



Facultad de Ciencias
Físico Matemáticas

UNA INTRODUCCIÓN A LAS COORDENADAS CURVILÍNEAS Y SUS
APLICACIONES MÁS ELEMENTALES

TESIS

que para obtener el grado académico de:

LICENCIADO EN FÍSICA

presenta al colegio de física el alumno:

ELDON NIETO RUIZ

ASESORES:

Dra. Honorina Ruiz Estrada

Dr. Benito Flores Desirena



Índice general

Agradecimientos	7
1. PRESENTACIÓN	9
1.0.1. RESUMEN	9
1.0.2. JUSTIFICACIÓN	9
1.0.3. OBJETIVOS	11
1.0.4. MARCO TEÓRICO	12
1.0.5. METODOLOGÍA	12
2. LISTA DE PROBLEMAS	15
2.0.1. PROBLEMA 1 (campo eléctrico generado por una circunferencia de carga)	15
2.0.2. PROBLEMA 2 (campo eléctrico generado por un cascarón esférico cargado)	16
2.0.3. PROBLEMA 3 (campo de inducción magnética producido por una circunferencia de corriente)	16
2.0.4. PROBLEMA 4 (corrientes producidas por la rotación de una esfera dieléctrica polarizada uniformemente)	17
2.0.5. PROBLEMA 5 (momento dipolar magnético producido por la rotación de una esfera carga uniformemente)	17
3. EVALUACIÓN DE LAS ENCUESTAS	19
3.0.1. ANÁLISIS DE LAS PRODUCCIONES ESTUDIANTILES	19
3.0.2. CATEGORÍAS DE LOS PUNTOS A EVALUAR	20
3.0.3. RESULTADOS DE LAS ENCUESTAS	20
4. CONCEPTOS BÁSICOS	29
4.0.1. CASOS PARTICULARES	29
4.0.2. LONGITUD DE ARCO	30

4.0.3.	INTEGRALES COMPLETAS	30
4.0.4.	INTEGRAL DEL SENO CUADRADO DE ϕ	31
4.0.5.	ELEMENTOS DIFERENCIALES VECTORIALES	32
4.0.6.	CAMPO VECTORIAL	32
4.0.7.	CAMPO ELÉCTRICO (\vec{E})	33
4.0.8.	LEY DE COULOMB	33
4.0.9.	CUERPOS CARGADOS	33
4.0.10.	CAMPO DE INDUCCIÓN MAGNÉTICA (\vec{B})	34
4.0.11.	LEY DE BIOT - SAVART	34
4.0.12.	CORRIENTES FILAMENTALES	35
4.0.13.	CORRIENTE ELÉCTRICA VOLUMÉTRICA	36
4.0.14.	CORRIENTE ELÉCTRICA SUPERFICIAL	36
4.0.15.	CAMPOS VECTORIALES DE CORRIENTE GENERADOS POR DENSIDADES DE CARGA EN MOVIMIENTO	37
4.0.16.	DIVERGENCIA EN FORMA DIFERENCIAL	37
4.0.17.	DIeléCTRICOS POLARIZADOS	38
4.0.18.	DENSIDAD VOLUMÉTRICA DE CARGA LIGADA (ρ_b)	39
4.0.19.	DENSIDAD SUPERFICIAL DE CARGA LIGADA (σ_b)	39
4.0.20.	MOMENTO DIPOLAR MAGNÉTICO (\vec{m})	40
5.	SOLUCIÓN EXPERTA	41
5.0.1.	SOLUCIÓN AL PROBLEMA 1	41
5.0.2.	SOLUCIÓN AL PROBLEMA 2	47
5.0.3.	SOLUCIÓN AL PROBLEMA 3	53
5.0.4.	SOLUCIÓN AL PROBLEMA 4	58
5.0.5.	SOLUCIÓN AL PROBLEMA 5	64
6.		71
6.0.1.	ACLARACIONES	71
6.1.	COORDENADAS RECTANGULARES	72
6.1.1.	VECTOR POSICIÓN	72
6.1.2.	DERIVADA TEMPORAL	73
6.1.3.	ELEMENTOS DIFERENCIALES	76
6.1.4.	NUEVOS SISTEMAS COORDENADOS	81
6.2.	COORDENADAS CILÍNDRICAS	81
6.2.1.	VECTOR POSICIÓN	81
6.2.2.	RELACIÓN ENTRE COORDENADAS	87
6.2.3.	DERIVADA TEMPORAL	88

6.2.4.	MÓDULO	92
6.2.5.	ELEMENTOS DIFERENCIALES	92
6.2.6.	RANGO DE VALORES	96
6.3.	COORDENADAS ESFÉRICAS	96
6.3.1.	VECTOR POSICIÓN	96
6.3.2.	RELACIÓN ENTRE COORDENADAS	101
6.3.3.	DERIVADA TEMPORAL	102
6.3.4.	MÓDULO	105
6.3.5.	ELEMENTOS DIFERENCIALES	105
6.3.6.	RANGO DE VALORES	108
6.3.7.	COMENTARIOS	109
6.4.	CONCLUSIONES	110

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE GENERAL

Agradecimientos

La educación superior pública y calidad es uno de los pilares para el desarrollo de cualquier sociedad, pues permite que las personas de bajos recursos puedan acceder a una formación administrativa, técnica o científica y, con el tiempo, aspirar a un cambio en su calidad de vida. Así pues, agradezco a las autoridades correspondientes por hacerla posible, así como exhorto a que se le de continuidad, alcance y, por sobre todo, a que, sin importar el costo, se mantenga pública (en el sentido más amplio de la palabra) y con administración transparente.

Agradezco a los profesores de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla por enseñanzas, en particular, a los profesores Gerardo Francisco Torres del Castillo, Jesús García Ortiz y Juan Nieto Frausto, pues la forma en la que imparten sus clases me sirvió como punto de partida para estructurar este trabajo.

Por último, agradezco a mis asesores de tesis, el Dr. Benito Flores Desirena y la Dra. Honorina Ruiz Estrada, por haberme proporcionado guía siempre que la necesité.

AGRADECIMIENTOS

AGRADECIMIENTOS

Capítulo 1

PRESENTACIÓN

1.0.1. RESUMEN

En este trabajo se presenta una propuesta introductoria y alternativa para el estudio de las coordenadas cilíndricas y esféricas, así como de su aplicación al electromagnetismo clásico. Esta propuesta se justifica, sobre todo, en el análisis de las respuestas a una prueba que se aplicó a estudiantes de maestría en física. Se espera que este trabajo sea útil tanto para estudiantes de nivel licenciatura (de ciencias exactas e ingenierías) como para los docentes que imparten las materias de electromagnetismo.

1.0.2. JUSTIFICACIÓN

Los sistemas de coordenadas son muy usados para resolver problemas de física y matemáticas. En particular, los sistemas de coordenadas rectangulares, cilíndricas y esféricas son muy importantes en las materias de mecánica clásica y electromagnetismo. El primero de los sistemas mencionados, así como su base vectorial, se aprenden desde el primer semestre de la carrera [1, pp. 39-59] y, por lo general, su aprendizaje y manejo resultan relativamente fáciles e intuitivos. Sin embargo, no siempre ocurre lo mismo con los dos últimos sistemas mencionados. Esto se debe, entre otras cosas, a que, en algunos libros, su introducción y desarrollo son demasiado condensados [2, pp. 114-115], de tal forma que no se ponen de manifiesto sus características más importantes.

En el transcurso de su formación como físico, el estudiante puede darse cuen-

ta de que la mayoría de los libros que van dirigidos a su grado de estudios adolecen de falta desarrollo verbal, teórico y algebraico en casi todo su contenido [3]. Esto llega a niveles bastante alarmantes cuando queda de manifiesto que casi la mitad de algunos libros son problemas propuestos, es decir, que, con tal de proporcionar listas de problemas al lector, se redujo casi a la mitad el posible desarrollo de su contenido en los tres frentes antes mencionados [2]. La cúspide de todo esto es cuando los pocos problemas resueltos que se pueden conseguir en algunos textos están insuficientemente explicados y desarrollados en casi todo sentido, apelando a que el estudiante ya se ha apropiado de los conocimientos necesarios para seguir el desarrollo de los mismos, cuando, para empezar, en los textos en cuestión no se hizo lo suficiente para lograr lo anterior [4, pp. 668-693]. Todo esto sólo entorpece la formación del estudiante.

En el trabajo con los estudiantes de licenciatura en ciencias o ingeniería se observa que, por lo general, ellos no manejan una base vectorial distinta a la rectangular. Esto es especialmente notorio cuando en un problema usan la base rectangular para escribir cualquier cantidad vectorial, haciendo caso omiso de las simetrías del mismo.

Este trabajo de tesis contiene una serie de cinco problemas de electromagnetismo que se le dejaron como tarea a un grupo de diez estudiantes de primer semestre de Maestría en física, durante el primer semestre del año 2019. Los problemas fueron elegidos de tal manera que resultaran idóneos para el uso de los sistemas de coordenadas cilíndricas y esféricas, así como de su base vectorial. Sin embargo, en sus respuestas se observó que siguen sin manejar apropiadamente los sistemas mencionados, pues, al igual que algunos de compañeros de licenciatura, usaron la base rectangular para escribir cualquier cantidad vectorial, haciendo caso omiso de las simetrías del problema a resolver. Además, también se detectaron errores en la comprensión de conceptos que se ven desde el inicio de la licenciatura en física, tales como la diferencia entre vectores y escalares, el significado de la integral y las unidades de las cantidades físicas.

► En el capítulo 3 se abordan de una manera más detallada las respuestas dadas por el grupo de estudiantes de maestría, así como del método que se

usó para evaluarlas. ■

Por lo tanto, se concluye que el trabajo que se hizo a nivel de salón de clase, tareas y libros de texto, no fue el apropiado para que los estudiantes encuestados dominaran los conceptos y sistemas coordenados mencionados. A su vez, esto pone de manifiesto que es necesario dar nuevas propuestas para el desarrollo de los temas de física, tanto a nivel de clase, como de tareas y libros de texto. La presente propuesta tiene esa intención.

► Nota: Esta propuesta nunca ha sido aplicada, unicamente lo ha sido la lista de problemas descrita (en una única ocasión). ■

1.0.3. OBJETIVOS

El primer y más importante objetivo de este trabajo es dar a los alumnos de nivel licenciatura (de ciencias exactas e ingenierías) una introducción simple, pero detallada (verbal y algebraicamente), a los sistemas de coordenadas cilíndricas y esféricas. Esta introducción se encuentra en el capítulo 6.

El segundo objetivo de este trabajo es dar a los docentes una propuesta de cómo podría estructurarse el desarrollo del tema de coordenadas cilíndricas y esféricas, así como de sus respectivas bases vectoriales, en el contexto de la teoría electromagnética clásica. La propuesta en cuestión está contenida en los capítulos 2,3,4,5 y 6. El orden recomendado de desarrollo en un curso es: 6,2,3,4 y 5.

► Nota: Si un estudiante quiere usar esta tesis como introducción a los sistemas de coordenadas cilíndrico y esférico, el orden de lectura que se le recomienda es: capítulos 6,2,3,4 y 5. ■

1.0.4. MARCO TEÓRICO

El marco teórico para el desarrollo de los temas de física de este trabajo es el brindado por la electrostática y magnetostática clásica.

1.0.5. METODOLOGÍA

La lista de problemas de capítulo 2 consiste en dos problemas de electrostática y tres de magnetostática, cuya dificultad corresponde al punto medio de la licenciatura en física, es decir, a la transición de la etapa básica a la formativa. La razón para la elección de tal tema para la elaboración de los problemas, así como de su dificultad, es que resultan idóneos para el uso de los sistemas de coordenadas cilíndrico y esférico.

La evaluación de los aciertos, errores y dificultades del grupo de estudiantes encuestados se hace de acuerdo una serie de puntos clave que será expuesta en el capítulo 3.

El capítulo 4 consta de una presentación de los conceptos básicos que permiten resolver los problemas. Esto consiste en el repaso de la leyes de Coulomb y Biot-Savart, así como del cálculo de campos eléctricos y de inducción magnética de cuerpos no puntuales a partir de las leyes antes mencionadas. También será necesario recordar el significado de los campos de densidad de corriente, campos de polarización y el momento dipolar magnético, así como algunas de las técnicas para calcularlos.

El capítulo 5 consta de la solución experta a los problemas de capítulo 2. En ella se detalla una posible manera de usar lo expuesto en el capítulo 6 y 4 para dar una solución óptima y detallada (verbal y algebraicamente) a los problemas planteados.

El capítulo 6 está compuesto por un resumen del sistema de coordenadas rectangulares y un desarrollo detallado (verbal y algebraicamente) de los

CAPÍTULO 1. PRESENTACIÓN

sistemas de coordenadas cilíndricas y esféricas, así como a sus respectivas bases vectoriales. Esto se hace utilizando la geometría analítica vectorial y el cálculo diferencial vectorial.

CAPÍTULO 1. PRESENTACIÓN

Capítulo 2

LISTA DE PROBLEMAS

A continuación se presenta la lista de problemas de electromagnetismo clásico mencionada en la justificación.

► Nota: Parte de la dificultad de estos problemas consiste en que, deliberadamente, se omitieron dibujos y modelos geométricos representativos en ellos. Por lo tanto, respetando sus descripciones, acomode la geometría de cada uno como le parezca más conveniente. Por supuesto, el método de resolución de cada problema queda a criterio del estudiante. ■

2.0.1. PROBLEMA 1 (campo eléctrico generado por una circunferencia de carga)

Considere que una circunferencia de radio R posee una densidad de carga lineal dada por: $\lambda = \lambda_0 \sin \phi$, en donde λ_0 es una constante negativa y ϕ es el ángulo azimutal.

Inciso 1a : Calcule el campo eléctrico que genera en su centro.

Inciso 1b : Si ahora se le quita un pedazo a la circunferencia, de modo que el arco restante subtienda un ángulo de 240 grados, ¿cuál es el campo eléctrico que genera el arco en el punto anteriormente mencionado?

► Nota: Este problema es el más sencillo en cuanto a planteamiento físico y cálculo matemático ■

2.0.2. PROBLEMA 2 (campo eléctrico generado por un cascarón esférico cargado)

Considere que un cascarón esférico de radio R posee una densidad de carga superficial dada por: $\sigma = \sigma_0 \cos \theta$, en donde σ_0 es una constante positiva y θ es el ángulo polar.

Inciso 2a : Encuentre el campo eléctrico que el cascarón genera en su centro.

Inciso 2b : Si ahora se le parte ocho pedazos iguales y se desechan siete de ellos, ¿qué campo eléctrico genera el pedazo restante en el punto antes mencionado?

► Nota: El inciso b) de este problema es el que está más abierto a la interpretación, pues no se dice en qué son iguales las ocho partes en las que se divide el cascarón esférico ■

2.0.3. PROBLEMA 3 (campo de inducción magnética producido por una circunferencia de corriente)

Considere una circunferencia de corriente constante y radio R .

Inciso 3a : Calcule el campo de inducción magnética que genera sobre su eje normal.

Inciso 3b : Si ahora se le quita un pedazo a la circunferencia, de modo que el arco restante subtienda un ángulo de 240 grados, ¿cuál es el campo de inducción magnética que genera el arco sobre el eje antes mencionado?

CAPÍTULO 2. LISTA DE PROBLEMAS

► Nota: El inciso a) de este problema se trata durante el desarrollo normal de la licenciatura en física, ya sea como ejemplo de clase, tarea o pregunta de examen ■

2.0.4. PROBLEMA 4 (corrientes producidas por la rotación de una esfera dieléctrica polarizada uniformemente)

Una esfera dieléctrica de radio R está polarizada uniformemente en todo su volumen y superficie. Se le hace girar sobre su diámetro con una cierta velocidad angular constante. Conteste los siguientes incisos, suponiendo que la rotación no altera la polarización descrita:

Inciso 4a : Determine los campos de densidad de corriente que se generan en la esfera.

Inciso 4b : Encuentre la corriente total que pasa por una semicircunferencia sobre la superficie de la esfera, cuyos puntos extremos están en el eje de rotación.

Inciso 4c : ¿Le parecen familiares los vectores unitarios que usó en el desarrollo de este problema?

2.0.5. PROBLEMA 5 (momento dipolar magnético producido por la rotación de una esfera carga uniformemente)

Una carga total Q está distribuida uniformemente en todo el volumen de una esfera de radio R . La esfera gira sobre su eje con cierta velocidad angular constante. Conteste los siguientes incisos, suponiendo que la rotación no afecta a la distribución de carga descrita:

Inciso 5a : Determine el campo de densidad de corriente volumétrica que se generan en la esfera.

CAPÍTULO 2. LISTA DE PROBLEMAS

Inciso 5b : Obtenga el momento dipolar magnético de la esfera debido al campo vectorial calculado en el inciso anterior.

Capítulo 3

EVALUACIÓN DE LAS ENCUESTAS

3.0.1. ANÁLISIS DE LAS PRODUCCIONES ESTUDIANTILES

Las respuestas a cada uno de los incisos de los problemas se caracterizan por los siguientes seis puntos:

Punto 1: Esquema de la situación narrada en el enunciado del problema.

Punto 2: Propuesta de la solución del problema en base al esquema.

Punto 3: Expresión diferencial para la propiedad física que se va a obtener por medio de integración.

Punto 4: Integración vectorial detallada y explícita.

Punto 5: Comprobación dimensional del resultado del punto anterior.

Punto 6: Comparación de los resultados (punto 4) con la predicción dada en el punto 2.

► Nota: En los incisos a) de los problemas 4 y 5, los puntos 3 y 4 se cambiaron, respectivamente, por: manejo correcto de expresiones vectoriales

y cálculos detallados ■

3.0.2. CATEGORÍAS DE LOS PUNTOS A EVALUAR

Las respuestas a cada punto se catalogaron en las siguientes categorías:

Categoría 1 (C1) → Respuesta satisfactoria.

Categoría 2 (C2) → Respuesta parcialmente satisfactoria.

Categoría 3 (C3) → Respuesta no satisfactoria.

El criterio para determinar en qué categoría caen las respuestas estudiantiles es por medio de comparación con la solución experta (en ella, se siguen de manera muy rigurosa los puntos antes mencionados): una gran similitud sin errores se cataloga como C1, una semejanza moderada con pocos errores se cataloga como C2 y una semejanza baja con diversos errores se cataloga como C3.

► Nota: La respuesta al inciso c) del problema 4 también se catalogó en categorías antes mencionadas ■

3.0.3. RESULTADOS DE LAS ENCUESTAS

Aunque, en principio, el método de evaluación descrito sugiere un desglose completo de las respuestas estudiantiles en cada inciso de los problemas, los resultados obtenidos se componen en mayoría de respuestas no satisfactorias (C3) y algunas parcialmente satisfactorias (C2).

Pero, el punto 4 de cada uno de los incisos en los que se pide una integración explícita y definida obtuvo una cantidad considerable de respuestas satisfac-

CAPÍTULO 3. EVALUACIÓN DE LAS ENCUESTAS

torias (C1) y también puso de manifiesto errores importantes. Por lo tanto, para evitar la repetición innecesaria de datos, se optó por sólo desglosar las respuestas al punto en cuestión:

¿Cuántos estudiantes dieron una respuesta satisfactoria en las integrales de los problemas?	
Problema 1	Integral del inciso 1a : 5 respuestas satisfactorias (C1)
	Integral del inciso 1b : 2 respuestas satisfactorias (C1)
Problema 2	Integral del inciso 2a : 3 respuestas satisfactorias (C1)
	Integral del inciso 2b : 2 respuestas satisfactorias (C1)
Problema 3	Integral del inciso 3a : 6 respuestas satisfactorias (C1)
	Integral del inciso 3b : 5 respuestas satisfactorias (C1)
Problema 4	Integral del inciso 4b : 0 respuestas satisfactorias (C1)
Problema 5	Integral del inciso 5b : 2 respuestas satisfactorias (C1)

El problema con más respuestas de categoría C1 fue el problema 3. Esto se explica, tal y como se puso de manifiesto en el capítulo 2, tomando en cuenta que, por lo general, su inciso a se trata durante el desarrollo de la licenciatura en física, ya sea como ejemplo de clase, tarea o pregunta de examen.

El que le sigue es el problema 1. Esto se explica, tal y como se puso de manifiesto en el capítulo 2, tomando en cuenta que es el más fácil en cuanto a planteamiento físico y cálculo matemático.

El menor número de respuestas de categoría C1 se dieron en los incisos b de los Problemas 4 y 5 (el primero de estos es el único que no tuvo ninguna respuesta satisfactoria). Esto se explica de la siguiente manera:

Tal y como se puso de manifiesto en el capítulo 2, el cálculo pedido en el inciso 4b no es usual en clases, tareas o preguntas de examen.

Tal y como se puso de manifiesto en el capítulo 2, el cálculo pedido en el inciso 5b es el más complicado en cuanto al planteamiento físico y cálculo matemático. Además, requiere un manejo considerable de la base esférica.

Por último, el inciso 2b del problema 2 es el que, tal y como se puso se manifestó en el capítulo 2, está más abierto a la interpretación. En este caso, los dos únicos estudiantes que dieron una respuesta satisfactoria calcularon correctamente el campo eléctrico producido en el origen por el octante definido por θ yendo desde 0 hasta $\frac{\pi}{2}$ y ϕ yendo desde 0 hasta $\frac{\pi}{2}$. El resultado en cuestión está dado por:

$$\vec{E}(\vec{0}) = -k\sigma_0 \left(\frac{1}{3} \hat{x} + \hat{y} + \frac{\pi}{6} \hat{z} \right)$$

En la subsección 5.0.2 del capítulo 5 se verá una solución más apropiada a este inciso.

El resto de respuestas dadas por los estudiantes en el punto 4 de los incisos mencionados se encuentran distribuidas de una manera aproximadamente igual entre las categorías C2 y C3. Por lo tanto y, suponiendo que así será más ilustrativo, se optó por hacer un desglose de los principales errores y pasos poco convenientes que se encontraron en ellas:

1) Errores en la expresión integral inicial.

Ejemplo:

Un estudiante escribió lo siguiente en una parte del inciso 3a:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2}$$

El error está la potencia del denominador de la expresión integral, pues la ley de Biot-Savart indica que debería ser una exponenciación al cubo, no al cuadrado. Esto conduce a un resultado errado al menos en la potencia del denominador.

2) Errores de álgebra.

Ejemplo:

Un estudiante escribió lo siguiente en una parte del inciso 2a:

$$\cos \theta \operatorname{sen} \theta \cos \theta d\theta \hat{z} = \cos^2 \theta d\theta \hat{z}$$

Lo anterior es un error de álgebra, ya que el $\operatorname{sen} \theta$ desaparece de una igualdad a otra. La operación correcta es: $\cos \theta \operatorname{sen} \theta \cos \theta d\theta \hat{z} = \operatorname{sen} \theta \cos^2 \theta d\theta \hat{z}$. El error en cuestión puede producir un cambio significativo en el resultado final del inciso del problema referido.

3) Uso innecesario de parámetros.

Ejemplo:

Un estudiante escribió lo siguiente en una parte del inciso 1b:

$$\vec{E}(\vec{r} = (0, 0, 0)) = -\frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0 R} \int_{\phi_0}^{\frac{4\pi}{3}} \left(\frac{\operatorname{sen} 2\phi}{2} \hat{x} + \frac{1 - \cos 2\phi}{2} \hat{y} \right) d\phi$$

El error consiste en comenzar la integración desde un ángulo indeterminado denotado por ϕ_0 . La respuesta correcta se obtiene tomando $\phi_0 = 0$, es decir, integrando sobre todo el arco mencionado en el inciso en cuestión. El tomarlo como un parámetro indeterminado no sólo hace más engorrosa la integral a resolver, sino que, además, no está acorde con lo que se pide.

4) Igualación de vectores a escalares.

Ejemplo:

Un estudiante escribió lo siguiente en una parte del inciso 1a:

$$\vec{E}(r) = \int \frac{R\lambda_0 \operatorname{sen} \theta R d\theta}{R^{3/2}}$$

Lo anterior, además de ser una igualación de un vector a una integral escalar, también contiene errores de concepto: por ejemplo, el hecho de escribir al campo eléctrico como una función de variable escalar. Además, el resultado de la integración indicada no es el módulo de la expresión correcta.

5) Uso de ley de Gauss en situaciones que no poseen la suficiente simetría.

Ejemplo:

Un estudiante escribió lo siguiente en una parte del inciso 2a:

$$\int_A E dA \cos \phi = E \int_A dA ,$$

La ley de Gauss es útil cuando hay una gran simetría en el problema tratado. Específicamente, cuando se puede tomar una superficie Gaussiana en la cual el campo eléctrico posee el mismo módulo y, punto a punto, abre el mismo ángulo con el vector diferencial de área de la superficie.

En este caso, A es la superficie de una esfera Gaussiana que es concéntrica con el cascarón tratado en el problema y E es el módulo del campo eléctrico en su superficie. Las igualdades escritas por el estudiante implican que consideró las simetrías para el campo eléctrico antes mencionadas. Esto sería cierto si el cascarón esférico estuviera cargado de manera uniforme. Pero no lo está. Por lo tanto, considerar que el problema cumple las suficientes simetrías para aplicar la ley de Gauss es un error.

6) Uso innecesario de desarrollos multipolares magnéticos.

Ejemplo:

Un estudiante escribió lo siguiente en una parte del inciso 5b:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(\int_{c'} \frac{d\vec{r}'}{r} + \int_{c'} \frac{(\vec{r}' \bullet \vec{r}') d\vec{r}'}{r^3} + \dots \right)$$

En este caso, \vec{A} es el campo de potencial magnético de la distribución de corrientes considerada. Este es el inicio del desarrollo multipolar magnético. Sin embargo, no es necesario abordar al problema en cuestión desde este particular enfoque. Cabe señalar que ninguno de los estudiantes que optaron por este procedimiento obtuvieron la respuesta correcta al problema.

En las respuestas de dos estudiantes se detectaron varias deficiencias severas que los condujeron a los errores que se enlistan a continuación:

Uno de ellos cometió los siguientes errores:

1) Cálculó el campo eléctrico que produce una distribución electrostática en un sólo punto vía el negativo del gradiente de su función de potencial eléctrico evaluada en el punto en cuestión.

Ejemplo:

Escribió lo siguiente en una parte del inciso 1b:

$$E = -\nabla V(0) = 0$$

Independientemente del error que supone el hecho de escribir al campo eléctrico como una cantidad escalar constante y al potencial eléctrico (V) como una función de variable escalar, la idea detrás de las igualdades anteriores es un error serio, ya que, para hacer el cálculo de esta manera, es necesario, primeramente, darle su correcto carácter a las cantidades involucradas y, luego, conocer cómo es la función de potencial eléctrico en una vecindad alrededor del punto en cuestión. En otras palabras, para calcular el campo eléctrico de esta manera es necesario tener al potencial eléctrico como función, no como un número real constante (tal y como le es V evaluado en un punto), pues, de lo contrario, al aplicarle el operador nabla siempre se va a obtener el vector nulo.

2) Confundió campo de inducción magnética con fuerza electromotriz inducida (FEM).

Ejemplo:

Escribió lo siguiente en una parte del inciso 3a:

$$\epsilon = -N \frac{d\phi_B}{dt} = 0 \quad \phi_B(cte) = 0 \implies \epsilon = 0$$

En la anterior, ϵ es la FEM que se genera debido a la variación temporal del flujo del campo de inducción magnética \vec{B} a través del área que encierra la circunferencia de corriente.

Independientemente de las imprecisiones de último bloque de ecuaciones, lo que se pide en el inciso del problema mencionado es calcular un campo de inducción magnética, no un efecto de este, tal y como lo es la FEM. Por lo tanto, esta confusión lleva a un resultado completamente erróneo.

3) No escribió diferenciales en algunas expresiones integrales.

Ejemplo:

Escribió lo siguiente en una parte del inciso 5b:

$$m = \int_V r \times J$$

Independientemente del error que implica escribir una integral vectorial como escalar, el hecho de no escribir diferenciales en ella implica una falta de control en las cantidades involucradas o, más aún, una incomprensión del concepto de integral.

El otro estudiante cometió los siguientes errores:

1) Agregó manualmente unidades físicas a los resultados finales de las integraciones.

Ejemplo:

Escribió lo siguiente al final del inciso 1a:

$$\vec{E} = \left(-\frac{\lambda_0\pi}{R^2}, 0\right) \frac{N}{m}$$

Los resultados de cualquier problema físico teórico, de ser correctos, ya tienen las unidades físicas correctas, pues se las proporcionan las cantidades físicas involucradas. Por lo tanto, agregárselas manualmente es un error y pone de manifiesto una falta de comprensión de las dimensiones físicas.

2) Errores graves de diferenciación.

Ejemplo:

Escribió lo siguiente en una parte del inciso 2a:

$$\vec{S} = (R \sin \theta \cos \phi, R \sin \theta \sin \phi, R \cos \theta)$$

$$d\vec{S} = (-R \cos \theta \cos \phi, -R \cos \theta \sin \phi, R \sin \theta) d\theta$$

Por las características del problema en cuestión, \vec{S} debe ser el vector posición de los puntos sobre el cascarón esférico de radio R y, por lo tanto, puede tener variaciones tanto en θ como en ϕ . Así pues, su expresión diferencial, es decir, $d\vec{S}$, debe contener variaciones tanto en θ como en ϕ , es decir, diferenciales de θ y ϕ . Además, se obtiene diferenciando cada componente de \vec{S} , que contiene a funciones tanto de θ como de ϕ . Por lo tanto, en cada una de sus componentes debe haber, cuando menos, rastros de la diferenciación de un producto de funciones tanto de θ como de ϕ . El error está en que la expresión para $d\vec{S}$ que escribió el estudiante no tiene las características antes mencionadas.

CAPÍTULO 3. EVALUACIÓN DE LAS ENCUESTAS

Capítulo 4

CONCEPTOS BÁSICOS

Enseguida se encuentra un resumen de los conceptos básicos de física y matemáticos sin los cuales no es posible resolver los problemas planteados en el capítulo 2.

4.0.1. CASOS PARTICULARES

En esta sección se enuncia de manera rápida cómo escribir casos particulares de los vectores posición:

Las expresiones para un vector posición en términos de las bases vectoriales canónicas rectangular, cilíndrica y esférica (capítulo 6), son generales; su forma particular depende de la simetría del problema tratado. Por ejemplo, si, haciendo uso de la base cilíndrica canónica, se quiere expresar al vector posición de los puntos de un objeto plano que se encuentre totalmente sobre el plano $X - Y$, entonces tal vector no tendrá componente en \hat{z} , mientras que, su componente en \hat{s} , variará en función de la forma del objeto en cuestión. Por ejemplo, el vector posición de los puntos de una circunferencia de radio R que se encuentre completamente sobre el plano $X - Y$ y centrada en el origen, está dado, simplemente, por: $\vec{r} = \hat{s}R$

4.0.2. LONGITUD DE ARCO

En esta sección se da un resumen de la relación entre un ángulo medido en radianes y su longitud de arco correspondiente:

En una circunferencia de radio R , la relación $S = R\phi$ (y, por consiguiente, $dS = Rd\phi$) se cumple siempre y cuando el ángulo ϕ esté dado en radianes, ya que, en este caso, ϕ es una medida de cuantos radios R caben en el arco S y, por lo tanto, la multiplicación $R\phi$ da como resultado el arco en cual caben los radios señalados por ϕ . Informalmente, lo anterior puede verse como si ϕ tuviera unidades de arco/radio (aunque, realmente, las dos cantidades anteriores poseen unidades de longitud) y, por lo tanto, la multiplicación $R\phi$ queda con unidades de arco y, por lo tanto, no le queda más que ser igual a un arco; específicamente, igual al arco que subtiende a ϕ . Por lo tanto, cada vez que se utilice alguna de las relaciones mencionadas en éste párrafo, automáticamente se está trabajando con ángulos medidos en radianes.

► Nota: Es necesario que se ponga de manifiesto que la relación anterior tiene como caso especial a la definición básica que se da de radián: Si $S = R$, entonces se obtiene que $\phi = 1$. Pero, por construcción, tal 1 debe ser la unidad asignada a los ángulos que son una medida de cuántos radios caben en el arco que los subtiende (denominada como radián”). Por lo tanto, la unidad mencionada corresponde a una longitud de arco igual a un radio, es decir, que un radián es el ángulo subtendido por una longitud de arco igual a un radio ■

► Nota: Por convención, en integrales sobre una circunferencia el arco se denota por l en vez de S y, por lo tanto, dS cambia por dl ■

4.0.3. INTEGRALES COMPLETAS

En esta sección se expone cómo se trabaja con una integral completa, es decir, con una diferencial exacta en su integrando:

En ocasiones se tiene que una integral posee la forma $\int df$, en donde df es la diferencial de una cierta función escalar f . En estos casos, la integral en cuestión es igual a $f + c$, en donde c es una constante. Si la integral posee límites de integración explícitos, entonces se obtiene que:

$$\int_a^b df = (f + c)|_a^b = f(b) + c - (f(a) + c) = f(b) - f(a)$$

Ejemplo: Dado que $d(\frac{\text{sen}^3 \phi}{3}) = \text{sen}^2 \phi \cos \phi d\phi$ (lo anterior puede obtenerse usando la regla de la cadena y que, para una variable, la diferencial de una función es igual a la derivada de la función en cuestión multiplicada por la diferencial de la variable). Por lo tanto:

$$\int_a^b \text{sen}^2 \phi \cos \phi d\phi = \int_a^b d(\frac{\text{sen}^3 \phi}{3}) = \frac{\text{sen}^3 \phi}{3} \Big|_a^b$$

► Nota: Evidentemente, la forma de resolver muchas de las integrales que abajo se presentan será esta (al menos en último término) ■

4.0.4. INTEGRAL DEL SENO CUADRADO DE ϕ

En esta sección se expone cómo se resuelve la integral definida del seno cuadrado de ϕ :

El resultado de la integral mencionada es muy conocido y, por lo tanto, es conveniente aprenderse su deducción más fácil y resultado:

Usando la identidad trigonométrica $\text{sen}^2 \phi = \frac{1 - \cos 2\phi}{2}$, se obtiene que:

$$\int_a^b \text{sen}^2 \phi d\phi = \int_a^b (\frac{1 - \cos 2\phi}{2}) d\phi = \int_a^b \frac{1}{2} d\phi - \int_a^b \frac{\cos 2\phi}{2} d\phi = (\phi - \frac{\text{sen} 2\phi}{4}) \Big|_a^b$$

4.0.5. ELEMENTOS DIFERENCIALES VECTORIALES

En esta sección se exponen las diferenciales de área y longitud vectoriales:

Dada una diferencial de área dA descrita por los vectores de módulo diferencial $d\vec{r}_1$ y $d\vec{r}_2$ (i.e. $dA = \|d\vec{r}_1 \times d\vec{r}_2\|$), la diferencial de área vectorial $d\vec{A}$ asociada a dA está dada por:

$$d\vec{A} = dA \hat{n} = dA \frac{d\vec{r}_1 \times d\vec{r}_2}{\|d\vec{r}_1 \times d\vec{r}_2\|} = \|d\vec{r}_1 \times d\vec{r}_2\| \frac{d\vec{r}_1 \times d\vec{r}_2}{\|d\vec{r}_1 \times d\vec{r}_2\|} = d\vec{r}_1 \times d\vec{r}_2$$

en donde $\hat{n} = \frac{d\vec{r}_1 \times d\vec{r}_2}{\|d\vec{r}_1 \times d\vec{r}_2\|}$ es un vector unitario normal (perpendicular) a dA .

Dada una recta L , una diferencial dL de ella y un vector \vec{r} paralelo ella, la diferencial de longitud vectorial $d\vec{L}$ asociada a dL está dada por:

$$d\vec{L} = dL \hat{r}$$

4.0.6. CAMPO VECTORIAL

En esta sección se expone el concepto de campo vectorial:

Se le llama así a una región R de E^3 que tiene la característica de asociarle un vector en principio distinto a cada uno de sus puntos. Si \vec{r} es un vector con su punta dentro de R , entonces al vector asociado al punto en su punta se le denota, por ejemplo, por $\vec{F}(\vec{r})$, haciendo referencia a que el vector asociado al punto mencionado depende estrictamente de las coordenadas de su vector posición. Lo anterior no es más que la regla de asociación del campo escrita de forma implícita. Por lo general a los campos vectoriales se les denota por su regla de asociación, ya sea escrita de forma implícita o explícita. Algunos de los ejemplos más básicos de campos vectoriales en la física clásica son el campo de gravedad, el campo eléctrico y el campo de inducción magnética.

4.0.7. CAMPO ELÉCTRICO (\vec{E})

En esta sección se expone el concepto de campo eléctrico:

Es un campo vectorial. Se le llama así al efecto que produce una distribución de carga en un espacio vacío, ya sea estática (quieta) o dinámica (en movimiento).

► Nota: Las expresiones escritas de ahora en adelante están dadas en el sistema internacional de unidades ■

4.0.8. LEY DE COULOMB

En esta sección se expone la ley de Coulomb:

Se puede demostrar de manera experimental que, el campo eléctrico $d\vec{E}(\vec{r}_1)$ que una carga puntual q situada en la punta del vector \vec{r} genera en la punta del vector \vec{r}_1 , está dado por:

$$d\vec{E}(\vec{r}_1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q (\vec{r}_1 - \vec{r})}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}\|^3} ,$$

en donde ϵ_0 es la permitividad eléctrica del vacío.

4.0.9. CUERPOS CARGADOS

En esta sección se expone cómo se calcula el campo eléctrico producido por cuerpo cargado no puntual a partir de la ley de Coulomb:

Si se tiene un cuerpo cargado no puntual de extensión R , éste puede verse como hecho de un gran número de cargas puntuales dq . Por lo tanto, hacien-

do uso del principio de superposición, el campo eléctrico que genera en la punta del vector \vec{r}_1 es la suma de los campos eléctricos que todas las cargas puntuales que lo componen generan en la punta del vector en cuestión. Así pues, tal campo está dado por:

$$\vec{E}(\vec{r}_1) = \int_R d\vec{E}(\vec{r}_1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_R \frac{dq (\vec{r}_1 - \vec{r})}{|\vec{r}_1 - \vec{r}|^3} ,$$

en donde \vec{r} es el vector posición de las cargas puntuales dq que componen al cuerpo.

4.0.10. CAMPO DE INDUCCIÓN MAGNÉTICA (\vec{B})

En esta sección se expone el concepto de campo de inducción magnética:

Es un campo vectorial. Se le llama así al efecto que una distribución de corrientes eléctricas produce en un espacio vacío, ya sean estáticas (su intensidad no varía con el tiempo) o dinámicas (su intensidad sí varía con el tiempo).

4.0.11. LEY DE BIOT - SAVART

En esta sección se expone la ley de Biot-Savart para corrientes filamentosas estáticas:

Se puede demostrar de manera experimental que, si se tiene un elemento de corriente filamental I colocado sobre una diferencial de longitud vectorial $d\vec{l}$, tal que su cola esté en la punta del vector \vec{r} y su punta coincida la punta del vector $\vec{r} + d\vec{l}$ (véase la figura 4.1), entonces, el campo de inducción magnética que genera en la punta del vector \vec{r}_1 , está dado por:

$$d\vec{B}(\vec{r}_1) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{l} \times (\vec{r}_1 - \vec{r})}{|\vec{r}_1 - \vec{r}|^3}$$

En lo anterior, $d\vec{l}$ es un ligero incremento vectorial de \vec{r} que apunta de la dirección en la cual circula la corriente I que pasa por él, mientras que, μ_0 , es la permeabilidad magnética del vacío.

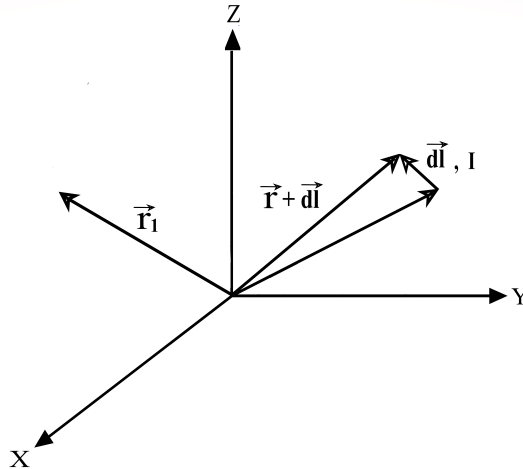


Figura 4.1: Vectores \vec{r} , \vec{r}_1 , $d\vec{l}$, $\vec{r} + d\vec{l}$ y elemento de corriente filamental I en el espacio

4.0.12. CORRIENTES FILAMENTALES

En esta sección se expone el cálculo del campo de inducción magnética producido por una corriente filamental estática a partir de la ley de Biot-Savart:

Si se tiene un hilo de corriente estática I de longitud L , ésta puede verse como compuesta por muchas porciones iguales de longitud dl y corriente I . Por lo tanto, haciendo uso del principio de superposición, el campo de inducción magnética que genera en la punta del vector \vec{r}_1 es la suma de todos los campos de inducción magnética que todas las porciones dl generan en la punta del vector en cuestión. Así pues, tal campo está dado por:

$$\vec{B}(\vec{r}_1) = \int_L d\vec{B}(\vec{r}_1) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_L \frac{d\vec{l} \times (\vec{r}_1 - \vec{r})}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}\|^3} ,$$

en donde \vec{r} es el vector que se encuentra con su punta en la cola de los $d\vec{l}$.

4.0.13. CORRIENTE ELÉCTRICA VOLUMÉTRICA

En esta sección se expone el cálculo de la corriente eléctrica volumétrica:

La corriente eléctrica volumétrica I que pasa a través de un área A está dada por:

$$I = \int_A \vec{J} \bullet d\vec{A} ,$$

en donde \vec{J} es el campo de densidad de corriente volumétrica asociado a la corriente I y $d\vec{A}$ una de las diferenciales de área vectoriales sobre el área A .

4.0.14. CORRIENTE ELÉCTRICA SUPERFICIAL

En esta sección se expone el cálculo de la corriente eléctrica superficial:

La corriente eléctrica superficial I que pasa por una curva L está dada por:

$$I = \int_L \vec{K} \bullet d\vec{l}_\perp ,$$

en donde \vec{K} es el campo de densidad de corriente superficial asociado a la corriente I y $d\vec{l}_\perp$ es una de las diferenciales de longitud vectoriales perpendiculares de la curva L .

► Nota: Este cálculo, a diferencia del anterior, no se aborda comunmente en el transcurso de una licenciatura en física ■

4.0.15. CAMPOS VECTORIALES DE CORRIENTE GENERADOS POR DENSIDADES DE CARGA EN MOVIMIENTO

En esta sección se expone el cálculo de los campos vectoriales de corriente generados por densidades de carga en movimiento:

Si una densidad de carga volumétrica ρ se mueve con una velocidad \vec{v} , entonces el campo de densidad de corriente volumétrica \vec{J} que se genera, está dado, punto por punto, por:

$$\vec{J} = \rho \vec{v}$$

Si una densidad de carga superficial σ se mueve con una velocidad \vec{v} , entonces el campo de densidad de corriente superficial \vec{K} que se genera, está dado, punto por punto, por:

$$\vec{K} = \sigma \vec{v}$$

4.0.16. DIVERGENCIA EN FORMA DIFERENCIAL

En esta sección se expone la Divergencia en forma diferencial de un campo vectorial:

Si se tiene un campo vectorial $\vec{F}(\vec{r})$ expresado en términos de unas coordenadas q_1, q_2, q_3 y una base vectorial $\hat{q}_1, \hat{q}_2, \hat{q}_3$ de E^3 , entonces la divergencia en forma diferencial del campo vectorial en cuestión está dada por:

$$\nabla \cdot \vec{F}(\vec{r}) = \nabla \cdot (F_1 \hat{q}_1 + F_2 \hat{q}_2 + F_3 \hat{q}_3)$$

$$= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left(\frac{\partial F_1 h_2 h_3}{\partial q_1} + \frac{\partial (h_1 F_2 h_3)}{\partial q_2} + \frac{\partial (h_1 h_2 F_3)}{\partial q_3} \right) ,$$

en donde F_i es la componente de $\vec{F}(\vec{r})$ en \hat{q}_i y h_1, h_2, h_3 son los “factores de escala” de las coordenadas utilizadas, cuyas expresiones explícitas varían dependiendo de cuales sean las coordenadas en cuestión. Por ejemplo, si todas las coordenadas utilizadas son longitudes (tal como sucede en el caso rectangular), entonces $h_1 = h_2 = h_3 = 1$.

► Nota: También existe una expresión integral para la divergencia de un campo vectorial. ■

4.0.17. DIELECTRICOS POLARIZADOS

En esta sección se expone el concepto del campo vectorial de polarización de un dieléctrico polarizado:

Bajo ciertas condiciones, un dieléctrico polarizado puede verse como compuesto por un gran número de dipolos eléctricos muy pequeños (puntuales), cada uno con su propio momento dipolar eléctrico. Tal dieléctrico se trata como si estuviera dotado de un campo vectorial que sólo es no nulo en su volumen y superficie, llamado ‘‘campo vectorial de polarización (\vec{P})’’. En uno de sus puntos, el módulo de su campo vectorial de polarización es igual al del momento dipolar neto por unidad de volumen que posee una región infinitamente pequeña alrededor de dicho punto. Dado lo anterior, es de esperarse que, punto a punto, la dirección del campo de polarización sea la misma que la del momento dipolar eléctrico del dipolo que se encuentra en el punto en cuestión.

► Nota: Con excepción de esta cantidad física, todas las mencionadas en este capítulo deberían ser conocidas para alumnos que estén aproximadamente en el punto medio de la licenciatura en física y, por eso, no se hizo mención de sus unidades. Ya que el campo en cuestión se trata en la segunda mitad de la licenciatura mencionada, es necesario, cuando menos, dar sus

unidades para que así sea posible el desarrollo de algunos puntos de los siguientes capítulos. Las unidades en cuestión son, tal y como su definición lo sugiere, de momento dipolar eléctrico por unidad de volumen, es decir, son: $\frac{Cm}{m^3} = \frac{C}{m^2}$ ■

4.0.18. DENSIDAD VOLUMÉTRICA DE CARGA LIGADA (ρ_b)

En esta sección se expone el cálculo de la densidad volumétrica de carga ligada:

Se le llama así a la densidad de carga volumétrica que es generada en un dieléctrico polarizado como efecto de su misma polarización. Está definida, punto a punto, como:

$$\rho_b = -\nabla \cdot \vec{P} ,$$

en donde \vec{P} es el campo vectorial de polarización del dieléctrico polarizado en cuestión.

4.0.19. DENSIDAD SUPERFICIAL DE CARGA LIGADA (σ_b)

En esta sección se expone el cálculo de la densidad superficial de carga ligada:

Se le llama así a la densidad de carga superficial que es generada en un dieléctrico polarizado como efecto de su misma polarización. Está definida, punto a punto, como:

$$\sigma_b = \vec{P} \cdot \hat{n} ,$$

en donde \vec{P} es el campo vectorial de polarización del dieléctrico polarizado en cuestión y \hat{n} es un vector unitario y normal a la superficie del dieléctrico.

► Nota: El subíndice que poseen ρ_b y σ_b hace referencia a la palabra en inglés “bound“, que, en español, se traduce como “ligado(a)“. Esto hace referencia a que las densidades de carga mencionadas no son fáciles de alterar significativamente y/o remover por medio de interacción electromagnética. ■

4.0.20. MOMENTO DIPOLAR MAGNÉTICO (\vec{m})

En esta sección se expone el cálculo del momento dipolar magnético generado por un campo de densidad de corriente volumétrica.

Si dentro de un volumen V se tiene un campo de densidad de corriente volumétrica \vec{J} , entonces el momento dipolar magnético que éste genera, está dado por:

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int_V \vec{r} \times \vec{J} dV ,$$

en donde \vec{r} es el vector posición de los puntos dentro de V , que, a su vez, tienen un vector \vec{J} asociado.

► Nota: De todos los cálculos expuestos en esta parte del capítulo, éste es el más complicado de realizar, pues involucra a una integral de volumen, es decir, a una integral en donde están involucradas tres variables ■

Capítulo 5

SOLUCIÓN EXPERTA

A continuación se presenta la solución experta a los problemas. En ellas se usan la mayoría de los conceptos expuestos los capítulos 4 y 6 y se siguen rigurosamente los puntos expuestos en el método de evaluación.

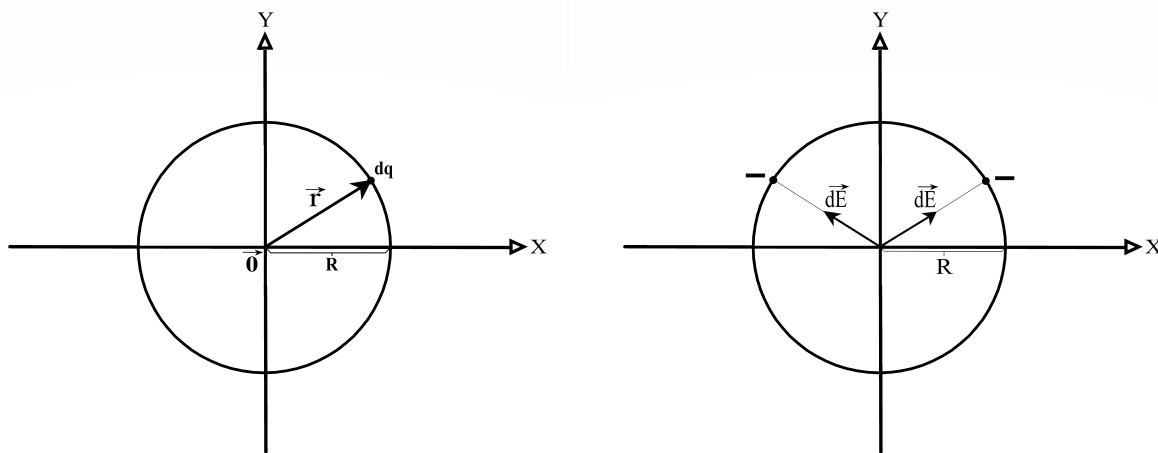
5.0.1. SOLUCIÓN AL PROBLEMA 1

Descripción breve: Este problema involucra a una circunferencia de radio R , dotada con una densidad de carga lineal dada por $\lambda_0 \sin \phi$.

Inciso 1a

Punto 1:

Por simplicidad, se considera que la circunferencia de carga tiene su centro en el origen de E^3 y está sobre el plano $X - Y$. Por lo anterior, lo más conveniente es usar las coordenadas cilíndricas junto con su base vectorial canónica para describir a todas las cantidades físicas involucradas.



(a) Un elemento dq perteneciente a la circunferencia (b) Cancelación por pares de las componentes x de los campos $d\vec{E}$

Figura 5.1

Punto 2:

Dado el signo de λ_0 y los valores de la función seno, se concluye que la densidad de carga λ es negativa en el arco definido por los valores de ϕ que se encuentran entre 0 y π (primera mitad de la circunferencia), mientras que es positiva en el definido por los valores que se encuentran entre π y 2π (segunda mitad de la circunferencia). Además, por su expresión, la densidad de carga posee el mismo valor en puntos de la circunferencia que sean simétricos con respecto al eje Y . Todo lo anterior permite concluir que, en la primera mitad de la circunferencia, las contribuciones al campo solicitado que sean paralelas al eje X se van a cancelar por pares, dejando así componentes que apuntan en la dirección Y (véase la figura 5.1b). Un razonamiento análogo puede hacerse para la segunda mitad de la circunferencia. Por lo tanto, la propuesta de la solución es que el campo eléctrico resultante debe apuntar en dirección Y .

Punto 3:

CAPÍTULO 5. SOLUCIÓN EXPERTA

La circunferencia cargada puede verse como compuesta por una infinidad de segmentos diferenciales dl que, al menos para este problema, pueden verse como algo muy similar a un punto con carga dq . De acuerdo con la figura 5.1a y lo escrito en el capítulo 4 cuando se trató la ley de Coulomb, el campo eléctrico que genera en el origen uno de los elementos dq mencionados está dado por:

$$d\vec{E}(\vec{r}_1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq (\vec{r}_1 - \vec{r})}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}\|^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq (\vec{0} - R \hat{s})}{\|\vec{0} - R \hat{s}\|^3} = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq R \hat{s}}{R^3} = - k \frac{dq \hat{s}}{R^2} ,$$

en donde $\vec{r}_1 = \vec{0}$ es el vector posición del origen de coordenadas, $\vec{r} = R\hat{s}$ es el vector posición de los elementos dl con carga dq (véase la figura 5.1a) y, por simplicidad, se recordó que $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ es igual a k , siendo esta última expresión la constante de Coulomb.

Punto 4:

De acuerdo con lo escrito en el capítulo 4 cuando se trató el cálculo del campo eléctrico producido por un cuerpo cargado no puntual a partir de la ley de Coulomb, el campo eléctrico que la circunferencia genera en el origen está dado por:

$$\vec{E}(\vec{0}) = \int_C d\vec{E}(\vec{0}) = - k \int_C \frac{dq \hat{s}}{R^2} ,$$

en donde se está integrando sobre la circunferencia de radio R centrada en el origen, que se denotó por la letra C .

Una circunferencia cerrada de cualquier radio queda parametrizada por ϕ yendo de 0 a 2π (enseguida se usará una de las expresiones vistas en la subsección 4.1.2 y, por lo tanto, es necesario que de una vez se empiece a trabajar con ángulos medidos en radianes). Por lo tanto, el campo pedido está dado por:

$$\vec{E}(\vec{0}) = - k \int_0^{2\pi} \frac{dq \hat{s}}{R^2} = - \frac{k}{R^2} \int_0^{2\pi} \lambda dl \hat{s}$$

En la última igualdad se usó que $dq = \lambda dl$, cosa que puede corroborarse por las unidades de cada expresión: $[dq] = C = \frac{C}{m}m = [\lambda dl]$. Por lo tanto:

$$\vec{E}(\vec{0}) = -\frac{k}{R^2}\lambda_0 \int_0^{2\pi} \text{sen } \phi R d\phi \hat{s}$$

En la última igualdad se escribió la expresión explícita para la densidad de carga y se usó la primera expresión vista para la diferencial de longitud en coordenadas cilíndricas para sustituir dl por $Rd\phi$, en donde es conveniente que se recuerde que R es el radio de la circunferencia en cuestión. Por lo tanto:

$$\vec{E}(\vec{0}) = -\frac{k}{R}\lambda_0 \int_0^{2\pi} \text{sen } \phi \hat{s} d\phi = -\frac{k}{R}\lambda_0 \int_0^{2\pi} \text{sen } \phi (\cos \phi \hat{x} + \text{sen } \phi \hat{y}) d\phi$$

En la última igualdad se usó la expresión 6.2 para escribir a \hat{s} como una combinación lineal de la base rectangular canónica. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{0}) &= -\frac{k}{R}\lambda_0 (\hat{x} \int_0^{2\pi} \text{sen } \phi \cos \phi d\phi + \hat{y} \int_0^{2\pi} \text{sen}^2 \phi d\phi) \\ &= -\frac{k}{R}\lambda_0 (\hat{x} \frac{\text{sen}^2 \phi}{2} \Big|_0^{2\pi} + \hat{y} (\frac{1}{2}\phi - \frac{\text{sen} 2\phi}{4}) \Big|_0^{2\pi}) \end{aligned}$$

En la última igualdad se usó que $\int_0^{2\pi} \text{sen } \phi \cos \phi d\phi$ posee un integrando igual a una diferencial exacta, mientras que, para obtener $\int_0^{2\pi} \text{sen}^2 \phi d\phi$, se usó la conocida fórmula: $\text{sen}^2 \phi = \frac{1 - \cos 2\phi}{2}$. Luego:

$$\vec{E}(\vec{0}) = -\frac{k}{R}\lambda_0 (0 \hat{x} + (\pi - 0) \hat{y}) = -\frac{k\lambda_0\pi}{R} \hat{y}$$

Por lo tanto, el campo eléctrico que la circunferencia genera en el origen está dado por:

$$\vec{E}(\vec{0}) = -\frac{k\lambda_0\pi}{R} \hat{y}$$

CAPÍTULO 5. SOLUCIÓN EXPERTA

Punto 5:

Las unidades del resultado del punto anterior, son: $\left[\frac{k\lambda_0}{R}\right] = \frac{Nm^2}{C^2} \frac{C}{m} \frac{1}{m} = \frac{N}{C}$, que son unidades de campo eléctrico. Así que se cumple la equivalencia de la ecuación anterior.

Punto 6:

El resultado del punto 4 y del punto 2 son consistentes, pues en ambos se pone de manifiesto que el campo eléctrico pedido apunta en dirección Y .

Inciso 1b

Punto 1:

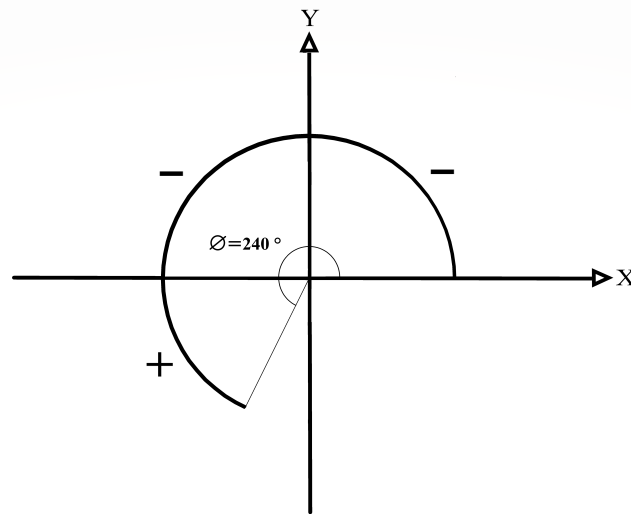


Figura 5.2: Arco de carga descrito en el inciso 1b

Punto 2:

En este caso, por el hecho de que la circunferencia ya no está completa, por la orientación de la misma y por las coordenadas usadas, no es posible cancelar por pares las contribuciones sobre el eje X al campo pedido proporcionadas por la densidad de carga en el tercer cuadrante (véase la figura 5.2). Entonces, por el signo de la densidad de carga en el cuadrante en cuestión, es de esperarse que el campo total se desvíe del eje Y para quedar sobre el primer cuadrante.

Punto 3:

Dado que las propiedades físicas y coordenadas manejadas en este inciso son las mismas que en el 1a, la expresión diferencial para el campo pedido es la misma.

Punto 4:

Por las mismas razones que en el punto anterior, la integral a resolver es la misma que en el inciso 1a, salvo los límites de integración. Por lo tanto, se puede comenzar desde la expresión con las antiderivadas, pero con los límites de evaluación cambiados apropiadamente (240 grados equivalen a $\frac{4\pi}{3}$ radianes):

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{0}) &= -\frac{k}{R}\lambda_0(\hat{x}\left.\frac{\text{sen}^2\phi}{2}\right|_0^{\frac{4\pi}{3}} + \hat{y}\left(\frac{1}{2}\phi - \frac{\text{sen}2\phi}{4}\right)\Big|_0^{\frac{4\pi}{3}}) \\ &= -\frac{k}{R}\lambda_0\left(\hat{x}\frac{\text{sen}^2\frac{4\pi}{3}}{2} + \hat{y}\left(\frac{4\pi}{6} - \frac{\text{sen}\frac{8\pi}{3}}{4}\right)\right) = -\frac{k}{R}\lambda_0\left(\frac{3}{8}\hat{x} + \left(\frac{4\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}\right)\hat{y}\right)\end{aligned}$$

Por lo tanto, el campo eléctrico que que el pedazo de circunferencia genera en el origen está dado por:

$$\vec{E}(\vec{0}) = -\frac{k}{R}\lambda_0\left(\frac{3}{8}\hat{x} + \left(\frac{4\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}\right)\hat{y}\right)$$

Punto 5:

CAPÍTULO 5. SOLUCIÓN EXPERTA

Las unidades del resultado del punto anterior son las mismas que en el inciso 1a, pues están dadas por $\frac{k\lambda_0}{R}$. Por lo tanto, de nuevo se obtuvieron unidades de campo eléctrico.

Punto 6:

El resultado del punto 4 y el punto 2 son consistentes, pues en ambos se pone de manifiesto que el campo eléctrico pedido está sobre el primer cuadrante.

5.0.2. SOLUCIÓN AL PROBLEMA 2

Descripción breve: Este problema involucra un cascarón esférico de radio R , dotado con una densidad de carga superficial dada por $\sigma_0 \cos \phi$.

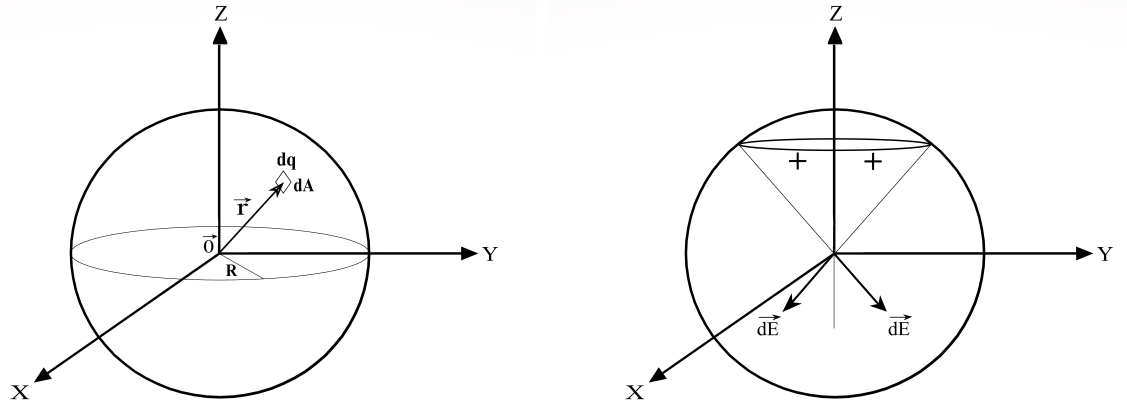
Inciso 2a

Punto 1:

Por simplicidad se considera que el cascarón esférico está centrado en el origen de coordenadas de E^3 . Por lo anterior, lo más conveniente es usar a las coordenadas esféricas junto con su base vectorial canónica para describir a todas las cantidades físicas involucradas.

Punto 2:

De manera análoga al problema 1, en este caso la expresión para la densidad de carga σ hace que la mitad del cascarón que engloba valores positivos de la coordenada z posea carga positiva y que la que engloba valores negativos posea carga negativa. También, permite hacer una cancelación por pares de componentes, pero, en este caso, se hace sobre el plano $X - Y$, y los campos involucrados son generados por diferenciales de carga situadas en puntos diametralmente opuestos de circunferencias sobre el cascarón esférico y paralelas al plano $X - Y$ (véase la figura 5.3b). Todo lo anterior permite suponer que el campo resultante apunta en dirección $-Z$.



(a) Un elemento dA perteneciente al cascarón (b) Cancelación por pares de las componentes sobre el plano X - Y de los campos $d\vec{E}$

Figura 5.3

Punto 3:

El cascarón cargado puede visualizarse como compuesto por una infinidad de diferenciales de área dA que, al menos para este problema, pueden verse como algo muy similar a un punto con carga dq . De acuerdo con la figura 5.3a y lo escrito en el capítulo 4 cuando se trató la ley de Coulomb, el campo eléctrico que genera en el origen uno de los elementos mencionados está dado por:

$$d\vec{E}(\vec{r}_1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq (\vec{r}_1 - \vec{r})}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}\|^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq (\vec{0} - R \hat{r})}{\|\vec{0} - R \hat{r}\|^3} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq R \hat{r}}{R^3} = -k \frac{dq \hat{r}}{R^2},$$

en donde $\vec{r}_1 = \vec{0}$ es el vector posición del origen de coordenadas, $\vec{r} = R\hat{r}$ es el vector posición de los elementos dA con carga dq (véase la figura 5.3a) y, por simplicidad, se recordó que $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ es igual a k , siendo esta última expresión la constante de Coulomb.

Punto 4:

De acuerdo con lo escrito en el capítulo 4 cuando se trató el cálculo del campo eléctrico producido por un cuerpo cargado no puntual a partir de la ley de Coulomb, el campo eléctrico que el cascarón esférico genera en el origen está dado por:

$$\vec{E}(\vec{0}) = \int_A d\vec{E}(\vec{0}) = -\frac{k}{R^2} \int_A dq \hat{r} = -\frac{k}{R^2} \int_A \sigma dA \hat{r}$$

En la última igualdad se usó que $dq = \sigma dA$, cosa que puede ‘‘corroborarse’’ de manera análoga a lo hecho en el inciso 1a. Luego:

$$\vec{E}(\vec{0}) = -\frac{k\sigma_0}{R^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \cos \theta R^2 \sin \theta d\theta d\phi \hat{r}$$

En la última igualdad se escribió de manera explícita la expresión para la densidad de carga σ , se usó que un cascarón esférico completo y de cualquier radio queda parametrizado por θ yendo de 0 a π y ϕ yendo de 0 a 2π y, por último, se escribió la expresión para la diferencial de área en coordenadas esféricas de un cascarón esférico de radio R , tema que se trata en la presentación de las coordenadas esféricas (capítulo 6, sección 6.3). Luego:

$$\vec{E}(\vec{0}) = -k\sigma_0 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \cos \theta \sin \theta (\sin \theta \cos \phi \hat{x} + \sin \theta \sin \phi \hat{y} + \cos \theta \hat{z}) d\theta$$

En la última igualdad se usó la expresión 6.7 para escribir a \hat{r} como una combinación lineal de la base rectangular canónica. Luego:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{0}) &= -k\sigma_0 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi (\sin^2 \theta \cos \theta \cos \phi \hat{x} + \sin^2 \theta \cos \theta \sin \phi \hat{y} + \cos^2 \theta \sin \theta \hat{z}) d\theta \\ &= -k\sigma_0 (\hat{x} \int_0^{2\pi} \cos \phi d\phi \int_0^\pi \sin^2 \theta \cos \theta d\theta + \hat{y} \int_0^{2\pi} \sin \phi d\phi \int_0^\pi \sin^2 \theta \cos \theta d\theta \\ &\quad + \hat{z} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta) = -k\sigma_0 \hat{z} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \end{aligned}$$

En la última igualdad se usó que la integral de una función armónica sobre todo su periodo es nula ($\int_0^{2\pi} \sin \phi \, d\phi = \int_0^{2\pi} \cos \phi \, d\phi = 0$). Luego:

$$\vec{E}(\vec{0}) = k\sigma_0 \hat{z} \phi \Big|_0^{2\pi} \frac{\cos^3 \theta}{3} \Big|_0^\pi = \frac{2}{3}\sigma_0 \pi k (\cos^3 \pi - \cos^3 0) \hat{z} = -\frac{4}{3}\sigma_0 \pi k \hat{z}$$

En la primera igualdad (de izq. a der.) se usó que las integrales que multiplican a \hat{z} poseen integrandos iguales a diferenciales exactas.

Por lo tanto, el campo eléctrico que el cascarón esférico genera en el origen de coordenadas está dado por:

$$\vec{E}(\vec{0}) = -\frac{4}{3}\sigma_0 \pi k \hat{z}$$

Punto 5:

Las unidades del resultado del punto anterior, son: $[\sigma_0 k] = \frac{C}{m^2} \frac{Nm^2}{C^2} = \frac{N}{C}$, que son unidades de campo eléctrico. Así que se cumple la equivalencia de la ecuación anterior.

Punto 6:

El resultado del punto 4 y el punto 2 son consistentes, pues en ambos se pone de manifiesto que el campo eléctrico pedido apunta en dirección $-Z$.

Inciso 2b

Punto 1:

Lo más conveniente es partir de polo a polo al cascarón esférico en ocho gajos de igual área y calcular el campo eléctrico que produce en el origen uno de los gajos. Haciendo esto, el campo pedido se puede calcular con la integral hecha en el inciso 2a, pero modificando el límite para ϕ (el límite para θ permanece inalterado, pues todos los gajos quedan definidos por los mismos

valores del ángulo polar que el cascarón esférico completo). Es importante poner de manifiesto que cada gajo subtiene un ángulo ϕ que, medido con un transportador, es de $\frac{\pi}{4}$.

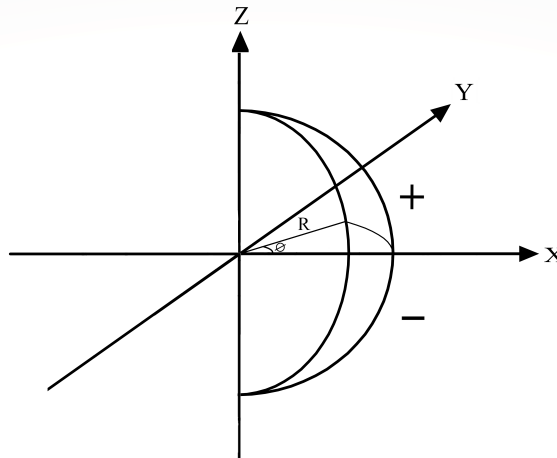


Figura 5.4: Uno de los gajos mencionados en el punto 1

Punto 2:

Por la expresión para la densidad de carga σ , una mitad de cada gajo posee carga positiva y, la otra mitad, posee carga negativa. Lo anterior, sumado a que el origen se encuentra a la altura del centro geométrico de cada gajo, hace que sea de esperarse que, cuando menos, el campo eléctrico total en el punto en cuestión apunte en una dirección similar a la de $-Z$ (véase figura 5.4).

Punto 3:

Dado que las propiedades físicas y coordenadas manejadas en este inciso son las mismas que en el 2a, la expresión diferencial para el campo pedido es la

misma.

Punto 4:

Por conveniencia, se tomará el gajo definido por ϕ yendo de 0 hasta $\frac{\pi}{4}$, pues tal cosa facilitará la integración. Por lo tanto, el campo en el origen de coordenadas, es:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{0}) &= -k\sigma_0(\hat{x} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos \phi \, d\phi \int_0^\pi \sin^2 \theta \cos \theta \, d\theta + \hat{y} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \phi \, d\phi \int_0^\pi \sin^2 \theta \cos \theta \, d\theta \\ &\quad + \hat{z} \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\phi \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta \, d\theta) = k\sigma_0 \hat{z} \left[\frac{\cos^3 \theta}{3} \right]_0^\pi \end{aligned}$$

En la última igualdad se usó a que $\int_0^\pi \sin^2 \theta \cos \theta \, d\theta = \left. \frac{\sin^3 \theta}{3} \right|_0^\pi = 0$ y que las dos integrales que multiplican a \hat{z} poseen integrandos iguales a diferenciales exactas. Luego:

$$\vec{E}(\vec{0}) = \frac{1}{12} \sigma_0 \pi k (\cos^3 \pi - \cos^3 0) \hat{z} = -\frac{1}{6} \sigma_0 \pi k \hat{z}$$

Por lo tanto, el gajo en cuestión genera un campo eléctrico en el origen que está dado por:

$$\vec{E}(\vec{0}) = -\frac{1}{6} \sigma_0 \pi k \hat{z}$$

Es importante poner de manifiesto que el módulo del campo calculado en este inciso es un octavo del módulo del campo calculado en el inciso 2a. Tal cosa tiene sentido siempre y se acepte que cada uno de los gajos aporta un octavo del módulo del campo generado por el cascarón esférico completo.

Punto 5:

Las unidades del resultado del punto anterior son las mismas que en el inciso 2a, pues están dadas por $\sigma_0 k$. Por lo tanto, de nuevo se obtuvieron unidades de campo eléctrico.

Punto 6:

El resultado del punto 4 y el punto 2 son mínimamente consistentes, pues en ambos se pone de manifiesto que el campo pedido tiene su punta en algún lugar del 5to, 6to, 7mo y 8vo octante.

► Nota: El procedimiento seguido en este inciso es más conveniente que el relatado en el capítulo 4 cuando se trataron los resultados de las encuestas, pues en éste sólo hay que cambiar un límite de integración de la integral del inciso 2a, mientras que, siguiendo el otro, se tienen que cambiar los dos límites de integración (tal cambio sería θ yendo desde 0 hasta $\frac{\pi}{2}$ y ϕ yendo desde 0 hasta $\frac{\pi}{2}$). Esto sólo aumenta la probabilidad de cometer errores ■

5.0.3. SOLUCIÓN AL PROBLEMA 3

Descripción breve: Este problema involucra a una circunferencia de radio R y corriente I constante.

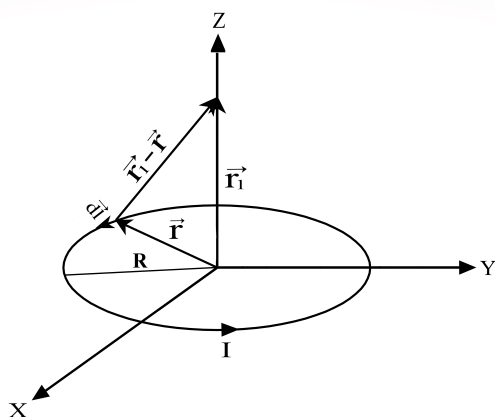
Inciso 3a

Punto 1:

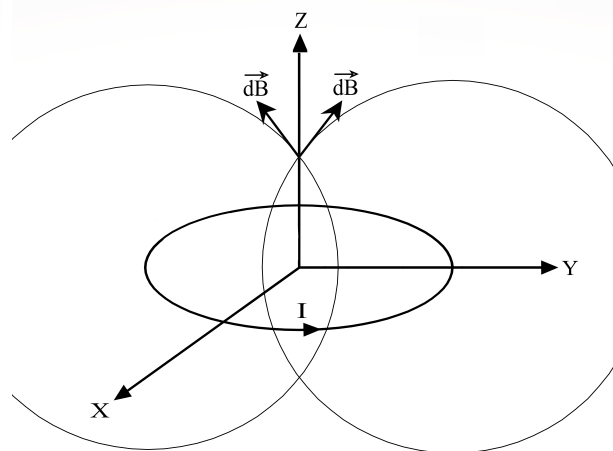
Por simplicidad, se considera que la corriente filamental tiene su centro en el origen de E^3 , que está sobre el plano $X - Y$ y que va en sentido contrario a las manecillas del reloj (vista desde alguna coordenada positiva del eje Z). Por lo anterior, lo más conveniente es usar las coordenadas cilíndricas junto con su base vectorial canónica para describir a todas las cantidades físicas involucradas.

Punto 2:

Dada la posición y dirección propuesta para la corriente y el hecho de que el campo de inducción magnética generado por una corriente se enrosca alrededor de ella siguiendo la regla de la mano derecha aplicada a la dirección de



(a) Elemento $d\vec{l}$ de la circunferencia



(b) Cancelación por pares de las componentes sobre el plano X - Y de los campos $d\vec{B}$

Figura 5.5

la misma, es de esperarse que, sobre el eje Z , elementos de la circunferencia de corriente que sean diametralmente opuestos generen campos de inducción magnética tales que, al sumarse, cancelen sus componentes sobre el plano X - Y , dejando tal suma sobre el eje Z y apuntando en su dirección positiva (véase la figura 5.5b).

Punto 3:

La circunferencia de corriente puede verse como compuesta por una serie de segmentos diferenciales dl , con corriente I y con un vector diferencial $d\vec{l}$ asociado. De acuerdo con la figura 5.5a y lo escrito en el capítulo 4 cuando se trató la ley de Biot-Savart para corrientes filamentosas estáticas, el campo de inducción magnética que genera sobre el eje Z cada uno de los elementos mencionados está dado por:

$$d\vec{B}(\vec{r}_1) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{l} \times (\vec{r}_1 - \vec{r})}{|\vec{r}_1 - \vec{r}|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{R d\phi \hat{\phi} \times (z \hat{z} - R \hat{s})}{\|z \hat{z} - R \hat{s}\|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{Rz \hat{s} d\phi + R^2 \hat{z} d\phi}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}},$$

CAPÍTULO 5. SOLUCIÓN EXPERTA

en donde $\vec{r}_1 = \vec{z} = z\hat{z}$ es el vector posición de los puntos del eje Z , $\vec{r} = R\hat{s}$ es el vector posición de las colas de los vectores $d\vec{l}$ (véase la figura 5.5a) y, además, se usan las expresiones de la presentación de las coordenadas cilíndricas (capítulo 6, sección 6.2) y en el capítulo 4 para reescribir a $d\vec{l}$ y hacer los productos cruz indicados.

Punto 4:

Llamando C a la corriente en cuestión y recordando lo escrito en el capítulo 4 cuando se trató el cálculo del campo de inducción magnética producido por una corriente filamental cualquiera a partir de la ley de Biot-Savart para corrientes filamentales, el campo de inducción magnética que el anillo de corriente produce en el eje Z está dado por:

$$\begin{aligned}\vec{B}(\vec{z}) &= \oint_C d\vec{B}(\vec{z}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint_C \frac{Rz \hat{s} d\phi + R^2 \hat{z} d\phi}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_0^{2\pi} \frac{Rz \hat{s} d\phi + R^2 \hat{z} d\phi}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} I \left(\frac{1}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} (Rz \int_0^{2\pi} \hat{s} d\phi + R^2 \hat{z} \int_0^{2\pi} d\phi) \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{1}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} R^2 \hat{z} \int_0^{2\pi} d\phi\end{aligned}$$

En la última igualdad se usó la expresión 6.2 para escribir a \hat{s} como una combinación lineal de la base rectangular canónica, y así convertir $\int_0^{2\pi} \hat{s} d\phi$ en $\int_0^{2\pi} (\cos \phi \hat{x} + \sin \phi \hat{y}) d\phi$. Esto es igual a cero, pues se están integrando funciones armónicas en todo su periodo. Luego:

$$\vec{B}(\vec{z}) = \frac{2\pi\mu_0}{4\pi} I \frac{1}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} R^2 \hat{z} = \frac{\mu_0}{2} I \frac{R^2}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{z}$$

Por lo tanto, el campo de inducción magnética que la corriente circular genera sobre el eje Z está dado por:

$$\vec{B}(\vec{z}) = \frac{\mu_0}{2} I \frac{R^2}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{z}$$

Punto 5:

Las unidades del resultado anterior, son: $\left[\mu_0 I R^2 \frac{1}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \right] = \frac{Tm}{A} Am^2 \frac{1}{(m^2)^{\frac{3}{2}}} = T$, que son unidades de campo de inducción magnética. Así que se cumple la equivalencia de la ecuación anterior.

Punto 6:

El resultado del punto 4 y el punto 2 son consistentes, pues en ambos se pone de manifiesto que el campo pedido está sobre el eje Z y en su dirección postivia.

Inciso 3b

Punto 1:

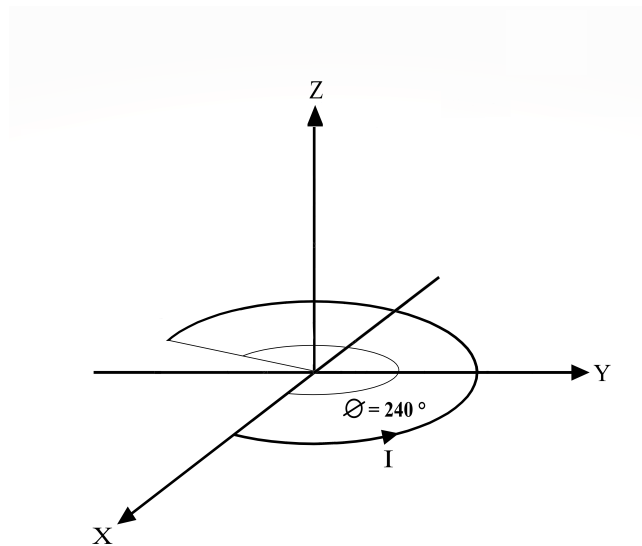


Figura 5.6: Arco de corriente descrito en el inciso 3b

Punto 2:

En este caso, por el hecho de que la circunferencia de corriente ya no está completa, por la orientación de la misma y por las coordenadas usadas, ya no es posible cancelar por pares todas las contribuciones sobre el plano $X - Y$ al campo pedido. Tales contribuciones son las producidas por el segmento de corriente diametralmente simétrico al faltante (véase la figura 5.6). Por lo tanto, dada la dirección de la corriente en el segmento en cuestión, es de esperarse que el campo neto sobre el eje Z se desvíe de él, apuntando ligeramente en la dirección del segmento antes mencionado.

Punto 3:

Dado que las propiedades físicas y coordenadas manejadas en este inciso son las mismas que en el 3a, la expresión diferencial para el campo pedido es la misma.

Punto 4:

Por las mismas razones que en el punto anterior, la integral a resolver es la misma que en el inciso 3a, salvo los límites de integración. Por lo tanto, se puede comenzar desde la expresión alcanzada en la tercera igualdad del punto 4 del inciso 3a, pero con los límites de integración cambiados apropiadamente (240 grados equivalen a $\frac{4\pi}{3}$ radianes):

$$\begin{aligned}
 \vec{B}(\vec{z}) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} I \left(\frac{1}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} (Rz \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \hat{s} d\phi + R^2 \hat{z} \int_0^{\frac{4\pi}{3}} d\phi) \right) \\
 &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} I \left(\frac{1}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} (Rz \int_0^{\frac{4\pi}{3}} (\cos \phi \hat{x} + \sin \phi \hat{y}) d\phi + R^2 \hat{z} \int_0^{\frac{4\pi}{3}} d\phi) \right) \\
 &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} (Rz (\hat{x} \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \cos \phi d\phi + \hat{y} \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \sin \phi d\phi) + R^2 \frac{4\pi}{3} \hat{z}) \\
 &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} (Rz (\hat{x} \sin \phi \Big|_0^{\frac{4\pi}{3}} + \hat{y} \cos \phi \Big|_0^{\frac{4\pi}{3}}) + R^2 \frac{4\pi}{3} \hat{z})
 \end{aligned}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} (Rz \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \hat{x} + \frac{3}{2} \hat{y} \right) + R^2 \frac{4\pi}{3} \hat{z})$$

En este caso, la integral sobre \hat{s} ya no es nula, pues los límites de integración ya no abarcan todo el periodo de las funciones armónicas que aparecen en su expresión como combinación lineal de la base rectangular.

Por lo tanto, el arco de corriente en cuestión genera un campo de inducción magnética en el origen que está dado por:

$$\vec{B}(\vec{z}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} (Rz \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \hat{x} + \frac{3}{2} \hat{y} \right) + R^2 \frac{4\pi}{3} \hat{z})$$

Punto 5:

Las unidades del resultado del punto anterior son las mismas que en el inciso 3a, pues se tiene a las mismas unidades en numerador y denominador.

Punto 6:

Los resultados del punto 4 y el punto 2 son moderadamente consistentes, pues en ambos se pone de manifiesto que el campo neto sobre el eje Z se desvía de tal eje y quedó apuntando ligeramente en la dirección del segmento mencionado en el punto 2 del inciso 3b.

5.0.4. SOLUCIÓN AL PROBLEMA 4

Descripción breve: Este problema involucra a una esfera dieléctrica de radio R , con polarización \vec{P} uniforme y que gira sobre su eje.

Inciso 4a

Punto 1:

Conviene colocar a la esfera con su centro en el origen de coordenadas, suponer que gira sobre el eje Z y usar a las coordenadas esféricas junto con su base vectorial canónica para describir a todas las cantidades físicas involucradas, con una excepción: conviene suponer que el campo de polarización en la esfera (que es constante) puede escribirse como: $\vec{P} = P\hat{z}$, siendo P una constante real multiplicada por las unidades del campo de polarización (véase la figura 5.7).

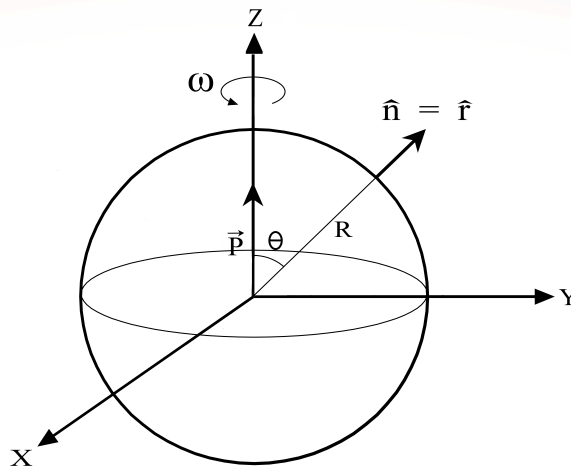


Figura 5.7: Condiciones dadas para la esfera en el punto 1

Punto 2:

En este caso, los campos de densidad de corriente están estrictamente relacionados con las densidades de carga ligadas que se generan en la esfera. Estas últimas pueden ser volumétricas y superficiales. Así pues, la primera debe ser nula, pues está dada por la divergencia del campo de polarización, que es constante. En cambio, la segunda, no tendría porqué ser nula, pues está dada por el producto punto de los vectores del campo de polarización con los vectores normales a la superficie del cuerpo en cuestión (véase la figura 5.7). Por lo tanto, es de esperarse que en la esfera no exista un campo

de densidad de corriente volumétrica, pero sí uno de densidad de corriente superficial. Por último, el único campo existente debe tener, en cada punto, la dirección de $\pm\hat{\phi}$, pues se supuso que la esfera gira sobre el eje Z , es decir, en dirección $\pm\hat{\phi}$.

Puntos 3 y 4:

Usando lo expuesto en el capítulo 4 cuando se trató la divergencia de un campo vectorial y la definición de la densidad de carga volumétrica ligada, se tiene que la densidad volumétrica de carga ligada de la esfera está dada por:

$$\rho_b = -\nabla \cdot \vec{P} = 0$$

La última igualdad se debe a que, justo como está expuesto en el capítulo 4, la divergencia de un campo vectorial está dada por una suma de derivadas parciales de las componentes del campo en cuestión multiplicadas por los factores de escala de las coordenadas usadas. Sin embargo, en este caso, el campo de polarización es constante, es decir, que sus componentes son constantes en todo el espacio, lo cual hará que su divergencia sea nula. Si se quisiera escribir la divergencia del campo de cuestión de forma explícita, entonces sería necesario escribir a \hat{z} como una combinación lineal de la base esférica (cosa que no se hace en la presentación de las coordenadas esféricas) o, de plano, elegir otra expresión para el campo que, de entrada, se describió como constante. Cabe recalcar que lo anterior sería redundante e innecesario, pues la divergencia de todo campo vectorial constante es nula.

Por lo tanto, en este caso, el campo de densidad de corriente volumétrica (\vec{J}) es nulo.

Usando lo expuesto en el capítulo 4 cuando se trató la definición de la densidad de carga superficial ligada, se tiene que la densidad superficial de carga ligada de la esfera está dada por:

$$\sigma_b = \vec{P} \cdot \hat{n} = \vec{P} \cdot \hat{r} = P \hat{z} \cdot \hat{r} = P \cos \theta$$

La segunda igualdad de las anteriores (de izq. a der.) se tiene debido a que, por la simetría que se eligió para el problema en el punto 1, el vector unitario normal a la superficie en cada punto de ella puede tomarse como \hat{r} . La última igualdad de las anteriores (de izq. a der.) pone de manifiesto la conveniencia de tomar a $\vec{P} = P\hat{z}$, pues el producto $\hat{z} \bullet \hat{r}$ es igual a la magnitud de \hat{z} (uno) por la magnitud de \hat{r} (uno) por el coseno del ángulo que forman los dos vectores anteriores, es decir, por el coseno del ángulo polar θ .

Usando lo expuesto en el capítulo 4 cuando se trataron los campos vectoriales de corriente generados por densidades de carga en movimiento, se tiene que el campo de densidad de corriente superficial de la esfera está dado por:

$$\vec{K} = \sigma_b \vec{v} = P \cos \theta \omega R \sin \theta \hat{\phi}$$

Lo anterior se debe a que, en este caso, \vec{v} es la velocidad tangencial de cada punto de la superficie del cascarón esférico. Especificando, en la presentación de las coordenadas esféricas (capítulo 6, sección 6.3) se llega a que la expresión general para la velocidad de una partícula está dada por: $\vec{v}(t) = \dot{r}(t)\hat{r}(t) + r(t)\dot{\theta}(t)\hat{\theta}(t) + r(t)\dot{\phi}(t)\sin\theta(t)\hat{\phi}(t)$. En este caso, los puntos de la superficie del cascarón esférico sólo poseen desplazamientos azimutales, es decir, que su velocidad no tiene componentes en \hat{r} y $\hat{\theta}$. Por lo tanto, la expresión anterior para $\vec{v}(t)$ se reduce a: $\vec{v}(t) = r(t)\dot{\phi}(t)\sin\theta(t)\hat{\phi}(t)$. Además, en este caso, la distancia de cada partícula al origen de coordenadas es una constante, pues es igual al radio de la esfera, que es constante. Por lo tanto, la expresión cambia a: $\vec{v}(t) = R\dot{\phi}(t)\sin\theta(t)\hat{\phi}(t)$. También, la velocidad angular de cada partícula es constante, por lo que la expresión cambia a: $\vec{v}(t) = R\omega\sin\theta(t)\hat{\phi}(t)$. Por último, como los puntos de la superficie del cascarón esférico sólo poseen desplazamientos azimutales, entonces, para cada uno de ellos, el valor de su ángulo θ no cambia con el tiempo, es decir, que es constante. Por lo tanto, la expresión final queda como: $\vec{v}(t) = \omega R \sin \theta \hat{\phi}(t)$ o, si se opta por no escribir de manera explícita su dependencia temporal, queda como: $\vec{v} = \omega R \sin \theta \hat{\phi}$

Es importante que se ponga de manifiesto que, dada la simetría del problema, $\omega = \frac{d}{dt}\phi$. Lo anterior tendrá signo positivo o negativo dependiendo si la esfera gira en dirección de incremento o reducción del ángulo ϕ . Por lo tanto, \vec{K} posee dirección $\pm\hat{\phi}$.

Punto 5:

Las unidades del resultado anterior están dadas por: $[P\omega R] = \frac{C}{m^2} \frac{1}{s} m = \frac{A}{m}$, que son unidades de campo de densidad de corriente superficial. Así que se cumple la equivalencia de la ecuación anterior.

Punto 6:

Lo escrito en el punto 2 y el punto 4 es consistente, ya que en ambos se llegó a que \vec{J} es nulo y a que \vec{K} posee dirección $\pm\hat{\phi}$.

Inciso 4b

Punto 1:

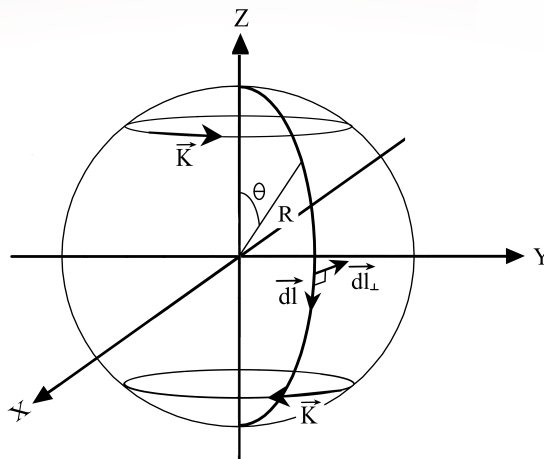


Figura 5.8: Campo \vec{K} sobre la superficie de la esfera y semicircunferencia mencionada en el inciso 4b del problema

Punto 2:

Las funciones trigonométricas involucradas en la expresión para \vec{K} ponen de manifiesto que tal campo vectorial tiene un cambio de dirección cuando θ pasa de estar entre 0 y $\frac{\pi}{2}$ a estar entre $\frac{\pi}{2}$ y π , pues, en esa transición, el producto $\cos \theta \sin \theta$ sufre un cambio de signo (véase la figura 5.8). Tal cambio de dirección de \vec{K} pone de manifiesto que en una mitad de la esfera la corriente superficial asociada va en una cierta dirección y, en la otra mitad, va en dirección contraria. Lo anterior indica que el flujo de corriente pedido es nulo, pues toda la corriente que pasa en una dirección por la semicircunferencia pasa también en la otra dirección.

Punto 3:

La corriente eléctrica superficial que pasa por un segmento $d\vec{l}$ de la semicircunferencia dada está dada por $\vec{K} \bullet d\vec{l}_\perp$, en donde $d\vec{l}$ es una diferencial de longitud vectorial sobre la circunferencia y $d\vec{l}_\perp$ puede tomarse, en este caso, como una rotación del vector anterior en $\frac{\pi}{2}$ en cualquier dirección que lo deje sobre la corriente asociada a \vec{K} . Dada la simetría del problema (véase la figura 5.8) y lo tratado en la presentación de las coordenadas esféricas (capítulo 6, sección 6.3), $d\vec{l} = R d\theta \hat{\theta}$ y $d\vec{l}_\perp = R d\theta \hat{\phi}$.

Punto 4:

Usando lo expuesto en el capítulo 4 cuando se trató la corriente eléctrica superficial y notando que la semicircunferencia subtiende un ángulo de $\theta = \pi$, el flujo de corriente pedido está dado por:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi \vec{K} \bullet d\vec{l}_\perp = \int_0^\pi \omega R P \sin \theta \cos \theta \hat{\phi} \bullet R d\theta \hat{\phi} \\ &= \omega R^2 P \int_0^\pi \sin \theta \cos \theta d\theta \hat{\phi} \bullet \hat{\phi} = \omega R^2 P \int_0^\pi \sin \theta \cos \theta d\theta = \frac{\omega R^2 P}{2} \int_0^\pi \sin 2\theta d\theta \\ &= -\frac{\omega R^2 P}{4} \cos 2\theta \Big|_0^\pi = 0 \end{aligned}$$

Punto 5:

Dado que del resultado final del punto anterior es cero, su comprobación dimensional puede hacerse recurriendo a las unidades físicas del integrando del punto en cuestión: $[\vec{K} \bullet d\vec{l}_\perp] = \frac{A}{m}m = A$, que son unidades de corriente. Aquí se usó el resultado del punto 5 del inciso 4a para escribir las unidades de \vec{K} . Por lo tanto, se cumple la equivalencia de la ecuación anterior.

Punto 6:

Los resultados del punto 2 y el punto 4 son totalmente consistentes, pues en ambos se pone de manifiesto que el flujo de corriente pedido es nulo.

Inciso 4c

Los vectores unitarios usados en el desarrollo de este problema son los tres elementos de la base esférica canónica y un elemento de la base rectangular canónica.

5.0.5. SOLUCIÓN AL PROBLEMA 5

Descripción breve: Este problema involucra a una esfera de radio R , dotada de una densidad de carga volumétrica ρ uniforme y que gira sobre su eje.

Inciso 5a

Punto 1:

Conviene colocar a la esfera con su centro en el origen de coordenadas, suponer que gira sobre el eje Z y usar a las coordenadas esféricas junto con su base vectorial canónica para describir a todas las cantidades físicas involucradas.

Punto 2:

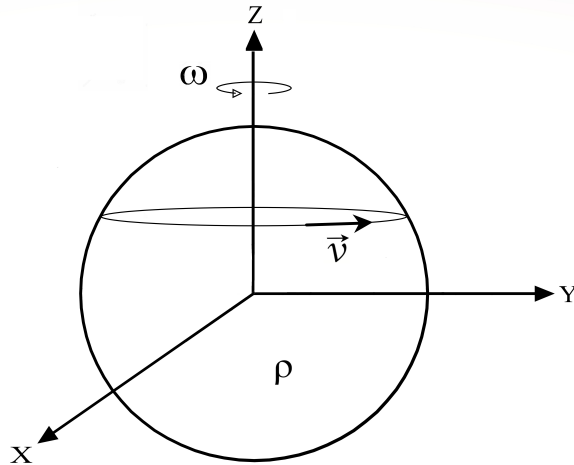


Figura 5.9: Condiciones dadas para la esfera en el punto 1

El campo vectorial en cuestión debe tener, en cada punto, la dirección de $\pm\hat{\phi}$, pues se supuso que la esfera gira sobre el eje Z , es decir, en dirección $\pm\hat{\phi}$ (véase la figura 5.9).

Puntos 3 y 4:

Usando lo expuesto en el capítulo 4 cuando se trataron los campos vectoriales de corriente generados por densidades de carga en movimiento, se tiene que el campo de densidad de corriente volumétrica de la esfera está dado por:

$$\vec{J} = \rho \vec{v} = \rho \omega r \sin \theta \hat{\phi}$$

Lo anterior se debe a que, en este caso, \vec{v} es la velocidad tangencial de cada punto de la esfera. Su expresión se obtiene con un razonamiento análogo al presentado en el inciso 4a (en este caso, r varía de 0 a R).

Es importante que se ponga de manifiesto que, dada la geometría del problema, $\omega = \frac{d}{dt}\phi$. Lo anterior tendrá signo positivo o negativo dependiendo si la

esfera gira en dirección de incremento o reducción del ángulo ϕ . Por lo tanto, \vec{J} posee dirección $\pm\hat{\phi}$.

Punto 5:

Las unidades del resultado anterior están dadas por: $[\rho\omega r] = \frac{C}{m^3} \frac{1}{s} m = \frac{A}{m^2}$, que son unidades de campo de densidad de corriente volumétrica. Así que se cumple la equivalencia de la ecuación anterior.

Punto 6:

Los resultados del punto 2 y el punto 4 son totalmente consistentes, pues en ambos se pone de manifiesto que \vec{J} posee dirección $\pm\hat{\phi}$.

Inciso 5b

Punto 1:

Aquí se hacen las mismas consideraciones que en su análogo del inciso 5a.

Punto 2:

La esfera giratoria puede verse como compuesta por un continuo de discos giratorios paralelos al plano $X - Y$ que, a su vez, pueden considerarse como compuestos por un conjunto de anillos giratorios concéntricos. Cada uno de ellos está dotado de carga y , por lo tanto, al girar produce una corriente que, a su vez, produce un momento dipolar magnético. De hecho, cada uno de los anillos es un dipolo magnético y, dada su orientación, su momento dipolar magnético $d\vec{m}$ debe estar sobre el eje Z (véase la figura 5.10a). Por lo tanto, también lo debe estar el momento dipolar magnético de la esfera completa.

Punto 3:

La expresión $\frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{J}$ da el momento dipolar magnético que genera un cierto elemento de corriente que se encuentra en la punta del vector posición \vec{r} y

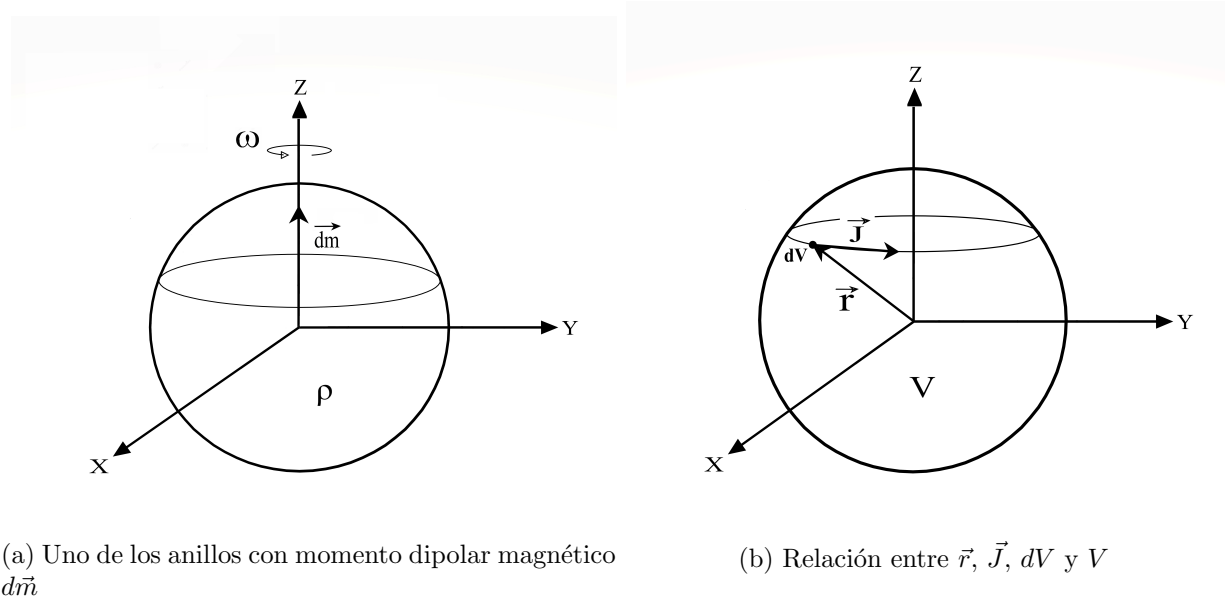


Figura 5.10

que tiene un vector de densidad de corriente volumétrica \vec{J} asociado (véase la figura 5.10b).

Punto 4:

Dado lo escrito en el punto anterior y lo repasado en el capítulo 4 cuando se trató el momento dipolar magnético generado por un campo de densidad de corriente volumétrica, se concluye que el momento dipolar magnético de la esfera está dado por:

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int_V \vec{r} \times \vec{J} dV$$

en donde V es el volumen de la esfera y dV es una diferencial de su volumen en la que se encuentran contenidos los elementos de corriente mencionados en el punto anterior (véase la figura 5.10b). Luego:

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int_V r \hat{r} \times \rho \omega r \sin \theta \hat{\phi} r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$$

en donde se ha escrito \vec{r} como una combinación lineal de la base esférica y se ha sustituido \vec{J} por la expresión encontrada en el inciso 5a. Luego:

$$\vec{m} = \frac{\rho \omega}{2} \int_V r^4 \sin^2 \theta dr d\theta d\phi \hat{r} \times \hat{\phi} = -\frac{\rho \omega}{2} \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^4 \sin^2 \theta dr d\theta d\phi \hat{\theta}$$

En la última igualdad se usó lo que se trata en la presentación de las coordenadas esféricas (capítulo 6, sección 6.3) para calcular $\hat{r} \times \hat{\phi}$ y se recordó que la esfera tratada es descrita por r yendo desde 0 hasta R , θ yendo desde 0 hasta π y ϕ yendo desde 0 hasta 2π . Luego:

$$\begin{aligned} \vec{m} &= -\frac{\rho \omega}{2} \int_0^R r^4 dr \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \hat{\theta} d\theta d\phi \\ &= -\frac{\rho \omega R^5}{10} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta (\cos \theta \cos \phi \hat{x} + \cos \theta \sin \phi \hat{y} - \sin \theta \hat{z}) d\theta d\phi \end{aligned}$$

En la última igualdad se usó la expresión 6.8 para escribir a $\hat{\theta}$ como una combinación lineal de la base rectangular canónica. Luego:

$$\begin{aligned} \vec{m} &= -\frac{\rho \omega R^5}{10} (\hat{x} \int_0^\pi \sin^2 \theta \cos \theta d\theta \int_0^{2\pi} \cos \phi d\phi + \hat{y} \int_0^\pi \sin^2 \theta \cos \theta d\theta \int_0^{2\pi} \sin \phi d\phi \\ &\quad - \hat{z} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi) \end{aligned}$$

Usando que $\int_0^{2\pi} \cos \phi d\phi = \int_0^{2\pi} \sin \phi d\phi = 0$ se obtiene que:

$$\begin{aligned} \vec{m} &= \frac{\rho \omega R^5}{10} \hat{z} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{\rho \omega R^5}{10} \hat{z} \phi \Big|_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta \sin^2 \theta d\theta \\ &= \frac{\rho \omega R^5 \pi}{5} \hat{z} \int_0^\pi \sin \theta (1 - \cos^2 \theta) d\theta = \frac{\rho \omega R^5 \pi}{5} \hat{z} (\int_0^\pi \sin \theta d\theta - \int_0^\pi \sin \theta \cos^2 \theta d\theta) \\ &= \frac{\rho \omega R^5 \pi}{5} \hat{z} (-\cos \theta \Big|_0^\pi + \frac{\cos^3 \theta}{3} \Big|_0^\pi) = \frac{4}{15} \rho \omega R^5 \pi \hat{z} \end{aligned}$$

Por lo tanto, el momento dipolar magnético total de la esfera está dado por:

$$\vec{m} = \frac{4}{15} \rho \omega R^5 \pi \hat{z}$$

► Nota: Como en este caso la densidad volumétrica de carga es constante ($\rho = cte$), entonces es igual a la carga total de la esfera sobre su volumen ($\rho = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$). Así pues, el momento dipolar magnético total de la esfera puede reescribirse como: $\vec{m} = \frac{3}{15} Q \omega R^2 \hat{z}$ ■

Punto 5:

Las unidades del resultado anterior están dadas por: $[\rho \omega R^5] = \frac{C}{m^3} \frac{1}{s} m^5 = Am^2$, que son unidades de momento dipolar magnético. Así que se cumple la equivalencia de la ecuación anterior.

Punto 6:

Los resultados del punto 2 y el punto 4 son totalmente consistentes, pues en ambos se pone de manifiesto que el momento dipolar magnético de la esfera está sobre el eje Z .

► Nota: Cabe recalcar que todos los resultados de éste y los problemas anteriores son desde el punto de vista de la mecánica clásica. ■

► Nota: El valor experimental para el módulo del momento dipolar magnético del electrón es $9.284764 \times 10^{-24} Am^2$. Si eso se iguala al módulo de la última expresión para el resultado del inciso 5b ($\frac{3}{15} Q \omega R^2$) y en él se sustituyen el valor experimental para el valor absoluto de la carga del electrón ($1.6 \times 10^{-19} C$) y para su radio ($2.817940 \times 10^{-15} m$), de ahí se puede despejar el valor que debería tener su rapidez angular para que la igualdad en cuestión se cumpla. Sin embargo, el valor que se obtiene indica que la rapidez lineal de los puntos del ecuador del electrón es tres órdenes de magnitud superior a la rapidez de la luz en el vacío, lo cual, en pocas palabras, contradice a la relatividad. Todo lo anterior indica que la mecánica clásica no es el tratamiento adecuado para las partículas subatómicas. Como es bien sabido, tal tratamiento lo da la mecánica cuántica. ■

CAPÍTULO 5. SOLUCIÓN EXPERTA

Capítulo 6

En este capítulo se expone un resumen del sistema de coordenadas rectangulares y se da una presentación detallada (verbal y algebraicamente) del sistema de coordenadas cilíndrico y esférico.

6.0.1. ACLARACIONES

Es importante que se haga distinción entre tres entes en principio distintos:

R^3 :

Es un espacio vectorial abstracto, de dimensión tres y cuyos elementos son representados, por lo general, por triadas ordenadas de números reales.

F^3 :

Es el espacio real (o físico), es decir, es el espacio en el que transcurre el día a día de todos. No es E^3 (este espacio se describe enseguida) ni R^3 , es otro espacio con propiedades distintas (que, entre otras cosas, involucran al tiempo), cuya descripción más aproximada es dada por la relatividad general.

E^3 :

Es un espacio en el cual pueden moverse objetos, cuyas posiciones e interacciones son medidas desde tres ejes perpendiculares entre sí, llamados ejes X , Y , Z . Aquí existen objetos que no poseen dimensiones (puntos), objetos que sólo poseen longitud (segmentos de rectas), objetos que poseen área (superficies) y objetos que poseen volumen (volúmenes). Además, existen objetos llamados "vectores", que poseen magnitud y dirección. Este espacio es isoformo (equivalente de alguna manera) a R^3 y, por lo tanto, es bastante común que se traten como iguales. Por lo general, es usado como intermediario geométrico entre R^3 y F^3 , para así facilitar la visualización de algunos conceptos físicos y matemáticos. Por lo anterior, es común que en los libros o salones de clases se intente representarlo por medio de dibujos en hojas o pizarrón, pero tal representación es burda, pues no concuerda de todo con las descripciones dadas anteriormente.

En la física clásica se trabaja de manera teórica en E^3 y, por lo tanto, los resultados que se obtienen de ella sólo son simplificaciones de fenómenos reales. Así pues, en este trabajo de tesis también se va a trabajar en E^3 .

► Nota: En términos generales, la razón de la existencia de R^3 y E^3 es que sirven como un modelo simplificado de F^3 , en los cuales se pueden hacer cálculos teóricos de manera más sencilla. ■

6.1. COORDENADAS RECTANGULARES

6.1.1. VECTOR POSICIÓN

En esta sección se expone un resumen del sistema de coordenadas rectangulares y al vector posición como una combinación lineal de su base vectorial canónica:

En los primeros cursos de la licenciatura en física se demuestra que todo vector \vec{r} en E^3 se puede escribir como una combinación lineal de su base rectangular canónica, es decir, de los vectores unitarios \hat{x} , \hat{y} y \hat{z} :

$$\vec{r} = x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z}$$

en donde x, y, z son sus componentes rectangulares en la base rectangular canónica.

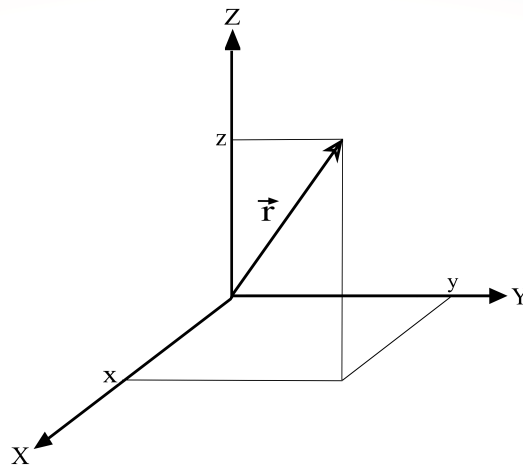


Figura 6.1: Vector \vec{r} y sus componentes rectangulares en E^3

x, y y z son, a fin de cuentas, las variables que aparecen en la expresión para \vec{r} en términos de la base rectangular canónica. Así pues, a tales variables se les llama, sin más, “coordenadas rectangulares“. Las diferenciales de volumen, área y longitud se escriben en términos de ellas.

6.1.2. DERIVADA TEMPORAL

En esta sección se presenta el desarrollo de la derivada temporal del vector posición presentado en la sección anterior, bajo el supuesto de que depende del tiempo:

Si \vec{r} es el vector posición de una partícula que, por alguna razón, varía en E^3 , su magnitud, dirección y sentido van a estar cambiando según del movimiento de la partícula, es decir, según el cambio en su posición. Tal cambio sólo se percibe cuando pasa el tiempo y, por lo tanto, se concluye que está en función de él. Entonces, a fin de cuentas, el vector posición \vec{r} va a ser una cierta función del tiempo, cuya expresión algebraica dependerá de cómo es el movimiento de la partícula observada. Dado que la base rectangular canónica es una triada de vectores que, sin importar nada, no varían su magnitud, dirección y sentido, es decir, que es una triada de vectores constantes, entonces no pueden tener una dependencia en alguna variable, en particular, en el tiempo. Por lo tanto, la dependencia temporal de \vec{r} sólo puede estar en sus componentes en los ejes X, Y, Z. Así pues, puede reescribirse como:

$$\vec{r}(t) = x(t) \hat{x} + y(t) \hat{y} + z(t) \hat{z}$$

En la expresión anterior la dependencia temporal fue agregada de manera explícita tanto al vector \vec{r} como a sus componentes, mas no se escribió la expresión algebraica de estas últimas.

La velocidad de la partícula, es decir, la derivada total con respecto al tiempo de su vector posición, está dada por:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d(x(t) \hat{x} + y(t) \hat{y} + z(t) \hat{z})}{dt}$$

La derivada de la suma es la suma de las derivadas y, por lo tanto:

$$\vec{v}(t) = \frac{d(x(t) \hat{x})}{dt} + \frac{d(y(t) \hat{y})}{dt} + \frac{d(z(t) \hat{z})}{dt}$$

Tal y como se expresó antes, los vectores unitarios \hat{x} , \hat{y} , \hat{z} son constantes. Por lo tanto, pueden salir fuera de la derivación con respecto al tiempo. Así:

$$\vec{v}(t) = \frac{dx(t)}{dt} \hat{x} + \frac{dy(t)}{dt} \hat{y} + \frac{dz(t)}{dt} \hat{z}$$

Las derivadas totales con respecto al tiempo de las componentes rectangulares de $\vec{r}(t)$ en X, Y, Z son las componentes rectangulares de la velocidad de la partícula en tales ejes y, por lo tanto:

$$\vec{v}(t) = v_x(t) \hat{x} + v_y(t) \hat{y} + v_z(t) \hat{z}$$

en donde v_i es la componente de la velocidad de la partícula en el eje i ; $i = x, y, z$.

Recordando que, por lo general, \hat{x} , \hat{y} , \hat{z} se denotan como $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, respectivamente, entonces, $\vec{r}(t)$ y $\vec{v}(t)$ pueden escribirse de las siguientes maneras:

$$\vec{r}(t) = x(t)(1,0,0) + y(t)(0,1,0) + z(t)(0,0,1) = (x(t), y(t), z(t))$$

$$\vec{v}(t) = v_x(t)(1,0,0) + v_y(t)(0,1,0) + v_z(t)(0,0,1) = (v_x(t), v_y(t), v_z(t))$$

o bien:

$$\vec{v}(t) = \frac{dx(t)}{dt}(1,0,0) + \frac{dy(t)}{dt}(0,1,0) + \frac{dz(t)}{dt}(0,0,1) = \left(\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}, \frac{dz(t)}{dt} \right)$$

Las últimas expresiones para $\vec{r}(t)$ y $\vec{v}(t)$ indican que, este último, se puede obtener derivando con respecto al tiempo a cada una de las componentes del primero o, dicho de otra forma, que la derivada con respecto al tiempo puede entrar al vector $\vec{r}(t)$ y derivar con respecto al tiempo a cada una de sus componentes, es decir, derivarlo componente a componente. Esto último aplica para todo vector expresado como combinación lineal de la base rectangular: las derivadas con respecto a cualquier variable pueden entrar al vector y derivarlo componente a componente. Y, de hecho, lo mismo pasa con las integrales, es decir, que las integrales con respecto a cualquier variable pueden entrar al vector e integrarlo componente a componente. Todo esto es posible gracias a que la base rectangular está compuesta, tal y como

está escrito antes, por vectores constantes, que pueden escribirse como una triada ordenada de constantes y, por lo tanto, entrar y salir de todo proceso de derivación e integración como constantes.

A continuación se ilustra lo descrito:

Sea \vec{u} un vector expresado como una combinación lineal de la base rectangular canónica (i.e. $\vec{u} = u_x(1, 0, 0) + u_y(0, 1, 0) + u_z(0, 0, 1) = (u_x, u_y, u_z)$, en donde u_x, u_y, u_z son sus componentes rectangulares en los ejes X, Y, Z respectivamente) y sea q una cierta variable. Entonces:

La derivada total de \vec{u} con respecto a q está dada por:

$$\frac{d\vec{u}}{dq} = \frac{d(u_x, u_y, u_z)}{dq} = \left(\frac{du_x}{dq}, \frac{du_y}{dq}, \frac{du_z}{dq} \right)$$

Y la integral indefinida de \vec{u} con respecto a q está dada por:

$$\int \vec{u} dq = \int (u_x, u_y, u_z) dq = \left(\int u_x dq, \int u_y dq, \int u_z dq \right)$$

El resultado de las dos operaciones anteriores dependerá de la expresión algebraica de u_x, u_y, u_z , es decir, de si dependen o no de q y en qué forma lo hacen.

6.1.3. ELEMENTOS DIFERENCIALES

En esta sección se presentan los elementos diferenciales de volumen, área y longitud en términos de las coordenadas rectangulares:

DIFERENCIAL DE VOLUMEN:

En geometría analítica vectorial se demuestra que tres vectores no coplanares describen un paralelepípedo (la longitud de sus lados es igual al módulo de

los vectores) y que su volumen está dado por el valor absoluto del triple producto escalar de los vectores. A continuación se muestra cómo se obtiene la diferencial de volumen estándar (dV) usando el resultado anterior:

En la figura 6.2 se muestra un cubo con uno de sus vértices en el origen de E^3 , con su base sobre el plano X - Y , con sus lados alineados, dos a dos, con el eje X y con el eje Y y con su altura alineada con el eje Z .

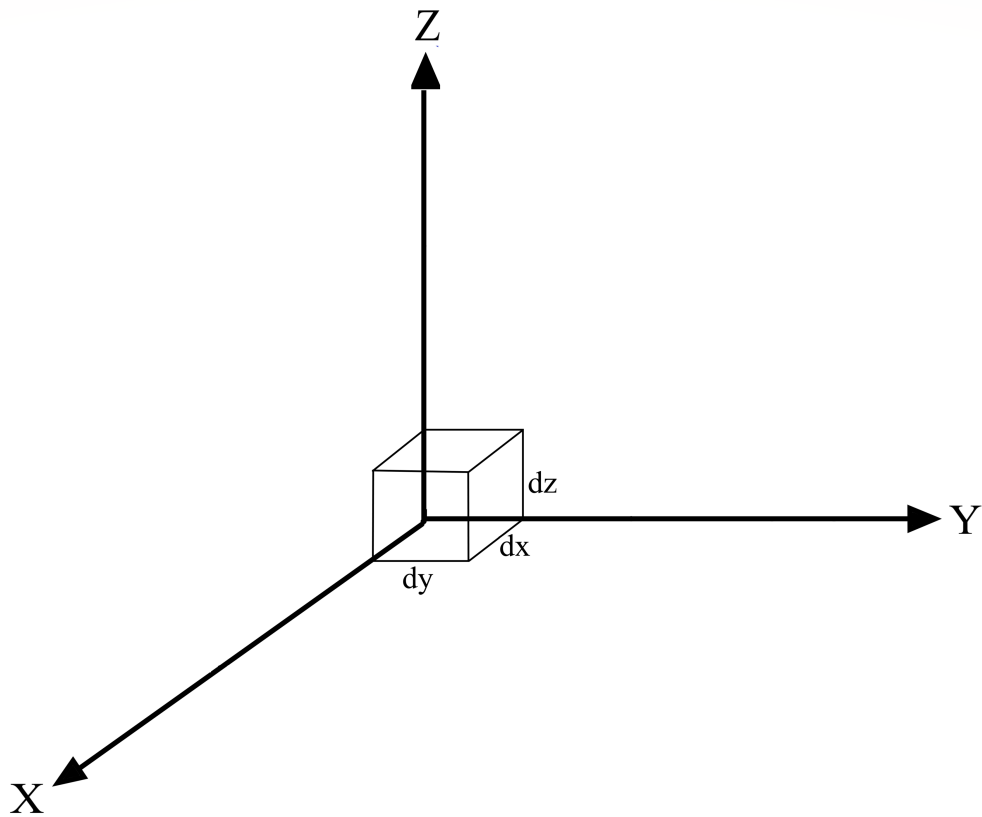


Figura 6.2: Diferencial de volumen estándar en coordenadas rectangulares

Por la orientación del cubo, los vectores de la base rectangular quedan sobre tres de sus lados (dos de ellos, \hat{x} y \hat{y} , quedan sobre los lados que describen la base del cubo y el último, \hat{z} , queda sobre el lado que describe su altura) y, si su módulo fuera igual a la longitud de los lados, entonces serían los vectores que describen al cubo. Pero, en este caso, se requiere que los lados del cubo sean de longitud muy pequeña (mucho menor que las unidades de los ejes), para que así su volumen también sea muy pequeño y pueda asociarse con una diferencial de volumen de algún otro objeto más "grande", es decir, con un volumen que, según la escala de los ejes, ya no pueda ser considerado como diferencial. Dicho esto, se puede suponer que la longitud de los lados del cubo que están paralelos al eje X es igual a la diferencial de las unidades del eje X , es decir, igual a dx . De la misma manera, se puede suponer que los lados paralelos al eje Y y al eje Z poseen longitud dy y dz respectivamente. Así, los vectores que poseen módulo igual a la longitud de los lados que describen la base del cubo son: $dx\hat{x}$, $dy\hat{y}$; y el vector que posee módulo igual a la altura del cubo es: $dz\hat{z}$. Entonces, el volumen del cubo está dado por el valor absoluto del triple producto escalar de estos vectores, es decir, por:

$$|dz\hat{z} \bullet (dx\hat{x} \times dy\hat{y})| = |dxdydz \hat{z} \bullet (\hat{x} \times \hat{y})| = |dxdydz \hat{z} \bullet \hat{z}| = |dxdydz|$$

Este resultado tiene sentido, pues, dada la orientación del cubo y la longitud de sus lados, el área de su base es $dxdy$ y su altura es dz . Por lo tanto, su volumen es $dxdydz$. En lo único que difieren estos dos resultados es en las barras de valor absoluto. Éstas están ahí para anular cualquier signo negativo que pueda darse a la hora de hacer el triple producto escalar, pues un volumen no puede ser negativo. Se puede prescindir de ellas siempre y cuando se convenga en medir a dx , dy , dz de tal manera que siempre sean positivos, es decir, medirlos en la dirección de crecimiento de su respectiva coordenada.

El resultado del triple producto escalar no depende del orden en el cual pongamos los vectores, sólo depende de qué vectores estén considerados en él. Por ejemplo:

$$|dx\hat{x} \bullet (dz\hat{z} \times dy\hat{y})| = |dxdydz \hat{x} \bullet (\hat{z} \times \hat{y})| =$$

$$|-dxdydz \hat{x} \bullet \hat{x}| = |-dxdydz| = dxdydz = |dz\hat{z} \bullet (dx\hat{x} \times dy\hat{y})|$$

La diferencial de volumen estándar se toma como igual al volumen del cubo. Por lo tanto, con todo lo dicho y hecho hasta ahora, se obtiene que está dada por:

$$dV = dxdydz \quad (6.1)$$

Es intuitivamente claro que todo volumen puede ser prácticamente llenado con una serie de cubos del mismo tamaño y con la misma orientación, siempre y cuando éstos sean lo suficientemente pequeños en comparación con el volumen en cuestión. Lo anterior indica que, en lo que respecta a las coordenadas rectangulares, la expresión 6.1 es suficiente para calcular volúmenes no diferenciales (por medio de la integración de la expresión dada sobre tal volumen). Sin embargo, el nombre “coordenadas rectangulares” no es en vano, y puede ser interpretado como que, los volúmenes más fáciles de obtener usando a la expresión 6.1, son aquellos que son paralelepípedos regulares o irregulares, que no son otra cosa que el análogo tridimensional de rectángulos regulares o irregulares.

DIFERENCIAL DE ÁREA:

En geometría analítica vectorial se demuestra que dos vectores no colineales describen un paralelogramo (la longitud de sus lados es igual al módulo de los vectores) y que su área está dada por el módulo del producto cruz de los vectores. A diferencia de la diferencial de volumen, se encuentra que con la diferencial de área no puede adoptarse una única expresión. En pocas palabras, esto se debe a que un área en un espacio tridimensional puede adoptar muchas más formas y orientaciones que un volumen y, por lo tanto, la expresión para su diferencial dependerá enormemente de tal orientación y forma. Por ejemplo, no se puede cubrir un plano con secciones de otro plano perpendicular a él (bajo el supuesto de que no se roten tales secciones). Esto indica que las diferenciales de área asociadas a ambos planos presentan, cuando menos, una diferencia en orientación. A continuación, se dan algunos ejemplos de obtención de diferenciales de área:

Las caras del cubo que se tomó como diferencial de volumen estándar son, evidentemente, diferenciales de área. Por ejemplo, la diferencial de área dada por la base del cubo está descrita por los vectores $dx\hat{x}$, $dy\hat{y}$ (recordar lo hecho en el cálculo de la diferencial de volumen). Por lo tanto, su área está dada por:

$$||dx\hat{x} \times dy\hat{y}|| = ||dxdy \hat{x} \times \hat{y}|| = ||dxdy \hat{z}|| = |dxdy| = dxdy$$

, en donde se han omitido las barras de valor absoluto bajo el entendido de que dx , dy se miden de tal manera que siempre quedan positivos.

Este resultado tiene sentido, pues, dada la orientación de la base (paralela al plano X - Y) y las dimensiones de sus lados (dx o dy), su valor está dado por $dxdy$. Usualmente, ésta es la expresión que se le asigna a la diferencial de área del plano X - Y , pues está conformada por el producto de las diferenciales de las coordenadas de tales ejes.

Análogamente, Las caras del cubo paralelas al plano X - Z poseen área $dxdz$ y las paralelas al plano Y - Z poseen área $dydz$, y, obviamente, son tomadas como las diferenciales de área de tales planos.

De nuevo, el nombre “coordenadas rectangulares“ no es en vano, y puede ser interpretado como que, las áreas más fáciles de obtener usando diferenciales de área en términos de tales coordenadas, son aquellas cuya forma es de paralelogramos o, más aún, de rectángulos.

DIFERENCIAL DE LONGITUD:

Tal y como sucede con la diferencial de área y, por las mismas razones, la expresión para la diferencial de longitud depende mucho de cómo esté orientada la línea en cuestión y cuál sea su forma. Por ejemplo, es intuitivamente claro que, dada una línea recta, el módulo de un vector que esté sobre ella puede ser visto como una diferencial de su longitud siempre y cuando éste sea lo suficientemente pequeño. Si la recta es el eje X , entonces un vector con las características mencionadas puede ser $dx\hat{x}$. Su módulo es $|dx|$, que puede

ser tomado como dx siempre y cuando se convenga que tal diferencial se medirá de tal forma que siempre sea positiva. Por lo tanto, la diferencial de longitud sobre el eje X es dx , lo cual tiene sentido, pues dx es una diferencial de las unidades de tal eje.

Análogamente, las diferenciales de longitud del eje Y y el eje Z , son dy y dz , respectivamente.

Y, de nuevo, el nombre “coordenadas rectangulares” no es en vano, y puede ser interpretado como que, las longitudes que son más fáciles de obtener usando diferenciales de longitud en términos de tales coordenadas, son longitudes rectas.

6.1.4. NUEVOS SISTEMAS COORDENADOS

En esta sección se da una breve introducción a los sistemas de coordenadas cilíndrico y esférico:

Estos sistemas de coordenadas se construyen sobre E^3 , usando sus ejes como referencias, pero, por lo general, usando coordenadas que no son las unidades de tales ejes. La consecuencia más relevante de lo último es que, en principio, la base vectorial canónica que se utiliza en ellos es distinta a la rectangular canónica.

► Nota: Al menos en este trabajo de tesis, se considera que todas las bases vectoriales tratadas se encuentran siempre con sus colas en el origen de E^3 , sin importar que tipos de cambios puedan experimentar. En algunas figuras del mismo se representan con sus colas fuera del punto mencionado, pero tal cosa es sólo para ilustrar mejor alguna situación en particular ■

6.2. COORDENADAS CILÍNDRICAS

6.2.1. VECTOR POSICIÓN

En esta sección se expone el sistema de coordenadas cilíndricas y se da un vector posición como una combinación lineal de su base vectorial canónica:

Todo vector \vec{r} en E^3 puede verse como la suma de dos vectores: uno que tenga módulo igual a su proyección sobre el plano X - Y y que esté sobre ella y otro que tenga módulo su proyección sobre el eje Z y que esté sobre ella:

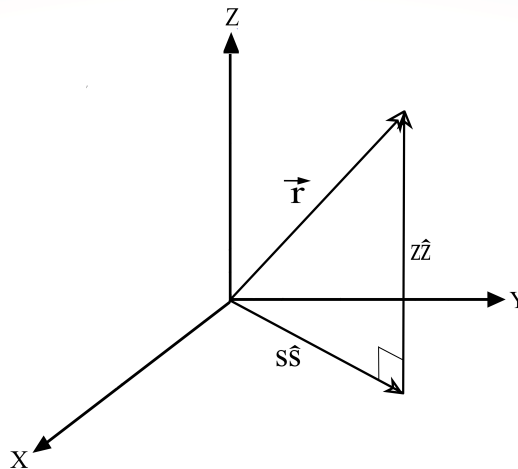


Figura 6.3: Vector \vec{r} expresado como la suma de $s\hat{s}$ y $z\hat{z}$

Así, el primero de estos vectores puede verse como $s\hat{s}$, en donde \hat{s} es un vector unitario en la dirección de tal vector y s es la proyección de \vec{r} sobre el plano X - Y . Mientras que, el segundo, puede verse como $z\hat{z}$, en donde \hat{z} es el tercer vector de la base rectangular canónica y z es la proyección de \vec{r} sobre el eje Z , es decir, es su componente sobre tal eje.

Se definen a $s\hat{s}$ como \vec{s} , a $z\hat{z}$ como \vec{z} y, para posteriores propósitos, a ϕ como el ángulo que abre \vec{s} con la parte positiva del eje X (esto quiere decir que tal ángulo se mide desde la parte positiva del eje X) y a $\hat{\phi}$ como una rotación en $\frac{\pi}{2}$ radianes de \hat{s} en la dirección de crecimiento de ϕ :

Conviene escribir a \hat{s} como una combinación lineal de la base rectangular canónica, pues así es más fácil indagar en sus propiedades y, de paso, en las de $\hat{\phi}$:

Dado lo escrito anteriormente, \hat{s} puede escribirse como:

$$\hat{s} = \|\hat{s}\| \cos \phi \hat{x} + \|\hat{s}\| \operatorname{sen} \phi \hat{y} = \cos \phi \hat{x} + \operatorname{sen} \phi \hat{y}$$

, en donde se ha usado que \hat{s} se supuso como unitario.

Por lo tanto:

$$\hat{s} = \cos \phi \hat{x} + \operatorname{sen} \phi \hat{y} \quad (6.2)$$

que es, en efecto, un vector unitario:

$$\|\hat{s}\| = \|\cos \phi \hat{x} + \operatorname{sen} \phi \hat{y}\| = \sqrt{\cos^2 \phi + \operatorname{sen}^2 \phi} = 1$$

Así pues, en vista de lo expuesto anteriormente, la expresión para $\hat{\phi}$ en términos de la base rectangular canónica está dada por:

$$\begin{aligned} \hat{\phi} &= \hat{s}, \text{ rotando } \frac{\pi}{2} \text{ radianes en la dirección de crecimiento de } \phi \\ &= \cos\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right) \hat{x} + \operatorname{sen}\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right) \hat{y} \end{aligned}$$

Usando que $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$ y que $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta$ se obtiene:

$$\hat{\phi} = (\cos \phi \cos \frac{\pi}{2} - \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}) \hat{x} + (\operatorname{sen} \phi \cos \frac{\pi}{2} + \cos \phi \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}) \hat{y}$$

Recordando que $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ y que $\operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1$ se obtiene:

$$\hat{\phi} = -\operatorname{sen} \phi \hat{x} + \cos \phi \hat{y} \quad (6.3)$$

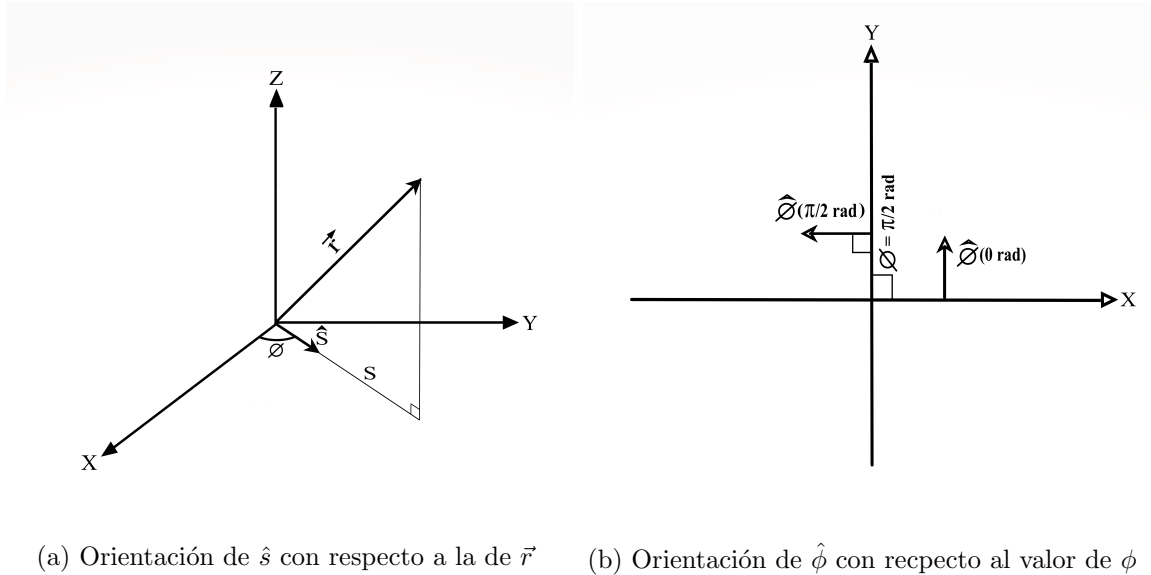
La expresión 6.3 indica que $\hat{\phi}$ es un vector unitario:

$$\|\hat{\phi}\| = \|- \operatorname{sen} \phi \hat{x} + \cos \phi \hat{y}\| = \sqrt{\operatorname{sen}^2 \phi + \cos^2 \phi} = 1$$

Las expresiones 6.2, 6.3 y los resultados anteriores indican que $\hat{\phi}$ y \hat{s} son vectores constantes en módulo (siempre vale 1), más no en dirección, pues, escritos como una combinación lineal de la base rectangular canónica, poseen componentes rectangulares que son funciones trigonométricas, es decir, que no son constantes. Tales componentes indican cómo cambian la dirección de estos vectores al cambiar el valor del ángulo ϕ . Dado que los vectores en cuestión sólo poseen componentes en \hat{x} y \hat{y} y que el cálculo de sus módulos conduce a la ecuación $\operatorname{sen}^2 \phi + \cos^2 \phi = 1^2$ (que es la ecuación en coordenadas rectangulares de un círculo centrado en el origen y de radio 1), entonces, al cambiar el valor de ϕ , rotan sobre el plano X - Y , con su cola siempre en el origen de coordenadas y su punta siempre sobre un círculo centrado en el origen y de radio 1. El sentido de su rotación dependerá de si ϕ aumenta o disminuye, así como de los signos que acompañen a sus componentes rectangulares.

Como ϕ depende de la orientación que tenga la proyección de \vec{r} sobre el plano X - Y que, a su vez, depende de la orientación del vector en si, entonces, a fin de cuentas, la rotación de $\hat{\phi}$ y \hat{s} depende de tal orientación. Por lo tanto, juntando esto con lo del párrafo anterior y recordando que, por definición (véase la figura 6.4a), \hat{s} apunta en la dirección de crecimiento de la proyección de \vec{r} en el plano X - Y para todo valor de ϕ (o, dicho de otra manera, para toda orientación de \vec{r}), se concluye que \hat{s} gira junto con tal proyección al cambiar la orientación de este vector. Análogamente, $\hat{\phi}$ también gira con la proyección de \vec{r} sobre el plano X - Y , pero estando a $\frac{\pi}{2}$ radianes de la misma, pues es una rotación en $\frac{\pi}{2}$ radianes de \hat{s} . Tomando los casos $\phi = 0 \text{ rad}$ y

$\phi = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$ se puede ver que $\hat{\phi}$ está apuntando en la dirección de crecimiento instantánea de ϕ para todo valor de él (véase la figura 6.4b); y es por eso que se denota como $\hat{\phi}$ y no como alguna otra letra con un gorro de vector unitario.

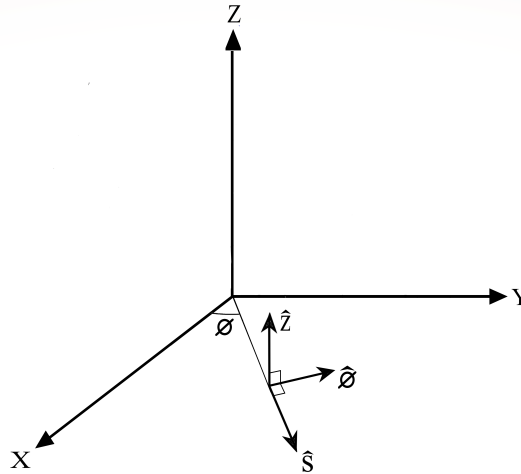


(a) Orientación de \hat{s} con respecto a la de \vec{r} (b) Orientación de $\hat{\phi}$ con respecto al valor de ϕ

Figura 6.4

Dado que $\hat{\phi}$ es una rotación en $\frac{\pi}{2}$ radianes de \hat{s} , entonces ambos vectores son perpendiculares, no importando el valor de ϕ . Además, como ambos están sobre el plano X - Y , entonces, para todo valor de ϕ , son perpendiculares a \hat{z} , que está sobre el eje Z . Por lo tanto, \hat{s} , $\hat{\phi}$ y \hat{z} son una triada de vectores perpendiculares entre sí, que, además, poseen módulo 1, es decir, que son una triada de vectores ortonormales. Esta condición es más que suficiente para que formen una base vectorial para los vectores en E^3 en tres dimensiones. Este resultado no es nada raro, pues, aunque \hat{x} , \hat{y} y \hat{z} es la base que usualmente se usa para representar a tales vectores, no es la única; otra está compuesta por \hat{s} , $\hat{\phi}$ y \hat{z} que, evidentemente, comparte un elemento (\hat{z}) con la base anteriormente mencionada.

Por todo lo anterior, \hat{s} , $\hat{\phi}$ y \hat{z} es conocida como la BASE CILÍNDRICA canónica.

Figura 6.5: \hat{s} , $\hat{\phi}$ y \hat{z} en E^3

Por lo general, se conviene en que \hat{s} es el primer elemento de la base en cuestión, $\hat{\phi}$ es el segundo y \hat{z} es el tercero. Así, el sistema de coordenadas cilíndrico es un sistema a derechas, es decir, que el primer vector de su base canónica multiplicado en producto cruz con el segundo da como resultado el tercero:

$$\begin{aligned}\hat{s} \times \hat{\phi} &= (\cos \phi \hat{x} + \operatorname{sen} \phi \hat{y}) \times (-\operatorname{sen} \phi \hat{x} + \cos \phi \hat{y}) \\ &= \hat{z} \cos^2 \phi - (-\hat{z}) \operatorname{sen}^2 \phi = \hat{z}(\cos^2 \phi + \operatorname{sen}^2 \phi) = \hat{z}\end{aligned}$$

en donde se usó la distributividad del producto cruz sobre la suma.

Lo que se muestra en las expresiones 6.2 y 6.3, es, a fin de cuentas, la base cilíndrica canónica escrita como una combinación lineal de la base rectangular canónica.

La representación de un vector \vec{r} en términos de la base cilíndrica canónica ya fue dada, y es:

$$\vec{r} = \vec{s} + \vec{z} = s \hat{s} + z \hat{z} ,$$

en donde s y z son sus componentes en la base cilíndrica canónica.

Es importante que se recuerde que la orientación de \hat{s} está estrictamente ligada con la orientación de \vec{r} y que \hat{z} es un vector constante.

La razón por la que \vec{r} no tiene componente en $\hat{\phi}$ es porqué, para todo ϕ , es perpendicular a él:

$$\hat{\phi} \bullet \vec{r} = \hat{\phi} \bullet (s\hat{s} + z\hat{z}) = s(\hat{\phi} \bullet \hat{s}) + z(\hat{\phi} \bullet \hat{z}) = 0$$

En lo anterior se usó la distributividad del producto punto sobre la suma y que \hat{s} , $\hat{\phi}$ y \hat{z} son perpendiculares.

6.2.2. RELACIÓN ENTRE COORDENADAS

En esta sección se dan unas de las relaciones entre las coordenadas cilíndricas y rectangulares:

La relación entre s y z y las coordenadas rectangulares del vector en cuestión, es la siguiente:

Dado que s es la proyección de \vec{r} en el plano X - Y , entonces:

$$s = \sqrt{x^2 + y^2}$$

en donde x y y son las dos primeras componentes rectangulares de \vec{r} en la base rectangular canónica.

Y, en cuanto a z , no es más que la tercera componente de \vec{r} en la base rectangular canónica.

Aunque ϕ no aparece de manera explícita en las componentes de \vec{r} en la base cilíndrica canónica, es lo que le da su carácter no constante a \hat{s} por medio de su seno y coseno. Por lo tanto, es conveniente que también se dé su relación con las coordenadas rectangulares de \vec{r} :

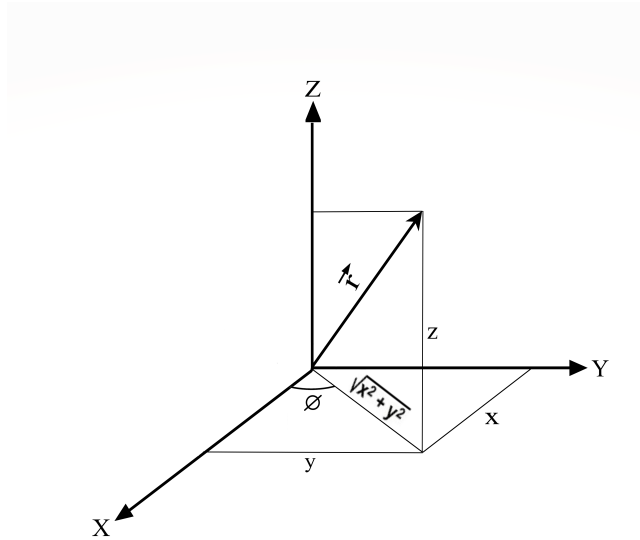


Figura 6.6: Relación entre ϕ y las coordenadas rectangulares

De la figura 6.6 se sigue que:

$$\cos \phi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \Leftrightarrow \quad \phi = \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Debido a que s , ϕ y z son, a fin de cuentas, las variables involucradas en la expresión para \vec{r} en términos de la base cilíndrica canónica, entonces a tales variables son a las que se les llama, sin más, “coordenadas cilíndricas“, y, en este caso, las diferenciales de volumen, área y longitud se escriben en términos de ellas.

6.2.3. DERIVADA TEMPORAL

En esta sección se presenta el desarrollo de la derivada temporal de un vector posición escrito como combinación lineal de la base cilíndrica canónica, bajo el supuesto de que tal vector depende del tiempo:

Si \vec{r} es el vector posición de una partícula que, por alguna razón, se mueve en E^3 , entonces está en función del tiempo. Así pues, su magnitud y dirección son funciones del tiempo y, por lo tanto, su coordenada z , su proyección en el plano X - Y y su ángulo ϕ también lo son. Así pues, su vector \hat{s} tiene una dependencia temporal por medio de el seno y el coseno de ϕ . Por lo tanto, \vec{r} posee la forma:

$$\vec{r}(t) = s(t) \hat{s}(t) + z(t) \hat{z}$$

, en donde, con excepción de \hat{z} que es constante, todo depende del tiempo.

Así pues, la velocidad de la partícula en cuestión está dada por:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d(s(t) \hat{s}(t) + z(t) \hat{z})}{dt} = \frac{d(s(t) \hat{s}(t))}{dt} + \frac{dz(t)}{dt} \hat{z} = \frac{d(s(t) \hat{s}(t))}{dt} + v_z(t) \hat{z}$$

, en donde se usó que \hat{z} es constante y que, en la exposición de las coordenadas rectangulares, se vio la igualdad: $\frac{dz(t)}{dt} = v_z(t)$

Luego:

$$\vec{v}(t) = \frac{ds(t)}{dt} \hat{s}(t) + s(t) \frac{d\hat{s}(t)}{dt} + \dot{z} \hat{z} = \dot{s}(t) \hat{s}(t) + s(t) \frac{d\hat{s}(t)}{dt} + \dot{z} \hat{z}$$

, en donde se usó regla de Leibniz para la derivación de un producto de funciones y se denotó a $\frac{ds(t)}{dt}$ por $\dot{s}(t)$ y a $v_z(t)$ por \dot{z}

Para calcular $\frac{d\hat{s}(t)}{dt}$ se recurre a la expresión 6.2:

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{s}(t)}{dt} &= \frac{d(\cos \phi(t) \hat{x} + \operatorname{sen} \phi(t) \hat{y})}{dt} = \frac{d \cos \phi(t)}{dt} \hat{x} + \frac{d \operatorname{sen} \phi(t)}{dt} \hat{y} \\ &= -\frac{d\phi(t)}{dt} \operatorname{sen} \phi(t) \hat{x} + \frac{d\phi(t)}{dt} \cos \phi(t) \hat{y}\end{aligned}$$

en donde se usó que \hat{x} y \hat{y} son constantes y la regla de la cadena para obtener $\frac{d \cos \phi(t)}{dt}$ y $\frac{d \operatorname{sen} \phi(t)}{dt}$.

Denotando a $\frac{d\phi(t)}{dt}$ por $\dot{\phi}(t)$ se obtiene que:

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{s}(t)}{dt} &= -\dot{\phi}(t) \operatorname{sen} \phi(t) \hat{x} + \dot{\phi}(t) \cos \phi(t) \hat{y} = \dot{\phi}(t)(-\operatorname{sen} \phi(t) \hat{x} + \cos \phi(t) \hat{y}) \\ &= \dot{\phi}(t) \hat{\phi}(t) ,\end{aligned}$$

en donde se usó la expresión 6.3 para identificar a $\hat{\phi}(t)$

Por lo tanto:

$$\frac{d\hat{s}(t)}{dt} = \dot{\phi}(t) \hat{\phi}(t) \tag{6.4}$$

Luego, sustituyendo la ecuación 6.4 en la última expresión para $\vec{v}(t)$, es decir, en la ecuación $\vec{v}(t) = \dot{s}(t) \hat{s}(t) + s(t) \frac{d\hat{s}(t)}{dt} + \dot{z} \hat{z}$, se obtiene que:

$$\vec{v}(t) = \dot{s}(t) \hat{s}(t) + s(t) \dot{\phi}(t) \hat{\phi}(t) + \dot{z} \hat{z}$$

Por lo tanto, se concluye que $\vec{v}(t)$ posee componentes en $\hat{s}(t)$, $\hat{\phi}(t)$ y \hat{z} , en donde la orientación de $\hat{s}(t)$ y $\hat{\phi}(t)$ depende enormemente de la orientación del vector $\vec{r}(t)$ en cuestión. La razón por la que $\vec{v}(t)$ posee componentes en los tres vectores de la base cilíndrica canónica es que, en general, no es colineal a $\vec{r}(t)$ y, por lo tanto, no es perpendicular a ninguno de los vectores base mencionados.

Es importante poner de manifiesto que, en este caso, el cálculo de $\vec{v}(t)$ fue más engorroso que en el caso rectangular debido a que no todos los vectores usados como base para $\vec{r}(t)$ son constantes en el tiempo (i.e. $\hat{s} = \hat{s}(t)$) y, por lo tanto, no pueden salir de la derivación temporal. Este resultado es general: si un vector depende parcial o totalmente de la variable con respecto a la cual se está integrando o derivando, entonces no puede salir como constante de la operación en cuestión. Por esto mismo, ningún vector que no sea constante puede escribirse como una triada ordenada de constantes, en particular, $\hat{\phi}$ y \hat{s} no pueden escribirse de tal manera, a lo más, escritos como una combinación lineal de la base rectangular canónica (expresiones 6.2 y 6.3), pueden tomar la forma de una triada ordenada de variables :

$$\hat{s} = (\cos \phi, \sin \phi, 0) \qquad \hat{\phi} = (-\sin \phi, \cos \phi, 0)$$

en donde se ha usado que \hat{x} y \hat{y} , por ser constantes, pueden escribirse como $(1, 0, 0)$ y $(0, 1, 0)$ respectivamente.

Una relación análoga a la expresión 6.4 se cumple con $\frac{d\hat{\phi}(t)}{dt}$:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\phi}(t)}{dt} &= \frac{d(-\sin \phi(t) \hat{x} + \cos \phi(t) \hat{y})}{dt} = -\frac{d\sin \phi(t)}{dt} \hat{x} + \frac{d\cos \phi(t)}{dt} \hat{y} \\ &= -\dot{\phi}(t) \cos \phi(t) \hat{x} - \dot{\phi}(t) \sin \phi(t) \hat{y} = -\dot{\phi}(t)(\cos \phi(t) \hat{x} + \sin \phi(t) \hat{y}) \\ &= -\dot{\phi}(t) \hat{s}(t) \end{aligned}$$

en donde se usó la expresión 6.2 para identificar a $\hat{s}(t)$

Por lo tanto:

$$\frac{d\hat{\phi}(t)}{dt} = -\dot{\phi}(t) \hat{s}(t) \qquad (6.5)$$

Las expresiones 6.4 y 6.5 evidencian que, para un tiempo dado, $\hat{\phi}$ apunta la dirección de cambio de $\hat{s}(t)$ y $-\hat{s}(t)$ apunta en la dirección de cambio de $\hat{\phi}$, lo cual sólo corrobora lo escrito anteriormente: \hat{s} y $\hat{\phi}$ giran junto con la proyección de \vec{r} en el plano X - Y , abriendo siempre un ángulo de $\frac{\pi}{2}rad$ entre sí.

6.2.4. MÓDULO

En esta sección se presenta cómo está dado el módulo de un vector que está escrito como una combinación lineal de la base cilíndrica canónica:

Como \hat{s} , $\hat{\phi}$ y \hat{z} son una triada de vectores ortonormales, entonces el módulo de un vector con las características mencionadas está dado por la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de sus componentes, tal y como pasa con un vector escrito como combinación lineal de la base rectangular. En particular, el módulo de $\vec{v}(t)$ está dado por:

$$\|\vec{v}(t)\| = \sqrt{\dot{s}(t)^2 + (s(t)\dot{\phi}(t))^2 + \dot{z}^2}$$

► Nota: El módulo cuadrático de $\vec{v}(t)$ está dado por $\|\vec{v}(t)\|^2 = \dot{s}(t)^2 + (s(t)\dot{\phi}(t))^2 + \dot{z}^2$. Este último es el que aparece como parte de la energía cinética en la expresión para la versión en coordenadas cilíndricas de la función Lagrangiana y Hamiltoniana de una partícula sin restricciones en su movimiento ■

6.2.5. ELEMENTOS DIFERENCIALES

En esta sección se presentan los elementos diferenciales de volumen, área y longitud en términos de las coordenadas cilíndricas:

DIFERENCIAL DE LONGITUD:

Tal y como pasa en el caso rectangular, la expresión para la diferencial de longitud en coordenadas cilíndricas no es única, pues depende mucho de como esté orientada la línea en cuestión. Por ejemplo, si se considera a una circunferencia en el plano $X - Y$, centrada en el origen y de radio s (siendo s la misma cantidad considerada anteriormente), entonces una diferencial de su longitud de arco está dada por $s d\phi$

Dado a que $s d\phi$ es prácticamente una línea recta y $\hat{\phi}$ apunta en la dirección de crecimiento de ϕ para todo valor de ese ángulo, entonces $s d\phi \hat{\phi}$ es un vector con módulo igual a $s d\phi$ (pues $\hat{\phi}$ es unitario) y que está sobre tal longitud.

Si se considera a una línea paralela a s , entonces una diferencial de su longitud está dada por ds , y un vector sobre tal diferencial y con un módulo igual a ella, es $\hat{s} ds$ (pues \hat{s} es unitario). Y, si se considera una línea paralela al eje Z , entonces una diferencial de su longitud está dada por dz , y un vector sobre tal diferencial y con un módulo igual a ella, es $\hat{z} dz$ (pues \hat{z} es unitario).

El nombre “coordenadas cilíndricas” no es en vano, y puede ser interpretado como que, las longitudes que son más fáciles de obtener usando diferenciales de longitud en términos de tales coordenadas, son aquellas sobre la superficie de un cilindro.

DIFERENCIAL DE ÁREA:

Tal y como pasa en el caso rectangular, la expresión para la diferencial de área en coordenadas cilíndricas no es única, pues depende mucho de como esté orientada el área en cuestión.

En analogía con lo escrito en el resumen de las coordenadas rectangulares, los cuadrados formados por las diferenciales $s d\phi$, ds y dz son diferenciales de área en coordenadas cilíndricas. En particular, $s d\phi ds$ y $s d\phi dz$ son, respectivamente, diferenciales de área sobre el plano $X - Y$ y sobre un cilindro de radio s y coaxial con el eje Z . Estas diferenciales de área son iguales al módulo del producto cruz de los vectores que están sobre las diferenciales de

longitud que las forman y que poseen un módulo igual a ellas, Así pues, la primera diferencial de área es igual a $||s d\phi \hat{\phi} \times ds \hat{s}||$ y la segunda es igual a $||s d\phi \hat{\phi} \times dz \hat{z}||$

Comprobación de lo último:

$$||s d\phi \hat{\phi} \times ds \hat{s}|| = |s d\phi ds| ||\hat{\phi} \times \hat{s}|| = s d\phi ds ||-\hat{z}|| = s d\phi ds$$

En lo anterior se usó que, por definición, s siempre es positivo, y se convino en que $d\phi$ y ds se miden de tal manera que siempre son positivos. Además, también se usó que anteriormente se demostró la igualdad $\hat{s} \times \hat{\phi} = \hat{z}$, que, a su vez, implica: $\hat{\phi} \times \hat{s} = -\hat{z}$

Análogamente:

$$||s d\phi \hat{\phi} \times dz \hat{z}|| = |s d\phi dz| ||\hat{\phi} \times \hat{z}|| = s d\phi dz ||\hat{s}|| = s d\phi dz$$

Se puede obtener que $\hat{\phi} \times \hat{z} = \hat{s}$ de la misma forma en la que se obtuvo que $\hat{s} \times \hat{\phi} = \hat{z}$.

El nombre “coordenadas cilíndricas” no es en vano, y puede ser interpretado como que, las áreas que son más fáciles de obtener usando diferenciales de área en términos de tales coordenadas, son aquellas que conforman a un cilindro.

DIFERENCIAL DE VOLUMEN:

Por razones análogas al caso rectangular, la diferencial de volumen en coordenadas cilíndricas posee una única expresión, y está dada por el producto de las diferenciales de longitud en coordenadas cilíndricas tratadas anteriormente o, análogamente, por el valor absoluto del triple producto escalar de los vectores asociados a tales diferenciales, es decir, está dada por:

$$\begin{aligned}
 dV &= |s d\phi \hat{\phi} \cdot (\hat{s} ds \times \hat{z} dz)| = |s d\phi ds dz| |\hat{\phi} \cdot (\hat{s} \times \hat{z})| \\
 &= |s d\phi ds dz| |\hat{\phi} \cdot (-\hat{\phi})| = s d\phi ds dz |\hat{\phi} \cdot \hat{\phi}| = s d\phi ds dz
 \end{aligned}$$

en donde se puede obtener que $\hat{s} \times \hat{z} = -\hat{\phi}$ de la misma forma en la que se obtuvo que $\hat{s} \times \hat{\phi} = \hat{z}$.

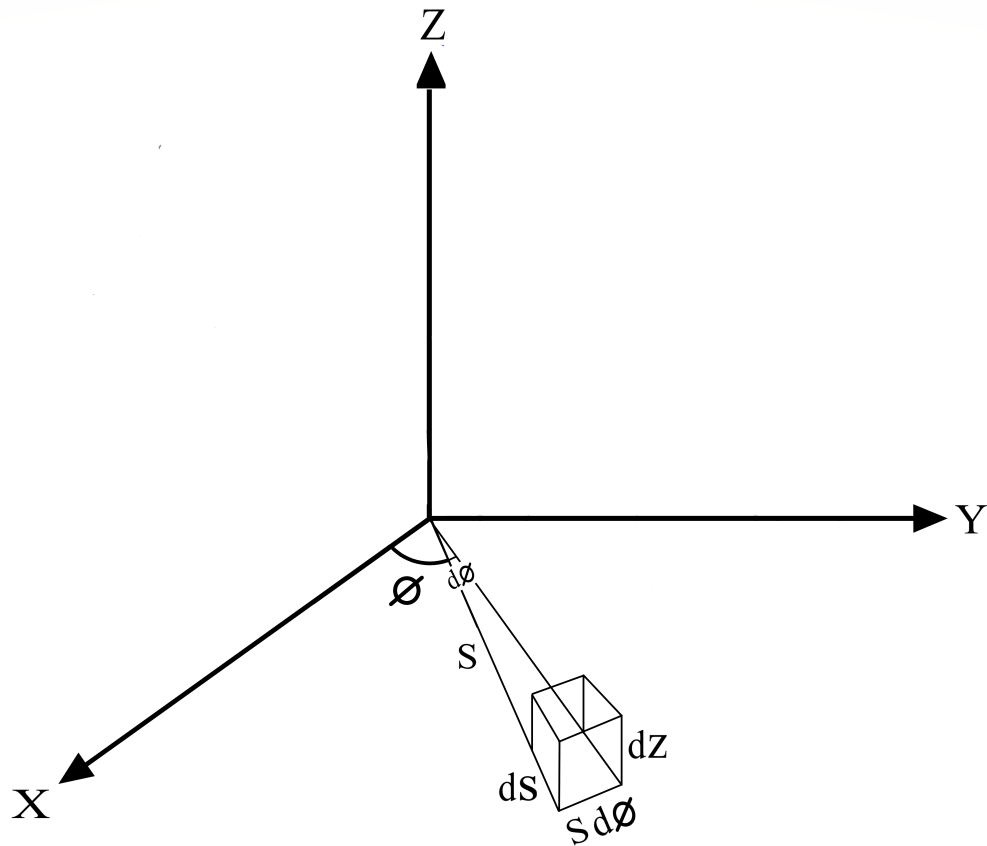


Figura 6.7: Diferencial de volumen (dV) en coordenadas cilíndricas.

Por lo tanto:

$$dV = s d\phi ds dz \quad (6.6)$$

El nombre “coordenadas cilíndricas” no es en vano, y puede ser interpretado como que, los volúmenes que son más fáciles de obtener usando la expresión 6.6, son volúmenes de cilindros, en particular, si son coaxiales con el eje Z , pues éstos últimos tienen una gran simetría con respecto a las coordenadas en cuestión, ya que su eje coincide con el eje de rotación de la base vectorial canónica de las coordenadas mencionadas.

6.2.6. RANGO DE VALORES

En esta sección se presenta el rango de valores de las coordenadas cilíndricas:

El rango de valores de s es de 0 a ∞ , pues la proyección de cualquier vector \vec{r} sobre el plano $X - Y$ es a lo menos 0 y a lo más ∞ ; el rango de valores de z es el mismo que en las coordenadas rectangulares; y el rango de valores de ϕ es de 0 rad a $2\pi rad$, pues, dado el rango de valores de s y z , es suficiente para describir a cualquier vector \vec{r} en E^3 .

6.3. COORDENADAS ESFÉRICAS

6.3.1. VECTOR POSICIÓN

En esta sección se expone el sistema de coordenadas esféricas y se da un vector posición como una combinación lineal de su base vectorial canónica:

Todo vector \vec{r} en E^3 puede verse como $|\vec{r}|\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$, en donde $\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$ es un vector unitario en la dirección de \vec{r} . Si se conviene en definir a $\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$ como \hat{r} y a $|\vec{r}|$ como r ,

entonces se obtiene:

$$\vec{r} = r \hat{r}$$

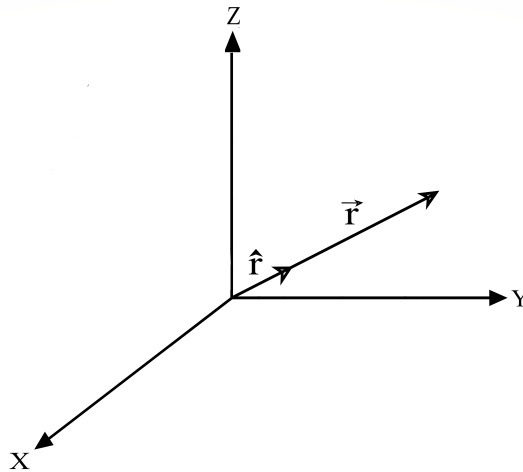


Figura 6.8: : Vectores \vec{r} y \hat{r} en E^3

En analogía con lo que se hace en la presentación de las coordenadas cilíndricas (capítulo 6, sección 6.2) y su base vectorial canónica, se toma a \hat{r} como el primer elemento de la base esférica canónica. El segundo y tercer vector base se obtendrán usando las propiedades de \hat{r} y la geometría del sistema. Para lo anterior, conviene expresar a \hat{r} como una combinación lineal de la base canónica rectangular:

Definiendo a θ como el ángulo que abre \vec{r} con la parte positiva del eje Z (esto quiere decir que tal ángulo se mide desde la parte positiva del eje Z) y a ϕ de la misma forma que en el caso cilíndrico, la expresión mencionada para \hat{r} está dada por:

$$\begin{aligned}\hat{r} &= |\hat{r}| \operatorname{sen} \theta \cos \phi \hat{x} + |\hat{r}| \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi \hat{y} + |\hat{r}| \cos \theta \hat{z} \\ &= \operatorname{sen} \theta \cos \phi \hat{x} + \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi \hat{y} + \cos \theta \hat{z}\end{aligned}$$

en donde se ha usado que \hat{r} es unitario.

Por lo tanto:

$$\hat{r} = \operatorname{sen} \theta \cos \phi \hat{x} + \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi \hat{y} + \cos \theta \hat{z} \quad (6.7)$$

De manera análoga a lo hecho en el caso cilíndrico, se puede demostrar que la expresión 6.7 es, en efecto, un vector unitario.

El segundo elemento de la base esférica canónica es llamado $\hat{\theta}$, y se define como una rotación de \hat{r} en $\frac{\pi}{2}$ radianes en la dirección de crecimiento de θ . Así pues:

$$\begin{aligned}\hat{\theta} &= \hat{r}, \text{ rotado } \frac{\pi}{2} \text{ radianes en la dirección de crecimiento de } \theta \\ &= \operatorname{sen}(\theta + \frac{\pi}{2}) \cos \phi \hat{x} + \operatorname{sen}(\theta + \frac{\pi}{2}) \operatorname{sen} \phi \hat{y} + \cos(\theta + \frac{\pi}{2}) \hat{z} \\ &= (\operatorname{sen} \theta \cos \frac{\pi}{2} + \cos \theta \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}) \cos \phi \hat{x} + (\operatorname{sen} \theta \cos \frac{\pi}{2} + \cos \theta \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}) \operatorname{sen} \phi \hat{y} \\ &\quad + (\cos \theta \cos \frac{\pi}{2} - \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}) \hat{z} \\ &= \cos \theta \cos \phi \hat{x} + \cos \theta \operatorname{sen} \phi \hat{y} - \operatorname{sen} \theta \hat{z}\end{aligned}$$

en donde se han usado las mismas identidades e igualdades que cuando se obtuvo la expresión para $\hat{\phi}$ en las coordenadas cilíndricas.

Por lo tanto:

$$\hat{\theta} = \cos \theta \cos \phi \hat{x} + \cos \theta \sin \phi \hat{y} - \sin \theta \hat{z} \quad (6.8)$$

Y, de nuevo, de manera análoga a lo hecho en el caso cilíndrico, se puede demostrar que la expresión 6.8 es, en efecto, un vector unitario.

El tercer elemento de la base esférica canónica es llamado $\hat{\phi}$, y se define como el producto cruz de \hat{r} y $\hat{\theta}$. Así pues:

$$\begin{aligned} \hat{\phi} &= \hat{r} \times \hat{\theta} \\ &= (\sin \theta \cos \phi \hat{x} + \sin \theta \sin \phi \hat{y} + \cos \theta \hat{z}) \times (\cos \theta \cos \phi \hat{x} + \cos \theta \sin \phi \hat{y} - \sin \theta \hat{z}) \\ &= \sin \theta \cos \phi \cos \theta \sin \phi (\hat{x} \times \hat{y}) - \sin^2 \theta \cos \phi (\hat{x} \times \hat{z}) + \sin \theta \sin \phi \cos \theta \cos \phi (\hat{y} \times \hat{x}) \\ &\quad - \sin^2 \theta \sin \phi (\hat{y} \times \hat{z}) + \cos^2 \theta \cos \phi (\hat{z} \times \hat{x}) + \cos^2 \theta \sin \phi (\hat{z} \times \hat{y}) \\ &= \sin \theta \cos \phi \cos \theta \sin \phi \hat{z} + \sin^2 \theta \cos \phi \hat{y} - \sin \theta \cos \phi \cos \theta \sin \phi \hat{z} - \sin^2 \theta \sin \phi \hat{x} \\ &\quad + \cos^2 \theta \cos \phi \hat{y} - \cos^2 \theta \sin \phi \hat{x} \\ &= (-\sin^2 \theta \sin \phi - \cos^2 \theta \sin \phi) \hat{x} + (\sin^2 \theta \cos \phi - \cos^2 \theta \cos \phi) \hat{y} \\ &= -(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \sin \phi \hat{x} + (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \cos \phi \hat{y} = -\sin \phi \hat{x} + \cos \phi \hat{y} \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\hat{\phi} = -\sin \phi \hat{x} + \cos \phi \hat{y} ,$$

que no es otra cosa que el $\hat{\phi}$ calculado en la exposición de las coordenadas cilíndricas, es decir, que la base cilíndrica canónica y la base esférica canónica comparten este elemento.

Las expresiones 6.7 y 6.8 ponen a \hat{r} y $\hat{\theta}$ como una combinación lineal de la base rectangular canónica, e indican que no son constantes, al igual que $\hat{\phi}$.

Por definición, \hat{r} apunta siempre en la dirección de crecimiento de \vec{r} . Así mismo, en la presentación de las coordenadas cilíndricas ya se demostró que $\hat{\phi}$ apunta siempre en la dirección de crecimiento de ϕ . De manera análoga, en este caso se puede demostrar que $\hat{\theta}$ apunta siempre en la dirección de crecimiento de θ . Siguiendo razonamientos similares a los presentados en las coordenadas cilíndricas, se concluye que \hat{r} , $\hat{\theta}$ y $\hat{\phi}$ giran junto con \vec{r} , apuntando siempre en las direcciones de crecimiento previamente mencionadas.

Por construcción, \hat{r} , $\hat{\theta}$ y $\hat{\phi}$ son una triada de vectores ortonormales que, además, hacen que el sistema de coordenadas esféricas sea un sistema a derechas (pues $\hat{\phi} = \hat{r} \times \hat{\theta}$).

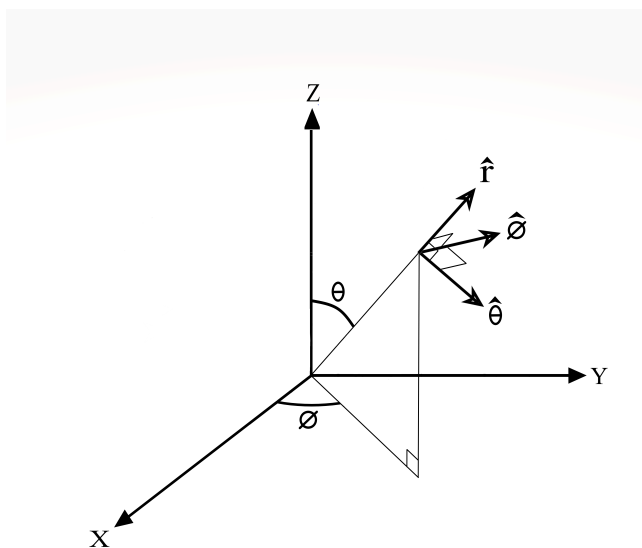


Figura 6.9: Vectores \hat{r} , $\hat{\theta}$ y $\hat{\phi}$ en E^3

La representación de un vector \vec{r} en términos de la base esférica canónica ya fue dada, y es:

$$\vec{r} = r \hat{r}$$

La razón por la que \vec{r} no posee componentes en $\hat{\theta}$ y $\hat{\phi}$ es porque, para todo valor de θ y ϕ , es perpendicular a ellos, ya que \hat{r} lo es.

6.3.2. RELACIÓN ENTRE COORDENADAS

En esta sección se dan algunas de las relaciones entre las coordenadas esféricas y rectangulares:

La relación entre r y las coordenadas rectangulares del vector en cuestión, es:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

pues r no es más que el módulo de \vec{r}

Aunque θ y ϕ no aparecen de manera explícita en la representación de \vec{r} en términos de la base esférica canónica, son lo que le da su carácter variable a \hat{r} por medio de su seno y coseno. Por lo tanto, es conveniente que también se dé su relación con las coordenadas rectangulares de \vec{r} :

En la presentación de las coordenadas cilíndricas (capítulo 6, sección 6.3) se demuestra que:

$$\phi = \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

De la figura 6.10 se sigue que:

$$\cos \theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \iff \theta = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

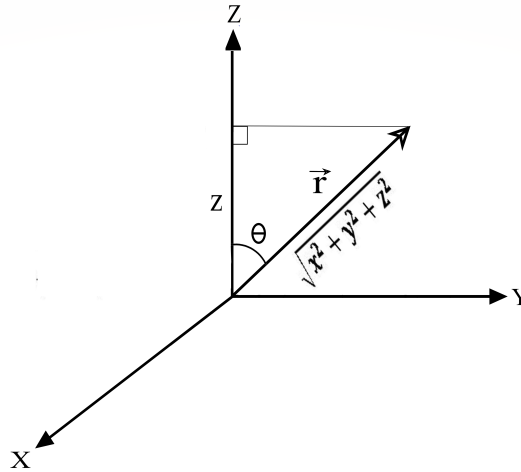


Figura 6.10: Relación entre θ y las coordenadas rectangulares

Debido a que r , θ y ϕ son, a fin de cuentas, las variables involucradas en la expresión para \vec{r} en términos de la base esférica canónica, entonces a tales variables son a las que se les llama, sin más, “coordenadas esféricas“, y, en este caso, las diferenciales de volumen, área y longitud se escriben en términos de ellas.

6.3.3. DERIVADA TEMPORAL

En esta sección se presenta el desarrollo de la derivada temporal de un vector posición escrito como combinación lineal de la base esférica canónica, bajo el supuesto de que tal vector depende del tiempo:

Si \vec{r} es el vector posición de una partícula que, por alguna razón, evoluciona en E^3 , entonces está en función del tiempo. Así pues, su magnitud r , y sus inclinaciones angulares ϕ y θ son funciones del tiempo. De tal manera, \hat{r} tendrá una dependencia temporal por medio del seno y el coseno de ϕ y θ . Por

lo tanto, \vec{r} puede escribirse como:

$$\vec{r}(t) = r(t) \hat{r}(t)$$

en donde todas las expresiones involucradas dependen del tiempo.

Así pues, la velocidad de la partícula en cuestión está dada por:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d(r(t) \hat{r}(t))}{dt} = \frac{dr(t)}{dt} \hat{r}(t) + r(t) \frac{d\hat{r}(t)}{dt} = \dot{r}(t) \hat{r}(t) + r(t) \frac{d\hat{r}(t)}{dt}$$

en donde se denotó a $\frac{dr(t)}{dt}$ por $\dot{r}(t)$

Para calcular $\frac{d\hat{r}(t)}{dt}$ se recurre a la expresión 6.7:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{r}(t)}{dt} &= \frac{d(\text{sen } \theta(t) \cos \phi(t) \hat{x} + \text{sen } \theta(t) \text{sen } \phi(t) \hat{y} + \cos \theta(t) \hat{z})}{dt} \\ &= \frac{d(\text{sen } \theta(t) \cos \phi(t))}{dt} \hat{x} + \frac{d(\text{sen } \theta(t) \text{sen } \phi(t))}{dt} \hat{y} + \frac{d \cos \theta(t)}{dt} \hat{z} \\ &= \left(\frac{d \text{sen } \theta(t)}{dt} \cos \phi(t) + \text{sen } \theta(t) \frac{d \cos \phi(t)}{dt} \right) \hat{x} + \left(\frac{d \text{sen } \theta(t)}{dt} \text{sen } \phi(t) + \text{sen } \theta(t) \frac{d \text{sen } \phi(t)}{dt} \right) \hat{y} \\ &\quad + \frac{d \cos \theta(t)}{dt} \hat{z} \\ &= (\dot{\theta}(t) \cos \theta(t) \cos \phi(t) - \dot{\phi}(t) \text{sen } \theta(t) \text{sen } \phi(t)) \hat{x} \\ &\quad + (\dot{\theta}(t) \cos \theta(t) \text{sen } \phi(t) + \dot{\phi}(t) \text{sen } \theta(t) \cos \phi(t)) \hat{y} - \dot{\theta}(t) \text{sen } \theta(t) \hat{z} \\ &= \dot{\theta}(t) (\cos \theta(t) \cos \phi(t) \hat{x} + \cos \theta(t) \text{sen } \phi(t) \hat{y} - \text{sen } \theta(t) \hat{z}) \\ &\quad + \dot{\phi}(t) \text{sen } \theta(t) (-\text{sen } \phi(t) \hat{x} + \cos \phi(t) \hat{y}) \end{aligned}$$

Usando las expresiones 6.8 y 6.3 se obtiene que:

$$\frac{d\hat{r}(t)}{dt} = \dot{\theta}(t) \hat{\theta}(t) + \dot{\phi}(t) \operatorname{sen} \theta(t) \hat{\phi}(t) \quad (6.9)$$

Luego, sustituyendo la expresión 6.9 en la última expresión para $\vec{v}(t)$, es decir, en la igualdad $\vec{v}(t) = \dot{r}(t) \hat{r}(t) + r(t) \frac{d\hat{r}(t)}{dt}$, se obtiene que:

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \dot{r}(t) \hat{r}(t) + r(t) [\dot{\theta}(t) \hat{\theta}(t) + \dot{\phi}(t) \operatorname{sen} \theta(t) \hat{\phi}(t)] \\ &= \dot{r}(t) \hat{r}(t) + r(t) \dot{\theta}(t) \hat{\theta}(t) + r(t) \dot{\phi}(t) \operatorname{sen} \theta(t) \hat{\phi}(t) \end{aligned}$$

Las conclusiones y observaciones que pueden hacerse con respecto a la expresión esférica para $\vec{v}(t)$ son análogas a las hechas en el caso cilíndrico.

Como complemento, se calculará $\frac{d\hat{\theta}(t)}{dt}$:

Usando la expresión 6.8 se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\theta}(t)}{dt} &= \frac{d(\cos \theta(t) \cos \phi(t) \hat{x} + \cos \theta(t) \operatorname{sen} \phi(t) \hat{y} - \operatorname{sen} \theta(t) \hat{z})}{dt} \\ &= \frac{d(\cos \theta(t) \cos \phi(t))}{dt} \hat{x} + \frac{d(\cos \theta(t) \operatorname{sen} \phi(t))}{dt} \hat{y} - \frac{d \operatorname{sen} \theta(t)}{dt} \hat{z} \\ &= \left(\frac{d \cos \theta(t)}{dt} \cos \phi(t) + \cos \theta(t) \frac{d \cos \phi(t)}{dt} \right) \hat{x} + \left(\frac{d \cos \theta(t)}{dt} \operatorname{sen} \phi(t) + \cos \theta(t) \frac{d \operatorname{sen} \phi(t)}{dt} \right) \hat{y} \\ &\quad - \frac{d \operatorname{sen} \theta(t)}{dt} \hat{z} \\ &= (-\dot{\theta}(t) \operatorname{sen} \theta(t) \cos \phi(t) - \dot{\phi}(t) \cos \theta(t) \operatorname{sen} \phi(t)) \hat{x} \\ &\quad + (-\dot{\theta}(t) \operatorname{sen} \theta(t) \operatorname{sen} \phi(t) + \dot{\phi}(t) \cos \theta(t) \cos \phi(t)) \hat{y} - \dot{\theta}(t) \cos \theta(t) \hat{z} \\ &= -\dot{\theta}(t) (\operatorname{sen} \theta(t) \cos \phi(t) \hat{x} + \operatorname{sen} \theta(t) \operatorname{sen} \phi(t) \hat{y} + \cos \theta(t) \hat{z}) \end{aligned}$$

$$+ \dot{\phi}(t) \cos \theta(t) (-\sin \phi(t) \hat{x} + \cos \phi(t) \hat{y})$$

Usando las ecuaciones 6.7 y 6.3 se obtiene que:

$$\frac{d\hat{\theta}(t)}{dt} = -\dot{\theta}(t) \hat{r}(t) + \dot{\phi}(t) \cos \theta(t) \hat{\phi}(t) \quad (6.10)$$

En la exposición de las coordenadas cilíndricas ya se calculó $\frac{d\hat{\phi}(t)}{dt}$ (es la expresión 6.5, en donde $\hat{s} = \hat{r}(\theta = \frac{\pi}{2})$, pues el valor $\theta = \frac{\pi}{2}$ corresponde a vectores sobre el plano X - Y).

6.3.4. MÓDULO

En esta sección se presenta cómo está dado el módulo de un vector que está escrito como una combinación lineal de la base esférica canónica:

Como \hat{r} , $\hat{\theta}$ y $\hat{\phi}$ son una triada de vectores ortonormales, entonces el módulo de un vector con las características mencionadas está dado por la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de sus componentes, tal y como pasa con un vector escrito como combinación lineal de la base rectangular. En particular, el módulo de $\vec{v}(t)$ está dado por:

$$\|\vec{v}(t)\| = \sqrt{\dot{r}(t)^2 + (r(t)\dot{\theta}(t))^2 + (r(t)\dot{\phi}(t) \sin \theta(t))^2}$$

► Nota: El módulo cuadrado de $\vec{v}(t)$ está dado por $\|\vec{v}(t)\|^2 = \dot{r}(t)^2 + (r(t)\dot{\theta}(t))^2 + (r(t)\dot{\phi}(t) \sin \theta(t))^2$. Esta última suma de tres términos es la que aparece como parte de la energía cinética en la expresión para la versión en coordenadas esféricas de la función Lagrangiana y Hamiltoniana de una partícula sin restricciones en su movimiento ■

6.3.5. ELEMENTOS DIFERENCIALES

En esta sección se presentan los elementos diferenciales de volumen, área y longitud en términos de las coordenadas esféricas:

DIFERENCIAL DE LONGITUD:

Tal y como pasa en el caso rectangular y cilíndrico, la expresión para la diferencial de longitud en coordenadas esféricas no es única, pues depende mucho de como esté orientada la línea en cuestión. Por ejemplo, si se considera a una circunferencia en el plano $X - Y$, centrada en el origen y de radio $r \sin \theta$ ($r \sin \theta$ es la proyección de r sobre el plano $X - Y$), entonces la expresión para su diferencial de longitud es la misma que en el caso cilíndrico, siempre y cuando se cambie s por $r \sin \theta$.

Análogamente, si se considera a una circunferencia centrada en el origen, de radio r y diámetro sobre el eje Z , entonces una diferencial de su longitud está dada por $r d\theta$, y un vector sobre tal diferencial y con un módulo igual a ella, es $\hat{\theta} r d\theta$ (pues $\hat{\theta}$ es unitario). Y, si se considera una línea paralela a r , entonces una diferencial de su longitud está dada por dr , y un vector sobre tal diferencial y con un módulo igual a ella, es $\hat{r} dr$ (pues \hat{r} es unitario).

El nombre “coordenadas esféricas” no es en vano, y puede ser interpretado como que, las longitudes que son más fáciles de obtener usando diferenciales de longitud en términos de tales coordenadas, son aquellas sobre la superficie de una esfera.

DIFERENCIAL DE ÁREA:

Tal y como pasa en el caso rectangular y cilíndrico, la expresión para la diferencial de área en coordenadas esféricas no es única, pues depende mucho de como esté orientada el área en cuestión.

En analogía con lo que pasa en el caso rectangular y cilíndrico, los cuadrados

formados por las diferenciales de longitud $r \operatorname{sen} \theta d\phi$, dr y $rd\theta$ son diferenciales de área en coordenadas esféricas, en particular, $rd\theta \operatorname{sen} \theta d\phi = r^2 \operatorname{sen} \theta d\theta d\phi$ es una diferencial de área de un cascarón esférico centrado en el origen y de radio r . Esta diferencial es igual al módulo del producto cruz de los vectores que están sobre las diferenciales de longitud que la forman y que poseen un módulo igual a ellas, es decir es igual a $\|rd\theta \hat{\theta} \times r \operatorname{sen} \theta d\phi \hat{\phi}\|$:

$$\begin{aligned} \|rd\theta \hat{\theta} \times r \operatorname{sen} \theta d\phi \hat{\phi}\| &= |r^2 \operatorname{sen} \theta d\theta d\phi| \|\hat{\theta} \times \hat{\phi}\| = r^2 \operatorname{sen} \theta d\theta d\phi \|\hat{r}\| \\ &= r^2 \operatorname{sen} \theta d\theta d\phi \end{aligned}$$

En lo anterior se usó que, por definición, r siempre es positivo, y se convino en que $d\theta$ y $d\phi$ se miden de tal manera que siempre son positivos. Además, también se usó que se puede demostrar la igualdad $\hat{\theta} \times \hat{\phi} = \hat{r}$ de la misma manera en la que se demostró que $\hat{r} \times \hat{\theta} = \hat{\phi}$.

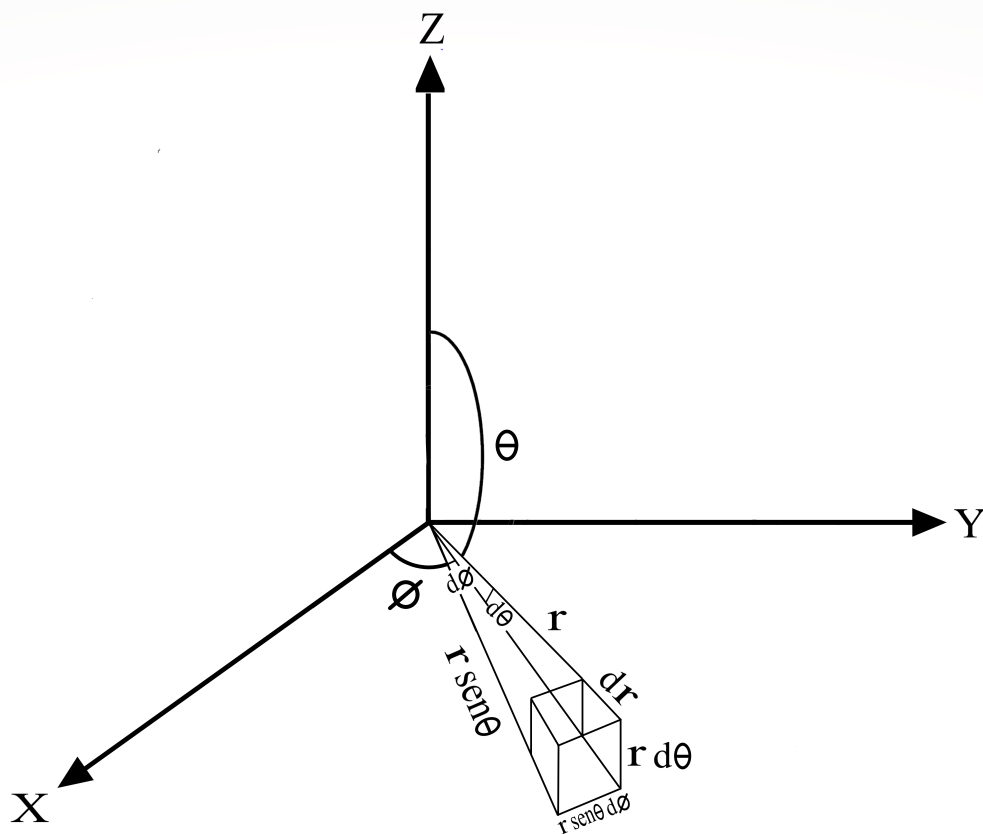
En este caso ya se mencionó que la expresión calculada es una diferencial de área de un cascarón esférico centrado en el origen y de radio r , y es la única área relativamente sencilla de calcular utilizando la expresión en cuestión.

DIFERENCIAL DE VOLUMEN:

Por razones análogas al caso rectangular y cilíndrico, la diferencial de volumen en coordenadas cilíndricas posee una única expresión, y está dada por el producto de las diferenciales de longitud en coordenadas cilíndricas tratadas anteriormente o, análogamente, por el valor absoluto del triple producto escalar de los vectores asociados a tales diferenciales, es decir, está dada por:

$$\begin{aligned} dV &= |rd\theta \hat{\theta} \bullet (r \operatorname{sen} \theta d\phi \hat{\phi} \times dr \hat{r})| = |r^2 \operatorname{sen} \theta dr d\theta d\phi| |\hat{\theta} \bullet (\hat{\phi} \times \hat{r})| \\ &= r^2 \operatorname{sen} \theta dr d\theta d\phi |\hat{\theta} \bullet \hat{\theta}| = r^2 \operatorname{sen} \theta dr d\theta d\phi \end{aligned}$$

en donde se puede demostrar que $\hat{\phi} \times \hat{r} = \hat{\theta}$ haciendo uso de los procedimientos ya mencionados anteriormente.

Figura 6.11: Diferencial de volumen (dV) en coordenadas esféricas

Por lo tanto:

$$dV = r^2 \operatorname{sen} \theta dr d\theta d\phi \quad (6.11)$$

El nombre “coordenadas esféricas” no es en vano, y puede ser interpretado como que los volúmenes que son más fáciles de obtener usando la expresión

6.11, son volúmenes de esferas. En particular, si poseen su centro en el origen de coordenadas, pues estas últimas tienen una gran simetría con respecto a las coordenadas en cuestión, ya que su centro coincide con el punto de rotación de la base vectorial canónica de las coordenadas mencionadas.

6.3.6. RANGO DE VALORES

En esta sección se presenta el rango de valores de las coordenadas esféricas:

El rango de valores de r es de 0 a ∞ , pues el módulo de cualquier vector \vec{r} es a lo menos 0 a lo más ∞ ; el rango de valores de ϕ es el mismo que en las coordenadas cilíndricas; y el rango de valores de θ es de 0 *rad* a π *rad*, pues, dado el rango de valores de r y ϕ , es suficiente para describir a cualquier vector \vec{r} en E^3 .

6.3.7. COMENTARIOS

Siempre que se tenga una base ortogonal (un conjunto de tres vectores perpendiculares, mas no forzosamente unitarios) de E^3 , el producto punto, el producto cruz y el módulo de vectores escritos como combinación lineal de la base en cuestión pueden obtenerse de una forma análoga al caso rectangular. Así pues, si \hat{q}_1 , \hat{q}_2 y \hat{q}_3 conforman una base ortogonal de E^3 y se tiene que \vec{v} y \vec{u} son vectores en ese mismo espacio vectorial escritos de la forma: $\vec{v} = v_1\hat{q}_1 + v_2\hat{q}_2 + v_3\hat{q}_3$ y $\vec{u} = u_1\hat{q}_1 + u_2\hat{q}_2 + u_3\hat{q}_3$, en donde v_i y u_i son números reales ($i = 1, 2, 3$), entonces:

$$\vec{v} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \hat{q}_1 & \hat{q}_2 & \hat{q}_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = (v_2u_3 - v_3u_2)\hat{q}_1 - (v_1u_3 - v_3u_1)\hat{q}_2 + (v_1u_2 - v_2u_1)\hat{q}_3$$

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = (v_1\hat{q}_1 + v_2\hat{q}_2 + v_3\hat{q}_3) \cdot (u_1\hat{q}_1 + u_2\hat{q}_2 + u_3\hat{q}_3)$$

$$= v_1 u_1 (\hat{q}_1 \bullet \hat{q}_1) + v_2 u_2 (\hat{q}_2 \bullet \hat{q}_2) + v_3 u_3 (\hat{q}_3 \bullet \hat{q}_3)$$

En la última igualdad se usó la distributividad del producto punto sobre la suma y que \hat{q}_1 , \hat{q}_2 y \hat{q}_3 son ortogonales, es decir, que $\hat{q}_i \bullet \hat{q}_j = 0$ si $i \neq j$ ($i, j = 1, 2, 3$)

$$\begin{aligned} \|\vec{v}\| &= \sqrt{\vec{v} \bullet \vec{v}} = \sqrt{(v_1 \hat{q}_1 + v_2 \hat{q}_2 + v_3 \hat{q}_3) \bullet (v_1 \hat{q}_1 + v_2 \hat{q}_2 + v_3 \hat{q}_3)} \\ &= \sqrt{(v_1)^2 (\hat{q}_1 \bullet \hat{q}_1) + (v_2)^2 (\hat{q}_2 \bullet \hat{q}_2) + (v_3)^2 (\hat{q}_3 \bullet \hat{q}_3)} \end{aligned}$$

Tal y como ocurre con todo vector en E^3 , $\hat{q}_i \bullet \hat{q}_i = \|\hat{q}_i\|^2$. Sin embargo, como \hat{q}_1 , \hat{q}_2 y \hat{q}_3 no son forzosamente unitarios, entonces $\|\hat{q}_i\|^2$ no tiene porqué ser igual a uno. Ahora, si se supone que \hat{q}_1 , \hat{q}_2 y \hat{q}_3 son unitarios, es decir, que conforman una base ortonormal de E^3 y que $\|\hat{q}_i\|^2 = 1^2 = 1$, entonces $\vec{v} \times \vec{u}$ no cambia, pero $\vec{v} \bullet \vec{u}$ y $\|\vec{v}\|$ pueden reescribirse como:

$$\vec{v} \bullet \vec{u} = v_1 u_1 + v_2 u_2 + v_3 u_3 \quad \text{y} \quad \|\vec{v}\| = \sqrt{(v_1)^2 + (v_2)^2 + (v_3)^2}$$

6.4. CONCLUSIONES

Primera conclusión:

En las producciones estudiantiles se observó que, en general, ellos sólo manejan la base rectangular, desconociendo totalmente la base cilíndrica y esférica. Esto fue especialmente notorio cuando en los problemas de la tarea se les pidió escribir cantidades vectoriales, pues hicieron caso omiso de las simetrías y recurrieron a escribirlas en términos de la primera base mencionada.

Además, se detectó una incomprensión de varios de conceptos que se tratan desde el inicio de la licenciatura, tales como la diferencia entre vectores y escalares, el significado de la integral y las unidades de las cantidades físicas. Por lo tanto, se concluye que el trabajo que se hizo a nivel de salón de clase, tareas y libros de texto, no fue el apropiado para que los estudiantes encuestados dominaran los conceptos y bases mencionadas.

Segunda conclusión:

La extensión de esta propuesta es considerablemente mayor a la que se ocupa para el desarrollo de temas en algunos libros de texto de física y matemáticas de nivel licenciatura. Esto, sumado a la falta de manejo de conceptos elementales puesta de manifiesto por el grupo de estudiantes encuestados, permite concluir que, en los libros mencionados, los desarrollos están demasiado condensados y no son de mucha ayuda para subsanar deficiencias conceptuales importantes.

Tercera conclusión:

En vista de todo lo anterior, se concluye que es necesario dar nuevas propuestas para el desarrollo de los temas de física, tanto a nivel de clase, como de tareas y libros de texto.

Bibliografía

- [1] HALLIDAY, RESNICK Y WALKER, *Fundamentos de física*, octava edición, Grupo editorial patria, México, DF, 2013.
- [2] ARFKEN Y WEBER, *Mathematical methods for physicists*, quinta edición, Harcourt Academic Press, EUA, San Diego, 2001.
- [3] RONALD K. WANGSNESS, *Electromagnetic fields*, segunda edición, John Wiley and sons, EUA, Nueva York, 1986.
- [4] EUGENE, H., *Óptica*, tercera edición, Pearson Educación, España, Madrid, 2000.