



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

INSTITUTO DE FÍSICA "LUIS RIVERA TERRAZAS"

"SUPERCONDUCTIVIDAD RE-ENTRANTE"

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

**MAESTRO EN CIENCIAS
(FÍSICA)**

PRESENTA

OSCAR ORDOÑEZ ZAMORA

DIRECTORES DE TESIS

DR. VALENTÍN GARCÍA VÁZQUEZ

No. de CVU: 999197

NOVIEMBRE DE 2022

©2022- Ordoñez Zamora Oscar
Derechos Reservados

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer a CONACYT por la beca otorgada en el periodo agosto 2020 – julio 2022 para poder realizar los estudios de maestría. CVU/Becario: 999197/999197.

Agradezco a todo el Instituto de Física IFUAP “Ing. Luis Rivera Terrazas” por tanta diversión que me otorgó. El nivel educativo que me fue dado fue increíble. A todos mis profesores muchas gracias por enseñarme a investigar y a formarme como científico. Al igual a mi Director de Tesis, el Doctor Valentín García Vázquez, por enseñarme a escribir y a redactar muy bien; nos divertimos mucho. Gracias por su valiosa ayuda en este camino de crear una tesis.

Agradezco a todos mis revisores de Tesis, al Dr. Antonio Méndez Blas, al Dr. Nykolay Makarov, y al Dr. Alfredo Díaz de Anda, por sus críticas, observaciones y buena voluntad que hicieron posible que este trabajo de tesis se concretara.

Dedicado a mi Padre que fue la persona que me enseñó a siempre tener ese amor, curiosidad, y devoción hacia la naturaleza. Estas enseñanzas han dirigido toda mi vida...te Amo mucho Pá. Te extraño mucho. Haré de este mundo un mundo mejor.

Dedicado a mi Madre que siempre me ha apoyado, que siempre creyó en mí. Me ha enseñado a tener una templanza en la vida. Gracias por siempre apoyarme, gracias por siempre darme de comer, jeje. Ya ves mamá logre un paso más para hacerme un científico, gracias por ver mi camino y ayudarme a construirlo. Te Amo mamá.

Dedicado a mis padres, que por ellos el mundo tiene una persona con un buen juicio y un nuevo científico más. El mundo debe de agradecer a mis padres lo poco o mucho que contribuya a la vida. Yo existo gracias a ellos, sus ideas, su amor y su buena voluntad me han moldeado. Los Amo.

Dedicado a mis hermanos que siempre me apoyaron. A mi hermana Maura que me daba el visto bueno de mi tesis, jeje, a Abril y a Melisa, que son unas personas increíbles. Gracias por siempre acompañarme, siempre tuviste mucha fe en mí. A mi hermana Yaqueline que siempre ha tenido también mucha fe en mí, las partidas del PUBG me encantan, una próxima gran científica. A mi hermano Carlos que siempre nos divertíamos mucho. Tú puedes Checo, solo te falta tener más confianza en ti mismo. Los Amo a todos.

Dedicado a mi novia Viri, la BB Güera, que su Amor, admiración y apoyo que me ha dado desde el momento que nos conocimos siempre me ha llenado el corazón de fortaleza, de confianza y de creer en mí mismo. Gracias BB por estar siempre a mi lado, te Amo mucho BB.

Dedicado a todas las personas que Amo ❤️.

Superconductividad Re-Entrante

RESUMEN

En esta tesis, se estudia el fenómeno de superconductividad re-entrante en materiales granulares. Este efecto se manifiesta como un pico resistivo en el estado superconductor de un perfil de resistividad en función de la temperatura. El comportamiento de pico resistivo tiene su equivalente en un perfil de densidad de corriente crítica superconductora en función de la temperatura, el cual se presenta como una interrupción abrupta en el perfil. En este trabajo, se utiliza un material granular hipotético, el cual se modela como un conjunto de granos metálicos superconductores contenidos en una matriz dieléctrica finita. Se analizan las energías involucradas en dichos materiales granulares cuando éstos presentan el fenómeno de superconductividad. Estas energías son la Energía de Josephson y la Energía de Bloqueo de Coulomb. Se propone que el pico resistivo en el fenómeno de superconductividad re-entrante se origina por la competencia de estas energías en un intervalo reducido de temperaturas dentro del estado superconductor. Mediante simulaciones computacionales, se logra reproducir el fenómeno re-entrante que ocurre en un perfil de densidad de corriente crítica superconductora en función de la temperatura.

Re-Entrant Superconductivity

ABSTRACT

In this thesis, the phenomenon of re-entrant superconductivity in granular materials is studied. This effect manifests itself as a resistive peak in the superconducting state of a resistivity profile as a function of temperature. The resistive peak behavior has its equivalent in a superconducting critical-current density profile as a function of temperature, which presents itself as an abrupt interruption in the profile. In this work, a hypothetical granular material is used, which is modeled as an-array of superconducting metallic grains contained in a finite dielectric matrix. The energies involved in such a granular material when it presents the superconductivity phenomenon are analyzed. These energies are the Josephson Energy and the Coulomb Blocking Energy. It is proposed that the resistive peak in the re-entrant superconductivity phenomenon originates from the competition of these energies in a reduced temperature range within the superconducting state. By means of computational simulations, it is possible to reproduce the re-entrant phenomenon that occurs in a superconducting critical-current density profile as a function of temperature.

Contenido

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN	1
CAPÍTULO 2. SUPERCONDUCTIVIDAD EN MATERIALES GRANULARES	5
2.1 Materiales Granulares	5
2.2 Modelo a Utilizar	7
2.3 Energía de Josephson <i>EJ</i> y Energía de Coulomb <i>EC</i>	8
2.3.1 Energía de Bloqueo de Coulomb	8
2.3.2 Energía de Josephson	9
2.4 Competencia Entre Energías <i>EJ</i> y <i>EC</i>	11
2.5 Densidad de Corriente Crítica Dependiente de la Temperatura	13
CAPÍTULO 3. SUPERCONDUCTIVIDAD REENTRANTE	15
3.1 Perfil de Resistividad en Función de la Temperatura	15
3.2 Efecto Cuasi Re-Entrante	16
3.3 Efecto Re-Entrante en un Perfil de Resistividad en Función de la Temperatura	17
3.4 Efecto Re-Entrante en un Perfil de Densidad de Corriente en Función de la Temperatura	19
CAPÍTULO 4. GRAFOS	21
4.1 Definición Básica de Grafo	21
4.2 Aristas Dirigidas y No Dirigidas	22
4.3 Nodo Fuente y Nodo Sumidero	23
4.4 Algoritmos de Búsqueda Heurísticos	24
CAPÍTULO 5. MODELADO DE GRANOS	27
5.1 Conjuntos de Granos	27
5.2 Conjunto Regular de Granos (Radios Constantes)	27
5.2.1 Conjunto de 25 Granos	28
5.2.2 Conjunto de 400 Granos	29
5.2.3 Conjunto de 10,000 Granos	30
5.3 Conjunto Aleatorio de Granos (Radios Constantes)	31
5.3.1 Condición de Granos que No Se Traspasen	32
5.3.2 Conjunto de 25 Granos	36
5.3.3 Conjunto de 87 Granos	38
5.3.4 Conjunto de 347 Granos	39
5.3.5 Discusión. Porcentaje de Ocupación	39
5.4 Radios Generados con una Distribución Gaussiana	40
5.4.1 Comparación de Porcentaje de Ocupación	41

5.5 Conjunto Aleatorio de Granos (Radios con Distribución Gaussiana)	43
5.5.1 Conjunto Aleatorio de 25 Granos	44
5.5.2 Conjunto Aleatorio de 100 granos	46
5.5.3 Conjunto Aleatorio de 400 granos	48
5.6 Comparación Entre Energías (E_J y E_C)	50
5.6.1 Comparaciones Totales	51
5.6.2 <i>Nodo s</i> y <i>Nodo t</i> en un Conjunto Aleatorio de Granos	53
5.7 Redes de Transporte	54
CAPÍTULO 6. RESULTADOS	57
6.1 Red de Transporte para un Conjunto de 5 Granos	57
6.1.1 Distancia de Tunelamiento de 50 Å	58
6.1.2 Distancia de Tunelamiento de 10 Å	60
6.1.3 Discusión	62
6.2 Red de Transporte para un Conjunto de 100 Granos	63
6.2.1 Distancia de Tunelamiento de 10 Å	64
6.2.2 Distancia de Tunelamiento de 50 Å	66
6.2.3 Comparación de Resultados	68
6.3 Superconductividad	69
6.3.1 Perfil de Densidad de Corriente Crítica	69
6.3.2 Conclusión	73
6.4 Efecto Re-Entrante	74
6.4.1 Variación de la Distancia de Tunelamiento	74
6.4.2 Variación del Número de Granos	78
6.5 Interpretación de Resultados	80
CAPÍTULO 7. CONCLUSIONES	83
APÉNDICE A. GLOSARIO	85
A1 Superconductor Tipo I	85
A1.1 Campo Crítico H_c	85
A2 Superconductor Tipo II	86
A2.1 Campo Crítico H_{c1} y Campo Crítico H_{c2}	87
A3 Corriente Crítica y Densidad de Corriente Crítica.	88
A4 Funciones que Caracterizan un Material en Función de la Temperatura	88
APÉNDICE B. DISTRIBUCIÓN GAUSSIANA	95
APÉNDICE C. ALGORITMOS DE BÚSQUEDA	97
C1 <i>DFS</i> . Depth First Search (Búsqueda en profundidad)	97
C2 <i>BFS</i> . Breadth First Search	100
C3 Diferencias de Implementación	102
APÉNDICE D. OPTIMIZACIÓN DE FLUJO MÁXIMO	105
D1 Problema de Ford-Fulkerson	105

D2 Algoritmo Aleatorio Codicioso	106
D3 Algoritmo de Ford-Fulkerson.....	110
D4 Método de Caminos de Aumento.....	112
APÉNDICE E. CÓDIGOS	121
E1 Conjunto Regular de Granos (Radios Constantes)	121
E2 Conjunto Aleatorio de Granos (Radios Constantes)	124
E2.1 Distribución Aleatoria	127
E3 Conjunto Aleatorio de Granos (Radios con Distribución Gaussiana).....	134
E4 Cálculo de Energías EC y EJ , Red de Transporte y Densidad de Corriente Crítica para una Temperatura Fija.....	139
E5 Superconductividad en un perfil de Densidad de Corriente Crítica en Función de la Temperatura.....	145
E6 Efecto Re-Entrante en un Perfil de Densidad de Corriente Crítica en Función de la Temperatura.....	151
REFERENCIAS	157

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN

En la actualidad, existe un gran interés en el estudio de las propiedades superconductoras en sistemas granulares. Para abordar esta problemática emplearemos modelos físicos, matemáticos y computacionales los cuales nos brindan una mayor velocidad y libertad al momento de caracterizar estos materiales. Así, en esta tesis se presenta un modelo que es capaz de realizar simulaciones de materiales granulares superconductores. Para posteriormente, reproducir el comportamiento superconductor y el efecto re-entrante en un perfil de densidad de corriente en función de la temperatura, siendo este el objetivo principal buscado en esta tesis.

Primeramente, en este modelo se simulará la corriente eléctrica crítica que puede transportar un material superconductor granular propuesto. El transporte de corriente eléctrica crítica a través de un material granular se puede simular usando el concepto de percolación. Al aplicar algunos conceptos de la teoría de grafos, se simularán los caminos de percolación que forman la red de transporte para la corriente eléctrica crítica.

El material granular superconductor hipotético está contenido en una película delgada bidimensional, llamada matriz dieléctrica, en donde, el material muestra una mezcla aleatoria de granos metálicos. Tanto el efecto de localización (fenómeno aislante) y el efecto de la superconductividad, están bien definidos para estos materiales. Por lo tanto, para estos materiales se pueden cuantificar la competencia directa entre la localización y la superconductividad.

En los metales granulares están formados por granos separados por intercalaciones dieléctricas [1]. Las inhomogeneidades presentadas en estos materiales están relacionadas con la variación en el tamaño de granos y el aislante que los contiene. La conductividad y la superconductividad en los metales granulares está determinada por el tunelamiento mecánico-cuántico de los electrones entre los granos y depende de una serie de energías características [2].

Durante la última década en la literatura científica se han presentado varios modelos sobre las propiedades superconductoras en los materiales granulares [3-9]. En algunos modelos se consideran muestras granulares en las que los granos están separados por enlaces débiles, es decir, finos puentes metálicos y/o por finas capas aislantes [10]. En estos modelos, los granos son acoplados por las barreras de tunelamiento de Josephson. Estos enfoques teóricos no tienen en cuenta la energía de carga asociada a los pequeños granos metálicos.

La energía de carga es debida a que cada grano de metal tiene una pequeña capacitancia, de modo que se requiere una energía finita para transferir un electrón entre los granos. La presencia de esta energía de carga tiene un profundo efecto en el acoplamiento superconductor entre granos [11]. El acoplamiento entre los granos superconductores se establece a través de la interacción Josephson. Así, los granos

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN

están conectados cuando la energía E_j supera las energías térmicas $k_B T$ y a la energía de carga eléctrica E_C . La conexión entre granos significa el transporte de electrones, el fenómeno de tunelamiento. En la literatura científica se ha demostrado que una desviación en la coherencia en la fase global de los electrones para sistemas heterogéneos, compuestos por regiones superconductoras débilmente acopladas, da lugar a la supresión de la superconductividad efectiva [11].

La competencia entre la superconductividad y la localización en los materiales granulares puede conducir, bajo ciertas condiciones, a un retorno desde el estado superconductor hacia al estado normal a medida que se llega a una cierta temperatura T_b , siendo $T_b < T_C$. A este fenómeno se le conoce como el **efecto re-entrante**. Los fenómenos re-entrantes aparecen en la zona superconductora en un perfil de resistencia en función de la temperatura, para temperaturas $T < T_C$. Donde T_C es la temperatura crítica cuando un material granular presenta el fenómeno de superconductividad. En algunos materiales granulares este efecto no aparece directamente en la zona superconductora, siendo un efecto re-entrante incompleto, a este fenómeno se le llama el efecto cuasi re-entrante.

El efecto re-entrante se ha examinado de forma teórica para algunos materiales granulares [12-14] y para películas delgadas [15-18]. Otros estudios sobre los orígenes de los efectos re-entrantes para metales granulares se han estudiado teóricamente, con especial énfasis a barreras de potencial [19-22].

En esta tesis se desarrolla un algoritmo que reproduzca en un intervalo de temperatura el efecto re-entrante para un material granular hipotético. Este algoritmo mide en un intervalo de temperaturas la presencia o no de uno o varios caminos superconductores entre dos electrodos especiales. En el capítulo 2 se explicará el modelo físico de la superconductividad para los materiales granulares. La superconductividad en los materiales granulares se aborda desde la competencia directa entre dos energías. La energía de Josephson y la energía de bloqueo de Coulomb. Se expondrá el modelo físico-matemático el cual rige el estado superconductor y el estado aislante para un material granular. En el capítulo 3 se introducen las anomalías que presentan algunos materiales granulares en la zona superconductora debido a variaciones en los campos magnéticos (intensidad) y al porcentaje de la materia que los conforman [23]. Primero, se introduce el efecto cuasi re-entrante, para posteriormente para llegar al efecto re-entrante en forma de pico resistivo (en un perfil de resistividad vs. temperatura). Después, se muestra una forma equivalente del efecto re-entrante en un perfil de densidad de corriente crítica en función de la temperatura. Esta última anomalía en la zona superconductora es la que se reproducirá en esta tesis por el algoritmo desarrollado para un material granular hipotético.

En el capítulo 4 se introducen las herramientas matemáticas para el desarrollo del modelo. Se presentan los conceptos fundamentales de un grafo, los algoritmos de búsqueda y una introducción al problema de Ford-Fulkerson. Estos conceptos son la base fundamental para la simulación de la red de transporte para la corriente crítica en

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN

un material granular. Los algoritmos se desarrollaron en la paquetería electrónica de MathWorks Matlab versión R2022a.

Para iniciar con la construcción del modelo, primero se crea un material granular superconductor hipotético que representa a uno real. En el capítulo 5 se presenta el desarrollo para generar conjuntos de granos. En este capítulo se presenta la evolución sistemática para crear conjuntos que se ajusten más a una distribución de granos como en un material granular real.

Después de desarrollar la herramienta que reproduce un material granular, ahora el siguiente paso es simular la red de transporte para la corriente eléctrica crítica. Se aplican todos los conceptos de los capítulos anteriores. Inicialmente, se crea una red de transporte para una temperatura fija para algunos conjuntos. Primero se reproduce la superconductividad en un perfil de densidad de corriente eléctrica crítica en función de la temperatura. Posteriormente, se reproducirá el efecto re-entrante. Así, en el capítulo 6 se presentan los resultados para la superconductividad y efecto re-entrante en un rango de temperaturas de $0.1 K$ a $3.49 K$. Se propuso una temperatura crítica $T_c = 3.49 K$ para todas las simulaciones. Para finalizar este capítulo se expone un análisis matemático, cuantitativo, y en conjunto con la simulación computacional para explicar el efecto re-entrante en materiales granulares.

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN

CAPÍTULO 2. SUPERCONDUCTIVIDAD EN MATERIALES GRANULARES

En este capítulo, se introducen los conceptos de superconductividad aplicados a materiales granulares. Se presenta el modelo que se usará para aproximar un material granular. Para el modelado, se propone una muestra virtual bidimensional formada por un conjunto de granos circulares contenidos en una matriz dieléctrica finita. Se introduce un algoritmo para determinar la presencia o no de un camino superconductor entre los electrodos de una muestra virtual en un rango de temperaturas.

2.1 Materiales Granulares

Los materiales granulares superconductores consisten en granos superconductores dispersos en una matriz dieléctrica. El tamaño de los granos puede variar entre unos pocos y cientos de \AA [24]. En los materiales granulares, la aleatoriedad de la distribución de granos provoca una reducción o una supresión de la superconductividad. Los materiales granulares que se estudiarán en esta tesis son sistemas heterogéneos. Algunos de estos ejemplos son:

- Películas delgadas formadas por granos aproximadamente iguales. Dichos granos son del tamaño de algunos cientos de \AA y están contenidos en una matriz dieléctrica.
- Películas delgadas discontinuas que contienen granos de diferentes tamaños.
- Películas delgadas en donde se identifican dos tipos de estructuras heterogéneas: mezcla desordenada de metal y dieléctrico.

La conductividad y la superconductividad en los materiales granulares están determinadas por el tunelamiento mecánico-cuántico de los electrones que ocurre entre los granos, y depende de una serie de energías características [12, 25, 26], las cuales son:

- la energía de carga eléctrica E_c ,
- la energía térmica $k_B T$,
- y la energía de Josephson E_J .

Un material granular superconductor suele caracterizarse por dos parámetros [27-29]. El primero, es el tamaño y geometría del grano; y el segundo, la barrera entre los granos. Estos dos parámetros determinan el acoplamiento de Josephson E_J . En nuestro modelo (como veremos más adelante), los granos empiezan a conectarse entre sí a través de la

CAPÍTULO 2. SUPERCONDUCTIVIDAD EN MATERIALES GRANULARES

interacción de la energía de Josephson E_J cuando ésta supera la energía térmica $k_B T$ [30].

Al pasar por debajo de la temperatura crítica superconductor T_C , es posible que ocurra el efecto de un salto de electrones entre pares de granos. Así, lo que en realidad determinan las propiedades de los materiales granulares son la conductividad de tunelamiento entre los granos vecinos y las relaciones entre las energías características del sistema presentadas anteriormente, la energía de Josephson y la energía de Coulomb [31]. En la **Figura 2.1** se presenta un dibujo esquemático que representa a un material granular superconductor como un conjunto regular de granos circulares.

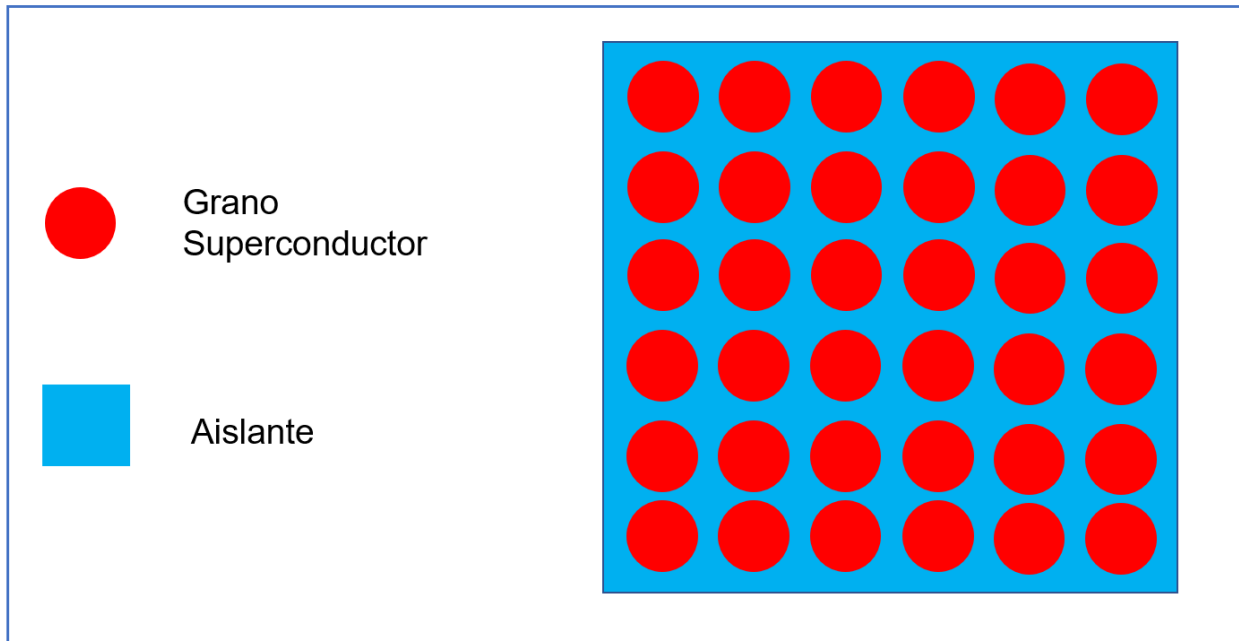


Figura 2.1: Conjunto regular de círculos que representa a un material granular. En color rojo se indican los granos superconductores; en color azul, la matriz dieléctrica.

En un material granular, es posible dividir la energía libre en dos energías [27-29, 32-33]. Una está asociada al grano aislado. La otra está relacionada con las interacciones entre los granos. La primera, es la energía libre de un grano superconductor aislado y ha sido ampliamente estudiada al variar el tamaño de grano en varios materiales granulares. La segunda, es la energía libre de la interacción entre los granos vecinos y está dada por la barrera de tunelamiento entre los granos.

En la matriz dieléctrica, se supone que los granos contenidos tienen una misma interacción entre todos ellos y en todas las partes de la matriz, teniendo una interacción homogénea [34-36]. Aquí, se toma en cuenta el acoplamiento entre los granos. Este acoplamiento es aleatorio ya que las distancias entre granos varían aleatoriamente en una muestra física [7, 28, 29, 37].

En la actualidad, existe un gran interés por el estudio de las propiedades superconductoras al cambiar la aleatoriedad y, en particular, por los efectos asociados a la competencia directa entre la localización y la superconductividad. Esto viene dictado por necesidades prácticas para el desarrollo de materiales. Sus propiedades están casi siempre lejos de ser ideales.

Un sistema granular, en su conjunto, es un superconductor a una temperatura determinada si el sistema permite transportar pares de electrones de un electrodo a otro. [38]. Esto implica la existencia de al menos uno o más caminos de percolación en los granos superconductores que atraviesan todo el material. Cuando los caminos no están truncados, la corriente crítica máxima que atraviesa el sistema consiste en la suma de la corriente crítica permitida que fluye a través de cada camino individual.

Sin embargo, los caminos en general sí están truncados, haciendo que la corriente fluya a través de una red compleja. El problema puede resolverse mediante la determinación de la máxima corriente crítica superconductora a lo largo del material granular. Esta corriente es inyectada por medio de un electrodo de entrada y drenada por otro electrodo de salida. Esto es debido a que se simula la técnica de cuatro puntas usada en la caracterización de propiedades eléctricas para materiales, y, en especial, para superconductores. Ahora, si tenemos en cuenta la dimensión de la matriz dieléctrica, se tiene que calcular la máxima densidad de corriente crítica superconductora. Así podremos reproducir el comportamiento superconductor y el efecto re-entrante en un perfil de densidad de corriente en función de la temperatura.

2.2 Modelo a Utilizar

En el modelo propuesto, los granos metálicos de un material granular se aproximan a círculos con sus respectivos radios. Estos círculos no están superpuestos. Dado dos granos etiquetados como i y j , la distancia entre centro a centro la llamaremos **distancia inter-granular** d_{ij} . La distancia entre las superficies circulares de dos granos i y j en la dirección de centro a centro la llamaremos **distancia inter-superficial** S_{ij} . En la **Figura 2.2** se muestran dos granos i y j con sus respectivos radios R_i y R_j , con su distancia inter-granular d_{ij} , y su distancia inter-superficial S_{ij} . La distancia inter-superficial es calculada como $S_{i,j} = d_{i,j} - (R_i + R_j)$ [24].

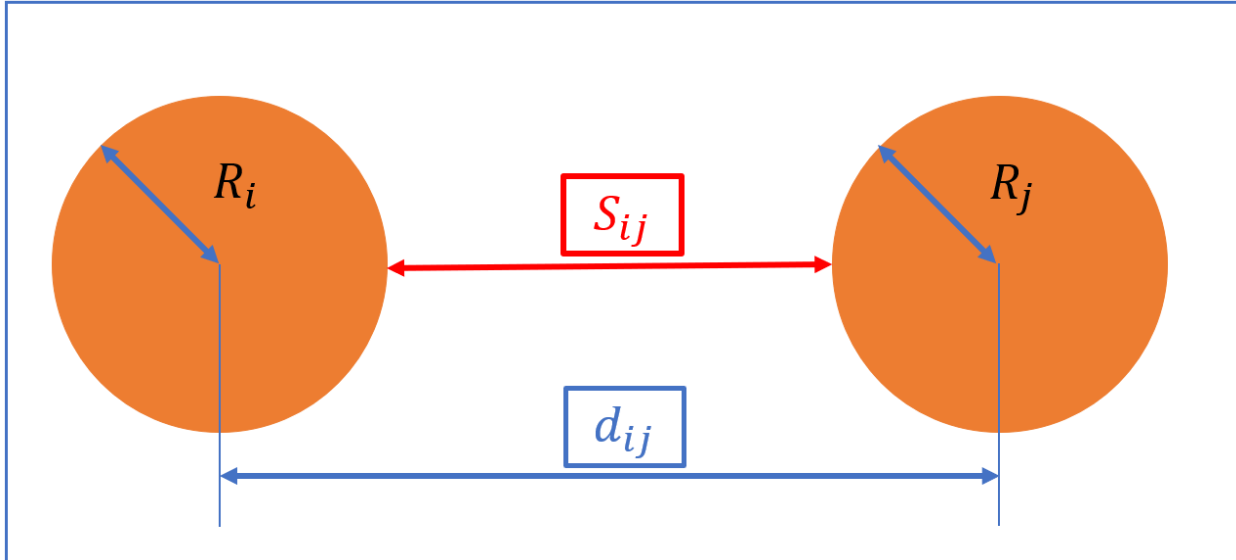


Figura 2.2: Idealización de los granos metálicos como círculos.

En conclusión, se propone una aproximación de los granos superconductores que conforman el material granular como círculos. Esta es la base fundamental para modelar un material hipotético granular superconductor, en donde la distancia inter-granular y la distancia inter-superficial juegan un papel importante.

2.3 Energía de Josephson E_J y Energía de Coulomb E_C

Expondremos ahora las dos energías que producen el fenómeno de superconductividad en materiales granulares. Definiremos cómo se produce la conexión entre granos en un material granular. Esta conexión es de suma importancia ya que nos permitirá establecer en el modelo si el material granular hipotético es superconductor o no. Introduciremos también la Energía de Bloqueo de Coulomb y la Energía de Josephson. Al final, describiremos las consideraciones que se tienen que tomar en cuenta en el modelo para simular la superconductividad.

2.3.1 Energía de Bloqueo de Coulomb

En física mesoscópica, el Bloqueo de Coulomb, llamado así por la fuerza eléctrica de Charles-Augustin de Coulomb, es la disminución de la conductancia eléctrica a pequeñas tensiones de polarización en un pequeño dispositivo electrónico que comprende al menos una unión túnel de baja capacitancia. Así, la conductancia en un dispositivo puede no ser constante a bajas tensiones de polarización, sino que desaparece para polarizaciones por debajo de un determinado umbral, es decir, no fluye corriente [39].

El Bloqueo de Coulomb se debe a una energía característica $E_c^{i,j}$. Tiene una dependencia directa entre las cargas de los granos i, j y es inversamente proporcional a la matriz de capacitancia C_{ij} que describe el acoplamiento electrostático entre los pares de Cooper en dos granos i y j . En la **Ecuación 2.1** se muestra la expresión analítica para el Bloqueo de Coulomb

$$E_c^{i,j} = \frac{1}{2} \frac{Q_i Q_j}{C_{i,j}}, \quad 2.1$$

en donde Q_i y Q_j son el exceso de carga eléctrica debido a los pares de Cooper en los granos i y j , respectivamente. Para el modelo, se fija el exceso de carga a $2e$, siendo dos veces la carga de un electrón para los granos i y j .

En el modelo se determina la capacitancia entre dos granos circulares mediante una aproximación a un capacitor plano. Se considera esta aproximación porque reduce la complejidad en los cálculos. La capacitancia de la carga entre dos granos para una aproximación plana está definida por la **Ecuación 2.2**,

$$C_{i,j} = \frac{\alpha \pi \kappa (R_{min}^{i,j})^2}{S_{i,j}}, \quad 2.2$$

en donde $R_{min}^{i,j}$ es el radio mínimo entre los dos granos i y j , y $S_{i,j}$ es la distancia inter-superficial entre esos dos granos a comparar. Se entiende como dos granos a comparar cualquier par de granos en los cuales se calcule la Energía de Bloqueo de Coulomb. La constante κ es la constante dieléctrica de la matriz dieléctrica. Debido a que el cálculo de la capacitancia se ha aproximado como un capacitor plano, la variable α (factor de redondez) es un factor de corrección que se debe de tener en cuenta [40]. Por último, π es la constante de geometría euclidiana que representa la relación entre el perímetro y el radio en un círculo. La capacitancia es calculada para cada par de granos diferentes sin repeticiones. Los elementos $i = j \pm 1$ describen la capacitancia para los granos vecinos i y j [4].

2.3.2 Energía de Josephson

En Física, el efecto Josephson es un fenómeno que se produce cuando dos superconductores se colocan en proximidad con alguna barrera o restricción entre ellos. Es un ejemplo de fenómeno cuántico macroscópico, en el que los efectos de la mecánica cuántica son observables a escala ordinaria, y no atómica.

El efecto Josephson produce una corriente, conocida como supercorriente, que fluye continuamente sin que se aplique ninguna tensión a través de un dispositivo conocido como unión Josephson. Una unión Josephson consiste en dos o más superconductores acoplados por un enlace débil. El enlace débil es una fina barrera conocida como unión, y puede ser una sección corta de metal no superconductor, un dieléctrico aislante, o una

constricción física que debilitan la superconductividad. En la **Figura 2.3** se muestra un diagrama esquemático de una unión Josephson simple.

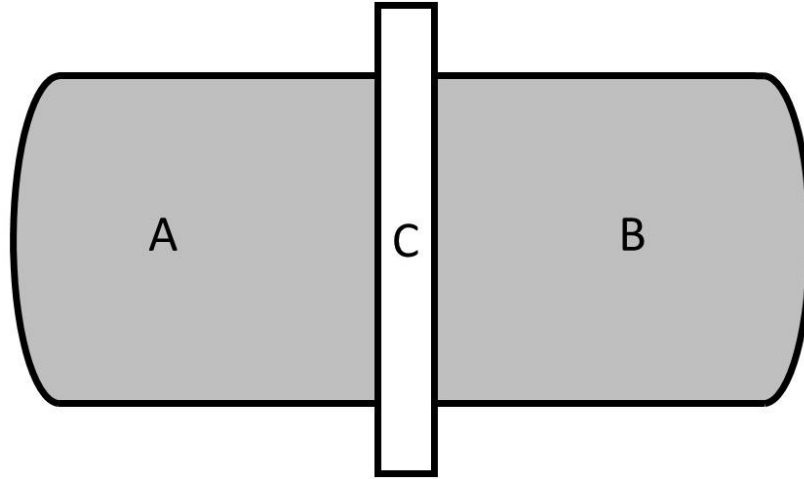


Figura 2.3: Diagrama esquemático de una unión Josephson simple. A y B representan superconductores, y C un material dieléctrico (aislante) o un metal no superconductor.

En los materiales granulares, nuestro tema de interés, los granos están débilmente acoplados por uniones túnel con una energía característica. De la relación de Ambegaokar-Baratoff junto con la teoría BCS (John Bardeen, Leon Cooper y John Robert Schrieffer) proporcionan una forma para el cálculo de la energía de Josephson E_J , siendo una función de la temperatura [41, 42], la cual se muestra en la **Ecuación 2.3**

$$E_j^{i,j}(T) = \frac{\pi \hbar}{4 e^2} \frac{1}{R_n^{i,j}} \Delta(T) \tanh\left(\frac{\Delta(T)}{2k_B T}\right), \quad 2.3$$

en donde $\Delta(T) = \Delta(0) \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^{\frac{1}{2}}$ es el gap superconductor dependiente de la temperatura, \hbar es la constante de Planck recortada, T_c es la temperatura crítica del material, k_B es la constante de Boltzmann, e es la carga del electrón, π es la constante de geometría euclídea anteriormente mencionada, y T es la temperatura de prueba. De la relación BCS, el gap $\Delta(0)$ definido a cero Kelvin viene dada en la **Ecuación 2.4**

$$\Delta(0) = \frac{3.53 k_B T_c}{2}. \quad 2.4$$

La forma para $\Delta(T)$ de la teoría BCS es respaldada por los resultados experimentales obtenidos en materiales granulares [43-45]. Por último, la resistencia de tunelamiento $R_n^{i,j}$ se puede entender como la *oposición* para que exista el fenómeno de tunelamiento entre dos granos i y j . La resistencia de tunelamiento $R_n^{i,j}$ es una función que depende de los radios y las distancias inter-superficiales de los granos. Esta está dada por la **Ecuación 2.5**

$$R_n^{i,j} = A \frac{1}{\alpha \pi (R_{min}^{i,j})^2} \exp\left(\frac{S_{i,j}}{\delta}\right), \quad 2.5$$

en donde A es una constante a proponer, δ es la distancia de la barrera de tunelamiento, $S_{i,j}$ es la distancia inter-superficial, α es el mismo factor de corrección ya mencionado anteriormente, π la constante de geometría euclidiana, y $R_{min}^{i,j}$ el radio mínimo entre dos granos i y j a comparar [24]. Para calcular el valor de la constante A , primero se considera que $\bar{S}_{i,j} = \delta$, en donde $\bar{S}_{i,j}$ es la media de la distancia inter-superficial. Esto significa que suponemos que el valor medio de la distancia inter-superficial es igual a la distancia de tunelamiento para todos los granos i y j , es decir, $S_{i,j} = \delta$. Así, al sustituir $S_{i,j} = \delta$ en la **Ecuación 2.5**, lo cual es una de las contribuciones originales de la presente tesis, tenemos la **Ecuación 2.6**

$$R_n^{i,j} = A \frac{1}{\alpha \pi (R_{min}^{i,j})^2} \exp(1). \quad 2.6$$

Es decir, en todos los granos se llega a producir el tunelamiento de electrones, permitiendo así el transporte de corriente. Despejando la constante A de la **Ecuación 2.6**, obtenemos la **Ecuación 2.7**

$$A = \frac{R_n^{i,j} \alpha \pi (R_{min}^{i,j})^2}{\exp(1)}. \quad 2.7$$

Para la resistencia de tunelamiento $R_n^{i,j}$, utilizaremos el valor de $15.9 \times 10^3 \Omega$ propuesto en la literatura [24]. Por otra parte, siendo una propuesta original de esta tesis, se propone inicialmente un radio medio de 220 \AA para todos los granos (aunque en los siguientes capítulos se considerará una distribución gaussiana de radios). Así, el valor del radio mínimo para todo par de granos es $R_{min}^{i,j} = 220 \text{ \AA}$. La constante α se toma con un valor arbitrario de 0.45. Sustituyendo todos estos valores en la **Ecuación 2.7**, obtenemos finalmente el valor de la constante A como $4.0022 \times 10^{-12} \Omega m^2$.

Y con esto finalizamos la discusión de las diferentes energías que se usarán para el desarrollo del modelo propuesto en esta tesis.

2.4 Competencia Entre Energías E_J y E_C

El comportamiento de un material granular superconductor a bajas temperaturas se rige por la competencia entre las dos energías mencionadas anteriormente, E_C y E_J . Para

CAPÍTULO 2. SUPERCONDUCTIVIDAD EN MATERIALES GRANULARES

granos que no hagan contacto eléctrico entre sí, el material se comportará como aislante en el límite $E_c > E_J$ a bajas temperaturas ($T < E_c/k_B$), ya que la energía de bloqueo de Coulomb fija los pares de Cooper a los granos impidiendo la tunelización. Contrariamente, el material se comportará como superconductor en el límite opuesto $E_J > E_c$, a pesar de que los granos no hagan contacto eléctrico entre sí. El acoplamiento de Josephson entre granos que no hacen contacto eléctrico entre sí permitirá el transporte de los pares de Cooper y el conjunto será superconductor. El análisis teórico de la transición superconductor-dieléctrica se ha estudiado para un sistema periódico en el que los granos metálicos se sitúan en los vértices de una red cristalina [12, 46].

Realizaremos una comparación entre las dos energías mencionadas en cada par de granos a analizar para una temperatura fija: la Energía de Bloqueo de Coulomb y la Energía de Josephson. La tunelización se dará en los granos que no hacen contacto entre sí en donde la energía de Josephson E_J es mayor que la energía de Coulomb E_C . Si esto se cumple, se dice que dos granos están *acoplados por tunelamiento*. Este acoplamiento entre dos granos permitirá el transporte de corriente eléctrica. Por el contrario, si la energía de Josephson es menor que la de Coulomb, entonces se dirá que dos granos no están acoplados. En este caso, no se tendrá transporte de corriente eléctrica, por lo que el sistema se comportará como un dieléctrico.

Una vez calculado todos los parámetros energéticos para un valor fijo de temperatura, se desarrollará un algoritmo (**CAPÍTULO 6**) para buscar caminos superconductores que conecten el electrodo de entrada y el electrodo de salida. Los caminos que se encuentren construirán una *red de transporte* compleja para la corriente eléctrica crítica. Esta construcción de redes es el núcleo principal para el desarrollo de esta tesis.

La corriente crítica I_c que puede pasar por una unión Josephson sin generar una diferencia de potencial (es decir, sin destruir el fenómeno de superconductividad) es una característica física para un material superconductor. Dada una muestra virtual formada por un conjunto de granos, se determina la corriente crítica superconductor $I_c^{i,j}$ para cada par de granos i y j mediante la siguiente ecuación

$$I_c^{i,j} = \frac{\pi \hbar}{2e} \frac{1}{R_n^{i,j}} \Delta(T) \tanh\left(\frac{\Delta(T)}{2k_B T}\right). \quad 2.8$$

La relación entre la energía de tunelamiento de Josephson $E_J^{i,j}$ y la corriente crítica $I_c^{i,j}$ viene dada por la **Ecuación 2.9**,

$$I_c^{i,j} = \frac{2e}{\hbar} E_c^{i,j}. \quad 2.9$$

Finalmente, para un intervalo de temperaturas que va desde una temperatura crítica propuesta para un material granular hipotético $T_c = 3.49K$ hasta un valor mínimo de

0.001 K. El algoritmo para cada temperatura buscará y encontrará todos los caminos que atraviesen la muestra virtual.

2.5 Densidad de Corriente Crítica Dependiente de la Temperatura

Una forma de medir el comportamiento superconductor de un material es con un perfil de la corriente crítica I_c en función de la temperatura. En la [Figura 2.4](#) se muestra el comportamiento superconductor de un material arbitrario.

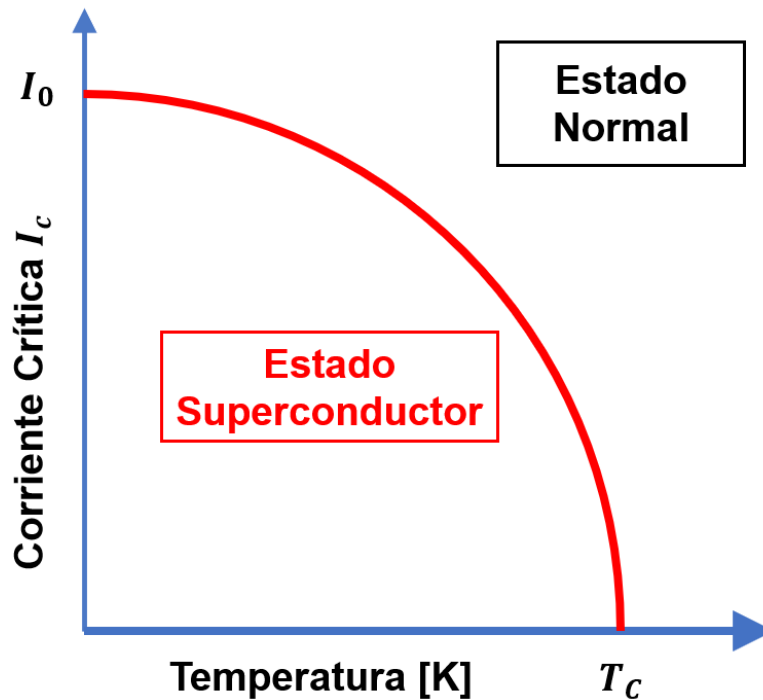


Figura 2.4: Comportamiento superconductor de la corriente crítica I_c en función de la temperatura.

Si hacemos el cociente de la corriente crítica entre el área transversal por donde fluye la corriente, se obtendrá la llamada densidad de corriente crítica. La [Figura 2.5](#) muestra el comportamiento superconductor de la densidad de corriente crítica J_c de un material arbitrario en función de la temperatura para una sección transversal constante. Se aprecia un equivalente con la [Figura 2.4](#).

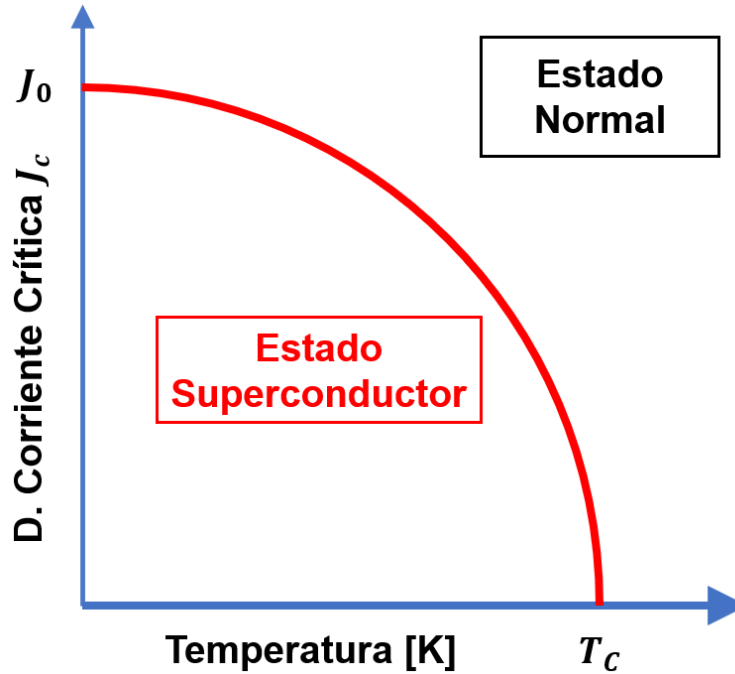


Figura 2.5: Comportamiento superconductor de la densidad de corriente crítica J_c en función de la temperatura.

El comportamiento de la **Figura 2.5** es genérico ya que la curva puede tener un comportamiento más o menos pronunciado dependiendo del material superconductor. En materiales superconductores granulares, se sigue obteniendo el mismo comportamiento. Este es el perfil que reproduciremos en los siguientes capítulos mediante simulaciones en un material granular hipotético.

CAPÍTULO 3. SUPERCONDUCTIVIDAD REENTRANTE

En este capítulo, se describen los perfiles típicos de resistividad que caracterizan a un material superconductor. Se discute las anomalías que llegan a presentarse en forma de pico resistivo en la zona superconductora, conocidas como efectos re-entrantes. Finalmente, se muestra el efecto re-entrante equivalente que aparece en un perfil de densidad de corriente en función de la temperatura. Este es el efecto que se simulará con el modelo propuesto.

3.1 Perfil de Resistividad en Función de la Temperatura

Un perfil de resistividad ρ en función de la temperatura T tiene características específicas que nos dan información del material a estudiar. Al disminuir la temperatura en la mayoría de los materiales, observamos que la resistividad se comporta, en general, de una manera monótona, ya sea creciente o decreciente. Sin embargo, en los materiales superconductores, a una temperatura específica conocida como temperatura crítica T_c , la resistividad cae abruptamente a un valor cero. La [Figura 3.1](#) muestra un ejemplo típico de un perfil de resistividad para un material superconductor arbitrario. A temperaturas menores al valor de transición T_c , la resistividad continúa valiendo cero. A esta región de temperaturas se le llama el *estado superconductor*.

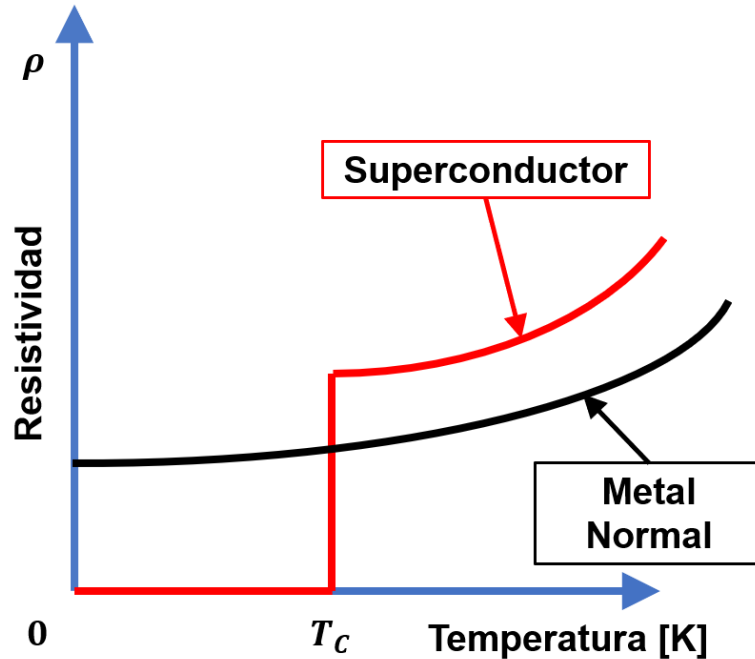


Figura 3.1: Perfil típico de resistividad en función de la temperatura para un material superconductor y para un metal normal.

La *resistividad* es una propiedad física independiente de la geometría y tamaño de cualquier material (muestra) a estudiar. Otra cantidad física es la llamada *resistencia*. La resistencia se define como el cociente de la diferencia de potencial a través de un componente eléctrico dividida entre la corriente que se hace pasar por este componente. Así, la resistencia es una medida de la oposición del material al paso de corriente eléctrica. La resistividad, en cambio, se define como la resistencia eléctrica entre las caras opuestas de un cubo unitario del material dado a una temperatura fija [47].

La resistencia es una característica extrínseca de la muestra que se estudia. La resistividad, por su parte, es una característica intrínseca del material. Para muestras con una geometría rectangular con un área transversal A y una longitud l , la relación entre la resistencia R y la resistividad ρ está expresada por la siguiente relación

$$R = \rho \frac{l}{A} \tag{3.1}$$

3.2 Efecto Cuasi Re-Entrante

En algunos materiales granulares superconductores, en las regiones de temperatura delimitadas por la transición superconductora principal, llega a aparecer una resistencia

que no es nula [48-51]. Este es un fenómeno que se le conoce como efecto cuasi re-entrante.

El origen de este comportamiento se basa en el bloqueo de Coulomb y en el desbloqueo del acoplamiento de Josephson. Algunas propiedades de los fenómenos re-entrantes se han estudiado en la literatura científica [52]. Es importante prestar atención al hecho de que la resistencia en el efecto cuasi re-entrante es muy pequeña. En la **Figura 3.2** se observa el efecto cuasi re-entrante en el material $(Ho_{0.85}Y_{0.15})Ni_2B_2C$ al variar un campo magnético.

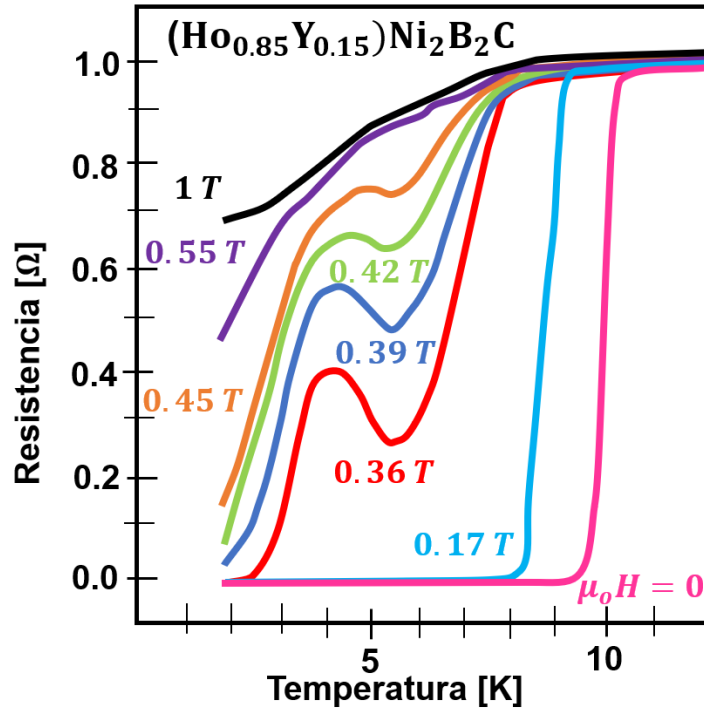


Figura 3.2: Resistencia en función de la temperatura del material $(Ho_{0.85}Y_{0.15})Ni_2B_2C$ para diferentes intensidades del campo magnético. Se observa el efecto cuasi re-entrante para valores de $\mu H = 0.36, 0.39, 0.42$ y 0.45 T [53].

3.3 Efecto Re-Entrante en un Perfil de Resistividad en Función de la Temperatura

El efecto cuasi re-entrante presentado en la sección anterior sirve para introducir otro efecto, conocido como efecto re-entrante en forma de pico resistivo. Este nuevo efecto también aparece en la zona superconductora. El efecto re-entrante se debe a que existe en el material un intento de regresar al estado normal aislante a cierto intervalo de

temperaturas, en el cual, en la zona superconductor exhibe un pico resistivo para un perfil de resistividad o de resistencia en función de la temperatura.

Por ejemplo, el material $HoNi_2B_2C$ se convierte primero en superconductor a $T_c = 7.5 K$, pero a una temperatura alrededor de $T = 5 K$ pierde el estado superconductor. A temperaturas más bajas, el $HoNi_2B_2C$ vuelve a recuperar el estado superconductor. El efecto observado es la aparición de un pico resistivo a lo largo de un corto intervalo de temperaturas. Este pico resistivo debería de corresponder al estado superconductor de resistencia cero [54, 55]. A este efecto se le conoce como superconductividad re-entrante en forma de pico resistivo. En la **Figura 3.3** se muestra dicho fenómeno para otro material, el compuesto $Ho(Ni_{1-x}Co_x)_2B_2C$.

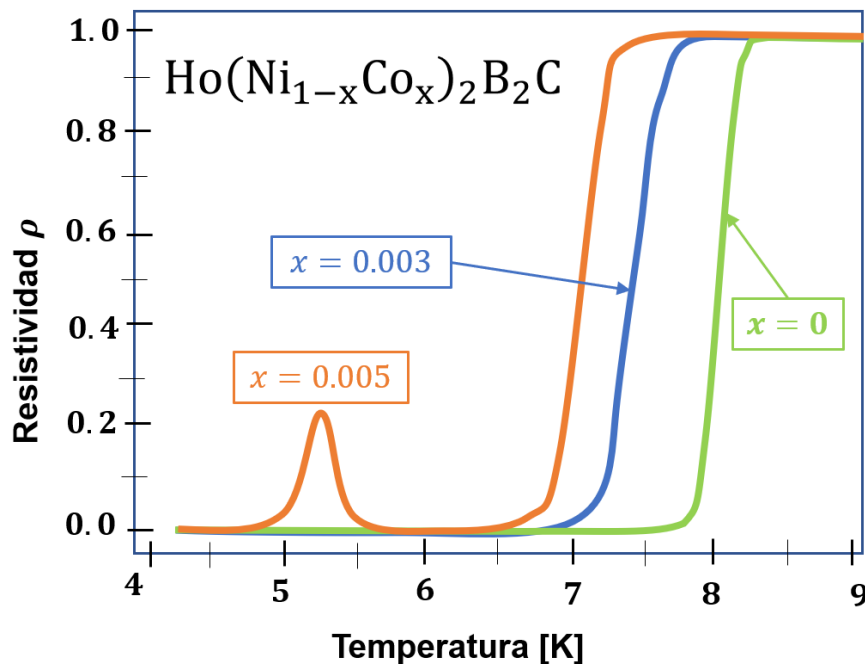


Figura 3.3: Resistividad normalizada en función de la temperatura para el material $Ho(Ni_{1-x}Co_x)_2B_2C$. El fenómeno de superconductividad re-entrante en forma de pico resistivo aparece con un porcentaje específico de $x = 0.005$ de Ni [84].

El origen del pico resistivo en este compuesto se atribuye a la ruptura magnética de los pares de Cooper. El cambio en el magnetismo del material original $HoNi_2B_2C$ al variar la temperatura y el campo magnético aplicado, revela que a una temperatura de $T = 5.0 K$ aparece el efecto re-entrante en forma de pico resistivo [57]. Por otra parte, mediciones adicionales de susceptibilidad realizadas en este compuesto tanto en muestras policristalinas [55] como en monocristales [57] muestran que a temperaturas inferiores a $5 K$ el compuesto se encuentra en un estado antiferromagnético que coexiste con la superconductividad.

Además del $HoNi_2B_2C$ y de algunos de sus derivados, otros materiales también presentan este comportamiento inusual en sus propiedades eléctricas. En algunos

materiales, el efecto re-entrante en forma de pico resistivo aparece sin la necesidad de aplicar campos magnéticos externos. Se han observado picos resistivos re-entrantes en muestras policristalinas de EuFe_2As_2 dopadas con fósforo [58], monocristales de EuFe_2As_2 dopados con iridio [59], monocristales de EuFe_2As_2 bajo presión [60], películas de carbono tipo diamante que contienen tungsteno [51], monocristales de heteroestructuras de $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_8/\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{Ca}_2\text{Cu}_3\text{O}_{10}$ [61, 62], etc. En la literatura, se han propuesto algunos mecanismos microscópicos responsables del pico re-entrante [63-67].

Para materiales que no presentan orden magnético, el fenómeno de superconductividad re-entrante resulta ser aún más interesante. Para este caso, lo podemos describir como un intento de transición superconductor-dieléctrico en el que el sistema, lejos de convertirse en un aislante (dieléctrico) y permanecer en dicho estado para temperaturas más bajas, regresa de nuevo al estado superconductor. Es este fenómeno el que se estudiará en esta tesis.

3.4 Efecto Re-Entrante en un Perfil de Densidad de Corriente en Función de la Temperatura

El efecto re-entrante también se puede observar en un perfil de densidad de corriente crítica en función de la temperatura. El efecto re-entrante equivalente en dicho perfil ocurre como una interrupción en la suavidad de la gráfica superconductora que se presentó previamente en la [Figura 2.4](#). El efecto re-entrante en un perfil de densidad de corriente crítica para un material superconductor arbitrario se muestra en la [Figura 3.4](#). Obsérvese la interrupción de la suavidad en el perfil para un intervalo de temperaturas entre T y T_b . El efecto re-entrante inicia a una temperatura T_b y al disminuir la temperatura a un valor de T_r el material recupera su estado superconductor.

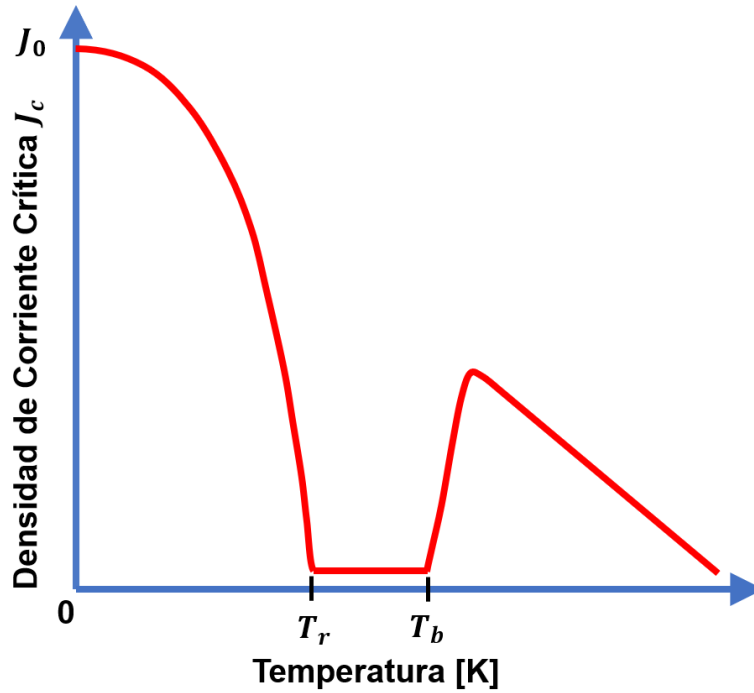


Figura 3.4: Densidad de corriente en función de la temperatura para un material granular arbitrario, en donde T_b es la temperatura de inicio para el efecto re-entrante y T_r es su temperatura de salida. Compárese con la Figura 2.4, la cual no presenta efecto re-entrante.

El efecto re-entrante de la **Figura 3.4** es equivalente al pico resistivo que aparece en la **Figura 3.3**. La simulación del efecto re-entrante estudiado en esta tesis se realizará en un perfil de densidad de corriente crítica en función de la temperatura.

CAPÍTULO 4. GRAFOS

Con la finalidad de poder modelar el efecto re-entrante de manera cuantitativa y controlada, necesitamos construir, de forma sistemática, redes de transporte de corriente eléctrica en muestras virtuales de superconductores granulares. La construcción de dichas redes se hará utilizando una herramienta matemática conocida como grafo. En este capítulo, se presentan los conceptos básicos sobre Teoría de Grafos y sus aplicaciones prácticas en el modelado de sistemas físicos.

4.1 Definición Básica de Grafo

En términos generales, un **Grafo** se define como una colección de puntos y líneas [68, 69]. Las líneas conectan algunos o todos los puntos involucrados. A los puntos se les conoce como **Nodos** del grafo. Las líneas que conectan los nodos en un grafo se les llaman **Aristas**. En la **Figura 4.1**, se muestra el ejemplo de un grafo con 8 nodos y 17 aristas. Para identificar los nodos y las aristas, se etiquetan de manera alfabética, numérica o alfanuméricamente. Para este trabajo de tesis, etiquetaremos solamente los nodos y de manera numérica.

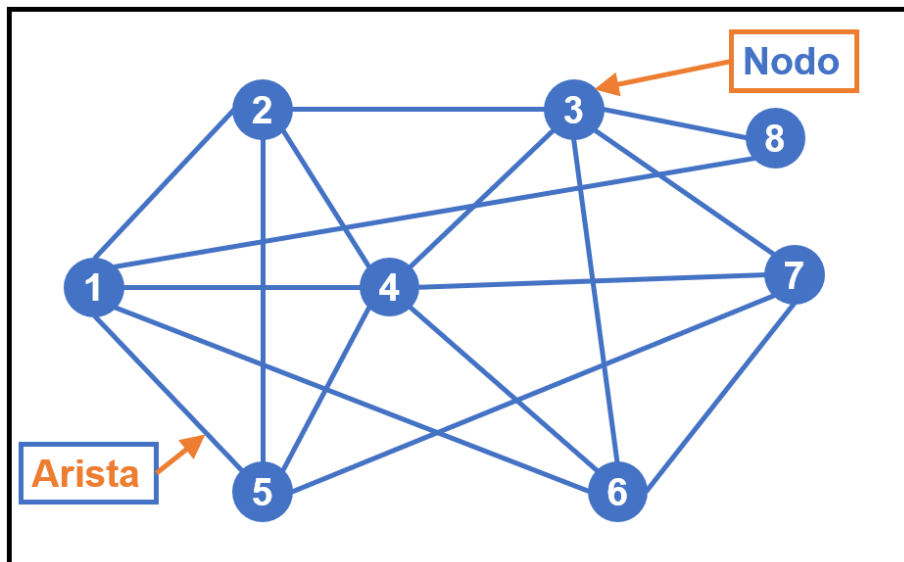


Figura 4.1: Grafo con 8 nodos y 17 aristas. Se etiquetan los nodos desde el número 1 hasta el número 8.

En el ejemplo de la **Figura 4.1**, los nodos 1 y 2 están unidos por una arista. Dicha arista no une a ningún otro nodo del grafo. Las aristas se unen con otras aristas solamente en

los nodos, pero no las aristas entre sí. Las aristas no se cruzan ni se unen entre sí. La definición de que una arista no se una con otras aristas es de carácter solamente matemático, aunque visualmente diera la impresión de que se cruzan entre sí [68]. Por ejemplo, en un grafo con muchas aristas, se podría llegar a ver varios cruces entre éstas, pero esto no indica que estén conectadas. En la [Figura 4.1](#), por ejemplo, en la arista que conecta los nodos 1 al 8, se logra observar varios cruces visuales con otras aristas, pero esos cruces no indican que están unidas.

La estructura representativa bidimensional de un grafo no necesariamente está limitada a un sistema físico bidimensional. Por ejemplo, si representamos con un grafo a un dispositivo electrónico de varios niveles, los componentes eléctricos serían los nodos y las conexiones entre estos componentes serían las aristas. El sistema físico es tridimensional, pero la representación en el grafo sigue siendo bidimensional. Así, los grafos bidimensionales pueden representar también a un sistema en tres dimensiones.

4.2 Aristas Dirigidas y No Dirigidas

Las aristas en un grafo se pueden clasificar en dos tipos. Estos dos tipos de aristas construyen grafos específicos para el tráfico de comunicación entre sus nodos. Primero, si las aristas tienen una relación simétrica en la conexión de los nodos, en donde no importa la dirección del flujo que se transmite de un nodo a otro, se les llaman **Aristas No Dirigidas**. Las aristas no dirigidas construyen **Grafos No Dirigidos**. Segundo, si las aristas solo permiten que el flujo se transmita en una sola dirección entre los dos nodos que conectan, se les llaman **Aristas Dirigidas**. Estas aristas construyen **Grafos Dirigidos**. Tanto las aristas dirigidas como no dirigidas tienen una propiedad llamada **Capacidad**. La capacidad se define como el flujo estacionario máximo que una arista puede transportar. Los dos tipos de aristas se pueden mezclar para construir un grafo mixto, un grafo conformado por aristas no dirigidas y dirigidas con sus correspondientes capacidades [70, 71]. Para ejemplificar mejor lo anterior, ver la [Figura 4.2](#). Para esta tesis, en el modelo de transporte de corriente crítica, sólo se usarán aristas dirigidas con su correspondiente capacidad.

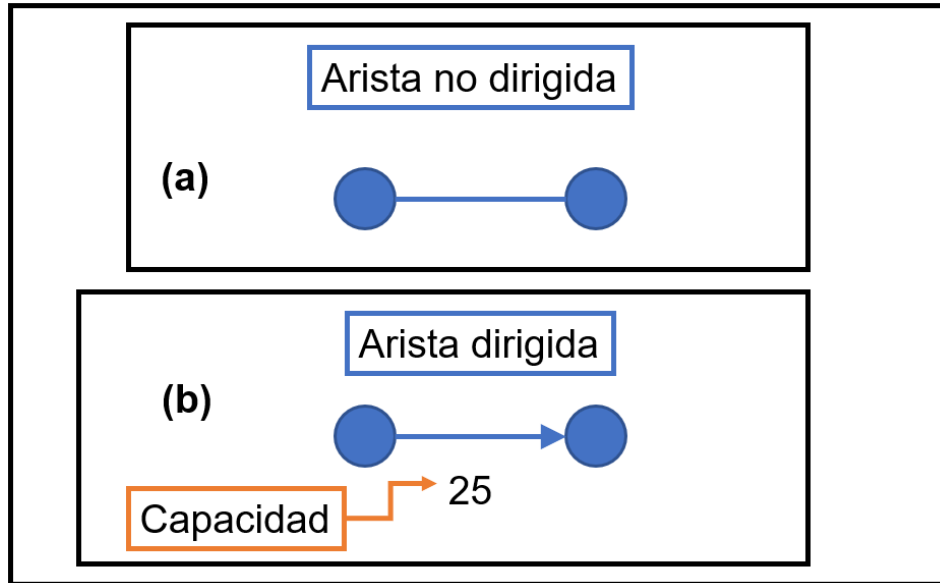


Figura 4.2: Representación de los dos tipos de aristas en un grafo. (a) Arista no dirigida. (b) Arista dirigida. En la arista dirigida, se indica su capacidad, 25 en este ejemplo. La capacidad se representa con un número a un lado de la arista dirigida.

4.3 Nodo Fuente y Nodo Sumidero

En un grafo, destacan dos nodos importantes, el **Nodo Fuente** y el **Nodo Sumidero**. El nodo fuente es el nodo de entrada de un flujo continuo estacionario (en nuestro modelo, la corriente eléctrica superconductor). El nodo sumidero es el nodo de salida para el mismo tipo de flujo continuo estacionario. Cabe aclarar que para que exista un flujo en un grafo, éste debe de tener al menos un camino de comunicación (en nuestro modelo, un camino de percolación) que esté conformado por aristas dirigidas entre dichos nodos. En la **Figura 4.3**, se muestran estos dos nodos especiales. Al nodo fuente se le etiqueta como **Nodo s**. La letra s viene del idioma inglés *Source* (fuente). Por otra parte, al nodo sumidero (*Sink* en inglés) se etiqueta como **Nodo t**.

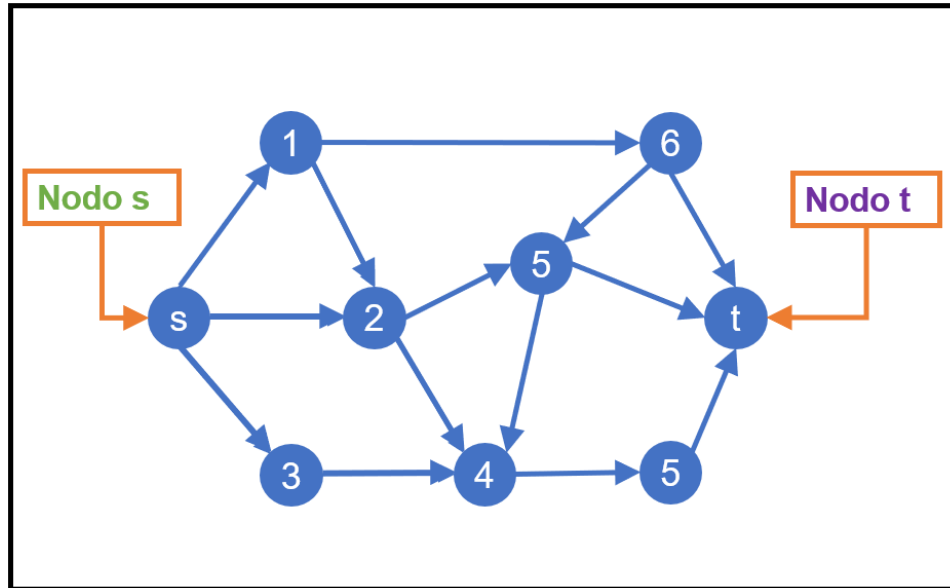


Figura 4.3: Grafo formado por 8 nodos unidos por aristas dirigidas. Se indica el *Nodo Fuente (Nodo s)* y *Nodo Sumidero (Nodo t)*. Los otros 6 restantes son *nodos intermedios* y se etiquetan desde el 1 al 6.

En nuestro modelo, el *Nodo s* y el *Nodo t* representarán la entrada y salida de la corriente eléctrica que se aplica a una muestra durante la técnica experimental de cuatro puntas.

4.4 Algoritmos de Búsqueda Heurísticos

Los algoritmos de búsqueda heurísticos son la manera en cómo un conjunto de aristas dirigidas se va interconectando para comunicar dos nodos de interés en un grafo. Un algoritmo de búsqueda parte de un nodo fuente. Éste recorre los nodos intermedios hasta llegar a un nodo en particular. Existen dos grandes tipos de algoritmo de búsqueda, el **DFS (Depth First Search)** y el **BFS (Breadth First Search)**. Para más detalle, ver las **Secciones C1** y **C2** del **Apéndice C**.

Tanto el algoritmo *DFS* como el *BFS* son utilizados para encontrar el camino más corto entre el *Nodo Fuente* y el *Nodo Sumidero* en un grafo. Ambos algoritmos buscan dibujar un árbol de búsqueda sobre el grafo. Un árbol de búsqueda es la conexión de todos los nodos que un algoritmo elige para crear un camino de comunicación (camino de percolación) entre dos nodos de interés. Un ejemplo de árbol de búsqueda se presenta en la **Figura 4.4**. En nuestro modelo, el algoritmo *DFS* inicia desde el nodo fuente y luego añade nodos a su árbol de búsqueda para crear caminos de comunicación hacia el nodo sumidero. Tanto el algoritmo *DFS* y *BFS* cubren todo el grafo hasta encontrar el nodo objetivo. En lo que difieren ambos algoritmos de búsqueda es en la manera en cómo se

CAPÍTULO 4. GRAFOS

visitan y añaden los nodos al árbol de búsqueda. Para esta tesis se usará exclusivamente el algoritmo DFS para la construcción de los caminos de percolación en el modelo propuesto.

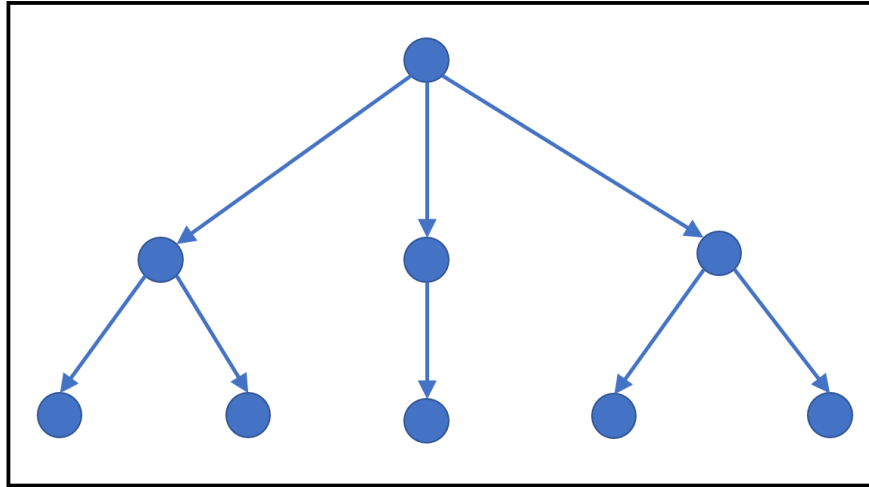


Figura 4.4: Árbol de búsqueda.

Ahora que ya introducimos el concepto de algoritmos de búsqueda, continuamos con los problemas de búsqueda. Los problemas de búsqueda son aquellos que tienen la finalidad de encontrar en un grafo el *camino óptimo* entre dos nodos especiales, el *Nodo Fuente* y el *Nodo Sumidero*. Por ejemplo, en la **Figura 4.5** se muestra una red de carreteras entre las ciudades de Puebla. Se indica un camino óptimo para conectar a Zacatlán con Puebla, el cual se marca en color rojo.

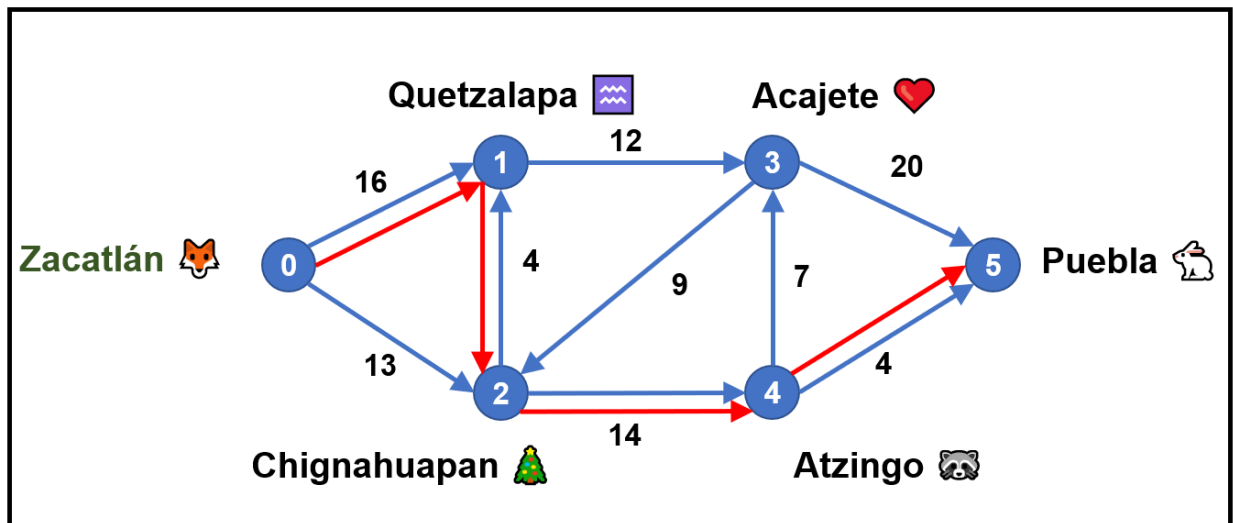


Figura 4.5: Grafo que representa la comunicación entre algunas ciudades y lugares del estado de Puebla, México. Las ciudades se intercomunican con carreteras. El número que está al lado de cada arista dirigida es la capacidad de tránsito. Se muestra un camino

CAPÍTULO 4. GRAFOS

óptimo en color rojo que indica la salida inicial de Zacatlán y la llegada final a Puebla. (Dibujo original del autor de esta tesis.)

Dado un grafo dirigido con sus respectivas capacidades, se debe determinar su máximo transporte desde un nodo inicial a un nodo meta. Dicho flujo máximo siempre se puede encontrar, pero con la condición de que exista al menos un camino de comunicación entre los dos nodos de interés, para crear así redes de transporte. Los detalles de este algoritmo, conocido como el **Algoritmo de Ford-Fulkerson**, que se aplicará al modelo se explican más a detalle en la **Sección C3** del **Apéndice C**.

CAPÍTULO 5. MODELADO DE GRANOS

En este capítulo, se propone la simulación computacional para la creación de un material granular hipotético superconductor. Se presentan diferentes conjuntos de granos. Los conjuntos se desarrollan según la evolución en su complejidad. El propósito es generar conjuntos de granos virtuales que se asemejen más a un material granular real.

5.1 Conjuntos de Granos

El objetivo de este capítulo es construir un conjunto de granos que se asemeje a una muestra real. Inicialmente, se describirá el modelado para un conjunto regular de granos contenidos en una matriz dieléctrica, donde los radios para todos los granos son iguales (radios constantes). La forma de presentar este conjunto hace que el lector se familiarice con el camino evolutivo para el desarrollo de una muestra virtual idónea para nuestro modelo. Posteriormente, se construirá un conjunto aleatorio, al igual todos los radios de los granos son constantes. Finalmente, para estos conjuntos aleatorios los radios de los granos desde se generarán de una distribución gaussiana.

Se elige una distribución gaussiana por dos razones importantes. La primera, es por fines físicos, ya que muchos sistemas en la naturaleza exhiben esta distribución. En especial los materiales granulares a estudiar. Segundo, porque es una forma más eficiente para crear conjuntos que contengan un mayor número de granos en comparación con una muestra aleatoria con radios constantes. Este último punto se explica más a detalle en la [Sección 5.5](#).

5.2 Conjunto Regular de Granos (Radios Constantes)

La distribución de granos superconductores en la matriz dieléctrica se construirá partiendo primeramente de un conjunto de granos ordenados. Se recuerda que los granos se aproximan a círculos para la simplificación de los cálculos. Ver [Sección 2.1](#). El alcance de esta tesis se limitará a una matriz dieléctrica bidimensional. Todos los programas fueron desarrollados en el software Matemático MathWorks Matlab siendo la versión 2022a.

El primer conjunto es un sistema ordenado de granos con radios constantes. El código viene en la [Sección D1](#) del [Apéndice D](#), describiendo cada línea de comando. Este

programa genera un conjunto de granos ordenados en una matriz dieléctrica. Las propiedades del conjunto regular de granos son las siguientes:

1. Se genera un conjunto regular de granos que están contenidos en una matriz dieléctrica en forma cuadrada sin grosor, con un número igual de granos en cada lado
2. Todos los radios de los granos son constantes. Esto se eligió así para mostrar un sistema más simplificado.
3. Todas las distancias inter-superficiales son constantes en cada una de sus direcciones correspondientes, es decir, los granos están igualmente espaciados.

5.2.1 Conjunto de 25 Granos

En la [Figura 5.1](#) mostramos un conjunto de 25 granos con distancia inter-superficial (horizontal y verticalmente) igual a cero, sus radios son constantes de 220 Å. Se propuso este radio ya que algunos materiales granulares reales exhiben radios cercanos a este valor. Al igual este valor es propuesto en la [Sección 2.3.2](#). Por ejemplo, granos de Tungsteno contenidos en una matriz de Silicio [72]. Todos los granos están ubicados en el primer cuadrante del plano cartesiano, sus centros tienen valores positivos X e Y. Esto se hace para facilitar la ubicación de los granos y simplificar el cómputo en el algoritmo que se programó ([Sección D1](#) del [Apéndice D](#)).

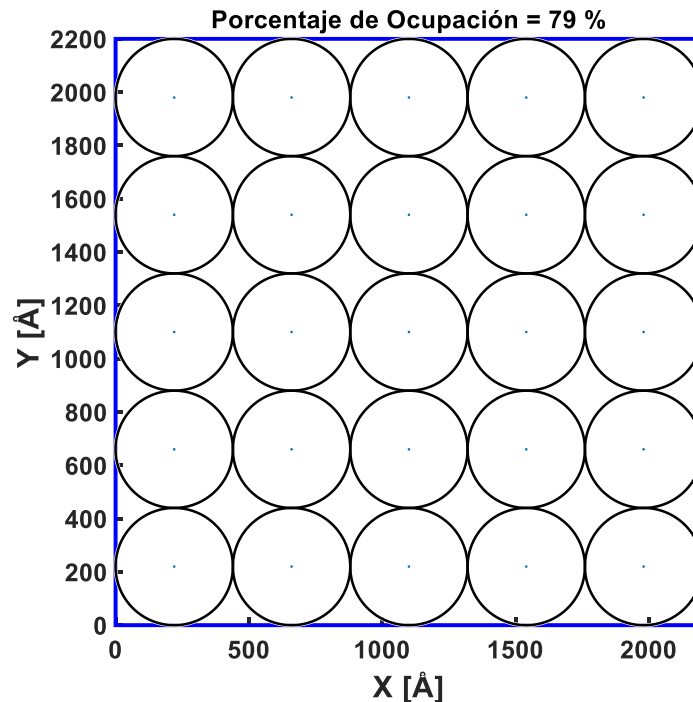


Figura 5.1: Conjunto regular de 25 granos con radios de 220 Å. Los círculos en color negro representan los granos y el cuadrado azul representan la matriz dieléctrica. La distancia inter-superficial es de 0 Å (horizontal y verticalmente). La matriz eléctrica tiene lado de 2200 Å.

CAPÍTULO 5. MODELADO DE GRANOS

El porcentaje de ocupación es el consciente del área de todos los círculos entre el área total de la matriz dieléctrica. Esto nos indica qué porcentaje del área de todos los círculos ocupan el área total de la matriz eléctrica. Para las siguientes distribuciones este número es de vital importancia. En las siguientes secciones se buscó tener un porcentaje de ocupación más alto para muestras que se parezcan más a una distribución aleatoria real. En **Tabla 5.1** se muestran los datos del conjunto regular de los granos generados de la **Figura 5.1**.

Tabla 5.1: Datos del conjunto regular para 25 granos contenidos en una matriz dieléctrica de lado de 2200 Å . Se muestra el número de grano, sus posiciones y sus respectivos radios.

Grano	X [Å]	Y [Å]	Radio [Å]
1	220	220	220
2	220	660	220
3	220	1100	220
4	220	1540	220
5	220	1980	220
6	660	220	220
7	660	660	220
8	660	1100	220
9	660	1540	220
10	660	1980	220
11	1100	220	220
12	1100	660	220
13	1100	1100	220
14	1100	1540	220
15	1100	1980	220
16	1540	220	220
17	1540	660	220
18	1540	1100	220
19	1540	1540	220
20	1540	1980	220
21	1980	220	220
22	1980	660	220
23	1980	1100	220
24	1980	1540	220
25	1980	1980	220

5.2.2 Conjunto de 400 Granos

En la **Figura 5.2** se ha generado un segundo conjunto de granos. Con un total de 400 granos. Nuevamente, los radios tienen un valor constante de 220 Å. Por cuestiones de espacio no mostraremos la tabla numérica para el conjunto de los 400 granos.

CAPÍTULO 5. MODELADO DE GRANOS

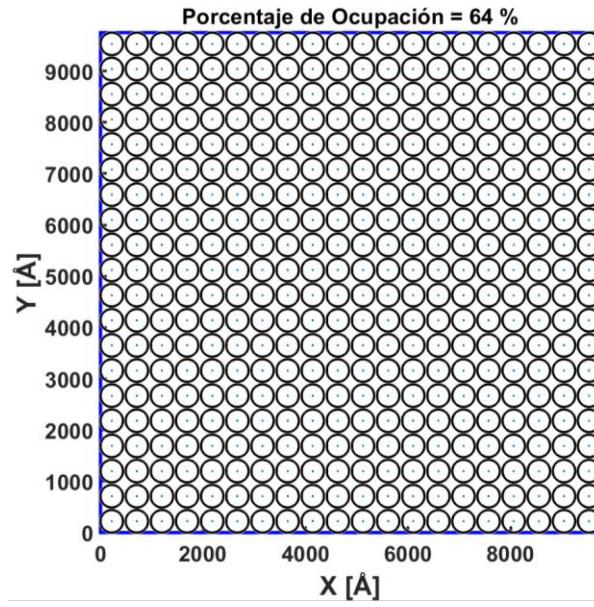


Figura 5.2: Conjunto regular de 400 granos con radios de 220 Å. Los círculos en color negro representan los granos y el cuadrado azul representan la matriz dieléctrica. La distancia inter-superficial es de 50 Å. La matriz eléctrica tiene un lado de 9750 Å.

5.2.3 Conjunto de 10,000 Granos

En el conjunto regular de granos se permite generar y distribuir cualquier cantidad de granos y controlar fácilmente la distancia inter-superficial. En la [Figura 5.3](#) se observa una muestra en la que se ha generado un conjunto regular de 10,000 granos en una superficie cuadrática con una distancia inter-superficial de 0 Å y radios de 220 Å.

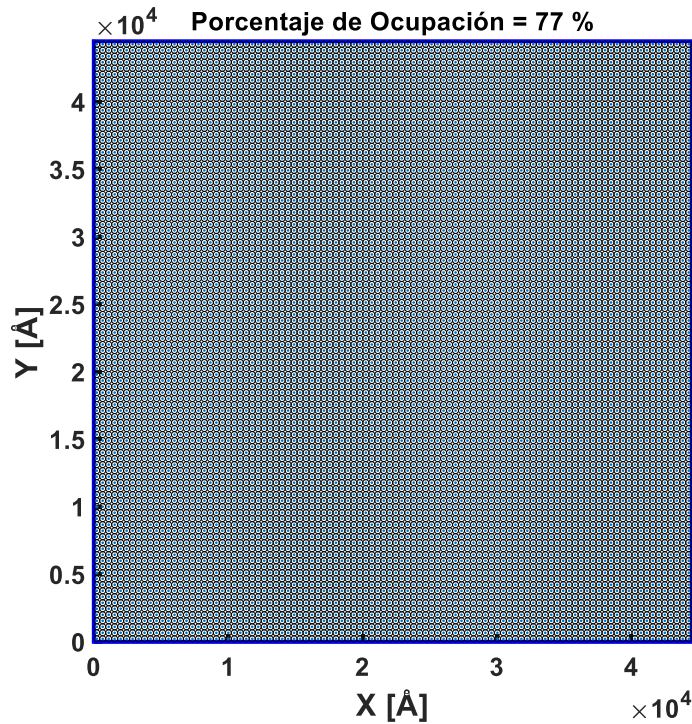


Figura 5.3: Conjunto regular de 10,000 granos con radios de 220 Å. Los círculos en color negro representan los granos y el cuadrado azul representan la matriz dieléctrica. La distancia inter-superficial es de 5 Å. La matriz eléctrica tiene un lado de 44495 Å.

El porcentaje de ocupación de los granos en un conjunto regular es mucho mayor que el de los otros dos conjuntos que se presentan en las siguientes secciones. Es decir, el número de granos contenidos en un conjunto regular para una matriz dieléctrica fija siempre es mayor que los otros dos conjuntos de las **Secciones 5.2** y **5.4**. Pero esta regularidad se desvía del comportamiento aleatorio de los materiales físicos. Es por eso por lo que el siguiente paso fue el crear un conjunto aleatorio de granos, el cual, se acerca más a un material real.

5.3 Conjunto Aleatorio de Granos (Radios Constantes)

La siguiente muestra generada se basa en posiciones aleatorias de los granos, pero sus radios siguen siendo constantes. Al igual se sigue tomando el valor de radio a 220 Å. La aleatoriedad se implementó porque en los materiales granulares reales exhiben esta configuración en la distribución de sus granos. En este conjunto de granos el porcentaje de ocupación es menor que al visto en la **Sección 5.1**, pero se acerca más a una distribución de granos en un material real. El porcentaje de ocupación depende de factores como el área de la muestra y la naturaleza aleatoria del algoritmo para distribuir

los granos entre los espacios vacíos. Estos espacios vacíos se van reduciendo conforme se van distribuyendo más granos. Esto es un limitante de la naturaleza aleatoria. Pero podemos acercarnos a un porcentaje de ocupación entre el 50 al 55%. Un porcentaje de ocupación alto indica que los granos se encuentran más cercanos unos de otros. Para más información acerca del algoritmo diríjase a de la [Sección D2](#) del [Apéndice D](#)

5.3.1 Condición de Granos que No Se Traspasen

Se describirán las restricciones que el conjunto de granos aleatorios debe de cumplir. Estas restricciones son implementadas por el algoritmo programado. Recordemos que el modelo propuesto en la [Sección 2.1](#) restringe que los granos no se intercepten. Para empezar, se muestra el esquema de un primer grano en la [Figura 5.4](#) ubicado aleatoriamente en la matriz dieléctrica. Todos los granos del conjunto aleatorio también se ubican en el primer cuadrante del plano XY.

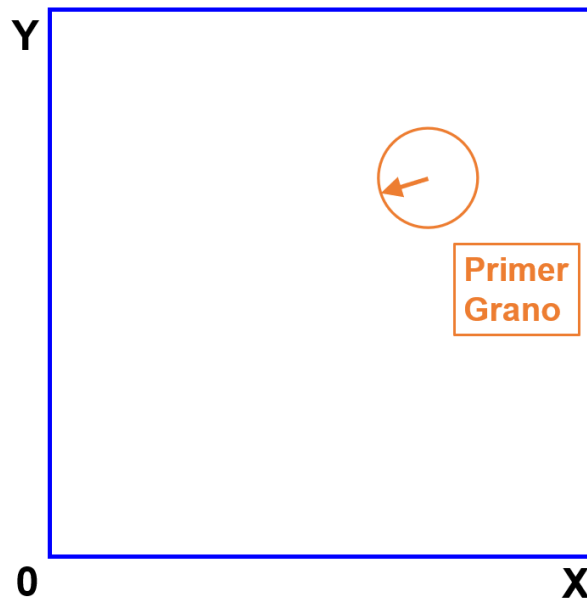


Figura 5.4: Primer grano ubicado aleatoriamente en una matriz dieléctrica con su respectivo radio (flecha naranja).

Ahora al ubicar un segundo grano, se exige que no se traslaparse con el primer grano. Se exige que las distancias inter-granulares entre el primer y segundo grano sean mayores o iguales que la que la suma de radios de ambos granos más la distancia inter-superficial. Puede suceder que la distancia inter-superficial sea cero, “*tocándose*” tangencialmente pero nunca se traspasan entre sí. En la [Figura 5.5](#) se muestra el esquema para la distribución de dos granos en una matriz dieléctrica.

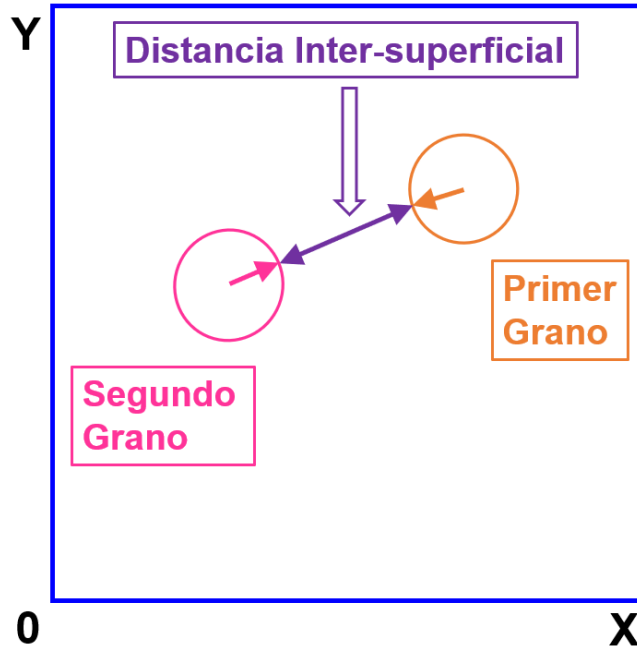


Figura 5.5: Conjunto de dos granos distribuidos aleatoriamente. El Grano 1 (color naranja) con su respectivo radio. Grano 2 (color rosa) con su respectivo radio. Finalmente, en color morado la distancia inter-superficial.

Posteriormente, al ubicar un tercer grano se exige que no se traslape con el primer grano ni el segundo grano. En la **Figura 5.6** se muestra los tres granos

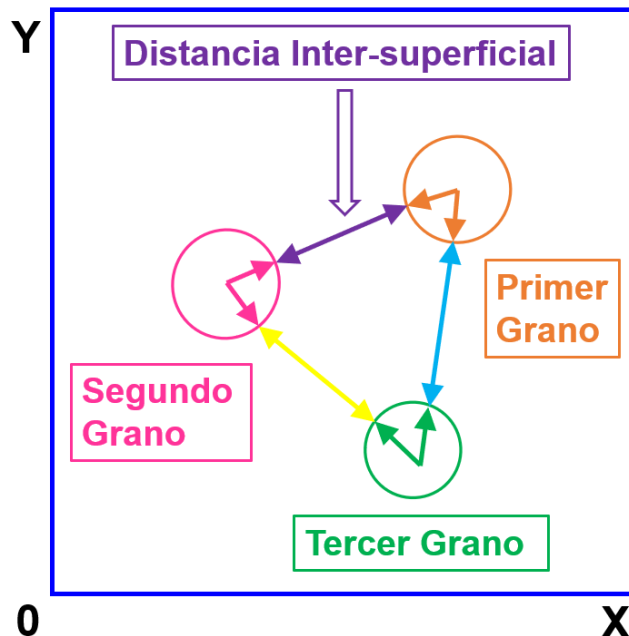


Figura 5.6: Distribución de tres granos. Se observa que todos los granos cumplen con la restricción de no traslaparse. Aunque sean iguales los tres granos son diferenciados por sus colores, esto es para fines didácticos. El primer grano no traslapa al segundo ni al tercero. Lo mismo para el segundo grano con el tercero. La flecha bidireccional en color morado indica la distancia inter-superficial entre el primer y segundo grano. La flecha

bidireccional en color azul claro indica la distancia inter-superficial entre el primer y tercer grano. Finalmente, la fecha bidireccional en color amarillo indica la distancia inter-superficial entre el segundo y tercer grano. Cabe aclarar que las distancias inter-superficiales pueden ser iguales o diferentes entre ellas.

El tercer grano también debe de cumplir la condición de que sus distancias inter-granulares al primer y al segundo grano sean mayores a la suma de los radios más sus respectivas distancias inter-superficiales.

En el conjunto aleatorio de granos con radios constantes, todos los granos tienen el mismo valor de radio. Pero, cada radio se etiquetó con su respectivo grano. Se define N como el número de granos totales que se tiene se quiere distribuir aleatoriamente en la matriz dieléctrica. Entonces, aunque para todos los radios tengan el mismo valor todos se etiquetan diferentes $R_1 = R_2 = R_3 = \dots = R_N = constante$. Esta etiquetación permite explicar en forma general las restricciones que debe cumplir N granos independientes de la naturaleza de sus radios (constantes, gaussianos, aleatorios, etc.). Por ejemplo, en la [Sección 5.5](#) estos radios serán de una distribución gaussiana.

5.3.1.1 Condiciones Matemáticas

Se describe en forma matemática lo que se presentó anteriormente. Se genera un primer grano con su respectivo radio R_1 y un segundo grano con su respectivo radio R_2 . Sea $S_{(1)(2)}$ la distancia la distancia inter-granular y $d_{(1)(2)}$ la distancia inter-superficial del primer grano al segundo grano. La restricción que se exige para que estos dos granos no se traspasen está en la [Ecuación 5.1](#)

$$R_1 + R_2 + d_{(1)(2)} \geq S_{(1)(2)}. \quad 5.1$$

Al añadir un tercer grano con su respectivo radio R_3 al conjunto aleatorio, debe cumplirse que no se traslape con el primer grano, se muestra esta restricción en la [Ecuación 5.2](#)

$$R_1 + R_3 + d_{(1)(3)} \geq S_{(1)(3)}, \quad 5.2$$

en donde $d_{(1)(3)}$ y $S_{(1)(3)}$ es la distancia inter-superficial e inter-granular respectivamente del grano 1 con el grano 3. Luego, el tercer grano se le exige al mismo tiempo esta misma restricción, pero con respecto al segundo grano.

$$R_2 + R_3 + d_{(2)(3)} \geq S_{(2)(3)}, \quad 5.3$$

en donde $d_{(2)(3)}$ y $S_{(2)(3)}$ es la distancia inter-superficial e inter-granular respectivamente del grano 2 con el grano 3.

Con N el número de granos totales a distribuir aleatoriamente en una matriz dieléctrica con dimensiones fijas y n un grano en particular $n = 1,2,3, \dots N$. En general la restricción

CAPÍTULO 5. MODELADO DE GRANOS

para cualquier grano n (diferente de 1) respecto al primer grano se escribe en la **Ecuación 5.4**

$$R_1 + R_n + d_{(1)(n)} \geq S_{(1)(n)}, \quad 5.4$$

en donde $d_{(1)(n)}$ y $S_{(1)(n)}$ es la distancia inter-superficial e inter-granular respectivamente del grano 1 con el grano n .

Esta misma restricción se aplica al segundo grano respecto a un grano n , excepto al primero grano que ya se ha hecho su respectiva restricción en la **Ecuación 5.4**, ni al segundo grano porque sería el mismo grano. De esta manera la restricción está por la **Ecuación 5.5**

$$R_2 + R_n + d_{(2)(n)} \geq S_{(2)(n)}, \quad 5.5$$

en donde $d_{(2)(n)}$ y $S_{(2)(n)}$ es la distancia inter-superficial e inter-granular respectivamente del grano 2 con el grano n .

En general se hace el mismo procedimiento para todos los granos que se quieren distribuir en la matriz dieléctrica. Así, para un sistema formado por N granos totales y tomando un grano n con los otros $N - n$ granos, las inecuaciones para $n = 1, 2, 3, \dots, N$ que deben cumplir para crear un conjunto de granos se presentan en la **Ecuación 5.6**.

$$\begin{aligned} R_n + R_{(n+1)} + d_{(n)(n+1)} &\geq S_{(n)(n+1)} \\ R_n + R_{(n+2)} + d_{(n)(n+2)} &\geq S_{(n)(n+2)} \\ R_n + R_{(n+3)} + d_{(n)(n+3)} &\geq S_{(n)(n+3)} \\ &\vdots \\ R_{N-1} + R_N + d_{(N-1)(N)} &\geq S_{(N-1)(N)} \end{aligned} \quad 5.6$$

Para dar un ejemplo, en la **Tabla 5.2** se muestra el sistema de ecuaciones que se deben cumplir un sistema formado por un total de 6 granos ($N = 6$).

Tabla 5.2. Restricciones por cumplir para un conjunto aleatorio de 6 granos. Estos granos no se traslapan en sus superficies circulares.

# Expresión	Expresiones	Valor de n
1	$R_1 + R_2 + d_{(1)(2)} \geq S_{(1)(2)}$	$n = 1$
2	$R_1 + R_3 + d_{(1)(3)} \geq S_{(1)(3)}$	
3	$R_1 + R_4 + d_{(1)(4)} \geq S_{(1)(4)}$	
4	$R_1 + R_5 + d_{(1)(5)} \geq S_{(1)(5)}$	
5	$R_1 + R_6 + d_{(1)(6)} \geq S_{(1)(6)}$	
6	$R_2 + R_3 + d_{(2)(3)} \geq S_{(2)(3)}$	$n = 2$
7	$R_2 + R_4 + d_{(2)(4)} \geq S_{(2)(4)}$	
8	$R_2 + R_5 + d_{(2)(5)} \geq S_{(2)(5)}$	

CAPÍTULO 5. MODELADO DE GRANOS

9	$R_2 + R_6 + d_{(2)(6)} \geq S_{(2)(6)}$	
10	$R_3 + R_4 + d_{(3)(4)} \geq S_{(3)(4)}$	$n = 3$
11	$R_3 + R_5 + d_{(3)(5)} \geq S_{(3)(5)}$	
12	$R_3 + R_6 + d_{(3)(6)} \geq S_{(3)(6)}$	
13	$R_4 + R_5 + d_{(4)(5)} \geq S_{(4)(5)}$	$n = 4$
14	$R_4 + R_6 + d_{(4)(6)} \geq S_{(4)(6)}$	
15	$R_5 + R_6 + d_{(5)(6)} \geq S_{(5)(6)}$	$n = 5$

Cuando se ejecuta el algoritmo al inicio fija la dimensión de lado para la matriz dieléctrica. Posteriormente, el código genera una cantidad fija de granos con radios constantes (220 Å). Los granos se empiezan a distribuir aleatoriamente en el espacio vacío, sin que estos se traspasen unos con otros. Si todos los granos se lograron distribuir en toda la matriz dieléctrica se genera con éxito un conjunto aleatorio de granos. Para más detalles del funcionamiento del algoritmo vea la [Sección E2](#) del [Apéndice E](#). Una consideración importante es que el algoritmo puede que se atasque en un bucle infinito tratando de ubicar todos granos en la matriz dieléctrica. Por ejemplo, puede surgir un buque infinito al no tener un espacio vacío suficiente para albergar un grano n . Esto ocurre porque en la muestra el espacio vacío disponible está casi completamente ocupado. También, juega un papel importante la naturaleza aleatoria del algoritmo que nunca encuentre un espacio vacío idóneo para ubicar un grano más.

5.3.2 Conjunto de 25 Granos

Ahora se presenta en la [Figura 5.7](#) un conjunto aleatorio de 25 granos con radios constantes en una matriz dieléctrica. Se toma el mismo valor de 220 Å para los radios.

CAPÍTULO 5. MODELADO DE GRANOS

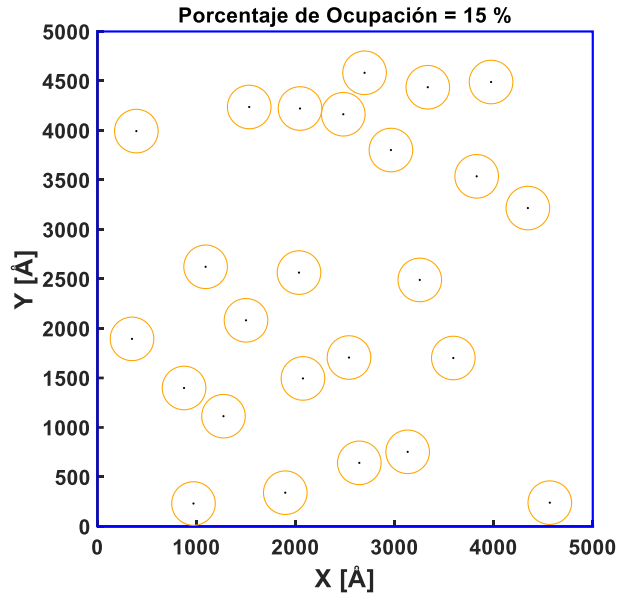


Figura 5.7: Conjunto aleatorio de 25 granos con radios de 220 Å. Los círculos en color naranja representan los granos y el cuadrado azul representa la matriz dieléctrica. La distancia inter-superficial es aleatoria. La matriz dieléctrica tiene un lado de 5000 Å.

En la **Tabla 5.3** se muestran los datos del conjunto aleatorio de granos de la **Figura 5.7**.

Tabla 5.3: Datos del conjunto regular para 25 granos con radios de 220 Å. Se muestran las coordenadas de los centros en la columna de X, Y en Ángstroms. Se observa un comportamiento aleatorio en las coordenadas de sus centros.

Grano	X [Å]	Y [Å]	Radio [Å]
1	4344.893	3216.216	220
2	874.0517	1398.746	220
3	3828.167	3536.852	220
4	3973.42	4489.541	220
5	1091.742	2622.863	220
6	1499.581	2082.247	220
7	969.3037	231.5354	220
8	2074.361	1495.057	220
9	2539.153	1706.222	220
10	3334.602	4436.76	220
11	2044.847	4221.822	220
12	4566.411	239.9885	220
13	2962.512	3802.234	220
14	3131.59	753.5874	220
15	1272.108	1113.705	220
16	392.4964	3993.613	220
17	348.8732	1894.608	220
18	2481.697	4163.859	220

19	1531.898	4237.201	220
20	2643.358	642.227	220
21	2696.448	4582.57	220
22	1895.91	340.6607	220
23	3592.168	1701.475	220
24	3253.707	2490.179	220
25	2034.496	2564.361	220

5.3.3 Conjunto de 87 Granos

En el conjunto aleatorio de la [Figura 5.7](#) tiene un porcentaje de ocupación del 15%. Se genera un conjunto aleatorio de 100 granos con el mismo radio de 200 Å, en el cual el porcentaje de ocupaciones aumentará. Esto es porque el algoritmo distribuye unos 75 granos más en la matriz dieléctrica de la misma dimensión de la [Figura 5.7](#). Dicho resultado se muestra en la [Figura 5.8](#).

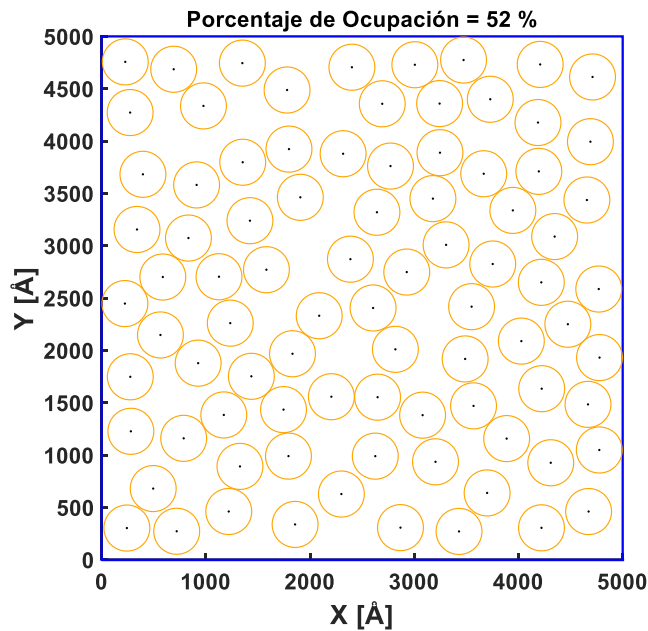


Figura 5.8: Conjunto aleatorio de 87 granos con radios de 220 Å. Los círculos en color naranja representan los granos y el cuadrado azul representa la matriz dieléctrica. La distancia inter-superficial es aleatoria. La matriz dieléctrica tiene un lado de 5,000 Å.

El porcentaje de ocupación de la [Figura 5.8](#) es del 52%, claramente ha aumentado. En conclusión, si se fija la dimensión de lado en la matriz dieléctrica y aumentamos el número de granos, el porcentaje de ocupación aumenta. Este aumento del porcentaje de ocupación hace que exista menos espacio vacío y los granos están más cerca entre ellos. Hace que las distancias inter-superficiales sean menores en comparación con una muestra con un porcentaje de ocupación más bajo.

5.3.4 Conjunto de 347 Granos

Ahora aumentaremos la dimensión del lado de la matriz dieléctrica al doble, buscando el máximo número de granos a distribuir. En la **Figura 5.9** se muestra el nuevo conjunto aleatorio generado en la matriz dieléctrica, teniendo un máximo total de 347 granos.

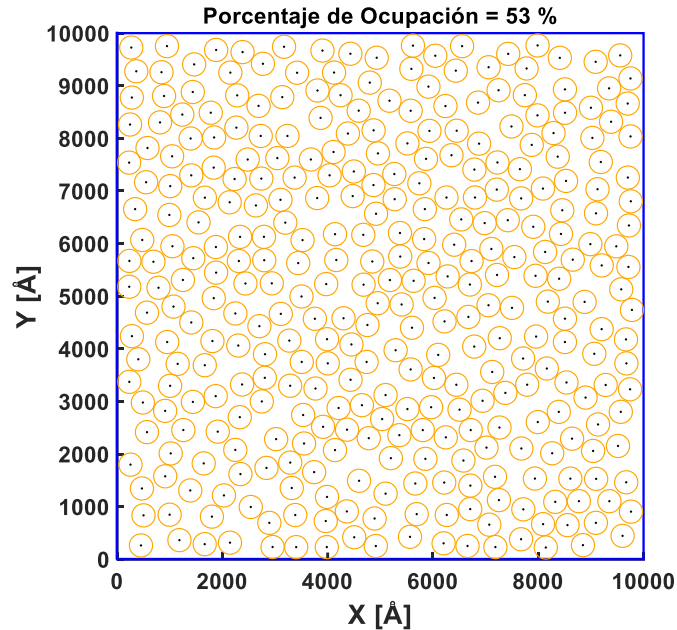


Figura 5.9: Conjunto aleatorio de 347 granos con radios de 220 Å. Los círculos en color naranja representan los granos y el cuadrado azul representa la matriz dieléctrica. La distancia inter-superficial es aleatoria. La matriz dieléctrica tiene un lado de 10,000 Å.

5.3.5 Discusión. Porcentaje de Ocupación

Como se observa el porcentaje de ocupación es de un 53%. Al pedir más granos a distribuir cubriremos más área teniendo un porcentaje de ocupación más alto. Pero tenemos que considerar dos aspectos importantes. Primero, cuando aumentamos un número de granos puede pasar que el algoritmo no pueda encontrar espacio para poder ubicar todos los granos. Por ejemplo, suponga que queremos distribuir 200 granos, con radios de 220 Å, en una matriz dieléctrica de lado de 5,000 Armstrong, simplemente es imposible ya que no caben en la matriz dieléctrica. Segundo, aunque la matriz tenga espacio suficiente y como el proceso es aleatorio tal vez no encuentre un lugar para ubicar un nuevo grano, dejando el algoritmo ejecutándose por más tiempo del esperado. A lo anterior, por ejemplo, suponga que queremos distribuir 90 granos en una matriz dieléctrica de lado de 5,000 Armstrong.

En sí, un conjunto con más granos en una matriz dieléctrica más grande requiere de un tiempo de ejecución mayor. Cuando el porcentaje de ocupación aumenta los granos están más próximos unos de otros. El porcentaje de ocupación máximo que se ha encontrado para este conjunto de grano ronda entre el 50 al 55 %. Conjuntos más allá

de este porcentaje de ocupación requieren un tiempo de cómputo mayores o simplemente son imposibles

En el algoritmo no existe una regla para calcular exactamente cuántos granos máximos pueden caber en una muestra. Solo podemos ir aumentando el número de granos y esperar a que el código finalice de manera exitosa. Este conjunto aleatorio es la base para generar muestras virtuales para representar materiales granulares reales. Ahora el siguiente paso es generar el valor de sus radios desde una distribución gaussiana. Esto nos permitirá generar conjuntos aleatorios que se acerquen más a un material granular real, la cual se explica en la siguiente [Sección 5.4](#) y [Sección 5.4](#).

5.4 Radios Generados con una Distribución Gaussiana

Dado el conjunto aleatorio de granos con granos constantes de la [Sección 5.3](#), ahora nos enfocaremos en la generación de los radios desde una función de distribución Gaussiana. La función de distribución gaussiana que se usara tiene los valores de una media de $\bar{R} = 220 \text{ \AA}$ y una dispersión de $\sigma_R = 110/30 \text{ \AA}$. Estos valores son propuestos. En la [Figura 5.10](#) se muestra la gráfica de la distribución que se usará para generar los radios de los granos en todos los conjuntos aleatorios de la [Sección 5.4](#).

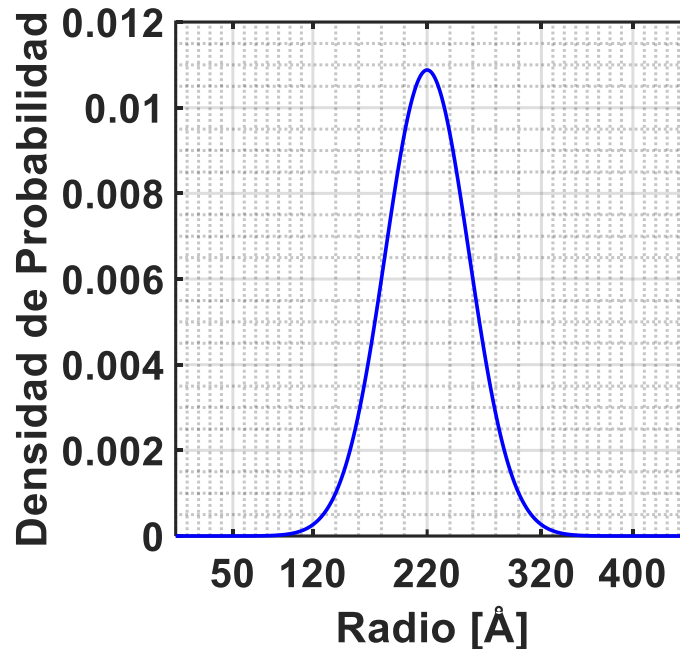


Figura 5.10: Función de densidad de probabilidad Gaussiana para la generación de los radios. Media de $\bar{R} = 220 \text{ \AA}$ y una dispersión de $\sigma_R = 110/30 \text{ \AA}$

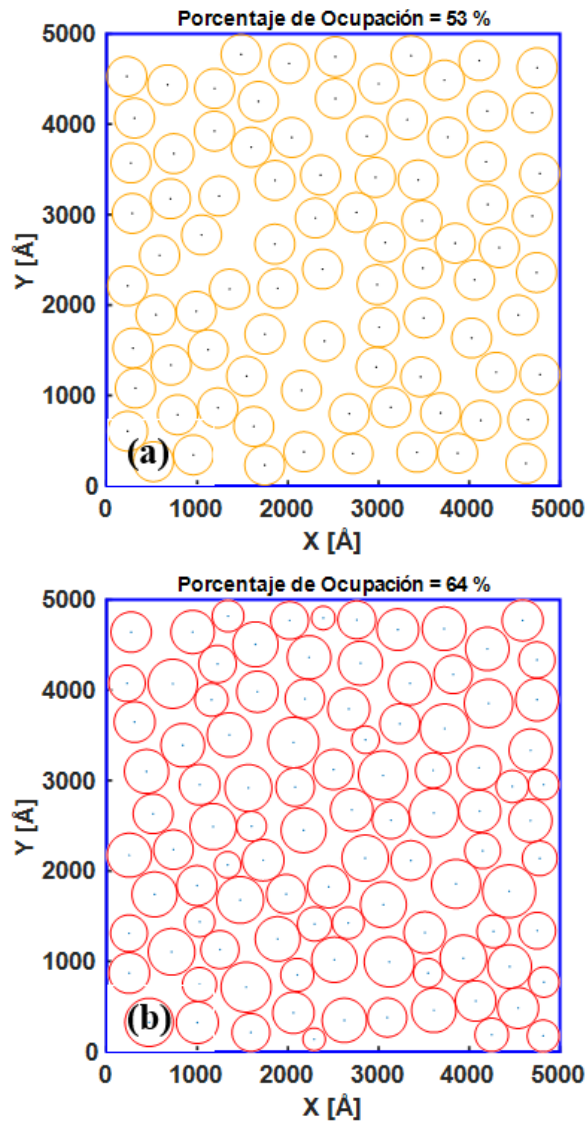
La gráfica de la **Figura 5.10** nos indica la relación que existe entre los radios, la densidad de probabilidad en una distribución Gaussiana. En el código se implementa la generación de los radios en función de la distribución gaussiana anterior. Para más detalle vea la **Sección E3** del **Apéndice E**.

Se ha elegido la generación de radios desde una distribución gaussiana por dos razones. La primera es que esta distribución aparece frecuentemente en la naturaleza y los materiales granulares reales exhiben una distribución de radios gaussiana. Segundo, el porcentaje de ocupación de un conjunto aleatorio con radios gaussianos es mayor respecto a un conjunto aleatorio de grano con radios constantes (visto en la **Sección 5.2**). Este último conjunto es explicado más a detalle en la siguiente **Sección 5.5**.

5.4.1 Comparación de Porcentaje de Ocupación

Para demostrar que radios de los granos generados desde una distribución gaussiana brinda un mayor porcentaje de ocupación se tiene que en la **Figura 5.11** el porcentaje de ocupación se compara entre unos conjuntos de granos aleatorios con radios constantes y radio gaussianos. Esto se hace manteniendo fija la dimensión de lado de la matriz dieléctrica para ambos conjuntos.

CAPÍTULO 5. MODELADO DE GRANOS



el

Figura 5.11: Diferentes conjuntos de granos. (a) Conjunto de 87 granos aleatorios con radios constantes (220 Å) con un porcentaje de ocupación de 53 %. (b) Conjunto de 100 granos aleatorios con granos Gaussianos (Media de $\bar{R} = 220$ Å y una dispersión de $\sigma_R = 110/30$ Å) con un porcentaje de ocupación de 64 %. La matriz dieléctrica tiene una dimensión de lado de 5,000 Å.

Los resultados para ambos conjuntos aleatorios se muestran en la [Tabla 5.4](#), donde se hace la comparativa para el porcentaje de ocupación.

Tabla 5.4. Datos de ambos conjuntos aleatorios de la Figura 5.11

Propiedades del conjunto	Conjunto aleatorio de granos con radios constantes	Conjunto aleatorio con radios que gaussiano
Radios	220 Å	Media de $\bar{R} = 220$ Å y una dispersión de $\sigma_R = 110/30$ Å
Granos máximos en el conjunto	87	100
Porcentaje de Ocupación Máximo	53 %	64 %

Se observa que el número de granos, que se puede distribuir en una misma matriz dieléctrica, es mayor en un conjunto de granos aleatorios con granos gaussianos. Se tienen más granos por unidad de área y el porcentaje de ocupación es mayor. Esto significa que los granos están más cerca unos de otros. Esto representa mejor un material granular real, donde las distancias inter-superficiales son pequeñas, siendo más susceptibles al fenómeno de tunelamiento.

5.5 Conjunto Aleatorio de Granos (Radios con Distribución Gaussiana)

El último conjunto generado es un conjunto aleatorio de granos, pero sus radios son generados desde una distribución Gaussiana. Este algoritmo primero genera una lista de radios desde una distribución gaussiana y el algoritmo ordena los granos desde menor a mayor radio. Finalmente, el algoritmo los distribuye aleatoriamente, usando las restricciones impuestas en la [Sección 5.3](#). Para más detalle acerca de este algoritmo vea a la [Sección E3](#) del [Apéndice E](#). Para ejemplificar lo anterior en la [Figura 5.12](#) se muestra un esquema de cómo se distribuyen los granos gaussianos.

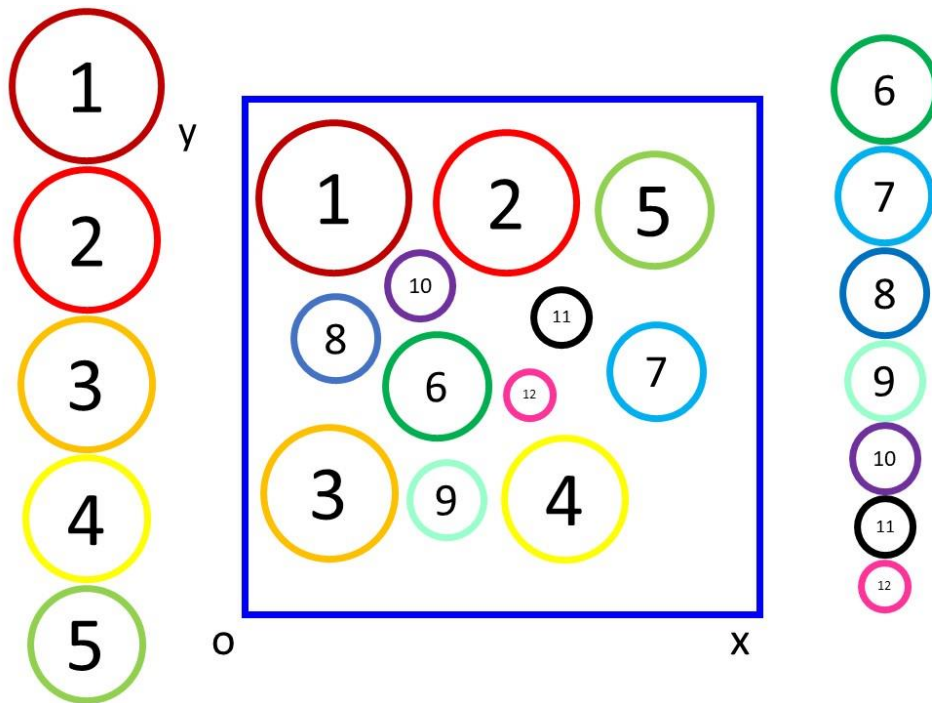


Figura 5.12: Esquema de un conjunto aleatorio de granos gaussianos. Primero, los granos son ordenados de mayor a menor radio. Segundo, se empiezan a distribuir desde los granos con el mayor radio. El grano 1 que tiene el mayor radio se ubica primero en la matriz dieléctrica. Posteriormente se ubica el grano 2, luego el 3, hasta llegar al último grano, el grano 12.

Los primeros granos por distribuir son los granos que tienen mayor radio y por ende el área que ocupan es mayor. Aunque el espacio disponible se va reduciendo el radio de los granos restantes a distribuir también disminuyen. Estos granos restantes que tienen un menor radio respecto a los granos ya distribuidos pueden caber más fácilmente entre la separación de los granos (espacio vacío). Esta forma de ubicar los granos hace que el algoritmo sea más eficiente en su ejecución. Los conjuntos se crean más rápido. Aunque existen otras variables a tomar en cuenta (cantidad de granos, radios gaussianos y la dimensión de la matriz dieléctrica) esta forma de ubicar los granos da una ventaja considerable en el tiempo de cómputo.

5.5.1 Conjunto Aleatorio de 25 Granos

En la **Figura 5.13** se genera un conjunto aleatorio de 25 granos, sus radios se han generado la distribución gaussiana. Los datos son los mismos que en la **Sección 5.4**, es decir, una media de $\bar{R} = 220 \text{ \AA}$ y una dispersión de $\sigma_R = 110/3 \text{ \AA}$.

CAPÍTULO 5. MODELADO DE GRANOS

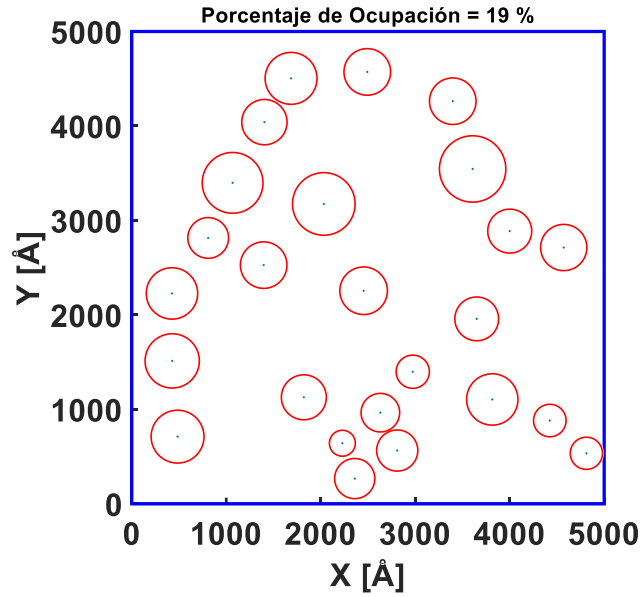


Figura 5.13: Conjunto aleatorio de 25 granos con radios de una distribución Gaussiana de la Sección 5.1. La matriz dieléctrica tiene una dimensión de lado de 5,000 Å. Los círculos en color rojo representan los granos y el cuadrado azul representa la matriz dieléctrica. Las distancias inter-superficiales son aleatorias.

Como se observa en **Figura 5.13** los radios de los granos son ligeramente diferentes, ya que son generados desde la distribución gaussiana. El porcentaje de ocupación fue del 19 %. En la **Figura 5.14** se presenta un histograma el cual muestra la naturaleza gaussiana de los radios.

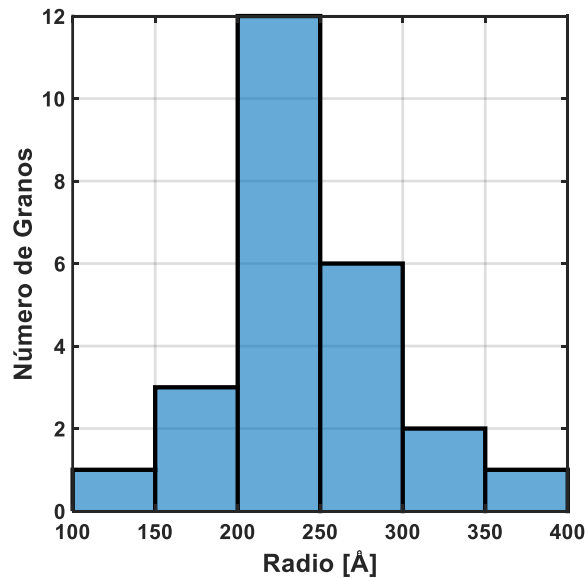


Figura 5.14: Distribución gaussiana de los 25 radios generados para el conjunto de granos aleatorios de la Figura 5.13. Con una media de $\bar{R} = 220 \text{ \AA}$ y una dispersión de $\sigma_R = 110/3 \text{ \AA}$. En el eje X se indican los radios de los granos. En el eje Y se indica el

CAPÍTULO 5. MODELADO DE GRANOS

número de granos que está dentro de ese rango. Se puede observar el comportamiento gaussiano.

Los datos del conjunto aleatorio de granos con radios gaussianos de la **Figura 5.13** están indicados en la **Tabla 5.5**.

Tabla 5.5: Datos de las posiciones de los centros con sus respectivos radios del conjunto de granos mostrados en la **Figura 5.13**. Los granos están ordenados respecto a los radios de mayor a menor.

Grano	X [Å]	Y [Å]	Radio [Å]
1	3607.66	3544.88	351.21
2	2032.54	3174.38	331.28
3	1067.39	3397.72	321.55
4	428.12	1512.77	287.24
5	484.80	711.08	279.78
6	1685.95	4503.83	274.62
7	425.46	2227.04	271.96
8	3815.61	1104.49	271.66
9	2453.97	2255.31	251.61
10	2492.63	4571.98	246.60
11	1396.12	2526.85	246.30
12	3397.36	4262.03	246.21
13	4571.75	2712.98	244.62
14	1403.80	4040.24	239.71
15	1821.30	1127.35	237.93
16	4000.27	2886.66	232.56
17	3651.07	1957.63	231.69
18	2809.58	563.93	217.69
19	809.00	2814.46	215.45
20	2359.96	266.94	212.48
21	2631.02	964.73	204.10
22	2974.07	1398.16	175.73
23	4424.46	881.51	172.05
24	4811.49	534.72	170.50
25	2229.12	641.18	137.18

5.5.2 Conjunto Aleatorio de 100 granos

Se aumenta el número de granos manteniendo la misma dimensión de lado 5,000 Å en la matriz dieléctrica y se genera un conjunto de 100 granos aleatorios con la misma distribución gaussiana que se ha usado. En la **Figura 5.15** se muestra el conjunto en sí.

CAPÍTULO 5. MODELADO DE GRANOS

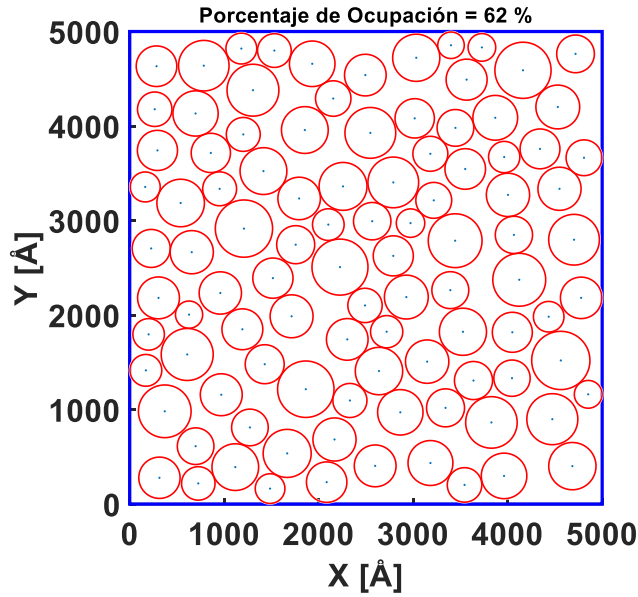


Figura 5.15: Conjunto aleatorio de 100 granos con radios generados desde una distribución gaussiana. La matriz dieléctrica tiene una dimensión de lado de 5,000 Å. Los círculos en color rojo representan los granos y el cuadrado azul representa la matriz dieléctrica. Las distancias inter-superficiales son aleatorias.

En la **Figura 5.16** se presenta un histograma el cual muestra la naturaleza gaussiana de los radios de la **Figura 5.15**.

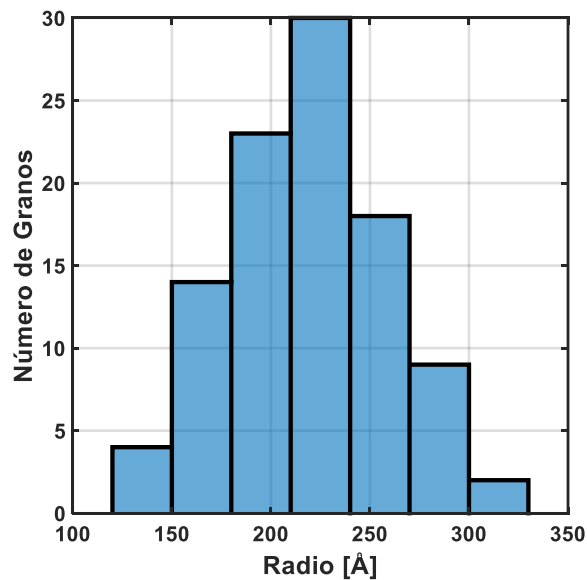


Figura 5.16: Distribución gaussiana de los 25 radios generados para el conjunto de granos aleatorios de la **Figura 5.15**. Con una media de $\bar{R} = 220$ y una dispersión de $\sigma_R =$

110/3 Å. En el eje X se indican los radios de los granos. En el eje Y se indica el número de granos que está dentro de ese rango.

Cada vez que generamos más granos el porcentaje de ocupación aumenta, haciendo que los granos estén cada vez más cerca y así el espacio vacío disminuya. Si a el algoritmo se le continúa pidiendo que genere más granos se llegará a que las distancias inter-superficiales sean más cercanas apareciendo clústeres que son una agrupación de granos.

5.5.3 Conjunto Aleatorio de 400 granos

Como se vio para una matriz dieléctrica de 5,000 Å se genera un conjunto de 100 granos aleatorios con granos gaussianos el porcentaje de ocupación llega a un límite del 62%. Para este tipo de conjuntos este porcentaje de ocupación ronda el máximo. Para producir de nuevo un porcentaje de ocupación máximo ahora se distribuye un total 400 granos en una matriz de lado de 1,0000 Å. Esta dimensión de lado es el doble de la matriz dieléctrica anterior. En la **Figura 5.17** se muestra tal conjunto.

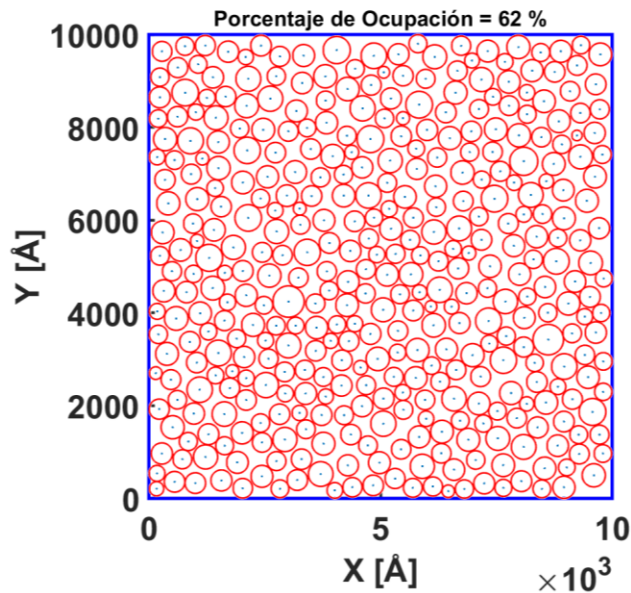


Figura 5.17: Conjunto aleatorio de 400 granos con radios de una distribución gaussiana. La matriz dieléctrica tiene una dimensión de lado de 10,000 Å. Los círculos en color rojo representan los granos y el cuadrado azul representa la matriz dieléctrica. Las distancias inter-superficiales son aleatorias.

Se duplicó el lado de la matriz eléctrica y se ha encontrado que el conjunto de 400 granos aleatorios con radios gaussianos llega a un porcentaje de ocupación máximo de 62 %. Este valor es superior al porcentaje de ocupación para el conjunto aleatorio con granos constantes visto en la **Sección 5.3**.

CAPÍTULO 5. MODELADO DE GRANOS

Se grafica los radios de todos los granos en un histograma. Ver [Figura 5.3](#). La gráfica de histograma es útil para ver el rango de los radios de los granos que se distribuyeron en la matriz dieléctrica.

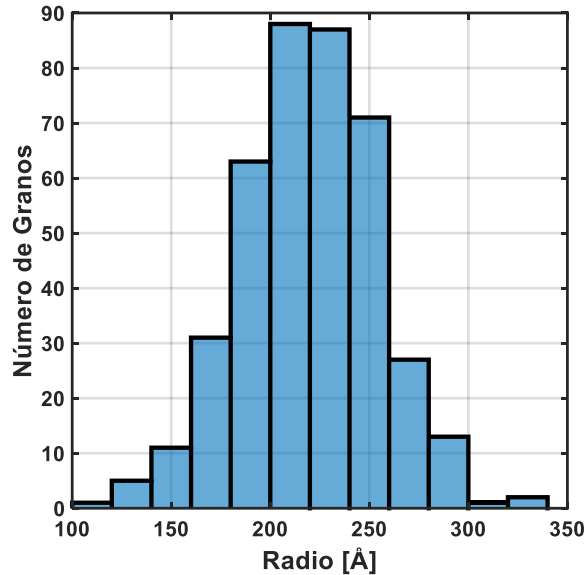


Figura 5.18: Distribución gaussiana de los 400 radios generados para el conjunto de granos aleatorios de la Sección 5.3. Con una media de $\bar{R} = 220$ y una dispersión de $\sigma_R = 110/3$ Å. En el eje X se indican los radios de los granos. En el eje Y se indica el número de granos que está dentro de ese rango. Se puede observar el comportamiento gaussiano..

Entre más granos se distribuyan, con la condición de que la matriz dieléctrica los pueda contener, el histograma describe más el comportamiento gaussiano. Entre más granos se pidan a distribuir más variaciones en los radios se van a tener y el histograma reflejará mejor la forma funcional de la distribución gaussiana de la [Figura 5.10](#).

En conclusión, se partió desde una distribución regular, luego se implementó una distribución aleatoria y finalmente, se añade a la naturaleza de los radios una distribución gaussiana. Como se mencionó este conjunto se acerca más al sistema de estudio para un mejor acercamiento a una muestra física. Esta última distribución se usará en el [CAPÍTULO 6](#) para realizar las pruebas de superconductividad y efecto re-entrante.

5.6 Comparación Entre Energías (E_J y E_C)

Una vez generado un conjunto aleatorio de granos con granos gaussianos ahora pasaremos al análisis entre los granos entre sí. El algoritmo hará una comparación entre las diferentes energías calculadas E_J y E_C para todas las combinaciones de pares de granos (sin repeticiones). Ver [Ecuación 2.8](#). Veamos un esquema básico para la comparación entre granos. Ver [Figura 5.19](#)

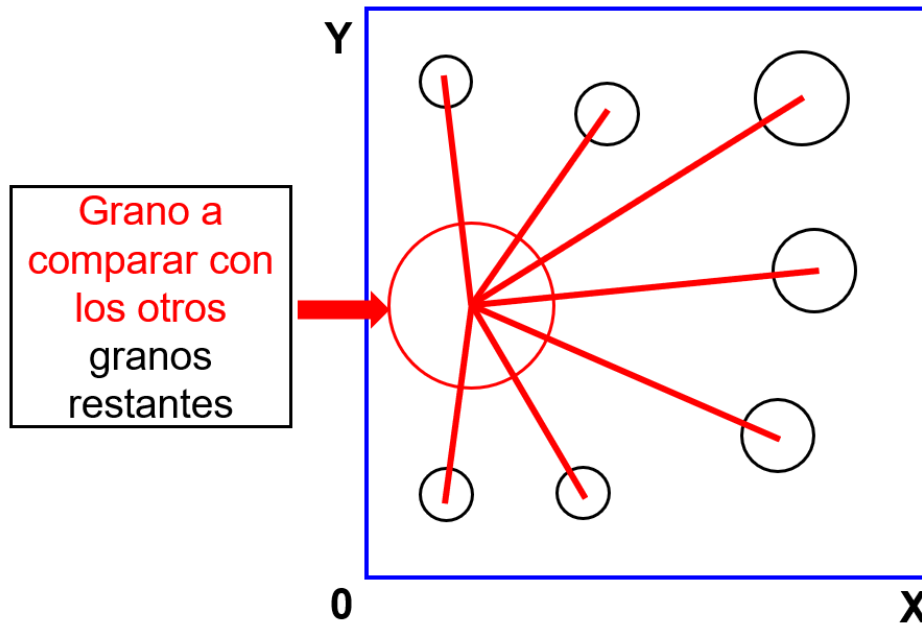


Figura 5.19: Figura esquemática para la comparación entre granos. El grano negro se compara con los granos negros. Se calcularán ambas energías para cada par de granos

En el conjunto de la [Figura 5.19](#) los granos en color negro representan todos los nodos restantes que se comparan con el grano rojo. Las líneas rojas indican la comparativa que hay que realizar entre todos los pares de granos para calcular ambas energías (E_C y E_J). En la [Figura 5.20](#) se ejemplifica otra comparación entre los otros granos del mismo conjunto. Las líneas verdes indican la comparación entre estos granos. La comparación repetida entre granos no es permitida porque ya se realizó. Esto se indica con la línea roja morada.

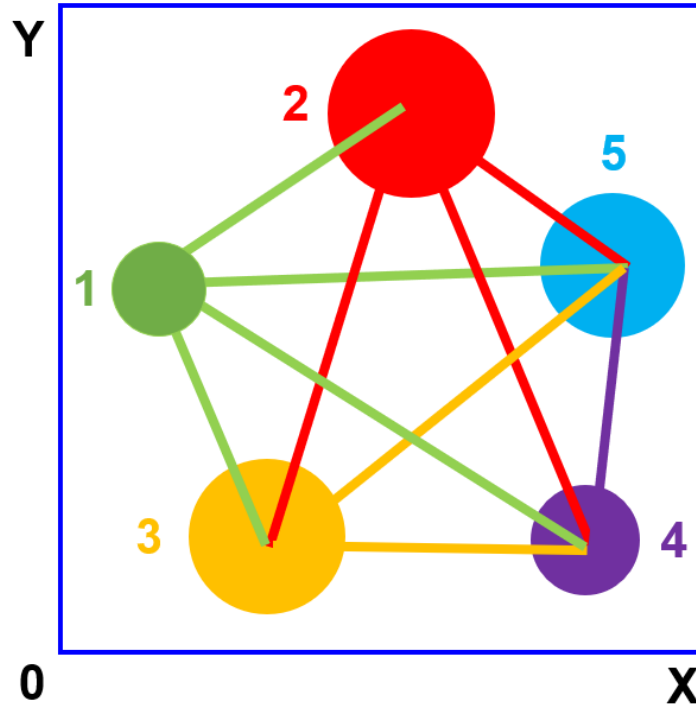


Figura 5.21: Esquema de las comparaciones entre todos los granos. Las comparaciones son indicadas con líneas de color con su respectivo grano. Se empieza por el grano 1, luego el grano 2, posteriormente el 3, siguiendo el 4 y, por último, el grano 5. En total observamos que hay 10 comparaciones en el conjunto de granos.

De la **Figura 5.21** el número de conexiones totales se calcula con la ayuda de la **Ecuación 5.7**, con el número de granos $n = 5$ y la constante $k = 2$.

$$C_k^n = \binom{5}{2} = \frac{5!}{(5-2)!2!} = 10 \quad 5.8$$

Así el resultado de las conexiones para la distribución de granos de la **Figura 5.21** es de 10 conexiones totales. Se necesitan hacer un total de 10 cálculos para este conjunto de granos para calcular las energías de Coulomb y Josephson. De estos 10 cálculos totales se verá si existe o no una conexión para que se presente el fenómeno de tunelamiento.

Ahora la **Tabla 5.6** se indican todas las comparaciones totales que se realizan para cada relación de nodo, se calculan ambas energías (E_C y E_J), y se determina si existe o no el tunelamiento. Estas relaciones son de vital importancia, ya que el algoritmo prueba todas estas comparaciones y calcula si existe o no el tunelamiento, para posteriormente crear una red de transporte de corriente eléctrica crítica.

Tabla 5.6. Tabla de comparaciones totales para el conjunto de granos mostrado en la **Figura 5.21**. Se usa un código de colores para identificar mejor cada comparación de

CAPÍTULO 5. MODELADO DE GRANOS

pares de granos. (verde primer grano, rojo segundo grano, amarillo el grano 3, morado el grano 4 y azul marino el último grano)

CONEXIÓN NODOS	
Nodo Salida	Nodo Entrada
1	2
1	3
1	4
1	5
2	3
2	4
2	5
3	4
3	5
4	5

5.6.2 *Nodo s* y *Nodo t* en un Conjunto Aleatorio de Granos

Antes de pasar a la generación de redes de transporte se debe identificar en donde se aplica la corriente eléctrica en los conjuntos generados. Esto se hará por medio de nodos especiales que son: el *Nodo s* y el *Nodo t*. La ubicación de estos nodos especiales para todos los conjuntos aleatorios de granos con radio gaussianos se muestra en la [Figura 5.22](#).

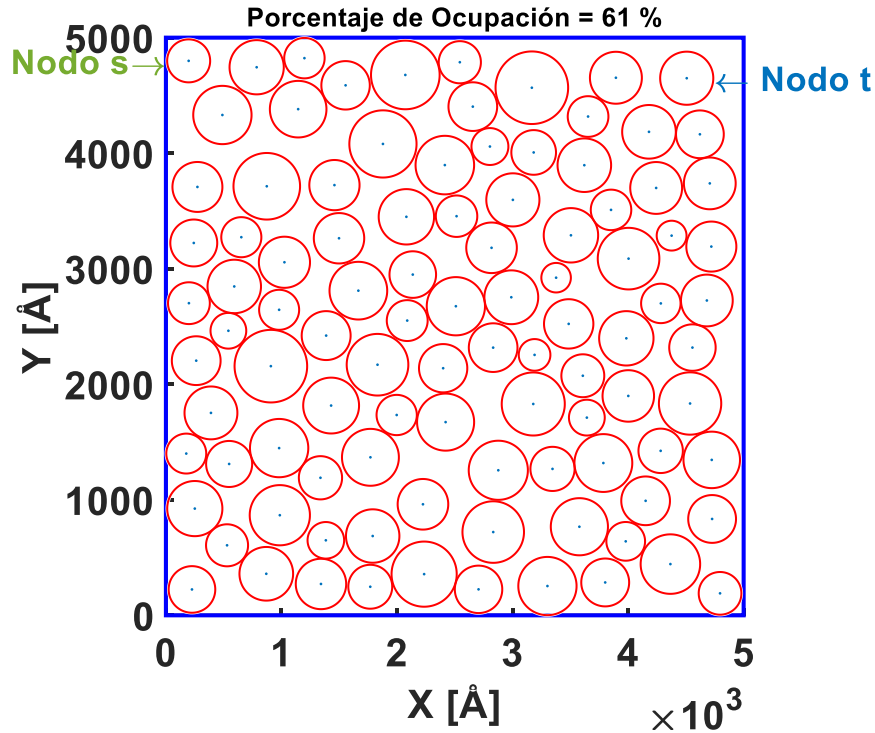


Figura 5.22: *Nodo Fuente (Nodo s) en color verde y Nodo Sumidero (Nodo t) en color azul.*

El nodo fuente se etiqueta como *Nodo s* y se ubicará en la parte superior izquierda, el nodo sumidero *Nodo t* se ubicará en la parte superior derecha del conjunto de la **Figura 5.22**. Dicha disposición se eligió para simular el método de las 4 puntas que se usa para caracterizar materiales eléctricamente. Las puntas de corriente eléctrica se conectarán en dichos nodos, suministrando la entrada y salida de la corriente eléctrica. Del método de 4 puntas las otras dos puntas restantes aplican un voltaje a la muestra, pero no se usan en este modelo.

5.7 Redes de Transporte

Todos los conceptos hasta ahora presentados son esenciales para desarrollar el modelo propuesto. En especial, son de gran utilidad para encontrar los caminos de percolación durante la simulación del transporte de corriente en un material granular hipotético.

Para poder explicar el desarrollo de la simulación del superconductor mediante el uso de grafos es necesario repasar cómo se aborda el problema. El primer paso fue el generar una muestra virtual de un conjunto de granos. Ver **Sección 5.5**. Luego se aplicará una corriente en estado estacionario desde el nodo fuente al nodo sumidero. El algoritmo

CAPÍTULO 5. MODELADO DE GRANOS

aplicado determinará la red que interconecta el *Nodo s* y el *Nodo t* y aplicando las ideas de la **Sección 5.6** se crea una red de aristas dirigidas que indican la dirección de la corriente para dos granos que exhiben el fenómeno de tunelamiento. Se aplica el algoritmo desarrollado para calcular la máxima corriente crítica superconductora I_c^{Max} que fluye a través de todo un conjunto virtual de granos. Para más detalle ver **Apéndice E**.

El sistema busca distribuir y transportar toda la corriente por medio de todos los caminos de comunicación disponibles. Así, la corriente crítica I_c que fluye a través de toda la muestra debe determinarse maximizando las corrientes que pasa a través de todos los granos que permiten el tunelamiento $I_c^{i,j}$, manteniendo el estado superconductor. El sistema trata de mantener el estado superconductor el mayor tiempo posible para mantener la fase superconductora global. Para más detalle de esta sección diríjase al **Apéndice D**.

La primera tarea por realizar será ver los caminos de percolación. Se determina una red interna que recorre la muestra, conectando el *Nodo Fuente* y el *Nodo Sumidero* de la corriente a un intervalo para una temperatura fija. La construcción de un grafo a partir de la muestra se realiza mediante la asociación de cada grano a un nodo y a cada par de granos que exhiben el tunelamiento ($E_j > E_c$) se asocia a una arista dirigida.

Se construye una red conformada de aristas dirigidas que tienen una capacidad igual a la corriente crítica I_c que puede transportar. Entonces, la determinación de la corriente crítica máxima a través del sistema puede obtenerse resolviendo un problema típico en la teoría de grafos. Este es el problema de flujo máximo de Ford-Fulkerson. Dada una red con capacidades no negativas asociadas a cada arista (corriente crítica superconductora), y dados los *Nodos Fuente* y el *Nodo Sumidero*, la tarea es calcular un flujo máximo de corriente crítica superconductora que un conjunto de granos puede transportar a una temperatura fija. Esta red de transporte y el cálculo de la máxima corriente crítica (densidad de corriente crítica) se muestran en el **CAPÍTULO 6** para algunos conjuntos de granos.

CAPÍTULO 5. MODELADO DE GRANOS

CAPÍTULO 6. RESULTADOS

En este capítulo, se muestran los resultados que arroja el algoritmo presentado en los capítulos anteriores. El algoritmo se aplica a un material superconductor granular hipotético y es capaz de dibujar la red de transporte de corriente crítica a una temperatura fija. Variando la temperatura, es posible reproducir el comportamiento superconductor en un perfil de densidad de corriente crítica en función de la temperatura. Finalmente, se logra reproducir el efecto re-entrante en la zona superconductora.

6.1 Red de Transporte para un Conjunto de 5 Granos

Se generó una red de transporte de corriente eléctrica crítica superconductora en un conjunto de granos aleatorios, con radios generados desde una distribución gaussiana, contenidos en una matriz dieléctrica con una dimensión fija. Esta red de transporte es equivalente en su representación gráfica a la red de la densidad de corriente eléctrica crítica. Para todos los conjuntos que se muestran a continuación, se calculará la densidad de corriente crítica. Para mostrar la red de transporte de corriente eléctrica crítica, primero se generó un conjunto aleatorio de 5 granos, el cual es un conjunto pequeño para visualizar mejor la red, con la misma distribución gaussiana usada hasta ahora ([Sección 5.4](#)). La [Figura 6.1](#) muestra dicho conjunto.

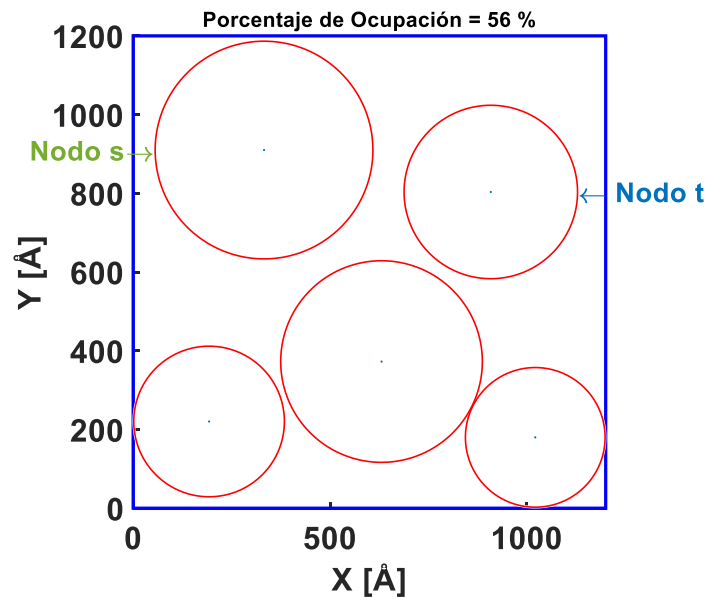


Figura 6.1: Conjunto aleatorio de 5 granos con radios generados desde una distribución Gaussiana. La matriz dieléctrica tiene una dimensión de lado de 1,200 Å. En el conjunto

CAPÍTULO 6. RESULTADOS

se indica el Nodo s y el Nodo t . El porcentaje de ocupación es de 56 %. Las distancias inter-superficiales son aleatorias.

Las posiciones y radios de los granos del ejemplo mostrado en la **Figura 6.1** se tabulan en la **Tabla 6.1**. En dicha tabla, se indica el número de Nodo, la coordenada XY de los granos y los radios de estos.

Tabla 6.1: Coordenadas y radios para los granos del ejemplo mostrado en la **Figura 6.1**.

Nodo	Coordenadas xy		Radio [Å]
	X [Å]	Y [Å]	
1	228.82	986.27	209.44
2	532.23	558.17	264.25
3	953.40	295.48	205.62
4	236.14	226.89	179.46
5	969.26	911.56	224.57

6.1.1 Distancia de Tunelamiento de 50 Å

Posteriormente, se calculó la red de transporte para la densidad de corriente crítica superconductor. Para más detalles acerca del algoritmo que se usó, ver la **Sección E4** del **Apéndice E**. Se fijaron ciertos parámetros en el algoritmo para la simulación, siendo la distancia de tunelamiento $\delta = 50 \text{ Å}$, la temperatura de prueba $T = 0.1 \text{ K}$, la temperatura crítica $T_c = 3.49 \text{ K}$, la constante dieléctrica $\kappa = 19$, el lado de la matriz dieléctrica $1,200 \text{ Å}$, y la constante de redondez $\alpha = 0.45$. Usando la **Ecuación 5.7**, se hicieron 10 comparaciones totales para todos los granos del conjunto. Para estas 10 comparaciones entre pares de granos, el algoritmo calculó ambas energías, y se determinó si el fenómeno de tunelamiento ($E_j > E_c$) se presenta o no para cada par de granos, indicando así si estos están o no conectados. Cuando los granos están conectados, se dibuja una arista dirigida. La arista dirigida se representa con un vector con base y punta en los centros de los granos (círculos) donde se han comparado sus energías. Las flechas en la red se dibujan si los granos están conectados (a pesar de que no exista contacto físico), indicando que existe un tunelamiento y, por lo tanto, que producen una corriente eléctrica de tunelamiento. Así, la red total que representa la densidad de corriente crítica superconductor se muestra en la **Figura 6.2**.

CAPÍTULO 6. RESULTADOS

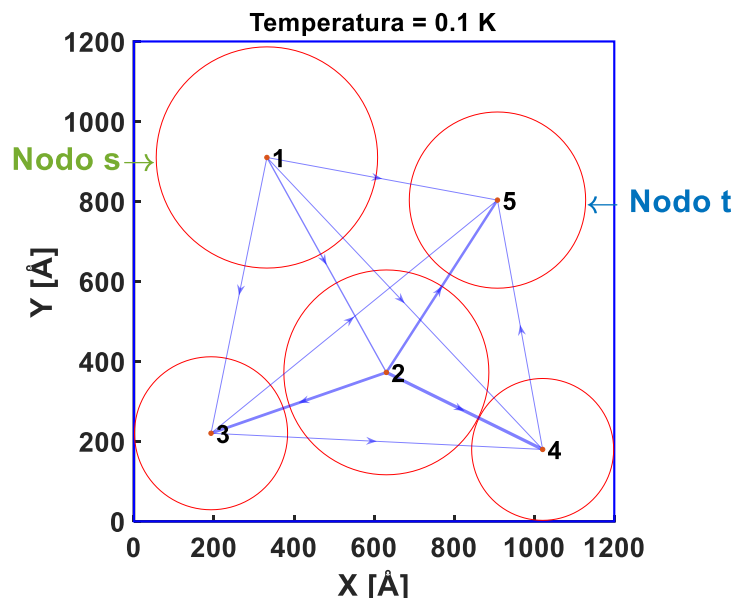


Figura 6.2: Red de transporte de la densidad de corriente para el conjunto de granos de la Figura 6.1. La distancia de tunelamiento que se escogió es de 50 Å. Las conexiones de red son las aristas dirigidas azules, 10 en total. Entre más gruesa sea una arista dirigida, mayor es su capacidad de transporte de corriente crítica (o densidad de corriente crítica).

La red de transporte mostrada en la **Figura 6.2** está numerada desde el Nodo 1 (*Nodo s* o *Nodo fuente*) hasta el Nodo 5 (*Nodo t* o *Nodo Sumidero*). Los nodos intermedios son numerados desde el 2 al 4. Para los nodos internos, el orden de su enumeración es irrelevante. El resultado es invariante a como se etiqueten los nodos internos.

Posteriormente, el algoritmo calculó todas las combinaciones de los pares de granos existentes en el conjunto, sin repetir. Luego, calculó las energías correspondientes y preguntó qué par de granos están conectados o no. En la **Tabla 6.2**, se presentan los resultados de la red de transporte para la **Figura 6.2**. Ahí se muestra la energía de Bloqueo de Coulomb, la energía de Josephson, y un parámetro Booleano el cual nos indica si existe o no el tunelamiento entre los pares de granos. Todas las 10 comparaciones totales en este ejemplo muestran que sí es permitido el tunelamiento. En la sección de CONEXIÓN DE NODOS de la **Tabla 6.2**, la dirección de la corriente se indica desde el nodo donde inicia la corriente (Columna 1) al nodo donde termina (Columna 2). Finalmente, se indica la columna para la densidad de corriente eléctrica crítica (I_C) que transporta el conjunto de granos. Al igual, se indica la densidad de corriente eléctrica crítica (J_C), siendo el cociente de la corriente eléctrica crítica (I_C) entre el área transversal del material granular.

Tabla 6.2: Resultados del análisis de la red de transporte para el conjunto de la Figura 6.2. Distancia de tunelamiento $\delta = 50 \text{ \AA}$; temperatura de prueba $T = 0.1 \text{ K}$.

CONEXIÓN NODOS		ENERGÍAS				
Nodo donde Inicia	Nodo donde Termina	$E_j [J]$	$E_c [J]$	Conexión (Booleano)	$I_c [A]$	$J_c [A/cm^2]$
1	2	6.95E-24	4.03E-32	Si	2.11E-08	146.788007
1	3	1.91E-24	8.68E-32	Si	5.79E-09	40.2378198
1	4	1.57E-28	3.38E-31	Si	4.78E-13	0.00332007
1	5	1.60E-25	1.27E-31	Si	4.88E-10	3.38639806
2	3	2.70E-23	2.29E-33	Si	8.21E-08	570.049695
2	4	1.48E-23	2.26E-32	Si	4.49E-08	311.697916
2	5	8.76E-24	3.32E-32	Si	2.66E-08	184.87758
3	4	2.87E-27	2.94E-31	Si	8.73E-12	0.06062064
3	5	7.02E-28	3.39E-31	Si	2.13E-12	0.01481342
4	5	1.08E-25	1.58E-31	Si	3.28E-10	2.27878973

Para calcular la máxima densidad de corriente crítica que se puede transportar en este ejemplo, que fluye desde el *Nodo s* hasta el *Nodo t* (ver [Sección D3 del Apéndice D](#)), el código analiza la red de transporte con el algoritmo de Ford-Fulkerson y aplica el método de “*camino de aumento*” (ver [Sección D4 del Apéndice D](#)). El algoritmo calculó así la máxima densidad de corriente crítica, arrojando un valor de $2.2788 [A/cm^2]$.

6.1.2 Distancia de Tunelamiento de 10 \AA

En el ejemplo anterior, en la columna de “Conexión” de la [Tabla 6.2](#), se aprecia que todas las filas dicen “Si”. Esto significa que para todo par de granos a comparar (sin hacer repetición) se produce el fenómeno de tunelamiento. Esto no siempre es así. Como se verá a continuación, se presentará un ejemplo donde no siempre existe el tunelamiento para todas las comparaciones totales de los pares de granos.

Usando el mismo conjunto de la [Figura 6.1](#), se ejecutó el código nuevamente para calcular la red de transporte para la densidad de corriente crítica superconductor (ver [Sección E4 del Apéndice E](#)). La distancia de tunelamiento ahora se escogió como $\delta = 10 \text{ \AA}$, la cual es menor que la usada en la [Sección 6.1.1](#) ($\delta = 50 \text{ \AA}$). Esto se hizo así con la finalidad de forzar en el modelo de **que no exista tunelamiento** para algunos pares de granos. Los demás parámetros de simulación no se modificaron. Nuevamente, se calcularon y se compararon las energías correspondientes entre sí para cada par de granos. La red resultante para el transporte de corriente eléctrica crítica se muestra en la [Figura 6.3](#).

CAPÍTULO 6. RESULTADOS

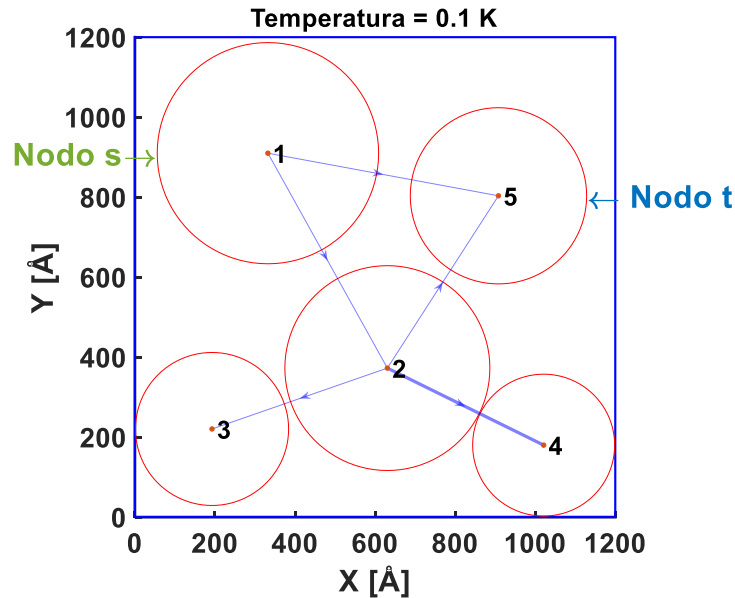


Figura 6.3: Red de transporte de la densidad de corriente crítica superconductor para el conjunto de granos de la Figura 6.1. La distancia de tunelamiento ahora es $\delta = 10 \text{ \AA}$. Las conexiones de red se representan por las aristas dirigidas azules. Entre más gruesa sea la arista dirigida, mayor es su capacidad de transporte de corriente crítica.

Como puede observarse, la red de transporte para la densidad de corriente crítica de la **Figura 6.3** ($\delta = 10 \text{ \AA}$) es más simple en comparación con la red de transporte de la **Figura 6.2** ($\delta = 50 \text{ \AA}$). La **Figura 6.3** tiene menos aristas dirigidas. Para ver esto más cuantitativamente, los resultados para esta red de transporte se muestran en la **Tabla 6.3**.

Tabla 6.3: Resultados del análisis de la red de transporte de la **Figura 6.3**. Distancia de tunelamiento $\delta = 10 \text{ \AA}$; temperatura de prueba $T = 0.1 \text{ K}$. Se indican en negritas los pares de granos que no presentan tunelamiento.

CONEXIÓN NODOS		ENERGÍAS		Conexión (Booleano)	$I_c [A]$	$J_c [A/cm^2]$
Nodo donde Inicia	Nodo donde Termina	$E_j [J]$	$E_c [J]$			
1	2	6.21E-27	4.03E-32	Si	1.89E-11	0.13115966
1	3	3.55E-29	8.68E-32	Si	1.08E-13	0.00074946
1	4	7.54E-50	3.38E-31	No	2.29E-34	1.59E-24
1	5	4.06E-35	1.27E-31	No	1.23E-19	8.57E-10
2	3	2.03E-23	2.29E-33	Si	6.16E-08	427.699494
2	4	5.50E-25	2.26E-32	Si	1.67E-09	11.6110196
2	5	1.12E-26	3.32E-32	Si	3.40E-11	0.23582527
3	4	2.76E-43	2.94E-31	No	8.38E-28	5.82E-18

CAPÍTULO 6. RESULTADOS

3	5	2.40E-46	3.39E-31	No	7.30E-31	5.07E-21
4	5	1.15E-35	1.58E-31	No	3.49E-20	2.43E-10

Del total de las 10 comparaciones presentadas en la [Tabla 6.3](#), se tienen solamente 5 conexiones que permiten el tunelamiento. Esto se observa en la columna de “Conexión”, en donde hay casillas en las que aparece la palabra “No”. Estos granos no están conectados, es decir, la energía de Bloqueo de Coulomb es mayor que la energía de Josephson ($E_C > E_J$). En estos casos, la cantidad de corriente eléctrica crítica es demasiado pequeña, del orden de $10^{-19} A$ y menor. En nuestro modelo, a estos valores pequeños de corriente eléctrica los consideramos como cero, lo cual correspondería a una resolución experimental de $10^{-19} A$, la cual está muy por debajo de la resolución de los equipos de medición de corriente modernos ($10^{-12} - 10^{-15} A$). En estos casos se considera que no existe corriente. En la [Tabla 6.4](#) se muestran las únicas conexiones de nodos que participan en el transporte de la corriente eléctrica crítica (I_C) de este segundo ejemplo.

Tabla 6.4: Relaciones de los nodos que están conectados para la red de transporte de la [Figura 6.3](#) con una distancia de tunelamiento de $\delta = 10 \text{ \AA}$.

CONEXIÓN NODOS		ENERGÍAS				
Nodo salida	Nodo Entrada	$E_J [J]$	$E_C [J]$	Conexión (Booleano)	$I_C [A]$	$J_C [A/cm^2]$
1	2	6.21E-27	4.03E-32	Si	1.89E-11	0.13115966
1	3	3.55E-29	8.68E-32	Si	1.08E-13	0.00074946
2	3	2.03E-23	2.29E-33	Si	6.16E-08	427.699494
2	4	5.50E-25	2.26E-32	Si	1.67E-09	11.6110196
2	5	1.12E-26	3.32E-32	Si	3.40E-11	0.23582527

Aplicando nuevamente el método de Ford-Fulkerson por medio de los “*caminos de aumento*”, tenemos que la máxima densidad de corriente crítica que puede transportar la red de la [Figura 6.3](#) ($\delta = 10 \text{ \AA}$) es de $0.50290 A/cm^2$.

6.1.3 Discusión

Como se pudo observar con este ejemplo de 5 nodos, nuestro modelo es sensible a la distancia de tunelamiento (δ). Al parecer, la distancia de tunelamiento permite que aumente o disminuya el número de conexiones posibles en una red de transporte de corriente crítica desde el *Nodo s* al *Nodo t*. Esto es consistente con el hecho experimental de que las propiedades de transporte eléctrico se ven reducidas drásticamente en materiales superconductores que tienen una distancia de tunelamiento muy pequeña. Vimos también que la máxima densidad de corriente crítica superconductor depende de la complejidad de la red de transporte. Entre más conexiones existan, se tendrá una red de transporte más compleja, con más caminos de percolación, y permitirá transportar

más corriente eléctrica. Caso contrario, si se tiene una red de transporte menos compleja, se tendrá un menor flujo de corriente. En conclusión, una densidad de corriente crítica mayor es debida a una red de transporte más compleja. La complejidad en la red aumenta cuando el valor de la distancia de tunelamiento (δ) es mayor o igual que la distancia inter-superficial que presentan los pares de granos para este ejemplo. En la siguiente sección, se simulará una red de transporte para un nuevo conjunto aleatorio de 100 granos para la distribución de radios gaussianos mostrada en la [Sección 5.4](#) del capítulo anterior.

6.2 Red de Transporte para un Conjunto de 100 Granos

Ahora pasaremos a un conjunto aleatorio de 100 granos en una matriz dieléctrica de lado de 5,000 Å con la misma distribución gaussiana usada hasta ahora. En la [Figura 6.4](#) se muestra el conjunto aleatorio de granos generado.

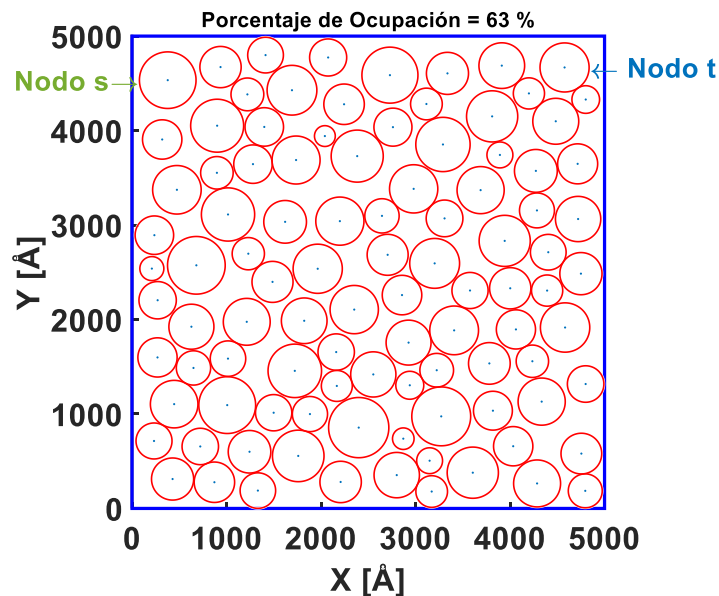


Figura 6.4: Conjunto aleatorio de 100 granos. Los radios fueron generados desde la distribución gaussiana presentada en la Sección 5.4. La matriz dieléctrica tiene una dimensión de lado de 5,000 Å. El porcentaje de ocupación es de 63 %. Las distancias inter-superficiales son aleatorias.

6.2.1 Distancia de Tunelamiento de 10 Å

Se calculó la red de transporte de corriente eléctrica crítica para el conjunto de granos de la **Figura 6.4**. Se fijaron los parámetros a usar en la simulación, usando una distancia de tunelamiento $\delta = 10 \text{ \AA}$, una temperatura de prueba $T = 0.1 \text{ K}$, una temperatura crítica $T_c = 3.49 \text{ K}$, una constante dieléctrica $\kappa = 19$, un lado de la matriz dieléctrica de $5,000 \text{ \AA}$, y una constante de redondez $\alpha = 0.45$. El algoritmo calculó la Energía de Bloqueo de Coulomb y la Energía de Josephson. Se realizaron las comparaciones totales entre las dos energías calculadas para cada par de granos y se determinó si existe tunelamiento o no. Se hizo el mismo análisis realizado en la **Sección 6.1** pero ahora con 100 granos.

Se calculó el número de comparaciones totales que debe de realizar el algoritmo (**Sección E4** del **Apéndice E**) usando la **Ecuación 5.7**. Con un número total de 100 granos ($N = 100$), una constante $k = 2$, y sustituyendo estos valores en la **Ecuación 5.7** obtenemos la **Ecuación 6.1**

$$C_2^{100} = \binom{100}{2} = \frac{100!}{(100-2)!2!} = 4950. \quad 6.1$$

El número de 4,950 son todas las comparaciones totales, sin repetir, entre los pares de granos del conjunto de la **Figura 6.4** que el algoritmo revisa para comprobar si existe o no tunelamiento. Lo anterior no se debe confundir con la red de transporte para la corriente eléctrica crítica (densidad de corriente crítica), recordando que esta red de transporte es conformada por aquellas comparaciones de granos que exhiben el fenómeno de tunelamiento.

Ahora bien, el algoritmo aplica la distancia de tunelamiento y el resultado se muestra en la **Figura 6.5**.

CAPÍTULO 6. RESULTADOS

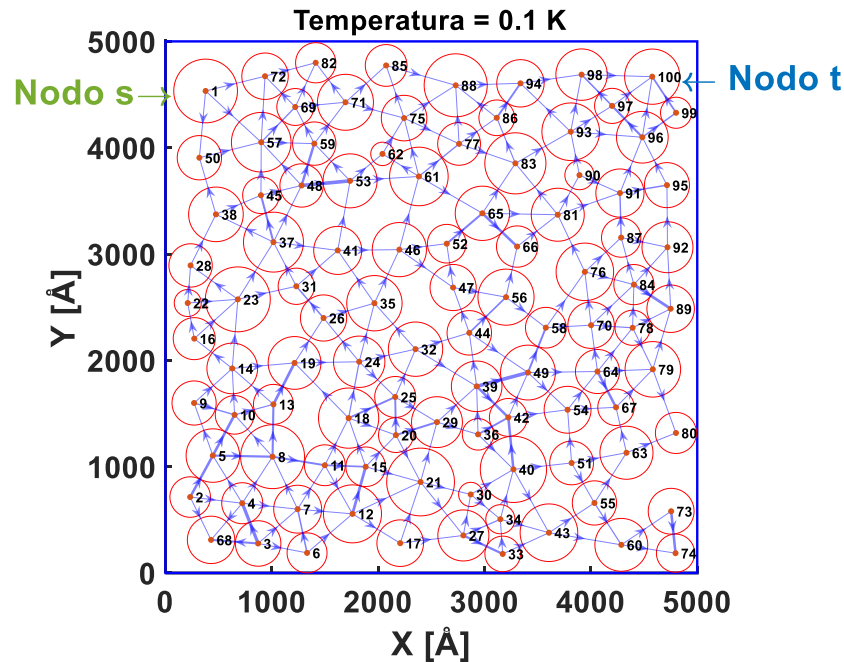


Figura 6.5: Red de transporte de la densidad de corriente crítica para el conjunto de granos de la Figura 6.4. La distancia de tunelamiento escogida fue de 10 \AA . Las conexiones de red son las aristas dirigidas azules. El número de conexiones que permite el tunelamiento es 225 de un total de 4950 posibles.

En la **Figura 6.5** se muestra la red de conexión. La corriente entra por el Nodo 1 (*Nodo s*) y sale por el Nodo 100 (*Nodo t*). El algoritmo (**Sección E4** del **Apéndice E**) calculó la máxima densidad de corriente crítica que puede transportar esta red, dando como resultado un valor de $1.3674 \times 10^{-5} \text{ A/cm}^2$.

El código programado también arroja un análisis de las comparaciones que se realizan para todos los pares de granos. Las comparaciones que permiten las conexiones son las aristas dirigidas (aristas de conexión, aristas superconductoras), siendo un total de 225 solamente. Caso contrario, las comparaciones que no cumplen con el criterio de tunelamiento son 4725. En la **Figura 6.6** se grafican en un histograma la cantidad de comparaciones que producen conexiones y la cantidad de comparaciones que no producen conexiones.

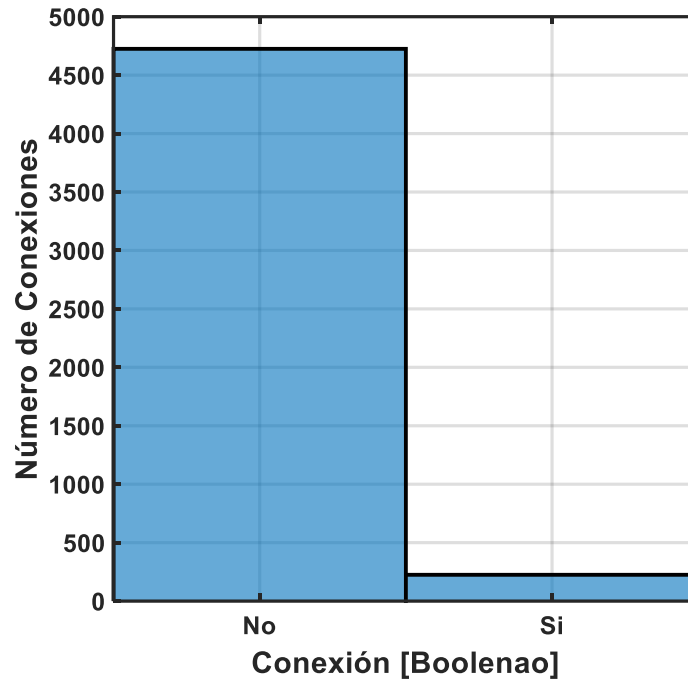


Figura 6.6: Representación booleana en un histograma de las comparaciones totales de la red de transporte de la Figura 6.5. Las comparaciones que no cumplen con el criterio de conexión son indicadas con el valor Booleano de “No”, siendo un total de 4725. Caso contrario cuando las comparaciones cumplen con el criterio de conexión, se les da un valor Booleano de “Si”, siendo estas las aristas dirigidas o aristas superconductoras, con un valor total de 225.

6.2.2 Distancia de Tunelamiento de 50 Å

Ahora se generará un análisis del mismo conjunto de granos de la [Figura 6.4](#), pero se aumentará la distancia de tunelamiento a $\delta = 50 \text{ \AA}$. Se mantienen los mismos parámetros de simulación, una temperatura de prueba de $T = 0.1 \text{ K}$, una temperatura crítica $T_c = 3.49 \text{ K}$, una constante dieléctrica $k = 19$, un lado de la matriz dieléctrica a $5,000 \text{ \AA}$, y una constante de redondez $\alpha = 0.45$. Nuevamente, se ejecuta el código de la [Sección E4 del Apéndice E](#). En la [Figura 6.7](#) se muestra la red de transporte para la densidad de corriente crítica superconductora.

CAPÍTULO 6. RESULTADOS

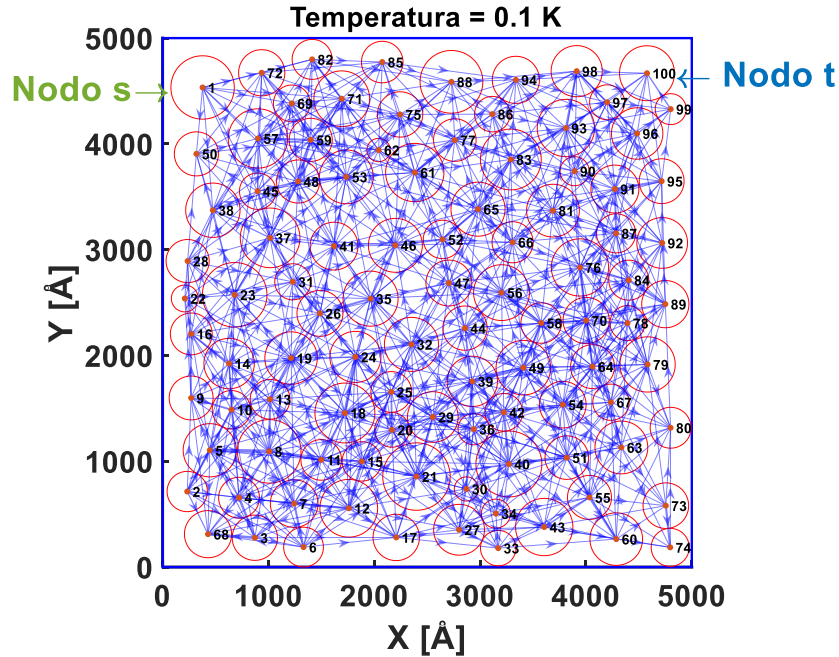


Figura 6.7: Red de transporte de la densidad de corriente para el conjunto de granos de la **Figura 6.4** para una distancia de tunelamiento de $\delta = 50 \text{ \AA}$. Las aristas dirigidas, en color azul, son las comparaciones que permiten el tunelamiento. Entre más gruesa sea la arista dirigida (lo cual casi no se distingue en la figura), mayor es su capacidad para transportar corriente. El número de conexiones que permiten el tunelamiento es 896 de un total de 4950 posibles.

El valor de la máxima densidad de corriente crítica que puede transportar la red de la **Figura 6.7** es de 4.68 A/cm^2 . Las aristas dirigidas (aristas de conexión, aristas superconductoras) son en total 896. En cambio, las comparaciones que no cumplen con el criterio de conexión son 4,064. En la **Figura 6.8** se grafican en un histograma ambas comparaciones, las que producen y no producen el fenómeno de tunelamiento.

CAPÍTULO 6. RESULTADOS

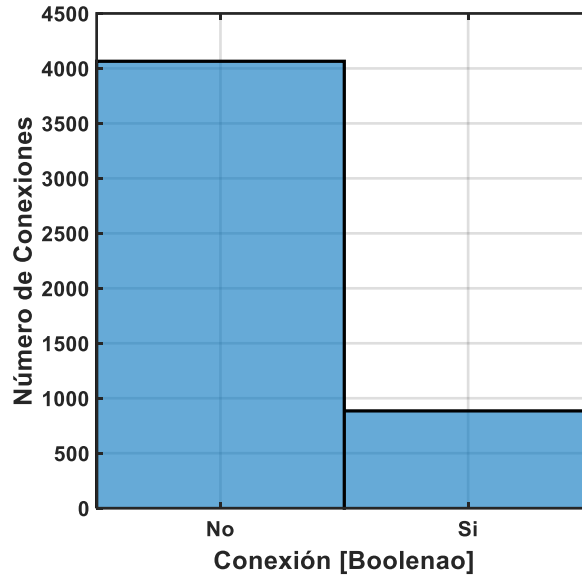


Figura 6.8: Representación booleana en un histograma de las comparaciones totales de red de transporte de la **Figura 6.7**. Las comparaciones que no cumplen con el criterio de conexión son indicadas con el valor Booleano de “No”, siendo un total de 4054. En caso contrario cuando las comparaciones cumplen el criterio de conexión, se les da un valor Booleano de “Si”, siendo las aristas dirigidas (aristas superconductoras), con un valor total de 896.

6.2.3 Comparación de Resultados

A continuación, se presenta un análisis cuantitativo, en el cual se comparan las redes de transporte de la **Figura 6.5** y la **Figura 6.7**. Este análisis nos ayudará para poder cuantificar los cambios que existen en dichas redes, en su complejidad, y en la máxima densidad de corriente que pueden transportar, al variar su distancia de tunelamiento. En la **Tabla 6.5** se muestran los datos para ambas redes de transporte de la **Figura 6.5** y la **Figura 6.7**.

Tabla 6.5: Tabla comparativa de los resultados de ambas redes de transporte de la densidad de corriente eléctrica crítica presentadas en las **Figura 6.5** y **Figura 6.7**.

Conjunto aleatorio de 100 granos mostrada en la Figura 6.4		
Distancia de Tunelamiento [Å]	10	50
Aristas superconductoras	225	896
Máxima Densidad de corriente crítica [A/cm^2]	$1.3674 \cdot 10^{-05}$	4.6893

De nuevo, se observa que la distancia de tunelamiento es un parámetro importante en la simulación. Al aumentar la distancia de tunelamiento por cinco veces, el número de aristas dirigidas (aristas superconductoras) aumentan aproximadamente por un factor de

cuatro veces. La máxima densidad de corriente eléctrica crítica crece por un valor **exorbitante** de 342,935 veces. **¡Totalmente increíble!** Al aumentar la distancia de tunelamiento, se observa que una red de transporte entre el *Nodos s* y el *Nodo t* se vuelve más compleja en su estructura. La red al ser más compleja en su estructura, por tener más aristas dirigidas y tener más conexiones, puede transportar más corriente eléctrica crítica.

6.3 Superconductividad

Ahora se presentan los resultados obtenidos que se indicaron en la [Sección 6.2](#), aplicándose a un **intervalo de temperaturas**. Se usó el mismo conjunto aleatorio de la [Figura 6.4](#) (el conjunto de 100 granos). Se trabajó con una muestra de 100 granos debido al tiempo de cómputo, pero se puede probar con conjuntos de más granos. Nuevamente, se fijó la temperatura crítica del material a $T_c = 3.49 K$, la constante dieléctrica del material igual a $\kappa = 19$, con una matriz dieléctrica del mismo lado de $5,000 \text{ \AA}$ y la constante de redondez $\alpha = 0.45$. En todas las simulaciones, el intervalo de temperaturas inicia desde $0.001 K$ hasta $3.48 K$ (la cual está a $0.01 K$ del valor de la temperatura crítica T_c propuesta). El algoritmo calculó para cada temperatura, dentro del intervalo, la red de transporte para la densidad de corriente crítica. Luego, calculó su máxima densidad de corriente crítica que transporta el sistema aplicando el algoritmo de Ford-Fulkerson, (aplicando el método de caminos de aumento). Por último, se graficó la máxima densidad de corriente crítica en función de la temperatura. Para más detalle del algoritmo programado, vea la [Sección E5](#) del [Apéndice E](#).

6.3.1 Perfil de Densidad de Corriente Crítica

Se presentan los resultados para varias simulaciones. Se consideraron cuatro diferentes distancias de tunelamiento. En todas estas simulaciones, se desea reproducir un perfil de densidad de corriente crítica en función de la temperatura similar a lo que se explicó en la [Sección 2.4](#).

6.3.1.1 Distancia de Tunelamiento de 10 \AA

En la [Figura 6.9](#), se muestra la gráfica de la máxima densidad de corriente crítica en función de la temperatura para una distancia de tunelamiento de $\delta = 10 \text{ \AA}$ para el conjunto de granos de la [Figura 6.4](#). Se logra reproducir el perfil de superconductividad ([Sección 2.4](#)).

CAPÍTULO 6. RESULTADOS

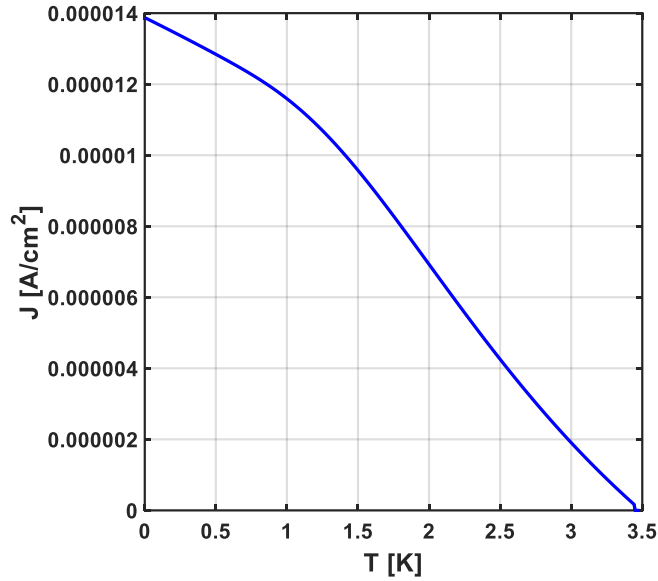


Figura 6.9: Gráfica de la máxima densidad de corriente crítica superconductora en función de la temperatura del conjunto de la **Figura 6.4**. La distancia de tunelamiento (δ) fue de 10 \AA .

6.3.1.2 Distancia de Tunelamiento de 50 \AA

Se calculó la máxima densidad de corriente crítica para el mismo intervalo de temperaturas, pero ahora con una distancia de tunelamiento de $\delta = 50 \text{ \AA}$. Los demás parámetros de simulación se mantienen iguales como al inicio de esta sección. En la **Figura 6.10** se muestra la gráfica de la máxima densidad de corriente crítica en función a la temperatura. Nuevamente se logra reproducir el efecto esperado en un superconductor.

CAPÍTULO 6. RESULTADOS

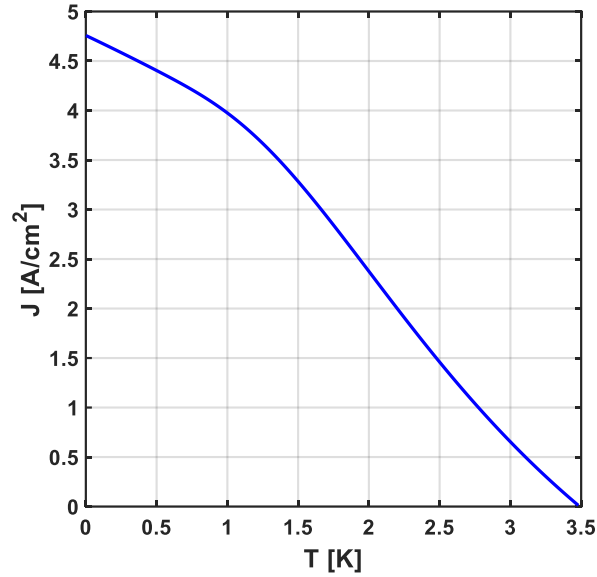


Figura 6.10: Grafica de la máxima densidad de corriente crítica superconductora en función de la temperatura del conjunto de la **Figura 6.4**. La distancia de tunelamiento (δ) fue de 50 Å.

6.3.1.3 Tunelamiento de 100 Å

Se aumenta ahora la distancia de tunelamiento a $\delta = 100$ Å y de nuevo se usan los mismos parámetros anteriores. En la **Figura 6.11** se muestra el resultado de la máxima densidad de corriente crítica en función a la temperatura, obteniendo nuevamente el perfil esperado.

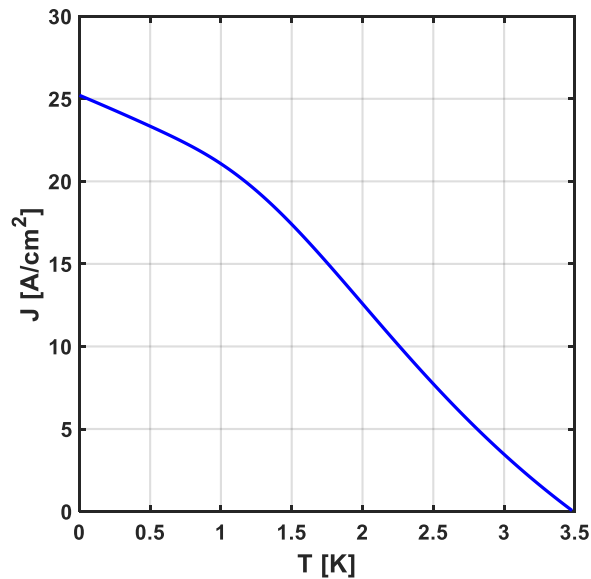


Figura 6.11: Grafica de la máxima densidad de corriente crítica superconductora en función de la temperatura del conjunto de la **Figura 6.4**. La distancia de tunelamiento (δ) fue de 100 Å.

6.3.1.4 Tunelamiento de 200 Å

Por último, se fijó ahora la distancia de tunelamiento a $\delta = 200 \text{ \AA}$ y de nuevo se mantuvieron los mismos parámetros de simulación expuestos al inicio de esta sección. Se muestra el resultado de la máxima densidad de corriente crítica en función de la temperatura en la **Figura 6.12**, obteniendo de nuevo el mismo perfil para un superconductor tradicional.

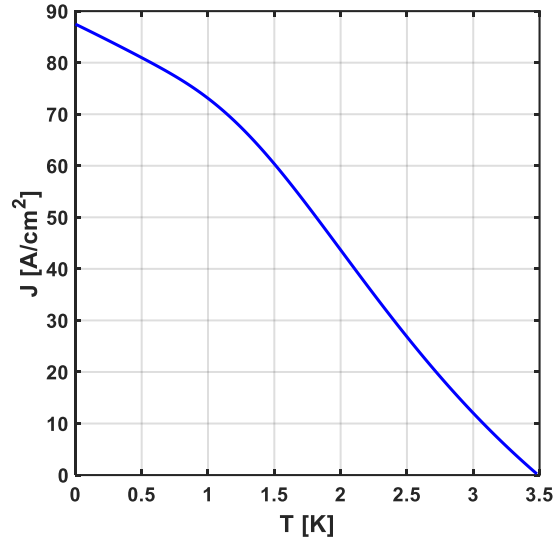


Figura 6.12: Grafica de la máxima densidad de corriente crítica superconductora en función de la temperatura para el conjunto de la Figura 6.4. La distancia de tunelamiento (δ) fue de 200 Å.

6.3.2 Conclusión

En la **Figura 6.13** se resumen todas las gráficas de las simulaciones anteriores para una mejor exposición y comparación.

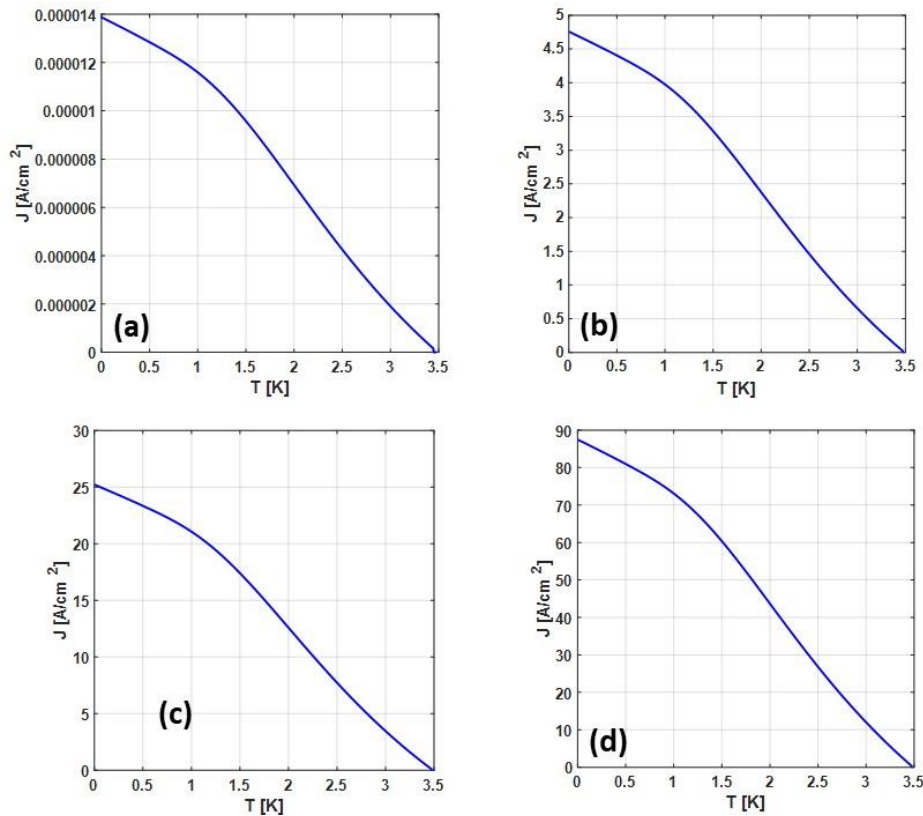


Figura 6.13: Gráficas de la densidad de corriente crítica en función de la temperatura para el conjunto de 100 granos de la Figura 6.4 para diferentes distancias de tunelamiento: **(a)** 10, **(b)** 50, **(c)** 100, y **(d)** 200 Å. Para cada simulación, se hicieron 3,480 pasos en el intervalo de temperaturas, desde 0.001 hasta 3.48 K.

Si se compara todas las gráficas de la **Figura 6.13** con la gráfica de la **Figura 2.5** de la **Sección 2.4**, se observa que exhiben, en principio, un perfil muy similar. Esto significa que para el material granular hipotético propuesto (conjunto de granos de la **Figura 6.4**) se tiene un comportamiento superconductor. Se logró con éxito simular el comportamiento superconductor.

6.4 Efecto Re-Entrante

La propuesta principal de este trabajo de tesis consiste en el modelado del efecto re-entrante para materiales granulares. El efecto re-entrante se manifiesta en un perfil de resistividad en función de la temperatura como un pico resistivo en el estado superconductor. Ver [Figura 3.4](#).

Como se vio en el [CAPÍTULO 3](#), este comportamiento de pico resistivo tiene su equivalente en un perfil de densidad de corriente crítica en función de la temperatura. Se mostró un ejemplo en la [Figura 3.3](#). En esta figura, el perfil presenta una interrupción abrupta en un intervalo corto de temperatura, el cual corresponde al intervalo de temperaturas en donde ocurre el pico resistivo. Los perfiles de densidad de corriente presentados en la sección anterior inmediata no presentan el fenómeno re-entrante.

En esta sección, se estudian los parámetros usados para poder reproducir el efecto re-entrante en un intervalo corto de temperatura en un perfil de densidad de corriente crítica. Se presentan varias simulaciones, en donde se varía la cantidad de granos y la distancia de tunelamiento.

6.4.1 Variación de la Distancia de Tunelamiento

Primero, se generó un conjunto aleatorio de 50 granos con la misma distribución Gaussiana de radios que se ha usado hasta ahora (media de $\bar{R} = 220 \text{ \AA}$ y una dispersión de $\sigma_R = \left(\frac{110}{3}\right) \text{ \AA}$). En este conjunto de granos contenido una matriz dieléctrica cuadrada de longitud de $5,000 \text{ \AA}$, se varió la distancia de tunelamiento (δ) de 25 a 200 \AA . En la [Figura 6.1](#), se muestra este conjunto de 50 granos.

CAPÍTULO 6. RESULTADOS

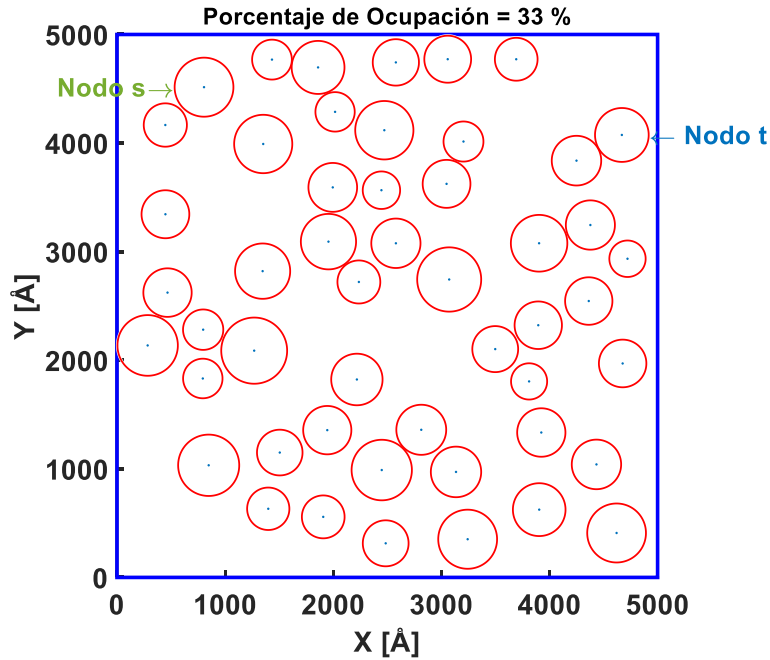


Figura 6.1: Conjunto aleatorio de 50 granos colocados en una matriz dieléctrica cuadrada de lado de 5,000 Å. Los radios de los granos obedecen una distribución gaussiana centrada en $\bar{R} = 220$ Å y con una dispersión $\sigma_R = \left(\frac{110}{3}\right)$ Å. Se aprecia un porcentaje de ocupación del 33%.

Partiendo del conjunto de granos de la **Figura 6.1**, en la **Figura 6.2** se muestran los perfiles de densidad de corriente crítica para cuatro distancias de tunelamiento (δ): 200, 50, 40 y 25 Å.

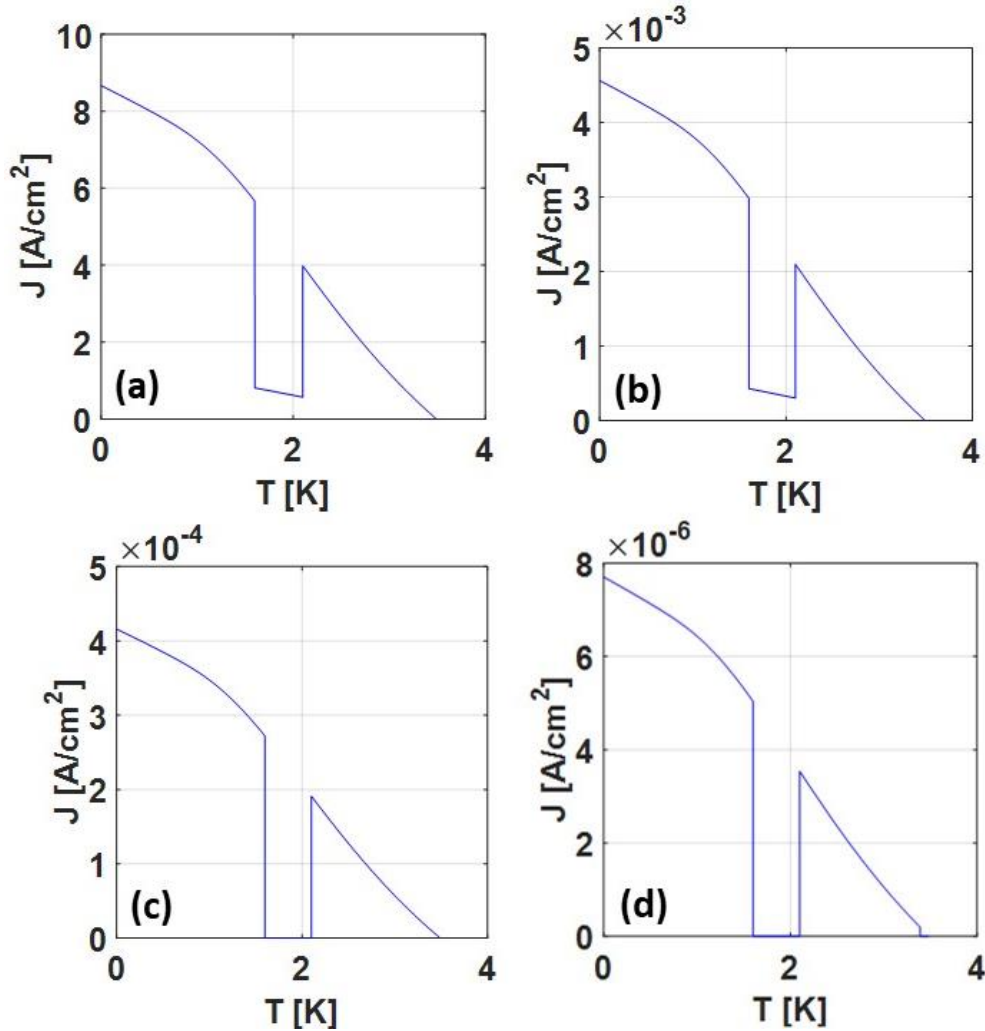


Figura 6.2: Gráficas de la densidad de corriente crítica en función de la temperatura. Se varió la distancia de tunelamiento: (a) 200, (b) 50, (c) 40, y (d) 25 Å. En las cuatro simulaciones, se usó el mismo conjunto de granos mostrados en la Figura 6.1. El efecto re-entrante se observa en las cuatro simulaciones.

En la **Figura 6.2**, se logra reproducir el efecto re-entrante. El efecto re-entrante se observa en el intervalo de temperaturas desde $T_b = 1.6 \text{ K}$ hasta aproximadamente $T_r = 2 \text{ K}$. En este intervalo de temperaturas, la suavidad de la curva de superconductividad en el perfil se ve interrumpida.

6.4.1.1 Discusión

Los resultados muestran que para una distancia de tunelamiento pequeña, el transporte de la corriente eléctrica es menor en comparación con la que se obtiene para una distancia de tunelamiento más grande. Al disminuir la distancia de tunelamiento, la red de transporte de corriente es menos compleja. Esto se vio desde la **Sección 6.2**, lo que produce que exista un menor “drenado” de corriente. Para ejemplificar mejor este comportamiento, se comparan dos redes de transporte mostradas en la **Figura 6.3**.

CAPÍTULO 6. RESULTADOS

Ambas redes de transporte son generadas desde otro conjunto aleatorio de 50 granos, para dos temperaturas fijas, 0.1 y 1.9 K.

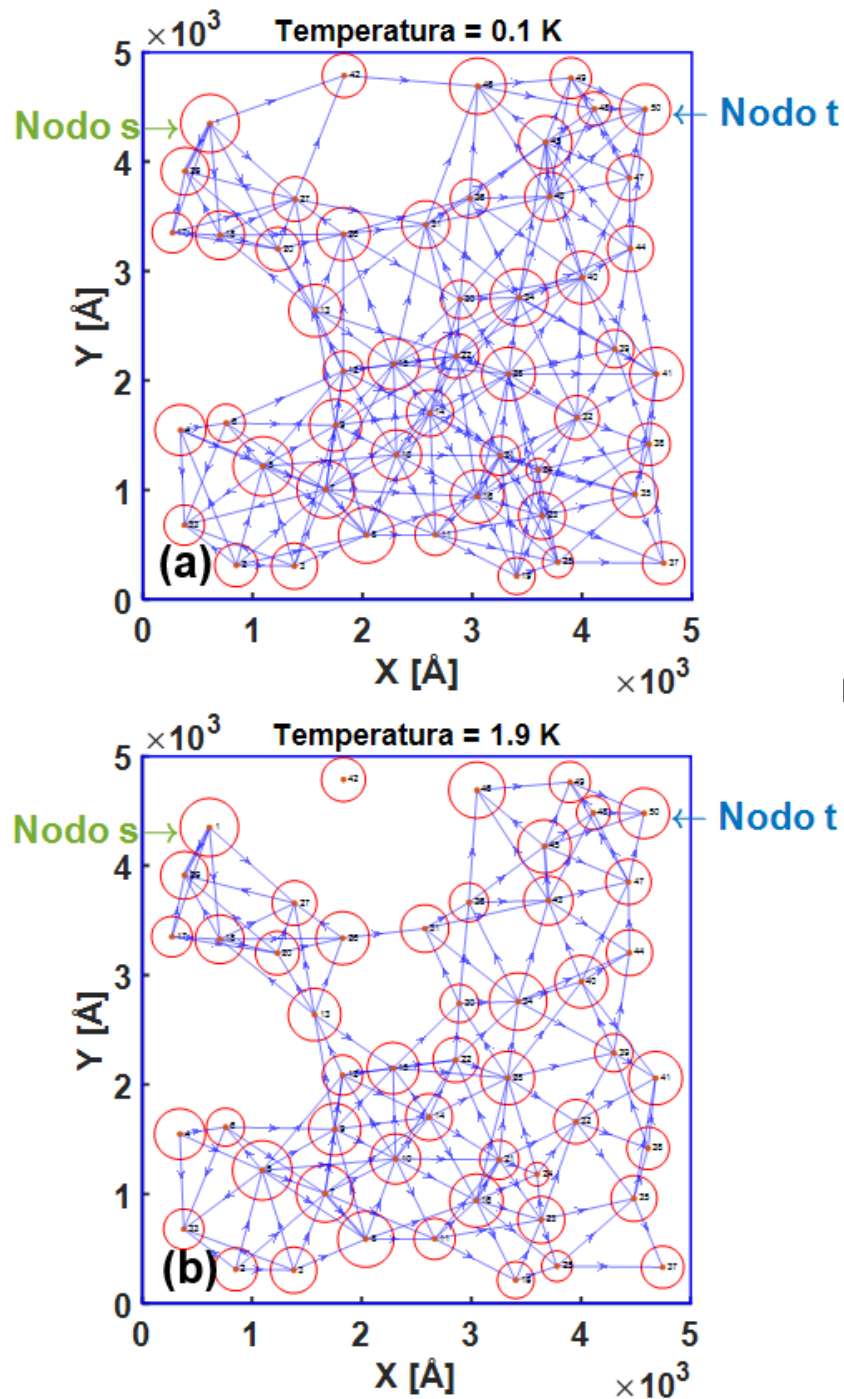


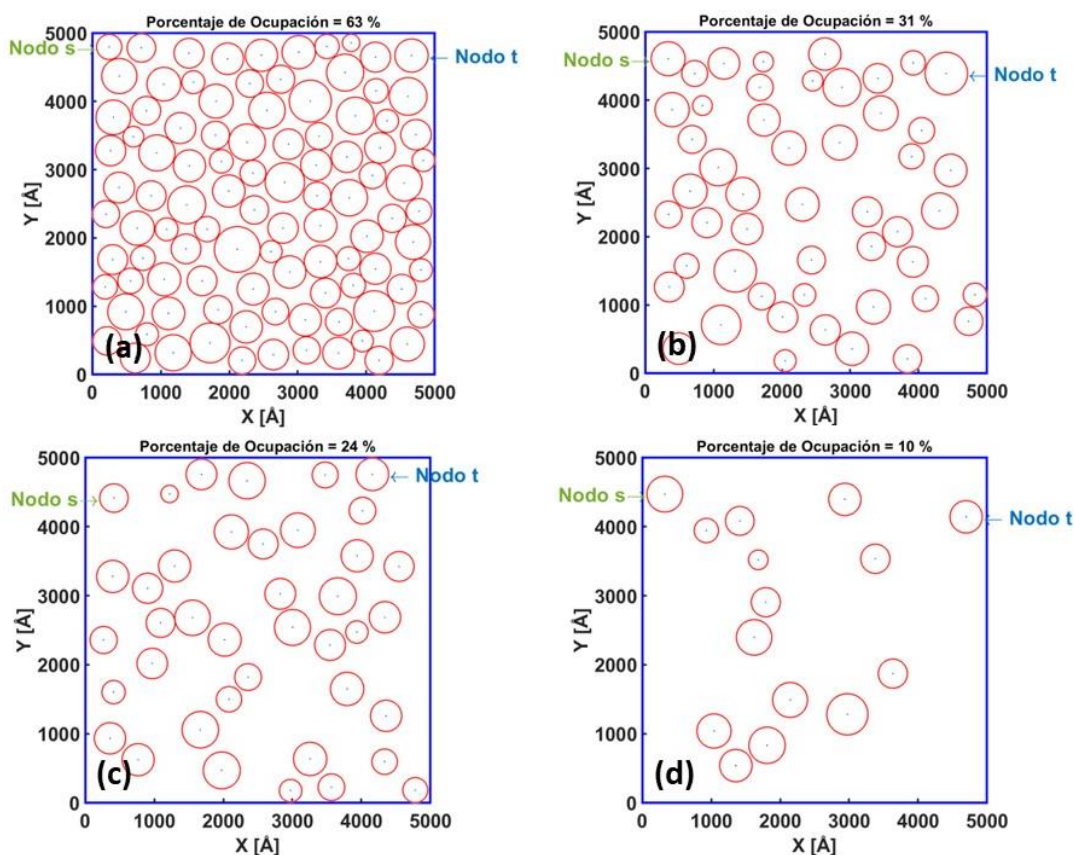
Figura 6.3: Redes de transporte para la densidad de corriente crítica. En las dos redes, se usó el mismo conjunto de granos mostrado en la Figura 6.1. Conjunto aleatorio de 50 granos. Se fijó la distancia de tunelamiento a 50 Å y la temperatura a: (a) 0.1 y (b) 1.9 K.

CAPÍTULO 6. RESULTADOS

Se observa una diferencia sustancial entre la complejidad de las redes de transporte para las dos temperaturas. A la temperatura de $0.1 K$, la red de transporte eléctrica es más compleja en comparación con la que se obtiene para la temperatura de $1.9 K$. A esta temperatura, $1.9 K$, el material exhibe un comportamiento aislante, apareciendo el efecto re-entrante. En comparación, el material exhibe un estado superconductor a la temperatura de $0.1 K$. La red de transporte para la densidad de corriente crítica cambia su complejidad de conexión en función de la temperatura. También, la cantidad de corriente crítica que transporta cada arista dirigida (arista superconductora) también cambia con la temperatura. En la [Sección 6.1](#), se indicó que el grosor de las aristas representa su capacidad de corriente. Por limitaciones visuales en la [Figura 6.3](#), no se puede apreciar claramente los cambios en la capacidad de transporte para la corriente crítica en cada arista, por lo que, aunque las aristas tengan un cambio en esta capacidad, dicho cambio puede ser mínimo y no ser perceptible a simple vista. Estos cambios se pueden analizar numéricamente en el código desarrollado, [Sección E6](#) del [Apéndice E](#).

6.4.2 Variación del Número de Granos

Ahora variamos la cantidad de granos. Se fijó la distancia de tunelamiento a 50 \AA , manteniendo la misma dimensión en la matriz dieléctrica que es de $5,000 \text{ \AA}$. En la [Figura 6.4](#), se presentan algunos conjuntos de granos. Sólo se muestran los resultados para cuatro conjuntos aleatorios con un número de granos de 100, 50, 40 y 15.



CAPÍTULO 6. RESULTADOS

Figura 6.4: Diferentes conjuntos aleatorios de granos contenidos en una matriz dieléctrica cuadrada de lado 5,000 Å. Los radios de los granos obedecen la misma distribución gaussiana de siempre. Se varió el número de granos a: (a) 100, (b) 50, (c) 40, y (d) 15.

En la **Figura 6.5** se muestra la densidad de corriente crítica para los diferentes conjuntos de la **Figura 6.4**.

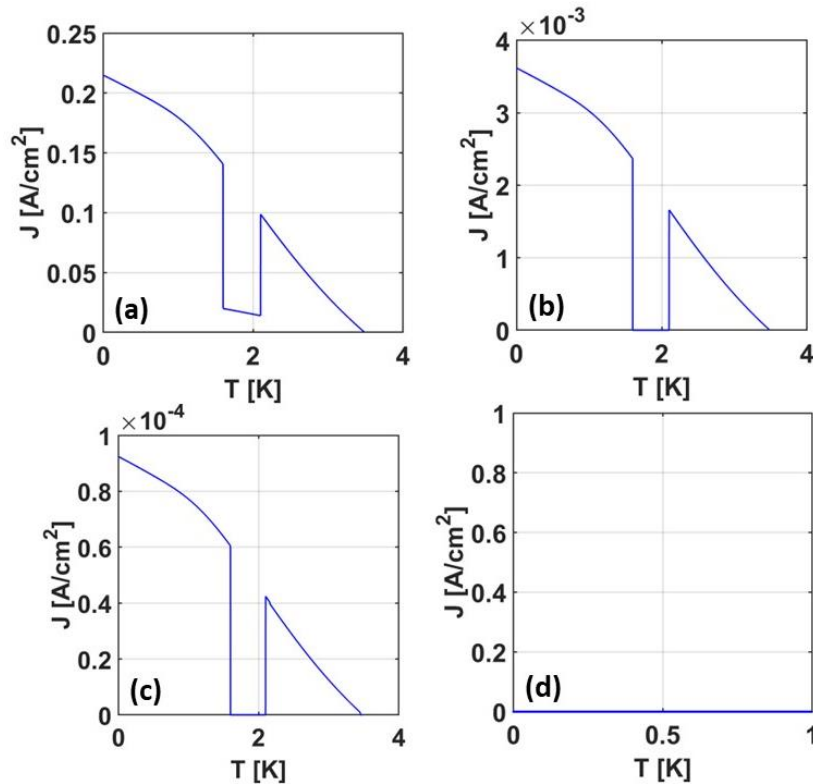


Figura 6.5: Densidad de corriente crítica en función de la temperatura para cada conjunto de granos de la **Figura 6.4**. En todas las pruebas, se usa la misma distancia de tunelamiento de 50 Å. Se observa el efecto re-entrante en los casos (a), (b) y (c). En el caso (d), no se obtiene transporte alguno, perdiéndose completamente la superconductividad.

La cantidad de granos es una variable importante, ya que, entre más granos contenga el material granular, más compleja será la red para el transporte de corriente crítica (o para la densidad de corriente crítica). Si se fija la dimensión de la muestra y la distancia de tunelamiento, se observa que, al ir disminuyendo la cantidad de granos en el mismo espacio, disminuirá la máxima corriente crítica que el conjunto puede transportar. Pero, si se aumenta el número de granos, la máxima corriente crítica aumentará.

La máxima corriente crítica aumenta porque se puede construir una red mucho más compleja al aumentar el número de granos. Esto permite que exista un mayor transporte de corriente, ya que los granos están más cerca unos de otros. Además, al tener más granos, se generan más caminos posibles de percolación. Así, la transición al estado dieléctrico se inicia sólo cuando todos los caminos superconductores están saturados, son pocos o no existen.

En conclusión, se logró reproducir satisfactoriamente el efecto re-entrante al variar la cantidad de granos y fijando la distancia de tunelamiento para los paneles (a), (b) y (c). de la **Figura 6.4**.

6.5 Interpretación de Resultados

En el modelo construido, los valores para la densidad de corriente crítica en función de la temperatura son consistentes con lo que se espera para un material granular real. En las **Secciones 6.4.1** y **6.4.2**, se reproducen cualitativamente las propiedades eléctricas superconductoras para estos materiales. Tanto la superconductividad tradicional como el efecto re-entrante se logran reproducir de manera satisfactoria al variar la cantidad de granos o la distancia de tunelamiento.

La energía de bloqueo de Coulomb es independiente de la temperatura, por lo que se puede considerar como constante respecto a ésta. La energía de bloqueo de Coulomb depende principalmente de la carga eléctrica, los radios, y las distancias inter-superficiales entre los pares de granos i, j . Si sustituimos la **Ecuación 2.2** en la **Ecuación 2.1**, resulta lo siguiente:

$$E_c^{i,j} = \frac{1}{2} \frac{Q_i Q_j S_{i,j}}{\alpha \pi \kappa (R_{min}^{i,j})^2}. \quad 6.2$$

Tanto Q_i y Q_j son la carga eléctrica para cada par de granos a comparar (i, j). Fijando el denominador, la **Ecuación 6.2** aumentará si Q_i , Q_j o $S_{i,j}$ aumentan. Así, el modelo predice que cuando no se pueda “drenar” suficiente corriente crítica superconductor, la cantidad de cargas eléctricas aumentará, haciendo que exista una fuerza eléctrica de tipo Coulomb que repelerá los granos entre sí. Este fenómeno rompe el estado superconductor y a cierta temperatura T_r el efecto re-entrante aparece.

Un análisis cualitativo de la dependencia de la energía de Josephson respecto a la temperatura nos explicará porque el efecto re-entrante termina y el material recupera el estado superconductor a temperaturas más bajas. Si sustituimos la **Ecuación 2.4** en la **Ecuación 2.3**, se obtiene la **Ecuación 6.3**, qué es la expresión expandida para la energía de Josephson,

$$E_j^{i,j}(T) = \frac{\pi \hbar}{4 e^2} \frac{k_B}{(R_n^{i,j})} \left(\left(\frac{3.53 T_c}{2} \right) \left(1 - \frac{T}{T_c} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \tanh \left(\frac{\left(\frac{3.53 k_B T_c}{2} \right) \left(1 - \frac{T}{T_c} \right)^{\frac{1}{2}}}{2 k_B T} \right), \quad 6.3$$

en donde \hbar es la constante de Planck, T_c es la temperatura crítica, k_B es la constante de Boltzmann, e es la carga del electrón, π es una constante de la geometría euclídea, T es

CAPÍTULO 6. RESULTADOS

la temperatura de prueba y $R_n^{i,j}$ es la resistencia de tunelamiento [7, 8]. Esta resistencia es dependiente de la distancia inter-granular ($S_{i,j}$) y del radio mínimo ($R_{min}^{i,j}$) para cada par de granos i, j . Para mostrar el comportamiento de la energía de Josephson para una muestra en general, aplicaremos las condiciones de la **Sección 2.3**, es decir, aunque la resistencia de tunelamiento es diferente para cada par de granos i, j , se considerará para todo el conjunto en donde $\bar{S}_{i,j} = \delta$. Esto quiere decir que la distancia inter-superficial promedio ($\bar{S}_{i,j}$) es igual a la distancia de tunelamiento para cada par de grano i, j .

Por último, se toma nuevamente la resistencia de tunelamiento ($R_n^{i,j}$) con un valor de $15.9 \times 10^3 \Omega$. Ahora, el factor que acompaña al inicio de la **Ecuación 6.3** se reemplazará por una nueva constante, la cual la llamaremos D . Ahora, sustituyendo esta constante D en la **Ecuación 6.3**, se tiene:

$$E_j^{i,j}(T) = D \left(\left(\frac{3.53T_c}{2} \right) \left(1 - \frac{T}{T_c} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \tanh \left(\frac{(3.53T_c) \left(1 - \frac{T}{T_c} \right)^{\frac{1}{2}}}{4T} \right). \quad 6.4$$

Si sustituimos los valores de las constantes anteriores k_B, \hbar, e, π , el valor de la resistencia de tunelamiento ($R_n^{i,j} = 15.9 \times 10^3 \Omega$) y aplicamos el concepto de energía potencial eléctrica, podemos determinar D , obteniendo un valor igual a $2.80 \times 10^{-24} J/K$. Como D es muy pequeña, si se quiere graficar la energía de Josephson, **Ecuación 6.4**, no se podrá apreciar claramente su comportamiento en general. Por lo tanto, para tener una mejor visualización de esta energía, se normaliza la **Ecuación 6.4** respecto a D . Usando $T_c = 3.49 K$ en la **Ecuación 6.4**, obtenemos la gráfica de la Energía de Josephson normalizada en función de la temperatura, **Figura 6.14**.

CAPÍTULO 6. RESULTADOS

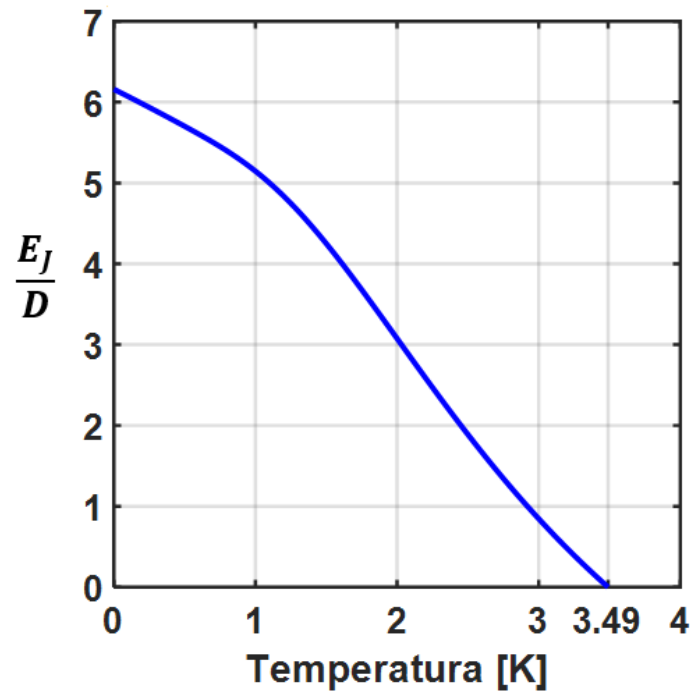


Figura 6.14: Gráfica de la Energía Normalizada de Josephson para un material superconductor granular genérico. La distancia inter-superficial es igual a la distancia de tunelamiento para todos los pares de granos.

Los resultados de las simulaciones muestran que la energía de Bloqueo de Coulomb aumentará cuando no se pueda “drenar” la corriente crítica. Pero, al llegar a cierta temperatura (T_r), la energía de Josephson será mayor que la energía de Bloqueo de Coulomb, recuperando el estado superconductor y saliendo del efecto re-entrante. Esto es debido a que, al disminuir la temperatura, la energía de Josephson aumentará, mientras que la Energía de Bloqueo de Coulomb permanecerá “constante”. En la gráfica de la **Figura 6.14** se observa que hay un aumento por un factor de 6 veces en la energía de Josephson desde la temperatura crítica T_c (3.49 K) hasta el valor de 0 K.

En resumen, cuando el efecto re-entrante aparece en el sistema ($T_b = 2 K$), el conjunto de granos no pueda “drenar” la corriente eléctrica a través de la red de transporte, siendo $E_c > E_j$. Pero, al seguir bajando la temperatura, la energía de Josephson aumentará hasta ser mucho mayor que la energía de Bloqueo de Coulomb, $E_j \gg E_c$, y es cuando el material (conjunto de granos) regresa al estado superconductor.

CAPÍTULO 7. CONCLUSIONES

Con las herramientas de teoría de grafos, nuestro modelo fue capaz de reproducir tanto la superconductividad tradicional como el efecto re-entrante en materiales granulares superconductores. Se construyeron, de forma sistemática, redes de transporte de corriente eléctrica en distribuciones aleatorias de granos.

La distancia de tunelamiento y el número de granos juega un papel importante en cuánta densidad de corriente se puede transmitir en un conjunto de granos dado. Al aumentar tanto el número de granos como la distancia de tunelamiento en el modelo propuesto, aparecen más conexiones en la red virtual de transporte. Una red de transporte, al ser más compleja en su estructura por tener más aristas dirigidas y tener más conexiones entre sus granos, puede transportar más corriente crítica superconductora en la muestra virtual.

Físicamente, en el intervalo de temperaturas en donde se reproduce numéricamente el efecto re-entrante, el sistema empieza a aglomerarse de cargas eléctricas. Este efecto es producido porque en cierto intervalo de temperaturas no existe algún transporte de la corriente crítica superconductora. Así, la red de transporte eléctrico ya no puede “drenar” la corriente crítica que atraviesa a los granos superconductores. Esta ausencia de “drenado” hace que algunos granos metálicos aumenten su carga eléctrica coulombiana. Al aumentar la carga eléctrica, la energía de bloqueo de Coulomb se hace más grande que la energía de Josephson, provocando que aumente la repulsión coulombiana entre los granos cargados eléctricamente, suprimiendo así la superconductividad. Es decir, el bloqueo de la corriente superconductora sólo afecta a aglomeraciones de granos que pueden formar un cúmulo superconductor, siendo clústeres desconectados entre sí. Por lo tanto, la corriente crítica que soporta el material granular disminuye o se suprime, destruyendo eventualmente la superconductividad.

Pero, al disminuir la temperatura, la energía de Josephson comienza a aumentar, y a una cierta temperatura (T_r) será mucho mayor que la energía de Bloqueo de Coulomb. Los caminos de percolación entonces empiezan a aparecer nuevamente. Así, el material granular comienza de nuevo a “drenar” la corriente eléctrica y el transporte de ésta empieza a reactivarse. El material granular recupera el comportamiento superconductor.

El modelado exitoso del efecto re-entrante superconductor se logró gracias al desarrollo de códigos computacionales. Estos códigos incluyen el modelado de una muestra virtual mediante conjuntos de granos, la construcción de redes de transporte eléctrico, la implementación de algoritmos de búsqueda de caminos de percolación, la comparación de energías de Josephson y de Bloqueo de Coulomb, la clasificación y comparación de nodos, el dibujado de granos mediante círculos, la generación de aleatoriedad en los radios y posiciones de los granos, y el uso de distribuciones gaussianas para generar los radios de los granos.

CAPÍTULO 7. CONCLUSIONES

Los códigos desarrollados y las simulaciones para modelar el fenómeno de superconductividad y el efecto re-entrante representan contribuciones originales en esta tesis.

Propuestas futuras para expandir las ideas presentadas en este trabajo de tesis incluyen la generación de un conjunto de granos cuyas posiciones obedezcan una distribución estadística gaussiana, la creación de un grafo el cual tenga más de un nodo de entrada y de salida, el cálculo de propiedades magnéticas, el modelado de otros parámetros superconductores, el uso de supercómputo para modelar muestras virtuales granulares con un número de granos mucho mayor, el uso de porcentajes más grandes de ocupación, el escalado del modelo para reproducir un material granular superconductor en tres dimensiones con granos tanto esféricos como de otras geometrías, etc.

APÉNDICE A. GLOSARIO

A1 Superconductor Tipo I

Un superconductor de Tipo I presenta dos propiedades características. La primera, es que si se enfría por debajo de su temperatura crítica T_c cuando se aplica una corriente eléctrica continua la resistencia eléctrica es nula. La segunda, es que bajo estas condiciones también presenta un diamagnetismo perfecto. Por encima de T_c un superconductor Tipo I es un metal normal, pero no es buen conductor. Los superconductores de Tipo I son elementos metálicos.

El diamagnetismo perfecto (efecto Meissner) significa que la susceptibilidad magnética tiene el valor $\chi = -1$, por lo que no puede existir un campo magnético (es decir, un flujo magnético) dentro del material.

A1.1 Campo Crítico H_c

Existe un campo magnético crítico H_c con la propiedad de que una temperatura T los campos aplicados $H_{app} > H_c$ conducen a la normalidad del material. La dependencia de la temperatura del campo crítico $H_c(T)$ por la [Ecuación A.1](#)

$$H_c(T) = H_c \left[1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^2 \right], \quad \text{A.1}$$

siendo $H_c(0) = H_c$.

Si un material se coloca en un campo magnético externo, entonces aparece una corriente superficial diamagnética “*interna*” de tal manera que ningún campo magnético penetra en la muestra en bruto. Es decir, el material muestra un diamagnetismo perfecto (efecto Meissner). Ver [Figura A.1](#). El valor de H máximo el cual un material presenta dicho comportamiento superconductor se denomina campo magnético crítico $H_c(T)$. Finalmente, para un superconductor tipo I si el campo magnético externo H se eleva por encima de un valor $H_c(T)$ la muestra deja de ser superconductora y se convierte en un conductor normal.

crítica inferior $H_{c1}(T)$, las fases de flujo sólido y flujo líquido separadas por la curva de fusión T_m , y la región de estado normal que se encuentra fuera de la curva de campo crítico superior $B_{c2}(T)$ [73].

El flujo sólo se excluye parcialmente cuando el campo aplicado está en el rango de H_{c1} a H_{c2} , y el material se vuelve normal para campos aplicados por encima del campo crítico superior H_{c2} . Así, en la región de campos magnéticos más altos el diamagnetismo no es perfecto, sino más bien de tipo mixto que presenta propiedades de *tipo sólido* a temperaturas más bajas y propiedades de *tipo líquido* a temperaturas más altas.

La línea de fusión separa estas dos regiones de comportamiento magnético. Además, no tienen en cuenta los efectos de desmagnetización que hacen que el diamagnetismo dependa de la forma de la muestra y de su orientación en un campo aplicado. Más fundamentalmente, un superconductor puede definirse como un conductor que ha sufrido una transición de fase a un estado de menor energía por debajo de una temperatura de transición T_C en la que los electrones de conducción forman pares denominados pares de Cooper. Estos transportan la corriente eléctrica sin ninguna resistencia al flujo, y provocan el fenómeno del diamagnetismo perfecto [74].

A2.1 Campo Crítico H_{c1} y Campo Crítico H_{c2}

En los superconductores de Tipo II H_{c1} es el campo magnético externo máximo en donde el material exhibe un comportamiento superconductor. El campo magnético externo H_{c2} máximo es donde se exhibe el estado de arreglo de vórtices, si se sobrepasa dicho campo magnético el material retoma su estado normal. Ver **Figura A.3**. Siempre $H_{c2} > H_{c1}$ [75].

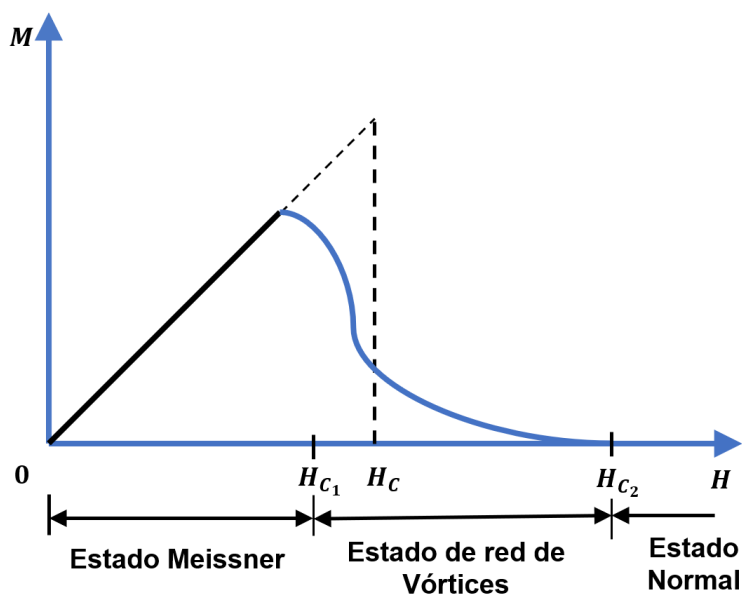


Figura A.3: Campo crítico $H_{c1}(T)$ y $H_{c2}(T)$. Magnetización en estado superconductor de tipo II. Para poder comparar con un superconductor tipo I se debe de ver la línea punteada.

A3 Corriente Crítica y Densidad de Corriente Crítica.

La densidad de corriente eléctrica crítica es la máxima corriente que un material puede transportar teniendo una resistencia cero. Abajo de esta corriente la superconductividad existe y la resistencia sigue valiendo cero. Para corrientes mayores a la corriente crítica el estado superconductor desaparece. Al cociente de la corriente crítica entre unidad de área del material que presenta superconductividad se le llama densidad de corriente crítica.

A4 Funciones que Caracterizan un Material en Función de la Temperatura

En la **Figura A.4** se muestra la resistencia en función de la temperatura del estado superconductor y el estado normal tipo metálico. Para T mayores que T_c en un material superconductor pierde el estado superconductor.

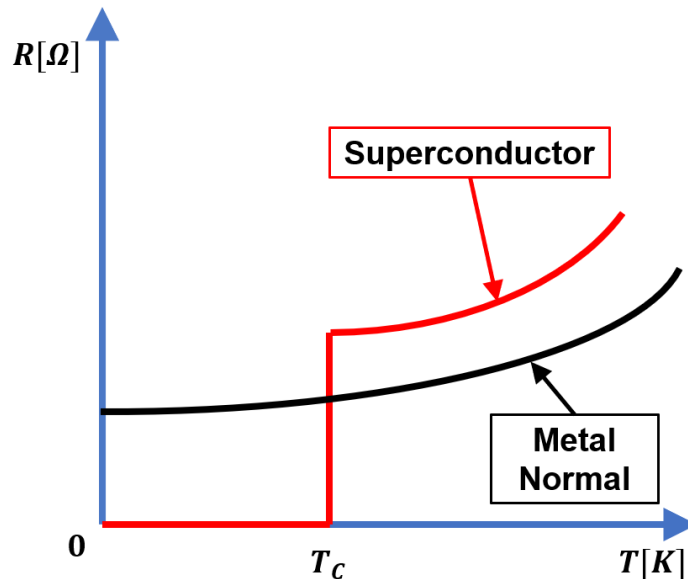


Figura A.4: Resistencia en función de la temperatura. Para un estado superconductor y un material metálico normal. Donde T_c (temperatura crítica) es la temperatura al cual un material superconductor su resistencia cae abruptamente a cero.

En la **Figura A.5** se muestra la resistencia en función de la temperatura para el estado normal tipo semiconductor.

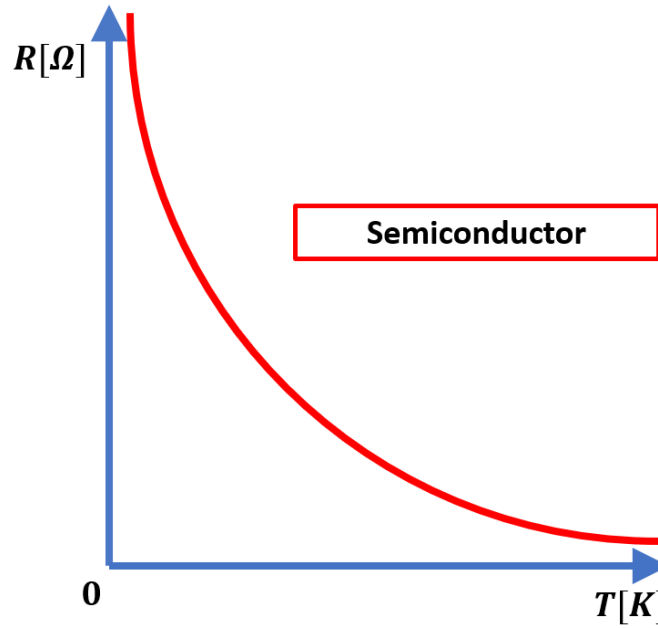


Figura A.5: Resistencia en función de la temperatura en el estado normal tipo semiconductor.

En un estado normal tipo semiconductor la temperatura al ser mayor a la temperatura crítica se observa una disminución en la resistencia. En la [Figura A.6](#) se muestra la resistencia en función de la temperatura para diferentes valores de corriente crítica.

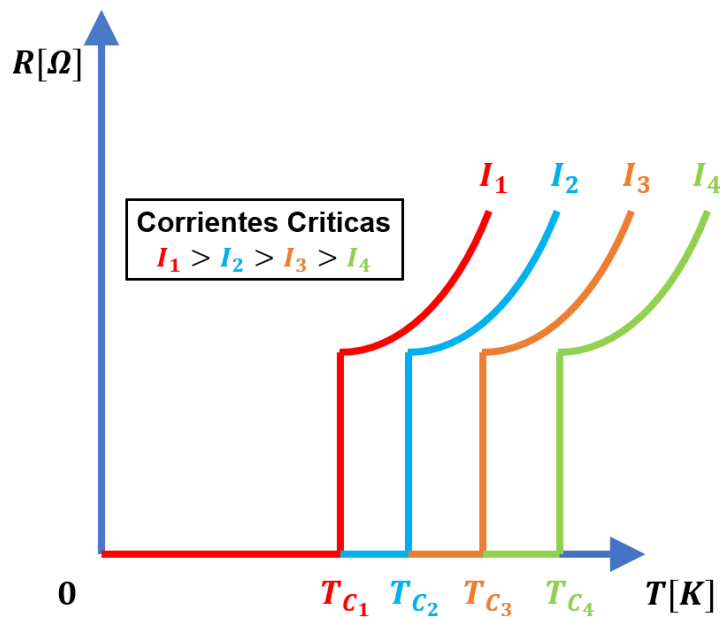


Figura A.6: Resistencia en función de la Temperatura para diferentes valores de corriente (o de densidad de Corriente).

APÉNDICE A. GLOSARIO

En la **Figura A.7** se muestra la resistencia en función de la temperatura bajo la influencia de varios campos magnéticos en su intensidad manteniendo la misma dirección.

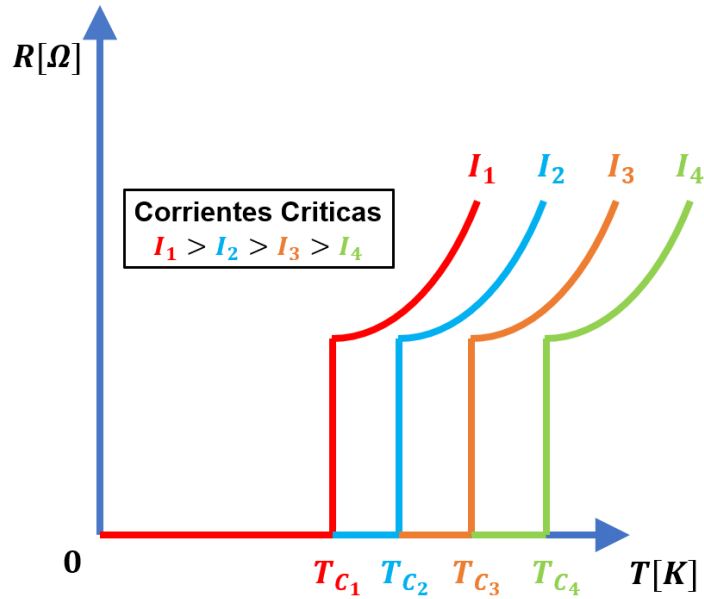


Figura A.7: Resistencia en función de la temperatura bajo la influencia de varias intensidades de campo magnético.

En la **Figura A.8** se muestra el campo crítico H_c en función de la temperatura de un material.

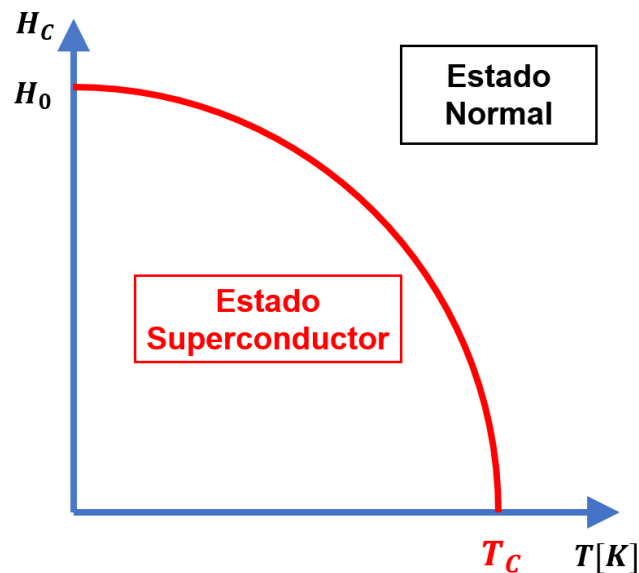


Figura A.8: H_c en función de la temperatura. Se indica el estado normal arriba de la curva y el estado superconductor que está debajo de la curva.

Al aumentar el campo magnético H , no disminuye la temperatura crítica del material, pero sigue manteniéndose el estado superconductor. Pero llega un momento en que al sobrepasar un cierto valor de H el estado superconductor desaparece. A ese de valor de H se le llama campo crítico H_c . En la **Figura A.9** se muestra el campo crítico H_{c_1} y H_{c_2} en función de la temperatura para un material superconductor *tipo II*.

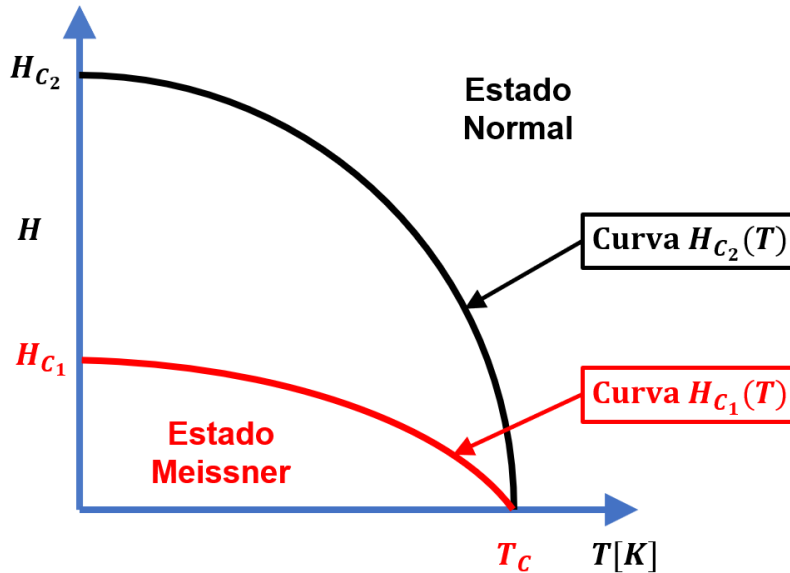


Figura A.9: H_{c1} y H_{c2} en función de la temperatura.

En la **Figura A.10** se muestra la corriente crítica I_c en función de la temperatura.

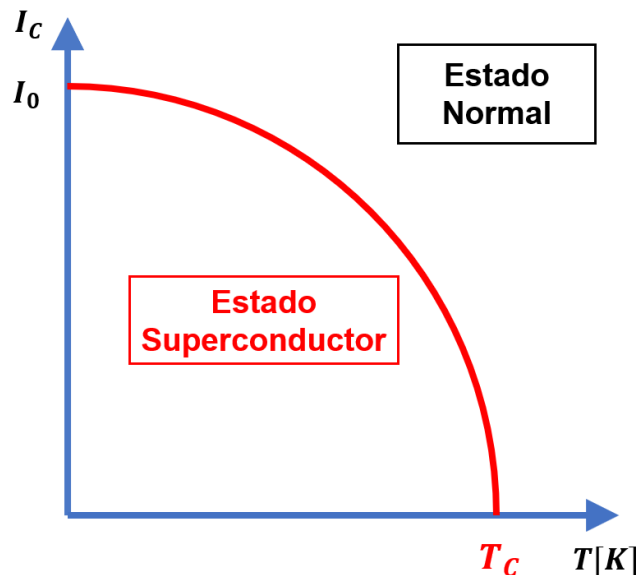


Figura A.10: Corriente crítica I_c en función de la temperatura.

Al aumentar la intensidad de corriente I , la gráfica de resistencia en función de la temperatura se traslada, pero se sigue manteniendo el estado superconductor. Llega un

momento en el que pasando un cierto valor I el estado superconductor desaparece. A ese de valor de I se le llama corriente crítica I_c .

En la **Figura A.11** se indica en forma general la densidad de corriente crítica J_c en función de la temperatura T .

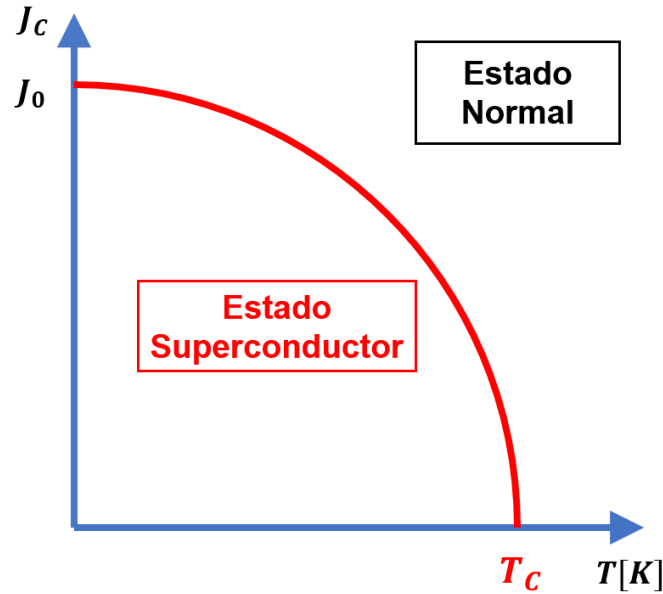


Figura A.11: Densidad de corriente crítica J_c en función de la temperatura T .

Al aumentar la densidad de corriente J , la gráfica de resistencia versus temperatura sufre un traslado, pero se sigue manteniéndose el estado superconductor. Al pasar un cierto valor J el estado superconductor desaparece. A ese de valor de J se le llama densidad de corriente crítica J_c .

Existe una densidad de corriente crítica J_c por encima de la cual el apantallamiento y la superconductividad se rompen. Debido a la equivalencia de la corriente de transporte y la corriente de apantallamiento, es de esperar que la superconductividad se rompa cuando la densidad de corriente total -la suma de la corriente de transporte y la de apantallamiento- supere la densidad de corriente crítica J_c .

En la **Figura A.7** se muestran los campos magnéticos críticos (H_{c1} , H_{c2} y H_{c3}) para diferentes temperaturas críticas.

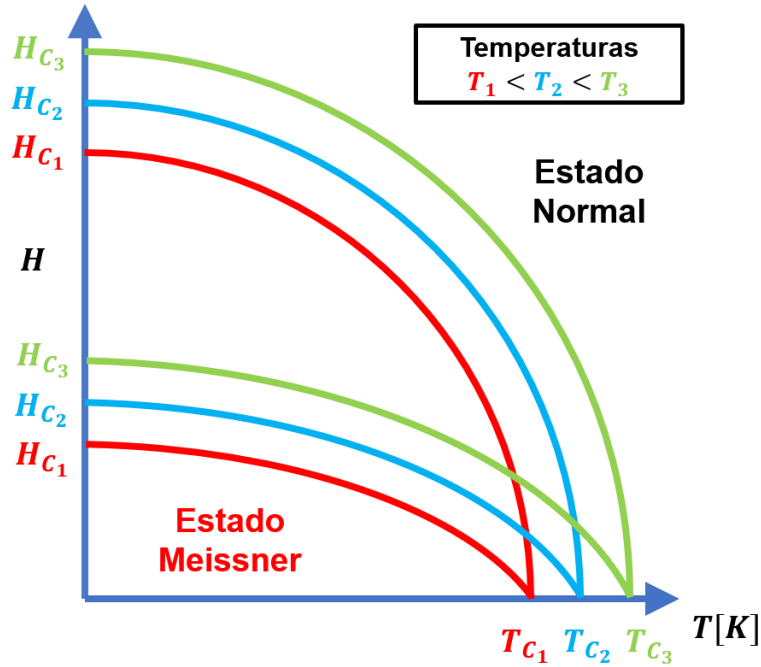


Figura A.12: Campos magnéticos críticos (H_{c1} , H_{c2} , H_{c3}) para diferentes temperaturas críticas: T_{c1} , T_{c2} , T_{c3} .

Al aumentar el campo magnético H , no disminuye la temperatura crítica del material, pero sigue manteniéndose el estado superconductor. Pero llega un momento en que al sobrepasar un cierto valor de H el estado superconductor desaparece. A ese de valor de H se le llama campo crítico H_c .

APÉNDICE A. GLOSARIO

APÉNDICE B. DISTRIBUCIÓN GAUSSIANA

En la teoría de la probabilidad, una función de densidad de probabilidad (FDP), o densidad de una variable aleatoria continua, es una función cuyo valor en cualquier muestra (o punto) del espacio muestral (el conjunto de valores posibles que toma la variable aleatoria) puede interpretarse como una probabilidad relativa del valor de la variable aleatoria que se acerque a esa muestra [38].

Una distribución Gaussiana en una variable x con media μ y varianza sigma σ^2 y es distribución estadística. Su función de densidad de probabilidad [76] es

$$P(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad \text{B.1}$$

con un dominio $x \in (-\infty, \infty)$.

La probabilidad se denota como $P(x)$ para una variable x . El concepto de variable aleatoria se define sin referencia a un tipo particular de experimento probabilístico obedecen a una ley probabilística determinada. La varianza (σ^2) es la expectativa de la desviación al cuadrado de una variable aleatoria con respecto a su media poblacional o su media muestral (μ). Así, la varianza es una medida de dispersión de un conjunto de números con respecto a su valor medio μ [77].

APÉNDICE B. DISTRIBUCIÓN GAUSSIANA

APÉNDICE C. ALGORITMOS DE BÚSQUEDA

C1 *DFS*. Depth First Search (Búsqueda en profundidad)

El algoritmo *DFS* es el algoritmo fundamental de búsqueda o interconexión más usado para explorar o interconectar nodos y aristas de un grafo. El tiempo de complejidad viene definido $O(N + A)$ y es directamente proporcional al tamaño de la red constituida por un número de nodos y aristas. La letra N se refiere al número de *nodos* y la letra A se refiere al número de *aristas*. *DFS* es usado para construir bloques en otros algoritmos. El rendimiento respecto a la conexión de nodos es realmente muy bueno ya que evita bucles.

El algoritmo *DFS* añade un nodo-hijo al árbol de búsqueda en cada paso. Un nodo-hijo es un nodo sucesor del nodo donde el algoritmo opera. Al nodo donde el algoritmo está operando se le designa como nodo-padre. Así, *DFS* desde un nodo-padre añade un nodo-hijo. Luego, si no hay más nodos-hijos que añadir o llega a un nodo ya visitado, retrocede hasta un nuevo nodo-padre. Por lo tanto, *DFS* aumenta la profundidad del árbol de búsqueda en cada paso tanto como pueda. En la [Figura C.1](#) se muestra el árbol de búsqueda para el algoritmo *DFS*.

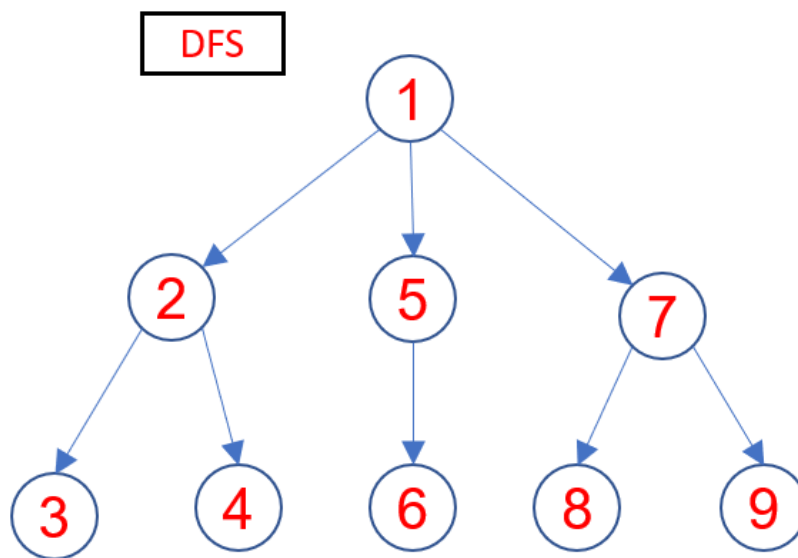


Figura C.1: Árbol de búsqueda del algoritmo *DFS*. La enumeración de cómo se visitan los nodos va en niveles, donde un nivel superior tiene una numeración menor.

APÉNDICE C. ALGORITMOS DE BÚSQUEDA

El algoritmo *DFS* consiste en la interconexión de todos los nodos que son recorridos. Es decir, *DFS* inicia desde un *Nodo Fuente* sin tener en cuenta qué arista toma en un siguiente paso hasta que no puede ir más lejos. El no poder ir más lejos significa que llega a un nodo ya recorrido, momento en el que retrocede y continúa su exploración interconectando nuevos nodos hasta llegar al nodo objetivo. El nodo objetivo para el modelo de esta tesis es el nodo de sumidero (*Nodo s*). Se presenta un ejemplo, en la **Figura C.2** se muestra un grafo no dirigido constituido por 12 nodos e interconectados por medio de 14 aristas. En este grafo el orden de cómo se etiquetan los nodos es irrelevante, ya que nos interesa cómo el algoritmo *DFS* opera. Para hacer más simple la explicación del funcionamiento del algoritmo *DFS* se ha tomado que el grafo sea no dirigido. Para un grafo dirigido se tendrá el mismo principio, pero se deberá tener en cuenta las direcciones de las aristas dirigidas. Estas consideraciones se abordan en la **Sección D2** del **Apéndice D**.

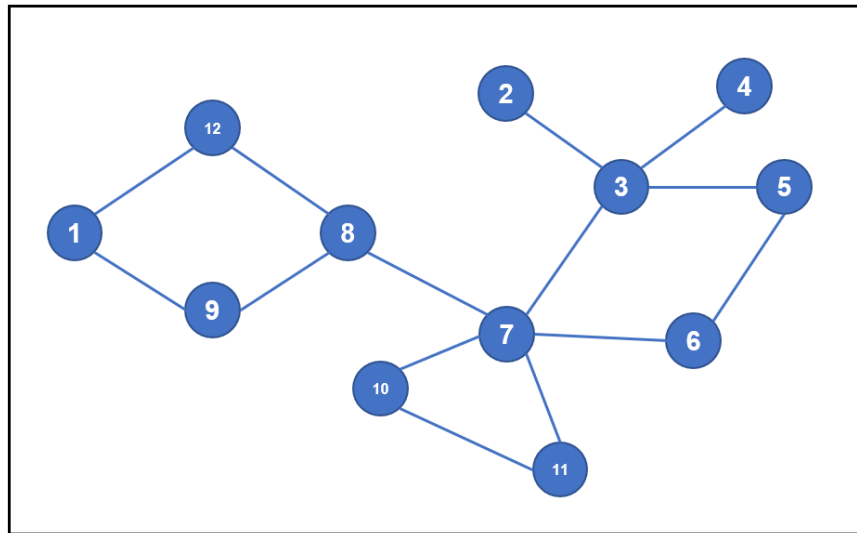


Figura C.2: Ejemplo de un grafo no dirigido constituido de 13 nodos y 14 vértices.

Tomando en cuenta la **Figura C.2** el algoritmo *DFS* empieza desde el nodo uno (*Nodo Fuente*) y arbitrariamente elige un camino a otro nodo. Enseguida pasa al nodo nueve y posteriormente, al nodo ocho, luego al nodo siete, después al nodo diez y finalmente al nodo once. Al llegar al nodo once no existe la posibilidad de irse a otro nuevo nodo, solamente al nodo siete. El camino que recorre el algoritmo es visualizado en la **Figura C.3**. Las flechas amarillas indican cómo el algoritmo *DFS* fue construyendo el camino recorrido.

APÉNDICE C. ALGORITMOS DE BÚSQUEDA

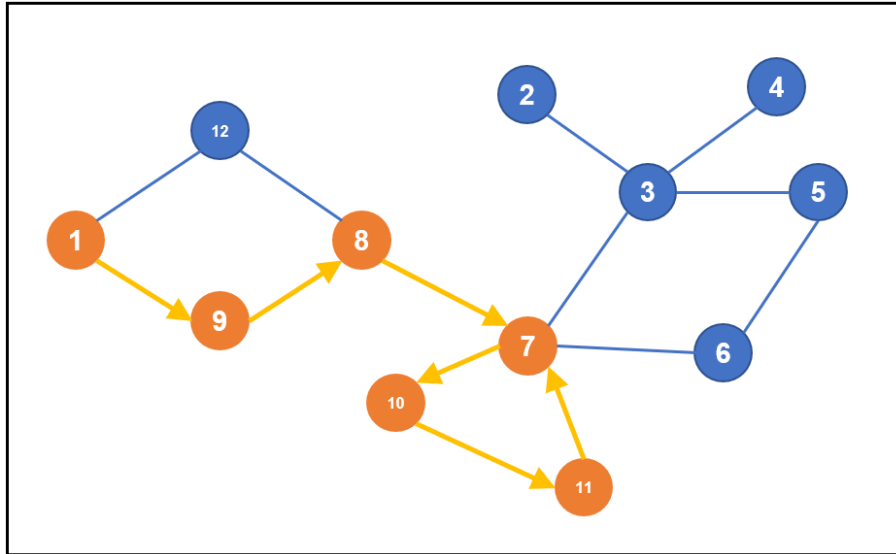


Figura C.3: Recorrido del algoritmo DFS en el grafo de Figura C.2. Observamos que el algoritmo llegó a un callejón sin salida al llegar al nodo siete. Esto es debido a que el nodo siete ya se había recorrido.

Como el nodo siete es un nodo ya visitado, el siguiente paso sería el regresar en sus pasos hacia al nodo 11, de ahí al nodo 10, y finalmente al nodo 7. Del nodo 7 se irá al nodo 3 y finalmente al nodo 2. Con lo cual ya se ha llegado a un nodo final (*Nodo Sumidero*). El algoritmo *DFS* ha recorrido todo el grafo desde el *Nodo Fuente* (nodo 1) hasta el *Nodo Sumidero* (nodo 2). En la **Figura C.4** se puede observar el camino que sigue *DFS*. Este camino completo está identificado con flechas amarillas para una mejor visualización. Estas flechas amarillas indican cómo se formó el camino que eligió *DFS*, no confundir con aristas dirigidas en el grafo.

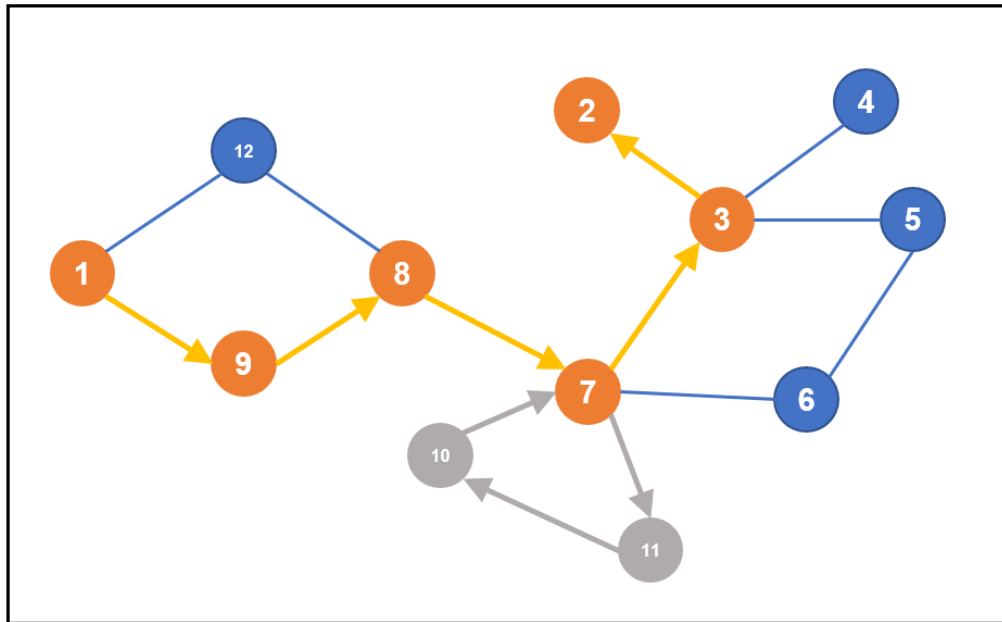


Figura C.4: Camino tomado para llegar al nodo 2 y atravesar todo el grado. En color gris se indica el camino que se retrocedió para llegar de nuevo al nodo 7, y retomar el camino para llegar al nodo 2 final.

El algoritmo *DFS* ha llegado al nodo meta. Sin embargo, deshaciendo el camino desde el nodo 2 se puede regresar al nodo 3 e ir al nodo 4. Al deshacer de nuevo el camino del nodo 4, regresar al nodo 3 e ir al nodo 5 y posteriormente al nodo 6. Esencialmente este ejemplo muestra el funcionamiento del algoritmo de “*Deep First Search*” como su nombre lo indica se sumerge buscando caminos.

C2 *BFS*. Breadth First Search

El algoritmo *BFS* hace crecer su árbol de búsqueda capa por capa. Primero añade todos los nodos-hijos al nodo-padre. A continuación, añade uno a uno los nodos-hijos de todas las ramas de un primer nivel. Es decir, añade nodos que se comunican directamente al nodo donde el algoritmo opera. Posteriormente, continúa añadiendo más nodos, haciendo que su árbol de búsqueda sea más ancho en cada paso. En la [Figura C.5](#) se muestra el árbol de búsqueda del algoritmo *BFS*.

APÉNDICE C. ALGORITMOS DE BÚSQUEDA

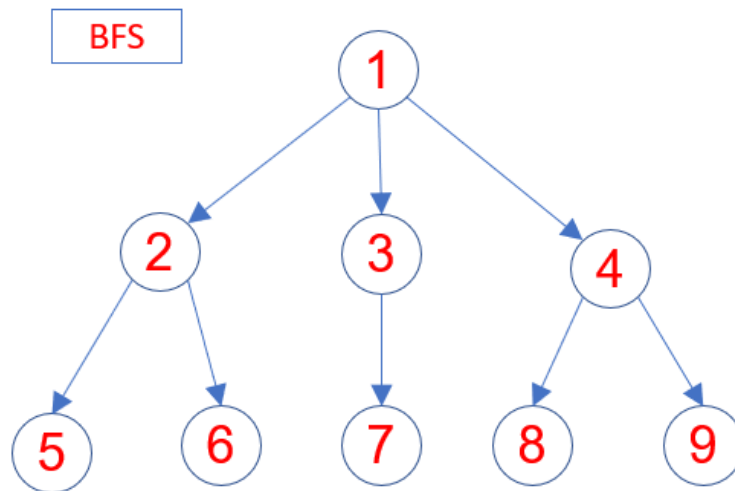


Figura C.5: Árbol de búsqueda de BFS. La enumeración de cómo se visitan los nodos tienen una sucesión continua en cada nivel.

En la **Figura C.6** se muestra una aplicación del algoritmo de *Breadth First Search* a un grafo específico.

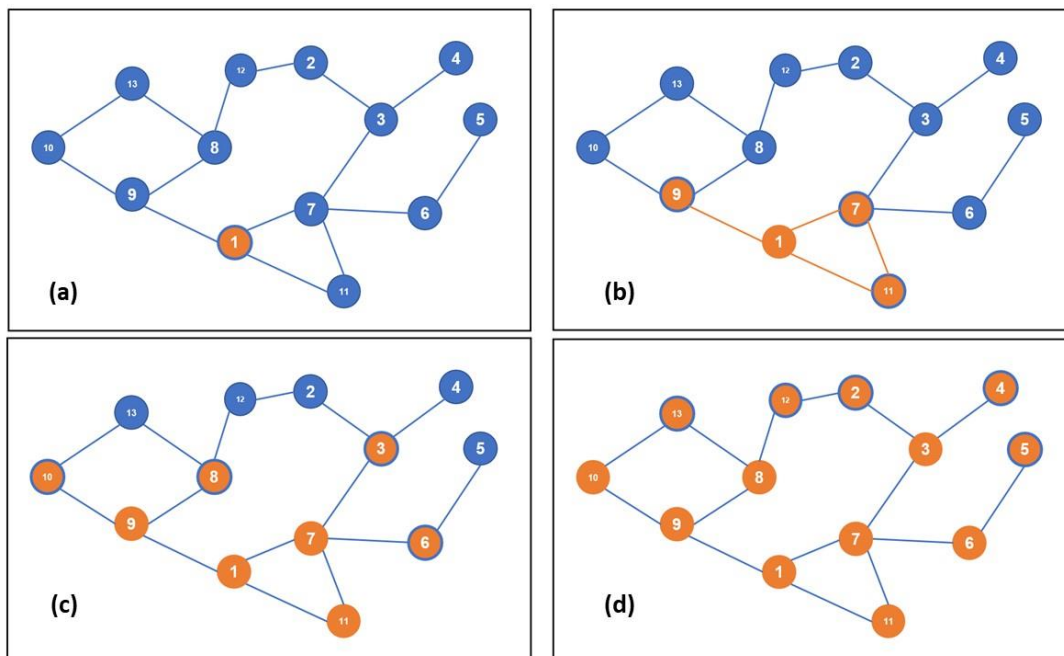


Figura C.6: Breadth First Search en un grafo. En el inciso (a) se empieza en el nodo uno (Nodo Fuente). Se visitan los nodos vecinos al nodo uno. En el inciso (b) se parte de los nodos 7, 9 y 11. Se visitan sus todos sus vecinos. En el inciso (c) ahora se parten de los nodos 10,8,3 y 6. En el inciso (d) se ha completado la red.

C3 Diferencias de Implementación

En cada paso de ejecución, tanto *DFS* como *BFS* mantienen lo que llamamos la frontera de búsqueda. Esta frontera de búsqueda en un conjunto son los nodos que están en el árbol como nodos hijos pero que aún no se han añadido a él. El algoritmo *DFS* utiliza una cola **LIFO** en su implementación iterativa. **LIFO** significa "último en entrar, primero en salir". Es un método de procesamiento de datos, en el que los últimos elementos introducidos son los primeros en eliminarse. Para dar un ejemplo, imagine que apila una baraja de cartas colocando una carta encima de otra, empezando por la parte inferior. Una vez que la baraja está completamente apilada, se empiezan a retirar las cartas, empezando por la última que se apilo. Así, las últimas cartas que se colocan en la baraja son las primeras que se retiran. Esto se puede ver cuando el algoritmo *DFS* regresa en sus pasos.

El algoritmo *DFS* aleatoriza cada elección para elegir el nodo siguiente, así el árbol *DFS* puede quedarse atascado en un bucle y correr indefinidamente. Se dice que *DFS* no es un algoritmo completo. Por otro lado, *DFS* puede correr el riesgo de no terminar nunca, incluso si la meta está muy cerca del nodo de inicio y el grafo es pequeño. En la **Figura C.7** se puede ver un ejemplo de una red muy básica donde *DFS* podría mostrar un problema de completitud.

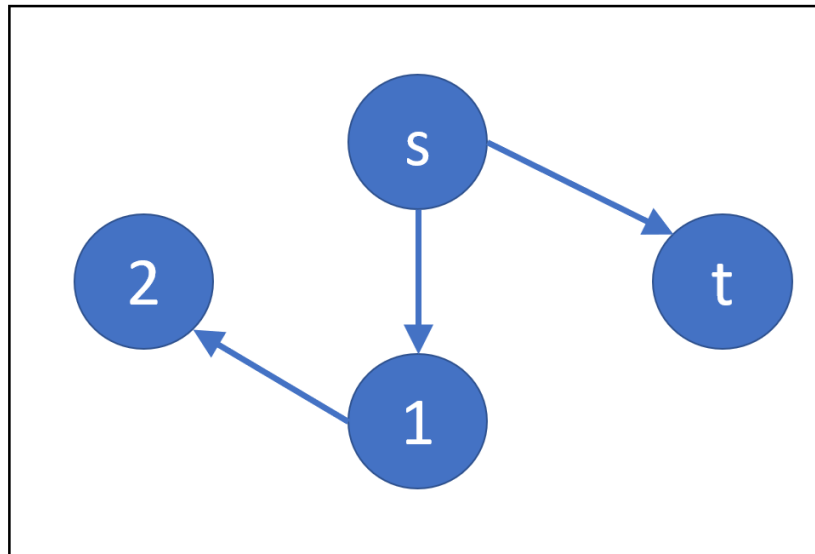


Figura C.7: Si *DFS* parte de *Nodo s* hacia al *nodo 1*, puede alternar entre el *nodo 1* y el *nodo 2* infinitamente. Se observa que hay un camino directo del *Nodo s* y el *Nodo t*.

DFS al iniciar la exploración desde el *Nodo s* al *Nodo t* comprueba si existen caminos de búsqueda. Pero el algoritmo *DFS* puede que encuentre un camino más largo a un *Nodo t*. Eso ocurre si la meta es alcanzable en más de una manera. *DFS* podría primero descubrir un camino más largo, provocando que el algoritmo sea más tardado. Ver **Figura C.8**.

APÉNDICE C. ALGORITMOS DE BÚSQUEDA

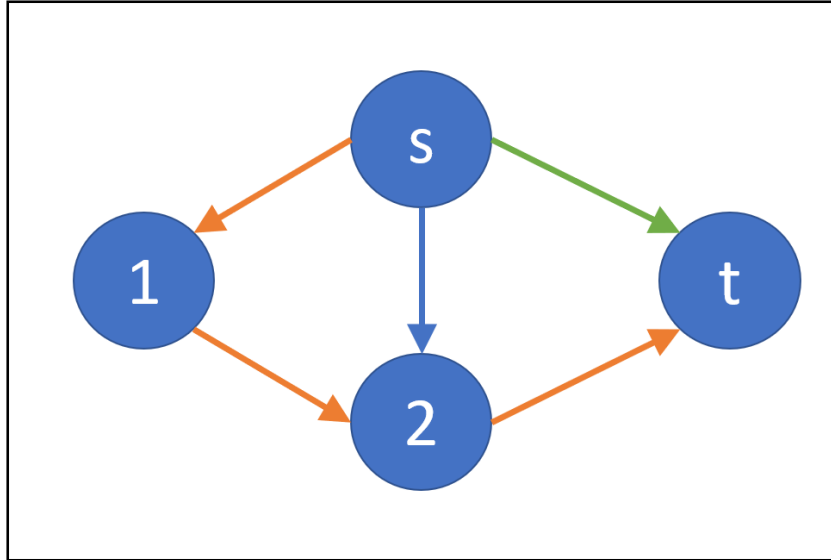


Figura C.8: DFS primero descubrió un camino más largo (color naranja) contrariamente al camino más corto (color verde).

Si el objetivo es profundo y hay que pasar por un grafo complejo DFS lo recorre más rápido que BFS, evitando bucles.

APÉNDICE C. ALGORITMOS DE BÚSQUEDA

APÉNDICE D. OPTIMIZACIÓN DE FLUJO MÁXIMO

D1 Problema de Ford-Fulkerson

El problema de Ford-Fulkerson fue formulado por T. Harris. El problema dice "Considere una red ferroviaria que conecta dos ciudades a través de una serie de ciudades intermedias, donde cada enlace de la red tiene asignado un número que representa su capacidad. Suponiendo una condición de estado estacionario, se debe calcular un flujo máximo de una ciudad inicial a una ciudad meta" [78].

Se parte de la exigencia que un grafo está conformado por un *Nodo Fuente*, un *Nodo Sumidero* y nodos intermedios conectados por aristas dirigidas. Las aristas dirigidas con sus respectivas capacidades representan su capacidad de flujo en un estado estacionario. Sujeto a las condiciones de que el flujo en una arista no exceda su capacidad, y que el flujo total en cualquier nodo intermedio sea igual a la suma de flujo. Es decir, el balance de flujo se cumpla, así el flujo que entra en un nodo debe ser igual al flujo que sale del mismo. Ahora, se desea encontrar un flujo máximo desde el nodo fuente al nodo sumidero. Se desea encontrar un flujo que maximice la suma de los flujos en todas las aristas dirigidas.

Hablando en lenguaje matemático, sea P_1 la fuente (nodo s: fuente) y P_n el sumidero (nodo t: sumidero), debemos encontrar el flujo f_{ij} ($i, j = 1, \dots, n$) que maximizan la **Ecuación D.1**

$$\sum_{i=2}^n f_{1j}, \quad \text{D.1}$$

con la restricción de la **Ecuación D.2**,

$$\sum_j^n (f_i - f_{ji}) = 0 \quad \text{con } (i = 2, \dots, n - 1). \quad \text{D.2}$$

Esto es restringido a $0 \leq x_{ij} \leq c_{ij}$, donde los c_{ij} son las capacidades de las aristas. Las capacidades tienen un valor mayor que cero. El algoritmo puede operar en un grafo en donde hay varios *Nodos Fuentes* y *Nodos Sumideros* con flujos desde cualquier *Nodo Fuente* y a cualquier *Nodo Sumidero*, esto es reducible a un problema de una sola *Fuente* y a un solo *Sumidero*.

Una cadena en un grafo es un conjunto de aristas dirigidas que pueden ordenarse de manera alfabéticamente, por ejemplo, $\alpha(12), \beta(23), (34), \dots, \delta((N - 1)N)$, donde los

APÉNDICE D. OPTIMIZACIÓN DE FLUJO MÁXIMO

los nodos son distintos y etiquetados con números ($n = 1, 2, 3, \dots, N$). Así, una cadena une los nodos de interés (*Nodo s* y el *Nodo t*). Una propiedad de una cadena es que no se interseca a sí misma.

Un flujo en un grafo dirigido desde el *Nodo s* al *Nodo t* es representado por una cadena que une a los nodos de interés (*Nodo s* \rightarrow *Nodo t*) y un número no negativo k que indica el flujo a lo largo de dicha cadena. Como cada arista tiene asociado un número positivo llamado capacidad se llamará red a dicho flujo (opcionalmente junto con las capacidades) a la colección de flujos en todas sus aristas dirigidas.

Una red tiene la propiedad de que la suma de todos los flujos en una arista cualquiera es menor o igual que la capacidad de esa arista. En una arista dirigida si cumple la igualdad de que el flujo sea igual que la capacidad, decimos que está saturada por dicho flujo. Una cadena está saturada con respecto a un flujo si contiene al menos una arista dirigida saturada. El valor de un flujo es la suma de los números de todos los flujos en cadena que lo componen. Sólo hay un número finito de cadenas que unen al nodo de inicio y al nodo de salida (*Nodo s* y el *Nodo t*). Dicho de otro modo, existen un número finito de caminos de conexión que conectan el nodo de inicio y el nodo de salida.

El problema de flujo máximo consiste en saber, con una entrada “infinita” en el *Nodo s*, cuánto flujo podemos hacer pasar por el grafo sin superar la capacidad de alguna arista del grafo. Inicialmente el flujo es 0 en todas las aristas hasta que se ejecuta un algoritmo. El valor del flujo es cuántas unidades están pasando a través de una arista dirigida. Para dar un ejemplo, supongamos que las aristas dirigidas son carreteras. Los nodos son ciudades, al iniciar la apertura de las calles el flujo de automóviles es cero (ningún automóvil está transitando en la carrera). Cada una de estas carreteras tiene un valor de capacidad que podemos asociar con el flujo máximo estacionario de autos que puede sostener (tráfico). Lo que se pide es calcular el *flujo máximo* de tráfico a través de todas las carreteras que conectan las ciudades, partiendo desde una ciudad de origen, hasta llegar a una ciudad meta.

D2 Algoritmo Aleatorio Codicioso

Dado un grafo con nodos y aristas dirigidas, se quiere calcular la cantidad de flujo que se puede transportar. El objetivo es averiguar cuánto flujo se pueden empujar desde el *Nodo s* al *Nodo t*. Por ejemplo, la [Figura D.1](#) muestra todos los caminos que empujan cinco unidades de flujo desde el *Nodo s* a *t*. Siempre respetando todas las capacidades de las aristas.

APÉNDICE D. OPTIMIZACIÓN DE FLUJO MÁXIMO

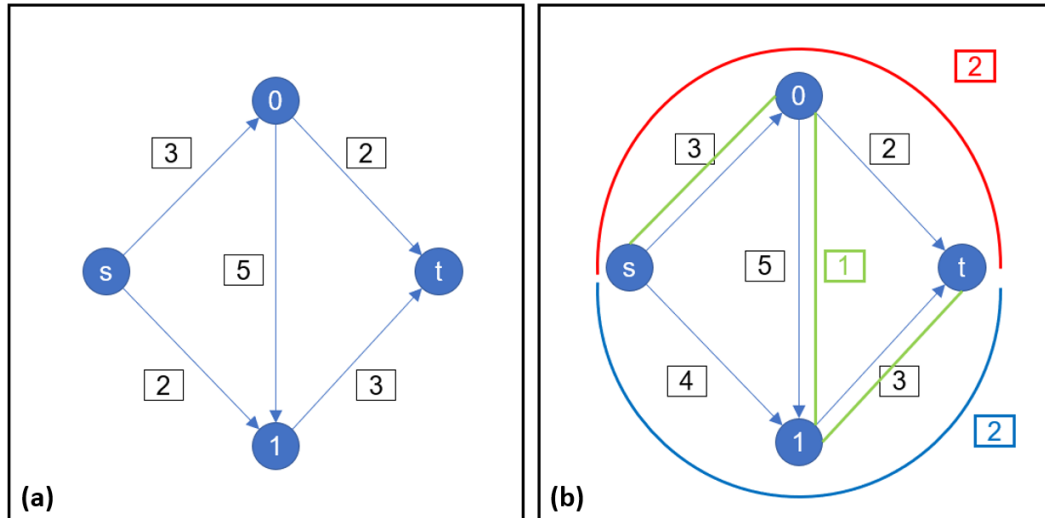


Figura D.1: En el inciso (a) se muestra un grafo donde cada arista tiene asociada una capacidad, se indican en cuadros negros. En el inciso (b) se indican todos los caminos de conexión posibles. El camino rojo tiene un valor de flujo de 2, el camino verde de 1 y camino azul de 2. Se tiene un total de 5 unidades de transferencia.

Surgen dos preguntas. La primera, ¿se puede transportar más flujo?. La segunda, ¿existen más caminos de transporte? La respuesta a estas dos preguntas es no, ya que el flujo total que sale del *Nodo s* por sus dos aristas de salida es de 5 unidades, las mismas 5 unidades que los caminos transportan. Además, se han recorrido todos los caminos disponibles entre ambos nodos de interés

Después del ejemplo anterior en donde se muestra ya el flujo máximo calculado, ahora se describirá el proceso en general para encontrar el flujo máximo en un grafo. Se inicia especificando algunos puntos clave.

- Se tiene un grafo dirigido G , con N nodos y con un total A de aristas dirigidas.
- Se especifica el nodo fuente $s \in N$ en el grafo G .
- Se especifica el nodo sumidero $t \in N$ en el grafo G .
- Se especifica una capacidad mayor que cero c_a para cada arista $a \in A$.

Como el objetivo es empujar el flujo de *Nodo s* al *Nodo t*, podemos asumir sin pérdida de generalidad que el *Nodo s* no tiene aristas de entrada y el *Nodo t* no tiene aristas de salida. Un flujo en una arista se define como $\{f_a\}$ con $a \in A$. Ahora, para cada arista en G , se deben satisfacer dos restricciones.

1. **Restricciones de capacidad.** Para cada arista $a \in A$, se tiene que $f_a \leq c_a$.
2. **Restricciones de conservación.** Para cada nodo n que no sea el *nodo s* ni el *t*, la cantidad de flujo que entra en el nodo n es igual a la cantidad de flujo que sale de él.

APÉNDICE D. OPTIMIZACIÓN DE FLUJO MÁXIMO

El objetivo es calcular un *flujo máximo*, un flujo con el máximo valor posible que puede salir del *Nodo s*, transportarse a través de todos los caminos posibles. Este flujo máximo también es el flujo máximo que entra en el *Nodo t*. Esto se logra con el uso del algoritmo aleatorio codicioso. Este algoritmo aleatorio codicioso toma una secuencia de decisiones miopes e irrevocables, aleatorias, con la esperanza de que todo salga bien al final. Es decir, se espera que los caminos que elige el algoritmo sean los idóneos para el cálculo del flujo máximo.

La aproximación más sencilla al problema del flujo máximo consiste en empezar con un flujo cero para todas las aristas dirigidas y producir flujos con un valor cada vez más alto por algún camino de *s* a *t*. El pseudocódigo algoritmo aleatorio codicioso se muestra en el **Cuadro D.1**.

Cuadro D.1. Pseudocódigo del Algoritmo aleatorio codicioso

```
Inicializar  $f_a = 0$  para todo  $a \in A$  // Flujo cero para todas las aristas del grafo  
repetir la búsqueda para un camino  $P$  del Nodo s al Nodo t  
    tal que  $f_a \leq c_a$  para  $\forall a \in P$  // Restricciones de capacidad  
si no hay tal camino  
entonces  
    se detiene con el flujo actual  $\{f_a\}$  con  $a \in A$   
de otra forma  
    // Se calcula el cuello de botella  
    
$$\Delta = \min_{a \in P} (c_a - f_a)$$
  
    para todas las aristas del camino  $P$   
        hacer añada  $\Delta$  a  $f_a$ 
```

El camino elegido y recorrido por el algoritmo es formado por un conjunto de aristas dirigidas con sus respectivas capacidades. El flujo que puede soportar una arista que está contenida en el camino elegido es calculado con $c_a - f_a$, esto es la resta de la capacidad menos el flujo que pasa por dicha arista. De todos los flujos remanentes en cada arista que conforman al camino recorrido por el algoritmo, a él minino de todos estos flujos se le llamará **cuello de botella**. Al *cuello de botella* se le etiqueta con el símbolo Δ .

El algoritmo de búsqueda busca determinar si hay o no un camino entre el *Nodo s* al *Nodo t* restringido con $f_a < c_a$. Para entender mejor la desigualdad $f_a < c_a$ considere una tubería de agua, el flujo de agua que transporta dicha tubería siempre debe de ser menor o igual que su capacidad máxima de flujo. El algoritmo debe de encontrar varios de estos caminos, pero por ahora, se permite que el algoritmo elija uno aleatoriamente. Al encontrar un camino entre el *Nodo s* al *Nodo t*, el algoritmo empuja todo el flujo posible a través de este. El flujo siempre está restringido a las capacidades de las aristas

APÉNDICE D. OPTIMIZACIÓN DE FLUJO MÁXIMO

dirigidas que conforman un camino. Por ejemplo, en la **Figura D.2**, se muestra un grafo dirigido que al principio tiene un flujo en todas las aristas igual a cero. Posteriormente, se aplica el algoritmo aleatorio codicioso, este algoritmo elige el camino rojo.

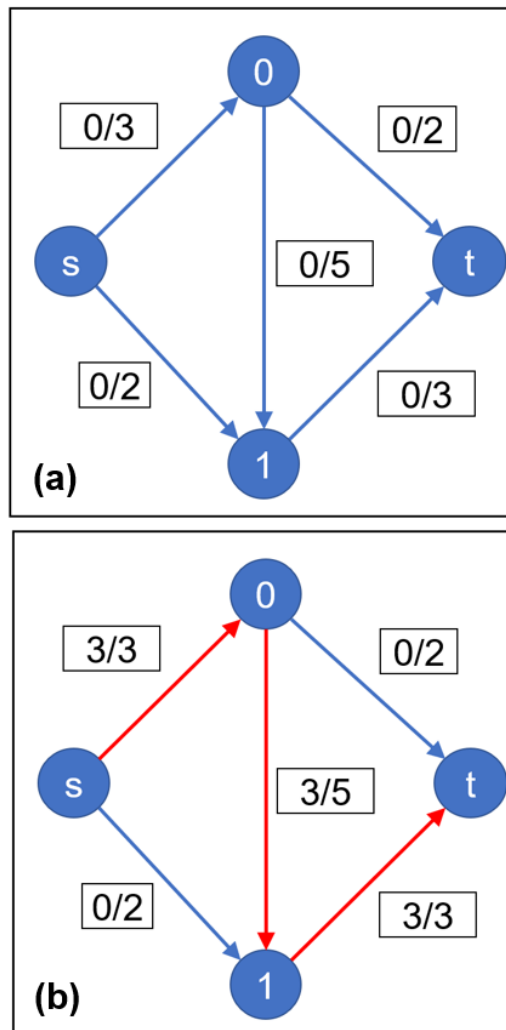


Figura D.2: En el inciso (a) se muestra un grafo dirigido, en donde cada arista dirigida se especifica su flujo en el lado izquierdo de las diagonales. Sus capacidades en el lado derecho de las diagonales. En el inciso (b) el algoritmo aleatorio codicioso elige un primer camino. Este camino está conformado por los nodos $s \rightarrow 0 \rightarrow 1 \rightarrow t$. En el camino se empujan 3 unidades de flujo.

Este algoritmo codicioso es bastante aleatorio, pero ¿sirve para los propósitos de esta tesis?, es decir, ¿cuándo termina el algoritmo nos da un flujo máximo?. Las respuestas a estas interrogantes es que inicialmente, al tener un flujo todo cero, todos los caminos ente el *Nodos s* y el *Nodo t* son posibles de recorrer por el algoritmo ingenuo codicioso. Por ejemplo, si el algoritmo elige por casualidad el camino en zigzag en la **Figura D.2 (b)**, entonces la mínima capacidad (*cuello de botella*) es $\Delta = \min\{3,5,3\} = 3$. El camino en zigzag dirige 3 unidades de flujo a lo largo del camino elegido. El algoritmo termina

con un flujo de valor 3. Esto satura las aristas superior izquierda e inferior derecha. Pero no se cumple $f_a < c_a$ para todas las aristas del grafo. Con esta consideración que no se cumple, se dice que no se ha encontrado el flujo máximo.

D3 Algoritmo de Ford-Fulkerson

La idea para ampliar el algoritmo aleatorio codicioso es permitir las operaciones de "deshacer". Por ejemplo, el *algoritmo aleatorio codicioso* se atasca en la **Figura D.2(b)**, porque solo puede recorrer un solo camino, el camino en zigzag. Nos gustaría encaminar dos unidades más de flujo a lo largo de la arista $s \rightarrow 0$, luego hacia atrás a lo largo de la arista $0 \rightarrow 1$, deshaciendo 2 de las 3 unidades que se empujaron en la iteración anterior, y finalmente a lo largo de la arista $1 \rightarrow t$. De este modo se obtendría el flujo máximo.

Se llamará un **grafo residual** al grafo formado por la operación permitidas de "deshacer". La idea es que, dado un grafo G y un flujo f en él, formamos un nuevo **grafo de flujo** G_f que tiene el mismo conjunto de vértices de G y que tiene dos aristas por cada arista de G que se les haya aplicado la operación de "deshacer".

De la **Figura D.3** una arista $a = (1 \rightarrow 2)$ de un grafo G lleva un flujo f_a y tiene una capacidad c_a crea o genera una "arista hacia delante" ($1 \rightarrow 2$) que pertenece a G_f con un flujo residual de $c_a - f_a$ y una "arista hacia atrás" ($2 \rightarrow 1$) de G_f con capacidad f_a . Donde f_a es la cantidad de flujo previamente enrutado que puede deshacerse.

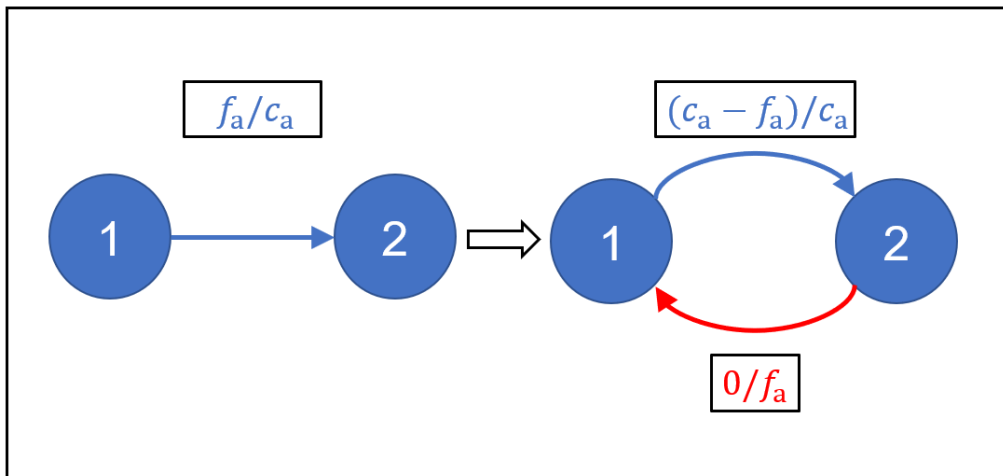


Figura D.3: Dado una arista dirigida ($1 \rightarrow 2$) con una flujo y capacidad y f_a/c_a . Al aplicar la idea de grafos de residuos se crea una arista dirigida tiene un valor de flujo de $c_a - f_a$ mientras, se crea una arista dirigida en dirección contraria y cuna capacidad de f_a .

Ahora si unimos el algoritmo aleatorio codicioso y la idea de aristas residuales obtenemos un mejor algoritmo que nos garantiza encontrar el flujo máximo se cumple. A este

APÉNDICE D. OPTIMIZACIÓN DE FLUJO MÁXIMO

algoritmo lo llamaremos el algoritmo de Ford-Fulkerson con el “**método de caminos de aumento**”. El pseudocódigo se muestra en el **Cuadro D.2**.

Cuadro D.2: Pseudocódigo del algoritmo de Ford-Fulkerson.

```

inicializar  $f_a = 0$  para todo  $a \in A$  // Flujo cero para todas las aristas del grafo
repetir
  búsqueda de un camino  $P$  entre los nodos  $s$  al nodo  $t$ 
  tal que  $f_a \leq c_a$  para  $\forall a \in P$  // Restricciones de capacidad
  en el gráfico residual  $G_f$  tal que cada arista de  $P$  tiene capacidad residual positiva
  si no hay tal camino
  entonces
    se detiene con el flujo actual  $\{f_a\}$  con  $a \in A$ 
  si no
    // Se calcula la capacidad residual de  $a$  en  $G$  y el cuello de botella
    
$$(c_a - f_a)$$

    y
    
$$\Delta = \min_{a \in P} (c_a - f_a)$$

    // aumentar el flujo  $f$  en la arista dirigida en el camino elegido  $P$ 
    para todas las aristas  $a$  de  $G$  que estén en la misma dirección del camino  $P$ 
      hacer
        incrementa  $f_a$  en  $\Delta$ 
    para todas las aristas  $a$  de  $G$  que estén en la dirección opuesta al camino  $P$ 
      hacer
        decrementa  $f_a$  en  $\Delta$ 

```

El algoritmo de Ford-Fulkerson es válido para sistemas donde las capacidades son enteras, racionales e irracionales y sus distintas combinaciones de capacidades en las aristas dirigidas en un grafo. Cada iteración del algoritmo de Ford-Fulkerson aumenta el valor del flujo de corriente en el valor actual de Δ . El valor de su cuello de botella. Al igual se tiene que $\Delta > 0$ en cada iteración del algoritmo de Ford-Fulkerson.

Por último, el postulado de “**Condiciones de Optimalidad**” en el algoritmo de Ford-Fulkerson dice lo siguiente. “*Si f es un flujo en un grafo G tal que la red residual G_f no tiene ningún camino entre los Nodos $s-t$, entonces f es un flujo máximo*”. Por lo tanto, se garantiza que el algoritmo de Ford-Fulkerson termina con un flujo máximo.

D4 Método de Caminos de Aumento

A continuación, se presenta un ejemplo donde se ejecuta el algoritmo de Ford-Fulkerson con el *método de caminos de aumento*. Para empezar a abordar el *método de caminos de aumento* tomaremos el grafo dirigido de la **Figura D.4** donde se identifican el *Nodo Fuente* (*Nodo s*), el *Nodo Sumidero* (*Nodo t*), los nodos intermedios que se etiquetan de 0 al 3. Dicho grafo está formado por aristas dirigidas. Cada arista dirigida tiene una capacidad bien definida. La capacidad se escribe al lado derecho de la diagonal. La cantidad de flujo es fijada desde el inicio como cero para todas las aristas del grafo. Las aristas dirigidas pueden recibir una determinada cantidad de flujo en todo momento. La cantidad de flujo será constante en el tiempo (estado estacionario). La cantidad de flujo se escribe al lado izquierdo de la diagonal.

El flujo que pasa por una arista debe ser estrictamente menor o igual que la capacidad, siendo $f_a \leq c_a$. Si dicha capacidad es sobrepasada la arista está sobrecapacitada y significa que hemos empujado el sistema más allá de su límite.

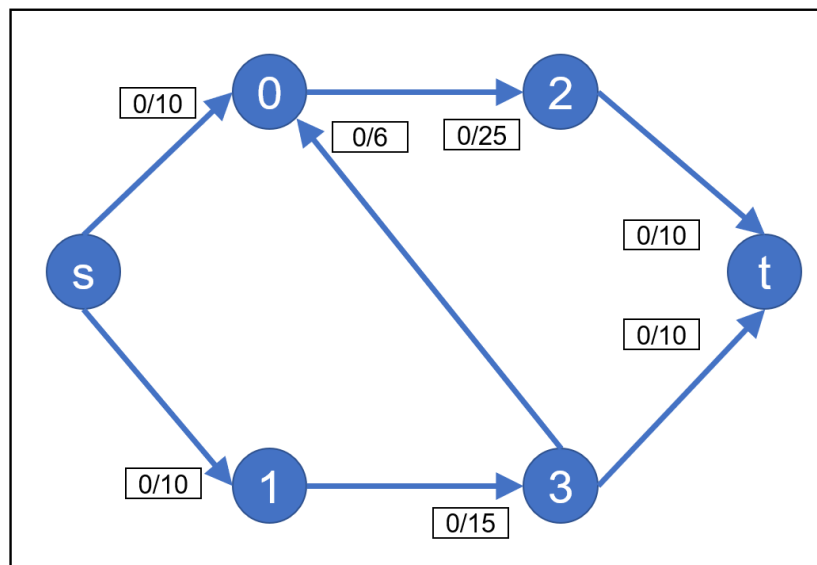


Figura D.4: Cada arista en el grafo tiene un cierto flujo y capacidad especificados por los dos valores separados por una diagonal a lado en cada arista. Se indica el *Nodo s*, el *Nodo t* y los nodos intermedios desde el 0 hasta el 3.

El método busca repetidamente caminos de conexión y aumenta el flujo hasta que no se pueden encontrar más caminos de aumento. Un camino de aumento es un camino de aristas en un grafo con capacidades mayores que cero que van desde el *Nodo s* al *Nodo t*. En la **Figura D.5** se observa un camino de aumento.

APÉNDICE D. OPTIMIZACIÓN DE FLUJO MÁXIMO

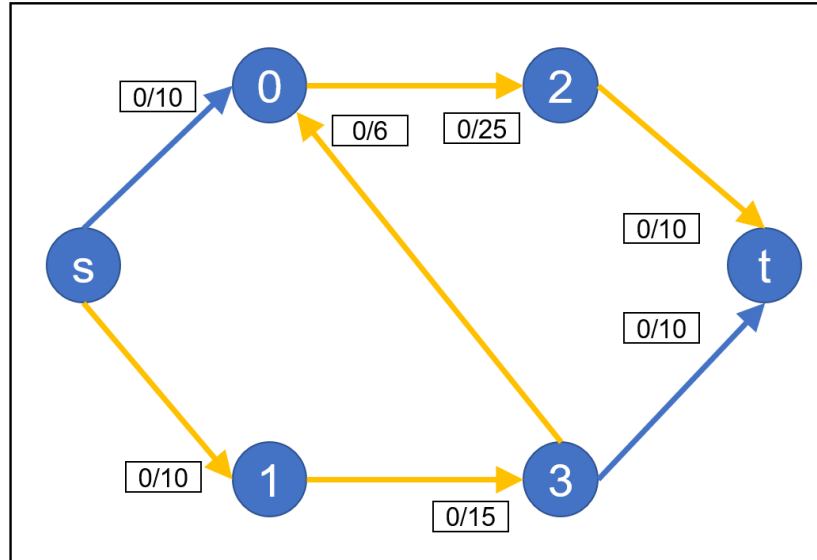


Figura D.5: Camino de aumento en color naranja. Los caminos de aumento van desde el Nodo Fuente (Nodo s) al Nodo Sumidero (Nodo t).

Una de las características principales del camino de aumento es que sólo puede fluir a través de las aristas que no están totalmente saturadas. La saturación es el flujo que puede transportar una arista y debe de ser igual o menor que su capacidad. De hecho, se ha alcanzado el flujo máximo cuando no se pueden encontrar más caminos de aumento. La capacidad residual de las aristas en la dirección del camino de aumentos está dada por la **Ecuación D.3**.

Todo camino de aumento tiene el valor del *cuello de botella*, en la **Ecuación D.3** da un valor de 6. Dicho cuello de botella es el valor mínimo que limita el flujo que puede atravesar en cualquier camino de aumento. En la **Figura D.6** se indica el camino de aumento y la arista que tiene el flujo mínimo, la arista que tiene el cuello de botella.

$$\min(10 - 0, 15 - 0, 6 - 0, 25 - 0, 10 - 0) = \min(10, 15, 6, 25, 10) = 6 \quad \text{D.3}$$

APÉNDICE D. OPTIMIZACIÓN DE FLUJO MÁXIMO

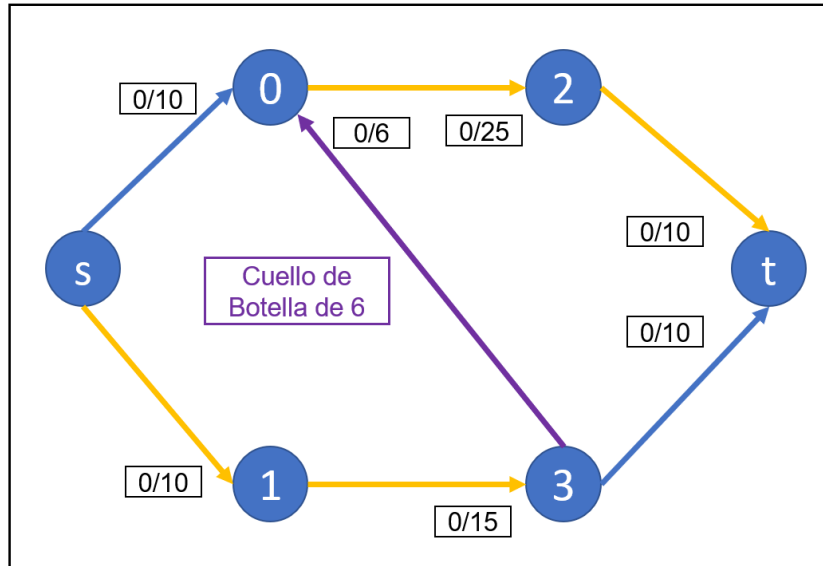


Figura D.6: Se indica en color morado el cuello de botella en el camino de aumento en color amarillo.

Ahora se procede a aumentar el flujo en el camino de aumento encontrado. El aumentar el flujo significa actualizar los valores de flujo en cada arista dirigida a lo largo de la ruta. Se aumenta el flujo de cada arista en exactamente 6 unidades. Sin embargo, no hemos terminado de “aumentar” el flujo, ya que además de aumentar el flujo a lo largo de las aristas dirigidas que tienen la misma dirección del camino de aumento también se debe “disminuir” el flujo a lo largo de las aristas que están en la dirección opuesta al camino de aumento encontrado. A estas aristas se les llaman **aristas residuales**. La **Figura D.7** nos indica en líneas curvas punteadas las aristas residuales. Hay que aclarar que la curva que exhibe las aristas residuales es solo para fines visuales, se usan para diferenciarse con las aristas dirigidas originales. Al igual, en estas líneas punteadas el algoritmo continúe su aplicación.

APÉNDICE D. OPTIMIZACIÓN DE FLUJO MÁXIMO

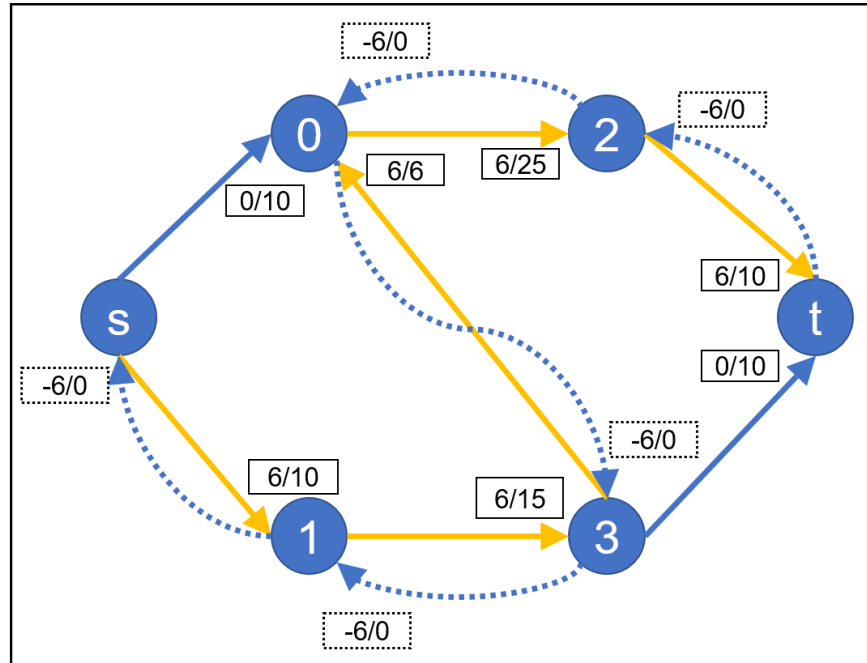


Figura D.7: Se indican las aristas residuales en líneas punteadas. La dirección es opuesta a las aristas del camino de aumento.

La lógica detrás de las aristas residuales es deshacer las elecciones “erróneas” en los caminos de aumento que no conducen a un flujo máximo. Ya que no sabemos cuáles son los caminos de aumento correctos, por lo que este mecanismo permite encontrar libremente cualquier camino de aumento sin tener que preocuparnos de ser capaces de lograr el flujo máximo por la elección de un camino incorrecto o por caer en un callejón sin salida. Aunque debemos aclarar que el comando de flujo máximo “*Max Flow*” en Matlab prueba todos los caminos de aumento posibles de una forma extremadamente rápida, por lo que si hubiera un camino que conduce a un callejón sin salida, el propio software recalculara nuevamente otro camino.

Hay que mencionar que las aristas residuales se convierten en aristas válidas si se encuentra un camino de aumento en la misma dirección. El concepto de aristas válidas se entiende que se comportan como una arista dirigida normal. Entonces, si el algoritmo da un paso atrás, se entiende que cada arista en el grafo original tiene una arista residual con una capacidad de flujo cero. El término grafo residual es un nuevo grafo que contiene las aristas originales del grafo original y aristas residuales que se han añadido. Así, en general cuando se habla del grafo completo se refiere al grafo residual.

El aumento del flujo en una arista residual también es la diferencia entre la capacidad y el flujo de esa arista. La diferencia entre la capacidad y el flujo es la verdadera capacidad restante de esa arista residual. Esto asegura que la capacidad residual de cada arista es siempre no negativa incluso si el flujo es negativo (opuesto) en una arista residual.

APÉNDICE D. OPTIMIZACIÓN DE FLUJO MÁXIMO

Por ejemplo, en las aristas residuales que están en camino zigzag que se muestra en la **Figura D.7**, la suma de 0 menos -6 es 6 ($0 - (-6)$), por lo que todas las aristas residuales tienen una capacidad restante de 6. En la selección de nuevos caminos de aumento solo se pueden escoger aristas que tengan una capacidad de flujo es mayor que cero. El algoritmo continúa aplicando el método de caminos de aumento y el flujo se aumenta hasta que no se puedan encontrar más caminos de aumento entre el *Nodo s* y el *Nodo t*.

Posteriormente, se calcula el *cuello de botella*, el resultado es calculado en la **Ecuación D.4**.

$$\min(10 - 6, 15 - 6, 10 - 0) = \min(4, 9, 10) = 4 \quad \text{D.4}$$

En la **Figura D.8** se muestra el segundo camino de aumento y se indica el cuello de botella.

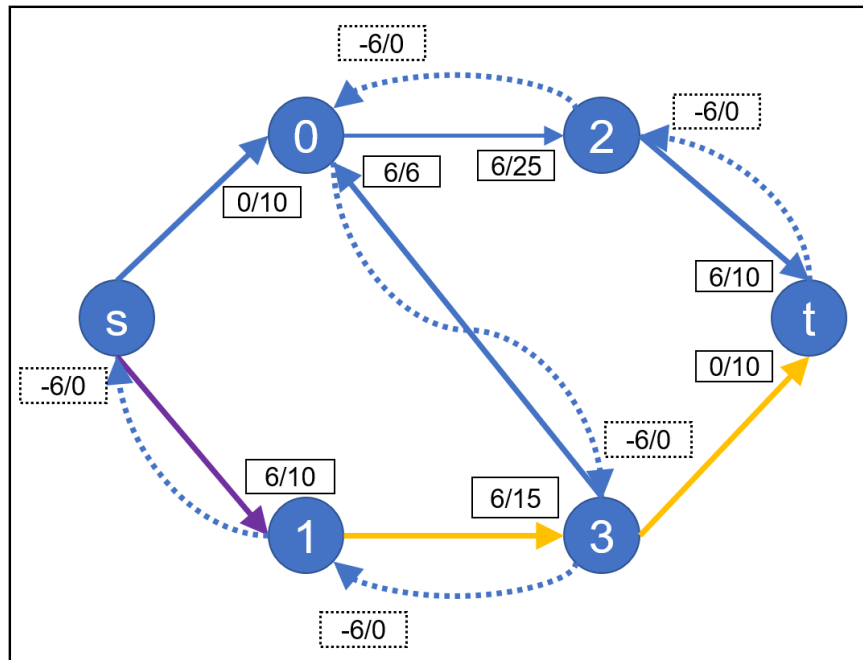


Figura D.8: Segundo camino de aumento encontrado, se indican las aristas que lo confirman en color amarillo. El cuello de botella de este camino de aumento se indica en la arista dirigida de color morado. Su valor es de 4 unidades.

APÉNDICE D. OPTIMIZACIÓN DE FLUJO MÁXIMO

El camino de aumento se forma con las aristas que tiene en la misma dirección sean normales o residuales. Para el tercer camino de aumento, se observa la línea puntuada en color amarillo en la **Figura D.9**, esta es una arista residual. Dicha arista residual se ha tomado porque está en la misma dirección del camino de aumento, el camino en zigzag, encontrado por el algoritmo. El cuello de botella, que es la arista de color morado tiene un valor igual a 6. El cálculo es mostrado en la **Ecuación D.5**.

$$\min(10 - 0, 0 - (-6), 10 - 4) = \min(10, 6, 6) = 6 \quad \text{D.5}$$

Algo a mencionar es que puede existir más de una arista dirigida con el valor de cuello de botella. Esto quiere decir que más que de una arista puede cumplir con el mínimo flujo remanente.

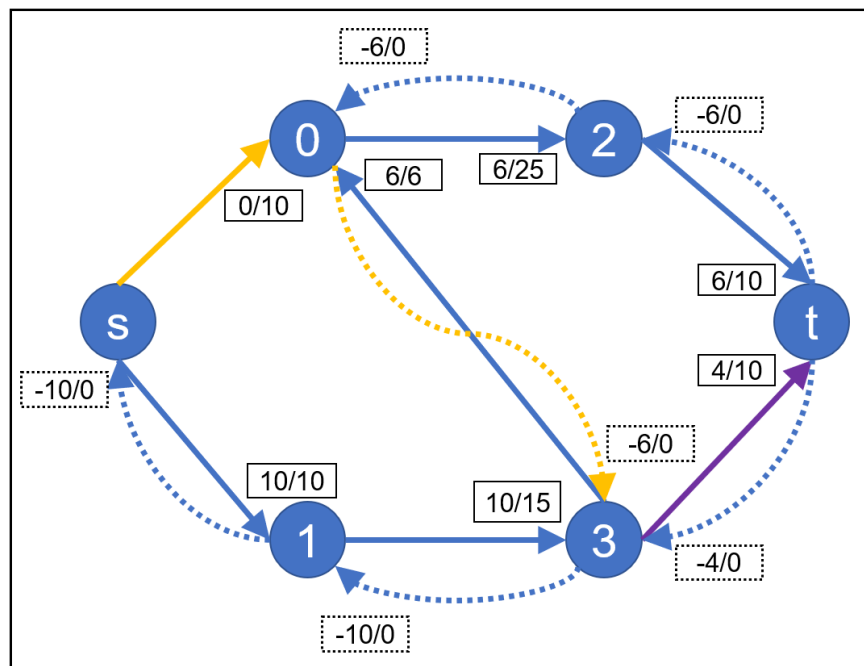


Figura D.9: Tercer camino de aumento que recorre 2 aristas normales y una arista residual (color morado). La arista dirigida de color morado es la arista que tiene el cuello de botella. Con un valor de 6 unidades. Al igual la línea puntuada de color amarillo se encuentra también tiene un valor de flujo remanente de 6, igual que el cuello de botella.

Actualizando los valores del cuello de botella en la **Figura D.10** se tiene que las aristas dirigidas para el camino de aumento han aumentado su flujo en un valor de 6 unidades.

APÉNDICE D. OPTIMIZACIÓN DE FLUJO MÁXIMO

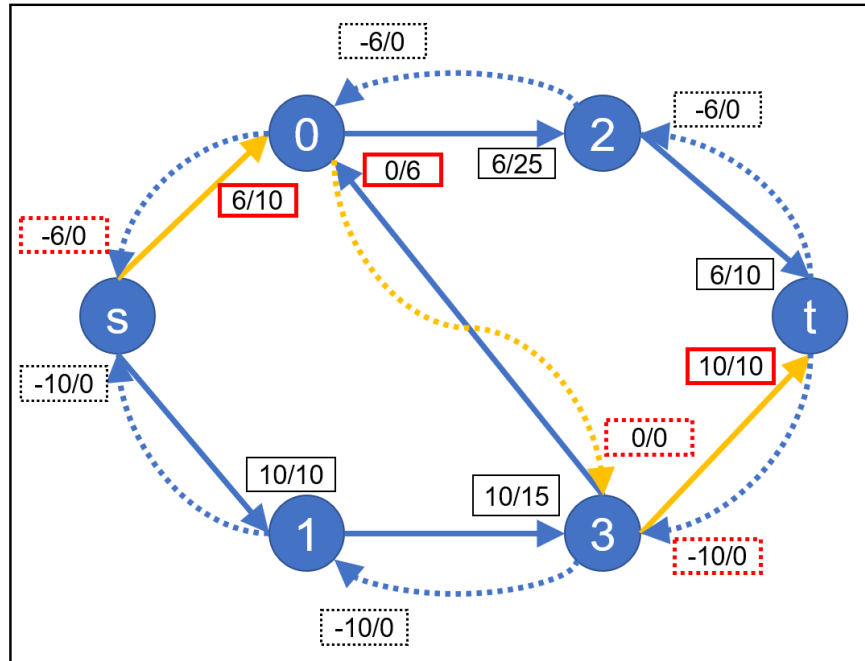


Figura D.10: Actualización del flujo con un valor de 6, el cuello de botella, en el tercer camino de aumento encontrado de la Figura D.9

Para el cuarto y último camino de aumento se calcula el cuello de botella, con un valor de 4. En todas las aristas dirigidas que conforman este camino se aumenta el flujo en 4 unidades. El resultado al actualizar los flujos se muestra en la **Figura D.11**.

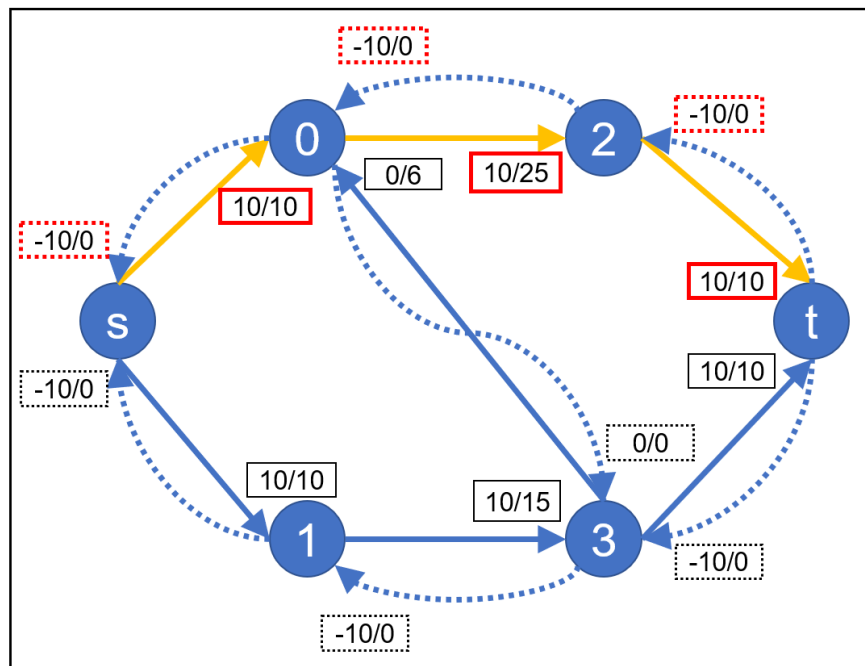


Figura D.11: Cuarto y último camino de aumento encontrado en el grafo de la Figura D.4.

APÉNDICE D. OPTIMIZACIÓN DE FLUJO MÁXIMO

Una vez que se encuentran todos los caminos de aumento, cuatro en total, se calcula el flujo máximo. El flujo máximo se calcula sumando todos los valores de los cuellos de botella obtenidos de todos los caminos de aumento. El flujo máximo total tiene un valor de 20 unidades, este cálculo se muestra en la [Ecuación D.6](#),

$$\text{Flujo máximo} = 6 + 4 + 6 + 4 = 20. \quad \text{D.6}$$

El algoritmo se ejecuta con una complejidad de tiempo $O(FN)$ siendo F el flujo máximo y N el número de nodos del grafo. Para ejemplificar mejor la complejidad primero veamos el grafo en la [Figura D.12](#). Supongamos que las aristas laterales tienen valores de capacidad muy altos, por ejemplo 100, en comparación con la arista central que tiene una capacidad de 1. Podemos decir claramente que el flujo máximo debería ser 200, porque podemos ejecutar dos caminos de aumento desde el *Nodo s* al *Nodo t* con valores de flujo de 100 en la parte superior e inferior del gráfico. Pero recordemos que la elección de caminos de aumento es una elección “aleatoria” y por ende cualquier camino puede ser igualmente escogido tantas veces como sea necesario.

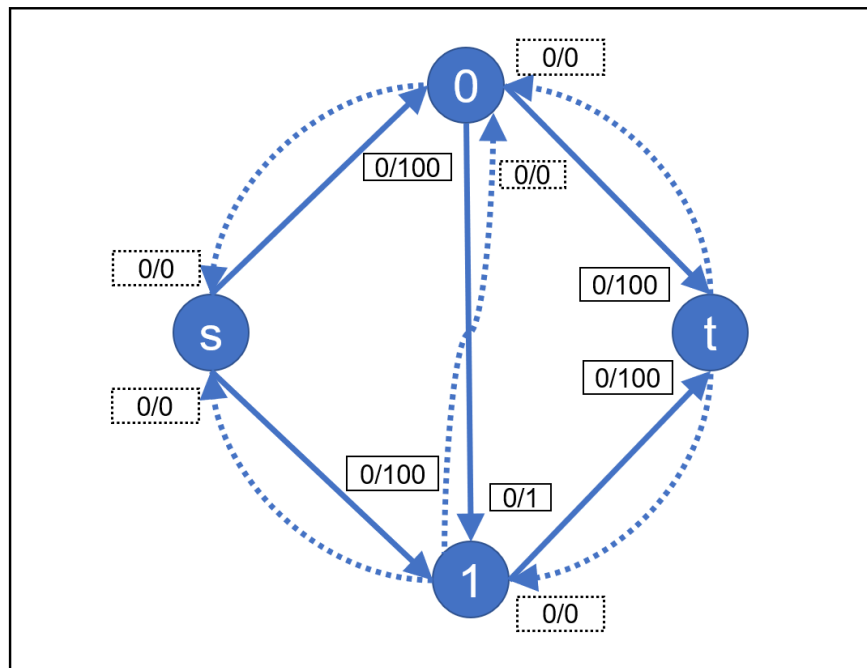


Figura D.12: Grafo propuesto para ejemplificar la complejidad en la ejecución de método de caminos de aumento.

Es posible que se elija la arista del medio con una capacidad igual a 1, haciendo un camino de zigzag. Lo que hará es limitar el flujo que se empuja desde el *Nodo s* al *Nodo t* que es igual a 1 en cada iteración. El valor de 1 siempre va a ser el valor del cuello de botella para este camino elegido. Por lo que solamente se aumenta el flujo total en una unidad en cada iteración. Esto resulta en ir y venir entre los mismos dos caminos

APÉNDICE D. OPTIMIZACIÓN DE FLUJO MÁXIMO

alternativos durante 200 iteraciones, haciendo que el tiempo de cómputo aumente drásticamente.

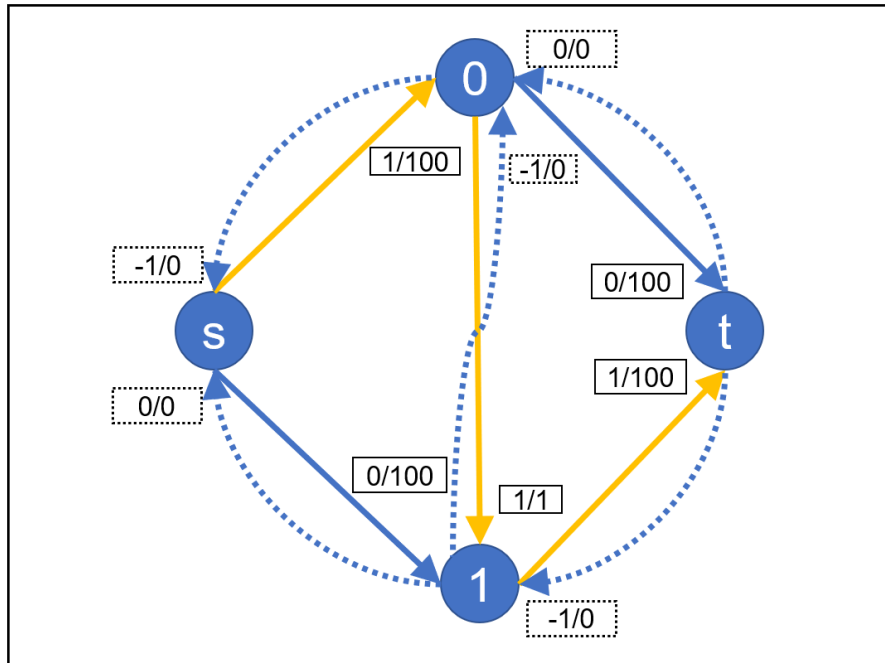


Figura D.13: Camino de aumento propuesto en forma de zigzag. La complejidad de cómputo es más alta si uno escoge reiteradamente este camino de aumento. Esto es debido a que la arista dirigida de en medio tiene una capacidad igual a 1.

APÉNDICE E. CÓDIGOS

E1 Conjunto Regular de Granos (Radios Constantes)

Nombre del Programa: Muestra_Aleatoria_Radios_Constantes.m

%% Programa para generar una red regular de granos con mismo radio.
% Los granos son espaciados horizontal y verticalmente según el usuario requiera.

%% Autor: Oscar Ordoñez Zamora 

%% Limpieza de la Memoria y ventana
% Limpiamos valores en la Memoria y limpiamos ventana de comandos (Command Windows)
clear,clc,clf

%% Variables de entrada dadas por el usuario
% Número de granos de un lado.
n=10;
% Radio de los Granos.
radio=220;
% Distancia inter-superficial: horizontal y vertical.
D=5;

%% Lado de la Matriz Dieléctrica
Lado=n*(2*radio)+(n-1)*(D);

%% Inicio del Programa.
% Variables a implementar.
% Tamaño de la muestra
b=(n)*2*radio+(D*(n-1));
% Ciclo que genera los radios constantes de todos los n*n granos.
radii = zeros(n, 1);
for k=1:n*n
radii(k,:)=radio;
end

% Generamos unas matrices las cuales nos ayudaran en la construcción del
% programa.
% Matriz A: coordenadas x de los centros.
A=zeros(n*n,1);
% Matriz B: coordenadas y de los centros.
B=zeros(n*n,1);
% Posición en el eje x del primer grano generado.
f=radio;

APÉNDICE E. CÓDIGOS

```
% Posición en el eje y del primer grano generado.
g=radio;
% La distancia intergranular
d=2*radio+D;
% Valor inicial de indexación en el ciclo for.
p=1;
% Valor final de indexación para el ciclo for.
co=n;

%% Ciclo “for” que construirá la malla de granos.
% Cuerpo estructural de programa.
for j=1:n
    for i=p:co
        % Matriz de las posiciones X.
        A(i)=f;
        % Matriz de la posición Y.
        B(i)=g;
        % Incremento de posición en el grano en el eje y.
        g=g+d;
    end
    g=0+radio;
    % Incremento de posición en el grano en el eje x.
    f=f+d;
    % Incrementos en el contador para el otro paso de ciclo.
    p=p+n;
    % Incrementos en el contador final para el otro paso de ciclo.
    co=co+n;
end

%% Cálculo del Porcentaje de ocupación
% Área total de la Muestra (Matriz cuadrada Dieléctrica)
Area_Total= b*b;
% Área de los círculos
Area_Circulos=n*n*pi*(radio^2);
% Densidad de Ocupación
Ratio=Area_Circulos/Area_Total;
% Densidad de Ocupación Porcentual
Ratio2=Ratio*100;

%% Recopilación de resultados.
% Unión de las dos matrices para las coordenadas x e y de los centros de los
% granos (círculos)
pos=[A B];
% Posiciones y radios de cada grano
Data_1= [pos, radii];
```

APÉNDICE E. CÓDIGOS

%% Visualización de resultados en dos formas diferentes

```
% Gráfica de los círculos que representan los granos.
hold on
% Ejes constantes
axis square
% Título del gráfico
title(['Porcentaje de Ocupación = ',num2str(round(Ratio2(1,1))),' %'],'FontSize', 20);
% Límites de graficación
xlim([0 b])
ylim([0 b])
% Rectángulo que envuelve a los granos y representa los límites del dieléctrico.
rectangle('Position',[0 0 b b],'EdgeColor','b','LineWidth',3)
% Ciclo optimizado para la graficación de los granos.
for idx = 1:n*n
    rectangle('Position',[pos(idx, 1) - radii(idx), pos(idx, 2) - radii(idx), 2*radii(idx),
2*radii(idx)],...
    'Curvature', [1 1],'EdgeColor','black','FaceColor', 'none');
end
plot(pos(:,1),pos(:,2),'.')
% Propiedades de los Ejes.
ax = gca;
ax.XAxis.FontSize = 20;
ax.XAxis.FontWeight = 'bold';
ax.YAxis.FontSize = 20;
ax.YAxis.FontWeight = 'bold';
ax.LineWidth = 2.5;
% ax.YAxis.Exponent = 0;
% ax.XAxis.Exponent = 0;
% Etiqueta de Ejes
xlabel('X [Å'],'FontSize', 24,'FontWeight','bold');
ylabel('Y [Å'],'FontSize', 24,'FontWeight','bold');
```

%% Otro método de graficación. Este es más costoso en memoria de video. Pero es más básico en su invocación.

```
% Creamos otra figura con eje constantes.
figure
% Título
title(['Distribución Regular de ', num2str(n*n), ' Granos con Radios Constantes de ',
num2str(radio), ' Å'],...
    ['Dimensión de Lado = ',num2str(Lado), ' Å', ' Distancia Inter-Superficial = ',
num2str(D), ' Å', '],...
    'Porcentaje de Ocupación = ',num2str(round(Ratio2(1,1))), '%'],'Color','black', ...
    'FontSize', 20,'FontSize', 18);
% Rectángulo que representa la matriz dieléctrica.
rectangle('Position',[0 0 b b],'EdgeColor','b','LineWidth',0.5)
% El comando "viscircles" dibuja círculos dando sus respectivos centros y radios.
```

```

    viscircles(pos,radii,'Color','black');
% Límites de la graficación
    xlim([0 b])
    ylim([0 b])
    hold on
    axis square
% Graficamos los centros de los círculos
    plot(pos(:,1),pos(:,2),'r')
% Propiedades de los Ejes.
ax = gca;
ax.XAxis.FontSize = 20;
ax.XAxis.FontWeight = 'bold';
ax.YAxis.FontSize = 20;
ax.YAxis.FontWeight = 'bold';
ax.LineWidth = 2.5;
ax.YAxis.Exponent = 0;
ax.XAxis.Exponent = 0;
% Etiqueta de Ejes
xlabel('X [Å]','FontSize', 24,'FontWeight','bold');
ylabel('Y [Å]','FontSize', 24,'FontWeight','bold');

%% Fin del Programa 🐱

```

E2 Conjunto Aleatorio de Granos (Radios Constantes)

Nombre del programa: Muestra_Aleatoria_Radios_Constantes.m

%% Programa para generar una red aleatoria de granos con el mismo radio.

%% Autor: Oscar Ordoñez Zamora 🐱

%% Limpieza de la Memoria y ventana

% Limpiamos valores en la Memoria y limpiamos ventana de comandos (Command Windows).

clear ;clc

%% Variables de entrada dadas por el usuario.

% Número de granos Totales.

n=80;

% Lado de la matriz dieléctrica.

b=5000;

% Radios de los granos

R=220;

% Se genera una matriz de ceros del mismo tamaño que el número de grano totales.

% Matriz de posiciones de los centros.

APÉNDICE E. CÓDIGOS

```
pos = zeros(n, 2);
% Ciclo que genera todos los radios de los granos. Radios constantes.
radii = zeros(n, 1);
  for k=1:n
    radii(k,:)=R;
  end

%% Ciclo for que construirá la distribución de granos.
% Ciclo "for"
for idx = 1:n
  % Variable booleana que indica si un grano puede graficarse.
  test_aprovado = false;
  % Generamos un ciclo "while" que se ejecuta si la distancia
  % a los centros de los radios junto con la suma de sus radios están en
  % un rango definido
  while ~test_aprovado
    % Generamos una posición aleatoria limitada solamente a la dimensión del lado
    % (b) de la muestra.
    pos(idx,:)=[(radii(idx,1)) + ((b-radii(idx,1))-radii(idx,1)).*rand(1),(radii(idx,1)) + ((b-
    radii(idx,1))-radii(idx,1)).*rand(1)];
    % Condicional "if" que prueba si los granos están dentro del cuadrado de la
    % matriz dieléctrica.
    % Un grano generado no se debe traspasar otro grano (su circunferencia)
    % Una mejor explicación se da al final del código.
    if ((sqrt(sum(pos(idx,:).^2))+radii(idx) )<(b*sqrt(2)))...
        && ((idx == 1) || ...
        all(sqrt(sum((pos(1:(idx-1),:)-repmat(pos(idx,:),idx-1,1)).^2,2))>radii(1:(idx-
        1))+radii(idx)))
      % Si el código es cierto entonces ese grano se grafica
      test_aprovado = true;
    end
  end
end

%% Cálculo del Porcentaje de ocupación
% Área total de la Muestra (Matriz cuadrada Dieléctrica)
Area_Total= b*b;
% Área de los círculos
Area_Circulos=0;
for a=1:n
  Area_Circulos=Area_Circulos+pi.*(radii(a,1)).^2;
end
% Densidad de Ocupación
Ratio=Area_Circulos/Area_Total;
% Densidad de Ocupación Porcentual
Ratio2=Ratio*100;
```

APÉNDICE E. CÓDIGOS

%% Recopilación de resultados

```
% Unión de la matriz "pos" que son las coordenadas "x" e "y" de los centros  
% de los granos y la matriz "radii" que son sus respectivos radios.
```

```
Data=[pos,radii];
```

%% Visualización de resultados en dos formas diferentes

```
% Gráfica de los círculos que representan los granos.
```

```
hold on
```

```
% Título del gráfico
```

```
% title(['Distribución Aleatoria de ', num2str(n),' Granos con Radios Constantes de ',  
num2str(R), ' Å'],...)
```

```
% ['Dimensión de Lado = ',num2str(b), ' Å',', Densidad =  
,num2str(Ratio(1,1))'],'Color','black',...)
```

```
% 'FontSize', 20,'FontSize', 18);
```

```
title(['Porcentaje de Ocupación = ',num2str(round(Ratio2(1,1))),' %'],'FontSize', 20);
```

```
% Cuadrado que representa los límites de la matriz dieléctrica
```

```
rectangle('Position',[0 0 b b],'EdgeColor','b','LineWidth',2)
```

```
% Ciclo optimizado para la graficación de los granos.
```

```
for idx = 1:n
```

```
    rectangle(...
```

```
        'Position',[pos(idx, 1) - radii(idx), pos(idx, 2) - radii(idx), 2*radii(idx), 2*radii(idx)],...
```

```
        'Curvature', [1 1],...
```

```
        'EdgeColor','#FFA500',...
```

```
        'FaceColor', 'none','LineWidth',1);
```

```
end
```

```
% Gráfica de los centros de los granos
```

```
plot(pos(:,1),pos(:,2),'.','Color','black')
```

```
% Propiedades de los ejes
```

```
axis square
```

```
ax = gca;
```

```
ax.XAxis.FontSize = 20;
```

```
ax.XAxis.FontWeight = 'bold';
```

```
ax.YAxis.FontSize = 20;
```

```
ax.YAxis.FontWeight = 'bold';
```

```
ax.LineWidth = 2.5;
```

```
ax.YAxis.Exponent = 0;
```

```
ax.XAxis.Exponent = 0;
```

```
% Etiquetas de los ejes
```

```
xlabel('X [Å'],'FontSize', 24,'FontWeight','bold')
```

```
ylabel('Y [Å'],'FontSize', 24,'FontWeight','bold')
```

```
%% Otro método de graficación.
```

```
% Este es más costoso en memoria de video, pero es básico en su invocación.
```

```
% Creamos una figura.
```

```
figure
```

```
% Título
```

APÉNDICE E. CÓDIGOS

```
title(['Conjunto Aleatorio de ', num2str(n), ' Granos con Radios Constantes de ',  
num2str(R), ' Å'],...  
      ['Dimensión de Lado = ', num2str(b), ' Å, ', 'Porcentaje de Ocupación =  
, num2str(round(Ratio2(1,1))), ' %'],...  
      'Color', 'black', 'FontSize', 20, 'FontSize', 18);  
% Rectángulo que representa la matriz dieléctrica.  
rectangle('Position', [0 0 b b], 'EdgeColor', 'b', 'LineWidth', 3)  
% El comando "viscircles" dibuja círculos dando sus respectivos centros y sus  
% respectivos radios.  
viscircles(pos, radii, 'Color', '#FFA500', 'LineWidth', 2);  
% Gráfica de los centros de los granos  
hold on  
plot(pos(:,1), pos(:,2), '.')  
% Propiedades de los ejes  
axis square  
ax = gca;  
ax.XAxis.FontSize = 20;  
ax.XAxis.FontWeight = 'bold';  
ax.YAxis.FontSize = 20;  
ax.YAxis.FontWeight = 'bold';  
ax.LineWidth = 2.5;  
ax.YAxis.Exponent = 0;  
ax.XAxis.Exponent = 0;  
% Etiquetas de los ejes  
xlabel('X [Å]', 'FontSize', 24, 'FontWeight', 'bold')  
ylabel('Y [Å]', 'FontSize', 24, 'FontWeight', 'bold')  
  
%% Fin del Programa 🐱
```

E2.1 Distribución Aleatoria

En esta sección se explica la parte del algoritmo que genera el conjunto aleatorio, la aleatoriedad en este conjunto se apega más a un material granular real. Primeramente, se define una muestra dieléctrica cuadrada. Las coordenadas XY de los centros de los granos son generadas a partir de un comando "rand". Cada grano es representado por un círculo, estos tienen un radio bien definido. Se limita a qué el grano completo debe de estar contenido en la muestra dieléctrica. En la **Figura E.1** se ejemplifica la forma cuadrada de la muestra dieléctrica restringida al primer cuadrante del plano XY. Donde b es la dimensión de lado de la matriz dieléctrica.

APÉNDICE E. CÓDIGOS

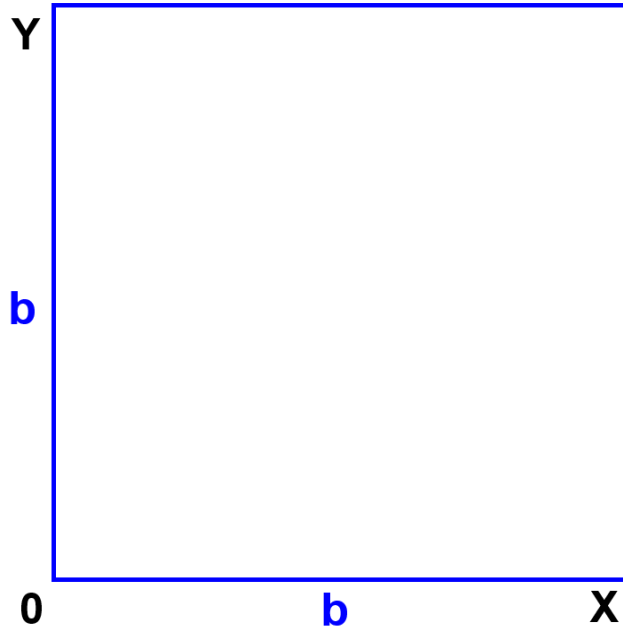


Figura E.1: Área donde se generarán los granos.

Ahora, la primera parte a estructurar en el programa dicta que al generar un grano debe de estar restringido en la zona de la matriz dieléctrica. En la **Figura E.2** se representa el grano ubicado con su respectiva la circunferencia, el radio en color rojo, en color verde la distancia desde el centro al origen y en morado la distancia desde el origen a la tangente del círculo que toca una orilla de la matriz dieléctrica.

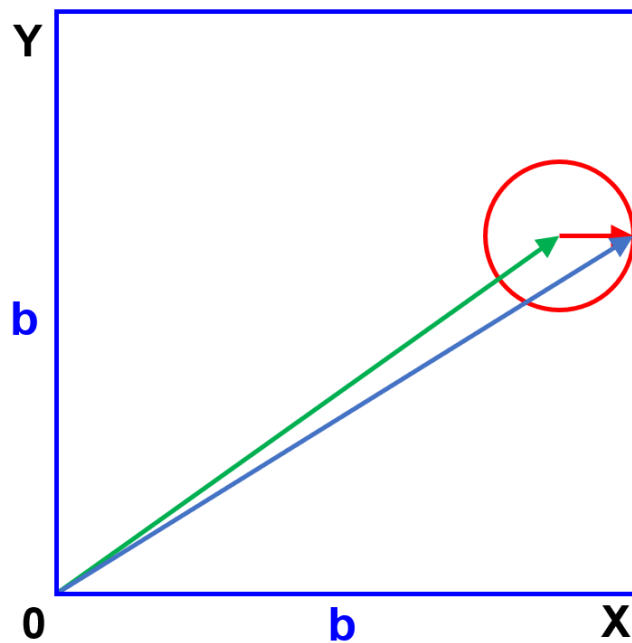


Figura E.2: Primera idea para resolver la distribución aleatoria

APÉNDICE E. CÓDIGOS

Esto se aplicaría para todos los granos que se quieran distribuir en la muestra dieléctrica. Pero la dificultad al pasarlo al lenguaje de programación radicaba en que no se podría preservar el comportamiento aleatorio de esta forma. Para cada conjunto aleatorio se necesitarían líneas de códigos específicas. Esto es debido a que entre más granos a distribuir se deben de considerar más restricciones y reglas deterministas. Así, estas mismas reglas deterministas impiden generar un comportamiento aleatorio. La forma en cómo se implementó la aleatoriedad en el código programado se describe a continuación. En el **Cuadro E.1** contiene parte del código presentado al inicio de esta sección. Estas líneas de código generan la aleatoriedad en los conjuntos.

Cuadro E.1: Código para generar la distribución aleatoria.

```
if ((sqrt(sum(pos(idx,:),.^2))+radii(idx))<(b*sqrt(2)))...
```

Se aplicarán dos restricciones para generar los conjuntos aleatorios se necesita delimitar el área donde se van a ubicar los granos. La primera, es limitar la ubicación de todos los granos por un círculo con un radio $b\sqrt{2}$. Siendo la distancia máxima que hay desde el punto de origen al vértice superior derecho del cuadrado. Esto se muestra en la **Figura E.3**.

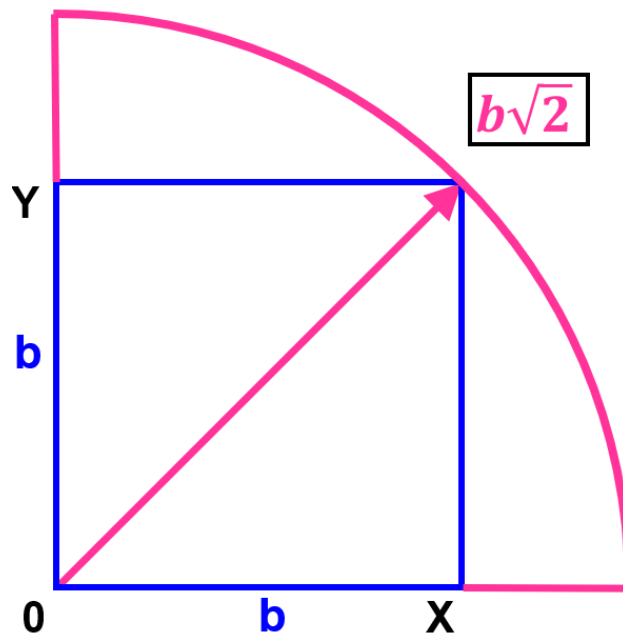


Figura E.3: Se limita el área para distribuir los granos la parte de la circunferencia de radio $b\sqrt{2}$ ubicada en la parte XY positiva.

En la **Figura E.4** se muestra un esquema de un conjunto aleatorio de cuatro granos limitado a la región limitada de la **Figura E.3**.

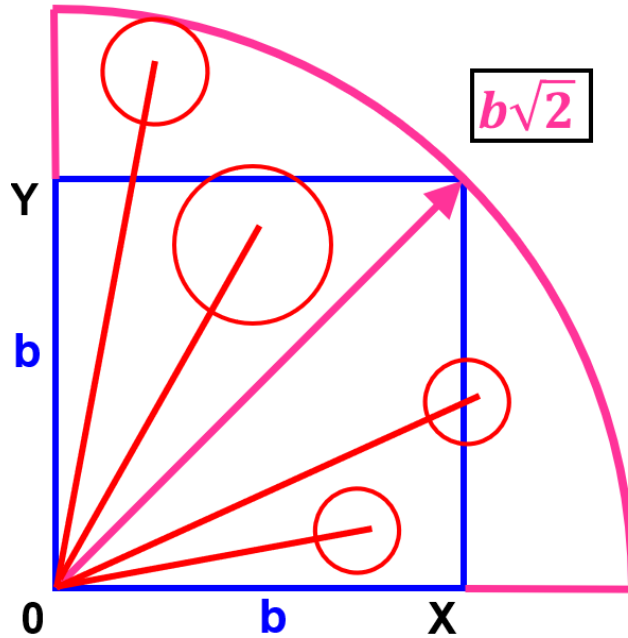


Figura E.4: Conjunto de granos aleatorios sujeto a la primera restricción. Los 4 granos se distribuyen en el área de una circunferencia de radio $b\sqrt{2}$ ubicada en la parte XY .

La segunda restricción es quitar las áreas sombreada en color amarillo señaladas en la **Figura E.5**. Estas áreas no corresponden al cuadrado azul de lado b de la **Figura E.1**, que representa la matriz dieléctrica.

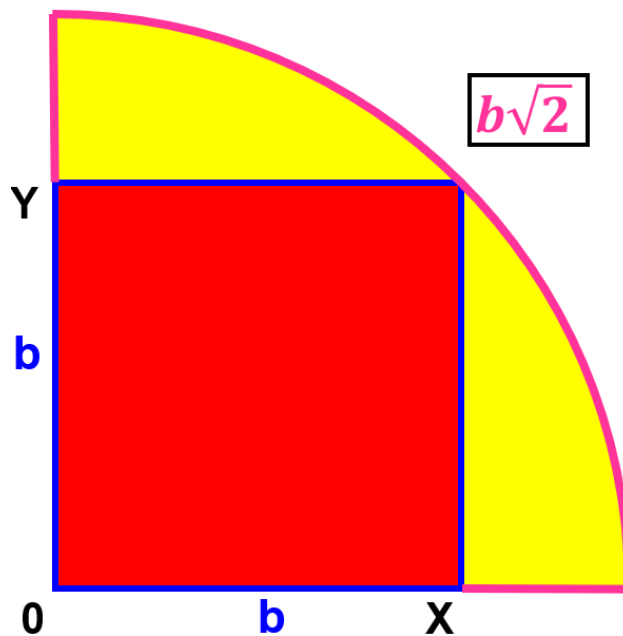


Figura E.5: Segunda restricción, donde se omitirá las partes de color amarillo para solo quedarnos con el cuadrado rojo con el perímetro azul que representa la matriz dieléctrica.

Para explicar esta segunda restricción como se implementó al código primero se introducirán los operadores && y ||. Estos operadores nos permiten implementar esta restricción para “evitar” que los granos se distribuyan parcial o totalmente en la zona amarilla de la [Figura E.5](#).

E2.1.1 Operador & y &&.

Operador lógico AND (&) (conjunción lógica). Hace que para un conjunto de operandos booleanos es verdadero si y sólo si todos los operandos son verdaderos. A & B realiza un AND lógico de las matrices A y B devuelve una matriz que contiene elementos establecidos como 1 lógico (verdadero) o 0 lógico (falso). Un elemento de la matriz de salida se pone a 1 lógico (verdadero) si tanto A como B contienen un elemento distinto de cero en esa misma posición de la matriz. En caso contrario, el elemento de la matriz se pone a 0 [79].

Operador &&. Dado dos expresiones ([expr1](#) y [expr2](#)) y aplicamos el operador &&. Tendiendo [expr1](#) && [expr2](#) representa una operación lógica AND que emplea un comportamiento lógico de cortocircuito (Logical Short-Circuiting behavior). Es decir, [expr2](#) no se evalúa si [expr1](#) es un 0 lógico (falso). Cada expresión debe evaluarse a un resultado lógico escalar [80]. Para una mejor comprensión ver la [Tabla E.1](#).

Tabla E.1: Operador &&.

Operador cortocircuito && (Short-Circuiting Operator) → expr1 && expr2	
expr1 es cierta	expr2 no se evalúa
expr1 es falsa	expr2 se evalúa

E2.1.2 Operadores | y ||.

Operador lógico OR (|) (disyunción lógica). Dado un conjunto de operandos es verdadero si y sólo si uno o más de sus operandos es verdadero. Se suele utilizar con valores booleanos (lógicos). A | B realiza un OR lógico de las matrices A y B y devuelve una matriz que contiene elementos establecidos como 1 lógico (verdadero) o 0 lógico (falso). Un elemento de la matriz de salida se pone a 1 lógico (verdadero) si A o B contienen un elemento distinto de cero en esa misma posición de la matriz. En caso contrario, el elemento de la matriz se pone a 0 [81].

Operador ||: Dado dos expresiones ([expr1](#) y [expr2](#)) y aplicamos el operador ||. Tendiendo [expr1](#) || [expr2](#) representa una operación lógica OR que emplea un comportamiento lógico de cortocircuito (Logical Short-Circuiting behavior). Es decir, [expr2](#) no se evalúa si [expr1](#) es 1 lógico (verdadero). Cada expresión debe evaluarse a un resultado lógico escalar [80]. Para una mejor comprensión ver la [Tabla E.2](#).

Tabla E.2: Operador ||.

Operador cortocircuito && (Short-Circuiting Operator) → expr1 expr2	
expr1 es cierta	expr2 se evalúa

APÉNDICE E. CÓDIGOS

<code>expr1</code> es falsa	<code>expr2</code> no se evalúa
-----------------------------	---------------------------------

Ya que hemos expuesto los operadores `&&` y `||`, ahora analizaremos la implementación de la segunda restricción en el código que genera un conjunto aleatorio de granos. En la **Tabla E.3** analicemos la siguiente parte del código expuesto al principio de la **Sección D2.1** y se designa a cada parte una expresión: `expr1`, `expr2` y `expr3`.

Tabla E.3: Condicional `if` que restringe la generación de los granos dentro de los límites de la matriz dieléctrica de lado b .

Extractó de líneas de código	
<pre>if ((sqrt(sum(pos(idx,:).^2))+radii(idx))<(b*sqrt(2)))... && ((idx == 1) ... all(sqrt(sum((pos(1:(idx-1),:)- repmat(pos(idx,:),idx-1,1)).^2,2))>radii(1:(idx-1))+radii(idx))) test_aprovado = true; end</pre>	
Expresiones que conforman al código del programa	
Expresión	Código
<code>expr1</code>	<code>((sqrt(sum(pos(idx,:).^2))+radii(idx))<(b*sqrt(2)))</code>
<code>expr2</code>	<code>((idx == 1)</code>
<code>expr3</code>	<code>all(sqrt(sum((pos(1:(idx-1),:)- repmat(pos(idx,:),idx-1,1)).^2,2))>radii(1:(idx-1))+radii(idx)))</code>

- La expresión 1 (`expr1`) se refiere a si estamos dentro de la circunferencia de radio $b\sqrt{2}$. Ver **Figura E.4**.
- La expresión 2 (`expr2`) indica si estamos hablando del primer grano. Cuando se genera el primer grano no se hace una comparación con otros granos (ya que no hay). Por ende, no se ejecuta la expresión 3 (`expr3`).
- La expresión 3 (`expr3`) consiste en varias partes. El comando “all” comprueba que todas las inecuaciones son válidas. En el **Cuadro E.2** se muestra a más detalle el comando “all” [82]. Las inecuaciones para evaluar son las distancias intergranulares de un grano respecto a otros granos. Esta distancia debe de ser mayor que la suma de los radios de los granos a comparar.

Cuadro E.2: Comando “all”

Comando “all”
<p>“all” Comprueba si todas las ecuaciones e inecuaciones representadas como elementos de la matriz simbólica son válidas.</p> <p>“all(A)” comprueba si todos los elementos de A y devuelve un 1 lógico (verdadero). Si A es una matriz, all comprueba todos los elementos de cada columna. Si A es una matriz multidimensional, “all” comprueba todos los elementos de una dimensión.</p>

APÉNDICE E. CÓDIGOS

“all(A, dim)” comprueba la dimensión de A especificada por “dim” (dimensión)

En la **Tabla E.4** se muestran todas las formas en que el sistema evalúa la expresión 1 (*expr1*), la expresión 2 (*expr2*) y la expresión 3 (*expr3*). Esta tabla muestra las condiciones que dictan sí un grano con su respectivo radio y sus respectivas coordenadas cumplen para estar dentro de la matriz dieléctrica.

Tabla E.4: Tabla de valores lógicos para la expresión *expr1* && (*expr2* || *expr3*)

Evaluaciones lógicas para <i>expr1</i> && (<i>expr2</i> <i>expr3</i>)					
<i>expr1</i>	&&	(<i>expr2</i>		<i>expr3</i>)	Valor Lógico
		NO SE EVALÚA (<i>expr2</i> <i>expr3</i>)			
Falso	&&	(Falso		Falso)	Falso
Falso	&&	(Falso		Cierto)	Falso
Falso	&&	(Cierto		Falso)	Falso
Falso	&&	(Cierto		Cierto)	Falso
<i>expr1</i>	&&	(<i>expr2</i>		<i>expr3</i>)	Valor Lógico
		SE EVALÚA (<i>expr2</i> <i>expr3</i>)			
				SE EVALÚA (<i>expr3</i>)	
Cierto	&&	(Falso		Falso)	Falso
Cierto	&&	(Falso		Cierto)	Cierto
<i>expr1</i>	&&	<i>expr2</i>		<i>expr3</i>)	Valor Lógico
		SE EVALÚA (<i>expr2</i> <i>expr3</i>)			
				NO SE EVALÚA (<i>expr3</i>)	
Cierto	&&	(Cierto		Falso)	Cierto
Cierto	&&	(Cierto		Cierto)	Cierto

En la **Tabla E.5** están todas combinaciones para que el condicional *if* se ejecute, es decir para que el condicional *if* devuelva una salida cierta.

Tabla E.5: Valores ciertos para *expr1* && (*expr2* || *expr3*)

Valores ciertos para <i>expr1</i> && (<i>expr2</i> <i>expr3</i>)					
<i>expr1</i>	&&	(<i>expr2</i>		<i>expr3</i>)	Valor Lógico
Cierto	&&	(Falso		Cierto)	Cierto
Cierto	&&	(Cierto		Falso)	Cierto
Cierto	&&	(Cierto		Cierto)	Cierto

En conclusión, solamente los granos que cumplan el criterio de estar dentro del cuadrado de la matriz dieléctrica y que no se crucen con sus otros granos pueden distribuirse. Con estas dos restricciones todos los granos estarán contenidos dentro de la matriz dieléctrica de la **Figura E.1**.

E3 Conjunto Aleatorio de Granos (Radios con Distribución Gaussiana)

En el código se debe de generar una lista de valores de los radios generados en función de una distribución gaussiana. Matlab nos da un comando llamado “*mvnrnd*” en el cual genera valores aleatorios desde una distribución gaussiana. Ver [Cuadro E.3](#) [83]. Dicho comando es la base fundamental de la variación gaussiana del radio de los de granos del conjunto aleatorio. Se necesita una dimensión en el comando “*mvnrnd*”.

Cuadro E.3: Comando “*mvnrnd*” Matlab.

“ <i>mvnrnd</i> ”: Multivariate normal random numbers (Números aleatorios normales multivariantes)
R = <i>mvnrnd</i> (mu,Sigma) devuelve una matriz R de “mxd” de vectores aleatorios muestreados a partir de m distribuciones normales multivariadas d-dimensionales separadas, con medias y covarianzas especificadas por mu y Sigma, respectivamente. Cada fila de R es un único vector aleatorio normal multivariante.

Nombre del programa: Gaussianos_Nodos_Arriba.m

%% Programa para generar una red aleatoria de granos Gaussianos.

%% Autor: Oscar Ordoñez Zamora 

%% Limpieza de la Memoria y ventana

% Limpiamos valores en la Memoria y limpiamos ventana de comandos (Command Windows)

clear

clc

close all

%% Variables de entrada dadas por el usuario

% Número de granos Totales.

n=80;

% Lado de la muestra cuadrada.

b=5000;

% Media de los radios en la distribución Gaussiana.

R=220;

% Dispersión del radio en los granos

sigma=110/3;

% Matriz de posiciones de los centros

pos = zeros(n, 2);

% Comando que genera una distribución Gaussiana de Radios.

Gaussino=*mvnrnd*(R,sigma^2,n);

% Se ordenan los granos de forma descendente.

APÉNDICE E. CÓDIGOS

```
radii=sort(Gaussino,'descend');

%% Ciclo for que construirá la distribución de granos.
% Ciclo "for"
for idx = 1:n
    % Variable booleana que indica si un grano puede graficarse.
    test_aprovado = false;
    % Generamos un ciclo while que se ejecuta si la distancia
    % a los centros de los radios junto con la suma de sus radios están en
    % un rango definido
    while ~test_aprovado
        % Generamos una posición aleatoria limitada solamente a la dimensión del lado
        % (b)de la muestra.
        pos(idx,:)=[(radii(idx,1)) + ((b-radii(idx,1))-radii(idx,1)).*rand(1),(radii(idx,1)) +...
        ((b-radii(idx,1))-radii(idx,1)).*rand(1)];
        % Condicional "if" que prueba si los granos están dentro del cuadrado de la
        % matriz dieléctrica.
        % Un grano generado no se debe traspasar otro grano (su circunferencia)
        % Una mejor explicación se da al final del código en la sección de Apéndice.
        if ((sqrt(sum(pos(idx,:).^2))+radii(idx) )<(b*sqrt(2)))...
            && ((idx == 1) || ...
            all(sqrt(sum((pos(1:(idx-1),:)-repmat(pos(idx,:),idx-1,1)).^2,2))>radii(1:(idx-
            1))+radii(idx)))
            % Si el código es cierto entonces ese grano se grafica
            test_aprovado = true;
        end
    end
end

%% Cálculo del Porcentaje de ocupación
% Área total de la Muestra (Matriz cuadrada Dieléctrica)
Area_Total= b*b;
% Área de los círculos
Area_Circulos=0;
for a=1:n
    Area_Circulos=Area_Circulos+pi.*(radii(a,1)).^2;
end
% Densidad de Ocupación
Ratio=Area_Circulos/Area_Total;
% Densidad de Ocupación Porcentual
Ratio2=Ratio*100;

% Calculamos las distancias intergranulares
Radios_Ori=zeros(n,1);
for i=1:n
    Radios_Ori(i,1)=sqrt(sum((pos(i,:)).^2,2));
```

end

%% Recopilación de resultados.

% Unión de la matriz "pos" que son las coordenadas "x" e "y" de los centros
% de los granos y la matriz "radii" que son sus respectivos radios.

DataCompleta=[pos,radii,Radios_Ori];

%% Ordenamiento de la matriz de posiciones

% Se ordenan los radios de los granos para determinar el nodo de entrada y
% el nodo de salida

[~, s] = sort(DataCompleta(:, 4), 'ascend');

DataOrdenada=DataCompleta(s, :);

DataOrdenada(:,4)=[];

Radio_Esquina=zeros(n,1);

NodoS=zeros(n,2);

NodoS(:,2)=b;

for i=1:n

Radio_Esquina(i,1)=sqrt(sum((DataOrdenada(i,[1,2])-[0,b]).^2,2));

end

[row, col]=find(ismember(Radio_Esquina,min(Radio_Esquina(:,1))));

DataOrdenada([1 row],:)=DataOrdenada([row 1],:);

% Posiciones Ordenadas

pos=DataOrdenada(:,[1,2]);

% Radios Ordenados

radii=DataOrdenada(:,3);

%% Visualización de resultados en dos formas diferentes

% Graficación de los círculos que representan los granos.

hold on

% Título del gráfico

title(['Conjunto Aleatorio de ', num2str(n), ' granos con Radios Gaussianos', ' (R =', num2str(R), ' Å,', '\sigma = ', num2str(round(sigma,2)), ' Å)'],...

['Dimensión lado = ', num2str(b), ' Å, ', 'Porcentaje de Ocupación =', num2str(round(Ratio2(1,1))), ' %'],...

'Color','black',...

'FontSize', 20,'FontSize', 18);

% Rectángulo que envuelve a los granos y representa los límites del dieléctrico.

rectangle('Position',[0 0 b b],'EdgeColor','b','LineWidth',4)

% Gráfica de los centros de los granos

plot(pos(:,1),pos(:,2), 'b','Color','black')

% Etiqueta Nodo s (Nodo de Entrada)

txt = 'Nodo s \rightarrow';

text(pos(1,1)-

radii(1,1),pos(1,2),txt,'VerticalAlignment','middle','HorizontalAlignment','right','Color','#77AC30','FontSize', 26,'FontWeight','bold');

% Etiqueta Nodo t (Nodo de Salida)

APÉNDICE E. CÓDIGOS

```
txt = '\leftarrow Nodo t';
text(pos(n,1)+radii(n,1),pos(n,2),txt,'HorizontalAlignment','left','Color','#0072BD','FontSize',24,'FontWeight','bold');
% Ciclo optimizado para la graficación de los granos.
for idx = 1:n
    rectangle(...
        'Position',[pos(idx, 1) - radii(idx), pos(idx, 2) - radii(idx), 2*radii(idx), 2*radii(idx)],...
        'Curvature', [1 1],...
        'EdgeColor','red',...
        'FaceColor', 'none','LineWidth',1.5);
end

% Propiedades de los Ejes.
axis square
ax = gca;
ax.XAxis.FontSize = 20;
ax.XAxis.FontWeight = 'bold';
ax.YAxis.FontSize = 20;
ax.YAxis.FontWeight = 'bold';
ax.LineWidth = 2.5;
ax.YAxis.Exponent = 0;
ax.XAxis.Exponent = 0;
% Etiqueta de los ejes
xlabel('X [Å]','FontSize',24,'FontWeight','bold');
ylabel('Y [Å]','FontSize',24,'FontWeight','bold');

%% Otro método de graficación.
% Este es más costoso en memoria de video, pero es básico en su invocación.
% Creamos otra figura.
figure
% Título de la gráfica.
title(['Porcentaje de Ocupación = ',num2str(round(Ratio2(1,1))),' %'],'FontSize',20);
rectangle('Position',[0 0 b b],'EdgeColor','b','LineWidth',3)
% Etiqueta Nodo s (Nodo de Entrada)
txt = 'Nodo s\rightarrow';
text(pos(1,1)-radii(1,1),pos(1,2),txt,'HorizontalAlignment','right','Color','#77AC30','FontSize',26,'FontWeight','bold')
% Etiqueta Nodo t (Nodo de Salida)
txt = '\leftarrow Nodo t';
text(pos(n,1)+radii(n,1),pos(n,2),txt,'HorizontalAlignment','left','Color','#0072BD','FontSize',26,'FontWeight','bold')
% Límites de los ejes
xlim([0 b])
ylim([0 b])
% El comando "viscircles" dibuja círculos dando sus respectivos centros y sus
```

APÉNDICE E. CÓDIGOS

```
% respectivos radios.
viscircles(pos,radii,'Color','r','LineWidth',1.5);
hold on
% Gráfica de los centros de los granos
plot(pos(:,1),pos(:,2),'.')
% Propiedades de los Ejes.
axis square
ax = gca;
ax.XAxis.FontSize = 30;
ax.XAxis.FontWeight = 'bold';
ax.YAxis.FontSize = 30;
ax.YAxis.FontWeight = 'bold';
ax.LineWidth = 2.5;
ax.YAxis.Exponent = 0;
ax.XAxis.Exponent = 0;
% grid on;
% Etiqueta de los ejes.
xlabel('X [Å]', 'FontSize', 30, 'FontWeight', 'bold')
ylabel('Y [Å]', 'FontSize', 30, 'FontWeight', 'bold')

%% Histograma de radios gaussianos
% Se crea una figura
figure
% Histograma de radios
histogram(radii, 'LineWidth', 4);
% Título
% title(['Distribución Gaussiana de Radios de los ', num2str(n), ' Granos'], ...
%      ['Media (R) = ', num2str(R), ' Å, ', 'Varianza \sigma = ', num2str(sigma), '
%      Å'], 'Color', 'black', ...
%      'FontSize', 20, 'FontSize', 18);
% Propiedades de los Ejes.
% Se escogen los ejes constantes (misma escala en X y en Y)
axis square
ax = gca;
ax.XAxis.FontSize = 20;
ax.XAxis.FontWeight = 'bold';
ax.YAxis.FontSize = 20;
ax.YAxis.FontWeight = 'bold';
ax.LineWidth = 2.5;
ax.YAxis.Exponent = 0;
ax.XAxis.Exponent = 0;
grid on;
% Etiqueta de los ejes.
xlabel('Radio [Å]', 'FontSize', 24, 'FontWeight', 'bold')
ylabel('Número de Granos', 'FontSize', 24, 'FontWeight', 'bold')
```

%% Fin del Programa 

E4 Cálculo de Energías E_C y E_J , Red de Transporte y Densidad de Corriente Crítica para una Temperatura Fija.

Nombre del Programa: red_transporte.m

%% Programa para probar solamente una constante de tunelamiento y una temperatura de Prueba

% Salida la Máxima Densidad de corriente (si existe)
 % Cuando el sistema dice que no hay red: no existe red la distancia de tunelamiento es muy pequeña
 % Cuando nos da el mensaje de que no existe conexión con el nodo final: % significa que, aunque existe una red interna suficientemente completa no % existe una conexión directa con el nodo de salida (Nodo t o último nodo. Posición % superior derecha)

%% Autor: Oscar Ordoñez Zamora 

%% Limpieza de la Memoria y ventana

clc,clf
 tic

%% Variables de entrada dadas por el usuario

% Constante de Tunelamiento en Ångstroms
 CT=10;

% Temperatura de Prueba
 TP=0.1;

% Granos vecinos
 z=1;

%% El número de distancias obtenida es una permutación del número de granos % con el número 2 ya que las distancias siempre se manejan en pares

Dist=nchoosek(n,2);

% Matriz de ceros para el llenado de las distancias inter-superficiales

A=zeros(Dist,1);

% Matriz de ceros para el llenado de todos los radios en bloques

B=zeros(Dist,1);

% Matriz de ceros para el llenado de todos los radios (sucesivos) en bloques

C=zeros(Dist,1);

% número en la parte final de la matriz en el ciclo de la matriz

APÉNDICE E. CÓDIGOS

```
di=1;
df=n-1;

for i=1:n-1
Data=pos;
% Comprobación de que las matrices salen bien (nota aquí quite los corchetes [1:i])
Data(1:i,:)=[];
% Data;
% repmat(pos(i,:),n-i,1);
% Distancias inter-granulares
% sqrt(sum((Data(1:n-i,:)-repmat(pos(i,:),n-i,1)).^2,2));
% Generación de las de distancias: punto final-inicial
A(di:df,1)=sqrt(sum((Data(1:n-i,:)-repmat(pos(i,:),n-i,1)).^2,2));
% Creamos una matriz que contenga bloques de todos los radios
B(di:df,1)=repmat(radii(i,:),n-i,1);
% Creamos una sucesión de bloques donde los radios ser repites
C(di:df,1)=radii(i+1:n);
di=di+(n-i);
df=df+(n-1)-i;
    if df==Dist
        di=Dist;
    end
end

%% Recopilación de Datos: Distancia Inter-superficiales
% Finalmente calculamos las Distancias inter-superficiales
Inter_Super=(A-(B+C));
% Cálculo de Radios Mínimos, comparando todos los radios versus los radios
% restantes de los granos (sin repetir)
Radios_Arreglo=[B C];
Radio_Minimos=(min(Radios_Arreglo,[],2));

%% Cálculo de la resistencia
% Valor de un Armstrong a centímetro
Escalado=1*10^(-10);
% Constante de "Calibración"
Ct=4.0022*10^(-12);
% constante de "Redondez"
alpha=0.45;

%% Constante de Tunelamiento
delta=Escalado*CT;

%% Resistencia
Resistencia=Ct.*(1./((alpha)*(pi).*(Radio_Minimos.*Escalado).^2)).*(exp((Inter_Super.*Escalado)/delta));
```

%% Cálculo de la energía de Josephson

% Temperatura Crítica
 $T_c=3.49;$
 % Constante de Planck: \hbar
 $\hbar=1.054*10^{(-34)};$
 % Carga del electrón
 $electron=-1.602176634*(10^{(-19)});$
 % Constante de Boltzmann
 $k_B=1.3806*(10^{(-23)});$
 % Gap mínimo superconductor
 $\Delta_0=(3.53*k_B*T_c)/2;$

%% Temperatura Prueba

$T=TP;$

%% Gap superconductor

$\Delta T=\Delta_0*\sqrt{(1-T/T_c)};$
 % Calculamos la energía de Josephson
 $EJ=((\pi*\hbar)/(4*(electron^2)))*\Delta T.*(1./Resistencia)*\tanh(\Delta T/(2*k_B*T));$

%% Cálculo de la Capacitancia

% Constante dieléctrica (Matriz del Material Dieléctrico)
 $\kappa=19;$
 $Capacita=((\alpha.*\pi.*\kappa).*(Radio_Minimos.*Escalado).^2)./(Inter_Super.*Escalado);$

%% Energía de Coulomb

$EC=(1/2).*((2.*electron).^2)./Capacita);$

%% Corriente de Josephson (Densidad de corriente Crítica)

$IJ=((2.*electron)/\hbar).*EJ*(-1);$

%% Densidad de Corriente

% Escalado de Ångströms a centímetros
 $L=(1.*10.^(-8));$
 % Densidad de Corriente
 $DJ=IJ./((L.*b).^2);$
 $\%DJ=IJ./(0.00000000111080594);$
 $ordenarDJ=sort(DJ,'descend');$

%% Comparación de las Energías de Josephson y la Energía de Coulomb

% Si $EJ > EC$ Los granos están conectados
 % Llamaremos a esta matriz conexión para una mejor identificación
 $Conexion=(z.*EJ) > EC;$
 % Prueba de granos vecinos si: $zE_j > E_c$ decimos que los granos están
 % conectados, donde z el número de granos vecinos.

APÉNDICE E. CÓDIGOS

```
[~,~,ix] = unique(Conexion);  
unos=accumarray(ix,1);
```

%% Filtrado de los Corrientes

```
% Se ve que si están conectadas o no los sistemas
```

```
DJFiltrada=zeros(Dist,1);
```

```
for m=1:Dist  
    if Conexion(m,')==1  
        DJFiltrada(m,1)=DJ(m,1);  
    else  
        DJFiltrada(m,1)=0;  
    end  
end
```

%% SECCIÓN DE EXPORTACIÓN. PRIMERA PRUEBA

```
% solamente los valores que no son ceros
```

```
% Cambio de la matriz a numérica
```

```
M=zeros(n,1);
```

```
for i=1:n  
    M(i,:)=i;  
end
```

%% Matriz De Nodos

```
di=1;  
df=n-1;
```

```
for i=1:n-1  
    % Generación de las de distancias: punto final-inicial  
    ST(di:df,1)=repmat(M(i,:),n-i,1);  
    STC(di:df,1)=M(i+1:n,:);  
    di=di+(n-i);  
    df=df+(n-1)-i;
```

```
    if df==Dist  
        di=Dist;  
    end
```

```
end
```

%% Matriz Completa de Nodos

```
Matris_Nodos=[ST STC];
```

%% MATRIZ FINAL: PARA USO DEL MÉTODO DE FORD-FULKERSON

```
RED_COMPLETA=[Matris_Nodos DJFiltrada];
```

APÉNDICE E. CÓDIGOS

%% Código para dejar solamente los valores diferentes de cero

```
Final=zeros(Dist-unos(1,1),3);
r=1;
for g=1:Dist
    if RED_COMPLETA(g,3)~=0
        Final(r,:)=RED_COMPLETA(g,:);
        r=r+1;
    end
end
toc
clc
Numero_conexiones=height(Final)
PPT=Final';
```

%% Otro método de graficación.

% Este es más costoso en memoria de video, pero es básico en su invocación.

% Creamos otra figura con eje constantes.

hold on

% Título del gráfico

% title(['Red de Transporte para la Distribución Aleatoria de ', num2str(n),' Granos con Radios Gaussianos.'],...)

% ['Temperatura = ',num2str(TP), ' K, ', 'Densidad = ',num2str(Ratio(1,1)),',

Conexiones = ', num2str(height(Final)),...]

% ' y Δ = ', num2str(CT), ' Å], ...

% 'Color','black','FontSize', 20,'FontSize', 18);

title(['Temperatura = ',num2str(TP), ' K'],'Color','black','FontSize', 24);

rectangle('Position',[0 0 b b],'EdgeColor','b','LineWidth',2)

% Etiqueta Nodos (Nodo de Entrada)

txt = 'Nodo s\rightarrow';

text(pos(1,1)-

radii(1,1),pos(1,2),txt,'HorizontalAlignment','right','Color','#77AC30','FontSize', 30,'FontWeight','bold');

% Etiqueta Nodos (Nodo de Salida)

txt = '\leftarrow Nodo t';

text(pos(n,1)+radii(n,1),pos(n,2),txt,'HorizontalAlignment','left','Color','#0072BD','FontSize', 30,'FontWeight','bold');

% Ciclo optimizado para la graficación de los granos.

for idx = 1:n

rectangle(...

'Position',[pos(idx, 1) - radii(idx), pos(idx, 2) - radii(idx), 2*radii(idx), 2*radii(idx)],...

'Curvature', [1 1],...

'EdgeColor','red',...

'FaceColor', 'none');

end

APÉNDICE E. CÓDIGOS

```

% Gráfica de los centros de los granos
plot(pos(:,1),pos(:,2),'.','Color','black')
% Propiedades de los Ejes.
axis square
xlabel('X [Å]')
ylabel('Y [Å]')
ax = gca;
ax.XAxis.FontSize = 26;
ax.XAxis.FontWeight = 'bold';
ax.YAxis.FontSize = 26;
ax.YAxis.FontWeight = 'bold';
ax.LineWidth = 2.5;
ax.YAxis.Exponent = 0;
ax.XAxis.Exponent = 0;
%% Construcción de la Red dirigida con Interconexiones de redes y capacidades
if size(Final,1)==0
MensajeFinal="No hay red";
else
inicio=Final(1,1);
fin=Final(end,2);
G = digraph(PPT(1,:),PPT(2,:),PPT(3,:));
if fin==n
LWidths = 3*G.Edges.Weight/max(G.Edges.Weight);

h=plot(G,'LineWidth',LWidths,'XData',pos(:,1),'YData',pos(:,2),'EdgeColor',[0 0
1],'ArrowSize',10,'NodeLabelMode','auto');
h.NodeFontSize = 12;
h.NodeFontWeight="bold";
xlim([0 b])
ylim([0 b])
augmentepath=maxflow(G,1,n,'augmentpath')
else
G = digraph(PPT(1,:),PPT(2,:),PPT(3,:));
LWidths = 3*G.Edges.Weight/max(G.Edges.Weight);
hh=plot(G,'LineWidth',LWidths,'XData', pos(1:fin,1),'YData',pos(1:fin,2),'EdgeColor',[0
0.4470 0.7410],'ArrowSize',10);
hh.NodeFontSize = 24;
hh.NodeFontWeight="bold";
xlim([0 b])
ylim([0 b])
augmentepath="No hay conexión al nodo final, se muestran solo los nodos
participantes";
end
end
%% Gráfica de Histogramas de la Conexiones
figure

```

```

    histogram(Conexion,'LineWidth',3);
    title(['Distribución Bolena de las ',num2str(Dist) , ' Conexiones Totales de los
',num2str(n),' Granos'],...
    ['Aristas No Superconductoras = ',num2str(Dist-height(Final)),' , Aristas Si
Superconductoras = ',num2str(height(Final))],'Color','black',...
    'FontSize', 24,'FontSize', 20);
% Propiedades de los Ejes.
axis square
ax = gca;
ax.XAxis.FontSize = 20;
ax.XAxis.FontWeight = 'bold';
ax.YAxis.FontSize = 20;
ax.YAxis.FontWeight = 'bold';
ax.LineWidth = 2.5;
ax.YAxis.Exponent = 0;
ax.XAxis.Exponent = 0;
grid on;
% Etiqueta de los ejes.
xlabel('Conexión [Booleano]','FontSize', 24,'FontWeight','bold')
ylabel('Número de Conexiones', 'FontSize', 24,'FontWeight','bold')
xticks([0 1])
xticklabels({'No','Si'})

```

%% Fin del Programa 🐱

E5 Superconductividad en un perfil de Densidad de Corriente Crítica en Función de la Temperatura

Nombre del programa: Unificado_Restriccion.m

%% Programa para el cálculo de la densidad de corriente en función de una temperatura

%% Autor: Oscar Ordoñez Zamora 🐱

%% Variables de entrada dadas por el usuario

%Constante de Tunelamiento en Ángstroms

CT=50;

% Vecinos Promedio

z=1;

%% El número de distancias obtenida es una permutación del número de granos

% con el número 2 ya que las distancias siempre se manejan en pares

Dist=nchoosek(n,2);

APÉNDICE E. CÓDIGOS

```
% Matriz de ceros para el llenado de las distancias inter-superficiales
A=zeros(Dist,1);
% Matriz de ceros para el llenado de todos los radios en bloques
B=zeros(Dist,1);
% Matriz de ceros para el llenado de todos los radios (sucesivos) en bloques
C=zeros(Dist,1);
% número en la parte final de la matriz en el ciclo de la matriz
di=1;
df=n-1;
for i=1:n-1
Data=pos;
% Comprobación de que las matrices salen bien (nota aquí quite los corchetes [1:i])
Data(1:i,:)=[];
% Generación de las de distancias: punto final-inicial
A(di:df,1)=sqrt(sum((Data(1:n-i,:)-repmat(pos(i,:),n-i,1)).^2,2));
% Creamos una matriz que contenga bloques de todos los radios
B(di:df,1)=repmat(radii(i,:),n-i,1);
% Creamos una sucesión de bloques donde los radios se repiten
C(di:df,1)=radii(i+1:n);
di=di+(n-i);
df=df+(n-1)-i;
    if df==Dist
        di=Dist;
    end
end
```

%% Recopilación de Datos: Distancia Inter-superficiales

```
% Finalmente calculamos las Distancias inter-superficiales
Inter_Super=(A-(B+C));
% Cálculo de Radios Mínimos comparando todos los radios versus los radios
% Restantes de los granos (sin repetir)
Radios_Arreglo=[B C];
Radio_Minimos=(min(Radios_Arreglo,[],2));
```

%% Cálculo de la resistencia

```
% Valor de un Armstrong a centímetro
Escalado=1*10^(-10);
% Constante de "Calibración"
Ct=4.0022*10^(-12);
% constante de "Redondez"
alpha=0.45;
```

%% Constante de Tunelamiento

```
delta=Escalado*CT;
```

%% Variable Sensible

APÉNDICE E. CÓDIGOS

% Resistencia

```
Resistencia=Ct.*(1./((alpha)*(pi).*(Radio_Minimos.*Escalado).^2)).*(exp((Inter_Super.*Escalado)/delta));
```

%% Cálculo de la energía de Josephson

```
% Temperatura Crítica
```

```
Tc=3.49;
```

```
% Constante de Planck: hbar
```

```
hbar=1.054*10^(-34);
```

```
% Carga del electrón
```

```
electron=-1.602176634*(10^(-19));
```

```
% Constante de Boltzmann
```

```
kB=1.3806*(10^(-23));
```

```
% Gap mínimo superconductor
```

```
Delta0=(3.53*kB*Tc)/2;
```

%% CICLO QUE GENERA TODO EL MUESTRES DE TEMPERATURA VS DENSIDAD DE CORRIENTE

```
% MATRIZ DE CEROS QUE SE LLENARA DE LA TEMPERATURA Y LA DENSIDAD DE
```

```
% CORRIENTE CRÍTICA
```

```
DENSIDAD_VS_TEMPERATURA=zeros(348,2);
```

```
%% ciclo for que calcula la máxima densidad de corriente para cada temperatura  
for SALTO=1:3480
```

```
%% Temperatura Prueba
```

```
T=0.001*SALTO;
```

%% Cálculo de la Capacitancia

```
%{ Constante dieléctrica (Matriz del Material Dieléctrico)
```

```
kapa=19;
```

```
Capacita=((alpha.*pi.*kapa).*(Radio_Minimos.*Escalado).^2)./(Inter_Super.*Escalado);
```

```
%%
```

```
%% Energía de Coulomb
```

```
EC=(1/2).*(((2.*electron).^2)./Capacita);
```

%% Gap superconductor

```
DeltaT=Delta0*sqrt((1-T/Tc));
```

```
% Calculamos la energía de Josephson
```

```
EJ=((pi*hbar)/(4*(electron^2)))*DeltaT.*(1./Resistencia)*tanh(DeltaT/(2*kB*T));
```

```
%%
```

%% Corriente de Josephson (Densidad de corriente Crítica)

```
IJ=((2.*electron)./hbar).*EJ*(-1);
```

APÉNDICE E. CÓDIGOS

```
% Escalado de Ångstroms a centímetros
L=(1.*10.^(-8));
% Densidad de Corriente
DJ=IJ./((L.*b).^2);
ordenarDJ=sort(DJ,'descend');

%% Comparación de las Energías de Josephson y la Energía de Coulomb
% Si EJ>EC Los granos están conectados
% Llamaremos a esta matriz conexión para una mejor identificación
EJZ=z.*EJ;
Conexion=(EJZ)>(EC);
% Prueba de granos vecinos si: zEj>Ec decimos que los granos están
% conectados, donde z el número de granos vecinos.
[~,~,ix]=unique(Conexion);
unos=accumarray(ix,1);

%% filtrado de los Corrientes
% Se ve que si están conectadas o no los sistemas
DJFiltrada=zeros(Dist,1);
for m=1:Dist
    if Conexion(m,)==1
        DJFiltrada(m,1)=DJ(m,1);
    else
        DJFiltrada(m,1)=0;
    end
end

%% SECCIÓN DE EXPORTACIÓN. PRIMERA PRUEBA
% Cambio de la matriz a numérica
M=zeros(n,1);
for i=1:n
    M(i,:)=i;
end

%% Matriz De Nodos
di=1;
df=n-1;
for i=1:n-1
% Generación de las de distancias: punto final-inicial
    ST(di:df,1)=repmat(M(i,:),n-i,1);
    STC(di:df,1)=M(i+1:n,:);
    di=di+(n-i);
    df=df+(n-1)-i;
    if df==Dist
        di=Dist;
    end
end
```

APÉNDICE E. CÓDIGOS

```
    end
end

%% Matriz Completa de Nodos
Matris_Nodos=[ST STC];

%% MATRIZ FINAL: PARA USO DEL MÉTODO DE FORD-FULKERSON
RED_COMPLETA=[Matris_Nodos DJFiltrada];

%% Código para dejar solamente los valores diferentes de cero
Final=zeros(Dist-unos(1,1),3);
r=1;
for g=1:Dist
    if RED_COMPLETA(g,3)~=0
        Final(r,:)=RED_COMPLETA(g,:);
        r=r+1;
    end
end

%% Cálculo de la corriente máxima y gráfica
clc
PPT=Final';

%% Construcción de la Red Dirigida con Interconexiones de redes y capacidades
if size(Final,1)==0
    MensajeFinal="No hay red";
else
    fin=Final(end,2);
    G = digraph(PPT(1,:),PPT(2,:),PPT(3,:));

    if fin==n
        % LWidths = 3*G.Edges.Weight/max(G.Edges.Weight);
        % plot(G,'LineWidth',LWidths,'XData',pos(:,1),'YData',pos(:,2),'EdgeColor',[0 0.4470
        0.7410],'ArrowSize',10)
        augmentepath=maxflow(G,1,n,'augmentpath');
    else
        G = digraph(PPT(1,:),PPT(2,:),PPT(3,:));
        % LWidths = 3*G.Edges.Weight/max(G.Edges.Weight);
        % plot(G,'LineWidth',LWidths,'XData', pos(1:fin,1),'YData',pos(1:fin,2),'EdgeColor',[0
        0.4470 0.7410],'ArrowSize',10)
        augmentepath="No hay Conexión al nodo final"
    end
end

DENSIDAD_VS_TEMPERATURA(SALTO,1)=T;
```

APÉNDICE E. CÓDIGOS

```
DENSIDAD_VS_TEMPERATURA(SALTO,2)=augmentepath;  
end
```

%% GRÁFICA LA DENSIDAD DE CORRIENTE CRÍTICA

```
figure  
plot(DENSIDAD_VS_TEMPERATURA(:,1),DENSIDAD_VS_TEMPERATURA(:,2),'Line  
Width',2,'Color','blue');  
title(['Densidad de Corriente Crítica en función de la Temperatura para ', num2str(n),'  
Granos.'],...  
    ['Dimensión de lado: ', num2str(b), ' [Å]', ',', ' Densidad: ', num2str(Ratio(1,1)), ' y, ' \delta:  
, num2str(CT), ' [Å].'],...  
    'FontSize', 24,'FontSize', 20);  
axis square  
ax = gca;  
ax.XAxis.FontSize = 36;  
ax.XAxis.FontWeight = 'bold';  
ax.YAxis.FontSize = 36;  
ax.YAxis.FontWeight = 'bold';  
ax.LineWidth = 2;  
grid on;  
xlabel('T [K]', 'FontSize', 36, 'FontWeight', 'bold')  
ylabel('J [A/cm^2]', 'FontSize', 36, 'FontWeight', 'bold')
```

%% GRÁFICA LA DENSIDAD DE CORRIENTE CRÍTICA

```
figure  
plot(DENSIDAD_VS_TEMPERATURA(:,1),DENSIDAD_VS_TEMPERATURA(:,2),'Line  
Width',2,'Color','blue');  
% title(['Densidad de Corriente Crítica en función de la Temperatura para ', num2str(n),'  
Granos.'],...  
%    ['Dimensión de lado: ', num2str(b), ' [Å]', ',', ' Densidad: ', num2str(Ratio(1,1)), ' y, '  
\delta: ', num2str(CT), ' [Å].'],...  
%    'FontSize', 24,'FontSize', 20);  
axis square  
ax = gca;  
ax.XAxis.FontSize = 36;  
ax.XAxis.FontWeight = 'bold';  
ax.YAxis.FontSize = 36;  
ax.YAxis.FontWeight = 'bold';  
ax.LineWidth = 2;  
grid on;  
xlabel('T [K]', 'FontSize', 36, 'FontWeight', 'bold')  
ylabel('J [A/cm^2]', 'FontSize', 36, 'FontWeight', 'bold')
```

```
%% Fin del Programa 🐱
```

E6 Efecto Re-Entrante en un Perfil de Densidad de Corriente Crítica en Función de la Temperatura

Nombre del programa: Re_entrant_Efect.m

%% Programa para el cálculo de la densidad de corriente en función de una temperatura

%% Autor: Oscar Ordoñez Zamora 

%% Variables de entrada dadas por el usuario

%Constante de Tunelamiento en Ángstroms

CT=50;

% Vecinos Promedio

z=1;

%% El número de distancias obtenida es una permutación del número de granos
% con el número 2 ya que las distancias siempre se manejan en pares

Dist=nchoosek(n,2);

% Matriz de ceros para el llenado de las distancias inter-superficiales

A=zeros(Dist,1);

% Matriz de ceros para el llenado de todos los radios en bloques

B=zeros(Dist,1);

% Matriz de ceros para el llenado de todos los radios (sucesivos) en bloques

C=zeros(Dist,1);

% número en la parte final de la matriz en el ciclo de la matriz

di=1;

df=n-1;

for i=1:n-1

Data=pos;

% Comprobación de que las matrices salen bien (nota aquí quite los corchetes [1:i])

Data(1:i,:)=[];

% Generación de las de distancias: punto final-inicial

A(di:df,1)=sqrt(sum((Data(1:n-i,:)-repmat(pos(i,:),n-i,1)).^2,2));

% Creamos una matriz que contenga bloques de todos los radios

B(di:df,1)=repmat(radii(i,:),n-i,1);

%Creamos una sucesión de bloques donde los radios ser repites

C(di:df,1)=radii(i+1:n);

di=di+(n-i);

df=df+(n-1)-i;

if df==Dist

di=Dist;

end

end

APÉNDICE E. CÓDIGOS

%% Recopilación de Datos: Distancia Inter-superficiales

```
% Finalmente calculamos las Distancias inter-superficiales
Inter_Super=(A-(B+C));
% Cálculo de Radios Mínimos comparando todos los radios versus los radios
% Restantes de los granos (sin repetir)
Radios_Arreglo=[B C];
Radio_Minimos=(min(Radios_Arreglo,[],2));
```

%% Cálculo de la resistencia

```
% Valor de un Armstrong a centímetro
Escalado=1*10^(-10);
% Constante de "Calibración"
Ct=4.0022*10^(-12);
% constante de "Redondez"
alpha=0.45;
```

%% Constante de Tunelamiento

```
delta=Escalado*CT;
```

%% Variable Sensible

```
% Resistencia
Resistencia=Ct.*(1./((alpha)*(pi).*(Radio_Minimos.*Escalado).^2)).*(exp((Inter_Super.*Escalado)/delta));
```

%% Cálculo de la energía de Josephson

```
% Temperatura Crítica
Tc=3.49;
% Constante de Planck: hbar
hbar=1.054*10^(-34);
% Carga del electrón
electron=-1.602176634*(10^(-19));
% Constante de Boltzmann
kB=1.3806*(10^(-23));
% Gap mínimo superconductor
Delta0=(3.53*kB*Tc)/2;
Tini=1.6;
Tfin=2.1;
```

%% CICLO QUE GENERA TODO EL MUESTRES DE TEMPERATURA VS DENSIDAD DE CORRIENTE

```
% MATRIZ DE CEROS QUE SE LLENARA DE LA TEMPERATURA Y LA DENSIDAD DE
% CORRIENTE CRÍTICA
```

```
DENSIDAD_VS_TEMPERATURA=zeros(348,2);
```

APÉNDICE E. CÓDIGOS

```
%% ciclo for que calcula la máxima densidad de corriente para cada temperatura
for SALTO=1:3480
```

```
%% Temperatura Prueba
T=0.001*SALTO;
```

```
%% Cálculo de la Capacitancia
```

```
%{ Constante dieléctrica (Matriz del Material Dieléctrico)
```

```
kapa=19;
```

```
Capacita=((alpha.*pi.*kapa).*(Radio_Minimos.*Escalado).^2)./(Inter_Super.*Escalado);
```

```
%%
```

```
%% Energía de Coulomb
```

```
%if (Tini<=T_im) && (Tfin<=T_fin)
```

```
    % electron=7*(-1.602176634*(10^(-19)));
```

```
%else
```

```
    % electron=-1.602176634*(10^(-19));
```

```
%end
```

```
EC=(1/2).*((2.*electron).^2)./Capacita);
```

```
%% Gap superconductor
```

```
DeltaT=Delta0*sqrt((1-T/Tc));
```

```
% Calculamos la energía de Josephson
```

```
EJ=((pi*hbar)/(4*(electron^2))*DeltaT.*(1./Resistencia)*tanh(DeltaT/(2*kB*T)));
```

```
%%
```

```
%% Corriente de Josephson (Densidad de corriente Crítica)
```

```
IJ=((2.*electron)./hbar).*EJ*(-1);
```

```
% Escalado de Ángstroms a centímetros
```

```
L=(1.*10.^(-8));
```

```
% Densidad de Corriente
```

```
DJ=IJ./((L.*b).^2);
```

```
ordenarDJ=sort(DJ,'descend');
```

```
%% Comparación de las Energías de Josephson y la Energía de Coulomb
```

```
% Si EJ>EC Los granos están conectados
```

```
% Llamaremos a esta matriz conexión para una mejor identificación
```

```
EJZ=z.*EJ;
```

```
Conexion=(EJZ)>(EC);
```

```
% Prueba de granos vecinos si: zEj>Ec decimos que los granos están
```

```
% conectados, donde z el número de granos vecinos.
```

```
[~,~,ix] = unique(Conexion);
```

```
unos=accumarray(ix,1);
```

```
%% filtrado de los Corrientes
```

APÉNDICE E. CÓDIGOS

```
% Se ve que si están conectadas o no los sistemas
```

```
DJFiltrada=zeros(Dist,1);  
for m=1:Dist  
    if Conexion(m,')==1  
        DJFiltrada(m,1)=DJ(m,1);  
    else  
        DJFiltrada(m,1)=0;  
    end  
end
```

%% SECCIÓN DE EXPORTACIÓN. PRIMERA PRUEBA

```
% Cambio de la matriz a numérica
```

```
M=zeros(n,1);  
for i=1:n  
    M(i,:)=i;  
end
```

```
%% Matriz de Nodos
```

```
di=1;  
df=n-1;  
for i=1:n-1  
% Generación de las de distancias: punto final-inicial  
    ST(di:df,1)=repmat(M(i,:),n-i,1);  
    STC(di:df,1)=M(i+1:n,:);  
    di=di+(n-i);  
    df=df+(n-1)-i;  
    if df==Dist  
        di=Dist;  
    end  
end
```

```
%% Matriz Completa de Nodos
```

```
Matris_Nodos=[ST STC];
```

%% MATRIZ FINAL: PARA USO DEL MÉTODO DE FORD-FULKERSON

```
RED_COMPLETA=[Matris_Nodos DJFiltrada];
```

```
%% Código para dejar solamente los valores diferentes de cero
```

```
Final=zeros(Dist-unos(1,1),3);  
r=1;  
for g=1:Dist  
    if RED_COMPLETA(g,3)~=0  
        Final(r,:)=RED_COMPLETA(g,:);  
        r=r+1;  
    end  
end
```

APÉNDICE E. CÓDIGOS

```
%% Cálculo de la corriente máxima y gráfica
clc
PPT=Final';

%% Construcción de la Red Dirigida con Interconexiones de redes y capacidades
if size(Final,1)==0
MensajeFinal="No hay red";
else
fin=Final(end,2);
G = digraph(PPT(1,:),PPT(2,:),PPT(3,:));

    if fin==n
% LWidths = 3*G.Edges.Weight/max(G.Edges.Weight);
% plot(G,'LineWidth',LWidths,'XData',pos(:,1),'YData',pos(:,2),'EdgeColor',[0 0.4470
0.7410],'ArrowSize',10)
augmentepath=maxflow(G,1,n,'augmentpath');

    else
G = digraph(PPT(1,:),PPT(2,:),PPT(3,:));
% LWidths = 3*G.Edges.Weight/max(G.Edges.Weight);
% plot(G,'LineWidth',LWidths,'XData', pos(1:fin,1),'YData',pos(1:fin,2),'EdgeColor',[0
0.4470 0.7410],'ArrowSize',10)
augmentepath="No hay Conexión al nodo final"
    end
end

DENSIDAD_VS_TEMPERATURA(SALTO,1)=T;
DENSIDAD_VS_TEMPERATURA(SALTO,2)=augmentepath;
end

%% GRÁFICA LA DENSIDAD DE CORRIENTE CRÍTICA
figure
plot(DENSIDAD_VS_TEMPERATURA(:,1),DENSIDAD_VS_TEMPERATURA(:,2),'Line
Width',2,'Color','blue');
title(['Densidad de Corriente Crítica en función de la Temperatura para ', num2str(n),'
Granos.'],...
    ['Dimensión de lado: ',num2str(b),' [Å]',',', ' Densidad: ', num2str(Ratio(1,1)),' y', '\delta:
', num2str(CT), ' [Å].'],...
    'FontSize', 24,'FontSize', 20);
axis square
ax = gca;
ax.XAxis.FontSize = 36;
ax.XAxis.FontWeight = 'bold';
ax.YAxis.FontSize = 36;
ax.YAxis.FontWeight = 'bold';
```

APÉNDICE E. CÓDIGOS

```
ax.LineWidth = 2;
grid on;
xlabel('T [K]', 'FontSize', 36, 'FontWeight', 'bold')
ylabel('J [A/cm^2]', 'FontSize', 36, 'FontWeight', 'bold')

%% GRÁFICA LA DENSIDAD DE CORRIENTE CRÍTICA
figure
plot(DENSIDAD_VS_TEMPERATURA(:,1), DENSIDAD_VS_TEMPERATURA(:,2), 'Line
Width', 2, 'Color', 'blue');
% title(['Densidad de Corriente Crítica en función de la Temperatura para ', num2str(n), '
Granos.'], ...
% ['Dimensión de lado: ', num2str(b), ' [Å]', ', ', ' Densidad: ', num2str(Ratio(1,1)), ' y', '
\delta: ', num2str(CT), ' [Å].'], ...
% 'FontSize', 24, 'FontSize', 20);
axis square
ax = gca;
ax.XAxis.FontSize = 36;
ax.XAxis.FontWeight = 'bold';
ax.YAxis.FontSize = 36;
ax.YAxis.FontWeight = 'bold';
ax.LineWidth = 2;
grid on;
xlabel('T [K]', 'FontSize', 36, 'FontWeight', 'bold')
ylabel('J [A/cm^2]', 'FontSize', 36, 'FontWeight', 'bold')

%% Fin del Programa 🐱
```

REFERENCIAS

- [1] L. Gunther, G. Deutscher, and Y. Imry, Comment on "Thermodynamic Properties of Small Superconducting Grains", *Phys. Rev. B* **7**, 3393 (1973).
- [2] G. Deutscher, Y. Imry, and L. Gunther, Superconducting phase transitions in granular systems, *Phys. Rev. B* **10**, 4598 (1974).
- [3] R. H. Parmenter, Isospin Formulation of the Theory of a Granular Superconductor, *Phys. Rev.* **154**, 353 (1967).
- [4] R. H. Parmenter, Collective Excitations of a Granular Superconductor in the Presence of a Steady Uniform Current Flow, *Phys. Rev.* **158**, 314 (1967).
- [5] R. H. Parmenter, Characteristic Parameters of a Granular Superconductor, *Phys. Rev.* **167**, 387 (1968).
- [6] B. Abeles, R. W. Cohen, and W. R. Stowell, Critical Magnetic Fields of Granular Superconductors, *Phys. Rev. Lett.* **18**, 902 (1967).
- [7] B. Abeles and J. J. Hanak, Superconducting and semiconducting phases of granular films, *Phys. Lett. A* **34**, 165 (1971).
- [8] G. Deutscher, Critical fluctuations in granular superconductors, *Phys. Lett. A* **35**, 28 (1971).
- [9] P. Pellan, G. Dousselin, H. Cortes, and J. Rosenblatt, Phase coherence and noise resistivity in weakly connected granular superconductors, *Solid State Commun.* **11**, 427 (1972).
- [10] O. Entin-Wohlman, A. Kapitulnik, Y. Shapira, Dependence of T_c normal-state resistivity in granular superconductors, *Phys. Rev. B* **24**, 6464 (1981).
- [11] B. Abeles, Effect of charging energy on superconductivity in granular metal films, *Phys. Rev. B* **15**, 2828 (1977).
- [12] E. B. Efetov, Phase transition in granulated superconductors, *Zh. Eksp. Teor. Fiz* **78**, 2017 (1980).
- [13] Y. Tajima and K. Yamada, Magnetic and Electric Field Effects on the Giant Resistivity Anomaly on the Superconducting Transition in $TaSe_3$, *J. Phys. Soc. Japan* **53**, 3307 (1984).
- [14] M. Kunchur, P. Lindenfeld, W. L. McLean, and J. S. Brooks, Absence of superconductivity in metallic granular aluminum, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 1232 (1987).

O. REFERENCIAS

- [15] R. C. Dynes, J. P. Garno, and J. M. Rowel, Two-Dimensional Electrical Conductivity in Quench-Condensed Metal Films, *Phys. Rev. Lett.* **40**, 479 (1978).
- [16] A. E. White, R. C. Dynes, and J. P. Garno, Destruction of superconductivity in quench-condensed two-dimensional films, *Phys. Rev. B* **33**, 3549 (1986).
- [17] Pedro A. Pury and Manuel O. Cáceres, Tunneling percolation model for granular metal films, *Phys. Rev. B* **55**, 3841 (1997).
- [18] H. M. Jaeger, D. B. Haviland, A. M. Goldman, and B. G. Orr, Onset of superconductivity in ultrathin granular metal films, *Phys. Rev. B* **40**, 182 (1989).
- [19] D. Doniach, Percolation, Localization and Superconductivity, ed. by A. M. Goldman and S. A. Wolf, Plenum Press, N. Y. (1984)
- [20] E. Simanek, Re-entrant phase transition of granular superconductors, *Phys. Rev. B* **23**, 5762 (1981).
- [21] E. Simanek, Charging fluctuations and resistive transition in Josephson junction arrays, *Phys. Lett. A* **101**, 161 (1984).
- [22] J. V. José, Effect of zero-point fluctuations on the long-range phase coherence of granular films, *Phys. Rev. B* **29**, 2836 (1984).
- [23] A. F. Hebard and M. A. Paalanen, Pair-breaking model for disorder in two-dimensional superconductors, *Phys. Rev. B* **30**, 4063 (1984).
- [24] S. M. Chudinov, G. Mancini, M. Minestrini, R. Natali, S Stizza and A. Bozhko, Critical current in granular superconductor C-Si-W with peak-type re-entrant superconductivity, *J. Phys.: Condens. Matter* **14** 193 (2022).
- [25] Y. Imry, G. Deutscher, and L. Gunther, in Proceedings of the 13th Conference on Low Temperature Physics, edited by W. J. O' Sullivan, K. D. Timmerhaus, and E. F. Hamm el Plenum, New York (1973)
- [26] Y. Imry and M. Strongin, Destruction of superconductivity in granular and highly disordered metals, *Phys. Rev. B* **24**, 6353 (1981).
- [27] B. Muhlschlegel, D. J. Scalapino, and R. Denton, Thermodynamic Properties of Small Superconducting Particles, *Phys. Rev. B* **6**, 1767 (1972).
- [28] G. Deutscher, H. Fenichel, M. Gershenson, E. Grunbaum, and Z. Ovadyahu, Transition to zero dimensionality in granular aluminum superconducting films, *J. Low Temp. Phys.* **10**, 231 (1973).

O. REFERENCIAS

- [29] Abeles, R. W. Cohen, and G. W. Cullen, Enhancement of Superconductivity in Metal Films, *Phys. Rev. Lett.* **17**, 632 (1966).
- [30] L. Solymar, *Superconducting Tunneling and Application*, Chapman and Hall, London (1972).
- [31] M. Gazda, B. Kusz, J. Gackowska and W. Sadowski Gdansk, Conductivity and Superconductivity in Granular Materials, University of Technology, Faculty of Applied Physics and Mathematics Narutowicza, Vol. **114** (2008)
- [32] V. V. Schmidt, *JETP Lett.* **3**, 89 (1966).
- [33] B. Muhlschlegel, Order-parameter fluctuations in small superconducting Particles, *Phys. Rev. B* **10**, 1127 (1974).
- [34] G. Grinstein and A. H. Luther, Application of the renormalization group to phase transitions in disordered systems, *Phys. Rev. B* **13**, 1329 (1976).
- [35] T. C. Lubensky, Critical properties of random-spin models from the ε expansion, *Phys. Rev. B* **11**, 3573 (1975).
- [36] A. Aharony, in *Phase Transitions and Critical Phenomena*, edited by C. Domb and M. S. Green, Academic, New York (1976).
- [37] J. Rosenblatt, A. Rabontow, and P. Pellan, in *Proceedings of the 14th Conference on Low Temperature Physics*, Otaniemi, Finland, edited by M. Krusius and M. Vuorio, North-Holland, Amsterdam (1975).
- [38] Grinstead, Charles M.; Snell, J. Laurie, *Conditional Probability -Discrete Conditional*, Grinstead & Snell's Introduction to Probability, Orange Grove Texts (2019).
- [39] D. V Averin, K. K Likharev, Coulomb blockade of single-electron tunneling, and coherent oscillations in small tunnel junctions, *Journal of Low Temperature Physics.* **62**, 345–373 (1986).
- [40] B. Abeles, P. Sheng, M. D. Coutts, and Y. Arie, Structural and electrical properties of granular metal films, *Adv. Phys.* **24**, 406 (1975).
- [41] V. Ambegaokar and A. Baratoff, Tunneling Between Superconductors, *Phys. Rev. Lett.* **11**, 104 (1963).
- [42] V. Ambegaokar and A. Baratoff, TUNNELING BETWEEN SUPERCONDUCTORS-Erratum, *Phys. Rev. Letters* **10**, 486 (1963).
- [43] Gunther, G. Deutscher, and Y. Imry, Comment on "Thermodynamic Properties of Small Superconducting Grains", *Phys. Rev. B* **7**, 3393 (1973).

O. REFERENCIAS

- [44] J. J. Hauser, Enhancement of Superconductivity in Aluminum Films, *Phys. Rev. B* **3**, 1611 (1971).
- [45] R. W. Cohen and B. Abeles, Superconductivity in Granular Aluminum Films, *Phys. Rev.* **168**, 444 (1968).
- [46] E. Šimánek, Effect of charging energy on transition temperature of granular superconductors, *Solid State Communications* **Volume 31**, Issue 6, (1979).
- [47] Aicha A. R. Elshabini-Riad, F. D. Barlow III, D. Fred, Thin Film Technology Handbook, McGrawHill, New York (1998).
- [48] Bozhko A D, Chudinov S M, Rodichev D Yu, Pypkin B N, Stizza S and Berrettoni M and A. Briccs, Electron Transport and Superconductivity in Transition Metal-Containing Diamond-Like Films, *Phys. Status Solidi b* **177** 475 (1993).
- [49] M. Berrettoni, A. Bozhko, A. Briggs, S. M. Chudinov, B. N. Pypkin and S. Stizza, *Condens. Matter Mater. Commun.* **2** **71**, (1995).
- [50] A. Bozhko, S. M. Chudinov, M. Evangelisti S. Stizza, V.F. Dorfman, Non-ohmic effects in the electronic transport in tungsten and silicon-containing diamond like films, *Materials Science and Engineering: C* **Volume 5**, Issues 3–4 (1998).
- [51] A. Bozhko, D. Novikov, S. Chudinov, S. Stizza, and B. Pypkin, Structure of the Superconducting Phase in Diamond-Like Carbon Films Containing Tungsten, *Phys. Stat. Sol. (b)* **199**, 197 (1997).
- [52] K. Rathnayaka, D.G. Naugle, B.K. Cho, and P.C. Canfield, Anisotropic magnetoresistance of single-crystal $HoNi_2B_2C$ and the interplay of magnetic and superconducting order, *Phys. Rev. B.* **53**, 5688 (1996).
- [53] H. Müller, A. Kreyssig, A. Handstein, G. Fuchs, C. Ritter, and M. Loewenhaupt, , Magnetic structure and superconductivity in $(Ho_xY_{1-x})Ni_2B_2C$, *Journal of Applied Physics* **81**, 4240 (1997).
- [54] R. J. Cava, H. Takagi, H. W. Zandbergen, J. J. Krajewski, W. F. Peck Jr, T. Siegrist, B. Batlogg, R. B. van Dover, R. J. Felder, K. Mizuhashi, J. O. Lee, H. Eisaki, and S. Uchida, Superconductivity in the quaternary intermetallic compounds $LnNi_2B_2C$, *Nature* **367**, 252 (1994).
- [55] H. Eisaki, H. Takagi, R. J. Cava, B. Batlogg, J. J. Krajewski, W. F. Peck Jr, K. Mizuhashi, J. O. Lee., and S. Uchida, Competition between magnetism and superconductivity in rare-earth nickel boride carbides, *Phys. Rev. B.* **50**, 647 (1994).

O. REFERENCIAS

- [56] K. H. Müller and V. N. Narozhnyi, Phys. Interaction of superconductivity and magnetism in borocarbide superconductors, *Reports on Progress in Physics* **64**, 943 (2001).
- [57] P. C. Canfield, B. K. Cho, D. C. Johnston, D. K. Finnemore, and M. F. Hundley, Specific heat and Anisotropic Superconducting and normal-state magnetization of $\text{HoNi}_2\text{B}_2\text{C}$, *Physica C* **230**, 397-406 (1994).
- [58] Z. Ren, Q. Tao, S. Jiang, C. Feng, C. Wang, J. Dai, G. Cao, and Z. Xu, Superconductivity induced by phosphorus doping and its coexistence with ferromagnetism in $\text{EuFe}_2(\text{As}_{0.7}\text{P}_{0.3})_2$, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 137002, No. 13 (2009).
- [59] U. B. Paramanik, P. L. Paulose, S. Ramakrishnan, A. K. Nigam, C. Geibel, and Z. Hossain, Magnetic and superconducting properties of Ir-doped EuFe_2As_2 , *Superconductor Science and Technology* **27**, 075012 (2014).
- [60] K. Matsubayashi, K. Munakata, M. Isobe, N. Katayama, K. Ohgushi, Y. Ueda, N. Kawamura, M. Mizumaki, N. Ishimatsu, M. Hedo, I. Umehara, and Y. Uwatoko, Pressure-induced changes in the magnetic and valence state of EuFe_2As_2 , *Phys. Rev. B* **84**, 024502 (2011).
- [61] G. D. Gu, Y. Zhao, G. J. Russell, N. Nakamura, S. Tajima, K. Uehara, and N. Koshizuka, "Effect of magnetic field and current on the observed reentrant phenomenon in $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_8/\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{Ca}_2\text{Cu}_3\text{O}_{10}$ intergrowth single crystals", *Phys. Rev. B* **49**, No. 21, 15424-27 (1994).
- [62] Y. Zhao, G. D. Gu, G. J. Russell, N. Nakamura, S. Tajima, J. G. Wen, K. Uehara, and N. Koshizuka, Normal state Reentrant behavior in superconducting $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_8/\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{Ca}_2\text{Cu}_3\text{O}_{10}$ intergrowth single crystals, *Phys. Rev. B* **51**, No. 5, 3134-39 (1995).
- [63] D. Mahan, Reentrant superconductivity from the anharmonic electron-phonon interaction, *Phys. Rev. B.* **56**, 8322–8329 (1997).
- [64] M. Matlak and M. Pietruszka, Re-Entrant and non-re-entrant properties of magnetic superconductors, Critical electron redistribution, *Physica C: Superconductivity* **311**, 151-162 (1999).
- [65] A. Amici, P. Thalmeier, and P. Fulde, Theoretical Model for the Superconducting and Magnetically Ordered Borocarbides, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 1800-1803 (2000).
- [66] A. Gorczyca and M. Mierzejewski, Re-entrant superconductivity in the strong coupling limit, *Phys. Status Solidi.* **244**, 2503-2507 (2007).
- [67] D. Borycki and J. Maćkowiak, Re-entrant behavior of superconducting alloys, *Supercond. Sci. Technol.* **24**, 035007 (2011).

O. REFERENCIAS

- [68] L. R. Ford, D. R. Fulkerson, A simple algorithm for finding maximal network flows and an application to the Hitchcock problem, *Canadian Journal of Mathematics*, **Volume 9**, 210-218 (1957).
- [69] <https://mathworld.wolfram.com/Graph.html>
- [70] Carrasco Pacheco, José Luis Contreras Ordaz, Marco Antonio, Modelado dinámico por inspección para convertidores de potencia CD a CD conmutados: Un enfoque basado en grafos, Universidad Tecnológica de la Mixteca (2017).
- [71] Wasserman y Faust, Grafos y Matrices, Dawn Iacobucci (2013).
- [72] S. M. Chudinov, R. Ferretti, S. Fusari, G. Mancini, and S. Stizza, Reentrant superconductivity mechanisms in amorphous carbon-silicon films containing tungsten, *Phys. Rev. B.* **62**, 12516–12521 (2000).
- [73] Frank J. Owens, Charles P. Poole Jr., The New Superconductors (Selected Topics in Superconductivity), Springer (1996).
- [74] Charles K. Poole, Horacio A. Farach, Richard J. Creswick, Handbook of Superconductivity, Academic Press (2000).
- [75] T. Tsuneto, Superconductivity and Superfluidity, Cambridge University Press (2009).
- [76] <https://mathworld.wolfram.com/NormalDistribution.html>
- [77] Larry Wasserman, All of Statistics: a concise course in statistical inference, Springer texts in statistics (2005).
- [78] L. R. Ford, D. R. Fulkerson, Maximal Flow Through a Network, *Canadian Journal of Mathematics*, **Volume 8**, pp. 399-404 (1956).
- [79] <https://la.mathworks.com/help/matlab/ref/and.html>
- [80] <https://la.mathworks.com/help/matlab/ref/logicaloperatorsshortcircuit.html>
- [81] <https://la.mathworks.com/help/matlab/ref/or.html>
- [82] <https://la.mathworks.com/help/symbolic/all.html>
- [83] <https://la.mathworks.com/help/stats/mvnrnd.html>
- [84] K-H Müller and V N Narozhnyi, Phys. Interaction of superconductivity and magnetism in borocarbide superconductors, *Reports on Progress in Physics*, **64** 943, (2001)