}{2} l^{\alpha\beta}\left(\delta g_{\mu\alpha,\beta} + \delta g_{\mu\beta,\alpha} - \delta g_{\alpha\beta,\mu}\right) n^\mu,\end{aligned}$$

puesto que $\delta g_{\mu\nu}$ son nulas en $\partial\mathcal{M}$, sus derivadas tangenciales también deben anularse, esto es

$$0 = \mathrm{d}\left(\delta g_{\mu\nu}\right) = \frac{\partial}{\partial y^c}(\delta g_{\mu\nu})\mathrm{d}y^c \Rightarrow 0 = \frac{\partial}{\partial y^c}(\delta g_{\mu\nu}) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^c}\delta g_{\mu\nu,\alpha} = e^\alpha_c \delta g_{\mu\nu,\alpha}.$$

Realizando un par de contracciones y usando (A.5) obtenemos la siguiente identidad

$$h^{ab} e^\alpha_a e^\beta_b \delta g_{\mu\beta,\alpha} = l^{\alpha\beta}\delta g_{\mu\beta,\alpha} = 0, \tag{A.8}$$

siendo así

$$\delta K = \frac{1}{2} l^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta,\mu} n^\mu$$

Recordando que $\delta g_{\mu\nu}|_{\partial\mathcal{M}} = 0$, entonces la métrica inducida $h_{ab} = l_{\mu\nu} e^\mu_a e^\nu_b$ se mantendrá fija al realizar la variación de S_{GHY}, por lo tanto $\delta\sqrt{h} = 0$, de esta manera la variación del término de Gibbons-Hawking está dada por

$$\begin{aligned}\delta S_{GH} &= \delta\left(-\frac{1}{8\pi G}\int_{\partial\mathcal{M}} \mathrm{d}^{D-1}y\ \varepsilon\sqrt{h}K\right) = -\frac{1}{8\pi G}\int_{\partial\mathcal{M}} \mathrm{d}^{D-1}y\ \varepsilon\sqrt{h}\ \delta K \\ &= -\frac{1}{16\pi G}\int_{\partial\mathcal{M}} \mathrm{d}^{D-1}y\ \varepsilon\sqrt{h}\ l^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta,\mu} n^\mu.\end{aligned} \tag{A.9}$$

En el capítulo 1 mostramos que la variación de la acción S_{EH+M} está dada por

$$\delta S_{EH+M} = -\frac{1}{16\pi G}\int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}^D x\left[\sqrt{-g}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - T_{\mu\nu}\right)\delta g^{\mu\nu} + \partial_\alpha\left(\sqrt{-g}\omega^\alpha\right)\right]. \tag{A.10}$$

donde $\omega^\alpha = g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu} - g^{\alpha\nu}\delta\Gamma^\sigma_{\sigma\nu}$. Al tratar con variedades $\mathcal{M}$ con frontera $\partial\mathcal{M}$ el último sumado de la expresión anterior no necesariamente se anula, es decir, puede ocurrir que encontremos una solución a las ecuaciones de Einstein ($g_{\mu\nu}$) tal que

$$\int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}^D x\ \partial_\alpha\left(\sqrt{-g}\omega^\alpha\right)\Big|_{g_{\mu\nu}} \neq 0,$$

es decir, $(g_{\mu\nu})$ no hace estacionaria a la funcional de acción S_{EH+M} a pesar de cumplir con las ecuaciones de Einstein, y por ello decimos que la acción no está bien definida. Para obtener teorías de gravedad descritas en variedades con frontera $\mathcal{M}$ cuya acción sí esté bien definida podemos agregar el término de Gibbons-Hawking, como mostraremos a continuación.

En primer lugar usemos el teorema de Stokes para escribir el último sumando de la ecuación (A.10) como

$$\int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}^D x\ \partial_\mu \left(\sqrt{-g}\omega^\mu\right) = \int_{\partial M} \omega^\mu \mathrm{d}\Sigma_\mu = \int_{\partial\mathcal{M}} \mathrm{d}^{D-1}y\ \varepsilon\sqrt{h}\omega^\mu n_\mu,$$

donde el vector n^μ es un vector unitario normal a $\partial\mathcal{M}$ y y^a son las coordenadas de la frontera, mientras que $\mathrm{d}\Sigma_\mu := \mathrm{d}^{D-1}y\ \varepsilon\sqrt{h}n_\mu$. Tomando en cuenta que $\delta g_{\mu\nu}|_{\partial\mathcal{M}} = 0 = \delta g^{\mu\nu}|_{\partial\mathcal{M}}$, entonces

$$\delta\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\left(\delta g_{\nu\alpha,\beta} + \delta g_{\nu\beta,\alpha} - \delta g_{\alpha\beta,\nu}\right),$$

en la última ecuación empleamos la notación $\partial_\mu f \equiv f_{,\mu}$, más aún

$$g^{\alpha\mu}\delta\Gamma^\beta_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}\left(\delta g_{\nu\alpha,\beta} + \delta g_{\nu\beta,\alpha} - \delta g_{\alpha\beta,\nu}\right) = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\left(\delta g_{\nu\alpha,\beta} + \delta g_{\alpha\beta,\nu} - \delta g_{\nu\beta,\alpha}\right),$$

con ayuda de este último par de resultados podemos escribir

$$\omega^\mu = g^{\alpha\beta}\delta\Gamma^\mu_{\alpha\beta} - g^{\mu\alpha}\delta\Gamma^\beta_{\beta\alpha} = g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\left(\delta g_{\nu\beta,\alpha} - \delta g_{\alpha\beta,\nu}\right).$$

Usamos ahora la métrica transversal para evaluar

$$\begin{aligned}\omega^\mu n_\mu &= n^\mu g^{\alpha\beta}\left(\delta g_{\mu\beta,\alpha} - \delta g_{\alpha\beta,\mu}\right) = n^\mu\left(\varepsilon n^\alpha n^\beta + l^{\alpha\beta}\right)\left(\delta g_{\mu\beta,\alpha} - \delta g_{\alpha\beta,\mu}\right)\\ &= n^\mu l^{\alpha\beta}\left(\delta g_{\mu\beta,\alpha} - \delta g_{\alpha\beta,\mu}\right),\end{aligned}$$

en el paso de la tercera a la cuarta igualdad usamos la antisimetría en los índices α y μ del factor $(\delta g_{\mu\beta,\alpha} - \delta g_{\alpha\beta,\mu})$, de manera que $n^\alpha n^\beta\left(\delta g_{\mu\beta,\alpha} - \delta g_{\alpha\beta,\mu}\right) = 0$. Usando el resultado (A.8) podemos concluir que

$$\omega^\mu n_\mu = -l^{\alpha\beta}\delta g_{\mu\beta,\alpha}n^\mu,$$

por tanto

$$-\frac{1}{16\pi G}\int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}^D x\ \partial_\mu\left(\sqrt{-g}\omega^\mu\right) = \frac{1}{16\pi G}\int_{\partial\mathcal{M}} \mathrm{d}^{D-1}y\ \varepsilon\sqrt{h}\ l^{\alpha\beta}\delta g_{\mu\beta,\alpha}n^\mu, \tag{A.11}$$

reuniendo los resultados (A.9), (A.10) y (A.11) obtenemos

$$\delta S_{EH+M} + \delta S_{GH} = -\frac{1}{16\pi G}\int \mathrm{d}^D x\ \sqrt{-g}\left(G_{\mu\nu} - T_{\mu\nu}\right)\delta g^{\mu\nu}.$$

En conclusión, para variedades $\mathcal{M}$ con frontera $\partial\mathcal{M}$, una acción bien definida está dada por

$$S_{EH} + S_{GH} = -\frac{1}{16\pi G}\int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}^D x\sqrt{-g}(R - \mathcal{L}_M) - \frac{1}{8\pi G}\int_{\partial\mathcal{M}} \mathrm{d}^{D-1}y\ \varepsilon\sqrt{h}K.$$

Bibliografía

[1] R. M. Wald, *General Relativity*, The University of Chicago Press, 1984.

[2] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, John Wiley and Sons, 1972.

[3] S. Carroll, *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*, Addison-Wesley, 2003.

[4] D. W. Pang, *A Note on Black Holes in Asymptotically Lifshitz Spacetime*, Commun. Theor. Phys. Vol. 62, 2014. [ePrint: arXiv: 0905.2678].

[5] J. F. Pedraza, W. Sybesma and M. R. Visser, *Hyperscaling Violating Black Holes with spherical and hyperbolic horizons*, Class. and Quant. Grav., Vol. 36, No. 054002, pp. 42, 2019.

[6] J. D. Bekenstein, *Black Holes and Entropy*, Phys. Rev. D, Vol. 7, No. 2333, 1973. .

[7] J. M. Bardeen, B. Carter and S. Hawking, *The Four Laws of Black Hole Mechanics*, Commun. Math. Phys. Vol. 31, pp. 161-170, 1973.

[8] J. Maldacena, *The Large-N Limit of Superconformal Field Theories and Supergravity*, Int, Journ. of Theor. Phys. Vol. 38, pp. 1113-1133, 1998.

[9] S. A. Hartnoll, A. Lucas and S. Sachdev, *Holographic Quantum Matter*, 2016. [ePrint: arXiv: 1612.07324].

[10] M. Taylor, *Lifshitz Holography*, Class. and Quant. Grav., Vol. 33, No. 033001, pp. 51, 2016.

[11] M. E. Fisher, *The renormalization group in the theory of critical behavior*, Rev. Mod. Phys., Vol. 46, pp. 597-616, 1974.

[12] B. Goutéraux and E. Kiritsis, *Generalized holographic quantum criticality at finite density*, J. High Energ. Phys., No. 36, 2011.

[13] H. Goldstein, C. P. Poole and J. Safko, *Classical Mechanics*, Pearson, 2011.

[14] G.F. Torres del Castillo, *An Introduction to Hamiltonian Mechanics*, Birkhäuser, 2018.

[15] M. Burgess, *Classical Covariant Fields*, Cambridge University Press, 2002.

[16] G.F. Torres del Castillo, *Differentiable Manifolds: A Theoretical Physics Approach*, Birkhäuser, 2012.

[17] P. Renteln, *Manifolds, Tensors and Forms: An Introduction to Mathematicians and Physicists*, Cambridge University Press, 2014.

[18] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*, Butterworth-Heinemann 1987.

[19] T. P. Sotiriou, *Gravity and Scalar Fields*, Modifications of Einstein's Theory of Gravity at Large Distances. Lecture Notes in Physics, Vol. 892, Springer, 2015.

[20] Y. Fujii and K. Maeda, *The Scalar-Tensor Theories of Gravitation*, Cambridge Monograph on Mathematical Physics, 2004.

[21] D. Lovelock, *The Einstein Tensor and its Generalizations*, Journ. of Math. Phys., Vol. 12, No. 3, 1971.

[22] M. P. do Carmo, *Differential forms and Applications*, Springer-Verlag, 1994.

[23] J. Oprea, *Differential Geometry and its Applications*, Prentice Hall, 1997.

[24] C. Cherubini, et al., *Second order scalar invariants of the Riemann tensor: applications to black hole spacetimes*, Int. Journ. of Modern Phys., Vol. 11, No. 6, pp. 827-841, 2002.

[25] E. Ayón-Beato and A. García, *Regular black hole in general relativity coupled to nonlinear electrodynamics*, Phys. Rev. Lett., Vol. 80, pp. 5056-5059, 1998.

[26] M. E. Rodrigues, *Regular black holes in f(R) gravity coupled to nonlinear electrodynamics*, Phys. Rev. D., Vol. 94, No. 024062, 2016.

[27] H. Stephani, et al., *Exact Solutions of Einstein's Field Equations*, Cambridge University Press, 2003.

[28] T. Adamo, E. T. Newman, *The Kerr-Newman metric: A review*, 2016. [ePrint: arXiv: 1410.6626v2].

[29] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-Time*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press, 1973.

[30] O. Ruiz, U. Molina and P. Viloria, *Thermodynamic analysis of Kerr-Newman black holes*, J. Phys.: IOP Conf. Ser. 1219, 012016, 2019.

[31] S. Hawking, *Black holes in General Relativity*, Commun. Math. Phys. Vol. 25, pp. 152-166, 1972.

[32] J. Bardeen, *Kerr Metric Black Holes*, Nature 226, pp. 64-65, 1970.

[33] S.W. Hawking, *Particle creation by black holes*, Commun. Math. Phys. Vol. 43, pp. 199–220, 1975.

[34] G. C. Wick, *Properties of Bethe-Salpeter Wave Functions*, Phys. Rev. 96, 1124, 1954.

[35] K. Osterwalder and R. Schrader, *Axioms for Euclidean Green's functions*, Comm. Math. Phys. Vol. 31, pp. 83-112, 1973.

[36] C. Rovelli and F. Vidotto, *Covariant Loop Quantum Gravity*, Cambridge University Press, 2015.

[37] W. Kim, S. Kulkarni and S.H. Yi, *Quasilocal conserved charges in a covariant theory of gravity*, Phys. Rev. Lett. 111, 08110, 2013.

[38] W. Kim, S. Kulkarni and S.H. Yi, *The first law of thermodynamics in Lifshitz black holes revisited*, J. High Energ. Phys., 2, 2014.

[39] E. Ayón-Beato, et al., *Microscopic entropy of higher-dimensional nonminimally dressed Lifshitz black holes*, Phys. Rev. D, 100, 044024, 2019.

[40] E. Poisson, *A Relativist's Toolkit: The Mathematics of Black-Hole Mechanics*, Cambridge University Press, 2004.