



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Fisico-Matemáticas

Generación de vórtices ópticos utilizando el modulador
espacial de luz de cristal líquido

go q y o ou knk ks

Colegio de Física

nyt v o qqv yk nks yk k sk vl ouny u nos p knv no

yv

a .C. Svk íu Mk mík Mk mík

k o v knv yv

D . Aun o e. b v r



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Fisico-Matemáticas

Generación de vórtices ópticos utilizando el modulador
espacial de luz de cristal líquido

go q y o ou knk ks

Colegio de Física

nyt v o qqv yk nks yk k sk vl ounyu nos p knv no

yv

a .C. Svk íu Mk mík Mk mík

k o v knv yv

D . Aun o e. b v r

Título: Generación de vórtices ópticos utilizando el modulador espacial de luz de cristal líquido

Estudiante: M.C. JOAQUÍN GARCÍA GARCÍA

COMITÉ

Dr. Maximino Luis Arroyo Carrasco
Presidente

Dr. Cruz Meneses Fabián
Secretario

Dr. Rubén Ramos García
Vocal

Dr. Andrey S. Ostrovsky
Asesor

Agradecimientos

Primeramente, quisiera agradecer a mi Director de Tesis el Dr. Andrey S. Ostrovsky por el tiempo y el apoyo, por compartir su conocimiento, por haberme guiado, no solo en la elaboración de esta tesis, sino a lo largo de mi carrera universitaria y haberme brindado el apoyo para desarrollarme profesionalmente.

Gracias al CONACYT por apoyarme económicamente mediante una beca que me hizo posible realizar mis estudios de doctorado.

Agradezco a los miembros del comité tutorial por su apoyo, comentarios, disposición y asesoramiento; al Dr. Miguel Ángel Olvera, la Dr. Carolina Rickenstoff y mis compañeros de laboratorio por sus consejos y apoyo.

Gracias a mi familia por apoyarme constante e incondicionalmente durante toda mi vida. Muy especialmente a mi novia Sofía por su amor, su apoyo, su paciencia, su comprensión y solidaridad. Gracias por soportarme y darme ánimos para seguir adelante con este proyecto.

Finalmente quisiera agradecer a todo el personal administrativo de posgrado de la facultad de Ciencias Fisicomatemáticas por su asistencia con los diferentes trámites administrativos y académicos.

Índice general

1. Introducción	1
2. MEL-CL	3
2.1. Introducción	3
2.2. Modelo Físico Matemático	3
2.3. MEL-CL modelo PLUTO-VIS	6
2.4. Caracterización óptica	9
2.5. Conclusiones	15
3. Vórtice Óptico Perfecto	17
3.1. Introducción	17
3.2. Definición del vórtice óptico perfecto y sus representaciones	18
3.2.1. Generación del VOP con base en la serie de Bessel	18
3.2.2. Generación del VOP con base en la fórmula de clausura	22
3.3. Atrapamiento óptico de partículas usando el VOP	26
3.4. Conclusiones	29
4. Vórtice óptico invariante en propagación	31
4.1. Introducción	31
4.1.1. Campo óptico invariante en propagación	32
4.1.2. Estructura modal del campo invariante en propagación	34
4.2. Técnica de generación del vórtice óptico invariante en propagación	38
4.3. Experimentos	39
4.4. Efecto de funciones de apodización	40
4.5. Conclusiones	52
5. Vórtice óptico perfecto polarizado	53
5.1. Introducción	53
5.1.1. Campo vectorial	54
5.1.2. Haces vectoriales cilíndricos	54
5.2. VOP polarizado	55
5.3. Generación de VOP polarizado	55
5.4. Enfocamiento de VOP	57
5.5. Experimentos	65
5.5.1. Generación VOP polarizado	65
5.5.2. Caracterización de Polarización	67
5.5.3. Enfocamiento	67
5.6. Conclusiones	71
6. Conclusiones generales	75

A. Regímenes de las pinzas ópticas	77
A.1. Óptica de rayos	77
A.2. MIE	79
A.3. Rayleigh	79
B. Parámetros de Stokes	81
B.1. Definición fenomenológica de los parámetros de Stokes	81
B.2. Deducción matemática de los parámetros de Stokes	81
B.3. Medición de los parámetros de Stokes	84
C. Publicaciones	87
D. Participaciones en congresos	97

Resumen

El concepto del Vórtice Óptico Perfecto ha sido recientemente introducido como un modelo teórico que desacopla la dependencia del radio y carga topológica en un vórtice óptico. Sin embargo, es un haz que presenta difracción y cuyo estudio se ha limitado al caso escalar; situación que lo limita en ciertas aplicaciones, por ejemplo, en atrapamiento volumétrico. En esta tesis abordamos ambas problemáticas.

Introducimos una nueva familia de haces parcialmente coherentes que llevan vórtices ópticos. Cualquier miembro de esta familia representa una superposición incoherente de modos Bessel ortogonales completamente coherentes con el mismo frente de onda helicoidal y presentan propagación libre de difracción propagación. Mostramos analítica y experimentalmente que tales haces pueden generarse empleando un sistema óptico de transformada de Fourier con un modulador de luz espacial de cristal líquido controlado por computadora.

Adicionalmente, ampliamos el concepto del vórtice óptico perfecto al caso vectorial e investigamos sus propiedades de enfocamiento bajo el régimen de apertura numérica alta. Mostramos que la codificación simultánea de fase de componentes ortogonales se puede realizar mediante un sistema de imagen $4f$ que incorpora un modulador de luz espacial de cristal líquido de fase con su eje director girado 45° con respecto al eje horizontal. Demostramos teórica y experimentalmente que un campo con forma anular puede obtenerse al enfocar un vórtice perfecto polarizado radialmente y que para un vórtice perfecto polarizado azimutalmente se obtiene un spot de luz.

Capítulo 1

Introducción

Un vórtice óptico es un haz de luz con un frente de onda helicoidal, caracterizado por una distribución de intensidad en forma de anillos con una singularidad de fase y, por tanto, cero amplitud de campo en el centro [1]. En un vórtice óptico la fase está cambiando de acuerdo con la expresión $\exp(i\nu\theta)$, donde θ es el ángulo azimutal en coordenadas polares y ν es un número entero conocido como carga topológica [2-3].

Como es bien conocido el frente de onda helicoidal del vórtice óptico genera un momento angular orbital (OAM) que aumenta en magnitud conforme incrementa la carga topológica [3]; cuando un vórtice óptico interactúa con una partícula dieléctrica provoca que ésta gire alrededor de su anillo central [3], esta propiedad hace del vórtice óptico una herramienta muy eficaz en la manipulación óptica y la captura de partículas pequeñas; con múltiples aplicaciones en la física, la biología y la química [4-6]. Es por esto que existe un gran interés en desarrollar técnicas de generación de vórtices ópticos; por desgracia, las técnicas conocidas [5-13] produce vórtices con un fuerte acoplamiento entre el tamaño de su radio y su carga topológica, situación que dificulta obtener de manera simultánea una elevada precisión espacial y un momento angular de gran magnitud [10-13].

Recientemente, como solución al problema del acoplamiento entre el tamaño del radio y la carga topológica del vórtice Ostrosky et al. [14] proponen un nuevo tipo de vórtice óptico que no presenta esta dependencia, nombrado como Vórtice Óptico Perfecto (VOP). El trabajo muestra que es posible generar el VOP experimentalmente mediante el empleo de un modulador espacial de pantalla de cristal líquido (MEL-CL). El VOP puede ser expresado en dos representaciones distintas: en términos de la serie de Bessel y de la fórmula de clausura de la función de Bessel; cada una de estas aproximaciones tiene una técnica de generación con características propias. Los resultados de ambas aproximaciones se reportaron en dos trabajos [14,15] publicados recientemente; estos trabajos han tenido una gran recepción por parte de la comunidad óptica mundial alcanzado entre ambos más de 100 citas desde su publicación. La gran aceptación e interés mostrado es un motivo para continuar trabajando sobre esta línea de investigación y aportar más al trabajo ya realizado.

Una de las líneas principales de trabajo en nuestro grupo de investigación es la aplicación de vórtices ópticos para el atrapamiento de partículas y es de nuestro interés el poder realizar atrapamiento en una región de volumen, desafortunadamente debido a que el VOP se forma en el plano de Fourier cuando se mueve fuera de la región de este plano el VOP sufre expansión debida a la difracción. Adicionalmente, la teoría del VOP la hemos desarrollado para el caso escalar y resulta de nuestro interés extender el concepto al caso vectorial pues, en este régimen existen propiedades interesantes con potenciales aplicaciones en el atrapamiento óptico. Estas situaciones limitan el uso del VOP para atrapamiento en distintas condiciones llevándonos a plantear posibles alternativas a estas problemáticas.

En las décadas pasadas, debido a sus importantes aplicaciones, tales como comunicaciones ópticas en espacio libre, medición atmosférica remota, manipulación de partículas pequeñas y

rastreo de objetos, por mencionar algunas, el estudio de haces invariantes en su propagación ha despertado un gran interés tanto teórico como práctico [16-18] así mismo el estudio de propiedades de ciertas clases de fuentes altamente incoherentes espacialmente y los campos que crean, han provocado un gran y creciente número de diferentes técnicas reportadas para la generación de haces ópticos con propiedades deseada. Diferentes trabajos publicados [19-23] muestran que es posible obtener vórtices ópticos que permanecen invariantes en una región al emplear campos parcialmente coherentes.

Los llamados haces vectoriales cilíndricos son una clase de haz láser que exhiben una simetría azimutal en su estructura de polarización [24]. Estos haces presentan un perfil de intensidad anular debido a un vórtice de polarización en su eje. Han recibido un interés significativo en atrapamiento óptico debido a sus propiedades de enfocamiento [25]. Comparativamente con haces Gaussianos poseen un punto focal transversal menor, pudiendo obtener una mayor fuerza gradiente de atrapamiento. Adicionalmente, debido a la simetría en las componentes de polarización, el promedio temporal de la componente axial del vector de Poynting es cero, por lo tanto, la fuerza de dispersión se desvanece, haciendo a los haces vectoriales cilíndricos candidatos idóneos para el atrapamiento de partículas metálicas y con índice de refracción menor que el medio que le rodea [26,27].

Basado en los resultados mencionados anteriormente, en la presente tesis continuamos con la investigación realizada en el área de generación de haces ópticos con las propiedades deseables. Enfocando nuestro interés en el desarrollo teórico y generación experimental de haces ópticos parcialmente coherentes e invariantes en propagación y haces vectoriales con simetría cilíndrica. La formación de estos haces se conseguirá a través de un arreglo óptico que utiliza al modulador espacial de luz (MEL) de cristal líquido (CL) nemático, controlado por computadora como unidad central.

Los resultados obtenidos en esta tesis se esperan tengan un impacto substancial en la solución del problema de atrapamiento y manipulación óptica de partículas, así como en el control de la polarización y coherencia, problemas de gran actualidad e importancia en la Óptica contemporánea.

El objetivo principal de esta tesis es el desarrollo teórico y generación experimental de haces ópticos con simetría cilíndrica y propiedades deseadas empleando un MEL-CL. Los objetivos particulares planteados son:

- Revisión bibliográfica correspondiente al tema de investigación.
- Desarrollo de técnicas de generación de haces con propiedades deseadas usando el modulador espacial de cristal líquido HoloEye PLUTO VIS.
- Diseñar las señales de control específicas de cada caso para ser desplegadas en el MEL-CL.
- Realizar las simulaciones numéricas que sustenten las técnicas propuestas.
- Diseño de la configuración experimental para la síntesis de cada tipo de haz.
- Realizar los experimentos correspondientes y analizar los resultados obtenidos.
- Publicar los resultados teóricos y experimentales obtenidos en revistas indizadas y presentarlos en congresos.

El contenido de la tesis se encuentra estructurado de la siguiente forma. En el capítulo 1 se presenta la teoría y funcionamiento del MEL-CL, herramienta fundamental para el desarrollo del trabajo realizado. Posteriormente, en el capítulo 3 realizamos una recapitulación del concepto del vórtice óptico perfecto, su definición, representaciones y técnicas de generación además de su aplicación en un experimento de atrapamiento de partículas. En el capítulo 4 se expone el concepto del vórtice óptico invariante en propagación con su teoría, técnica de generación y resultados experimentales. El capítulo 5 abarca el concepto del vórtice óptico perfecto polarizado, su definición, una técnica de generación y su aplicación en el enfocamiento con apertura numérica alta. Finalmente, el capítulo 6 corresponde a las conclusiones generales.

Capítulo 2

MEL-CL

2.1. Introducción

En este capítulo abordamos los conceptos del funcionamiento del modulador espacial de luz de cristal líquido MEL-CL el cual es la herramienta empleada en la generación de vórtices ópticos. Primeramente, introduciremos la teoría referente a los cristales líquidos, a continuación, se presenta la teoría físico-matemática que modela el funcionamiento del MEL-CL y sus tipos principales. Nos enfocaremos en el MEL-CL modelo PLUTO VIS, su descripción y propiedades. Finalmente exponemos la metodología para la caracterización del MEL-CL modelo PLUTO-VIS con la finalidad de determinar las condiciones de modulación de fase y amplitud del frente de onda.

2.2. Modelo Físico Matemático

Podemos definir a un MEL-CL como un dispositivo electro-óptico formado por un gran número de celdas de cristal líquidos, llamados pixeles, cuya birrefringencia es posible controlar individualmente empleando señales eléctricas aplicadas mediante electrodos.

La celda de cristal líquido es la unidad fundamental del modulador espacial, se forma cuando un cristal líquido es colocado dentro de un contenedor cuyas paredes están hechas de vidrio. Estas paredes se encuentran pulidas linealmente de tal forma que el eje largo de las moléculas del cristal líquido se alinee de forma paralela a dicha dirección. Cuando las direcciones de pulido en las paredes de la celda son diferentes las moléculas de cristal contenidas en la celda rotan gradualmente de la dirección de pulido de una pared hasta alinearse con la dirección de pulido de la pared opuesta. En figura 2.1 observamos el ángulo de dirección de pulido que es por donde incide la luz a la celda conocido como el ángulo director ϕ_D y el ángulo de rotación de las moléculas es el de ángulo *twist* ϕ .

Por medio del formalismo de Jones [28], la matriz de transmisión de la celda de cristal líquido nemático se encuentra como la multiplicación de las transmitancias individuales de N cristales uniaxiales rotados linealmente desde ϕ_D hasta $\phi_D + N\rho$ con $N\rho = \phi$ como

$$\mathbf{J}_{\text{CL}} = \prod_{n=0}^N \mathbf{R}(\phi_D + n\rho) \mathbf{W}_0 \mathbf{R}(-\phi_D - n\rho), \quad (2.1)$$

donde el término $n = 0$ aparece en el extremo derecho del producto de matrices;

$$\mathbf{W}_0 = \exp\left(-i\frac{\beta}{N}\right) \begin{pmatrix} \exp\left(-i\frac{\beta}{N}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(i\frac{\beta}{N}\right) \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

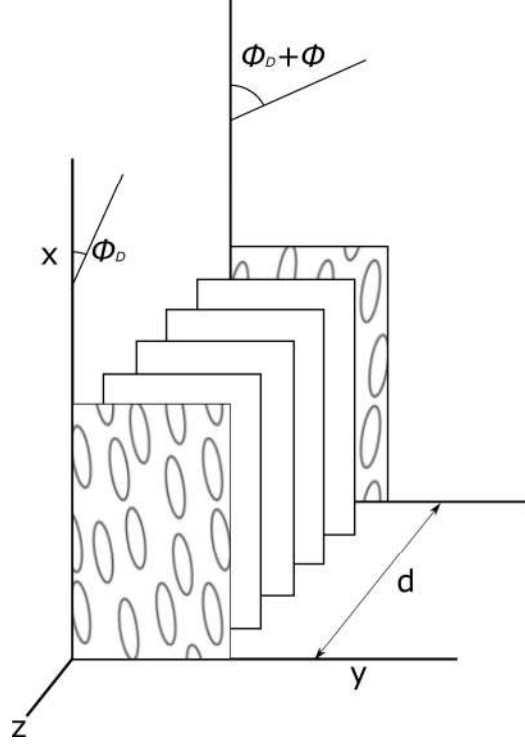


Figura 2.1: Diagrama esquemático del ángulo twist ϕ y ángulo director ϕ_D en una celda de cristal líquido.

corresponde a la transmitancia del n-ésimo cristal uniaxial en que se ha descompuesto la celda y

$$\mathbf{R}(n\rho) = \begin{pmatrix} \cos(n\rho) & \sin(n\rho) \\ -\sin(n\rho) & \cos(n\rho) \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

es la matriz de rotación de sistema de coordenadas. Expandiendo la expresión (2.2) obtenemos

$$\mathbf{J}_{\text{CL}} = \mathbf{R}(\phi_D + N\rho)\mathbf{W}_0\mathbf{R}(-\phi_D - N\rho)\mathbf{R}[\phi_D + (N-1)\rho]\mathbf{W}_0\dots\mathbf{R}(-\phi_D - \rho)\mathbf{R}(\phi_D)\mathbf{W}_0\mathbf{R}(-\phi_D) \quad (2.4)$$

y aplicando la siguiente propiedad de la matriz de rotación

$$\mathbf{R}(\rho_1)\mathbf{R}(\rho_2) = \mathbf{R}(\rho_1 + \rho_2), \quad (2.5)$$

la matriz \mathbf{J}_{CL} puede reescribirse en la forma

$$\mathbf{J}_{\text{CL}} = \mathbf{R}(\phi_D + \phi) \left[\mathbf{W}_0\mathbf{R}\left(-\frac{\phi}{N}\right) \right]^N \mathbf{R}(-\phi_D). \quad (2.6)$$

Realizando la multiplicación de matrices dentro de los corchetes en la expresión (2.6) obtenemos la matriz siguiente

$$\mathbf{J}_{\text{CL}} = \mathbf{R}(\phi_D + \phi) \exp(-i\beta) \begin{pmatrix} \cos \frac{\phi}{N} \exp\left(-i\frac{\beta}{N}\right) & -\sin \frac{\phi}{N} \exp\left(-i\frac{\beta}{N}\right) \\ \sin \frac{\phi}{N} \exp\left(i\frac{\beta}{N}\right) & \cos \frac{\phi}{N} \exp\left(i\frac{\beta}{N}\right) \end{pmatrix}^N \mathbf{R}(-\phi_D). \quad (2.7)$$

Tomando en cuenta la identidad de Chebyshev

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} \frac{A \sin mK\Lambda - \sin(m-1)K\Lambda}{\sin K\Lambda} & \frac{B \sin mK\Lambda}{\sin K\Lambda} \\ C \frac{\sin mK\Lambda}{\sin K\Lambda} & \frac{D \sin mK\Lambda - \sin(m-1)K\Lambda}{\sin K\Lambda} \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

donde

$$K\Lambda = \arccos \left[\frac{1}{2}(A + D) \right], \quad (2.9)$$

aplicandola a la ecuación (2.7) y calculando el límite cuando $N \rightarrow \infty$ obtenemos la siguiente expresión

$$\mathbf{J}_{\text{CL}} = \mathbf{R}(\phi_{\text{D}} + \phi) \exp(-i\beta) \begin{pmatrix} \cos \gamma - i \frac{\beta}{\gamma} \sin \gamma & -\frac{\phi}{\gamma} \sin \gamma \\ \frac{\phi}{\gamma} \sin \gamma & \cos \gamma + i \frac{\beta}{\gamma} \sin \gamma \end{pmatrix} \mathbf{R}(-\phi_{\text{D}}), \quad (2.10)$$

con γ definido como

$$\gamma = \sqrt{\beta^2 + \phi^2}, \quad (2.11)$$

donde β y ϕ son constantes. Las ecuaciones anteriores nos describen el comportamiento de una celda de cristal líquido en el estado de reposo.

Al aplicar un voltaje en la dirección normal a las paredes de la celda las moléculas de cristal líquido contenidas en ésta exhibirán un ángulo de inclinación (θ) paralelo al eje óptico como respuesta al campo eléctrico aplicado. Bajo esta condición el parámetro β y el índice de refracción extraordinario n_e dependen ahora del ángulo de inclinación (θ) expresado de la forma siguiente

$$\beta(\theta) = \frac{\pi d}{\lambda} [n_e(\theta) - n_o], \quad (2.12)$$

donde

$$n_e(\theta) \approx (n_e - n_o) \cos^2 \theta + n_o. \quad (2.13)$$

La expresión del ángulo de inclinación en términos del voltaje aplicado se obtiene mediante la fórmula empírica conocida como transición de Fréedericksz [29].

$$\theta(V_{\text{rms}}) = \begin{cases} 0 & V_{\text{rms}} \leq V_c \\ \frac{\pi}{2} - 2 \arctan \left\{ \exp \left[- \left(\frac{V_{\text{rms}} - V_c}{V_o} \right) \right] \right\} & V_{\text{rms}} > V_c \end{cases}, \quad (2.14)$$

donde V_{rms} , V_c y V_o corresponden al voltaje efectivo, umbral y de saturación respectivamente. La relación de la birrefringencia con el voltaje empleado se consigue al normalizar la expresión (2.12). La figura 2.2 muestra la gráfica de la función $\beta(\theta)/\beta$ de donde observamos que la birrefringencia resulta ser una función aproximadamente inversa del voltaje.

De este modo, queda descrito completamente el comportamiento de una celda de cristal líquido. Debido a que un MEL-CL podemos considerarlo como una arreglo matricial de un gran número de celdas su modelo matemático puede definirse mediante las expresiones que hemos obtenido tomando en cuenta que el parámetro β ahora es una función espacial $\beta(\mathbf{x})$.

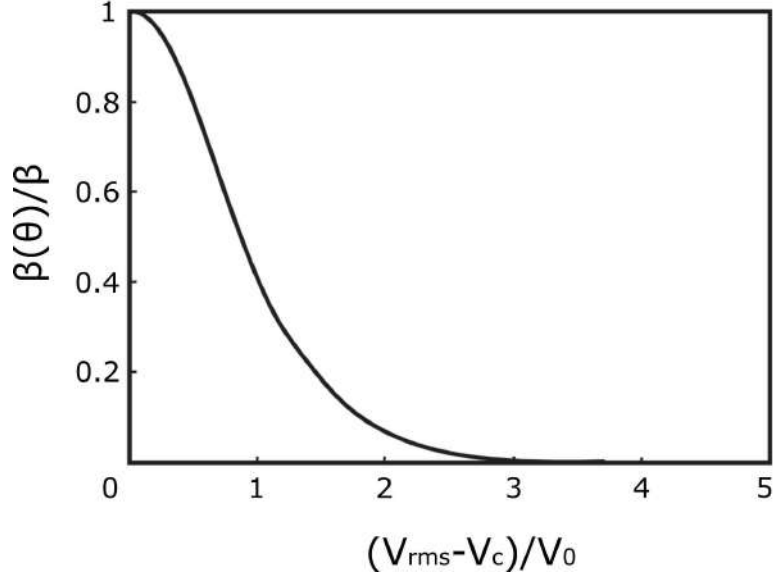


Figura 2.2: Relación de la birrefringencia respecto del voltaje aplicado en una celda de cristal líquido nemático.

2.3. MEL-CL modelo PLUTO-VIS

El MEL-Cl empleado en esta tesis corresponde al modelo comercial PLUTO-VIS el cual es un dispositivo del tipo conocido como 0° -twist. Un MEL-CL 0° -twist es aquel en el cual las direcciones de pulido en las paredes de las celdas son paralelas $\phi = 0^\circ$ y su ángulo director se encuentra alineado con el eje x . Para este caso la matriz (2.10) toma la forma siguiente

$$\mathbf{J}_0 = \begin{pmatrix} \exp(-i2\beta) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

El elemento j_{xx} de la matriz anterior es el responsable de la modulación pura de fase y la realiza sobre la componente del campo paralela al eje x sin introducir pérdidas de energía. Es por esto que un modulador que obedece a la matriz \mathbf{J}_0 resulta ideal para la generación de vórtices ópticos. El modulador PLUTO-VIS es además un modulador de reflexión, por esta razón realizaremos el desarrollo del formalismo de Jones para este tipo de modulador.

Un dispositivo de reflexión se caracteriza por tener un espejo en una de las caras de la celda como se muestra en la figura 2.3. La dirección del haz incidente al dispositivo la podemos expresar en un sistema de coordenadas (xyz) a derechas cuyo eje z coincide con la dirección de propagación. El haz atraviesa la celda de cristal líquido y es reflejado cambiando su dirección bajo el sistema coordenado $z' = -z$, $x' = -x$ y $y' = y$, tal como se muestra en la figura 2.3.

La matriz de Jones que describe a un dispositivo de reflexión se obtiene del producto de las matrices de Jones para el campo incidente, el campo reflejado y la matriz de cambio de coordenadas. Como la matriz de Jones del campo reflejado es igual a la transpuesta de la matriz del campo incidente tenemos

$$\mathbf{J}_{ref} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{J}^T \mathbf{J} \quad (2.16)$$

donde

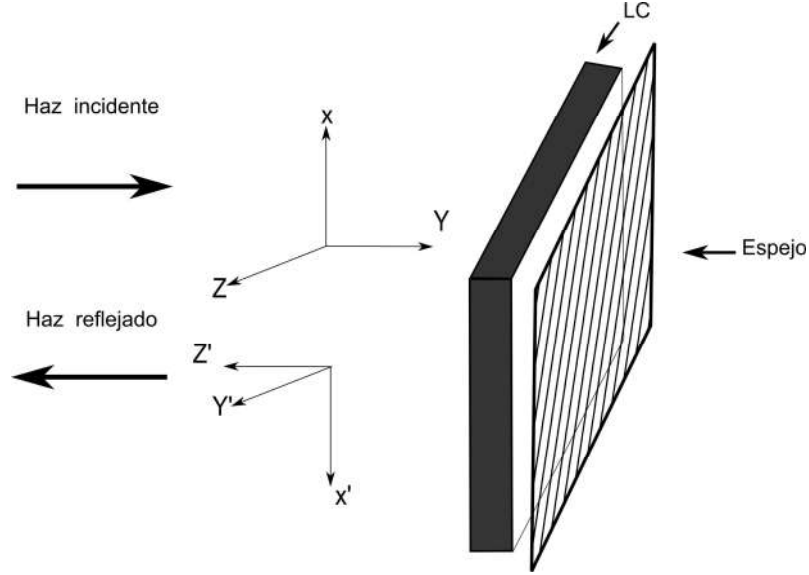


Figura 2.3: Diagrama esquemático de un dispositivo de reflexión.

$$\mathbf{J}^T = \begin{pmatrix} \exp(-i2\beta) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

Sustituyendo en la matriz (2.16) las expresiones (2.15) y (2.17) obtenemos

$$\mathbf{J}_{ref} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{J}^T = \begin{pmatrix} \exp(-i2\beta) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{J} = \begin{pmatrix} \exp(-i2\beta) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

La expresión resultante del producto de matrices anterior es

$$\mathbf{J}_{ref} = \begin{pmatrix} \exp(-i2\beta') & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

donde $\beta' = 2\beta$, esto significa que la modulación de fase es del doble con respecto a 2.15 como resultado de la reflexión del haz incidente.

Con el fin de poder emplear al dispositivo de reflexión como un modulador debemos poder separar al haz incidente del haz reflejado. Para este fin podemos considerar las dos configuraciones mostradas en la figura 2.4.

Los sistemas (a) y (b) pueden describirse mediante el producto de matrices de Jones entre superficies reflectantes y la matriz 2.19)

$$\mathbf{J}' = a \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{J}_{ref} = a \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp(-i2\beta) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} \exp(-i2\beta') & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

donde a resulta ser un coeficiente de atenuación de la intensidad del haz de salida que corresponde a un tipo configuración específica:

$$a = \begin{cases} 1/2 & \text{para (a)} \\ 1 & \text{para (b)}. \end{cases}$$

Una vez explicada la teoría físico-matemática del comportamiento para el MEL-CL de tipo reflexivo se presenta a continuación la información concerniente al espécimen PLUTO-VIS utilizado en esta tesis.

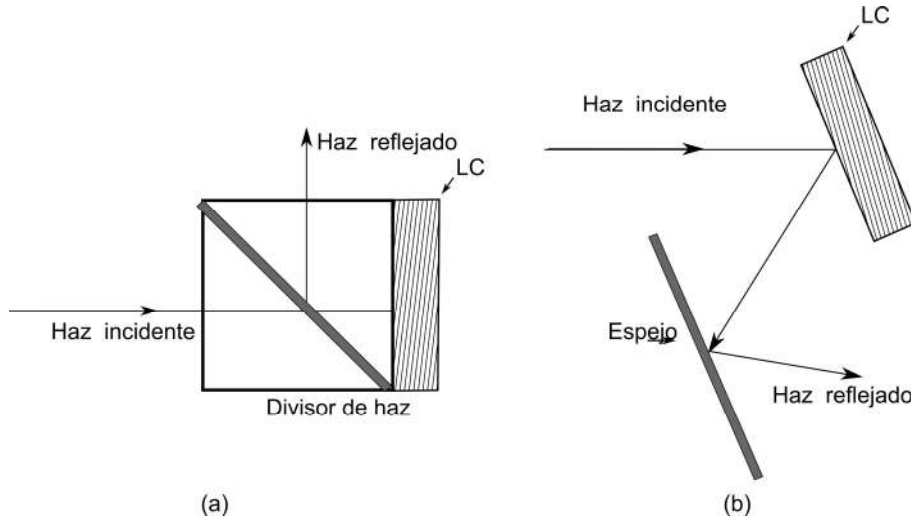


Figura 2.4: Configuraciones para emplear el dispositivo de reflexión como modulador: (a) colocando un divisor de haz, (b) rotando al dispositivo en un ángulo pequeño.

El modulador espacial de luz PLUTO VIS es una micro pantalla de reflexión fabricada por la empresa alemana HOLOEYE. Este dispositivo posee una matriz LCOS (cristal líquido sobre silicio) de tipo 0° -twist con un área activa de 15.36 mm x 8.64 mm, resolución de 1920 x 1080 y un tamaño de píxel de 8 micrómetros optimizado para los rangos de longitud de onda de 420 a 700 nm. De acuerdo con la Eq. (2.19) el modulador PLUTO-VIS realiza modulación a la luz que esté polarizada en la misma dirección que su eje director, en este caso, el eje largo de la pantalla.



Figura 2.5: Modulador PLUTO-VIS.

El modulador PLUTO-VIS tiene tres entradas para conexiones: la de alimentación en la que se conecta una fuente de poder de 5V y 3A, un conector DVI estándar para proyectar las señales mediante una computadora y un puerto RS-233 usado para acceder a los parámetros de control del modulador.

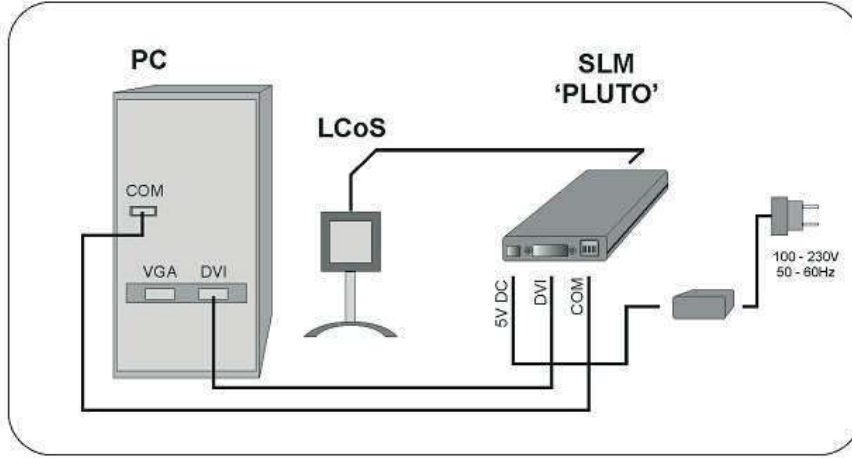


Figura 2.6: Diagrama de los puertos de conexión del MEL-CL PLUTO-VIS.

El control del parámetro γ que caracteriza la ganancia correspondiente a cada nivel de gris y de los voltaje V_a y V_b se hacen a través del software proveído por el fabricante. Después de conectar el modulador a la alimentación y a la computadora mediante un cable DVI verificamos que el dispositivo este conectado correctamente; abrimos el programa HOLOWEYE Pluyo user seleccionamos la pestaña interface \rightarrow file \rightarrow connect to device, elegimos el puerto COM4 y seleccionando el canal correspondiente a la longitud de onda a emplear.

Cuando la conexión entre el modulador y la computadora se establece correctamente podemos acceder a modificar los parámetros antes mencionados. La curva γ es un archivo .csv que se carga a la memoria interna del modulador. Los valores de los voltajes V_b y V_n se pueden modificar en el menú options \rightarrow driver options \rightarrow digital potentiometers.

2.4. Caracterización óptica

La matriz de transmitancia de un MEL-CL está dada por las expresiones (2.10) y (2.11) la cual resulta ser una función espacialmente dependiente expresada como

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \mathbf{J}_{LC}(V; \lambda, d, n_o, \phi_D, \phi). \quad (2.21)$$

donde \mathbf{J}_{LC} es la matriz de Jones del modulador, V es la señal de control; λ es la longitud de onda del haz incidente; n_e es el índice de refracción extraordinario y d es el grosor del modulador; ϕ_D es el ángulo director de entrada y ϕ es el ángulo de torsión entre paredes opuestas de la celda.

A las variables (d, n_o, ϕ_D, ϕ) se les llama parámetros del sistema y para poder predecir correctamente el comportamiento matemático del MEL-CL estos deben de conocerse a priori. Sin embargo, los fabricantes no proveen los valores de estos parámetros necesitando entonces una forma de determinarlos. Existen distintos métodos propuestos para medir estos parámetros [30–32] pero dichos métodos resultan complejos de implementar [33].

El modelado matemático dado por la ecuación (2.11) no toma en consideración a los llamados efectos de borde cuando es aplicado un voltaje al modulador. De manera ideal cuando el modulador

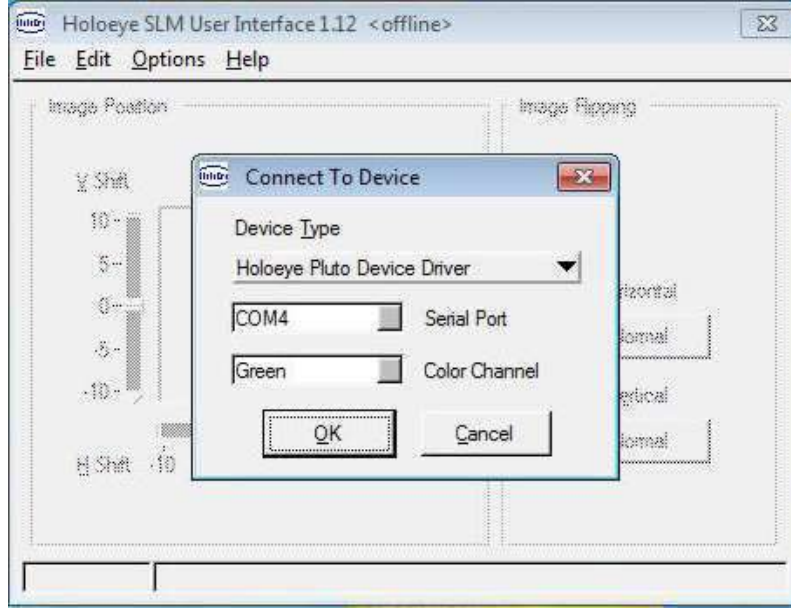


Figura 2.7: Ventana de inicialización del MEL-CL PLUTO-VIS.

se encuentra encendido el ángulo de torsión permanece sin cambios y la inclinación de las moléculas se mantiene constante a lo largo de todo el intervalo d . Sin embargo, la distribución de $\phi(z)$ y de $\theta(z)$ no siguen ese comportamiento y exhiben efectos de borde como resultado de la aplicación del voltaje. Este fenómeno surge debido a que cerca de las paredes del MEL-CL las moléculas de cristal líquido están fuertemente ancladas a las placas alineadoras. La inclusión de los efectos de frontera en el modelo matemático requiere considerar que las propiedades del MEL-CL varían a lo largo de su anchura d y este proceso no es una tarea sencilla [34].

Por lo anterior, se desarrolla una técnica alternativa para la caracterización óptica del modulador que no se base en medir sus parámetros físicos sino en calcular sus parámetros de modulación. Mediante la técnica propuesta se evitan los problemas de ambigüedad y se eluden los efectos de borde. Determinamos de forma sencilla las condiciones donde el MEL-CL realiza modulación en amplitud y modulación de fase.

La transmitancia compleja $T(x)$ del modulador PLUTO-VIS es una función de los niveles de gris de la señal de video U_{mod} proyectada en el modulador, del voltaje negro V_n , voltaje blanco V_b y la curva γ .

Podemos entonces definir los siguientes modos de operación:

-Modulación de amplitud:

$$I(U_{\text{mod}}, V_n, V_b, \gamma) = K_1 U_{\text{mod}}, \quad (2.22)$$

$$\delta(U_{\text{mod}}, V_n, V_b, \gamma) = \text{cte}. \quad (2.23)$$

-Modulación de fase:

$$I(U_{\text{mod}}, V_n, V_b, \gamma) = \text{cte}, \quad (2.24)$$

$$\delta(U_{\text{mod}}, \gamma) = K_2 U_{\text{mod}}; \quad (2.25)$$

donde I y δ son la intensidad y fase del campo.

Mediante el arreglo experimental mostrado en la figura 2.8 se puede encontrar el patrón de interferencia producido por dos haces obtenidos al hacer incidir un campo sobre el modulador cuando se proyecta la señal U_{mod} . A través de estos patrones de interferencia podremos calcular I y δ

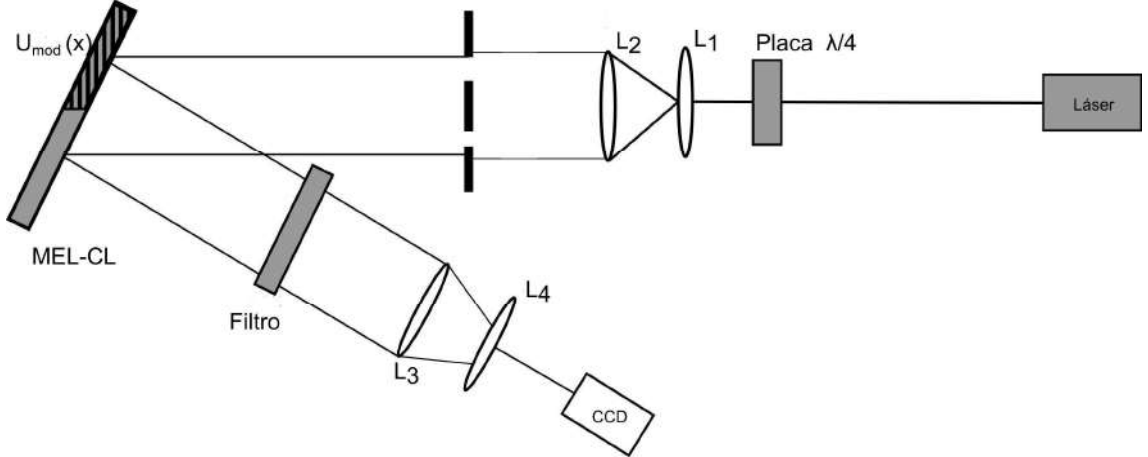


Figura 2.8: Arreglo experimental par la caracterización del MEL-CL.

Proyectamos en el modulador la señal de vídeo siguiente

$$U_{\text{mod}} = \begin{cases} u_1, & x < 0 \\ u_2, & x > 0 \end{cases}, \quad (2.26)$$

entonces la transmitancia en el MEL-CL corresponde a

$$T(x) = \begin{cases} |T(u_1)| \exp [i\delta(u_1)], & x < 0 \\ |T(u_2)| \exp [i\delta(u_2)], & x > 0 \end{cases}, \quad (2.27)$$

y en el plano x las señales ópticas son

$$\begin{aligned} E_1(x) &= E_0 |T(u_1)| \exp [i\delta(u_1)] \exp \left(-i \frac{2\pi}{\lambda} x \sin \alpha \right) \\ &= E_0 |T(u_1)| \exp \left\{ -i \left[\frac{2\pi}{\lambda} x \sin \alpha - \delta(u_1) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} E_2(x) &= E_0 |T(u_2)| \exp [i\delta(u_2)] \exp \left(i \frac{2\pi}{\lambda} x \sin \alpha \right) \\ &= E_0 |T(u_2)| \exp \left\{ i \left[\frac{2\pi}{\lambda} x \sin \alpha + \delta(u_2) \right] \right\}; \end{aligned} \quad (2.29)$$

y la intensidad resultante se encuentra como

$$I(x) = |E_1(x) + E_2(x)|^2 = |E_1(x)|^2 + |E_2(x)|^2 + E_1(x)^* E_2(x) + E_1(x) E_2(x)^*, \quad (2.30)$$

donde (*) denota complejo conjugado.

En la ecuación anterior sustituimos las expresiones (2.28) y (2.29)

$$\begin{aligned}
 I(x) &= E_0^2 |T(u_1)|^2 + E_0^2 |T(u_2)|^2 \\
 &+ E_0^2 |T(u_1)| |T(u_2)| \exp \left\{ i \left[\frac{2\pi}{\lambda} x \sin \alpha - \delta(u_1) \right] \right\} \exp \left\{ i \left[\frac{2\pi}{\lambda} \sin \alpha + \delta(u_2) \right] \right\} \\
 &+ E_0^2 |T(u_1)| |T(u_2)| \exp \left\{ -i \left[\frac{2\pi}{\lambda} x \sin \alpha - \delta(u_1) \right] \right\} \exp \left\{ -i \left[\frac{2\pi}{\lambda} \sin \alpha + \delta(u_2) \right] \right\}, \quad (2.31)
 \end{aligned}$$

empleando la identidad de Euler

$$\cos \theta = \frac{\exp(i\theta) + \exp(-i\theta)}{2}, \quad (2.32)$$

podemos reescribir (2.29) de la forma

$$\begin{aligned}
 I(x) &= E_0^2 |T(u_1)|^2 + E_0^2 |T(u_2)|^2 \\
 &+ 2E_0^2 |T(u_1)| |T(u_2)| \cos \left[\frac{4\pi}{\lambda} x \sin \alpha - \delta(u_1) + \delta(u_2) \right]. \quad (2.33)
 \end{aligned}$$

Si aplicamos la aproximación paraxial

$$\sin \alpha \approx \tan \alpha = \frac{x_0/2}{f}, \quad (2.34)$$

finalmente llegamos a

$$\begin{aligned}
 I(x) &= E_0^2 |T(u_1)|^2 + E_0^2 |T(u_2)|^2 \\
 &+ 2E_0^2 |T(u_1)| |T(u_2)| \cos \left[\frac{2\pi x_0}{\lambda f} x - \delta(u_1) + \delta(u_2) \right]. \quad (2.35)
 \end{aligned}$$

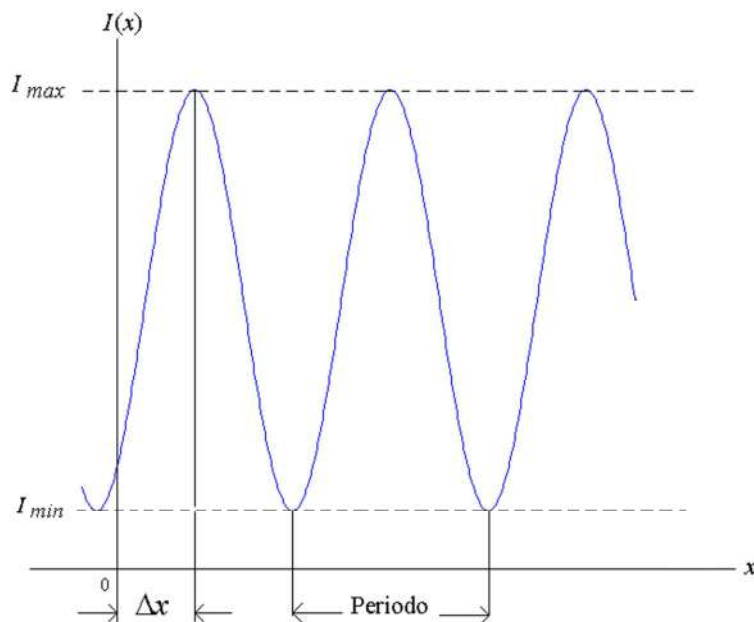


Figura 2.9: Patrón de interferencia de la Ec. (2.35).

La gráfica de la ecuación (2.35) se encuentra mostrada en la figura 2.9 donde observamos que el patrón de interferencia tiene un período igual a $\lambda f/x_0$ y su fase corresponde a $\Delta(u_1, u_2) = \delta(u_1) - \delta(u_2)$. La visibilidad de las franjas en un patrón de interferencia se calcula como

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}, \quad (2.36)$$

donde en nuestro caso

$$I_{\max}(x) = I(x)|_{\cos(\cdot)=1} = E_0^2|T(u_1)|^2 + E_0^2|T(u_2)|^2 + 2E_0^2|T(u_1)||T(u_2)|, \quad (2.37)$$

$$I_{\min}(x) = I(x)|_{\cos(\cdot)=-1} = E_0^2|T(u_1)|^2 - E_0^2|T(u_2)|^2 + 2E_0^2|T(u_1)||T(u_2)|, \quad (2.38)$$

entonces la visibilidad del patrón de interferencia resulta

$$V = 2 \frac{|T(u_1)||T(u_2)|}{|T(u_1)|^2 + |T(u_2)|^2}. \quad (2.39)$$

En términos de los niveles de gris las señales de vídeo son

$$\begin{aligned} u_{\max} = 255 & \text{ corresponde a blanco, } & x < 0 \\ u_{\min} = 0 & \text{ corresponde a negro, } & x > 0 \end{aligned} \quad (2.40)$$

Cundo se cumpla la condición

$$T(0) \approx 0, \quad T(255) \approx 1, \quad (2.41)$$

tendemos modulación en amplitud y la visibilidad del patrón de interferencia será

$$V = 2 \left(\frac{(0 \cdot 1)}{(0 + 1)} \right) = 0. \quad (2.42)$$

La modulación de fase sucede cuando la amplitud permanece constante, es decir, cuando se cumple la condición

$$T(0) \approx T(255) \approx 1, \quad (2.43)$$

entonces la visibilidad del patrón resulta

$$V = 2 \left(\frac{(1 \cdot 1)}{(1 + 1)} \right) = 1. \quad (2.44)$$

Podemos concluir que la modulación de amplitud se consigue cuando el patrón se observa más borroso y la de fase cuando tenemos el máximo contraste de las franjas.

Mediante la visibilidad del patrón de interferencia podemos calcular las curvas correspondiente a la modulación de amplitud y fase para la señal de vídeo U_{mod} . Para este fin una de las mitades de la señal de video (2.26) proyectada en el modulador se fija al valor 0 mientras la otra mitad varia en todo el rango de 0 – 255

La curva que corresponde la intensidad con respecto al nivel de gris se calcula a partir del valor máximo de la intensidad del patrón de interferencia

$$I_{\max}(x) = E_0^2 [|T(u_1)||T(u_2)|]^2, \quad (2.45)$$

si fijamos $|T(u_1)|$ al valor 0 tenemos

$$I_{\max} = E_0^2 |T(u_2)|^2, \quad (2.46)$$

donde E_0 es el campo de iluminación.

Observando que el valor de δ es el argumento del patrón de interferencia (2.35) cuando el valor de la intensidad es máximo podemos calcular entonces la modulación de la fase

$$\cos \left[\left(\frac{2\pi x_0}{\lambda f} \right) x - \delta(u_1) + \delta(u_2) \right] = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{2\pi x_0}{\lambda f} \right) x - \delta(u_1) + \delta(u_2) = 0, \quad (2.47)$$

fijando $|T(u_1)|$ nuevamente a 0, se obtiene

$$\delta(u_2) = \left(\frac{2\pi x_0}{\lambda f} \right) x, \quad (2.48)$$

donde $x =$ es la distancia de desplazamiento del patrón, $x_0 =$ resulta ser la separación entre aberturas de la pantalla donde los haces interfeerentes se generan, $\lambda =$ es la longitud de onda de iluminación y $f =$ es la distancia focal.

La curva de fase respecto del nivel de gris se encuentra midiendo el desplazamiento de las franjas del patrón mediante una cámara CCD y la curva correspondiente a la intensidad se obtiene a partir de las mediciones de intensidad para cada nivel de gris registradas con un fotodetector.

El arreglo experimental mostrado en la figura 2.8 no es práctico, pues, en primer lugar resulta complejo elaborar una pantalla con aberturas del mismo tamaño y separación y en segundo lugar cerca del 99% de la luz se desaprovecha al pasar por las aberturas. Proponemos una modificación al interferómetro de Young de la figura 2.8, reemplazamos la pantalla con aberturas por una rejilla de Ronchi y un sistema formado por un diafragma y un obstáculo tal como se muestra en la figura 2.10

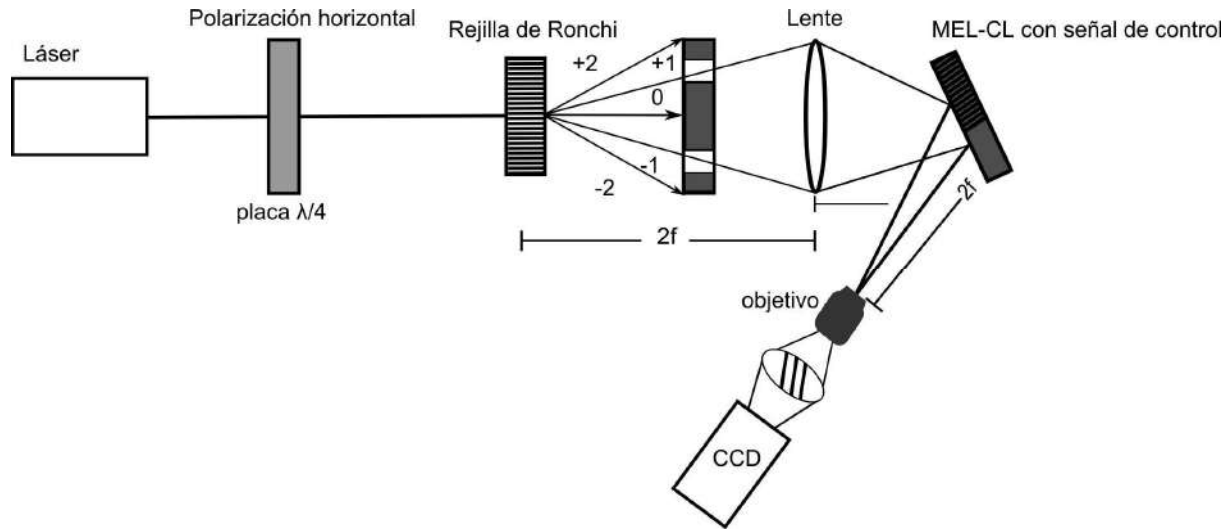


Figura 2.10: Interferómetro modificado de Young.

Esta nueva configuración además de ser más sencilla en su implementación permite a los haces interferentes tener una intensidad aproximada del 70% de la intensidad total de la fuente.

2.5. Conclusiones

- En este capítulo se desarrollaron los conceptos básicos sobre el modelado físico-matemático de los MEL-CL.

- Describimos completamente el funcionamiento y características del modulador PLUTO-VIS 0°-twist de tipo reflectivo que será empleado en las técnicas de generación de los vórtices ópticos descritos en las secciones siguientes.

- Se expuso el procedimiento de caracterización óptica para el modulador PLUTO-VIS para encontrar las condiciones donde el dispositivo realiza modulación de fase en el rango $0 - 2\pi$ para la longitud de onda $\lambda = 633nm$.

Capítulo 3

Vórtice Óptico Perfecto

3.1. Introducción

Un vórtice óptico es un haz de luz con un frente de onda helicoidal, caracterizado por una distribución de intensidad en forma de anillos con una singularidad de fase y por tanto, cero amplitud de campo en el centro [1]. En un vórtice óptico la fase está cambiando de acuerdo con la expresión $\exp(i\varphi\nu)$, donde φ es el ángulo azimutal en coordenadas polares y ν es un número entero conocido como carga topológica [2, 3], de tal forma que su frente de onda describe una hélice. Los vórtices ópticos poseen momento angular orbital propiedad que ha dado lugar a interesantes aplicaciones. El momento angular orbital es consecuencia del flujo espiral de la energía electromagnética y es proporcional a la carga topológica [94–96]; cuando un vórtice interactúa con una partícula dieléctrica provoca que esta gire alrededor de su anillo central [3]. Debido a esta característica, los vórtices ópticos han cobrado gran importancia como pinzas ópticas en la manipulación de objetos en el rango de nanómetros hasta micrómetros con múltiples aplicaciones en la física, la biología y la química [4–6].

Por este motivo, existe mucho interés en el desarrollo de métodos de generación eficientes de este tipo de haces [5–13]. Los métodos más populares de generación son las placas de fase espiral, hologramas impresos y el uso moduladores de luz. En la literatura se han reportado toda una gamma de diferentes técnicas empleando máscara anulares, lentes axicones, superposición de haces Bessel o mediante holografía computacional, como por ejemplo, Guo et al. [6, 7], Arrizon et al. [11], Chen et al [2]. Sin embargo, los vórtices obtenidos mediante estas técnicas presentan un acoplamiento entre la carga topológica y el radio del anillo central impidiendo conseguir simultáneamente precisión y alto poder de captura.

Recientemente, Ostrovsky et al [14] reportaron una nueva clase de vórtice óptico llamado vórtice óptico perfecto (VOP) que se caracteriza por una zona central oscura y un anillo principal de radio independiente de la carga topológica y que tiene el máximo gradiente del campo.

En este capítulo explicaremos el concepto del VOP partiendo de su definición matemática y propiedades físicas. Seguiremos con su representación en dos aproximaciones distintas y desarrollaremos técnicas de generación basadas en cada una. Cada técnica se analizará por medio de simulación computacional y de resultados experimentales. Finalizaremos con la aplicación del VOP en un experimento de atrapamiento de partículas empleando un sistema de pinzas ópticas.

3.2. Definición del vórtice óptico perfecto y sus representaciones

El vórtice óptico perfecto es un haz de luz cuya distribución de intensidad se caracteriza por una zona central oscura y por un anillo central con un radio independiente de la carga topológica que posee el máximo gradiente del campo. Podemos representarlo mediante el modelo matemático ideal

$$g_\nu(\rho, \varphi) = \delta(\rho - \rho_0) \exp(i\nu\varphi), \quad \nu = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.1)$$

donde ρ y φ son las coordenadas polares de la sección transversal del haz, δ es la función delta de Dirac y ρ_0 es el radio del vórtice.

Una vez definido el vórtice óptico perfecto desarrollaremos a continuación las dos formas de representación propuestas por Ostrovsky et. al [14, 15] con sus respectivas técnicas de generación, simulaciones y resultados experimentales.

3.2.1. Generación del VOP con base en la serie de Bessel

Podemos expandir al modelo ideal del VOP dado por la expresión (3.1) como una serie de Fourier-Bessel

$$g(\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{\nu,n} J_\nu \left(\alpha_{\nu,n} \frac{\rho}{a} \right), \quad (3.2)$$

donde $J_\nu(\cdot)$ es la función de Bessel de primer tipo, orden ν y $\alpha_{\nu,n}$ es su n -ésima raíz, a es la cota superior de la coordenada radial ρ ($0 \leq \rho \leq a$), ν es la carga topológica ($\nu \geq 0$) y $c_{\nu,n}$ son coeficientes que definen a la función $g(\rho)$ definidos como

$$c_{\nu,n} = \frac{2}{a^2 [J_{\nu+1}(\alpha_{\nu,n})]^2} \int_0^a g(\rho) J_\nu \left(\alpha_{\nu,n} \frac{\rho}{a} \right) \rho d\rho, \quad (3.3)$$

Sustituyendo la ecuación (3.1) en (3.2) con la condición $a > \rho_0$ y empleando la propiedad de filtración de la función de Dirac obtenemos

$$g_\nu(\rho, \varphi) \propto \text{circ} \left(\frac{\rho}{a} \right) \exp(i\nu\varphi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_\nu(\alpha_{\nu,n} \rho_0/a)}{[J_{\nu+1}(\alpha_{\nu,n})]^2} J_\nu \left(\alpha_{\nu,n} \frac{\rho}{a} \right). \quad (3.4)$$

Los perfiles de intensidad correspondientes se muestran en la figura 3.1.

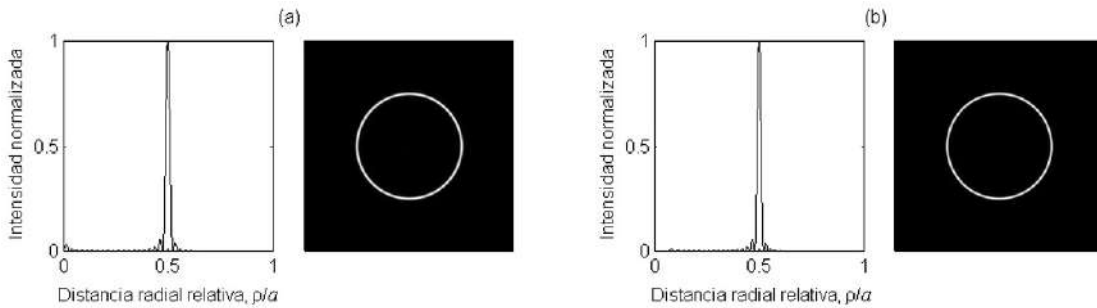


Figura 3.1: Patrones de intensidad del VOP empleando 40 términos de la sumatoria (3.4) para dos vórtices con radio $\rho_0 = 0.5a$ y carga topológica a) $\nu=1$; b) $\nu=10$.

Con el propósito de realizar ópticamente la operación anterior suponemos que la transmitancia del modulador está dada por una serie de N anillos concéntricos cada uno con modulación de fase

CAPÍTULO 3. VÓRTICE ÓPTICO PERFECTO

3.2. DEFINICIÓN DEL VÓRTICE ÓPTICO PERFECTO Y SUS REPRESENTACIONES

azimutal separados por regiones ocupadas por hologramas binarios como tableros de ajedrez [35] o portadoras en donde la transmitancia es cero.

Si los anillos de fase son los suficientemente delgados la función de transmitancia del modulador resulta proporcional al

$$t_\nu(r, \varphi) \propto \sum_n^N \alpha_{\nu,n} \beta_{\nu,n} \exp[i\nu(\varphi - \varphi_{\nu,n})] \delta(r - r_{\nu,n}), \quad (3.5)$$

donde r y φ son coordenadas polares, $\beta_{\nu,n}$, $\varphi_{\nu,n}$ y

$$r_{\nu,n} = \frac{\alpha_{\nu,n}}{\alpha_{\nu,N}} R, \quad \text{el radio de la zona activa del modulador} \quad (3.6)$$

son el ancho, el retardo de fase y el radio del n -ésimo anillos respectivamente y R el radio de la zona activa del modulador.

Se ha mostrado que el VOP puede obtenerse aproximadamente mediante un sistema óptico de transformada de Fourier [14] por tanto la expresión para la señal óptica a la salida de dicho sistema se obtiene al calcular la tranformada de Fourier de la transmitancia (3.5) empleando

$$U_\nu(\rho, \theta) \propto \int_0^\infty \int_0^{2\pi} t_\nu(r, \varphi) \exp\left[-i\frac{2\pi}{\lambda f} r \rho \cos(\varphi - \theta)\right] r dr d\varphi, \quad (3.7)$$

donde λ es la longitud de onda de iluminación y f la distancia focal de la lente.

Realizando el cambio de variable $\gamma = \varphi - \theta$, aplicando la identidad siguiente de la función Bessel

$$J_\nu(x) = \frac{i^{-\nu}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(i\nu\theta) \exp(ix \cos \theta) d\theta, \quad (3.8)$$

junto con la la propiedad de filtración de la función Delta obtenemos

$$U_\nu(\rho, \theta) \propto \exp(-i\nu\theta) \sum_{n=1}^N \alpha_{\nu,n}^2 \beta_{\nu,n} \exp(-i\nu\varphi_{\nu,n}) J_\nu\left(\frac{2\pi R \alpha_{\nu,n}}{\lambda f \alpha_{\nu,N}}\right). \quad (3.9)$$

Comparando las expresiones (3.9) y (3.5) observamos que

$$a_\nu = \lambda f \alpha_{\nu,N} / 2\pi R, \quad (3.10)$$

$$\beta_{\nu,n} \propto \frac{|J_\nu(\alpha_{\nu,n} \rho_0 / a_\nu)|}{\alpha_{\nu,n}^2 [J_{\nu+1}(\alpha_{\nu,n})]^2}, \quad (3.11)$$

$$\varphi_{\nu,n} = \begin{cases} 0 & \text{para } J_\nu(\alpha_{\nu,n} \rho_0 / a_\nu) \geq 0 \\ \pi/\nu & \text{para } J_\nu(\alpha_{\nu,n} \rho_0 / a_\nu) < 0 \end{cases}. \quad (3.12)$$

La señal óptica resultante queda expresa como

$$U_\nu(\rho, \theta) \propto \exp(-i\nu\theta) \sum_{n=1}^N \frac{J_\nu(\alpha_{\nu,n} \rho_0 / a_\nu)}{[J_{\nu+1}(\alpha_{\nu,n})]^2} J_\nu\left(\alpha_{\nu,n} \frac{\rho}{a_\nu}\right). \quad (3.13)$$

La ecuación (3.13) representa una aproximación finita del modelo ideal del vórtice óptico perfecto dado por expresión (3.1). En la figura 3.2 se grafican los perfiles de intensidad correspondientes.

CAPÍTULO 3. VÓRTICE ÓPTICO PERFECTO

3.2. DEFINICIÓN DEL VÓRTICE ÓPTICO PERFECTO Y SUS REPRESENTACIONES

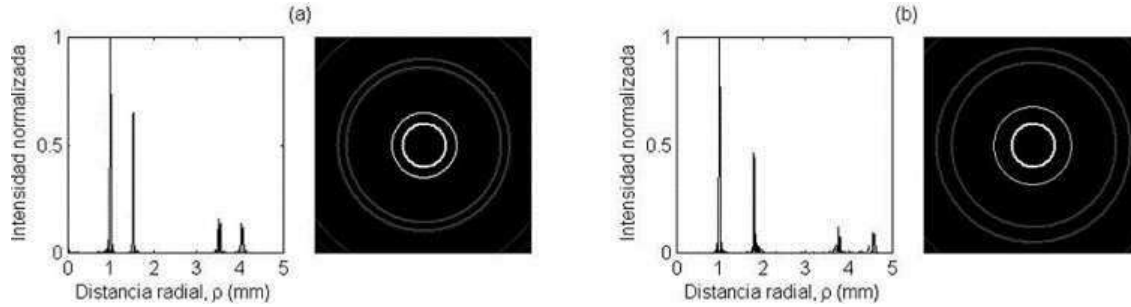


Figura 3.2: Patrones de intensidad para la aproximación (3.13) del VOP con carga topológica a) $\nu=1$; b) $\nu=10$, radio $\rho_0=1\text{mm}$ y $N=40$.

El anillo central en las señales ópticas de la figura 3.3 resulta ser justamente el VOP, pues observamos que su radio es independiente de la carga topológica y su intensidad la máxima. Los anillos laterales que se observan son resultado del truncamiento de la aproximación (3.13) y pueden ser eliminados mediante mascarillas que permita pasar únicamente al anillo central.

Para llevar a cabo experimentalmente esta técnica debemos primero diseñar las señales de control, con este fin escribimos un programa en MATLAB siguiendo el método descrito anteriormente que nos permite crear y guardar las señales como archivos png en escala de grises. Para nuestras señales hemos elegido portadora en lugar de tableros de ajedrez para las secciones de transmitancia cero, la portadora separa a la luz útil usada en la generación del VOP de la luz parasitaria.

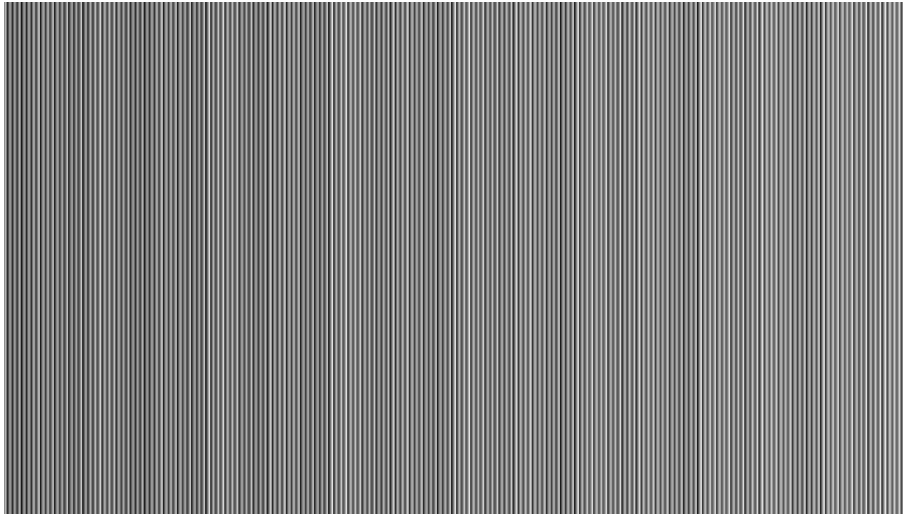


Figura 3.3: Señal portadora empleada en las regiones de transmitancia cero.

En la figura 3.5 se muestra el arreglo experimental para genera el VOP empleando la técnica descrita en esta sección. En el arreglo la luz incidente al modulador pasa antes a través de una placa $\lambda/2$, esta placa permite alinear el eje de polarización de la luz incidente con el eje activo del modulador para conseguir así la correcta modulación de fase. El haz modulado a la salida del MEL-CL pasa por una lente delgada de longitud focal f y la señal óptica final se observa en el plano focal. Como se mencionó en el capítulo anterior hemos elegido la configuración de rotar al dispositivo en un ángulo pequeño con el fin de distinguir al haz reflejado del incidente; el ángulo de reflexión al que el modulador se coloca debe ser ($\theta < 15^\circ$) tal que la posición de incidencia y salida del haz sea aproximadamente la misma para evitar aberraciones al atravesar dos zonas distintas en la pantalla.

CAPÍTULO 3. VÓRTICE ÓPTICO PERFECTO
3.2. DEFINICIÓN DEL VÓRTICE ÓPTICO PERFECTO Y SUS REPRESENTACIONES

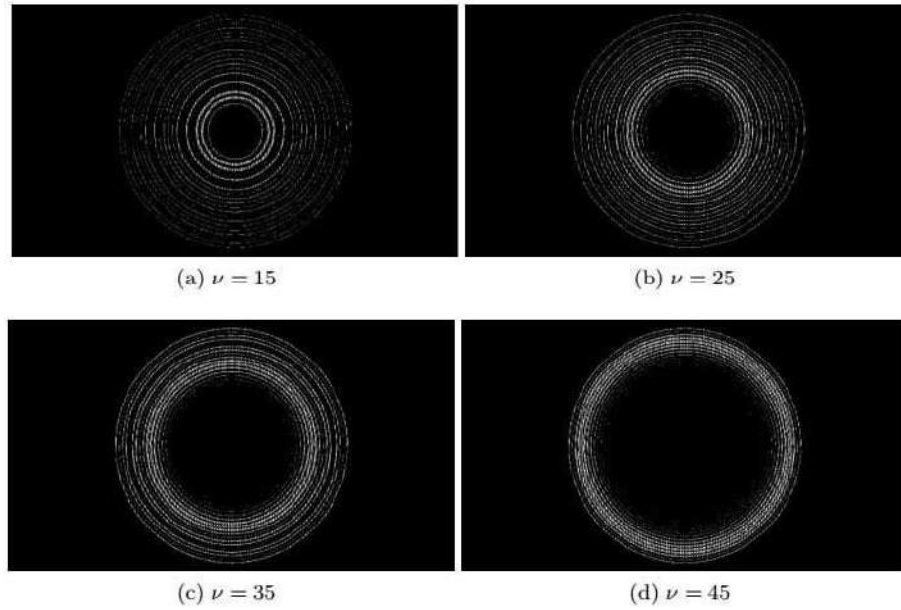


Figura 3.4: Señales de control de los anillos de trabajo utilizados en la generación del VOP para distintos valores de ν .

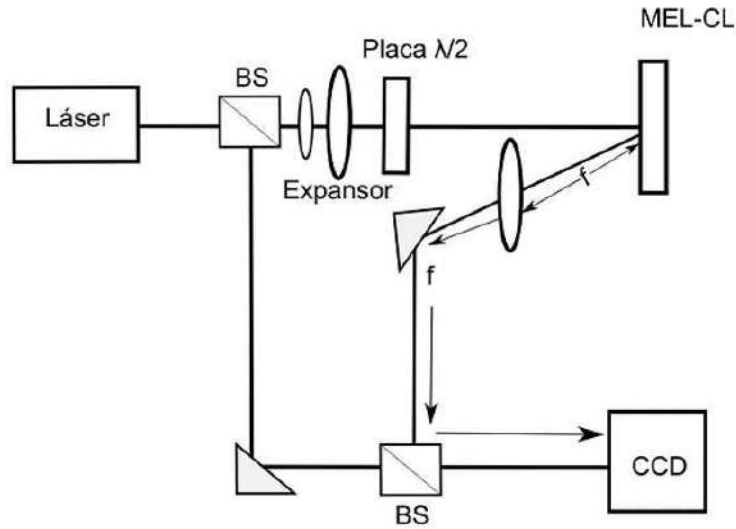


Figura 3.5: Arreglo óptico experimental para la generación del VOP empleando la aproximación en serie de Bessel.

En la figura 3.6 observamos los vórtices ópticos obtenidos experimentalmente. El modulador de reflexión PLUTO-VIS contribuyó a conseguir generar vórtices ópticos perfectos con una mayor carga topológica comparativamente con los ya registrados [14]. Nos obstante, la calidad de estos vórtices obtenidos experimentalmente no es la óptima, pues, aunque hemos conseguido desacoplar al radio externo del anillo central de la carga topológica el radio interno del anillo no presenta ese mismo comportamiento.

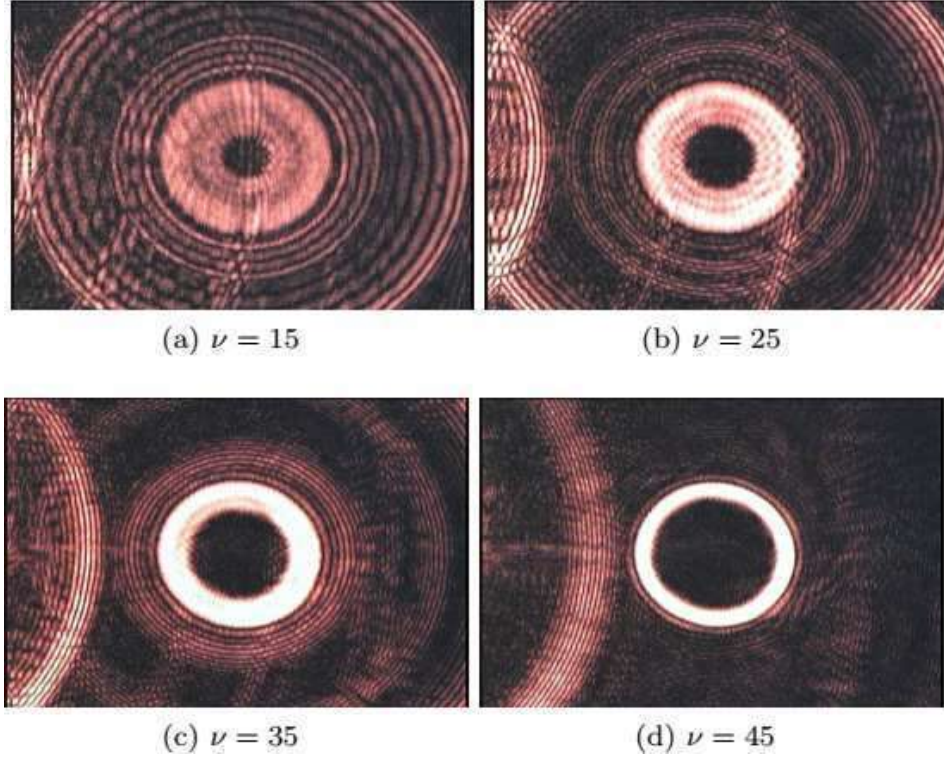


Figura 3.6: Vórtices ópticos perfectos experimentales con distintas cargas topológicas y radio $r_0 = 1$ mm.

3.2.2. Generación del VOP con base en la fórmula de clausura

En la sección anterior desarrollamos una técnica de generación del VOP empleando un MEL-CL a la entrada de un sistema óptico de transformada de Fourier utilizando una aproximación en serie de Bessel para diseñar las señales de transmitancia desplegadas en el modulador. Desafortunadamente, la calidad de los vórtices ópticos generados no era la mejor.

En esta sección propondremos una mejora a la técnica de generación del VOP que tome en consideración la naturaleza del MEL-CL de reflexión.

Partiendo del hecho que el VOP se obtiene por un sistema de transformada de Fourier y de que la distribución de amplitud compleja en los planos focales posterior (ρ, θ) y anterior (r, ψ) de dicho sistema se relacionan por

$$U(\rho, \theta) = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} U(r, \psi) \exp\left[-i \frac{2\pi}{\lambda f} r \rho \cos(\theta - \psi)\right] r dr d\psi, \quad (3.14)$$

que es por la transformada de Fourier en coordenadas polares en donde λ es la longitud de onda de iluminación y f es la longitud focal de la lente de Fourier.

Consideremos la transformada inversa de la ecuación (3.14) y sustituyendo para $U(\rho, \theta)$ la expresión del modelo ideal del VOP dada por (3.1), haciendo uso la propiedad de filtración de la función Delta junto con la siguiente representación de la función de Bessel

$$J_\nu(x) = \frac{i^{-\nu}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(i\nu\psi) \exp(ix \cos(\psi)) d\psi, \quad (3.15)$$

encontramos que la señal óptica que nos permite generar el vórtice óptico perfecto debe elegirse conforme con

CAPÍTULO 3. VÓRTICE ÓPTICO PERFECTO

3.2. DEFINICIÓN DEL VÓRTICE ÓPTICO PERFECTO Y SUS REPRESENTACIONES

$$U(r, \psi) \propto J_\nu \left(\frac{2\pi}{\lambda f} r \rho_0 \right) \exp(i\nu\psi). \quad (3.16)$$

Para determinar las posiciones y anchos de los anillos en nuestra señal de transmitancia aplicamos la aproximación en ancho de pulso de la función Bessel a la ecuación (3.16) tal y como se muestra en la figura 3.8 para valores positivos de ν

$$J_\nu \left(\frac{2\pi}{\lambda f} r \rho_0 \right) \approx \sum_n (-1)^{n-1} \text{rect} \left(\frac{r - r_{\nu,n}}{\delta r_{\nu,n}} \right), \quad (3.17)$$

donde $\text{rect}(r)$ es la función rectángulo, $r_{\nu,r}$ son las posiciones de los anillos calculadas como las raíces de la ecuación

$$\frac{d}{dr} J_\nu \left(\frac{2\pi}{\lambda f} r \rho_0 \right) = 0 \quad (3.18)$$

y $\delta r_{\nu,n}$ es el ancho de los anillos dado por

$$\delta r_{\nu,n} \propto \frac{|J_\nu(2\pi r_{\nu,n} \rho_0) / \lambda f|}{|J_\nu(2\pi r_{\nu,1} \rho_0) / \lambda f|}. \quad (3.19)$$

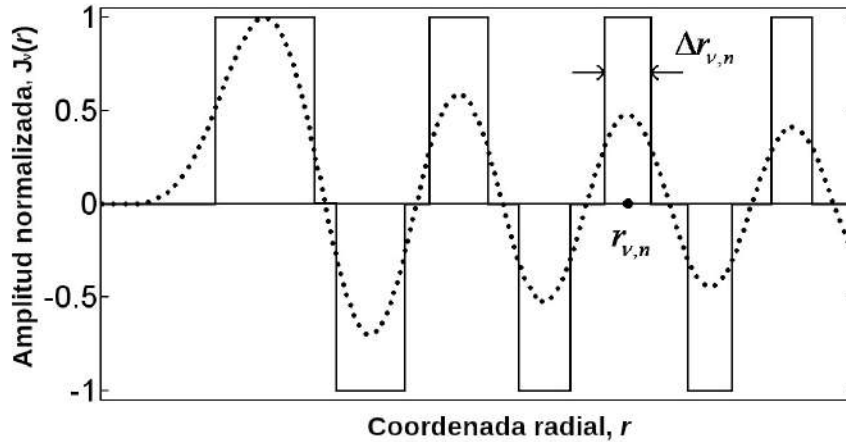


Figura 3.7: Aproximación de ancho de pulso de la función Bessel.

Entonces, la función de transmisión del modulador está formada por una serie de anillos concéntricos dada por

$$T(r, \psi) = \exp \left(i \frac{2\pi}{\lambda f} x'_0 x \right) \sum_n \text{rect} \left(\frac{r - r_{\nu,n}}{\delta r_{\nu,n}} \right) \exp[i\nu(\psi - \psi_{\nu,n})], \quad (3.20)$$

donde $\psi_{\nu,n}$ toma el valor de 0 para n impar y π/ν para n par.

Estos anillos de trabajo están separados por otro conjunto de anillos concéntricos complementarios con transmitancia

$$T(r, \psi) = \exp \left(-i \frac{2\pi}{\lambda f} x'_0 x \right) \left[1 - \sum_n \text{rect} \left(\frac{r - r_{\nu,n}}{\delta r_{\nu,n}} \right) \right]. \quad (3.21)$$

Se introduce al factor de fase $\exp(\pm i 2\pi x'_0 x / \lambda f)$ para separar a la modulación útil de la luz parasitaria que pasa por entre los espacios de los anillos de trabajo.

CAPÍTULO 3. VÓRTICE ÓPTICO PERFECTO

3.2. DEFINICIÓN DEL VÓRTICE ÓPTICO PERFECTO Y SUS REPRESENTACIONES

Finalmente sustituyendo en (3.14) encontramos que la señal óptica centrada en los puntos ($x' = -x'_0, y' = 0$) en el plano de Fourier es

$$U(\rho, \theta) = \exp(i\nu\theta) \sum_n (-1)^{n-1} \int_{r_{\nu,n}-\delta r_{\nu,n}/2}^{r_{\nu,n}+\delta r_{\nu,n}/2} J_\nu \left(\frac{2\pi}{\lambda f} r \rho \right) r dr, \quad (3.22)$$

y su la distribución de intensidad resulta

$$I(\rho) = \left| \sum_{n=1}^N (-1)^{n-1} \int_{r_{\nu,n}-\delta r_{\nu,n}/2}^{r_{\nu,n}+\delta r_{\nu,n}/2} J_\nu \left(\frac{2\pi}{\lambda f} r \rho \right) r dr \right|^2, \quad (3.23)$$

donde N es un parámetro de truncado.

Resolviendo mediante métodos numéricos la integral en la ecuación (3.23) graficamos los perfiles de intensidad para dos valores de carga topológica tal como muestran en la figura 3.8. Los resultados computacionales obtenimos muestran que (3.22) puede considerarse como una buena aproximación al VOP.

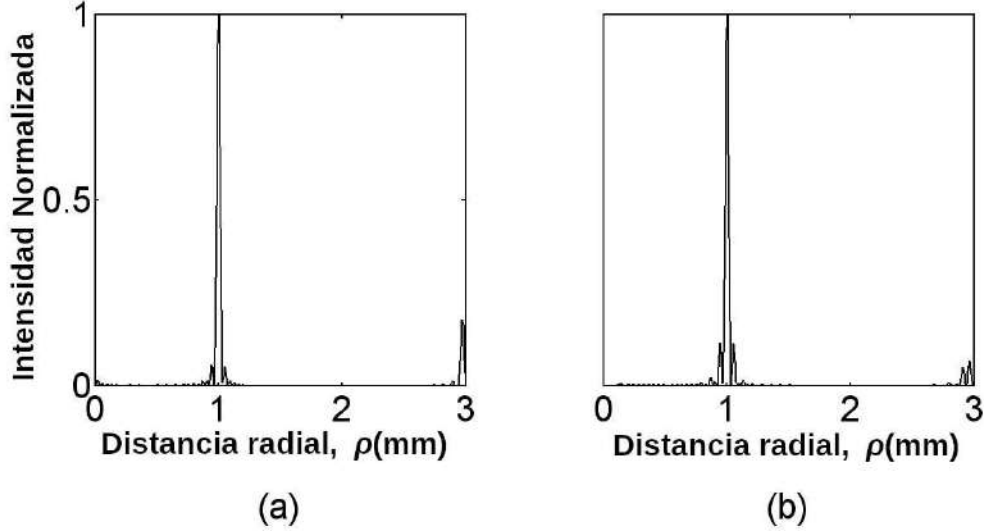


Figura 3.8: Perfil de intensidad del VOP para dos valores de carga topológica (a) $\nu = 1$ (b) $\nu = 10$, radio $\rho_0 = 1$ mm y $N=20$.

Para la realización experimental de esta técnica de generación del VOP emplearemos el modulador de reflexión Pluto-Vis cuyas características hemos descrito anteriormente. Nuevamente haciendo uso de una rutina programada en MATLAB de acuerdo con el método descrito diseñamos y guardamos las señales de control como imágenes en escala de grises en formato png. Un láser de He-Ne (633) de baja potencia (4.5 mW) será utilizado como fuente iluminación y para registrar los resultados emplearemos una cámara CCD.

Para asegurar el correcto funcionamiento del modulador y garantizar la precisión de los experimentos desplegamos primero una señal de control en el modulador de la forma $\exp(i\nu\psi)$ que corresponde a vórtice tradicional para distintos valores de carga topológica ν , colocamos un divisor de haz no polarizado antes del modulador para obtener un haz de referencia (ests corresponde a la sección punteada de la figura 3.9 empleando un espejo hacemos interferir el haz de referencia con el vórtice registrando el patrón de interferencia con la cámara CCD. El patrón de interferencia obtenido es el conocido como patrón de tenedor en el cual la diferencia entre el número de franjas superiores e inferiores es igual a la carga topológica del vórtice generado. Las señales de control empleadas y los patrones de interferencia registrados se muestran en la figura 3.10.

CAPÍTULO 3. VÓRTICE ÓPTICO PERFECTO
3.2. DEFINICIÓN DEL VÓRTICE ÓPTICO PERFECTO Y SUS REPRESENTACIONES

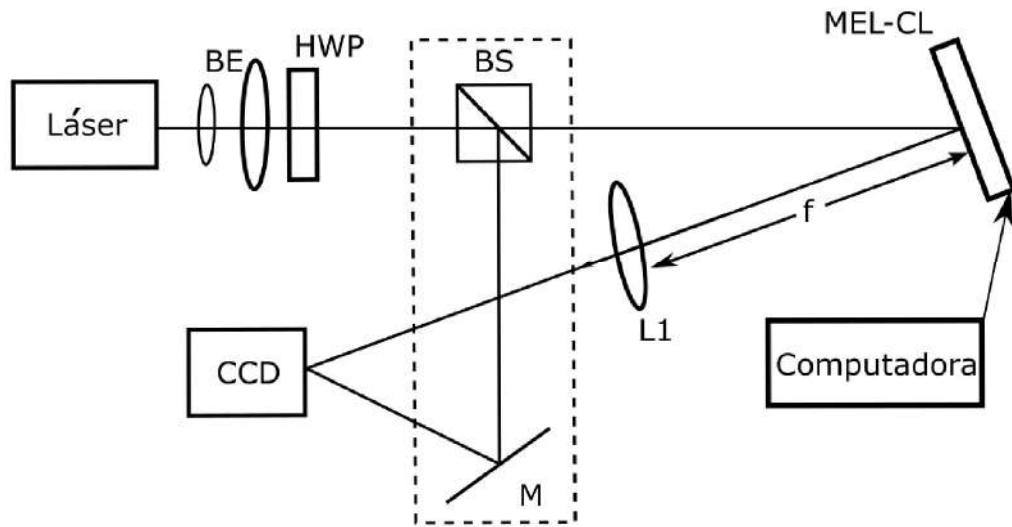


Figura 3.9: Montaje experimental BE: expansor de haz; HWP: placa de $\lambda/2$; BS: divisor de haz; MEL-CL: modulador de luz; L1: lente con distancia focal f ; CCD: cámara; M: espejo

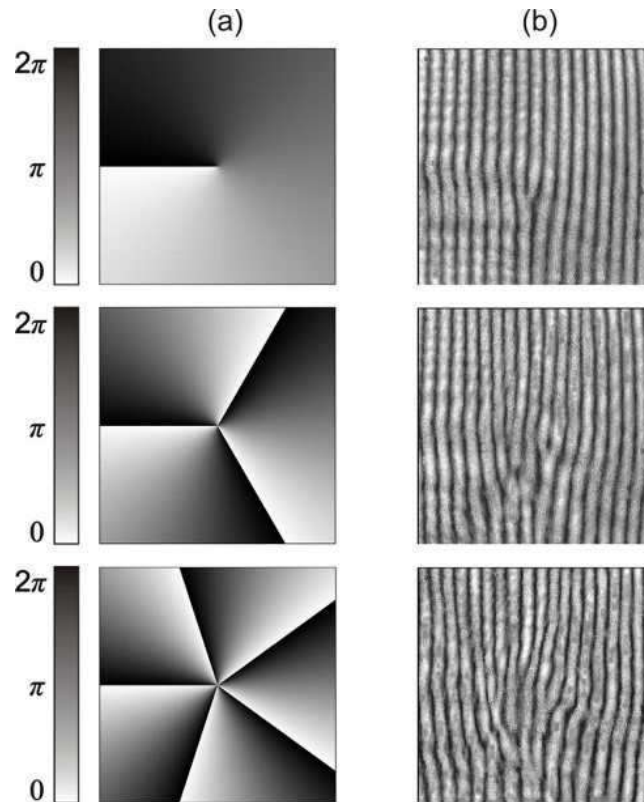


Figura 3.10: (a) Señales de control para vórtices ópticos; (b) Patrón de interferencia.

Los vórtices ópticos experimentales obtenidos empleando esta nueva técnica de generación se muestran en la figura 3.11

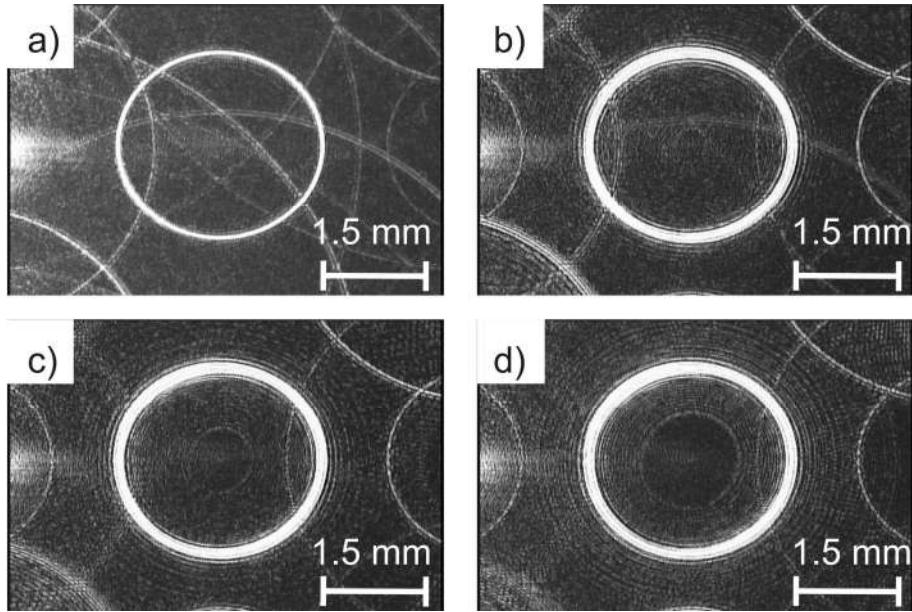


Figura 3.11: Vórtices ópticos perfectos experimentales generados con la nueva técnica con cargas (a) $\nu = 1$; (b) $\nu = 20$; (c) $\nu = 40$ (d) $\nu = 60$, radio $\rho_0 = 1.5$ mm y $N=30$

Observamos que los vórtices ópticos obtenidos exhiben independencia de su radio respecto de la carga topológica y su distribución de intensidad presenta un perfil marcado. Adicionalmente, apreciamos un ligero ensanchamiento en el anillo principal que puede explicarse como consecuencia del truncado y del error sistemático en la aproximación de ancho de pulso de la función Bessel.

3.3. Atrapamiento óptico de partículas usando el VOP

Cuando un haz de luz incide sobre una partícula se lleva a cabo un intercambio de momento [97, 98] entre ambos y como resultado surgen fuerzas que permiten confinar a la partícula. La teoría del atrapamiento óptico de partículas (Apéndice A) tiene 3 regímenes principales en función del tamaño relativo entre la longitud de onda del haz de atrapamiento y el tamaño de la partícula atrapada.

Los vórtices ópticos poseen frentes de onda helicoidales e inclinados respecto de la dirección de propagación, se sabe el flujo de momento en el campo de luz se encuentra perpendicular al frente de onda, entonces esto significa que este tipo de haces es capaz de aplicar fuerzas circunferenciales y por tanto, torques alrededor del eje de propagación del haz. Es así como el vórtice óptico transfiere momento hacia una partícula con la que interactúa.

Para nuestro arreglo experimental de pinzas ópticas que utiliza el VOP como haz de atrapamiento debemos considerar dos partes:

- 1.- El arreglo de generación del VOP que hemos desarrollado y se muestra en la figura (3.9)
- 2.- El sistema de pinzas ópticas, el cual consiste básicamente en microscopio modificado como se observa en la figura 3.12

CAPÍTULO 3. VÓRTICE ÓPTICO PERFECTO
3.3. ATRAPAMIENTO ÓPTICO DE PARTÍCULAS USANDO EL VOP

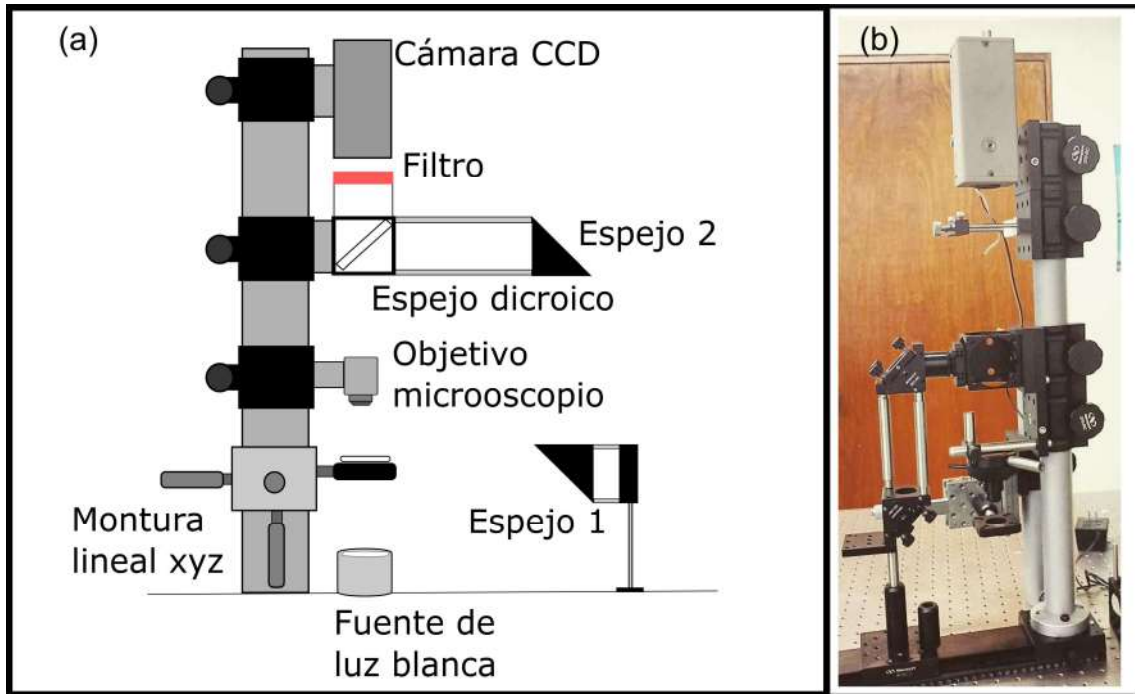


Figura 3.12: (a) Diagrama esquemático del sistema de pinzas ópticas; (b) sistema experimental de pinzas montado en laboratorio.

El sistema de pinzas completo se muestra en la figura 3.13; una vez generado el VOP es dirigido al sistema de pinzas incidiendo sobre el espejo dicroico, este espejo permite redireccionar el haz hacia el objetivo de microscopio de 100x donde será enfocado sobre la muestra de partículas de sílica con radios de $2.5 \mu m$ colocadas sobre un portaobjetos. El objetivo de microscopio usado para enfocar el VOP es el mismo que emplearemos para observar el atrapamiento de las partículas entonces con la ayuda de varios filtros colocados frente a la cámara CCD conseguimos eliminar la luz láser reflejada por el espejo dicroico y dejamos pasar hasta el CCD la que viene de la fuente de luz blanca. Logramos atrapar 10 partículas de sílica en la distribución anular de intensidad del VOP empleando cargas topológicas $\nu=10,20,40$ y 60, esta situación se observa en las imágenes de la figura 3.14

CAPÍTULO 3. VÓRTICE ÓPTICO PERFECTO
3.3. ATRAPAMIENTO ÓPTICO DE PARTÍCULAS USANDO EL VOP

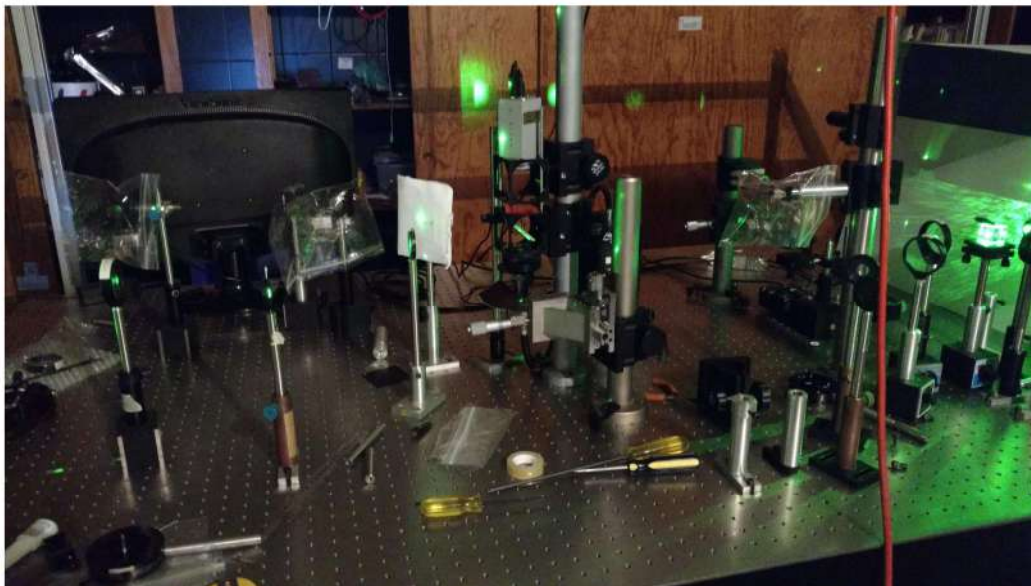
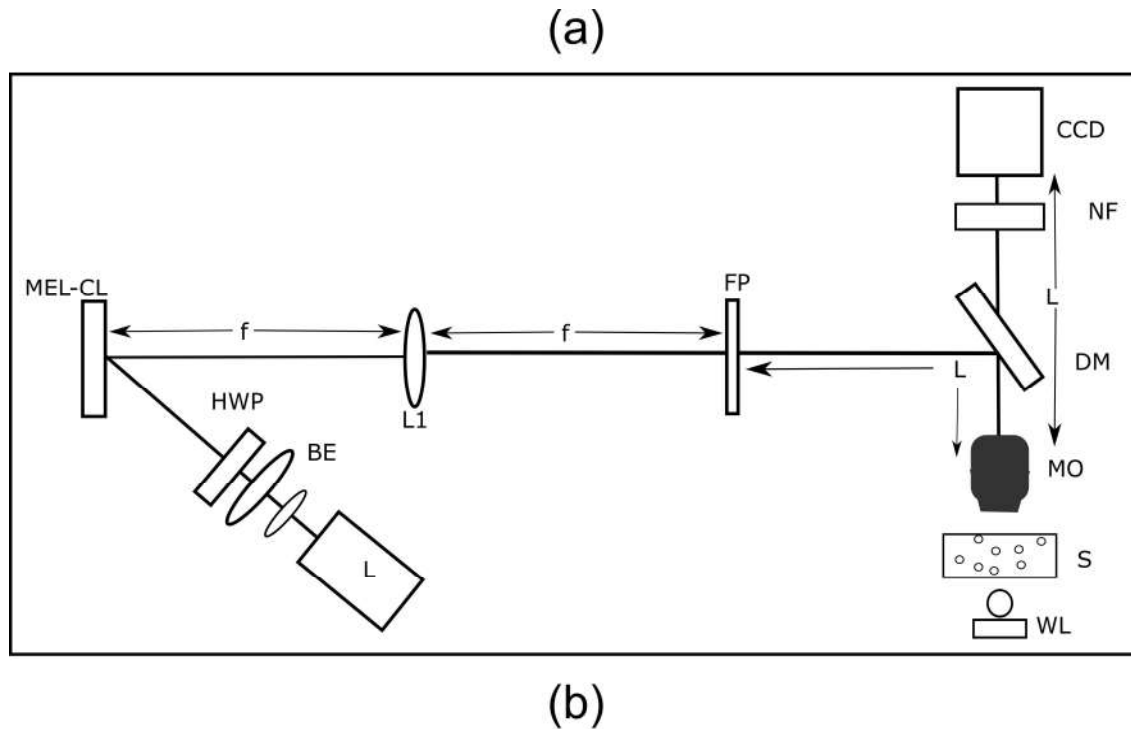


Figura 3.13: (a) Esquema experimental L: láser; BE: expansor de haz; HWP: placa de $\lambda/2$; MEL-CL: modulador de luz; L1: lente con distancia focal f ; DM: espejo dicroico, NF: filtro, CCD: cámara; MO: objetivo de microscopio; S: muestra; WL: fuente de luz blanca, (b) arreglo experimental en laboratorio.

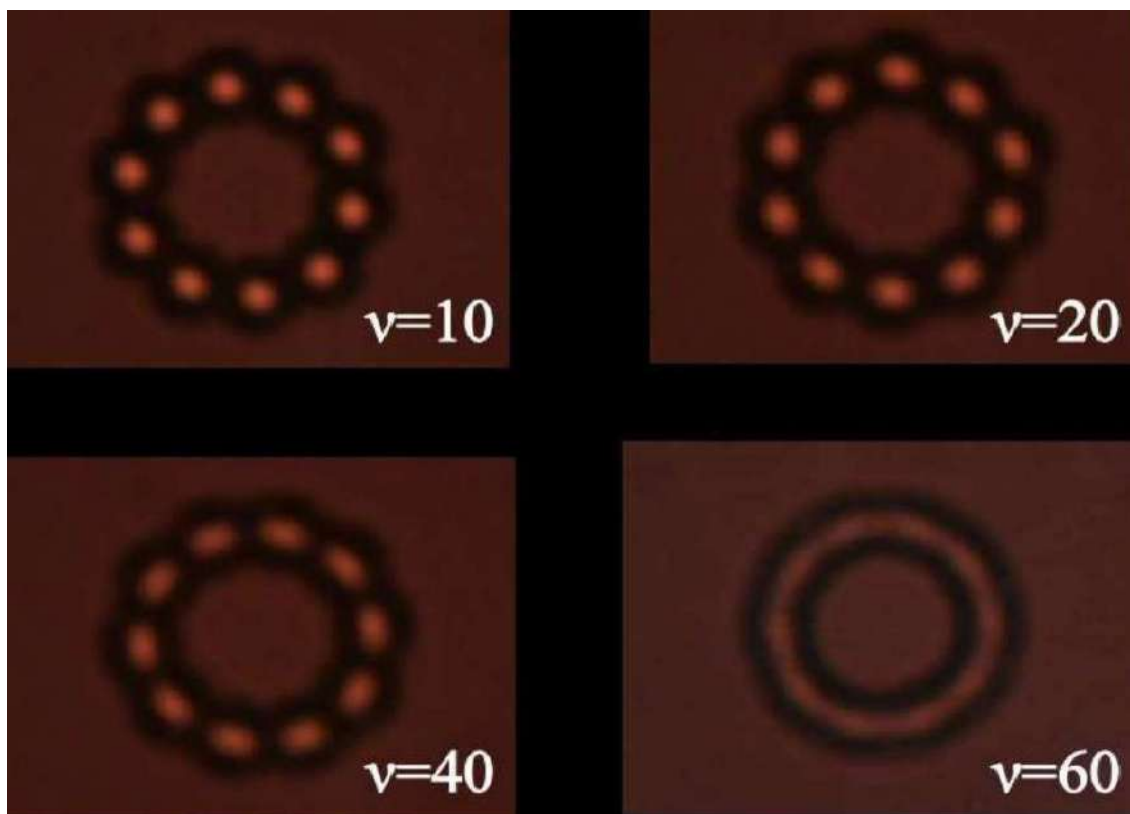


Figura 3.14: Partículas de silica de radio de $2.5 \mu m$ atrapadas empleado un VOP con diferente carga.

De las imágenes de la figura 3.14 observamos una ligera deformación en las partículas atrapadas que es mas visible conforme aumenta la carga topológica. Esto es resultado del aumento del momento angular transmitido a las partículas que se traduce en una mayor velocidad de giro.

3.4. Conclusiones

- En este capítulo expusimos el tema del vórtice óptico perfecto con sus propiedades y descripción matemática.
- Recapitulamos las técnicas de generación propuestas por nuestro equipo de trabajo para la síntesis del VOP, explicando sus particularidades teóricas y experimentales junto con su ventajas y desventajas.
- La generación experimental del VOP se realizó mediante dos aproximaciones distintas, para cada caso se presentaron resultados numéricos y experimentales.
- En la primera aproximación se empleó la representación en serie de Fourier. Los resultados experimentales obtenido en este caso a pesar de ser bueno se encontraban limitados; primeramente, por el tipo de modulador empleado y en segunda por que la teoría desarrollada no

correspondía al modulador de reflexión.

- La segunda aproximación utiliza la fórmula de clausura de la función de Bessel y posee una implementación experimental más simple. Los resultados obtenidos son de una mejor calidad que en el primer caso pudiendo obtener vórtices con cargas mayores.

- Se consiguió atrapar partículas de silica con radios $2.5 \mu m$ empleando al VOP como haz de atrapamiento en un sistema de pinzas ópticas.

- Fue posible observar cualitativamente la relación entre el aumento de la velocidad de giro de las partículas atrapadas con el VOP con el incremento de la carga topológica del vórtice empleado.

Capítulo 4

Vórtice óptico invariante en propagación

4.1. Introducción

Como es bien sabido, un campo óptico acotado que se propaga en el espacio libre experimenta expansión debido a difracción que cambia su distribución de intensidad transversal. Sin embargo, no siempre es el caso si el campo tiene una extensión infinita. Hace casi dos décadas, Durnin [36] encontró una solución exacta de la ecuación de propagación de ondas que describe una clase completa de los llamados campos adifraccionales. Se ha demostrado que cualquier campo adifraccional representa la superposición de ondas planas con vectores de onda situados sobre un cono. En este caso, todos los vectores de onda poseen la misma proyección a lo largo de, digamos, el eje x y las ondas planas constitutivas sufren el mismo cambio de fase en la propagación. En consecuencia, interfieren de la misma manera en cualquier plano constante z . El miembro más simple de la clase de los campos adifraccionales es el haz fundamental de Bessel. El perfil de intensidad claramente fino de este haz, junto con su propiedad de invariancia en la propagación, ha generado un gran interés para los haces adifraccionales. Se han estudiado y comparado los nuevos modelos de haces adifraccionales [38–48], se ha demostrado la posibilidad de su generación física en los experimentos [49–54] y se han discutido sus potenciales aplicaciones prácticas [55–61]. No está fuera de lugar mencionar aquí que los haces adifraccionales también han recibido atención en la ciencia acústica [62].

Los haces adifraccionales definidos por las soluciones de Durnin representan campos ópticos completamente coherentes. Al mismo tiempo, como ha sido demostrado por Ohtsuka et al. [63] y por Gori et al. [37], algunos campos parcialmente coherentes también pueden exhibir propiedades de invariancia en propagación. Turenen et al. [64], han generalizado el concepto de propagación libre de difracción en un dominio de campos parcialmente coherentes y han deducido la expresión general de la función de densidad espectral cruzada, que define una amplia clase de campos invariantes en propagación parcialmente coherentes.

Recientemente, Ostrosky [65] propuso una teoría general de los campos invariantes de propagación basada en la representación modal del campo parcialmente coherentes. Aquí, siguiendo esta teoría, deducimos la estructura modal del campo invariante en propagación y mostramos que este campo representa un vórtice óptico aleatorio que se propaga en el espacio libre sin expansión por difracción. También proponemos una técnica de generación de tal vórtice y consideramos un ejemplo de su aplicación práctica.

4.1.1. Campo óptico invariante en propagación

Consideremos la propagación de un campo óptico cuasi-monocromático escalar en el espacio libre desde el plano $z = 0$ hacia el plano $z = z_0$ (figura 4.1), y sea $W(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$, la función de densidad espectral cruzada de este campo en el plano $z = 0$ (de ahora en adelante, omitiremos las dependencias explícitas de las magnitudes consideradas en la frecuencia).

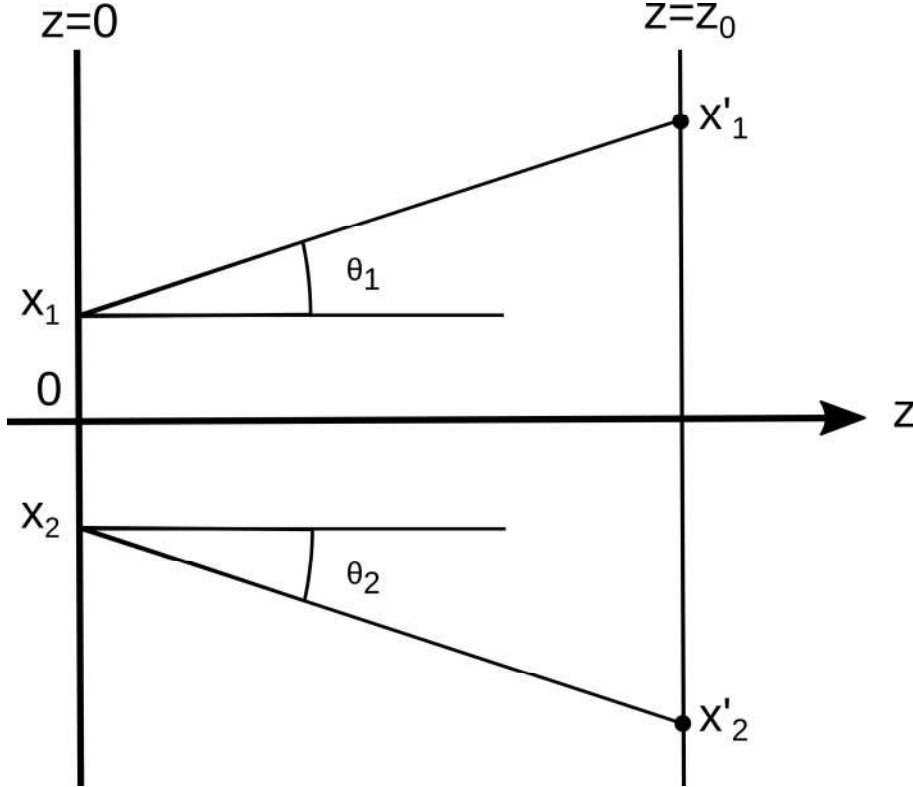


Figura 4.1: Notación relativa a la propagación de la función de densidad espectral cruzada desde el plano $z = 0$ a el plano $z = z_0$.

La densidad espectral cruzada en el plano $z = 0$, $W(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$, se encuentra como [66]

$$W(\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2) = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2 \iint_{z=0} W(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; 0) \frac{\exp[ik(r_2 - r_1)]}{r_1 r_2} \cos \theta_1 \cos \theta_2 d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2, \quad (4.1)$$

donde $k = 2\pi/\lambda$ es el número de onda, λ es la longitud de onda, y

$$r_{1(2)} = \left[(\mathbf{x}'_{1(2)} - \mathbf{x}'_{2(1)})^2 + z_0^2 \right]^{1/2}. \quad (4.2)$$

Como puede verse de la ecuación (4.1), en el caso general, la función de densidad espectral cruzada sufre cambios en su forma al propagarse en el espacio libre, se dice que un campo óptico es un campo invariante en propagación si su función de densidad espectral cruzada permanece igual en todos los planos normales al eje z , es decir,

$$W(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; z_0) = W(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; 0). \quad (4.3)$$

Es obvio que el espectro de potencia de los campos invariantes en propagación posee la misma propiedad como sigue

$$S(\mathbf{x}; z_0) = S(\mathbf{x}; 0). \quad (4.4)$$

CAPÍTULO 4. VÓRTICE ÓPTICO INVARIANTE EN PROPAGACIÓN
4.1. INTRODUCCIÓN

Para hallar la forma de la función de densidad espectral cruzada de un campo invariante en propagación, empleando la aproximación paraxial, que es justificable cuando el campo se propaga dentro de un ángulo sólido estrecho alrededor del eje z , y así, tomando en cuenta la ecuación (4.4), en nuestro caso. Entonces, bajo la aproximación paraxial son válidas para los parámetros de la ecuación (4.2) las siguientes relaciones

$$\cos \theta_1 \approx \cos \theta_2 \approx 1, \quad (4.5)$$

$$r_{1(2)} \approx z_0, \quad (4.6)$$

para el denominador en la fracción de la integral (4.1), y

$$r_{1(2)} \approx z_0 \left[1 + \frac{(\mathbf{x}'_{1(2)} - \mathbf{x}'_{2(1)})^2}{2z_0^2} \right], \quad (4.7)$$

en la función exponencial.

La expresión resultante de la función de densidad espectral cruzada en el plano $z = z_0$ se convierte en

$$W(\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2) = \left(\frac{k}{2\pi z_0} \right)^2 \int \int_{z=0} W(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; 0) \exp \left\{ i \frac{k}{2z_0} [(\mathbf{x}'_2 - \mathbf{x}_2)^2 - (\mathbf{x}'_1 - \mathbf{x}_1)^2] \right\} d\mathbf{x}_2 d\mathbf{x}_1. \quad (4.8)$$

Ahora, expresamos $W(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; 0)$ a través de su transformada de Fourier 4-dimensional, $\tilde{W}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2; 0)$ como

$$W(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \int \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{W}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \exp [i2\pi(\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{x}_2 - \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{x}_1)] d\mathbf{u}_1 d\mathbf{u}_2. \quad (4.9)$$

Sustituyendo la Ec. (4.9) en (4.8), intercambiando el orden de integración y haciendo uso de la relación de Fourier

$$\int \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\pi a^2 x^2) \exp(i2\pi \mathbf{u} \cdot \mathbf{x}) dx = \frac{1}{a^2} \exp\left(-i\lambda \frac{\mathbf{u}^2}{a^2}\right), \quad (4.10)$$

obtenemos

$$W(\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2) = \int \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{W}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2; 0) \exp \left[-i \frac{2\pi}{k} z_0 (\mathbf{u}_1^2 - \mathbf{u}_2^2) \right] \exp [i2\pi(\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{x}'_2 - \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{x}'_1)] d\mathbf{u}_1 d\mathbf{u}_2. \quad (4.11)$$

Además sera apropiado expresar la Ec. (4.11) a través de las coordenadas polares (r, ϕ) en el plano \mathbf{u} como

$$\begin{aligned} W(\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2) &= \int \int_0^{2\pi} \int \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{W}(r_1, r_2, \phi_1, \phi_2; 0) \exp \left[-i \frac{2\pi^2}{k} z_0 (r_1^2 - r_2^2) \right] \\ &\quad \times \exp [i2\pi(x'_2 r_2 \cos \phi_2 + y'_2 r_2 \sin \phi_2 - x'_1 r_1 \cos \phi_1 - y'_1 r_1 \sin \phi_1)] \\ &\quad \times r_1 r_2 dr_1 dr_2 d\phi_1 d\phi_2. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Finalmente, recordamos la condición de la propagación invariante (4.3) y aplicamos a la Ec. (4.12)

$$\begin{aligned} &\int \int_0^{2\pi} \int \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{W}(r_1, r_2, \phi_1, \phi_2; 0) \exp \left[-i \frac{2\pi^2}{k} z_0 (r_1^2 - r_2^2) \right] \\ &\quad \times \exp [i2\pi(x'_2 r_2 \cos \phi_2 + y'_2 r_2 \sin \phi_2 - x'_1 r_1 \cos \phi_1 - y'_1 r_1 \sin \phi_1)] r_1 r_2 dr_1 dr_2 d\phi_1 d\phi_2 \\ &= \int \int_0^{2\pi} \int \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{W}(r_1, r_2, \phi_1, \phi_2; 0) \exp [i2\pi(x'_2 r_2 \cos \phi_2 + y'_2 r_2 \sin \phi_2 - x'_1 r_1 \cos \phi_1 - y'_1 r_1 \sin \phi_1)] \\ &\quad \times r_1 r_2 dr_1 dr_2 d\phi_1 d\phi_2. \end{aligned} \quad (4.13)$$

CAPÍTULO 4. VÓRTICE ÓPTICO INVARIANTE EN PROPAGACIÓN
4.1. INTRODUCCIÓN

La igualdad (4.13) muestra que la función $\tilde{W}(r, \phi; 0)$ debe desvanecerse para todos los r_1 y r_2 excepto para cuando $r_1 = r_2$, es decir

$$\tilde{W}(r_1, r_2, \phi_1, \phi_2; 0) = Q(r_1, r_2, \phi_1, \phi_2) \delta(r_1 - r_2), \quad (4.14)$$

donde δ es la función delta de Dirac y $Q(r_1, r_2, \phi_1, \phi_2)$ es una función arbitraria. Así, finalmente, al sustituir por $\tilde{W}(r_1, r_2, \phi_1, \phi_2; 0)$ de la ec. (4.14) en (4.12) y haciendo uso de la propiedad de filtrado de la función de Delta, obtendremos la siguiente expresión para la función de densidad espectral cruzada, que describe toda la clase de campos invariantes en propagación:

$$W(r_1, r_2, \phi_1, \phi_2; z_0) = \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Q(r_1, r_2, \phi_1, \phi_2; 0) \exp[i2\pi(x'_2 r_2 \cos \phi_2 + y'_2 r_2 \sin \phi_2 - x'_1 r_1 \cos \phi_1 - y'_1 r_1 \sin \phi_1)] \times r_1 r_2 dr_1 dr_2 d\phi_1 d\phi_2. \quad (4.15)$$

Para aclarar el significado físico del resultado obtenido, observamos que la función exponencial $\exp(i2\pi r(x \cos \phi + y \sin \phi))$ que aparece en la ec. (4.15) puede considerarse como una onda plana que se propaga con cosenos de dirección $\alpha = (2\pi/k)r \cos \phi$, $\beta = (2\pi/k)r \sin \phi$ y $\gamma = (1 - \alpha^2 - \beta^2)^{1/2}$. Por tanto, la ecuación (4.15), junto con el requisito (4.14), muestra que el campo en propagación representa la superposición de ondas planas que no están correlacionadas en la dirección radial y tienen correlación arbitraria en la dirección azimutal.

4.1.2. Estructura modal del campo invariante en propagación

Como es bien conocido [66], la densidad espectral cruzada $W(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ puede expresarse en forma de la expansión de Mercer como

$$W(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \varphi_n^*(\mathbf{x}_1) \varphi_n(\mathbf{x}_2), \quad (4.16)$$

donde λ_n son autovalores $\varphi_n(\mathbf{x}_1)$ son las funciones propias de la ecuación integral homogénea de Fredholm de segundo tipo

$$\int_D W(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \varphi_n(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) d\mathbf{x}_1 = \lambda_n \varphi_n(\mathbf{x}_2). \quad (4.17)$$

Es importante destacar que todos los valores propios son reales y no negativos, es decir,

$$\lambda_n^* = \lambda_n \geq 0, \quad (4.18)$$

y las eigenfunciones $\varphi_n(\mathbf{x})$ son mutuamente ortonormales en D (si no lo están ya, esto puede lograrse usando el procedimiento de Gram-Schmidt), es decir,

$$\int_D \varphi_n^*(\mathbf{x}_2) \varphi_m(\mathbf{x}_2) d\mathbf{x} = \delta_{mn}, \quad (4.19)$$

donde δ_{mn} es el símbolo de Kronecker.

Para aclarar el sentido físico de la expansión (4.16), lo reescribimos en la forma

$$W(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \sum_n \lambda_n W_n(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2), \quad (4.20)$$

donde cada función

$$W_n(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \varphi_n^*(\mathbf{x}_1) \varphi_n(\mathbf{x}_2), \quad (4.21)$$

puede asociarse con un modo elemental del campo caracterizado por el grado de coherencia

$$\mu(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \frac{\varphi_n^*(\mathbf{x}_1) \varphi_n(\mathbf{x}_2)}{|\varphi_n^*(\mathbf{x}_1)| |\varphi_n(\mathbf{x}_2)|}. \quad (4.22)$$

Se deduce de la ecuación (4.22) que

$$|\mu(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)| = 1, \quad (4.23)$$

es decir, que cada modo de campo representa la contribución espacialmente coherente. Así, la expansión (4.20) puede ser interpretada como la densidad espectral cruzada del campo expresada como una superposición de contribuciones de modos que son completamente coherentes y mutuamente no correlacionados. Por esta razón, nos referiremos a la expansión (4.16)) como la representación en modos coherentes del campo.

Consideremos ahora un campo estocástico, cada una de sus realizaciones tiene la forma

$$U(\boldsymbol{\rho}) = \sum_n c_n \varphi_n(\boldsymbol{\rho}), \quad (4.24)$$

donde $\varphi_n(\boldsymbol{\rho})$, como antes, son los modos del campo, c_n son variables aleatorias que serán especificadas después. La densidad espectral cruzada de dicho campo puede ser escrita como

$$W(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2) = \langle U^*(\boldsymbol{\rho}_1) U(\boldsymbol{\rho}_2) \rangle \\ \sum_n \sum_m \langle c_n^* c_m \rangle \varphi_n^*(\boldsymbol{\rho}_1) \varphi_m(\boldsymbol{\rho}_2), \quad (4.25)$$

donde los paréntesis denotan el promedio estadístico sobre el ensamble de realización aleatorias. Después, escogemos los modos $\varphi_n(\boldsymbol{\rho})$ para formar el conjunto ortonormal de funciones Bessel con el mismo factor azimutal exponencial

$$\varphi_n(\boldsymbol{\rho}) = \frac{J_\nu(\alpha_{\nu,n} \frac{\rho}{a})}{\sqrt{\pi a} J_{\nu+1}(\alpha_{\nu,n})}. \quad (4.26)$$

Suponiendo que las variables aleatorias c_n se escogen para satisfacer la condición $\langle c_n^* c_m \rangle = \lambda_n \delta_{n,m}$, donde $\delta_{n,m}$ es el símbolo de Kronecker. Notamos que esta condición puede ser satisfecha, por ejemplo, tomando $c_n = \sqrt{\lambda_n} \exp(i\psi_n)$, donde ψ_n son variables aleatorias estadísticamente independientes distribuidas uniformemente en el intervalo $[0, 2\pi]$.

Sustituyendo de la ec. (4.25) con las condiciones mencionadas, obtenemos

$$W(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2) = \sum_n \lambda_n \frac{J_\nu(\alpha_{\nu,n} \frac{\rho_1}{a}) J_\nu(\alpha_{\nu,n} \frac{\rho_2}{a})}{\pi a^2 J_{\nu+1}^2(\alpha_{\nu,n})} \exp[i\nu(\theta_2 - \theta_1)], \quad (4.27)$$

que es justamente la representación en modos coherentes del campo bajo consideración. La intensidad espectral $S(\boldsymbol{\rho})$ correspondiente a este campo se puede obtener de la ec. (4.27) haciendo $\boldsymbol{\rho}_1 = \boldsymbol{\rho}_2 = \boldsymbol{\rho}$ como sigue

$$S(\boldsymbol{\rho}) = \sum_n \lambda_n \frac{J_\nu^2(\alpha_{\nu,n} \frac{\rho}{a})}{\pi a^2 J_{\nu+1}^2(\alpha_{\nu,n})}. \quad (4.28)$$

Como es bien conocido, las propiedades de coherencia de la luz se caracterizan por la distribución de eigenvalores λ_n . Entre más uniformemente distribuidos, más incoherente la luz. Por otro lado, cuanto más concentrada la distribución de eigenvalores cerca de su valor máximo, más coherente la luz. Entonces, el campo dado por la ec. (4.27) con los valores arbitrarios λ_n puede identificarse como un haz vórtice parcialmente coherente en modo Bessel.

CAPÍTULO 4. VÓRTICE ÓPTICO INVARIANTE EN PROPAGACIÓN
4.1. INTRODUCCIÓN

Realizando la simulación numérica de los resultados teóricos obtenidos evitando la incertidumbre de λ con la elección particular $\lambda_n = \pi a^2 J_{\nu+1}^2(\alpha_\nu, n)$. En este caso, la ec. (4.27) y (4.28) toman una forma más sencilla, respectivamente

$$W(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2) = \sum_n J_\nu\left(\alpha_{\nu,n} \frac{\rho_1}{a}\right) J_\nu\left(\alpha_{\nu,n} \frac{\rho_2}{a}\right) \exp[i\nu(\theta_2 - \theta_1)], \quad (4.29)$$

$$S(\boldsymbol{\rho}) = \sum_n J_\nu\left(\alpha_{\nu,n} \frac{\rho}{a}\right). \quad (4.30)$$

La intensidad espectral normalizada calculada de la ec. (4.30) para tres valores distintos de carga y 30 ceros de la función de Bessel se muestran en la figura (4.2). Como puede verse de esta figura, el campo considerado tiene una intensidad total con perfil de forma anular con una región central oscura cuyo radio aumenta conforme se incrementa la carga topológica ν

Consideremos ahora la propagación del campo dado por la densidad espectral cruzada (4.27) en la dirección positiva z normal el plano (ρ, θ) . Para hacer esto, encontramos la densidad espectral cruzada $W(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2)$ en cierto plano $z = z_0$, usando su representación en modos coherentes con los modos nuevos $\psi_n(\boldsymbol{\rho}, z_0)$

$$W(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, z_0) = \sum_n \lambda_n \varphi_n^*(\boldsymbol{\rho}_1, z_0) \varphi_n(\boldsymbol{\rho}_2, z_0), \quad (4.31)$$

cada modo nuevo $\varphi_n^*(\boldsymbol{\rho}_1, z_0)$ puede ser escrito en la forma adaptada a coordenadas cilíndricas (ρ, θ, z)

$$\begin{aligned} \varphi(\boldsymbol{\rho}, z_0) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{k/2\pi} \tilde{\varphi}(r, \phi, 0) \left(iz_0 \sqrt{k^2 - (2\pi r)^2} \right) \\ &\times \exp[i2\pi r \rho \cos(\phi - \theta)] r dr d\phi \end{aligned} \quad (4.32)$$

donde:

$$\tilde{\varphi}(r, \phi, 0) = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \varphi(\rho, \theta, 0) \exp[-i2\pi r \rho \cos(\phi - \theta)] \rho d\rho d\theta, \quad (4.33)$$

es el espectro del modo inicial $\varphi(\rho, 0)$ dado en coordenadas polares (ρ, φ) , y k es el número de onda. Sustituyendo para $\varphi(\rho, 0)$ de la ec. (4.26) en la ec. (4.33) considerando las relaciones de Bessel,

$$J_\nu(x) = \frac{i^{-\nu}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(i\nu\psi) \exp(ix \cos\psi) d\psi, \quad (4.34)$$

$$a \int_0^\infty J_\nu(\alpha\rho) J_\nu(\alpha'\rho) \rho d\rho = \delta(\alpha - \alpha'), \quad (4.35)$$

así como la bien conocida propiedad de filtración de la función delta de Dirac encontramos

$$\tilde{\varphi}(r, \phi, 0) = \frac{i^\nu \exp(i\nu\phi)}{2\pi a J_{\nu+1}(\alpha_{\nu,n})} \delta\left(r - \frac{\alpha_{\nu,n}}{2\pi a}\right). \quad (4.36)$$

Entonces, sustituyendo para $\tilde{\varphi}(r, \phi, 0)$ de la ec. (4.36) en la ec.(4.33) obtenemos

$$\varphi_\nu(\boldsymbol{\rho}, z_0) = \frac{\exp(iz_0) \sqrt{k^2 - (\alpha_{\nu,n}/a)^2}}{\sqrt{\pi} a J_{\nu,n}(\alpha_{\nu,n})} J_\nu\left(\alpha_{\nu,n} \frac{\rho}{a}\right) \exp(i\nu\theta). \quad (4.37)$$

Finalmente, de la ec. (4.21), encontramos

$$W(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2) = \sum_n \lambda_n \frac{J_\nu\left(\alpha_{\nu,n} \frac{\rho_1}{a}\right) J_\nu\left(\alpha_{\nu,n} \frac{\rho_2}{a}\right)}{\pi a^2 J_{\nu+1}^2\left(\alpha_{\nu,n} \frac{\rho}{a}\right)} \exp[i\nu(\theta_2 - \theta_1)]. \quad (4.38)$$

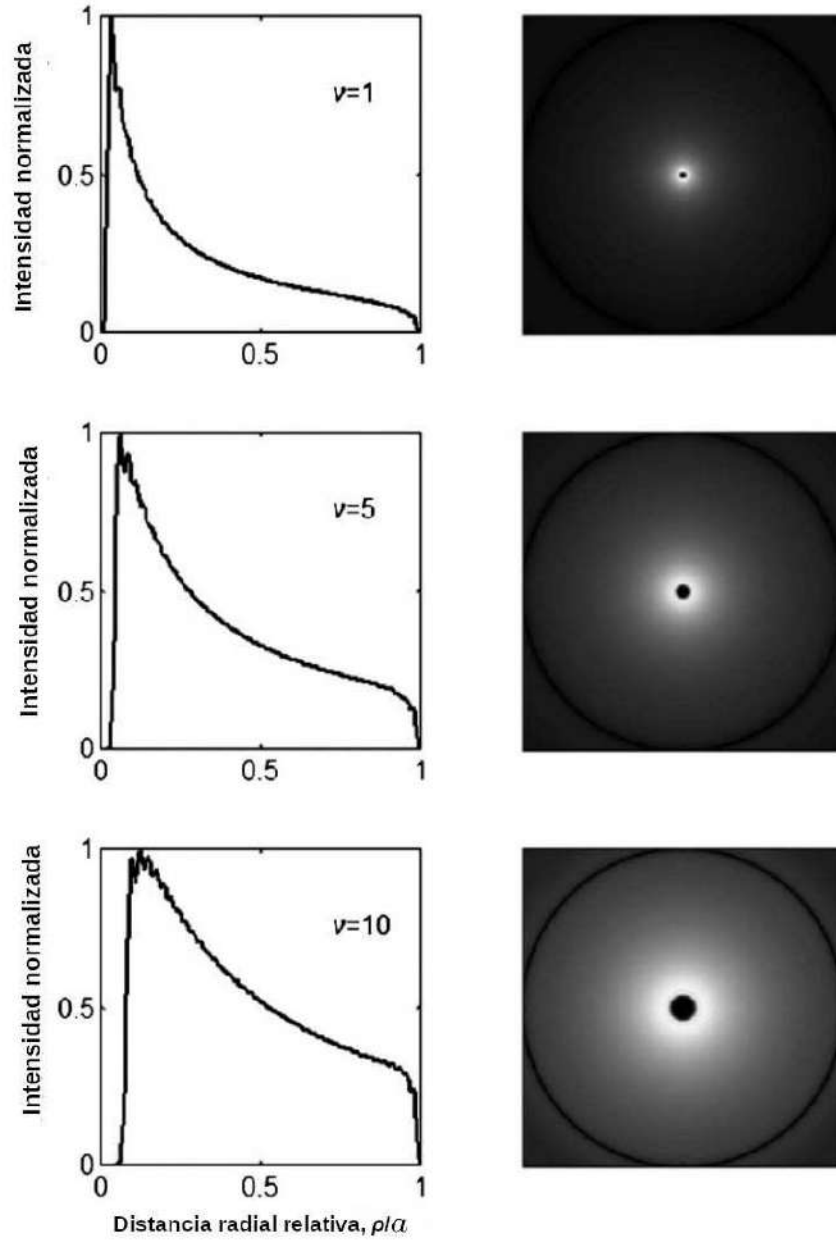


Figura 4.2: Intensidad espectral normalizada ec. (4.30) para cargas $\nu = 1$, $\nu = 5$ y $\nu = 10$.

Comparando ec. (4.27) con ec. (4.38), podemos ver

$$W(\rho_1, \rho_2; z_0) = W(\rho_1, \rho_2; 0), \quad (4.39)$$

este resultado nos define el concepto de un campo invariante en propagación. Entonces, la ec. (4.17) define una familia de vórtices ópticos invariantes en propagación.

4.2. Técnica de generación del vórtice óptico invariante en propagación

Ahora mostraremos que el haz vórtice invariante en propagación dado por la densidad espectral cruzada (4.38) puede generarse aproximadamente empleando un modulador de fase colocado a la entrada de un sistema óptico de transformada de Fourier.

Supongamos que la señal de vídeo de control aplicada al MEL-CL representa un conjunto de anillos concéntricos suficientemente delgados que se pueden aproximar por la función

$$T(r, \varphi) = \sum_{n=1}^N \delta\left(r - \frac{\alpha_{\nu,n}}{\delta_{\nu,N}} R\right) [\nu(\theta - \psi_n)], \quad (4.40)$$

y que están separados por un conjunto de anillos concéntricos complementarios

$$T'(r, \varphi) = (k/f) x'_0 x \left[1 - \sum_{n=1}^N \delta\left(r - \frac{\alpha_{\nu,n}}{\delta_{\nu,N}} R\right) \right]. \quad (4.41)$$

En las ecuaciones (4.40) y (4.41) R es el radio de la zona activa del MEL-CL, f es la distancia focal de la lente de Fourier, y ψ_n son las variables aleatorias uniformemente distribuidas en el rango $[0, 2\pi]$ que cambian independientemente en diferentes anillos principales con la frecuencia de la señal de vídeo de control, que proporciona la destrucción de la coherencia del campo en la dirección radial. Entonces, la señal óptica a la salida de MEL-CL toma la forma

$$U(r, \varphi) = \exp(i\nu\phi) \sum_{n=1}^N \exp(i\nu\psi_n) \delta\left(r - \frac{\alpha_{\nu,n}}{\delta_{\nu,N}} R\right) + \exp[(k/f) x'_0 x] \left[1 - \sum_{n=1}^N \delta\left(r - \frac{\alpha_{\nu,n}}{\delta_{\nu,N}} R\right) \right]. \quad (4.42)$$

Notamos que el factor de fase en la ec. (4.42) resulta en que la luz parásita que pasa a través de los anillos complementarios experimenta una desviación en la dirección axial y, por lo tanto, se puede omitir físicamente el filtrado en nuestra consideración posterior. La señal óptica centrada en el eje del plano de salida del sistema óptico en consideración se puede encontrar como la transformada de Fourier de la parte útil de la ecuación (4.42). Recordando la representación integral (4.35) y la propiedad de filtración de la función delta de Dirac, obtenemos

$$U(\rho, \theta) \propto \exp(i\nu\theta) \sum_{n=1}^N \exp(i\nu\psi_n) J_\nu\left(\frac{k\alpha_{\nu,n}R\rho}{f\alpha_{\nu,N}}\right). \quad (4.43)$$

Entonces la densidad espectral cruzada de la señal óptica en el plano de salida resulta

$$W(\rho_1, \rho_2) \propto \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N J_\nu\left(\frac{k\alpha_{\nu,n}R\rho_1}{f\alpha_{\nu,N}}\right) J_\nu\left(\frac{k\alpha_{\nu,n}R\rho_2}{f\alpha_{\nu,N}}\right). \quad (4.44)$$

Finalmente, tomando en cuenta que

$$\langle \exp(-i\nu\psi_n) \exp(i\nu\psi_m) \rangle = \delta_{n,m}, \quad (4.45)$$

y denotando

$$f\alpha_{\nu,N}/kR = a, \quad (4.46)$$

podemos reescribir la ec. (4.44) como

$$W(\rho_1, \rho_2) \propto \exp[i\nu(\theta_2 - \theta_1)] \sum_{n=1}^N J_\nu\left(\alpha_{\nu,n} \frac{\rho_1}{a}\right) J_\nu\left(\alpha_{\nu,n} \frac{\rho_2}{a}\right). \quad (4.47)$$

La ecuación (4.47) es la aproximación finita de la ec. (4.38).

Señal de vídeo de control

Para la realización de la técnica propuesta se requirió de diseñar señales de vídeo de control con resolución de 1920×1080 pixeles a 256 niveles de gris y una frecuencia de cuadros de 60Hz y una duración de 2 segundos; las señales se construyen a partir de 120 imágenes con la misma resolución y niveles de gris. Las imágenes están compuestas por una serie de anillos concéntricos con modulación de fase azimutal, cada una es generada empleando el método descrito anteriormente. El proceso de generación de las imágenes y producción del vídeo con las características señaladas se realizó mediante una rutina programada en MATLAB.

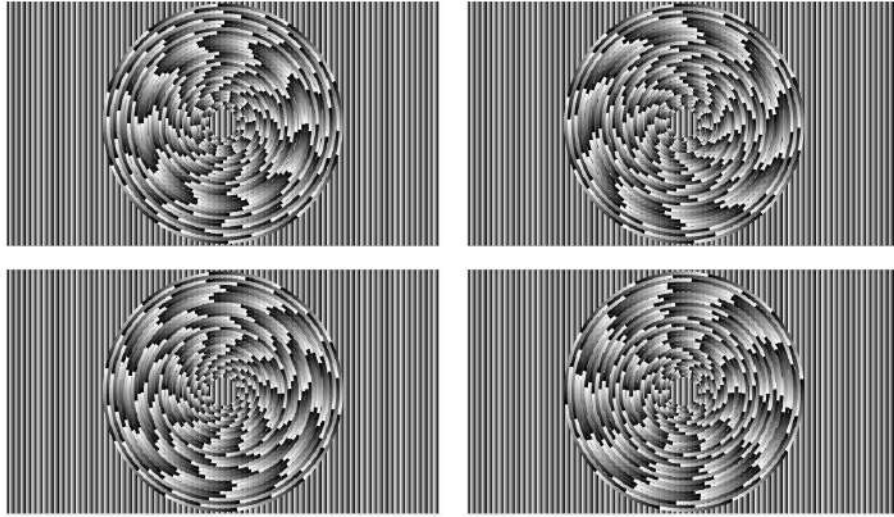


Figura 4.3: Ejemplo de imágenes que conforman la señal de vídeo de control.

El vídeo resultante es proyectado en el modulador empleando la opción del MEL-CL como monitor extendido y reproduciéndolo en bucle.

4.3. Experimentos

En el experimento de generación del vórtice óptico invariante en propagación empleamos la configuración mostrada esquemáticamente en la figura (4.4) que emplea como fuente principal un láser de He-Ne polarizado horizontalmente expandido y colimado a un tamaño de 50 mm, como unidad central el MEL-CL de tipo reflexivo modelo PLUTO-VIS de HoloEye Photonics AG controlado por computadora con resolución de 1920×1080 y un radio de 4.32 mm en su zona activa, la lente fe Fourier usada tenía una distancia focal de 1 mm y un radio de 25 mm. Para registrar los resultados utilizamos una cámara CCD con una resolución de 840×640

El haz láser incide sobre el MEL-CL con el vídeo de control proyectado en él, el campo a la salida del MEL-CL es transformado mediante la lente de Fourier. El resultado es un haz vórtice de orden $\nu = 10$ con densidad espectral cruzada aproximadamente dada por la ec. (4.47). Se registró la intensidad espectral transversal a diferentes distancias (z_0) respecto del plano focal posterior de la lente de Fourier desplazando la cámara sobre un riel. Limitamos el valor máximo de desplazamiento hasta 1 m de acuerdo con la relación $z_{max} \leq fr_0/R$, donde f y r_0 son la distancia focal y el radio de la lente de Fourier, respectivamente, y R es el radio de la zona activa del MEL-CL. Los resultados experimentales obtenidos se muestran en la figura (4.5)

Como se puede observar a partir de estas figuras el vórtice óptico exhibe un comportamiento adifraccional a lo largo de la coordenada de propagación, el radio del anillo principal permanece

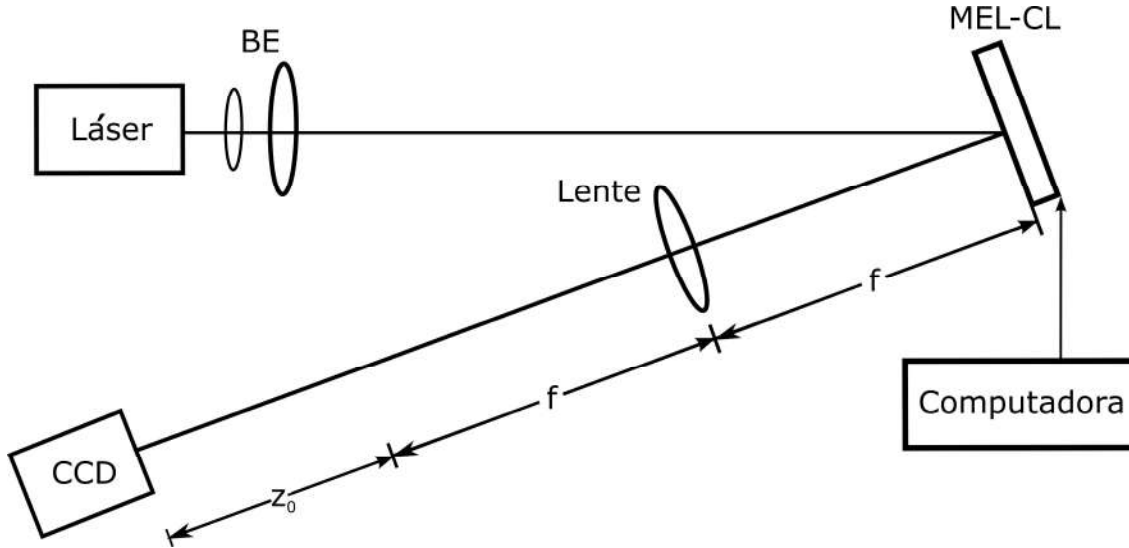


Figura 4.4: Esquema experimental para la generación del vórtice óptico invariante en propagación.

constante con el aumento de z_0 . De los cortes transversales se puede ver que el radio del anillo central para cada z_0 es de $\approx 1.2\text{mm}$, tal como se muestra en la tabla (4.1).

Distancia z_0 (m)	Radios (mm)
0	1.15
0.5	1.16
1	1.17

Tabla 4.1: Radios del vórtice óptico invariante en propagación a diferentes distancias z_0 .

La calidad del vórtice obtenido resulta algo peor que la predicha. La irregularidad relativamente grande de la intensidad registrada en la dirección radial (los anillos parásitos laterales) y la luz débil dentro del vórtice se deben a el error sistemático causado por el truncado de la aproximación (4.47). La estructura periódica claramente visible en la dirección azimutal se debe al error instrumental causado por las variaciones de intensidades parasitarias correspondientes a los saltos de fase característicos de la modulación del MEL-CL.

4.4. Efecto de funciones de apodización

En [67] se presenta una técnica de generación para una clase más amplia de haces vórtice con modos Bessel parcialmente coherentes; la cual permite variar el grado de coherencia del vórtice al modificar el ancho del haz de iluminación de entrada. En esta sección presentaremos una técnica modificada que no requiere de realizar dicha reducción del ancho del haz de iluminación. Demostraremos teórica y numéricamente que mediante el uso de ventanas de apodización diseñadas adecuadamente, se puede configurar la intensidad espectral y el grado de coherencia. Curiosamente, el uso de ventanas de apodización combinadas con altas cargas topológicas induce transiciones de gradiente de alta intensidad desde el núcleo del vórtice al borde externo del vórtice. También mostraremos que la elección de los filtros de apodización conduce a un cambio en el grado de coherencia espacial en función de la carga topológica. Estos resultados pueden ser útiles para diseñar nuevos esquemas de confinamiento y aislamiento de micropartículas y donde se necesitan vórtices de baja coherencia sin cambiar su distribución de intensidad transversal.

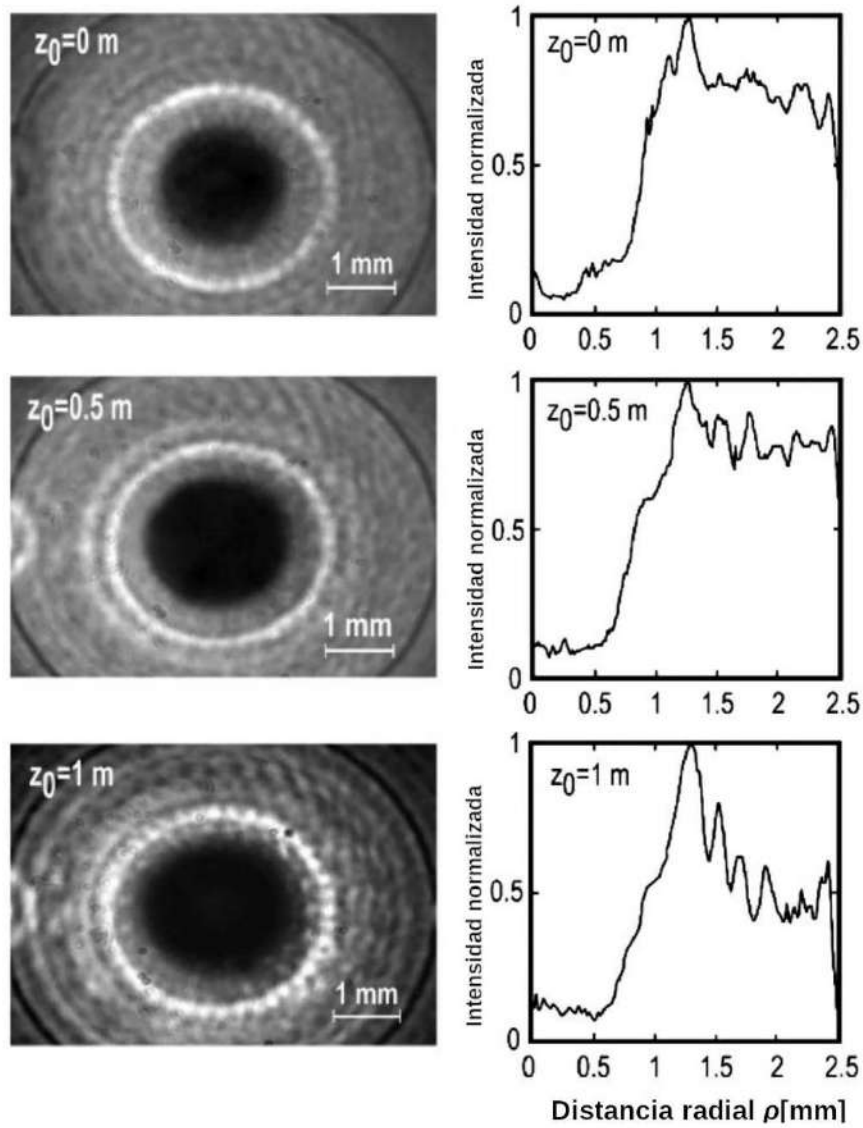


Figura 4.5: Patrones de intensidad 2D registrados a diferentes valores de z_0 y los perfiles de intensidad correspondientes.

Recordando brevemente la técnica de generar los haces vórtice con modo Bessel presentados en la sección 4.3. Al hacer esto, modificamos ligeramente el esquema óptico original colocando un filtro de apodización antes del MEL en el plano focal frontal de la lente transformadora de Fourier como se muestra en la figura 4.6

Como antes, suponemos que la zona activa del MEL representa un conjunto de N anillos delgados concéntricos bien separados con transmitancia de amplitud en el interior dada por

$$t_n(\boldsymbol{\rho}) = \exp[i(\nu\varphi + \psi_n)], \quad (4.48)$$

donde $\boldsymbol{\rho} = (\rho, \varphi)$, ν es un número entero y ψ_n son las variables aleatorias distribuidas uniformemente en el rango $[0, 2\pi]$, que cambian independientemente en diferentes anillos con la frecuencia de cuadros del vídeo de control único aplicado a MEL. Debe notarse especialmente que la intro-

CAPÍTULO 4. VÓRTICE ÓPTICO INVARIANTE EN PROPAGACIÓN
4.4. EFECTO DE FUNCIONES DE APODIZACIÓN

ducción de los cambios de fase aleatorios ψ_n resulta en la destrucción parcial de la coherencia en la dirección radial. Suponemos también que los anillos complementarios entre los principales tienen la transmitancia periódica común que permite eliminar de la consideración la luz no deseada que pasa a través de estos anillos.

A continuación, la densidad espectral cruzada en el plano de salida (r, θ) puede aproximarse bien como

$$W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \propto \exp[i\nu(\theta_2 - \theta_1)] \sum_{n=1}^N A^2 \left(\frac{\alpha_{\nu,n}}{\alpha_{\nu,N}} R \right) J_\nu \left(\frac{\alpha_{\nu,n} r_1}{r_0} \right) J_\nu \left(\frac{\alpha_{\nu,n} r_2}{r_0} \right), \nu = 1, 2, \dots, \quad (4.49)$$

donde $J_\nu(\cdot)$ es la función Bessel del primer tipo y el orden ν , $\alpha_{\nu,n}$ es el n -ésimo cero de esta función, $r_0 = f\alpha_{\nu,N}/kR$, k es el número de onda de iluminación, R es el radio de la zona activa de MEL, f es la distancia focal de la lente, y $A(\cdot)$ es la transmitancia del filtro de apodización. La ecuación (4.49) se puede reescribir en una forma abreviada más reconocible como

$$W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \exp[i\nu(\theta_2 - \theta_1)] \sum_{n=1}^N \lambda_n \varphi_n^*(\mathbf{r}_1) \varphi_n(\mathbf{r}_2), \quad (4.50)$$

donde

$$\lambda_n = \pi r_0^2 J_{\nu+1}^2(\alpha_{\nu,n}) A^2 \left(\frac{\alpha_{\nu,n}}{\alpha_{\nu,N}} R \right) \quad (4.51)$$

y

$$\varphi_n(\mathbf{r}) = \frac{J_\nu^2 \left(\frac{\alpha_{\nu,n} r}{r_0} \right)}{\pi r_0^2 J_{\nu+1}^2(\alpha_{\nu,n})}. \quad (4.52)$$

Cabe señalar que las funciones $\varphi_n(\mathbf{r})$ dadas por la ecuación (4.52) forman un conjunto ortonormal y, por lo tanto, la suma en la ecuación (4.50) puede interpretarse como una versión finita de la bien conocida representación en modo coherente del campo óptico parcialmente coherente. El factor exponencial en la ecuación (4.50) testifica que el campo generado posee una distribución de fase helicoidal y, por lo tanto, puede identificarse como un vórtice con carga topológica ν . De ahí las ecuaciones (4.50) - (4.52) puede considerarse como la representación en modos de Bessel del vórtice parcialmente coherente.

Aceptando en la ec. (4.50) $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}$, encontramos que la densidad espectral (intensidad óptica) del haz generado tiene la forma

$$S(\mathbf{r}) \propto \sum_{n=1}^N A^2 \left(\frac{\alpha_{\nu,n}}{\alpha_{\nu,N}} R \right) J_\nu^2(\alpha_{\nu,n} r/r_0). \quad (4.53)$$

Como bien sabemos [68, 69], el grado de coherencia del campo parcialmente coherente puede evaluarse numéricamente como

$$\gamma = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n=1}^N \lambda_n^2}{\left[\sum_{n=1}^N \lambda_n \right]^2}. \quad (4.54)$$

Sustituyendo por λ_n de la ecuación (4.51) en la ecuación (4.54), encontramos que en nuestro caso

$$\gamma = \frac{\sum_{n=1}^N \left(J_{\nu+1}^2(\alpha_{\nu,n}) A^2 \left(\frac{\alpha_{\nu,n}}{\alpha_{\nu,N}} R \right) \right)^2}{\left[\sum_{n=1}^N J_{\nu+1}^2(\alpha_{\nu,n}) A^2 \left(\frac{\alpha_{\nu,n}}{\alpha_{\nu,N}} R \right) \right]^2}. \quad (4.55)$$

De las ecuaciones (4.53) y (4.55) puede verse que, tanto la densidad espectral como el grado de coherencia del haz generado dependen de la función de apodización $A(\rho)$. A continuación, investigamos esta dependencia en detalles.

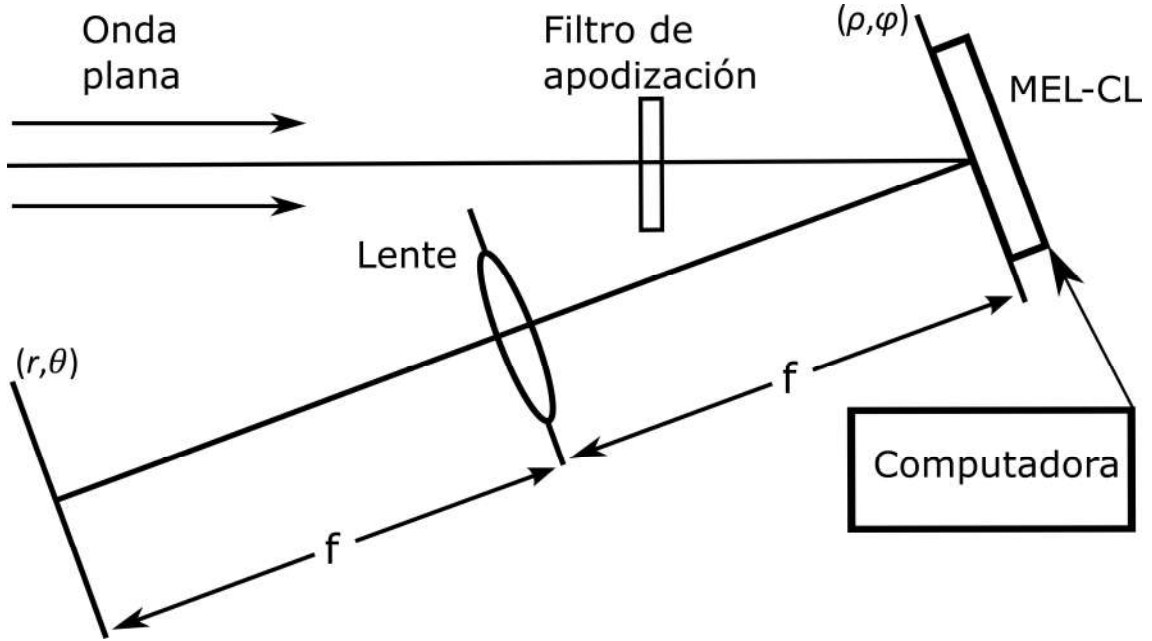


Figura 4.6: Sistema óptico para generar el vórtice con estructura modal de Bessel.

Nombre	Función de apodización
Connes	$A(\rho) = \left(1 - \left(\frac{\rho^2}{R^2}\right)\right)^2$
Bartlett	$A(\rho) = 1 - \frac{\rho}{R}$
Coseno	$A(\rho) = \cos\left(\frac{\pi\rho}{2R}\right)$
Welch	$A(\rho) = 1 - \frac{\rho^2}{R^2}$
Gaussiana	$A(\rho) = \exp\left(-\frac{\rho^2}{2R^2}\right)$
Uniforme	$A(\rho) = \text{circ}\left(\frac{\rho}{R}\right)$

Tabla 4.2: Funciones de apodización.

Simulación numérica

Para observar el comportamiento de $S(\mathbf{r})$ y γ en función de la iluminación elegida, realizamos la simulación numérica de la técnica propuesta. En nuestro cálculo, como función de apertura $A(\rho)$, utilizamos las ventanas de apodización estándar que se muestran en la Tabla. 4.2 (ver, por ejemplo, Ref [70]).

Calculamos las densidades espectrales correspondientes $S(\mathbf{r})$ de acuerdo con la ecuación (4.53) para diferentes valores de carga topológica nu y para $N = 30$. Los perfiles calculados de $S(\mathbf{r})$ y los patrones bidimensionales correspondientes se muestran en la figura (4.7) - (4.12). Como se puede ver en estas figuras, el campo generado exhibe una típica forma de rosquilla cuyo radio interno aumenta con el aumento de la carga topológica para un número fijo de anillos de modulación y para cualquier función de apodización. A medida que aumenta la carga topológica, el valor máximo de la distribución de intensidad se vuelve menos agudo y, para los casos de iluminación uniforme y gaussiana, las figuras (4.7) y (4.10) aparecen pequeñas oscilaciones a lo largo del perfil transversal. Para los casos que se muestran en la figura (4.11) y (4.12), la intensidad máxima también se suaviza con el aumento de la carga topológica. Si bien estas características recuerdan los vórtices de baja coherencia, la figura (4.7) - (4.12) revela una característica notable. En todos los casos, a medida

CAPÍTULO 4. VÓRTICE ÓPTICO INVARIANTE EN PROPAGACIÓN

4.4. EFECTO DE FUNCIONES DE APODIZACIÓN

que aumenta el radio interno, el gradiente de alta intensidad se desplaza desde el núcleo del vórtice hacia el radio externo. Este efecto ocurre para todos los filtros de apodización que son uniformes y la iluminación gaussiana, los casos en los que hay un gradiente de intensidad relativamente alta en ambos radios. El comportamiento general de la intensidad espectral en función de la carga topológica indica que las cargas topológicas bajas mantienen el gradiente de alta intensidad en una vecindad del vórtice central, mientras que las cargas topológicas elevadas desplazan el gradiente de alta intensidad al radio del vórtice externo. Elevar el gradiente de intensidad en tal ubicación sugiere que podría ser ventajoso para aislar y clasificar partículas pequeñas.

CAPÍTULO 4. VÓRTICE ÓPTICO INVARIANTE EN PROPAGACIÓN
4.4. EFECTO DE FUNCIONES DE APODIZACIÓN

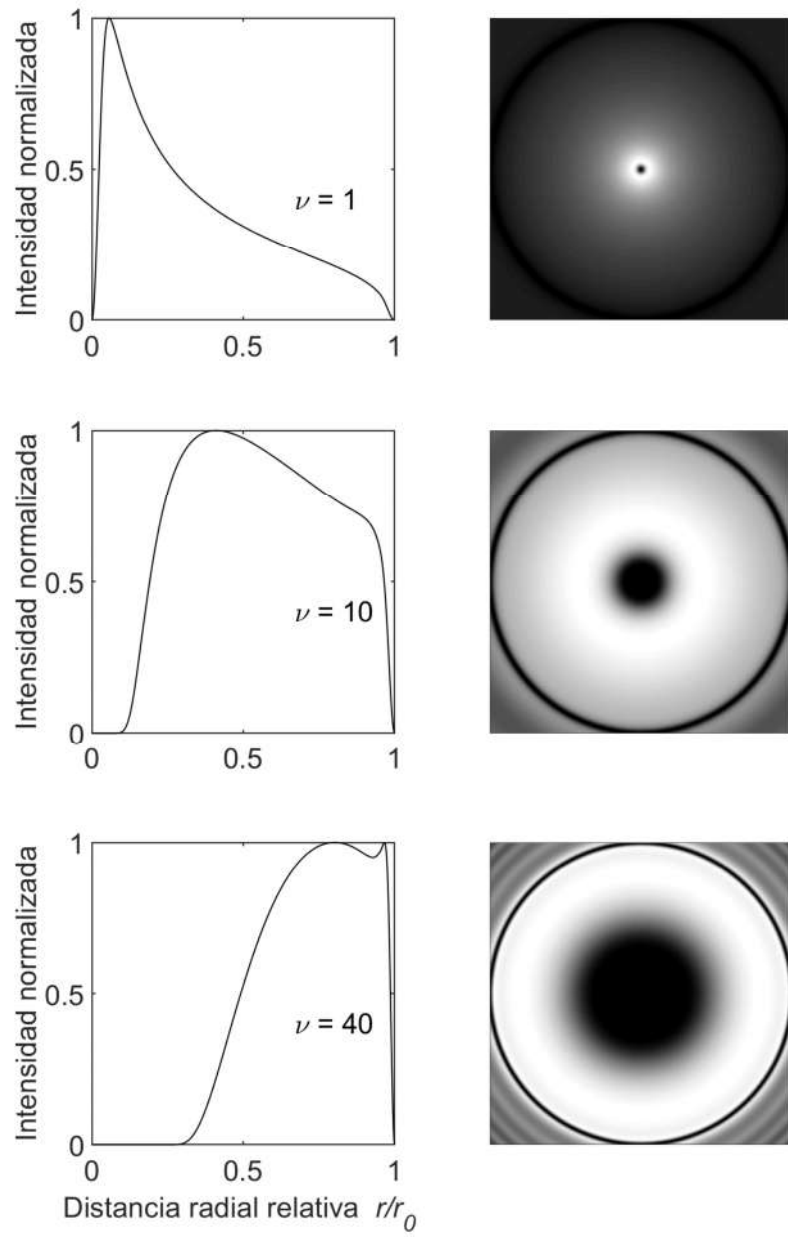


Figura 4.7: Densidad espectral $S(\mathbf{r})$ para ventana de apodización Connes.

CAPÍTULO 4. VÓRTICE ÓPTICO INVARIANTE EN PROPAGACIÓN
4.4. EFECTO DE FUNCIONES DE APODIZACIÓN

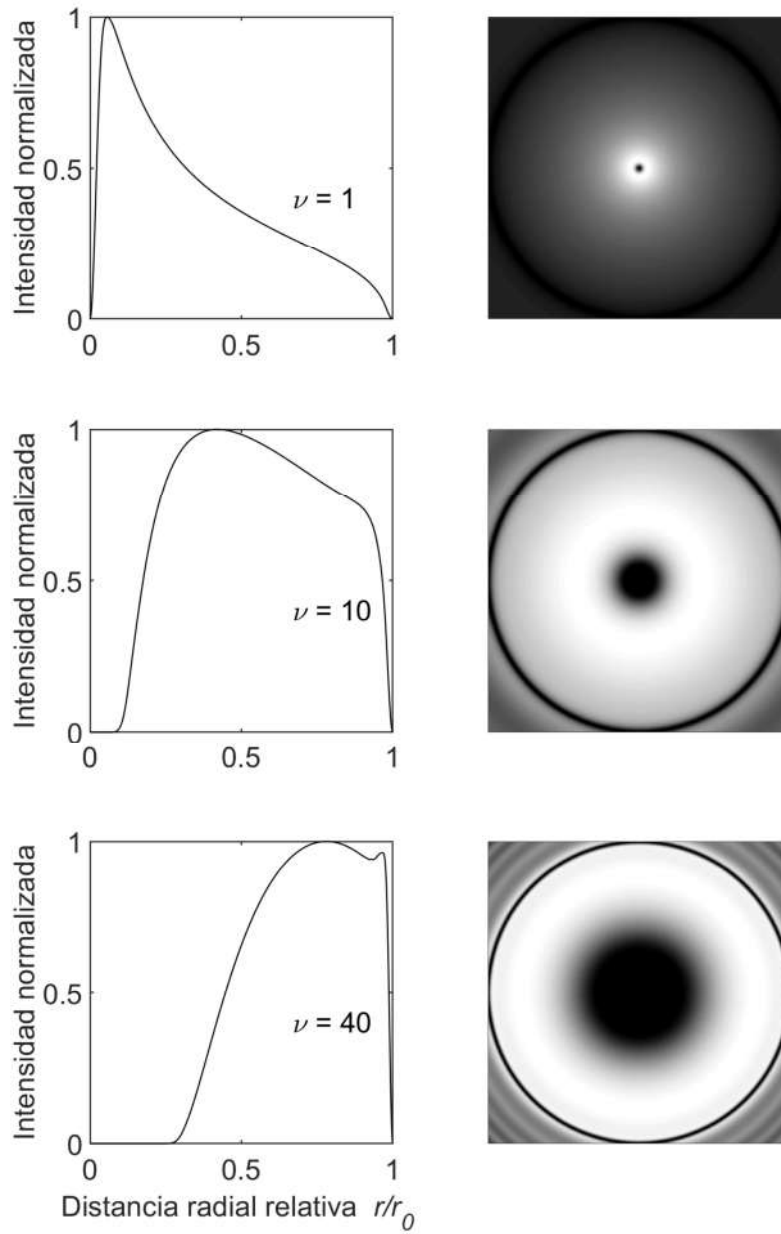


Figura 4.8: Densidad espectral $S(\mathbf{r})$ para ventana de apodización Bartlett.

CAPÍTULO 4. VÓRTICE ÓPTICO INVARIANTE EN PROPAGACIÓN
4.4. EFECTO DE FUNCIONES DE APODIZACIÓN

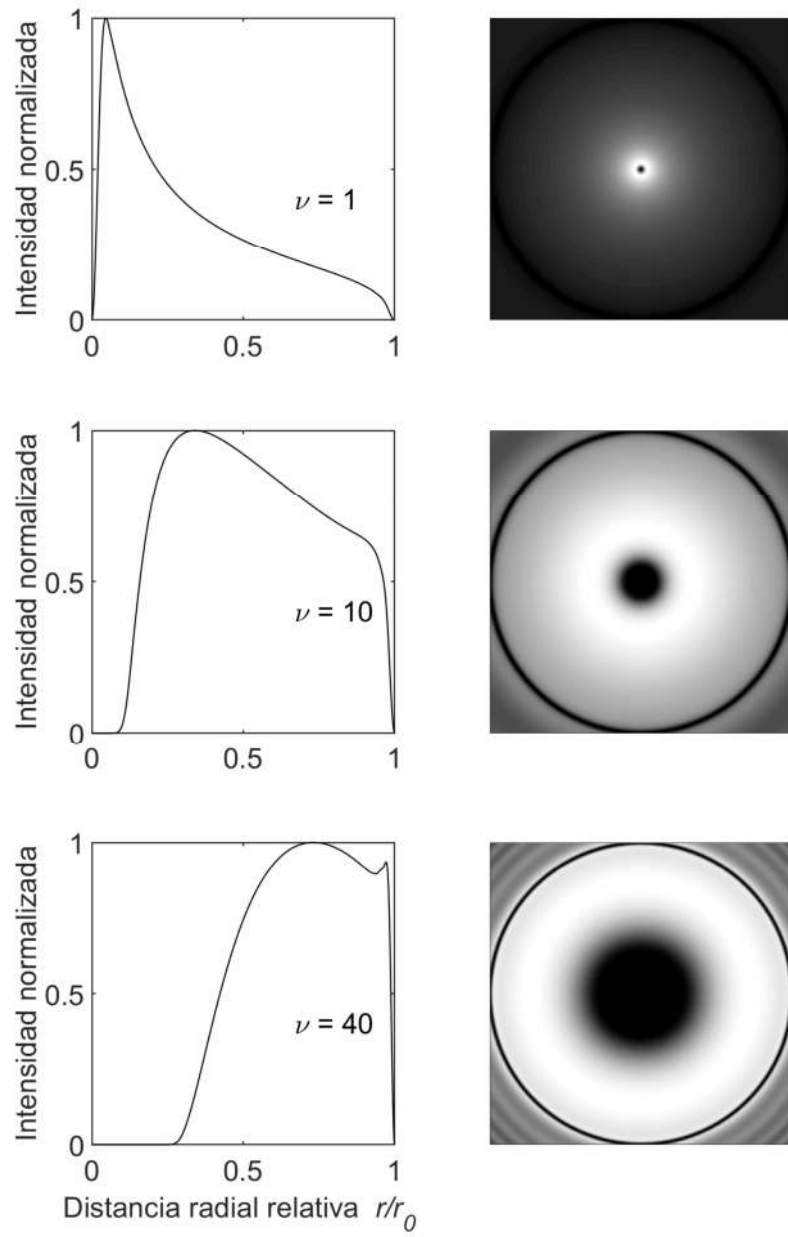


Figura 4.9: Densidad espectral $S(\mathbf{r})$ para ventana de apodización Coseno.

CAPÍTULO 4. VÓRTICE ÓPTICO INVARIANTE EN PROPAGACIÓN
4.4. EFECTO DE FUNCIONES DE APODIZACIÓN

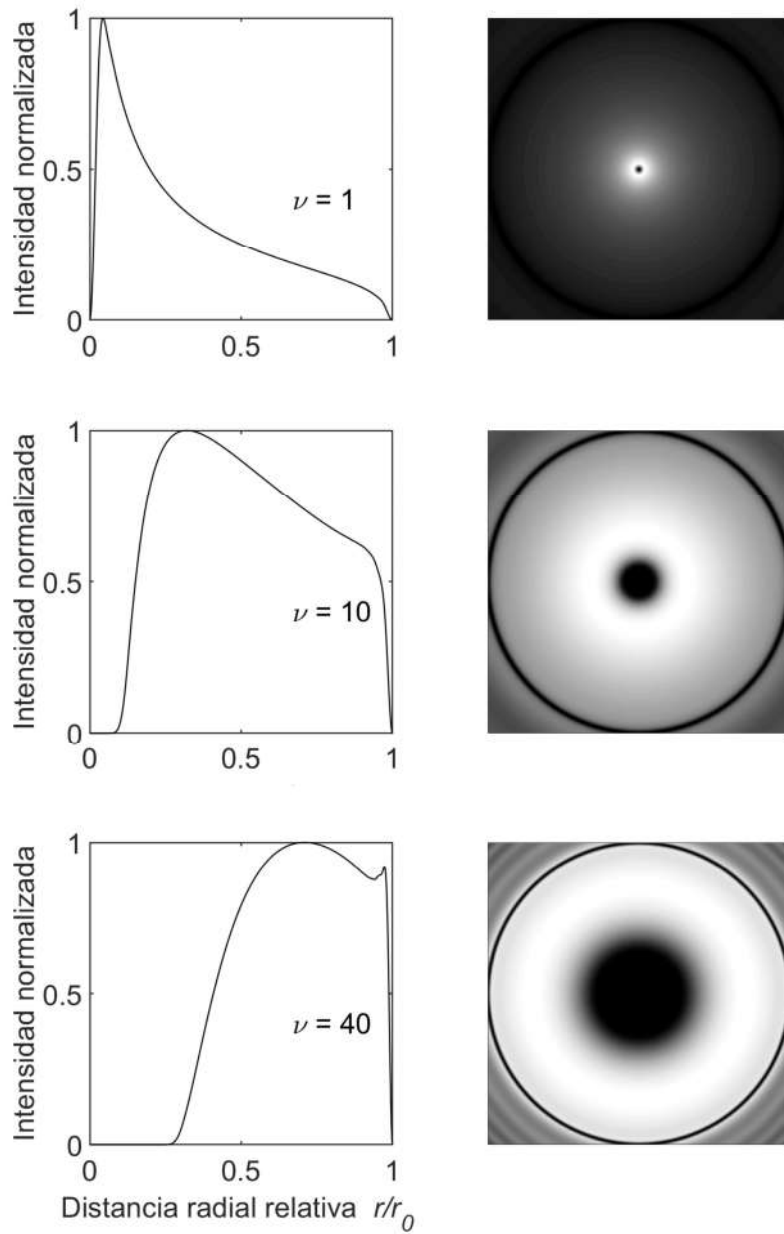


Figura 4.10: Densidad espectral $S(\mathbf{r})$ para ventana de apodización Welch.

CAPÍTULO 4. VÓRTICE ÓPTICO INVARIANTE EN PROPAGACIÓN
4.4. EFECTO DE FUNCIONES DE APODIZACIÓN

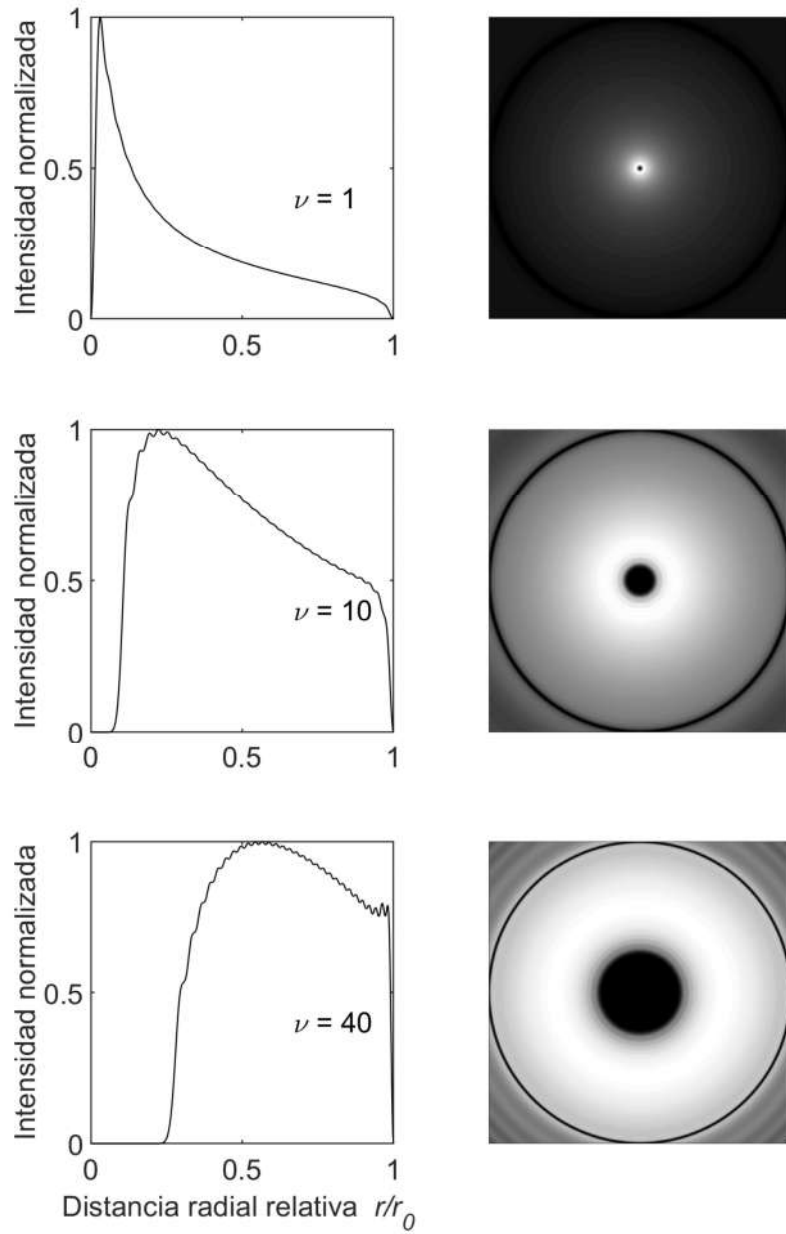


Figura 4.11: Densidad espectral $S(\mathbf{r})$ para ventana de apodización Gaussiana.

CAPÍTULO 4. VÓRTICE ÓPTICO INVARIANTE EN PROPAGACIÓN
 4.4. EFECTO DE FUNCIONES DE APODIZACIÓN

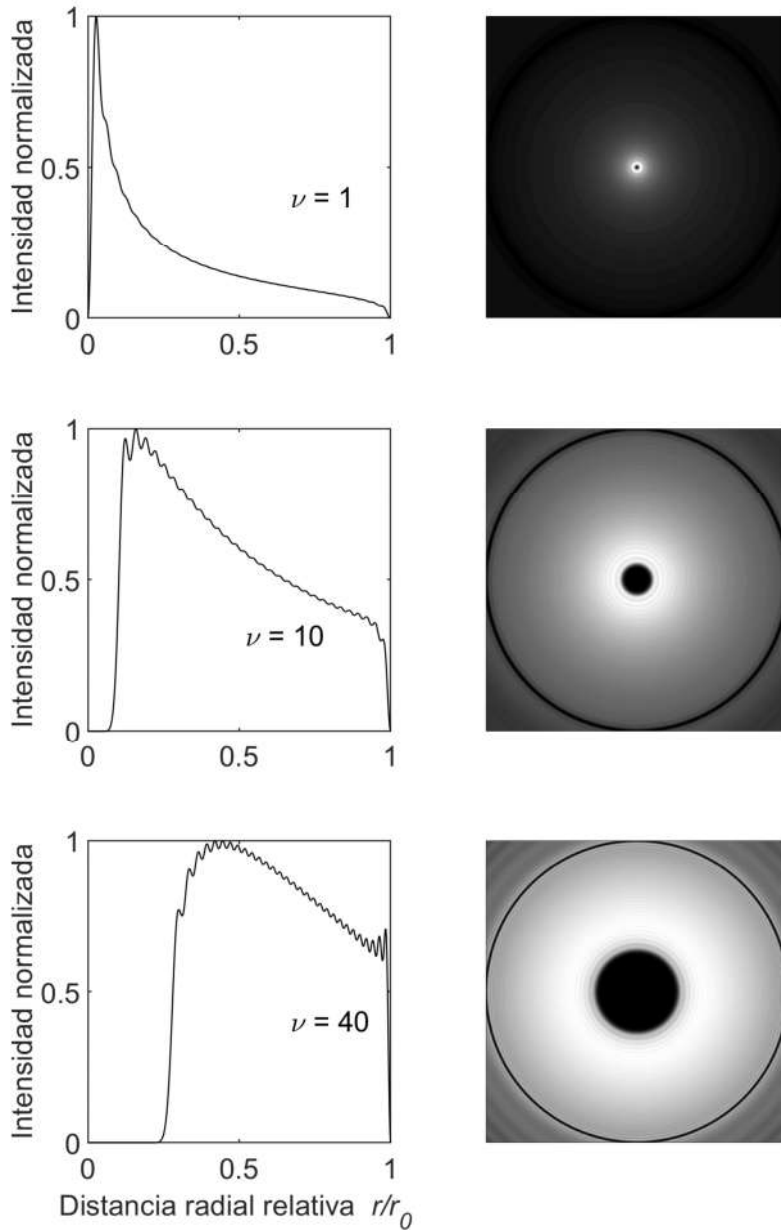


Figura 4.12: Densidad espectral $S(\mathbf{r})$ para ventana de apodización Uniforme.

Además, calculamos el grado de coherencia γ de acuerdo con la ecuación. (4.55) para diferentes tipos de filtros de apodización. Los valores calculados de γ se representan en función de la carga topológica ν en la figura (4.13). De la figura se puede ver que el grado de coherencia depende del tipo de filtro empleado. Los valores más bajos de coherencia se alcanzan para la apodización gaussiana y uniforme, mientras que sus densidades espectrales tienen prácticamente el mismo comportamiento. Lo mismo ocurre para los pares de funciones de apodización de Bartlett-Connes y Cosine-Welch. Vale la pena señalar que, en general, el grado de coherencia depende del número de modos N empleados en la síntesis del campo. Aquí hemos elegido $N = 30$ y este número determina el valor de γ alcanzado en la gráfica. Otras opciones de N conducirán a valores diferentes de γ , pero estos valores aún se pueden modular con la elección de un filtro de apodización. Esto muestra la

CAPÍTULO 4. VÓRTICE ÓPTICO INVARIANTE EN PROPAGACIÓN

4.4. EFECTO DE FUNCIONES DE APODIZACIÓN

posibilidad de generar haces de vórtice con una densidad espectral prácticamente idéntica, pero con diferentes grados de coherencia independientemente del número de modos utilizados en la síntesis del campo.

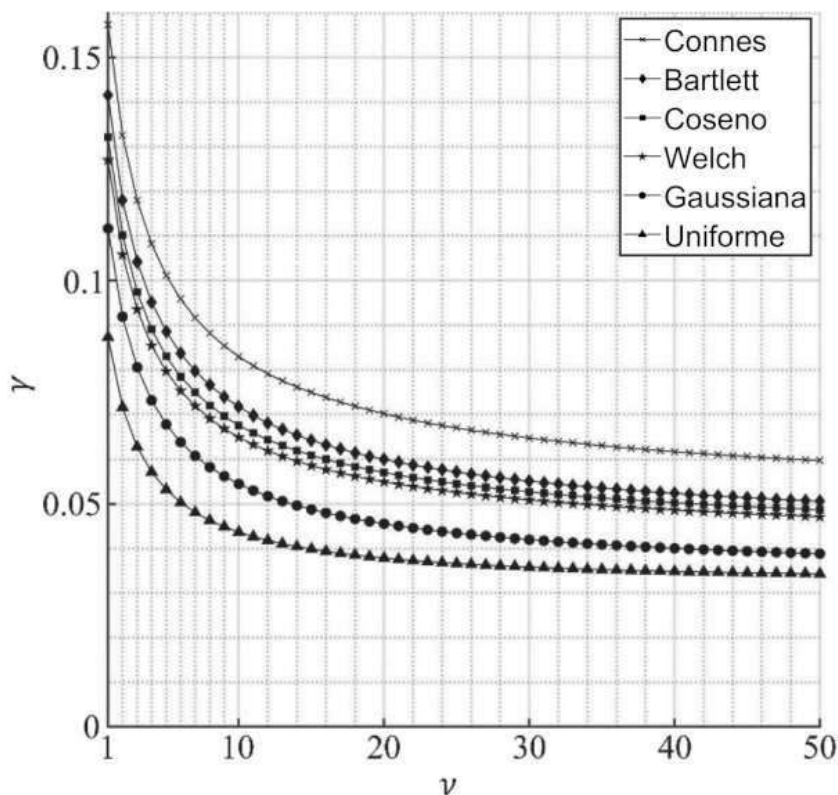


Figura 4.13: Valores numéricos del grado de coherencia como función de ν para cada ventana de apodización.

Los resultados obtenidos muestran que se puede generar una familia más amplia de haces de vórtice parcialmente coherentes mediante elecciones adecuadas de funciones de apodización. Físicamente se pueden realizar en un sistema óptico de transformada de Fourier que incorpora un MEL-CL en su entrada y colocando la ventana de apodización deseada que coincida con el radio activo del MEL en el plano de salida del sistema de iluminación primario.

4.5. Conclusiones

- Empleando la representación en modos coherente conseguimos definir la estructura modal de una familia de vórtices ópticos parcialmente coherentes definida en términos de funciones de Bessel.
- Mostramos que cualquier miembro de esta familia representa una superposición incoherente de modos Bessel totalmente coherentes con el mismo frente de onda helicoidal.
- Se propuso una técnica de generación experimental del vórtice ópticos invariante en propagación empleando un MEL-CL puro de fase de tipo reflexivo.
- Se ha logrado sintetizar experimentalmente de manera exitosa un vórtice óptico, con un tamaño de radio que permanece constante conforme se propaga a lo largo de 1 m, es decir, presenta un comportamiento adifraccional a lo largo de la coordenada de propagación.
- Mostramos teórica y numéricamente que la coherencia y el espectro de potencia de un vórtice con estructura modal de Bessel parcialmente coherente se puede modular mediante elecciones adecuadas de la carga topológica y la ventana de apodización que actúan sobre la fuente de iluminación primaria.
- Los resultados obtenidos muestran que el efecto conjunto de las ventanas de apodización con altas cargas topológicas induce transiciones del gradiente de alta intensidad desde el núcleo del vórtice al borde del vórtice externo, siendo la misma tendencia para todos los filtros de apodización.
- Los resultados obtenidos pueden ser útiles en el diseño de sistemas ópticos avanzados para atrapar y manipular micropartículas.

Capítulo 5

Vórtice óptico perfecto polarizado

5.1. Introducción

Recientemente se ha introducido el concepto del VOP como un modelo teórico solución al problema de la dependencia del radio y la carga topológica de un vórtice óptico y con una propuesta de técnica de generación [14, 15]. El VOP ha sido reconocido y aplicado exitosamente por la comunidad óptica en una serie de investigaciones que incluyen campos invariantes en propagación, teoría de información cuántica, micro-manipulación y enfocamiento [71–75].

La mayoría de las técnicas de generación del VOP se han desarrollado para el caso escalar. En el caso vectorial, las técnicas de generación del VOP se basan en la superposición de vórtices polarizados circularmente a derechas y a izquierdas. No hace mucho el POV era extendido al caso donde la carga topológica es independiente de la orden de polarización con estado de polarización estable tras la propagación y generado mediante una técnica interferométrica [76]. Empleando el método de transformada de Fourier de los haces vórtice Bessel se propone una técnica para generar un haz vórtice óptico perfecto vectorial incorporando dos MEL-CL [77]; el mismo método se empleó para haces Bessel de alto orden y q-plates para generar haces vórtice perfecto vectoriales [78]. Un método para generar POV de cualquier estado de polarización denominados haces de Poincaré perfectos por codificación de fase independiente de componentes ortogonales en un único MEL-CL fue propuesto [79]. Un enfoque similar se ha usado para generar haces perfectos cilíndricos perfectos con diámetro de anillo ajustable [80].

Se han investigado también en las aplicaciones de VOP cilíndricos de alto orden. Se propuso un método para la conformación de VOP en condiciones de enfocamiento alto donde el ancho del anillo, el diámetro del anillo, la posición y la carga topológica pueden ser controlados [84]. Más recientemente, un análisis detallado e investigación numérica de enfocamiento de haces vórtices cilíndricos polarizados de alto orden se ha realizado mostrando que puntos focales de longitud de onda inferior pueden generarse cuando el orden de polarización y carga topológica coinciden [85].

El creciente rango de aplicaciones potenciales de los haces vórtices vectoriales exige de esquemas experimentales viables. Sin embargo, muchas de las técnicas de generación frecuentemente requieren de sistemas ópticos voluminosos y complicados haciendo que la alineación y calibración experimental resulte bastante complicada. En este capítulo presentamos una técnica simple y fácil de implementar para la generación de vórtices perfectos vectoriales empleando un sistema de imagen $4f$ que incorpora un único MEL-CL puro de fase cuyo eje director se gira 45° con respecto al eje horizontal. Mostramos que la técnica propuesta permite codificación de fase simultánea de componentes de campo ortogonales evitando la necesidad de separarlos en sistemas ópticos complejos y complicadas alineaciones.

Así mismo estudiaremos las propiedades de enfocamiento de estos haces bajo el régimen de apertura numérica alta ($NA \approx 1$). Se observa que el campo enfocado resultante no es perfecto

pues su radio depende de la carga topológica. Sin embargo, los campos focales obtenidos pueden superar el límite de resolución de Rayleigh.

5.1.1. Campo vectorial

Un campo óptico vectorial puede ser representado como la superposición de dos componentes de polarización ortogonales. Podemos expresarlo [81] de forma general empleando la notación de Jones como

$$E(x, y) = A(x, y) \exp(i\phi(x, y)) \begin{pmatrix} E_x(x, y) \\ E_y(x, y) \exp(i\delta(x, y)) \end{pmatrix}, \quad (5.1)$$

donde $A(x, y)$ es la distribución de amplitud, $\phi(x, y)$ es la fase común de ambas componentes x y y , $\delta(x, y)$ es el retardo de fase entre las componentes x y y , $E_x(x, y)$ y $E_y(x, y)$ se encuentran normalizadas. Para caracterizar completamente un campo vectorial arbitrario son necesarios la amplitud, la fase, razón de polarización y el retraso de fase.

5.1.2. Haces vectoriales cilíndricos

Los haces vectoriales cilíndricos son soluciones vectoriales de las ecuaciones de Maxwell [82] que son axialmente simétricas tanto en amplitud como en fase. Consideremos la superposición de dos haces polarizados circularmente, uno a derechas y el otro a izquierdas

$$\vec{E}_{sup}(x, y) = \vec{E}_{der}(x, y) + \vec{E}_{izq}(x, y) \quad (5.2)$$

donde

$$\vec{E}_{der}(x, y) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \exp(i(n\phi + \phi_0)), \quad (5.3)$$

y

$$\vec{E}_{izq}(x, y) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \exp(-i(n\phi + \phi_0)). \quad (5.4)$$

Sustituyendo (5.3) y (5.4) en la ecuación (5.2), empleando el formalismo de matrices de Jones y las relaciones trigonométricas de la fórmula de Euler la matriz que nos describe este campo resulta

$$\vec{E}_{sup}(x, y) = \begin{pmatrix} \cos(n\phi + \phi_0) \\ -\sin(n\phi + \phi_0) \end{pmatrix}, \quad (5.5)$$

en donde ϕ es la coordenada azimutal en el plano de observación, n es un entero positivo conocido como el orden de polarización que indica el número de rotaciones de polarización de $n * 2\pi$ a lo largo de la dirección radial en el sentido de las manecillas del reloj [83].

De acuerdo con la ec. (5.5) observamos que podemos generar varios tipos de haces polarizados cilíndricamente variando ϕ_0 . Tomamos dos casos a consideración: cuando $\phi_0 = 0$ y para $\phi_0 = \pi/2$

Polarización radial $\phi_0 = 0$

$$\mathbf{E}_{rad} \begin{pmatrix} \cos(n\phi) \\ -\sin(n\phi) \end{pmatrix}. \quad (5.6)$$

Polarización azimutal $\phi_0 = \pi/2$

$$\mathbf{E}_{azi} = \begin{pmatrix} \sin(n\phi) \\ \cos(n\phi) \end{pmatrix}. \quad (5.7)$$

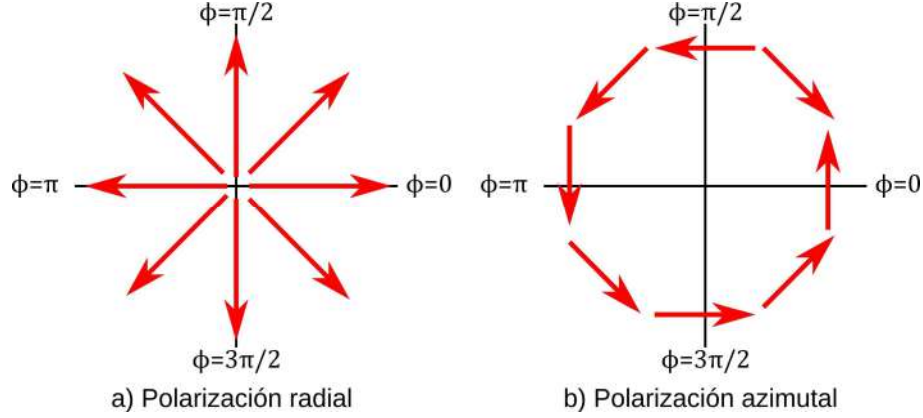


Figura 5.1: Distribución del campo para un haz con polarización cilíndrica para el caso a) radial, b) azimutal.

5.2. VOP polarizado

El vórtice óptico perfecto polarizado (VOPp) se define como un campo óptico cuya polarización es axialmente simétrica, posee una singularidad de fase y está dado por la expresión:

$$\mathbf{E}(\rho, \theta) = \delta(\rho - \rho_0) \exp(in\theta) \mathbf{P}(\theta). \quad (5.8)$$

donde $\mathbf{P}(\theta)$ es el vector de polarización dado por

$$\mathbf{P}(\theta) = \begin{pmatrix} a(\theta) \\ b(\theta) \end{pmatrix}. \quad (5.9)$$

Tenemos dos casos particulares de interés que corresponden a polarización radial y polarización azimutal.

Cuando $a(\theta)$ y $b(\theta)$ son

$$a(\theta) = \cos(n\theta), \quad b(\theta) = \sin(n\theta) \quad (5.10)$$

la Ec. (5.8) resulta

$$\mathbf{E}(\rho, \theta) = \delta(\rho - \rho_0) \exp(in\theta) \begin{pmatrix} \cos(n\theta) \\ \sin(n\theta) \end{pmatrix}. \quad (5.11)$$

Este caso corresponde a un vórtice óptico perfecto con polarización radial de orden n .

Para cuando $a(\theta)$ y $b(\theta)$ tienen el valor

$$a(\theta) = \sin(n\theta), \quad b(\theta) = -\cos(n\theta) \quad (5.12)$$

la ec. (5.8) resulta

$$\mathbf{E}(\rho, \theta) = \delta(\rho - \rho_0) \exp(in\theta) \begin{pmatrix} \sin(n\theta) \\ -\cos(n\theta) \end{pmatrix}. \quad (5.13)$$

Este caso corresponde a un vórtice óptico perfecto con polarización azimutal de orden n .

Los casos anteriormente mencionados se ilustran en la figura 5.2.

5.3. Generación de VOP polarizado

Para generar el campo dado por la ecuación (5.8) proponemos una técnica de modulación espacial de la polarización empleando un MEL-CL con su eje activo rotado 45° seguido por una

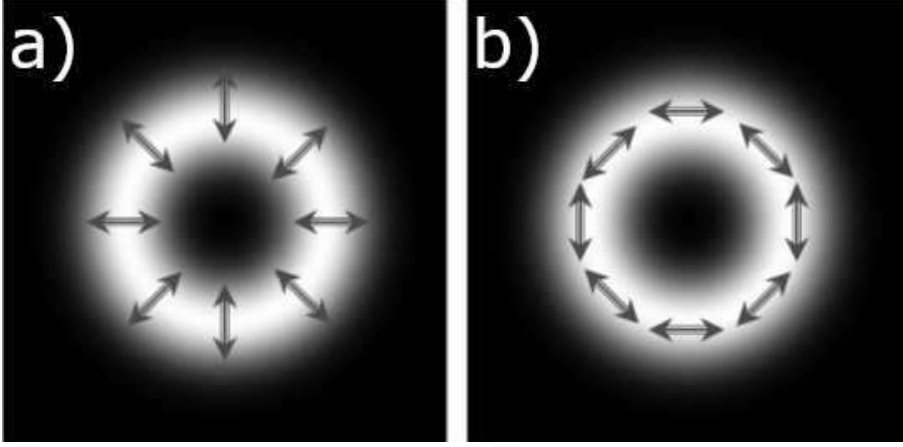


Figura 5.2: a) Vórtice Óptico Perfecto con polarización radial. b) Vórtice Óptico Perfecto con polarización azimutal.

placa de $\lambda/4$ con eje activo en la dirección vertical, de acuerdo con [86].

La matriz de Jones de un MEL-CL de fase rotado 45° esta dada por la expresión

$$\begin{aligned}
 J_{MEL-CL\ 45^\circ} &= \begin{pmatrix} \cos \pi/4 & \sin \pi/4 \\ -\sin \pi/4 & \cos \pi/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp(-i2\beta') & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \pi/4 & -\sin \pi/4 \\ \sin \pi/4 & \cos \pi/4 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp(-i2\beta') & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp(-i2\beta') & -\exp(-i2\beta') \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \exp(-i2\beta') + 1 & -\exp(-i2\beta') + 1 \\ -\exp(-i2\beta') + 1 & \exp(-i2\beta') + 1 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{2} \exp(-i\beta') \begin{pmatrix} \exp(-i\beta') + \exp(i\beta') & \exp(i\beta') - \exp(-i\beta') \\ \exp(i\beta') - \exp(-i\beta') & \exp(-i\beta') + \exp(i\beta') \end{pmatrix}. \quad (5.14)
 \end{aligned}$$

Recordando que

$$\cos \theta = \frac{1}{2} [\exp(i\theta) + \exp(-i\theta)] \quad (5.15)$$

y

$$\sin \theta = \frac{1}{2i} [\exp(i\theta) - \exp(-i\theta)]. \quad (5.16)$$

Entonces

$$\frac{1}{2} [\exp(-i\beta') + \exp(i\beta')] = \cos \beta' \quad (5.17)$$

$$\frac{1}{2} [\exp(i\beta') - \exp(-i\beta')] = i \sin \beta'. \quad (5.18)$$

Sustituyendo en ec. la (5.14) tenemos

$$J_{MEL-CL\ 45^\circ} = \exp(-i\beta') \begin{pmatrix} \cos \beta' & i \sin \beta' \\ i \sin \beta' & \cos \beta' \end{pmatrix}. \quad (5.19)$$

La matriz de Jones de una placa $\lambda/4$ con su eje activo en dirección vertical está dada por

$$J_{\lambda/4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}. \quad (5.20)$$

Finalmente, la matriz de Jones que describe el sistema del MEL-CL con su eje activo rotado por 45° y una placa de $\lambda/4$

$$\begin{aligned}
 J_D &= J_{\lambda/4} J_{MEL-CL\ 45^\circ} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \exp(-i\beta') \begin{pmatrix} \cos \beta' & i \sin \beta' \\ i \sin \beta' & \cos \beta' \end{pmatrix} \\
 &= \exp(-i\beta') \begin{pmatrix} \cos \beta' & -i \sin \beta' \\ \sin \beta' & i \cos \beta' \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{5.21}$$

Haciendo incidir luz linealmente polarizada respecto del eje x ($E_{in} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$) en el sistema anterior, el campo a la salida resulta

$$\begin{aligned}
 E_{out} &= J_D E_{in} \\
 &= \exp(-i\beta') \begin{pmatrix} \cos \beta' & -i \sin \beta' \\ \sin \beta' & i \cos \beta' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \exp(-i\beta') \begin{pmatrix} \cos \beta' \\ \sin \beta' \end{pmatrix},
 \end{aligned} \tag{5.22}$$

Sea $\beta = n\phi + \phi_0$ entonces, el campo a la salida esta dada por

$$E_{out} = \exp(-i(n\phi + \phi_0)) \begin{pmatrix} \cos(n\phi + \phi_0) \\ \sin(n\phi + \phi_0) \end{pmatrix}. \tag{5.23}$$

donde ϕ es la coordenada azimutal, n la carga topológica y ϕ_0 es un ángulo constante que determina el tipo de polarización.

Consideraremos dos elecciones particulares de ϕ_0 que corresponden a casos distintos de polarización.

Caso 1 ($\phi_0 = 0^\circ$)

Para este caso tenemos $\beta = n\phi$ y el campo a la salida resulta

$$E_{out} = \exp(-i(n\phi)) \begin{pmatrix} \cos(n\phi) \\ \sin(n\phi) \end{pmatrix}, \tag{5.24}$$

tenemos polarización radial de orden n .

Caso 2 ($\phi_0 = -\pi/2$)

Para este caso tenemos $\beta = n\phi - \pi/2$ y el campo a la salida resulta

$$\begin{aligned}
 E_{out} &= \exp(-i(n\phi - \pi/2)) \begin{pmatrix} \cos(n\phi - \pi/2) \\ \sin(n\phi - \pi/2) \end{pmatrix} \\
 &= i \exp(-i(n\phi)) \begin{pmatrix} \sin(n\phi) \\ -\cos(n\phi) \end{pmatrix},
 \end{aligned} \tag{5.25}$$

tenemos polarización azimutal de orden n .

5.4. Enfocamiento de VOP

En el problema de enfocamiento de ondas planas monocromáticas consideramos que el campo incidente posee polarización inhomogénea cilíndrica y, la lente de enfocamiento una alta apertura numérica ($NA \approx 1$). Bajo estas condiciones, el proceso de enfocamiento obedece a la teoría vectorial de difracción de Richards-Wolf, y de acuerdo con esta teoría el campo eléctrico en el punto

CAPÍTULO 5. VÓRTICE ÓPTICO PERFECTO POLARIZADO
5.4. ENFOCAMIENTO DE VOP

$\mathbf{Q}=(x,y,z)$ cercano al plano focal se calcula por medio de la aproximación de Debye [87,88]

$$\mathbf{E}_Q \propto \int \int_{\Omega} \mathbf{T}(\mathbf{S}) \exp \left[i \frac{2\pi}{\lambda} (S_x x + S_y y + S_z z) \right] dS_x dS_y, \quad (5.26)$$

donde $\mathbf{S} = (S_x, S_y, S_z)$ es un vector unitario a lo largo de un rayo típico, Ω el ángulo sólido formado por todos los rayos geoméricos y $\mathbf{T}(\mathbf{S})$ es una distribución vectorial que considera a la polarización, la fase y la amplitud en la pupila de entrada, la geometría correspondiente a este procedimiento se muestra en la figura (5.3).

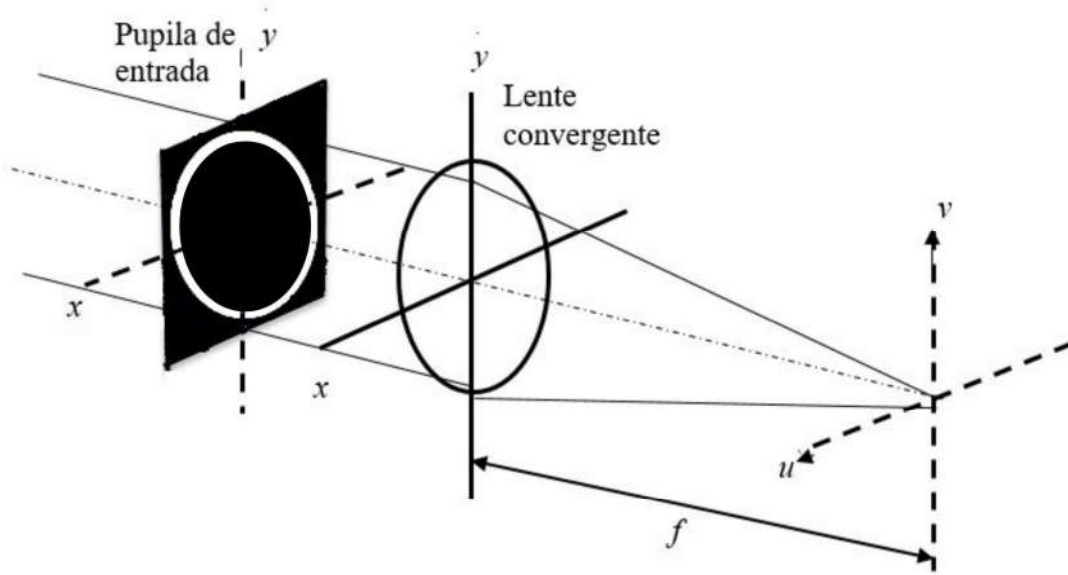


Figura 5.3: Diagrama esquemático del enfocamiento de un VOP vectorial.

Reescribiendo a los vectores \mathbf{S} y \mathbf{Q} en términos de coordenadas esféricas con origen en el punto focal tenemos

$$\begin{aligned} S_x &= \sin \theta \cos \phi, \\ S_y &= \sin \theta \sin \phi, \\ S_z &= \cos \theta, \end{aligned} \quad (5.27)$$

para \mathbf{S} y

$$\begin{aligned} x &= \rho_Q \sin \theta_Q \cos \phi_Q, \\ y &= \rho_Q \sin \theta_Q \sin \phi_Q, \\ z &= \rho_Q \cos \theta_Q, \end{aligned} \quad (5.28)$$

para \mathbf{Q} , y sea $r = \rho_Q \sin \theta_Q$ la proyección de \mathbf{Q} sobre el plano focal. La integral (5.26) resulta entonces

$$\mathbf{E}_Q \propto \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \mathbf{T}(\theta, \phi) \exp \left[i \frac{2\pi}{\lambda} r \sin \theta \cos (\phi - \phi_Q) + i \frac{2\pi}{\lambda} z \cos \theta \right] \sin \theta d\theta d\phi. \quad (5.29)$$

Para resolver la integral anterior debemos primero obtener la expresión general de la función $\mathbf{T}(\theta, \rho)$, la cual puede representarse [89] de la siguiente forma

$$\mathbf{T}(\theta, \phi) = \mathbf{P}(\theta, \phi) P(\theta, \phi), \quad (5.30)$$

con $P(\theta, \phi)$ la amplitud de la luz en la pupila de la lente y $\mathbf{P}(\theta, \phi)$ el vector de polarización dado por

$$\mathbf{P}(\theta, \phi) = \mathbf{R}^1 \mathbf{C} \mathbf{R} \mathbf{P}_0 \quad (5.31)$$

en donde \mathbf{R} es una matriz que especifica los cambios de rotación del sistema coordenado en torno al eje óptico y \mathbf{C} describe los cambios de polarización a lo largo de la propagación en la lente, estas matrices están descritas por las siguientes expresiones

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos n\phi & \sin n\phi & 0 \\ -\sin n\phi & \cos n\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (5.32)$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (5.33)$$

El vector la polarización de la luz incidente \mathbf{P}_0 lo podemos escribir como

$$\mathbf{P}_0 = \begin{pmatrix} a(\theta, \phi) \\ b(\theta, \phi) \end{pmatrix}, \quad (5.34)$$

siendo $a(\theta, \phi)$ y $b(\theta, \phi)$ son funciones por determinar.

Realizando el producto matricial (5.31) obtenemos

$$\mathbf{P}(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} a [\cos^2 n\phi \cos \theta + \sin^2 n\phi] + b [\sin n\phi \cos n\phi \cos \theta - \sin n\phi \cos n\phi] \\ a [\sin n\phi \cos n\phi \cos \theta - \cos n\phi \sin n\phi] + b [\sin^2 n\phi \cos \theta + \cos^2 n\phi] \\ -\sin \theta [a \cos n\phi + b \sin n\phi] \end{pmatrix}. \quad (5.35)$$

con $a = a(\theta, \phi)$ y $b = b(\theta, \phi)$

Aceptamos que la función pupila $\mathbf{P}(\theta, \rho)$ esté dada por la expresión para el vórtice óptico perfecto, es decir

$$P(\theta, \phi) \approx \delta(\theta - \theta_{max}) \exp(in\phi). \quad (5.36)$$

Entonces el campo incidente al sistema resulta

$$\delta(\theta - \theta_{max}) \exp(in\phi) \mathbf{P}(\theta, \phi). \quad (5.37)$$

Para la polarización del haz incidente tomaremos en cuenta la polarización cilíndrica radial y la azimutal de orden n . Entonces, tenemos los dos casos siguientes:

Polarización radial de orden n

Elijendo $a(\theta, \phi)$ y $b(\theta, \phi)$ como

$$\begin{aligned} a(\theta, \phi) &= \cos n\phi, \\ b(\theta, \phi) &= \sin n\phi, \end{aligned} \quad (5.38)$$

la expresión (5.35) para el vector \mathbf{P} de polarización se simplifica a

$$\mathbf{P}^{rad}(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos n\phi \\ \cos \theta \sin n\phi \\ -\sin \theta \end{pmatrix}, n = 1, 2, 3... \quad (5.39)$$

Sustituyendo (5.37) y (5.39) en (5.29) obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{rad} &\propto \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \mathbf{P}(\theta, \phi) P(\theta, \phi) \exp \left[i \frac{2\pi}{\lambda} r \sin \theta \cos(\phi - \phi_Q) + i \frac{2\pi}{\lambda} z \cos \theta \right] \sin \theta d\theta d\phi. \\ &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \delta(\theta - \theta_{max}) \exp(in\phi) \begin{pmatrix} \cos \theta \cos n\phi \\ \cos \theta \sin n\phi \\ -\sin \theta \end{pmatrix} \exp \left[i \frac{2\pi}{\lambda} r \sin \theta \cos(\phi - \phi_Q) + i \frac{2\pi}{\lambda} z \cos \theta \right] \sin \theta d\theta d\phi. \end{aligned} \quad (5.40)$$

Usando la propiedad de filtración de la función de Dirac,

$$\mathbf{E}^{rad} = \exp \left[i \frac{2\pi}{\lambda} z \cos \theta_{max} \right] \sin \theta_{max} \int_0^{2\pi} \exp(in\phi) \begin{pmatrix} \cos \theta_{max} \cos n\phi \\ \cos \theta_{max} \sin n\phi \\ -\sin \theta_{max} \end{pmatrix} \exp \left[i \frac{2\pi}{\lambda} r \sin \theta_{max} \cos(\phi - \phi_Q) \right] d\phi. \quad (5.41)$$

Separando cada una de las componentes

$$\begin{aligned} E_x^{rad} &= \exp \left[i \frac{2\pi}{\lambda} z \cos \theta_{max} \right] \sin \theta_{max} \int_0^{2\pi} \exp(in\phi) \cos \theta_{max} \cos n\phi \exp \left[i \frac{2\pi}{\lambda} r \sin \theta_{max} \cos(\phi - \phi_Q) \right] d\phi. \\ E_y^{rad} &= \exp \left[i \frac{2\pi}{\lambda} z \cos \theta_{max} \right] \sin \theta_{max} \int_0^{2\pi} \exp(in\phi) \cos \theta_{max} \sin n\phi \exp \left[i \frac{2\pi}{\lambda} r \sin \theta_{max} \cos(\phi - \phi_Q) \right] d\phi. \\ E_z^{rad} &= \exp \left[i \frac{2\pi}{\lambda} z \cos \theta_{max} \right] \sin \theta_{max} \int_0^{2\pi} \exp(in\phi) (-\sin \theta_{max}) \exp \left[i \frac{2\pi}{\lambda} r \sin \theta_{max} \cos(\phi - \phi_Q) \right] d\phi. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Empleando las relaciones de Bessel siguientes

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos n\phi \exp[i\alpha \cos(\phi - \gamma)] d\phi &= 2\pi i^n J_n(\alpha) \cos n\gamma. \\ \int_0^{2\pi} \sin n\phi \exp[i\alpha \cos(\phi - \gamma)] d\phi &= 2\pi i^n J_n(\alpha) \sin n\gamma. \end{aligned} \quad (5.43)$$

Sea $\alpha = \frac{2\pi}{\lambda} r \sin \theta_{max}$, las componentes x-y se pueden reescribir como

$$E_x^{rad} \approx \exp \left[i \frac{2\pi}{\lambda} z \cos \theta_{max} \right] \sin \theta_{max} \exp(in\phi) \cos \theta_{max} \cos n\phi J_n \left(\frac{2\pi}{\lambda} r \sin \theta_{max} \right). \quad (5.44)$$

$$E_y^{rad} \approx \exp \left[i \frac{2\pi}{\lambda} z \cos \theta_{max} \right] \sin \theta_{max} \exp(in\phi) \cos \theta_{max} \sin n\phi J_n \left(\frac{2\pi}{\lambda} r \sin \theta_{max} \right). \quad (5.45)$$

Recordando que la apertura numérica de una lente es $N.A = n \sin \theta$ entonces si $N.A \geq 1$, $N.A = n \sin \theta_{max} \geq 1$ para una lente en el aire $n = 1$ y $N.A \geq 1$ y $\theta_{max} \approx 90^\circ$. Entonces

$$\begin{aligned} \sin \theta_{max} &\approx 1 \\ \cos \theta_{max} &\approx 0 \end{aligned}$$

Las componentes x-y de \mathbf{E}^{rad} resultan

$$E_x^{rad} = 0 \quad (5.46)$$

$$E_y^{rad} = 0 \quad (5.47)$$

Analizando la componente z de \mathbf{E}^{rad}

$$E_z^{rad} = \exp \left[i \frac{2\pi}{\lambda} z \cos \theta_{max} \right] \sin \theta_{max} \int_0^{2\pi} \exp(in\phi) (-\sin \theta_{max}) \exp \left[i \frac{2\pi}{\lambda} r \sin \theta_{max} \cos(\phi - \phi_Q) \right] d\phi. \quad (5.48)$$

Realizando el cambio de variable $\gamma = \phi - \phi_Q$ la ec. (5.48) puede reescribirse como

$$E_z^{rad} = -\exp \left[i \frac{2\pi}{\lambda} z \cos \theta_{max} \right] \sin^2 \theta_{max} \exp(in\phi_Q) \int_0^{2\pi} \exp(in\gamma) \exp \left[i \frac{2\pi}{\lambda} r \sin \theta_{max} \cos(\gamma) \right] d\phi. \quad (5.49)$$

Empleando la identidad

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(-i(n\theta - x \cos \theta)) d\theta. \quad (5.50)$$

Sea $x = (2\pi/\lambda) \sin \theta_{max}$

$$E_z^{rad} = -\exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda} \cos \theta_{max}\right) \sin^2 \theta_{max} \exp(in\phi_Q) J_n\left(\frac{2\pi}{\lambda} r \sin \theta_{max}\right). \quad (5.51)$$

Su intensidad resulta

$$I^{rad} \propto J_n^2\left(\frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta_{max}\right). \quad (5.52)$$

Reescribiendo (5.52) en términos de la abertura numérica ($N.A = \sin \theta_{max}$)

$$I^{rad} \propto J_n^2\left(\frac{2\pi}{\lambda} N.A\right). \quad (5.53)$$

De la ec. (5.53) observamos que el campo obtenido del enfocamiento del VOP con polarización radial resulta en un vórtice óptico no perfecto.

En la figura (5.4) tenemos los patrones de intensidad y espectros de potencia de 5.53 para diferentes valores de carga topologica; y en (5.1) se encuentra los valores del radio de estos vórtices. Comparando el tamaño del diámetro calculado del vórtice óptico obtenido con el límite de Rayleigh (figura 5.3) tenemos que para el caso de cuando $n = 1$ el tamaño del vórtice está por debajo del límite de Rayleigh ($.89\lambda < 1.22 \lambda$) En la figura (5.4) se muestra la comparativa entre el tamaño

carga	FWHM (mm)	FWHM (mm/λ)
1	0.0005631	0.89
10	0.002652	4.19
20	0.004813	7.6
30	0.006931	10.95
40	0.009030	14.26
50	0.011115	17.56

Tabla 5.1: Diámetro del anillo obtenido para el enfocamiento del VOP polarizado radialmente con distintas cargas topológicas.

del vórtice óptico polarizado radialmente enfocada con el criterio de Rayleigh.

CAPÍTULO 5. VÓRTICE ÓPTICO PERFECTO POLARIZADO
5.4. ENFOCAMIENTO DE VOP

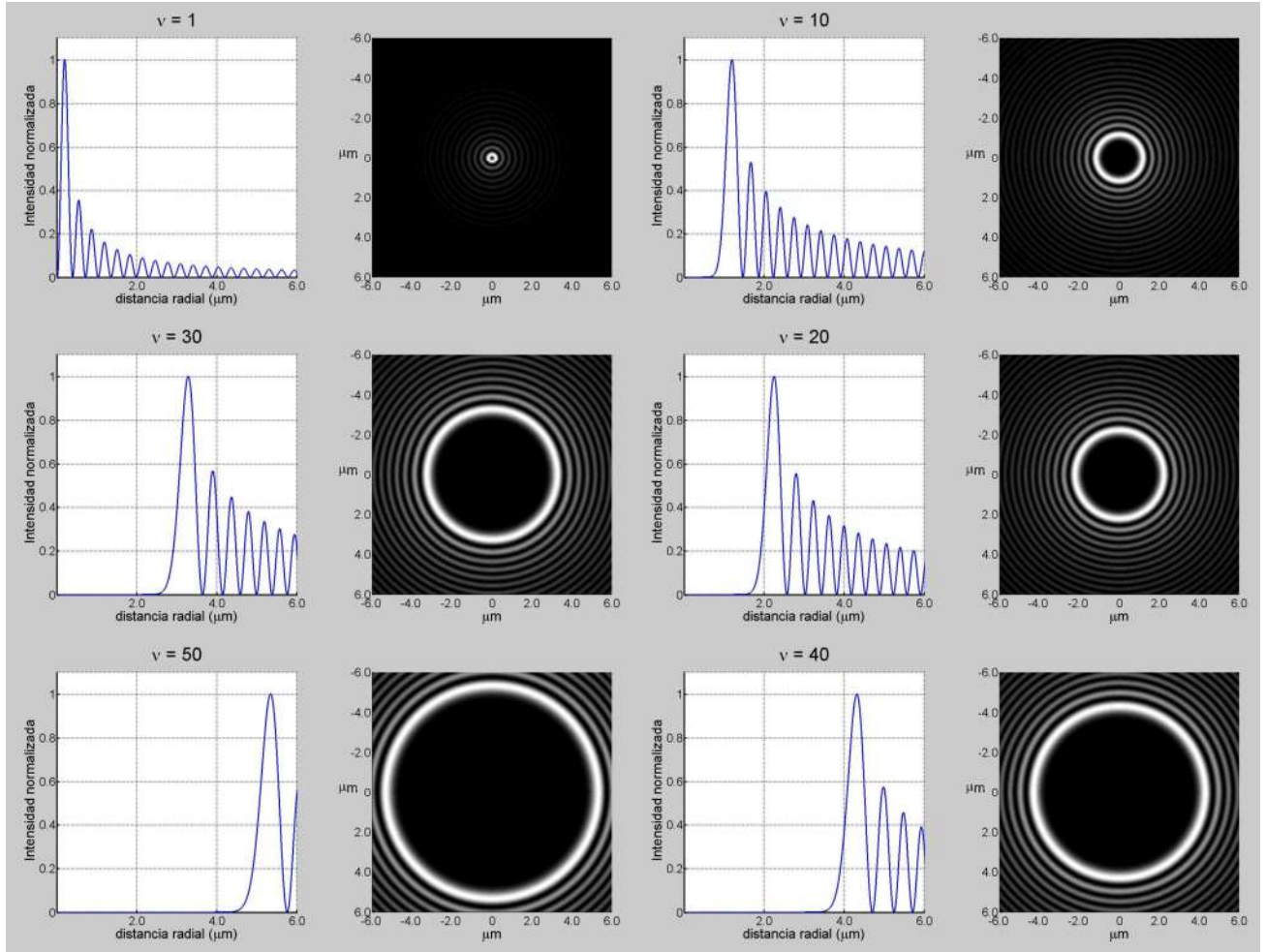


Figura 5.4: Patrón de intensidad y espectro de potencia para VOP con polarización radial enfocados de carga 1, 10, 20, 30, 40, 50 de acuerdo con (5.53)

Polarización azimutal

Para este caso tenemos

$$\begin{aligned} a(\theta, \phi) &= \sin n\phi, \\ b(\theta, \phi) &= -\cos n\phi, \end{aligned} \quad (5.54)$$

con esto el vector $\mathbf{P}(\theta, \rho)$ dado por (5.35) resulta

$$\mathbf{P}^{azi}(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} \sin n\phi \\ -\cos n\phi \\ 0 \end{pmatrix}, n = 1, 2, 3... \quad (5.55)$$

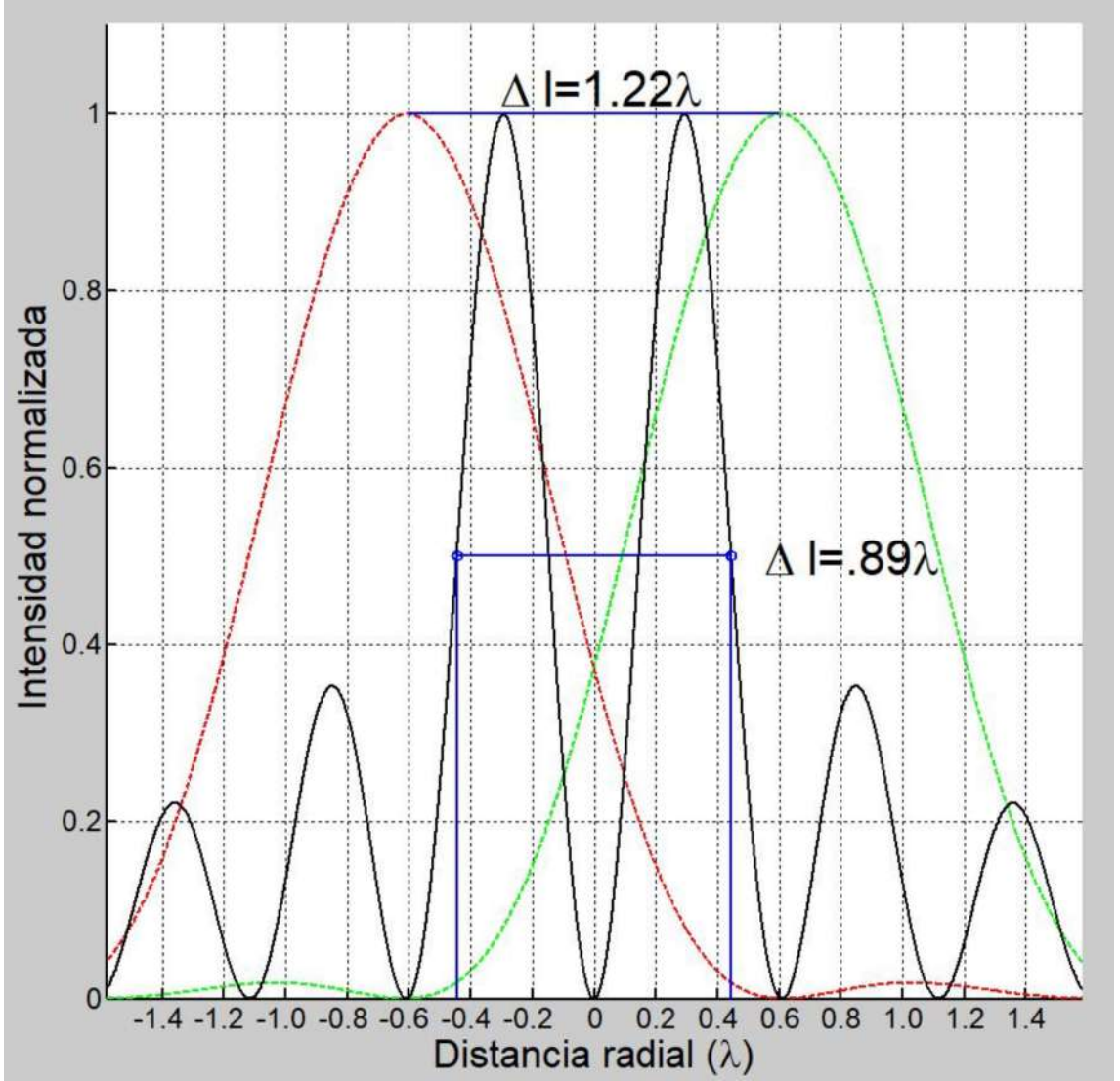


Figura 5.5: Comparativa entre el vórtice obtenido ($n=1$) y el criterio de Rayleigh cuando $N.A=1$.

Sustituyendo (5.37) y (5.55) en (5.29)

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{azi} &\propto \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \mathbf{P}(\theta, \phi) P(\theta, \phi) \exp \left[i \frac{2\pi}{\lambda} r \sin \theta \cos(\phi - \phi_Q) + i \frac{2\pi}{\lambda} z \cos \theta \right] \sin \theta d\theta d\phi \\ &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \delta(\theta - \theta_{max}) \exp(in\phi) \begin{pmatrix} \sin n\phi \\ -\cos n\phi \\ 0 \end{pmatrix} \exp \left[i \frac{2\pi}{\lambda} z \sin \theta \cos(\phi - \phi_Q) + i \frac{2\pi}{\lambda} z \cos \theta \right] \times \sin \theta d\theta d\phi, \end{aligned} \quad (5.56)$$

aplicando la propiedad de filtrado de la función δ , obtenemos

$$\mathbf{E}^{azi} = \exp \left(\frac{2\pi}{\lambda} z \cos \theta_{max} \right) \sin \theta_{max} \int_0^{2\pi} \exp(in\phi) \begin{pmatrix} \sin n\phi \\ -\cos n\phi \\ 0 \end{pmatrix} \exp \left[i \frac{2\pi}{\lambda} r \sin \theta_{max} \cos(\phi - \phi_Q) \right] d\phi. \quad (5.57)$$

Encontramos que para cada componente en (5.57)

$$E_x^{azi} = \exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda}z \cos \theta_{max}\right) \sin \theta_{max} \int_0^{2\pi} \exp(in\phi) \sin n\phi \exp\left[i\frac{2\pi}{\lambda}r \sin \theta_{max} \cos(\phi - \phi_Q)\right] d\phi \quad (5.58)$$

y

$$E_y^{azi} = -\exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda}z \cos \theta_{max}\right) \sin \theta_{max} \int_0^{2\pi} \exp(in\phi) \cos n\phi \exp\left[i\frac{2\pi}{\lambda}r \sin \theta_{max} \cos(\phi - \phi_Q)\right] d\phi. \quad (5.59)$$

Empleando la fórmula de Euler obtenemos

$$E_x^{azi} = \frac{1}{2i} \exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda}z \cos \theta_{max}\right) \sin \theta_{max} \int_0^{2\pi} (\exp(i2n\phi) - 1) \exp\left[i\frac{2\pi}{\lambda}r \sin \theta_{max} \cos(\phi - \phi_Q)\right] d\phi. \quad (5.60)$$

$$E_y^{azi} = -\frac{1}{2i} \exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda}z \cos \theta_{max}\right) \sin \theta_{max} \int_0^{2\pi} (\exp(i2n\phi) + 1) \exp\left[i\frac{2\pi}{\lambda}r \sin \theta_{max} \cos(\phi - \phi_Q)\right] d\phi. \quad (5.61)$$

Realizando nuevamente el cambio de variable $\gamma = \phi - \phi_Q$ y empleando la identidad (5.46) tenemos

$$E_x^{azi} = \pi i^{n-1} \exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda}z \cos \theta_{max}\right) \sin(\theta_{max}) \left(J_{2n}\left(\frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta_{max}\right) \exp(i2n\phi_Q) - J_0\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) r \sin(\theta_{max}) \right) \quad (5.62)$$

y

$$E_y^{azi} = -\pi i^{n-1} \exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda}z \cos \theta_{max}\right) \sin(\theta_{max}) \left(J_{2n}\left(\frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta_{max}\right) \exp(i2n\phi_Q) + J_0\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) r \sin(\theta_{max}) \right) \quad (5.63)$$

La intensidad resultante $I^{azi} = |\mathbf{E}^{azi}|^2 = |\mathbf{E}_x^{azi}|^2 + |\mathbf{E}_y^{azi}|^2$ es

$$I^{azi} \propto J_{2n}^2(kr \sin \theta_{max}) + J_0^2(kr \sin \theta_{max}). \quad (5.64)$$

Reescribiendo la intensidad en términos de la abertura numérica ($N.A = \sin \theta_{max}$)

$$I^{azi} \propto J_{2n}^2(kr N.A) + J_0^2(kr N.A). \quad (5.65)$$

De la ecuación (5.62) observamos que el segundo término de la suma $J_0^2(kr N.A) + J_{2n}^2(kr N.A)$ resulta dominante sobre el primero, es decir conforme la carga topológica aumente la contribución del primer término se vuelve despreciable. En la figura 5.8 podemos observar que el spot obtenido después de realizar el enfocamiento del vórtice óptico con polarización azimutal resulta en un spot pequeño; y en la tabla 5.2 se encuentran los valores del radio para vórtices con diferentes cargas topológica. En la figura 5.7 se observa que el tamaño del spot obtenido es menor al compararlo con el criterio de Rayleigh.

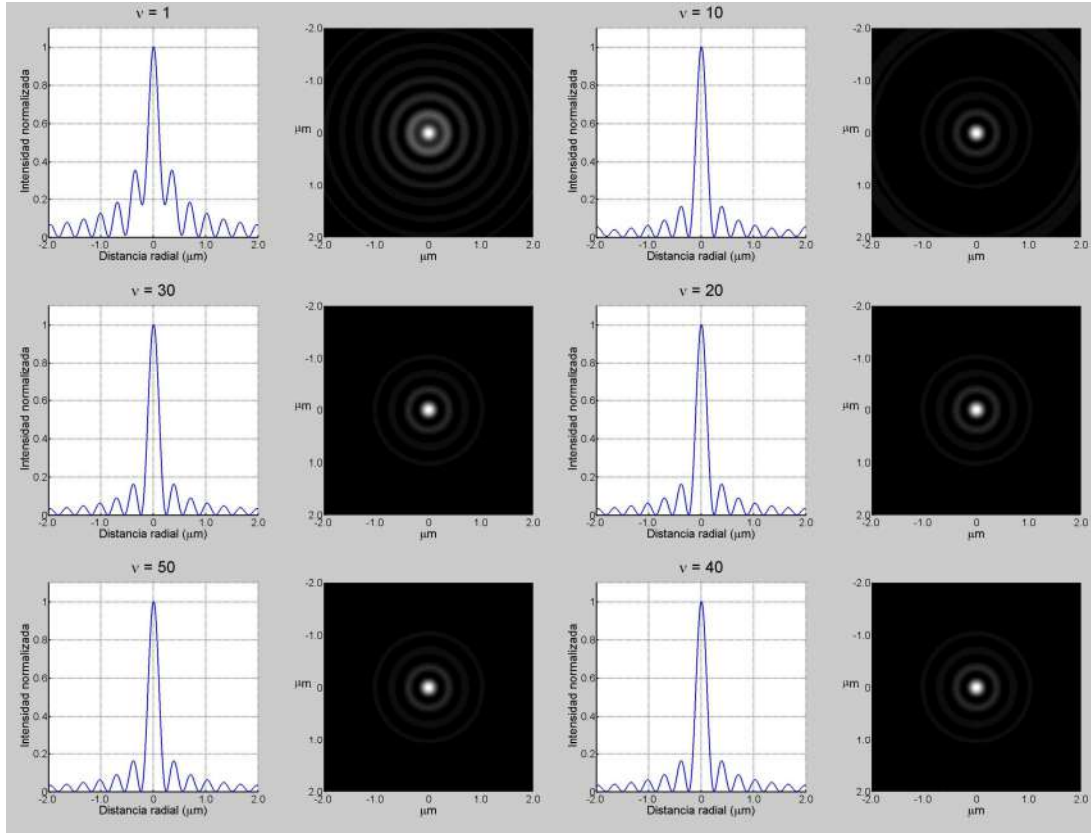


Figura 5.6: Patrón de intensidad y espectro de potencia para VOP con polarización azimutal enfocados de carga 1, 10, 20, 30, 40 y 50 de acuerdo con (5.65).

carga	FWHM (mm)	FWHM (mm/λ)
1	0.000233	0.37
10	0.000227	0.36
20	0.000227	0.36
30	0.000227	0.36
40	0.000227	0.36
50	0.000227	0.36

Tabla 5.2: FWHM del spot obtenido para el enfocamiento del VOP polarizado azimutalmente con distintas cargas topológicas.

5.5. Experimentos

La realización experimental del enfocamiento de los vórtices ópticos perfectos con polarización radial y polarización azimutal consiste en dos partes: la generación del VOP con la polarización deseada y el enfocamiento de estos haces empleando un objetivo de microscopio.

5.5.1. Generación VOP polarizado

De acuerdo con la técnica desarrollada en la sección 5.3 de este capítulo se procedió a generar experimentalmente los VOP con polarización radial y polarización azimutal. El arreglo experimental correspondiente a este sistema se muestra en la figura 5.8. El haz de entrada es una onda plana

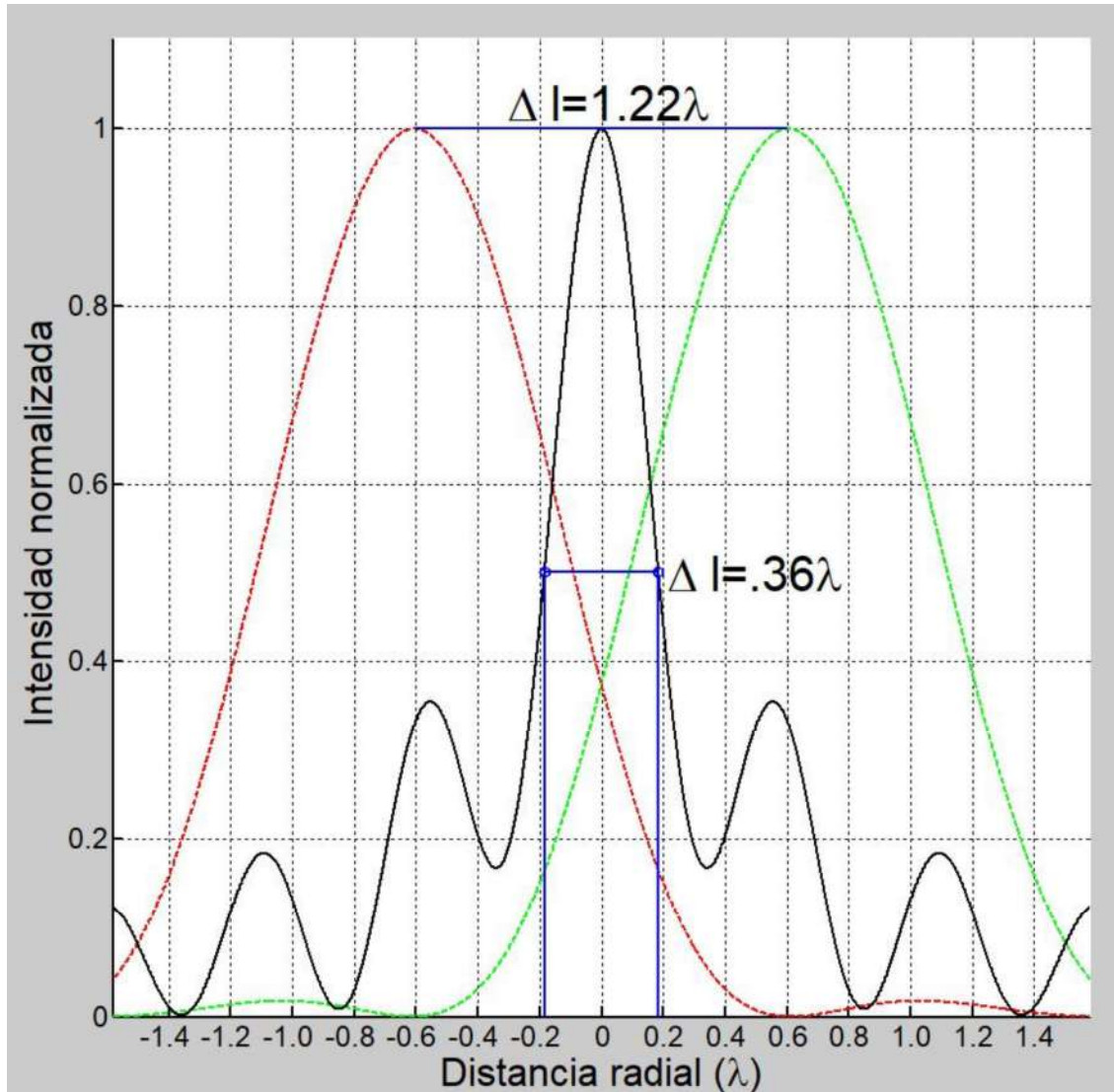


Figura 5.7: Comparativa entre el spot obtenido y el criterio de Rayleigh cuando $N.A=1$.

monocromática polarizada linealmente cuya anchura transversal y dirección de polarización son ajustado por medio del expansor de haz y una media placa de onda respectivamente. Empleamos el LC SLM Pluto-Vis reflectivo controlado por computadora de HoloEye Photonics AG con una resolución de 1920×1080 píxeles y el radio de la zona activa de 4.32 mm.

Las señales empleadas para la generación del vórtice corresponden a imágenes en niveles de gris con resolución de 1920×1080 píxeles de acuerdo con las β descritas por cada caso y la condición δ que define al vórtice óptico perfecto puede aproximarse codificando una máscara anular delgada. La máscara anular empleada tiene un ancho de 50 píxeles. En la figura(5.9) se ilustran ejemplos de señales para generar VOP con polarización radial y azimutal. Los vórtices ópticos perfectos obtenidos experimentalmente con el arreglo anteriormente descrito se muestran en a la figura siguiente Se generaron vórtices ópticos con diferentes cargas y se observa de las figuras que el tamaño no presenta variación significativa para ambos casos con lo que concluimos que la principal característica de los VOP se cumple.

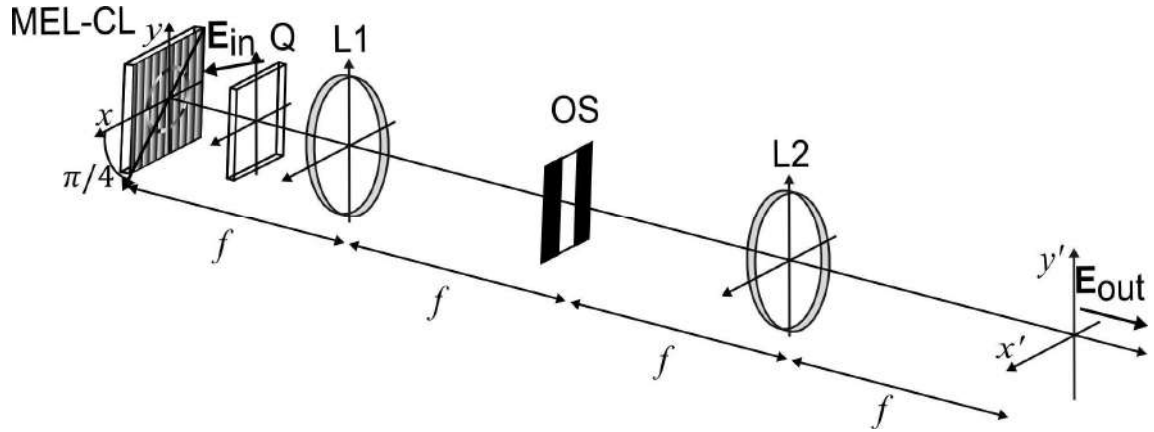


Figura 5.8: Arreglo experimental para la generación del VOP polarizado.

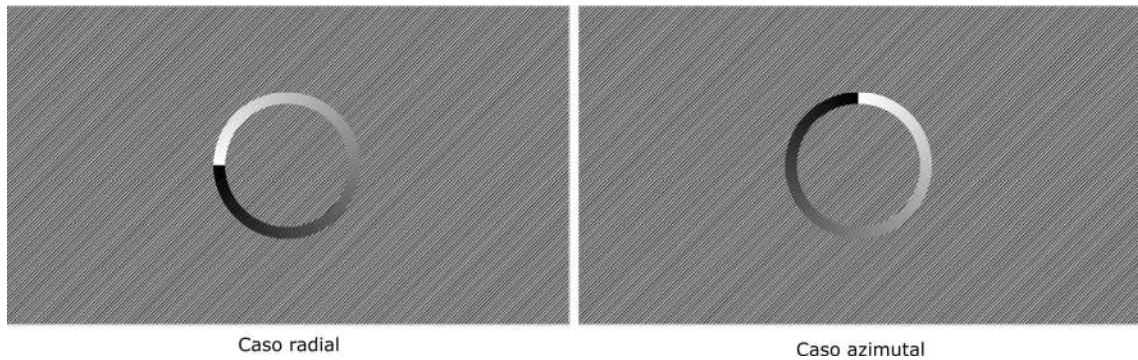


Figura 5.9: Ejemplo de señales.

5.5.2. Caracterización de Polarización

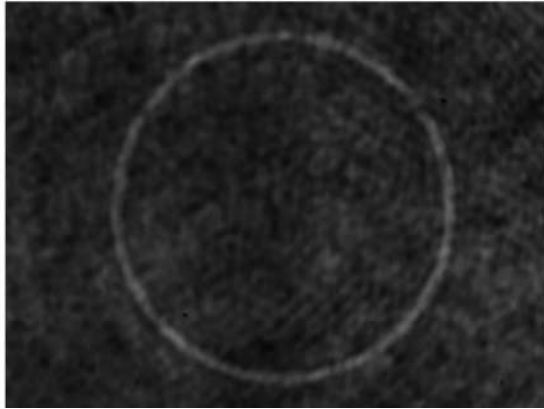
Para obtener los resultados experimentales correctos en el enfocamiento del vórtice óptico con polarización radial y azimutal debemos garantizar la correcta polarización de los VOP generados experimentalmente. Empleando el sistema mostrado en la figura 5.12 realizamos la medición de los parámetros de Stockes (Apéndice B). En la figura(5.12) se muestra el resultado del mapa de polarización de un vórtice óptico perfecto con polarización radial experimental, en figura (5.13) el caso azimutal.

De los resultados experimentales podemos observar que efectivamente los vórtices ópticos perfectos generados con la técnica descrita en la sección 5.3 presentan el comportamiento de polarización deseado.

5.5.3. Enfocamiento

El arreglo experimental para el enfocamiento de VOP con polarización radial y azimutal se compone en dos partes: el sistema de enfocamiento y el sistema de observación. Una vez que se han generado los VOP con las polarizaciones deseadas se procede a enfocarlos; este procedimiento se realiza haciendo incidir los haces VOPp en la entrada de un objetivo de microscopio con $N.A \approx 1$ como se muestra en la figura 5.9. Un sistema 4f de imágenes genera en la pupila de entrada del sistema de enfocamiento la imagen de la máscara anular delgada proyectada en el SLM. El sistema de enfoque consiste en un objetivo de microscopio 60x de Newport con $N.A = .85$. Para registrar los resultados, utilizamos un objetivo de microscopio Olympus con 100x y $N.A=1.25$. Las imágenes

Polarización Radial



Polarización Azimutal

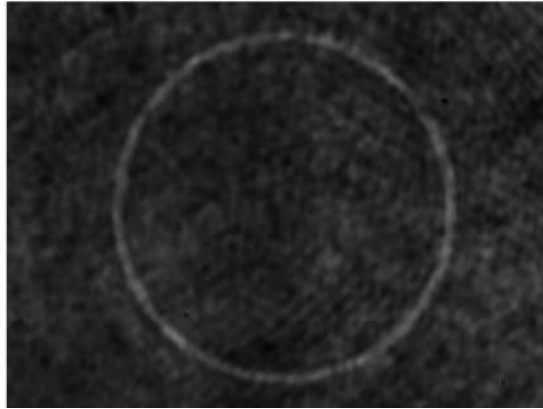
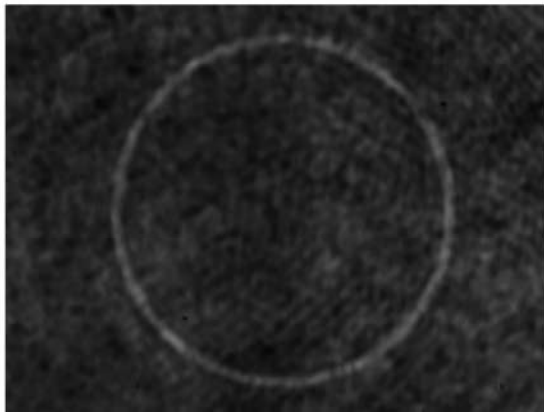


Figura 5.10: Vórtices ópticos perfectos polarizados con $n=1$, radio de 2cm y ancho 2 mm.

Polarización Radial



Polarización Azimutal

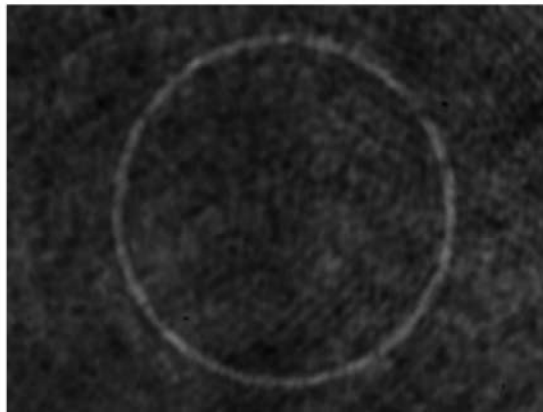


Figura 5.11: Vórtices ópticos perfectos polarizados con $n=10$, radio de 2cm y ancho 2 mm.

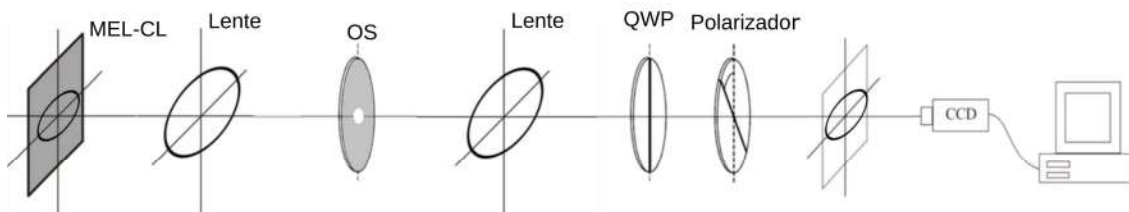


Figura 5.12: Arreglo experimental para la caracterización de la polarización del VOP polarizado.

se tomaron con una cámara IMAGINGSOURCE DFK 33UX290 con una resolución de 1920x1080 píxeles y un tamaño de pixel de $3 \mu\text{m}$.

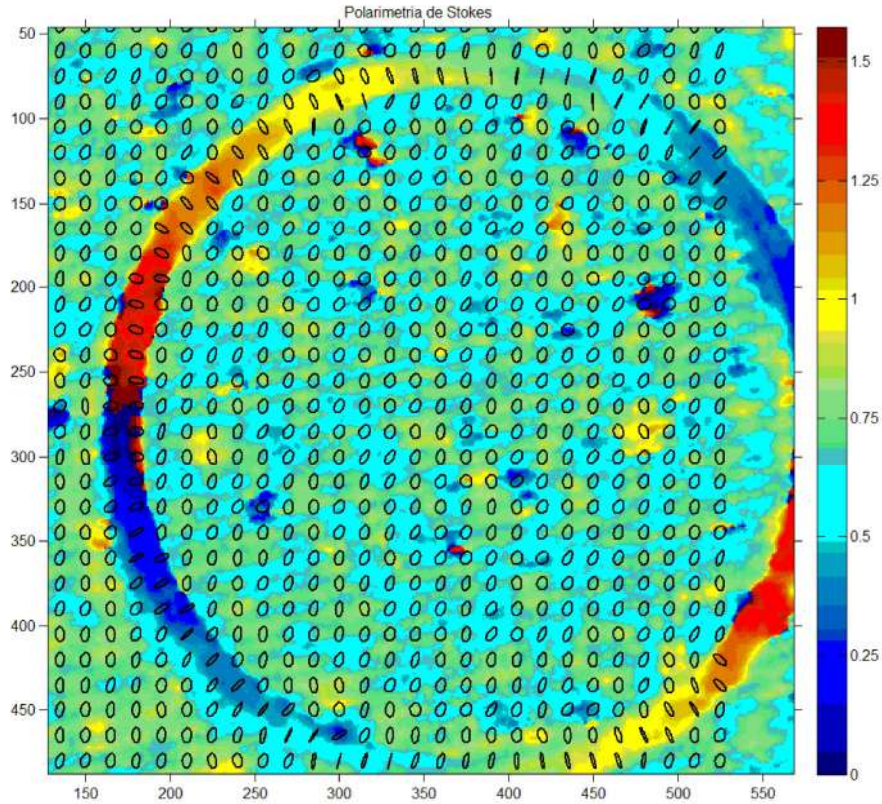


Figura 5.13: VOP con polarización radial.

Es necesario primeramente caracterizar el sistema de observación para tener una correcta medición del tamaño de los VOPp enfocados. Empleando partículas de silica con diámetros promedio de $5 \mu m$ como referencia encontramos la magnificación de nuestro sistema de observación. Una muestra de partículas se coloca en el sistema de observación empleando un portaobjetos, se capturaron 30 imágenes de las partículas, mediante un editor de fotografía se midieron en pixeles su radio y se realizó un promedio. La relación de pixel- μm encontrada es

$$1 \text{ pixel} = 0.000167 \text{ mm}.$$

Para verificar los resultados en la práctica realizamos dos experimentos de enfocamiento de vórtices perfectos polarizados radial y azimutalmente.

En el primer experimento generamos el campo focal dado por la ec. (5.24) con carga topológica $\nu = 1$. La figura (5.17)a muestra la distribución de intensidad en el plano focal correspondiente a un campo con un perfil hueco oscuro bien definido. La distribución de intensidad de campo obtenida concuerda con el modelo teórico dado por la ec. (5.48). Las irregularidades presentes en los bordes del anillo pueden explicarse por el hecho de que la máscara anular que se muestra en el SLM no es continua sino discreta y su ancho no es infinitamente estrecho, sino que está fijado en 50 píxeles.

En el segundo experimento generamos el campo focal dado por la ec. (5.25) para carga topológica $\nu = 1$. La distribución transversal resultante corresponde a un punto focal estrecho y se muestra en la figura (5.17)b Las distribuciones de intensidad obtenidas confirman que se puede crear un punto estrecho mediante el enfocamiento fuerte de un vórtice perfecto polarizado azimutalmente.

La Figura 5.16a muestra que la distribución de la intensidad del primer anillo aparece más alta que en el caso teórico. En este caso, tal diferencia puede explicarse por el hecho de que la

CAPÍTULO 5. VÓRTICE ÓPTICO PERFECTO POLARIZADO
5.5. EXPERIMENTOS

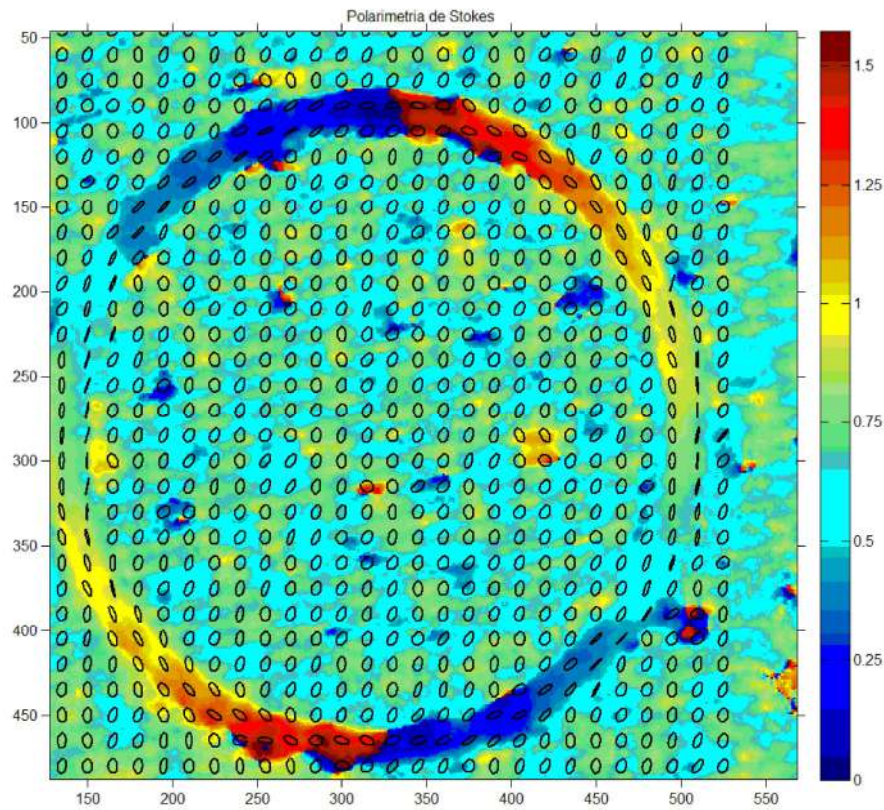


Figura 5.14: VOP con polarización azimutal.

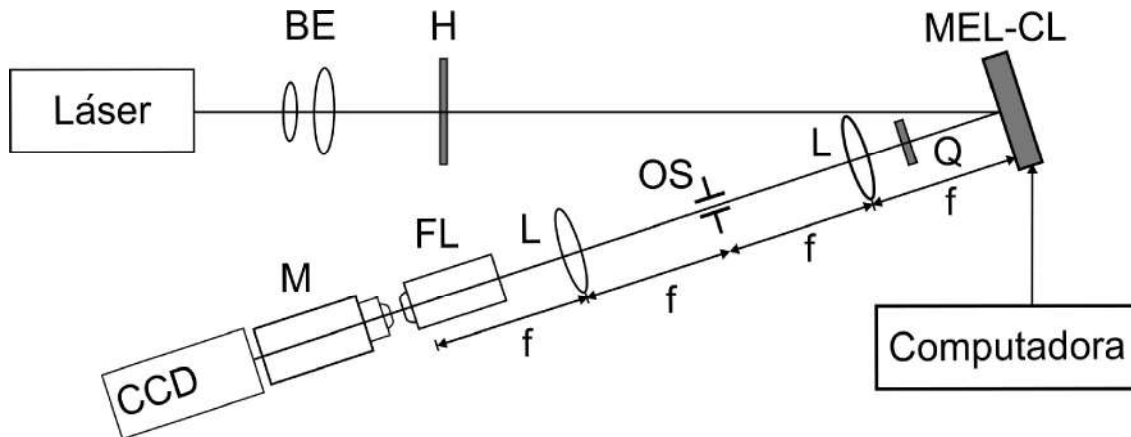


Figura 5.15: Configuración experimental utilizada para generar y enfocar el POV polarizado cilíndricamente. Expansor de haz BE, placa de media onda H, placa de cuarto de onda Q, lente L, distancia focal f , tope óptico OS, lente de enfoque FL, microscopio M.

apertura numérica es ligeramente inferior a 1, ya que en la práctica es bastante difícil obtener un objetivo exactamente con $N.A = 1$. Las imágenes anteriores se encuentran aumentadas por 1400 %.



Figura 5.16: Ejemplo de captura de imagen de una partícula de silica bajo el sistema de observación.

En la figura (5.18) se muestra un corte transversal realizado a las capturas obtenidas. El corte realizado muestra un tamaño de FWHM de 52 pixeles para el caso del anillo y de 25 pixeles para el spot. Mediante una regla de tres podemos encontrar el tamaño original.

$$FWHM_{anillo} = \left(\frac{52 \text{ px}}{14} \right) \times 0.000167 \text{ mm/px} = 0.00619 \text{ mm.}$$

$$FWHM_{spot} = \left(\frac{25 \text{ px}}{14} \right) \times 0.000167 \text{ mm/px} = 0.00298 \text{ mm.}$$

El FWHM resultante del anillo es de 0.000619 mm, es decir $.97\lambda$, que es 10% arriba del valor teórico y el FWHM del spot es de 0.000298 mm es decir $.47\lambda$, que es 22% arriba del valor teórico.

5.6. Conclusiones

- Se propuso una técnica para generar un VOP polarizado cilíndricamente caracterizada por su sencillez de implementación experimental.
- Se logró sintetizar vórtices ópticos con polarización radial y azimutal mediante un arreglo experimental empleando un MEL-CL con su eje activo rotado 45^0 y una placa de $\lambda/4$ a la entrada de en un sistema óptico $4f$.
- La polarización de los vórtices se comprobó mediante el uso de técnicas de polarimetría empleando los parámetros de Stokes.
- Desarrollamos la teoría correspondiente al enfocamiento del VOP polarizado bajo el régimen de apertura numérica alta ($N.A \approx 1$).

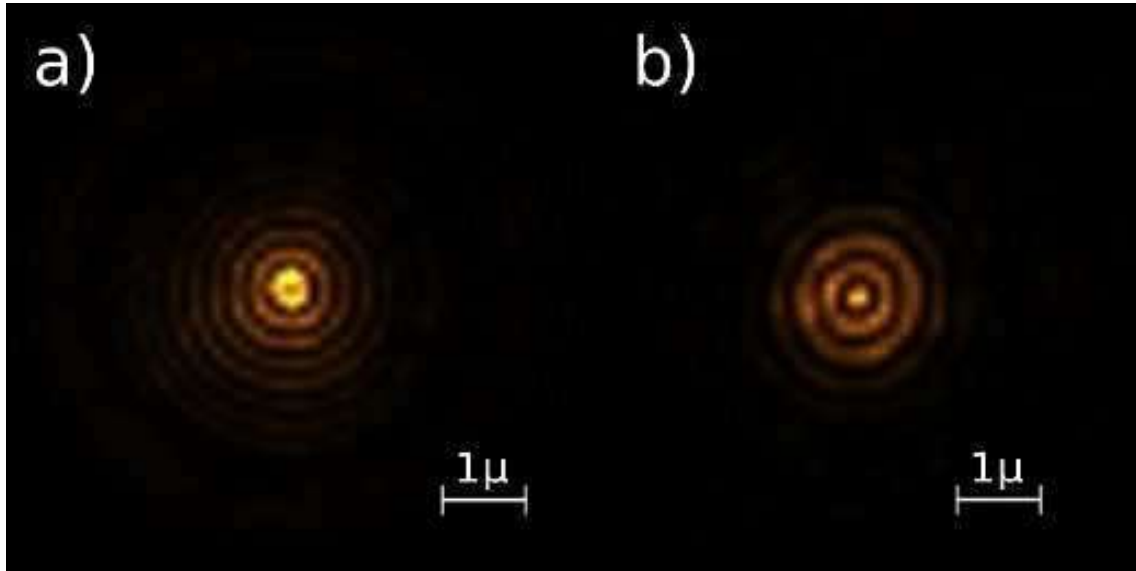


Figura 5.17: Resultados experimentales. a) distribución de intensidad de un POV focalizado radialmente polarizado, b) distribución de intensidad de un POV focalizado polarizado azimutalmente.

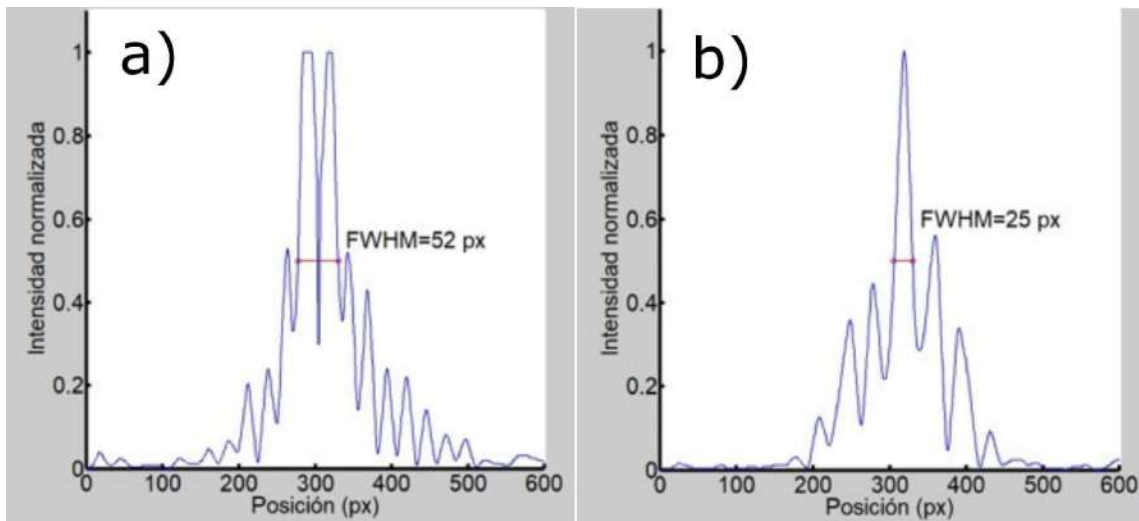


Figura 5.18: Corte transversal de a) POV focalizado radialmente polarizado, b) POV focalizado polarizado azimutalmente.

CAPÍTULO 5. VÓRTICE ÓPTICO PERFECTO POLARIZADO

5.6. CONCLUSIONES

- Construimos un arreglo experimental de enfocamiento de haces empleando un objetivo de microscopio de 60 X junto con un sistema de observación con un objetivo de microscopio de inmersión con 100X 1.25 N.A.
- Demostramos teórica y experimentalmente que al enfocar vórtices perfectos polarizados radial y azimutalmente es posible crear un spot pequeño de 0.37λ de FWHM y un campo hueco oscuro de 0.89λ de FWHM, respectivamente, en el régimen de apertura numérica alta.

Capítulo 6

Conclusiones generales

1. Se realizó una descripción de los conceptos básicos sobre los cristales líquidos, sus tipos, su comportamiento y modelado físico-matemático. Así como, una técnica de caracterización del MEL-CL con la cual fue posible encontrar los parámetros de control para obtener modulación en fase.
2. Se expuso el concepto del vórtice óptico perfecto (VOP) partiendo de su definición matemática. Se desarrolló la teoría y generación experimental del VOP empleando dos aproximaciones distintas: la serie de Fourier Bessel y la fórmula de clausura de la función Bessel. Se diseñaron las señales de control empleadas para la síntesis experimental del VOP, se armaron los arreglos experimentales y se realizaron los experimentos correspondientes, así como las simulaciones numéricas para cada caso.
3. Introducimos una nueva familia de haces parcialmente coherentes que transportan vórtices ópticos. Cualquier miembro de esta familia representa una superposición incoherente de modos de Bessel totalmente coherentes con el mismo frente de onda helicoidal y libre de difracción al propagarse. Empleando la representación en modos coherentes logramos definir la estructura matemática de estos haces.
4. Desarrollamos una técnica de generación para el vórtice óptico invariante en propagación.
5. Se emplearon vídeos como señales de control a 60hz de frecuencia diseñados mediante un programa en MATLAB. Posteriormente se despliegan en el MEL para realizar la síntesis de un vórtice óptico invariante. Se tomaron imágenes instantáneas a diferentes distancias respecto del plano de generación del haz para su posterior análisis.
6. Se logró observar que el vórtice óptico invariante en propagación conservaba su forma sin sufrir difracción en una distancia de 1m respecto del plano donde es generado.
7. Se consiguió la generación exitosa del vórtice óptico invariante empleando la técnica propuesta. Los resultados experimentales coinciden con las simulaciones numéricas realizadas. El haz obtenido puede resultar útil en el diseño de trampas ópticas en tres dimensiones.
8. Se estudió el efecto combinado del empleo de ventanas de apodización con cargas topológicas distintas en la generación de haces con vórtices parcialmente coherentes. Encontramos que el resultado de esta combinación induce transiciones de gradiente de alta intensidad desde el núcleo del vórtice hasta el borde exterior del vórtice. Además, la elección específica de los filtros de apodización produce un cambio en el grado espacial de coherencia como una función de la carga topológica independientemente del número de modos empleados.

CAPÍTULO 6. CONCLUSIONES GENERALES

9. Se demostró teórica y numéricamente que la coherencia y el espectro de potencia de un haz de vórtice con estructura modal de Bessel parcialmente coherente puede ser modulada por opciones adecuadas de ventanas de apodización actuando sobre la fuente de iluminación primaria. Los resultados obtenidos pueden ser útiles en el diseño de sistemas ópticos para atrapamiento y manipulación de micropartículas.
10. Se introdujo el concepto de VOP polarizado (VOPp) considerando dos casos de polarización: azimutal y radial. Desarrollamos la teoría correspondiente a cada caso y se propuso una técnica de generación experimental.
11. Se diseñó un arreglo experimental para generar el VOPp empleando un MEL-CL rotado 45° respecto de su eje activo y una placa de cuarto de onda en un sistema de imagen 4f. Se diseñaron las señales adecuadas para ser desplegadas en el MEL y obtener un VOP con la polarización deseada. Los haces resultantes se analizaron empleando técnicas de polarimetría para asegurar que se obtiene la polarización esperada.
12. Desarrollamos la teoría de enfocamiento del VOPp en el régimen de NA grande ($NA \approx 1$). Bajo enfocamiento con NA grande se obtiene en el caso radial un vórtice con un FWHM de $.89 \lambda$ y en el caso azimutal se obtiene un spot con un FWHM de $.3 \lambda$. El vórtice óptico perfecto polarizado azimutalmente genera un spot con resolución mayor al límite de Rayleigh, útil en aplicaciones para litografía, por ejemplo.
13. Se propuso emplear el VOPp en un experimento de enfocamiento con NA grande para obtener una distribución de campo con resolución mayor al límite de Rayleigh. Para este fin se diseñó y construyó un arreglo experimental de enfocamiento de haces con $NA \approx 1$ junto con un sistema de observación de alta resolución.

Apéndice A

Regímenes de las pinzas ópticas

Pinzas Ópticas

Una pinza óptica es un haz láser altamente enfocado por medio de un objetivo de microscopio con una apertura numérica grande ($NA > 1$) cuya principal aplicación es el confinamiento y manipulación no invasiva de partículas. El funcionamiento de las pinzas se debe a la transferencia de momento entre el campo óptico y las partículas como consecuencia de la redirección de los haces sobre las interfaces dieléctricas.

Como consecuencia de la interacción y transferencia de momento surgen fuerzas que actúan sobre la partícula. La fuerza neta obtenida se divide en dos componentes conocidas como fuerza de dispersión, o fuerza axial, que se encuentra en dirección de la propagación del haz y empuja a las partículas fuera de la región del foco, y la fuerza de gradiente, o fuerza radial, que depende de la intensidad transversal del haz esta fuerza atrae a las partículas a la región de mayor intensidad. Para que el atrapamiento óptico tenga lugar la fuerza de gradiente debe superar a la fuerza de dispersión.

En esta sección trataremos brevemente los casos en los cuales la teoría de atrapamiento óptico se divide. En función del tamaño relativo entre la partícula a confinar y la longitud de onda del haz de atrapamiento tenemos tres regímenes: el de óptica de rayos ($r \ll \lambda$), MIE ($r \approx \lambda$) y Rayleigh ($r \gg \lambda$) [99].

A.1. Óptica de rayos

Vamos a considerar al haz de luz como un conjunto de rayos individuales con intensidad, polarización y dirección definidas. Cada uno de estos rayos posee las mismas propiedades que una onda plana con $\lambda = 0$ que se propaga en línea recta dentro de un medio homogéneo, lineal e isotrópico; adicionalmente, modifican su dirección y polarización al ser reflejados o refractados por una interfaz dieléctrica conforme a las fórmulas de Fresnel.

Cuando el haz láser incide sobre el objetivo de microscopio es enfocado rayo a rayo en el punto focal. Si colocamos una esfera dieléctrica con diámetro $D \gg \lambda$ en el punto focal los rayos incidentes a su superficie son reflejados y/o refractados generando fuerzas que actúan sobre ella. La fuerza total es la suma de las contribuciones de todos los rayos incidentes en la apertura a un radio r respecto del eje de haz y a un ángulo β [100] tal como se muestra en la figura A.1.

Consideremos que cada uno de estos rayos tiene una potencia P , un ángulo θ de incidencia y un momento por segundo dado por nP/c (n el índice de refracción del medio y c la velocidad de la luz en el vacío); la fuerza total resulta del intercambio de momentos entre los rayos y la esfera y se calcula mediante el cambio neto del momento por segundo.

Dentro de la esfera la potencia de los rayos reflejados decrece de manera consecutiva, y por lo tanto,

APÉNDICE A. REGÍMENES DE LAS PINZAS ÓPTICAS
A.1. ÓPTICA DE RAYOS

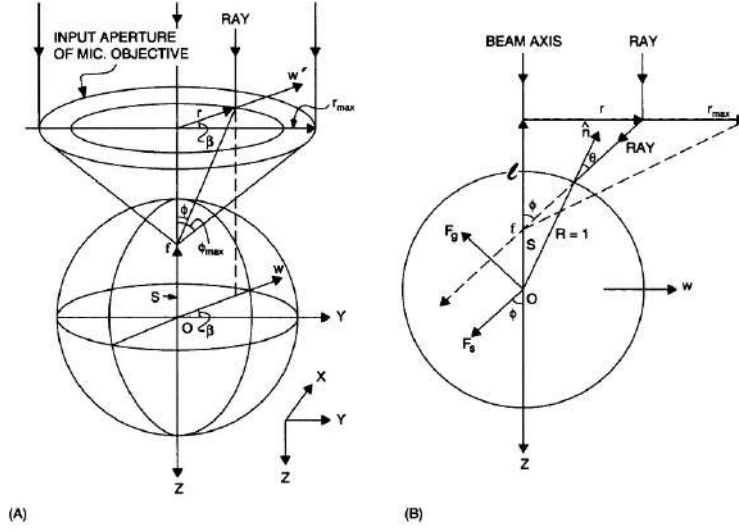


Figura A.1: Diagrama de fuerzas actuando sobre una esfera.

también el momento.

En la dirección Y tenemos que $nP/c = 0$ y la fuerza es entonces

$$F_y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nP}{c} T^2 R \sin(\alpha + n\beta) - \frac{nPR}{c} \sin(\pi + 2\theta). \quad (\text{A.1})$$

Para la dirección Z el momento por segundo es distinto de cero

$$F_z = \frac{nP}{c} - \frac{n_1PR}{c} \cos(\pi + 2\theta) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n_1P}{c} T^2 R \cos(\alpha + n\beta). \quad (\text{A.2})$$

Para encontrar las expresiones de la fuerza radial y la axial consideremos a la fuerza total como la suma de las componentes Y y X en el plano complejo, tal que $F_{tot} = F_z + iF_y$ y haciendo $Re(F_{tot}) = F_{axial}$ y $Im(F_{tot}) = F_{radial}$.

Entonces F_{tot} resulta

$$F_{tot} = \frac{n_1P}{c} \left[1 + R \cos 2\theta + iR \sin 2\theta - T^2 e^{i\alpha} \left(\frac{1 - Re^{-i\beta}}{1 - Re^{i\beta} - Re^{-i\beta} + R^2} \right) \right]. \quad (\text{A.3})$$

Separando a la expresión (A.3) en sus partes real e imaginaria y sean

$$\begin{aligned} \alpha &= 2\theta - 2r, \\ \beta &= \pi - 2r, \end{aligned}$$

obtenemos finalmente

$$F_{axial} = \frac{nP}{c} \left[1 + R \cos(2\theta) - \frac{1}{1 + 2R \cos(2r) + R^2} T^2 (\cos(2\theta - 2r) + R \cos(2\theta)) \right] \quad (\text{A.4})$$

$$F_{radial} = \frac{nP}{c} \left[1 + R \sin(2\theta) - \frac{1}{1 + 2R \cos(2r) + R^2} T^2 (\sin(2\theta - 2r) + R \sin(2\theta)) \right]. \quad (\text{A.5})$$

A.2. MIE

El análisis del atrapamiento óptico cuando tenemos $r \approx \lambda$ se describe mediante las soluciones de Lorenz-Mie para la dispersión de luz incidente sobre microesferas homogéneas e isotrópicas y empleando el método de la matriz T .

La demostración y desarrollo riguroso de la teoría de Lorenz-Mie [101, 102] que se requiere para lograr una descripción completa y correcta de las fuerzas de atrapamiento en este régimen se encuentran fuera de los objetivos y alcances de esta tesis. Nos será suficiente con hacer mención al marco teórico que nos posibilita el análisis de este caso.

A.3. Rayleigh

Cuando $r \gg \lambda$ las partículas son tan pequeñas que podemos considerarlas como dipolos puntuales los cuales tienen un momento dipolar dado por [101]

$$\vec{p}_{dipolo} = \frac{4\pi n_m^2 \epsilon_0 r^3 (m^2 - 1)}{m^2 + 2} \vec{E}, \quad (\text{A.6})$$

donde:

$$m = \frac{n_p}{n_m}.$$

n_m es el índice de refracción del medio.

n_p es el índice de refracción de la partícula.

ϵ_0 es la permitividad eléctrica.

r es el radio de la partícula.

\vec{E} es un campo eléctrico homogéneo.

De acuerdo con [102] una partícula con un momento dipolar descrito por (A.6) va a experimentar a una fuerza gradiente de la forma

$$\vec{F}_{gradiente} = \frac{2\pi n_m r^3 (m^2 - 1)}{c(m^2 + 2)} \nabla I. \quad (\text{A.7})$$

Cuando tenemos un campo dependiente del tiempo las oscilaciones de los dipolos resultan ser fuentes puntuales [40] de energía radiante. Las partículas dentro del campo óptico absorben y reemiten esta energía, la diferencia entre la energía perdida del campo y la reirradiada por las partículas se asocia a un cambio neto en el flujo del momento resultando en una fuerza de dispersión

$$\vec{F}_{dispersion} = \frac{8\pi n_m k^4 r^6 I (m^2 - 1)}{c(m^2 + 2)}, \quad (\text{A.8})$$

Apéndice B

Parámetros de Stokes

Los parámetros de Stokes son un método de caracterización de las propiedades de la polarización de haces de luz, aplicable para haces no polarizados, parcialmente polarizados y polarizados. Los 4 parámetros de Stokes usualmente referidos como vectores de Stokes, que no son verdaderos vectores pues no se transforman o rotan como vectores. Los parámetros de Stokes son sumados como vectores para simular la adición de haces de luz incoherentes.

B.1. Definición fenomenológica de los parámetros de Stokes

Los 4 parámetros de Stokes S_0, S_1, S_2 y S_3 , se definen en términos de 6 mediciones de flujo polarizado realizado con un polarizador ideal como

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_H + P_V \\ P_H - P_V \\ P_{45} - P_{135} \\ P_R - P_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{pmatrix}. \quad (\text{B.1})$$

Los parámetros de Stokes usualmente se escriben en forma de vector \mathbf{S} con cuatro elementos reales:

- S_0 : es la irradiancia total del haz.
- S_1 : es la diferencia de la componente (P_H) horizontal (90°) del flujo polarizado y la componente (P_V) vertical (0°).
- S_2 : es la diferencia de la del flujo polarizado a 45° (P_{45}) y el flujo polarizado a 135° (P_{135}).
- S_3 : mide la diferencia del flujo polarizado circularmente a derecha (P_R) y a izquierdas (P_L).

B.2. Deducción matemática de los parámetros de Stokes

Consideremos dos ondas planas ortogonales entre si en algún punto del espacio, sea $z = 0$, representadas por

$$E_x(t) = E_{0x} \cos[\omega t + \delta x(t)] \quad (\text{B.2})$$

$$E_y(t) = E_{0y} \cos[\omega t + \delta y(t)], \quad (\text{B.3})$$

donde $E_x(t)$ y $E_y(t)$ son las amplitudes instantáneas, ω es la frecuencia angular instantánea, y $\delta x(t)$ y $\delta y(t)$ son los factores de fase instantáneos. La eliminación explícita del término t entre

APÉNDICE B. PARÁMETROS DE STOKES
B.2. DEDUCCIÓN MATEMÁTICA DE LOS PARÁMETROS DE STOKES

Tabla B.1: Estados básicos de polarización.

Tipo	Símbolo	Parámetro de Stokes
Linealmente polarizada horizontalmente	H	(1,1,0,0)
Linealmente polarizada verticalmente	V	(1,-1,0,0)
Linealmente polarizada 45°	45	(1,0,1,0)
Linealmente polarizada 135°	135	(1,0,-1,0)
Circularmente polarizada a derecha	R	(1,0,0,1)
Circularmente polarizada a izquierda	L	(1,0,0,-1)

B.2 y B.3 produce la llamada elipse de polarización que es válida, en general, solo en un instante de tiempo dado:

$$\frac{E_x^2(t)}{E_{0x}^2(t)} + \frac{E_y^2(t)}{E_{0y}^2(t)} - \frac{2E_x(t)E_y(t)}{E_{0x}(t)E_{0y}(t)} \cos \delta(t) = \sin^2 \delta(t), \quad (\text{B.4})$$

dónde $\delta(t) = \delta_y(t) - \delta_x(t)$. Para la radiación monocromática, las amplitudes y fases son constantes para todo el tiempo, entonces B.4 se reduce a

$$\frac{E_x^2(t)}{E_{0x}^2(t)} + \frac{E_y^2(t)}{E_{0y}^2(t)} - \frac{2E_x(t)E_y(t)}{E_{0x}(t)E_{0y}(t)} \cos \delta = \sin^2 \delta. \quad (\text{B.5})$$

Mientras E_{0x} , E_{0y} y δ son constantes, E_x y E_y continúan dependiendo implícitamente del tiempo, como vemos en (B.2) y (B.3). Por lo tanto, hemos escrito $E_x(t)$ y $E_y(t)$ en (B.4). Para representar (B.4) en términos observables del campo óptico, se debe tomar un promedio durante el tiempo de observación. Debido a que este es un largo período de tiempo relativo al tiempo para una sola oscilación, puede tomarse como infinito. Sin embargo, en vista de la periodicidad de $E_x(t)$ y $E_y(t)$, solo necesitamos el promedio de (B.4) durante un solo período de oscilación. El promedio de tiempo está representado por el símbolo $\langle \dots \rangle$ entonces escribimos (B.4) como

$$\frac{\langle E_x^2(t) \rangle}{E_{0x}^2(t)} + \frac{\langle E_y^2(t) \rangle}{E_{0y}^2(t)} - \frac{2\langle E_x(t)E_y(t) \rangle}{E_{0x}(t)E_{0y}(t)} \cos \delta = \sin^2 \delta. \quad (\text{B.6})$$

Multiplicando (B.6) por $4E_{0x}^2E_{0y}^2$ tenemos

$$\langle E_x^2(t) \rangle = \frac{1}{2}E_{0x}^2. \quad (\text{B.7})$$

$$\langle E_y^2(t) \rangle = \frac{1}{2}E_{0y}^2. \quad (\text{B.8})$$

$$\langle E_x(t)E_y(t) \rangle = \frac{1}{2}E_{0x}E_{0y} \cos \delta. \quad (\text{B.9})$$

Sustituyendo (B.7), (B.8) y (B.9) en (B.6)

$$2E_{0x}^2E_{0y}^2 + 2E_{0x}^2E_{0y}^2 - (2E_{0x}E_{0y} \cos \delta)^2 = (2E_{0x}E_{0y} \sin \delta)^2. \quad (\text{B.10})$$

Como deseamos expresar el resultado final en términos de la intensidad, sumamos y restamos la cantidad $E_{0x}^2 + E_{0y}^2$ al lado izquierdo de (B.10); hacer esto lleva a cuadrados perfectos. Agrupando términos

$$(E_{0x}^2 + E_{0y}^2)^2 - (E_{0x}^2 - E_{0y}^2)^2 - (2E_{0x}E_{0y} \cos \delta)^2 = (2E_{0x}E_{0y} \sin \delta)^2. \quad (\text{B.11})$$

Escribimos las cantidades dentro de los paréntesis como

$$S_0 = E_{0x}^2 + E_{0y}^2. \quad (\text{B.12})$$

APÉNDICE B. PARÁMETROS DE STOKES
B.2. DEDUCCIÓN MATEMÁTICA DE LOS PARÁMETROS DE STOKES

$$S_1 = E_{0x}^2 - E_{0y}^2. \quad (\text{B.13})$$

$$S_2 = 2E_{0x}E_{0y} \cos \delta. \quad (\text{B.14})$$

$$S_3 = 2E_{0x}E_{0y} \sin \delta. \quad (\text{B.15})$$

Las cuatro ecuaciones dadas por (B.12-B.15) son los parámetros de polarización de Stokes para una onda plana. Si ahora tenemos luz parcialmente polarizada, entonces vemos que las relaciones dadas por (4-9) continúan siendo válidas por intervalos de tiempo muy cortos, ya que las amplitudes y fases fluctúan lentamente. Usando la desigualdad de Schwarz, se puede demostrar que, para cualquier estado de luz polarizada, los parámetros de Stokes siempre satisfacen la relación:

$$S_0^2 \geq S_1^2 + S_2^2 + S_3^2. \quad (\text{B.16})$$

El signo de igualdad se aplica cuando tenemos luz completamente polarizada, y la desigualdad indica cuando tenemos luz parcialmente polarizada o luz no polarizada. En el ángulo de orientación y el ángulo de elipticidad de la elipse de polarización expresado en términos de los parámetros de Stokes esta dado por

$$\tan 2\psi = \frac{S_2}{S_1}. \quad (\text{B.17})$$

$$\sin 2\chi = \frac{S_3}{S_0}. \quad (\text{B.18})$$

Los parámetros de Stokes nos permiten describir el grado de polarización P para cualquier estado de polarización. De la definición definición,

$$P = \frac{I_{pol}}{I_{tot}} = \frac{(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2)^{1/2}}{S_0}. \quad (\text{B.19})$$

donde I_{pol} es la intensidad de la suma de los componentes de polarización e I_{tot} es la intensidad total del haz. El valor de $P = 1$ corresponde a luz completamente polarizado, $P = 0$ corresponde a luz no polarizada, y $0 < P < 1$ corresponde a luz parcialmente polarizada. Para obtener los parámetros de Stokes de un haz óptico, siempre se debe tomar un promedio de tiempo de la elipse de polarización. Sin embargo, el proceso de tiempo promedio puede ser formalmente anulado representando las amplitudes ópticas (reales), (B.2) y (B.3), en términos de amplitudes complejas:

$$E_x(t) = E_{0x} \exp[i(\omega t + \delta_x)] = E_x \exp(i\omega t) \quad (\text{B.20})$$

$$E_y(t) = E_{0y} \exp[i(\omega t + \delta_y)] = E_y \exp(i\omega t), \quad (\text{B.21})$$

donde

$$E_x = E_{0x} \exp(i\delta_x) \quad (\text{B.22})$$

y

$$E_y = E_{0y} \exp(i\delta_y), \quad (\text{B.23})$$

son amplitudes complejas. Los parámetros de Stokes para una onda plana ahora se obtienen de las fórmulas:

$$S_0 = E_x E_x^* + E_y E_y^*. \quad (\text{B.24})$$

$$S_1 = E_x E_x^* - E_y E_y^*. \quad (\text{B.25})$$

$$S_2 = E_x E_y^* + E_y E_x^*. \quad (\text{B.26})$$

$$S_3 = i(E_x E_y^* - E_y E_x^*). \quad (\text{B.27})$$

Usaremos la representación compleja, en adelante, como las ecuaciones definitorias para los parámetros de Stokes. Al sustituir (B.22) y (B.23) en estas expresiones se obtiene

$$S_0 = E_{0x}^2 + E_{0y}^2. \quad (\text{B.28})$$

APÉNDICE B. PARÁMETROS DE STOKES
B.3. MEDICIÓN DE LOS PARÁMETROS DE STOKES

$$S_1 = E_{0x}^2 - E_{0y}^2. \quad (\text{B.29})$$

$$S_2 = 2E_{0x}E_{0y} \cos \delta. \quad (\text{B.30})$$

$$S_3 = 2E_{0x}E_{0y} \sin \delta. \quad (\text{B.31})$$

Los cuáles son los parámetros de Stokes obtenidos formalmente de la elipse de polarización.

B.3. Medición de los parámetros de Stokes

Consideramos la medición clásica de los parámetros de polarización de Stokes utilizando una placa de cuarto de onda y un polarizador. Los parámetros de Stokes se pueden medir como se muestra en la figura 6-1. Un haz óptico se caracteriza por sus cuatro parámetros de Stokes S_0, S_1, S_2 y S_3 . El vector Stokes de este haz está representado por.

$$S = \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.32})$$

La matriz de Mueller de una placa con su eje rápido en 0° es.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}. \quad (\text{B.33})$$

El vector Stokes S' del haz que emerge de la placa se obtiene mediante la multiplicación de (B.32) y (B.33), entonces

$$S' = \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \cos \phi + S_3 \sin \phi \\ -S_2 \sin \phi + S_3 \cos \phi \end{pmatrix}. \quad (\text{B.34})$$

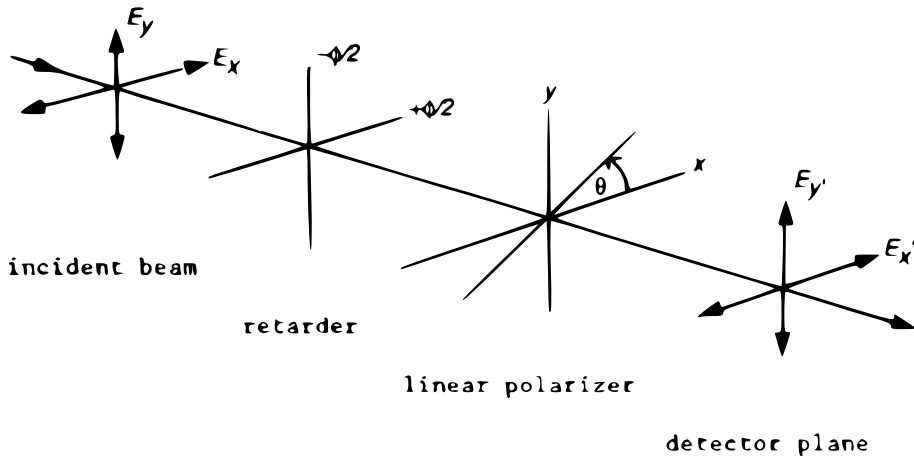


Figura B.1: Diagrama experimental para la medición clásica de los parámetros de Stokes.

La matriz de Mueller de un polarizador lineal ideal con su eje de transmisión en un ángulo θ es

$$M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \cos 2\theta & \sin 2\theta & 0 \\ \cos 2\theta & \cos^2 2\theta & \sin 2\theta \cos 2\theta & 0 \\ \sin 2\theta & \sin 2\theta \cos 2\theta & \sin^2 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.35})$$

APÉNDICE B. PARÁMETROS DE STOKES
B.3. MEDICIÓN DE LOS PARÁMETROS DE STOKES

El vector Stokes S del haz que emerge del polarizador lineal se encuentra multiplicando (B.34) por (B.35). Sin embargo, solo nos interesa la intensidad I , que es el primer parámetro de Stokes S''_0 del haz incidente en el detector óptico que se muestra en la figura B.1. Multiplicando la primera fila de (B.34) con (B.35), encontramos la intensidad del haz que emerge de la combinación placa-polarizador

$$I(\theta, \phi) = \frac{1}{2} [S_0 + S_1 \cos 2\theta + S_2 \sin 2\theta \cos \phi + S_3 \sin 2\theta \sin \phi]. \quad (\text{B.36})$$

La ecuación (B.36) es la conocida relación de intensidad de Stokes para los parámetros de Stokes. Los parámetros de Stokes se encuentran a partir de las siguientes condiciones en θ y ϕ .

$$S_0 = I(0^\circ, 0^\circ) + I(90^\circ, 0^\circ). \quad (\text{B.37})$$

$$S_1 = I(0^\circ, 0^\circ) - I(90^\circ, 0^\circ). \quad (\text{B.38})$$

$$S_2 = 2I(45^\circ, 0^\circ) - S_0. \quad (\text{B.39})$$

$$S_3 = 2I(45^\circ, 90^\circ) - S_0. \quad (\text{B.40})$$

En la práctica, S_0 , S_1 y S_2 se miden fácilmente quitando el retardador de cuarto de onda ($\phi = 90$) del eje óptico. Sin embargo, para medir S_3 , la placa debe reinsertarse en el eje óptico con el polarizador lineal ajustado a $\theta = 45^\circ$.

Apéndice C

Publicaciones

ARTÍCULOS EN REVISTAS

Andrey S. Ostrovsky, Joaquín García-García, Carolina Rickenstorff-Parrao, and Miguel A. Olvera-Santamaría, Partially coherent diffraction-free vortex beams with a Bessel-mode structure, *Opt. Lett.* 42, 5182-5185 (2017)

Olvera Santamaría, M.A. Rodríguez Garcapiña, J.L. García García, J Ostrovsky, A.S.. Generation of a partially coherent secondary source with Bessel-mode vortex structure by liquid crystal spatial light modulator. *Optics Communications*. Vol. 439, 312-316, (2019).

J. García García and M. Á. Olvera Santamaría and A. S. Ostrovsky, Effect of primary illumination apodization on generating the Bessel mode vortex beams, *Journal of Modern Optics*, vol. 67, num. 2, 167-172, (2020).

M.Á. Olvera-Santamaría, J. García-García, A. Tlapale-Aguilar, J. Silva-Barranco, C. Rickenstorff-Parrao, A.S. Ostrovsky, Cylindrically polarized perfect optical vortex: Generation and focusing properties, *Optics Communications*, Vol. 467, 125693, (2020).

Optics Letters

Partially coherent diffraction-free vortex beams with a Bessel-mode structure

ANDREY S. OSTROVSKY,* JOAQUÍN GARCÍA-GARCÍA, CAROLINA RICKENSTORFF-PARRAO, AND MIGUEL A. OLVERA-SANTAMARÍA

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla 72000, Mexico

*Corresponding author: andreyo@fcfm.buap.mx

Received 4 October 2017; revised 11 November 2017; accepted 13 November 2017; posted 14 November 2017 (Doc. ID 308573); published 11 December 2017

A new family of partially coherent beams carrying optical vortices is introduced. Any member of this family represents an incoherent superposition of fully coherent orthogonal Bessel modes with the same helical wavefront and is notable for its diffraction-free propagation. It is shown analytically and experimentally that such beams can be approximately generated in the Fourier-transforming optical system with a computer-controlled liquid-crystal spatial light modulator. © 2017 Optical Society of America

OCIS codes: (050.4865) Optical vortices; (030.0030) Coherence and statistical optics; (030.4070) Modes; (140.7010) Laser trapping.

<https://doi.org/10.1364/OL.42.005182>

Recently, we introduced the concept of the “perfect vortex” [1], defined as an optical beam with the transverse distribution of complex amplitude given by the ideal model

$$g_\nu(\boldsymbol{\rho}) = \delta(\rho - \rho_0) \exp(i\nu\theta), \quad (1)$$

where $\delta(\rho)$ is the Dirac δ -function, $\boldsymbol{\rho} = (\rho, \theta)$, ρ_0 is the radius of the vortex, and $\nu \geq 1$ is an integer, known as the topological charge of the vortex. It was shown that the perfect vortex can be represented alternatively as a coherent superposition (the sum of weighted amplitudes) of orthogonal Bessel modes with the same azimuthal phase, namely,

$$g_\nu(\boldsymbol{\rho}) \propto \exp(i\nu\theta) \sum_n \frac{J_\nu(\alpha_{\nu,n}\rho_0/a)}{J_{\nu+1}^2(\alpha_{\nu,n})} J_\nu\left(\alpha_{\nu,n} \frac{\rho}{a}\right), \quad (2)$$

where $J_\nu(\cdot)$ is the Bessel function of the first kind and order ν , $\alpha_{\nu,n}$ is its n th zero, and a is the upper limit of the radial coordinate ρ . This representation permitted us to propose a rather simple technique for generating the perfect vortex using the Fourier-transforming optical system with a computer-controlled liquid-crystal (LC) spatial light modulator (SLM) at its input. It must be specially noted that the perfect vortex defined by Eq. (1) has the perfect form only in the focal plane of the Fourier lens and undergoes diffraction spread, losing its perfection, when propagating into the half-space $z > 0$. This fact significantly restricts the efficiency of a perfect vortex in

the 3D optical trapping [2,3]. Here we introduce a new family of optical vortices that is not perfect in the sense attributed by Eq. (1), but possessed another remarkable property, namely, they propagate without diffraction spread. As will be shown further, any member of this family is a partially coherent beam which can be represented as an incoherent superposition (the sum of weighted intensities) of fully coherent orthogonal Bessel modes of arbitrary order, with the same helical wavefront.

To start, we recall that the cross-spectral density $W(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2)$ of a partially coherent planar source occupying a finite domain D , under rather general conditions, can be represented in the form of the Mercer expansion [4] as

$$W(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2) = \sum_n \lambda_n \varphi_n^*(\boldsymbol{\rho}_1) \varphi_n(\boldsymbol{\rho}_2), \quad (3)$$

where λ_n are the eigenvalues and $\varphi_n(\boldsymbol{\rho})$ are the eigenfunctions of the homogeneous Fredholm integral equation of the second kind:

$$\int_D W(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2) \varphi_n(\boldsymbol{\rho}_1) d\boldsymbol{\rho}_1 = \lambda_n \varphi_n(\boldsymbol{\rho}_2). \quad (4)$$

It is important to stress that all the eigenvalues λ_n are necessarily non-negative, and the eigenfunctions $\varphi_n(\boldsymbol{\rho})$ can be chosen to form an orthonormal set. We note also that each term of the sum in Eq. (3) may be associated with a completely coherent mode $\varphi_n(\boldsymbol{\rho})$ of the field. That is why Eq. (3) is often referred to as the coherent-mode representation of a partially coherent field.

Now let us consider a stochastic field, each realization of which has the form

$$U(\boldsymbol{\rho}) = \sum_n c_n \varphi_n(\boldsymbol{\rho}), \quad (5)$$

where $\varphi_n(\boldsymbol{\rho})$, as before, are the modes of the field, and c_n are some random variables that will be specified later. The cross-spectral density of such a field can be written as

$$\begin{aligned} W(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2) &= \langle U^*(\boldsymbol{\rho}_1) U(\boldsymbol{\rho}_2) \rangle \\ &= \sum_n \sum_m \langle c_n^* c_m \rangle \varphi_n^*(\boldsymbol{\rho}_1) \varphi_m(\boldsymbol{\rho}_2), \end{aligned} \quad (6)$$

where the angle brackets denote the statistical averaging over an ensemble of random realizations. Next, we chose the modes

$\varphi_n(\rho)$ to form the orthonormal set of Bessel functions [5] with the same azimuthal exponential factor, i.e.,

$$\varphi_n(\rho) = \frac{J_\nu(\alpha_{\nu,n} \frac{\rho}{a})}{\sqrt{\pi a} J_{\nu+1}(\alpha_{\nu,n})} \exp(i\nu\theta), \quad 0 \leq \rho \leq a. \quad (7)$$

Besides, we assume that the random variables c_n are chosen to satisfy the condition $\langle c_n^* c_m \rangle = \lambda_n \delta_{n,m}$, where $\delta_{n,m}$ is the Kronecker symbol. We note that this condition can be satisfied, for example, by taking $c_n = \sqrt{\lambda_n} \exp(i\psi_n)$, where ψ_n are statistically independent random variables uniformly distributed in the interval $[0, 2\pi]$.

On substituting from Eq. (7) with an accepted condition into Eq. (6), we obtain

$$W(\rho_1, \rho_2) = \sum_n \lambda_n \frac{J_\nu(\alpha_{\nu,n} \frac{\rho_1}{a}) J_\nu(\alpha_{\nu,n} \frac{\rho_2}{a})}{\pi a^2 J_{\nu+1}^2(\alpha_{\nu,n})} \times \exp[i\nu(\theta_2 - \theta_1)], \quad (8)$$

which is just the coherent mode representation of the field under consideration. The corresponding spectral intensity $S(\rho)$ of this field may be obtained from Eq. (8) by putting $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ as follows:

$$S(\rho) = \sum_n \lambda_n \frac{J_\nu^2(\alpha_{\nu,n} \frac{\rho}{a})}{\pi a^2 J_{\nu+1}^2(\alpha_{\nu,n})}. \quad (9)$$

As is well known (see, e.g., Ref. [6]), the coherence properties of the light are characterized by the distribution of eigenvalues λ_n . The more uniform the spread of this distribution, the more incoherent the light. On the other hand, the more the concentration of the eigenvalue distribution about the maximum value, the more the coherence of the light. Hence, the field given by Eq. (8) with the arbitrary values of λ_n can be identified as a partially coherent Bessel-mode vortex beam.

We realized the numerical simulation of the obtained theoretical results by avoiding the uncertainty of λ_n with a particular choice $\lambda_n = \pi a^2 J_{\nu+1}^2(\alpha_{\nu,n})$. In this case, Eqs. (8) and (9) take a simpler form, respectively,

$$W(\rho_1, \rho_2) = e^{i\nu(\theta_2 - \theta_1)} \sum_n J_\nu\left(\alpha_{\nu,n} \frac{\rho_1}{a}\right) J_\nu\left(\alpha_{\nu,n} \frac{\rho_2}{a}\right), \quad (10)$$

$$S(\rho) = \sum_n J_\nu^2\left(\alpha_{\nu,n} \frac{\rho}{a}\right). \quad (11)$$

The normalized spectral intensity calculated from Eq. (11) for three different values of topological charge and 30 zeros of the Bessel function is displayed in Fig. 1. As can be seen from this figure, the considered field has the total intensity profile of an annular shape with a dark central region whose radius rises with the increase of topological charge ν . The external zero-intensity ring corresponds to the upper limit of radial coordinate ρ , and the small irregularity of the calculated curves relative to the continuous form is due to the finite-sum approximation of Eq. (11).

Consider now the propagation of the field given by the cross-spectral density (8) in the positive direction z normal to the plane (ρ, θ) . To do this, we will find the cross-spectral density $W(\rho_1, \rho_2, z_0)$ in some plane $z = z_0$, using its coherent mode representation with the new modes $\varphi_n(\rho, z_0)$, i.e.,

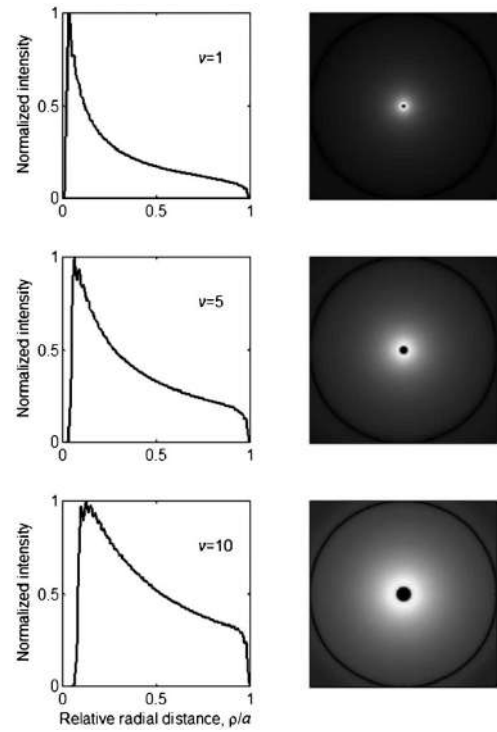


Fig. 1. Normalized spectral intensity $S(\rho)$ and corresponding 2D patterns for different values of topological charge ν .

$$W(\rho_1, \rho_2, z_0) = \sum_n \lambda_n \varphi_n^*(\rho_1, z_0) \varphi_n(\rho_2, z_0). \quad (12)$$

Each new mode $\varphi_n(\rho, z_0)$ can be written in the form (Ref. [7], Eqs. (3)–(69)) adapted to cylindrical coordinates (ρ, θ, z) :

$$\varphi_n(\rho, z_0) = \int_0^{2\pi} \int_0^{k/2\pi} \tilde{\varphi}_n(r, \phi, 0) \exp\left(iz_0 \sqrt{k^2 - (2\pi r)^2}\right) \times \exp[i2\pi r \rho \cos(\phi - \theta)] r dr d\phi, \quad (13)$$

where

$$\tilde{\varphi}_n(r, \phi, 0) = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \varphi_n(\rho, \theta, 0) e^{-i2\pi r \rho \cos(\phi - \theta)} \rho d\rho d\theta \quad (14)$$

is the angular spectrum of the initial mode $\varphi_n(\rho, 0)$ given in polar coordinates (r, ϕ) , and k is the wave number. Substituting for $\varphi_n(\rho, 0)$ from Eq. (7) into Eq. (14) with due regard for Bessel relations [5],

$$J_\nu(x) = \frac{i^{-\nu}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(i\nu\psi) \exp(ix \cos \psi) d\psi, \quad (15)$$

$$\alpha \int_0^\infty J_\nu(\alpha\rho) J_\nu(\alpha'\rho) \rho d\rho = \delta(\alpha - \alpha'), \quad (16)$$

as well as for the sifting property of the Dirac δ -function, we find

$$\tilde{\varphi}_n(r, \phi, 0) = \frac{i^\nu \exp(i\nu\phi)}{2\pi a J_{\nu+1}(\alpha_{\nu,n})} \delta\left(r - \frac{\alpha_{\nu,n}}{2\pi a}\right). \quad (17)$$

Then, substituting for $\tilde{\varphi}_n(r, \phi, 0)$ from Eq. (17) into Eq. (13), by analogy with the foregoing, we obtain

$$\varphi_n(\boldsymbol{\rho}, z_0) = \frac{e^{iz_0\sqrt{k^2 - (\alpha_{\nu,n}/a)^2}}}{\sqrt{\pi a} J_{\nu+1}(\alpha_{\nu,n})} J_{\nu}\left(\alpha_{\nu,n} \frac{\rho}{a}\right) e^{i\nu\theta}. \quad (18)$$

Finally, recalling Eq. (12), we find

$$W(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, z_0) = e^{i\nu(\theta_2 - \theta_1)} \sum_n \lambda_n \frac{J_{\nu}\left(\alpha_{\nu,n} \frac{\rho_1}{a}\right) J_{\nu}\left(\alpha_{\nu,n} \frac{\rho_2}{a}\right)}{\pi a^2 J_{\nu+1}^2(\alpha_{\nu,n})}. \quad (19)$$

On comparing Eqs. (8) and (19), one may see that

$$W(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, z_0) = W(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, 0), \quad (20)$$

the result, which defines the concept of propagation-invariant, or diffraction-free, partially coherent field [8]. Thus, Eq. (8) defines a family of diffraction-free vortex beams.

Now we will show that the diffraction-free vortex beam given by cross-spectral density (10) can be approximately generated in the Fourier-transforming optical system with the computer-controlled SLM operating in phase-only modulation mode.

Let us assume that the control video signal applied to the SLM represents a set of thin enough concentric rings which can be approximated by the function

$$T(r, \phi) = \sum_{n=1}^N \delta\left(r - \frac{\alpha_{\nu,n}}{\alpha_{\nu,N}} R\right) [\nu(\phi + \psi_n)], \quad (21)$$

and which are separated by a set of complementary concentric rings:

$$T'(r, \phi) = (k/f)x'_0 x \left[1 - \sum_{n=1}^N \delta\left(r - \frac{\alpha_{\nu,n}}{\alpha_{\nu,N}} R\right) \right]. \quad (22)$$

In Eqs. (21) and (22), R is the radius of the active zone of SLM, f is the focal length of the Fourier-transforming lens, and ψ_n are the random variables uniformly distributed in the range $[0, 2\pi]$, which change independently in different principal rings with the frame frequency of the control video signal, providing the destruction of the field coherence in the radial direction. It is worth noting that the destruction of coherence in the radial direction can be made alternatively by a rotating ground-glass diffuser placed before the SLM, as it was done in [9–11]. However, such a technique does not provide the desired complete statistical independence of SLM transmittance in different principal rings. This can be explained by the existence of Gaussian correlation dependence associated with the roughness of the used ground-glass diffuser (for more details, see Ref. [12]). Moreover, a rotating ground-glass diffuser parallel with the reduction of coherence in the radial direction also causes the crucially undesirable, in our case, the reduction of coherence in the azimuthal direction. Therefore, we give preference to the proposed technique of radial coherence destruction. Then, the optical signal at the output of SLM takes the form

$$U(r, \phi) = \exp(i\nu\phi) \sum_{n=1}^N \exp(i\nu\psi_n) \delta\left(r - \frac{\alpha_{\nu,n}}{\alpha_{\nu,N}} R\right) + \exp[i(k/f)x'_0 x] \left[1 - \sum_{n=1}^N \delta\left(r - \frac{\alpha_{\nu,n}}{\alpha_{\nu,N}} R\right) \right]. \quad (23)$$

We note that the phase factor $\exp[i(k/f)x'_0 x]$ in Eq. (23) results in the deviation of parasite light (light passing through the complimentary rings) from the axial direction and, hence, can be omitted in our further consideration. The optical signal

centered at the on-axis position of the output plane of the considered optical system can be found as the Fourier transform of the useful part of Eq. (23). Recalling integral representation (15) and sifting property of the Dirac δ -function, we obtain

$$U(\rho, \theta) \propto e^{i\nu\theta} \sum_{n=1}^N e^{i\nu\psi_n} J_{\nu}\left(\frac{k\alpha_{\nu,n} R \rho}{f\alpha_{\nu,N}}\right). \quad (24)$$

Respectively,

$$W(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2) \propto \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N J_{\nu}\left(\frac{k\alpha_{\nu,n} R \rho_1}{f\alpha_{\nu,N}}\right) J_{\nu}\left(\frac{k\alpha_{\nu,m} R \rho_2}{f\alpha_{\nu,N}}\right) \times e^{i\nu(\theta_2 - \theta_1)} \langle e^{-i\nu\psi_n} e^{i\nu\psi_m} \rangle. \quad (25)$$

Finally, taking into account that $\langle e^{-i\nu\psi_n} e^{i\nu\psi_m} \rangle = \delta_{n,m}$ and denoting $f\alpha_{\nu,N}/kR = a$, we can rewrite Eq. (25) as follows:

$$W(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2) \propto e^{i\nu(\theta_2 - \theta_1)} \sum_{n=1}^N J_{\nu}\left(\alpha_{\nu,n} \frac{\rho_1}{a}\right) J_{\nu}\left(\alpha_{\nu,n} \frac{\rho_2}{a}\right). \quad (26)$$

As can be seen, Eq. (26) is a finite sum approximation of Eq. (10).

To verify the proposed technique in practice, we realized a physical experiment using the setup sketched schematically in Fig. 2. In this experiment, we employed the computer-controlled phase-only reflective LC SLM Pluto-Vis from HoloEye Photonics AG with 1920×1080 pixel resolution and the radius of the active zone of 4.32 mm. The control video signals were generated using Matlab routines and displayed onto the LC panel with accuracy of 256 gray levels and a frame frequency of 60 Hz in the SVGA mode. As the primary source, we used a horizontally polarized He–Ne laser beam expanded to a 50 mm size. The Fourier-transforming lens had a focal distance of 1 m and a radius of 25 mm. To register the results, we employed a charge-coupled device camera with 840×640 pixel resolution.

In our experiment, we generated the vortex beam of order $\nu = 10$ with cross-spectral density approximately given by Eq. (26). When doing this, we used 30 principal annular zones of LC-SLM each of 14 pixels width and registered the transversal spectral intensity at different distances from a back focal plane of the Fourier lens. We limited the maximum value of z_0 to 1 m in accordance with the relation $z_{\max} \leq f r_0 / R$, where f and r_0 are the focal length and the radius of the Fourier-transforming lens, respectively, while R is the radius of the active zone of LC-SLM (see, for example, Ref. [8]).

The results obtained in the experiment are shown in Fig. 3. As can be seen from this figure, the generated vortex beam, in the main, exhibits a non-diffracting behavior along the

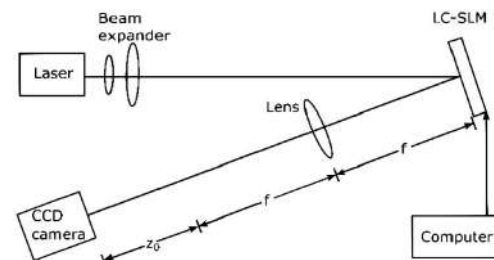


Fig. 2. Experimental setup used for generating the diffraction-free vortex beam.

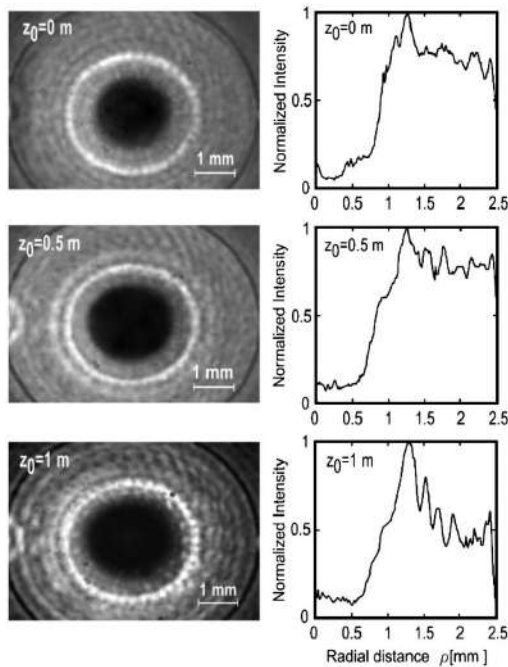


Fig. 3. Registered 2D intensity patterns and the corresponding intensity profiles for different values of z_0 .

propagation coordinate (the radius of the principal bright ring remains constant with the increase of z_0), although the quality of the obtained vortex turns out somewhat worse than the predicted one (see Fig. 1). The relatively large irregularity of the registered intensity in the radial direction (the parasite lateral rings) and the weak light inside the vortex are due to the systematic error caused by an approximate character of equality (21). The clearly seen periodical structure in the azimuthal direction is due to the instrumental error caused by the parasite intensity variations corresponding to the 2π phase jumps of the LC-SLM modulation characteristic.

In conclusion, we have introduced a new family of partially coherent beams carrying optical vortices. Any member of this

family represents an incoherent superposition of fully coherent orthogonal Bessel modes with the same helical wavefront and is notable for its diffraction-free propagation. It is worth noting here that not so long ago a resembling class of vortex beams, but with Laguerre–Gauss modes instead of Bessel modes, was introduced by Ponomarenko [13]. However, we consider that the family of diffraction-free vortex beams introduced here is much simpler in its practical realization and, hence, can be widely adopted in 3D optical trapping and manipulation of small particles.

Acknowledgment. The authors thank Dr. Stefan Osten from HoloEye Photonics AG for his valuable recommendations relative to the characterization of LC-SLM Pluto-Vis.

REFERENCES

1. A. S. Ostrovsky, C. Rickenstorff-Parrao, and V. Arrizón, *Opt. Lett.* **38**, 534 (2013).
2. M. Chen, M. Mazilu, Y. Arita, E. M. Wright, and K. Dholakia, *Opt. Lett.* **38**, 4919 (2013).
3. Y. Arita, M. Chen, E. Wright, and K. Dholakia, *J. Opt. Soc. Am. B* **34**, C14 (2017).
4. L. Mandel and E. Wolf, *Optical Coherence and Quantum Optics* (Cambridge University, 1995).
5. G. B. Arfken and H. J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists*, 3rd. ed. (Harcourt/Academic, 2001).
6. H. M. Ozactas, T. C. Gulcu, and M. A. Kutay, *J. Opt. Soc. Am. A* **33**, 2115 (2016).
7. J. W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics* (McGraw-Hill, 1996).
8. J. Turunen, A. Vasara, and A. Friberg, *J. Opt. Soc. Am. A* **8**, 282 (1991).
9. T. Alieva, J. A. Rodrigo, A. Cámara, and E. Abramochkin, *J. Opt. Soc. Am. A* **30**, 2237 (2013).
10. Y. Chen, S. A. Ponomarenko, and Y. Cai, *Sci. Rep.* **7**, 39957 (2017).
11. Y. Yang, M. Chen, M. Mazilu, A. Mourka, Y. D. Liu, and K. Dholakia, *New J. Phys.* **15**, 113053 (2013).
12. A. S. Ostrovsky, G. Rodríguez-Zurita, C. Meneses-Fabián, M. A. Olvera-Santamaría, and C. Rickenstorff-Parrao, *Opt. Express* **18**, 12864 (2010).
13. S. Ponomarenko, *J. Opt. Soc. Am. A* **18**, 150 (2001).



Generation of a partially coherent secondary source with Bessel-mode vortex structure by liquid crystal spatial light modulator

M.A. Olvera Santamaría, J.L. Rodríguez Garciapiña, J. García García, A.S. Ostrovsky*

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla 72000, México

ARTICLE INFO

Keywords:

Coherent-mode representation
Bessel modes
Optical vortices

ABSTRACT

We introduce a technique for generating a class of partially coherent secondary sources comprising a Bessel-mode structure and optical vortices. This technique allows to define the modal structure of the source as an incoherent superposition of completely coherent orthonormal Bessel modes. We show numerically and experimentally that the proposed technique can be realized in a Fourier transforming optical system incorporating a computer-controlled liquid crystal spatial light modulator. The degree of coherence can be physically controlled by changing the width of the illuminating primary source. Moreover, we show that a field with reduced coherence can generate a vortex source with reduced inner radius, instead of increased, for any given topological charge.

1. Introduction

In some optical applications it appears preferable to use the partially coherent illumination with specific statistical properties. For example, such an illumination allows to increase the spatial resolution in optical imaging [1], to obtain the effects of diffraction-free propagation and self-reconstruction in beam shaping [2,3], to enhance the depth of focusing in 3-D optical trapping and micromanipulation [4]. Unfortunately, at present there do not exist commercially available partially coherent optical sources possessing variable statistical properties. Thus, the problem of experimental creating the secondary partially coherent source with desired statistical properties arises.

To solve the mentioned problem, the following three approaches can be used. In the first approach one can start from a completely incoherent commercially available primary source and try to get the desired result due to the so-called correlation-induced changes of the field on propagation [5]. In the second approach the desired result can be obtained due to modulation of the completely coherent commercially available primary source by using a dynamic random phase screen [6]. Unfortunately, both these approaches do not provide free choice of the statistical structure of the generated secondary source. In this sense the third approach appears to be more attractive. This approach consists in generating the desired source in the form of an incoherent superposition of weighted completely coherent physically realizable modes [4,7]. By changing the set of coherent modes one can vary the statistical structure of the generated source and by changing the mode weights one can vary its degree of coherence.

In the present paper we use the third approach to generate a specific class of partially coherent secondary sources, namely the vortex fields

with Bessel-mode structure. We propose a rather simple technique for practical generation of Bessel-mode vortex sources and illustrate its efficiency with experimental results. By doing so we show, for the first time to the best of our knowledge, that a field with reduced coherence can generate a vortex source with reduced inner radius, instead of increased, for any given topological charge.

2. Secondary Bessel-mode vortex source

To start, we recall basic definitions of the coherence theory in space-frequency domain [8]. For brevity we omit the explicit dependence of the considered quantities on optical frequency.

The second-order statistical properties of a random planar source (primary or secondary one) can be completely characterized by the cross spectral density

$$W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle E^*(\mathbf{r}_1)E(\mathbf{r}_2) \rangle, \quad (1)$$

where $E(\mathbf{r})$ is the instantaneous amplitude of the electrical field at a specific point \mathbf{r} , asterisk denotes the complex conjugate, and the angle brackets stand for the average of the statistical ensemble. For $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}$ the cross-spectral density turns into the spectral density

$$S(\mathbf{r}) = W(\mathbf{r}, \mathbf{r}) = \langle |E(\mathbf{r})|^2 \rangle, \quad (2)$$

which has a sense of mean power or intensity of the source.

Under rather general conditions the cross-spectral density $W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ can be represented in the form of Mercer expansion as follows [8]:

$$W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sum_n^{\infty} \lambda_n \varphi_n^*(\mathbf{r}_1) \varphi_n(\mathbf{r}_2), \quad (3)$$

* Corresponding author.

E-mail address: andreyo@fcfm.buap.mx (A.S. Ostrovsky).

where λ_n are the eigenvalues and $\varphi_n(\mathbf{r})$ are the eigenfunctions of the homogeneous Fredholm integral equation

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)\varphi_n(\mathbf{r}_1)d\mathbf{r}_1 = \lambda_n\varphi_n(\mathbf{r}_2). \quad (4)$$

It is important to stress that all the eigenvalues λ_n are necessarily real and non-negative, i.e.

$$\lambda_n^* = \lambda_n \geq 0, \quad (5)$$

and eigenfunctions $\varphi_n(\mathbf{r})$ can be chosen to form an orthonormal set, i.e.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n^*(\mathbf{r})\varphi_m(\mathbf{r})d\mathbf{r} = \delta_{nm}, \quad (6)$$

where δ_{nm} is the Kronecker symbol. We note also that each term of the sum in Eq. (3) may be associated with a completely coherent mode of the source. That is why Eq. (3) is often referred to as the coherent-mode representation of a partially coherent source. As is well known (see, e.g., Ref. [9]) the coherence properties of the light are characterized by the distribution of eigenvalues λ_n . The more uniform the spread of this distribution, the more incoherent the light. On the other hand, the more the concentration of the eigenvalue distribution about the maximum value, the more the coherence of the light. The degree of coherence of the source can be characterized numerically as [9,10]

$$\gamma = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n=1}^N \lambda_n^2}{\left[\sum_{n=1}^N \lambda_n\right]^2}. \quad (7)$$

For a very incoherent source $\gamma \approx 0$, while for a very coherent source $\gamma \approx 1$.

The coherent mode representation (3) justifies the third approach to generate the desired partially coherent source mentioned in Introduction. Indeed, one can generate certain set of completely coherent and statistically independent modes $\psi_n(\mathbf{r})$ and then superimpose them with some weights μ_n in the appropriate optical system. The obtained, in such a way, secondary source will be characterized by the cross-spectral density

$$W'(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sum_n \mu_n \psi_n^*(\mathbf{r}_1)\psi_n(\mathbf{r}_2). \quad (8)$$

Multiplying both sides of Eq. (8) and integrating them over \mathbf{r}_1 with due regard for the orthonormality of modal functions $\psi_n(\mathbf{r})$, one can show that μ_n and $\psi_n(\mathbf{r})$ are the eigenvalues and eigenfunctions of the Fredholm integral equation

$$\int_{-\infty}^{\infty} W'(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)\psi_n(\mathbf{r}_1)d\mathbf{r}_1 = \mu_n\psi_n(\mathbf{r}_2). \quad (9)$$

Hence, Eq. (8) is the coherent-mode representation which describes a certain class of partially coherent sources corresponding to the chosen set of modal functions $\psi_n(\mathbf{r})$. By changing the distribution of μ_n one can control the degree of coherence of the generated secondary source in accordance with Eq. (7).

We chose the set of modal functions of the form

$$\psi_n(\mathbf{r}) = \frac{J_\nu(\alpha_{\nu,n}r/r_0)}{\sqrt{\pi}r_0 J_{\nu+1}(\alpha_{\nu,n})} \exp(i\nu\theta), \quad 0 \leq r \leq r_0, \quad (10)$$

where $J_\nu(\cdot)$ is the Bessel function of the first kind and order ν , $\alpha_{\nu,n}$ is the n th zero of this function, $\mathbf{r} = (r, \theta)$ are the polar coordinates in the source plane, r_0 is the upper limit of the radial coordinate and ν is some integer. It can be readily shown (see, e.g. Ref. [11]) that functions (10) form a set of orthonormal functions. It must be noticed also that the exponential factor $\exp(i\nu\theta)$ means that each mode $\psi_n(\mathbf{r})$ has a helicoidal phase known as the optical vortex with topological charge ν . Hence, the cross-spectral density

$$W'(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sum_n \mu_n \frac{J_\nu(\alpha_{\nu,n}r_1/r_0)J_\nu(\alpha_{\nu,n}r_2/r_0)}{\pi r_0^2 J_{\nu+1}^2(\alpha_{\nu,n})} \exp[i\nu(\theta_2 - \theta_1)], \quad (11)$$

describes certain class of partially coherent secondary sources which can be called as Bessel-mode vortex sources.

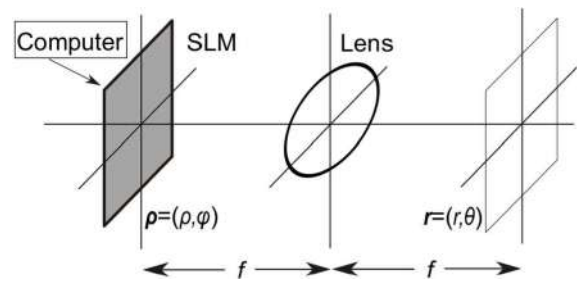


Fig. 1. Optical system for generating the Bessel-mode vortex source.

3. Technique of generation

Here we show that the secondary source with the cross-spectral density given by Eq. (11) can be approximately generated by means of a single lens optical system incorporating a computer-controlled Spatial Light Modulator (SLM) operating in phase-only modulation mode (Fig. 1).

Let us assume that the active zone of the SLM represents a set of N well separated concentric rings each of radius ρ_n and width $\Delta\rho_n$ with amplitude transmittance inside given by

$$t_n(\boldsymbol{\rho}) = \exp[i(\nu\varphi + \psi_n)], \quad (12)$$

where $\boldsymbol{\rho} = (\rho, \varphi)$, ν is an integer, and ψ_n are the random variables uniformly distributed in the range $[0, 2\pi]$, which change independently in different rings with the frame frequency of the control video signal applied to SLM. Let us assume also that the complementary rings between the principal ones have the common amplitude transmittance given by

$$t'(\boldsymbol{\rho}) = \exp\left(i\frac{k}{f}x'_0x\right), \quad (13)$$

where k is the wave number of illumination, f is the focal length of the lens, and x'_0 is a properly choosed constant. We note that the transmittance $t'_n(\boldsymbol{\rho})$ results in the deviation of parasite light (light passing through the complementary rings) from the axial direction and, hence, can be omitted from our further consideration.

Now, we take $\rho_n = \alpha_{\nu,n}R/\alpha_{\nu,N}$, and $\Delta\rho_n = b/\rho_n$, with R being the radius of the active zone of SLM. Then, assuming that the principal modulating rings are thin enough ($b \ll 1$), the following approximation for the total amplitude transmittance of SLM can be used:

$$t(\boldsymbol{\rho}) \propto \sum_{n=1}^N \frac{1}{\alpha_{\nu,n}} \delta\left(\rho - \frac{\alpha_{\nu,n}}{\alpha_{\nu,N}}R\right) \exp[i(\nu\varphi + \psi_n)]. \quad (14)$$

In Eq. (14) $\delta(\cdot)$ is the Dirac δ -function and $\alpha_{\nu,n}$ has the same meaning as in Eq. (10).

Let the SLM being illuminated by the completely coherent Gaussian beam with variable spot size at the waist σ . Then, the optical field immediately after the SLM can be written as

$$E(\boldsymbol{\rho}) = \exp\left(-\frac{\rho^2}{\sigma^2}\right) \sum_{n=1}^N \frac{1}{\alpha_{\nu,n}} \delta\left(\rho - \frac{\alpha_{\nu,n}}{\alpha_{\nu,N}}R\right) \exp[i(\nu\varphi + \psi_n)]. \quad (15)$$

As is well known [12], the fields in the front and the back focal planes of the converging lens are related by the 2-D Fourier transform which can be written in polar coordinates as

$$E(\mathbf{r}) = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} E(\rho, \varphi) \exp\left[-i\frac{k}{f}\rho r \cos(\varphi - \theta)\right] \rho d\rho d\varphi. \quad (16)$$

On substituting from Eq. (15) into Eq. (16) with due regard for the filtering property of δ -function and the Bessel relation [11]

$$J_\nu(x) = \frac{i^{-\nu}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(i\nu\varphi) \exp(ix \cos \varphi) d\varphi, \quad (17)$$

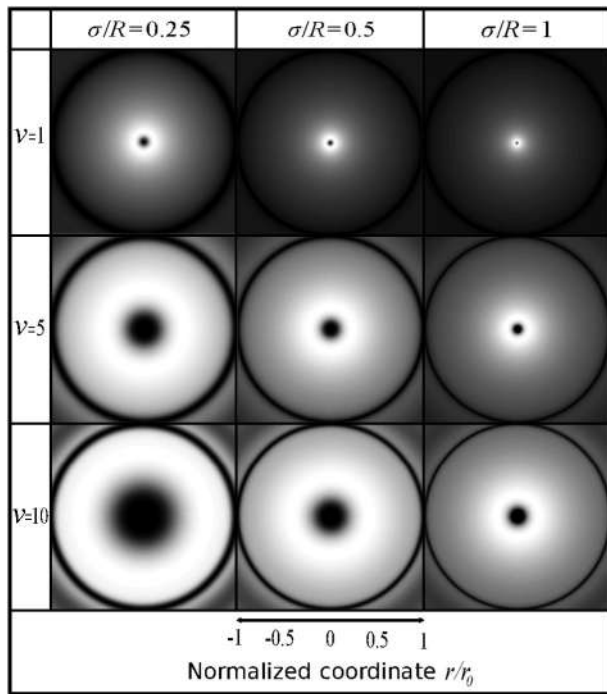


Fig. 2. Spectral density calculated from Eq. (23) for several combinations of ν and ratio σ/R .

we obtain

$$E(\mathbf{r}) \propto \exp(i\nu\theta) \sum_{n=1}^N \exp(i\psi_n) \exp\left(-\frac{\alpha_{v,n}}{\alpha_{v,N}} \frac{R}{\sigma}\right)^2 J_\nu\left(\frac{k}{f} \frac{\alpha_{v,n}}{\alpha_{v,N}} Rr\right). \quad (18)$$

In correspondence with definition (1) the cross-spectral density of the field at the output of optical system is

$$W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \propto \exp[i\nu(\theta_2 - \theta_1)] \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \langle \exp(-i\psi_n) \exp(i\psi_m) \rangle \times \exp\left[-\left(\frac{\alpha_{v,n}}{\alpha_{v,N}} \frac{R}{\sigma}\right)^2\right] \exp\left[-\left(\frac{\alpha_{v,m}}{\alpha_{v,N}} \frac{R}{\sigma}\right)^2\right] \times J_\nu\left(\frac{k}{f} \frac{\alpha_{v,n}}{\alpha_{v,N}} Rr_1\right) J_\nu\left(\frac{k}{f} \frac{\alpha_{v,m}}{\alpha_{v,N}} Rr_2\right). \quad (19)$$

Taking into account that, in view of the statistical independence of random variables ψ_n and ψ_m ,

$$\langle \exp(-i\psi_n) \exp(i\psi_m) \rangle = \delta_{nm}, \quad (20)$$

we have

$$W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \propto \exp[i\nu(\theta_2 - \theta_1)] \sum_{n=1}^N \exp\left[-2\left(\frac{\alpha_{v,n}}{\alpha_{v,N}} \frac{R}{\sigma}\right)^2\right] \times J_\nu\left(\frac{k}{f} \frac{\alpha_{v,n}}{\alpha_{v,N}} Rr_1\right) J_\nu\left(\frac{k}{f} \frac{\alpha_{v,n}}{\alpha_{v,N}} Rr_2\right), \quad (21)$$

or, introducing $r_0 = f\alpha_{v,N}/kR$,

$$W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \propto \exp[i\nu(\theta_2 - \theta_1)] \sum_{n=1}^N \exp\left[-2\left(\frac{\alpha_{v,n}}{\alpha_{v,N}} \frac{R}{\sigma}\right)^2\right] \times J_\nu\left(\alpha_{v,n} \frac{r_1}{r_0}\right) J_\nu\left(\alpha_{v,n} \frac{r_2}{r_0}\right). \quad (22)$$

Finally, we rewrite Eq. (22) as

$$W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \propto \sum_{n=1}^N \mu_n \frac{J_\nu(\alpha_{v,n} r_1 / r_0) J_\nu(\alpha_{v,n} r_2 / r_0)}{\pi r_0^2 J_{\nu+1}^2(\alpha_{v,n})} \exp[i\nu(\theta_2 - \theta_1)], \quad (23)$$

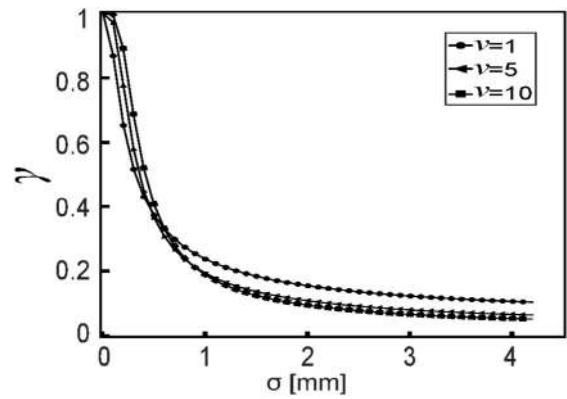


Fig. 3. Numerical values of the degree of coherence as a function of σ and for different values of parameter ν .

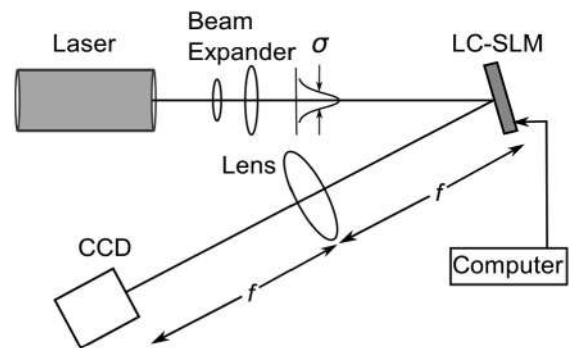


Fig. 4. Experimental setup for generating the secondary source with Bessel-mode vortex structure.

where

$$\mu_n = J_{\nu+1}^2(\alpha_{v,n}) \exp\left[-2\left(\frac{\alpha_{v,n}}{\alpha_{v,N}} \frac{R}{\sigma}\right)^2\right]. \quad (24)$$

As can be seen, Eq. (23) represents a finite sum approximation of the desired cross-spectral density (11) with μ_n specified by Eq. (24).

The spectral densities at the back focal plane of the Fourier lens calculated from Eq. (23) with $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}$ and $N = 40$ for different values of the degree of coherence calculated in accordance with finite sum version of Eq. (7) and eigenvalues given by Eq. (24) are plotted in Fig. 3.

Fig. 2 shows, along the columns, a well-known fact for fields carrying optical vortices, namely, the increase of the vortex radius as a result of increasing the topological charge. Moreover, the figure also shows, along the rows, that a decrease of the inner radius can be produced by decreasing the coherence of the source, for any given topological charge.

Concluding this Section, it must be noted that at first sight the proposed technique has much common with the known techniques for generating the Bessel beams, based on the use of optical Fourier transform system incorporating the computer controlled SLM (see, e.g., [13–16]). However, unlike these techniques we introduce the dynamic statistically independent random phase shifts in different modulating rings of the SLM, providing the partial destruction of coherence in radial direction. This permits us generating the essentially new class of partially coherent secondary sources.

4. Experiments and results

To verify the proposed technique in practice, we realized a physical experiment using the setup shown in Fig. 4. In this experiment we

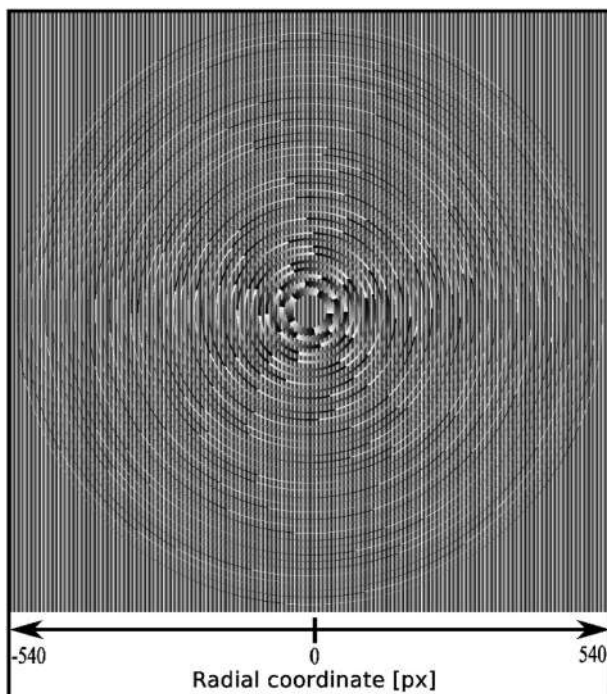


Fig. 5. Example of the control video signal for $\nu = 5$, $N = 40$, and where px stands for pixel.

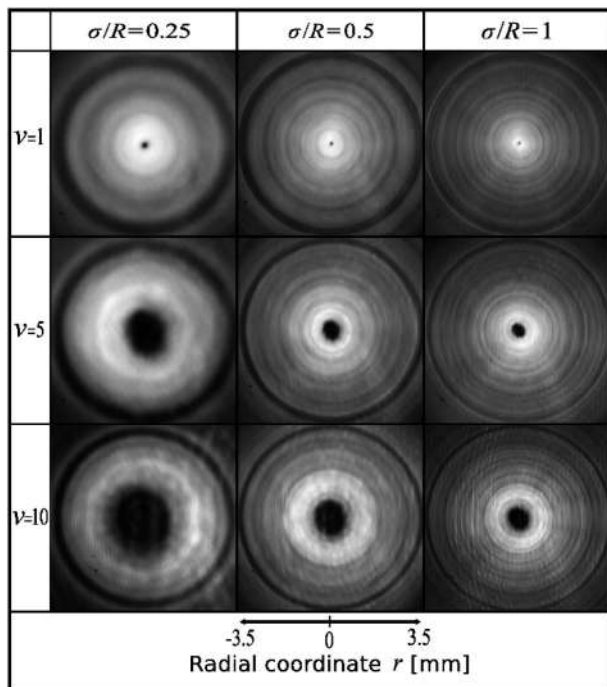


Fig. 6. Experimental results of the generated vortex source.

employed the computer-controlled phase-only reflective liquid-crystal (LC) SLM Pluto-Vis from HoloEye Photonics AG with 1920×1080 pixel resolution, radius of the active zone of 4.32 mm, and $8.0 \mu\text{m}$ pixel pitch. The control video signals were generated using Matlab routines and displayed onto the LC panel with accuracy of 256 gray levels and a frame frequency of 60 Hz in the SVGA mode. As the primary source

we used a horizontally polarized low power He–Ne laser (633 nm). A beam expander was placed at the laser output to modify its spot size. The Fourier transforming lens had a focal distance of 1 m and a radius of 25 mm. To register the results, we employed a CCD camera with 840×640 pixel resolution.

In our experiment we generated the vortex source of orders $\nu = 1, 5, 10$, several values of ratio σ/R , and cross-spectral density given by Eq. (23). To display effectively the control signals onto the active area of the LC-SLM, we truncated the number of modulating rings by $N = 40$. An example of such a video signal corresponding to $\nu = 5$ is depicted in Fig. 5. The intensity distributions of the generated source are shown in Fig. 6.

Comparing Figs. 2 and 6, we can conclude that the obtained experimental results are in a good agreement with the ones predicted by theory.

5. Conclusions

In conclusion, we have introduced a new family of partially coherent secondary sources with Bessel-mode vortex structure and proposed the technique for its generation. The technique is based on the Fourier-transforming optical system incorporating a computer-controlled LC SLM. The key feature of our proposal consists in applying dynamic statistically independent random phase shifts in different annular zones of SLM that results in the partial destruction of coherence in the radial direction. Moreover, this allows to vary the degree of coherence of the generated source in a very simple way by changing the width of the primary source. Remarkably, the less the degree of coherence the less the inner radius of the vortex independently of its topological charge, a fact that was not reported earlier. The consistency and efficiency of the proposed technique are confirmed with results of numerical simulation and physical experiment. We believe that our technique can be successfully implemented in many optical applications.

Funding

This work was supported by the Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México [project VIEP OSA EXC18-III].

References

- [1] A.S. Ostrovsky, M.Á. Olvera-Santamaría, P.C. Romero-Soría, Effect of coherence and polarization on resolution of optical imaging system, *Opt. Lett.* 36 (2011) 1677–1679, <http://dx.doi.org/10.1364/OL.36.001677>.
- [2] A.T. Friberg, A. Vasara, J. Turunen, Partially coherent propagation-invariant beams: Passage through paraxial optical systems, *Phys. Rev. A* 43 (1991) 7079–7082, <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.43.7079>.
- [3] A.S. Ostrovsky, G. Martínez-Niconoff, J.C. Ramírez-San-Juan, Coherent-mode representation of propagation-invariant fields, *Opt. Commun.* 195 (2001) 27–34, [http://dx.doi.org/10.1016/S0030-4018\(01\)01302-5](http://dx.doi.org/10.1016/S0030-4018(01)01302-5).
- [4] A.S. Ostrovsky, J. García-García, C. Rickenstorff-Parrao, M.Á. Olvera-Santamaría, Partially coherent diffraction-free vortex beams with a Bessel-mode structure, *Opt. Lett.* 42 (2017) 5182–5185, <http://dx.doi.org/10.1364/OL.42.005182>.
- [5] A.S. Ostrovsky, G. Martínez-Niconoff, P. Martínez-Vara, M.A. Olvera-Santamaría, The van Cittert-Zernike theorem for electromagnetic fields, *Opt. Express* 17 (2009) 1746–1752, <http://dx.doi.org/10.1364/OE.17.001746>.
- [6] A.S. Ostrovsky, G. Martínez-Niconoff, V. Arrizón, P. Martínez-Vara, M.Á. Olvera-Santamaría, C. Rickenstorff-Parrao, Modulation of coherence and polarization using liquid crystal spatial light modulators, *Opt. Express* 17 (2009) 5257–5264, <http://dx.doi.org/10.1364/OE.17.005257>.
- [7] S.A. Ponomarenko, A class of partially coherent beams carrying optical vortices, *J. Opt. Soc. Amer. A* 18 (2001) 150–156, <http://dx.doi.org/10.1364/JOSAA.18.000150>.
- [8] L. Mandel, E. Wolf, *Optical Coherence and Quantum Optics*, Cambridge University, 1995.
- [9] M.J. Bastiaans, New class of uncertainty relations for partially coherent light, *J. Opt. Soc. Amer. A* 1 (1984) 711–715, <http://dx.doi.org/10.1364/JOSAA.1.000711>.
- [10] H.M. Ozactas, T.C. Gulcu, M.A. Kutay, Linear algebraic theory of partial coherence: continuous fields and measures of partial coherence, *J. Opt. Soc. Amer. A* 33 (2016) 2115–2124, <http://dx.doi.org/10.1364/JOSAA.33.002115>.
- [11] G.B. Arfken, H.J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists*, third ed., Harcourt/Academic, 2001.

- [12] J.W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics*, third ed., McGraw-Hill, 1996.
- [13] A.S. Ostrovsky, Carolina Rickenstorff-Parrao, V. Arrizón, Generation of the “perfect” optical vortex using a liquid-crystal spatial light modulator, *Opt. Lett.* 38 (2013) 534–536, <http://dx.doi.org/10.1364/OL.38.000534>.
- [14] V. Arrizón, G. Méndez, D. Sánchez-de La-llave, Accurate encoding of arbitrary complex fields with amplitude-only liquid crystal space modulator, *Opt. Express* 13 (2005) 7913–7927, <http://dx.doi.org/10.1364/OPEX.13.007913>.
- [15] T.A. Vieira, M.R.R. Gesualdi, M. Zamboni-Rached, E. Recami, Production of dynamic frozen waves: experimental generation, *Opt. Lett.* 37 (2015) 2034–2036, <http://dx.doi.org/10.1364/OL.37.002034>.
- [16] R.A.B. Suarez, T.A. Vieira, I.S.V. Yepes, M.R.R. Gesualdi, Photorefractive and computational holography in the experimental generation of Airy beams, *Opt. Commun.* 366 (2016) 291–300, <http://dx.doi.org/10.1016/j.optcom.2016.01.045>.



Effect of primary illumination apodization on generating the Bessel mode vortex beams

J. García García , M. Á. Olvera Santamaría and A. S. Ostrovsky

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, México

ABSTRACT

We investigate the effect of primary illumination properties on partially coherent Bessel mode vortex beams. Based on the coherent mode representation, we show that a wide class of such vortices can be obtained by applying well-known apodization functions to the primary illumination. In particular, we find that the combined effect of apodization windows with high topological charges induces transitions of high intensity gradient from the vortex core to the outer vortex rim. The specific choice of apodization filters leads to a change on the spatial degree of coherence as a function of the topological charge. This suggests a synthesis procedure to generate partially coherent vortex beams where the intensity gradient can be shaped by changing the degree of coherence and the topological charge.

ARTICLE HISTORY

Received 23 October 2019
Accepted 2 December 2019

KEYWORDS

Coherent mode representation; Bessel mode; vortex beam; apodization

1. Introduction

Partially coherent vortex beams have attracted great attention in recent years as they exhibit some advantages over coherent vortex beams. Practical applications of such vortices include ghost imaging, self-focusing, optical trapping, among others; see, e.g. (1–4) and references therein. Other important applications including propagation (5), imaging (6) and focusing properties (7) of partially coherent vortex beams have been investigated.

On the other hand, the control of the degree of coherence on such vortices and its effect on the power spectrum has been less investigated. Not long ago, we demonstrated theoretically and experimentally the possibility of generating a class of partially coherent diffraction-free Bessel vortex beams (8). Recently, we have shown that low coherence Bessel mode vortex beams can revert the dependence of the vortex radius with topological charge. The synthesis technique in both cases relies on the coherent mode representation of a planar source (9) and can be generated by means of a Fourier transforming optical system incorporating a Liquid Crystal Spatial Light Modulator (LC SLM) at its input. In addition, in the proposed techniques, the degree of coherence can be physically modulated by changing the width of the input beam (10). These examples put into evidence that coherence and topological charge are key parameters for shaping the spectral density of Bessel mode vortex beams. However, the dependence of coherence on the illumination width

leads to a reduced modulation range of the SLM as less pixels are effectively employed.

Here, we introduce a modified technique for generating a wider class of partially coherent Bessel vortex beams that do not require reducing the input illumination width. We show that by using suitable designed apodization windows, the spectral intensity and degree of coherence can be shaped. Interestingly, the use of apodization windows combined with high topological charges induce transitions of high intensity gradient from the vortex core to the outer vortex rim. We also show that the choice of apodization filters leads to a change on the spatial degree of coherence as a function of the topological charge. We believe that the obtained results can be useful for designing new confinement and isolation schemes of microparticles and where low coherence vortices are needed without changing its transverse intensity distribution.

2. Generating the Bessel mode vortex beams

Here, we recall in brief the technique of generating the Bessel mode vortex beams presented in our previous paper (10). When doing this, we modify slightly the original optical scheme placing some apodization filter before the SLM at the front focal plane of the Fourier transforming lens as it is shown in Figure 1.

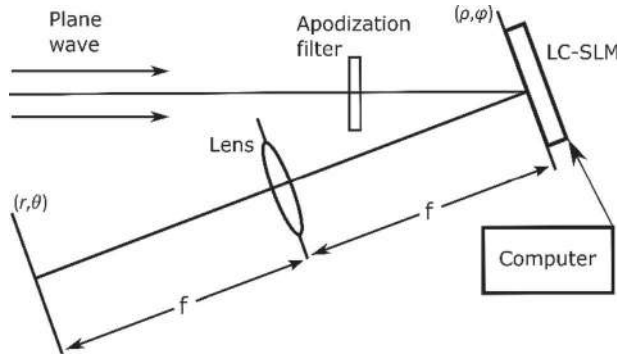


Figure 1. Optical system for generating the Bessel mode vortex beam.

As before, we assume that the active zone of the SLM represents a set of N rather thin well-separated concentric rings with amplitude transmittance inside given by

$$t_n(\boldsymbol{\rho}) = \exp[i(\nu\varphi + \psi_n)], \quad (1)$$

where $\boldsymbol{\rho} = (\rho, \varphi)$, ν is an integer, and ψ_n are the random variables uniformly distributed in the range $[0, 2\pi]$, which change independently in different rings with the frame frequency of the control video signal applied to the SLM. It must be specially noted that introducing the random phase shifts ψ_n results in the partial destruction of coherence in the radial direction. We also assume that the complementary rings between the principal ones have the common periodic transmittance that allows to eliminate the undesired light, passing through this rings, from consideration.

Following (10), the cross-spectral density at the output plane (r, θ) can be well approximated as

$$W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \propto \exp[i\nu(\theta_2 - \theta_1)] \sum_{n=1}^N A^2\left(\frac{\alpha_{\nu,n}}{\alpha_{\nu,N}}R\right) J_\nu\left(\frac{\alpha_{\nu,n}r_1}{r_0}\right) J_\nu\left(\frac{\alpha_{\nu,n}r_2}{r_0}\right), \quad (2)$$

$$\nu = 1, 2, \dots,$$

where $J_\nu(\cdot)$ is the Bessel function of the first kind and order ν , $\alpha_{\nu,n}$ is the n th zero of this function, $r_0 = f\alpha_{\nu,N}/kR$, k is the wave number of illumination, R is the radius of the active zone of SLM, f is the focal length of the lens, and $A(\cdot)$ is the transmittance of the apodization filter. Equation (2) can be rewritten in a shorter more recognizable form as

$$W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \exp[i\nu(\theta_2 - \theta_1)] \sum_{n=1}^N \lambda_n \varphi_n^*(\mathbf{r}_1) \varphi_n(\mathbf{r}_2), \quad (3)$$

where

$$\lambda_n = \pi r_0^2 J_{\nu+1}^2(\alpha_{\nu,n}) A^2\left(\frac{\alpha_{\nu,n}}{\alpha_{\nu,N}}R\right) \quad (4)$$

and

$$\varphi_n(\mathbf{r}) = \frac{J_\nu^2\left(\frac{\alpha_{\nu,n}r}{r_0}\right)}{\pi r_0^2 J_{\nu+1}^2(\alpha_{\nu,n})}. \quad (5)$$

It must be noted that functions $\varphi_n(\mathbf{r})$ given by Equation (5) form an orthonormal set (11) and hence the sum in Equation (3) can be interpreted as a finite version of the well-known coherent mode representation of partially coherent optical field (12). The exponential factor in Equation (3) testifies that the generated field possess helicoidal phase distribution and hence can be identified as a vortex beam with topological charge ν . Hence, Equations (3)–(5) can be considered as the Bessel mode representation of the partially coherent vortex beam.

Accepting in Equation (3) $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}$, we find that the spectral density (optical intensity) of the generated beam has the form

$$S(\mathbf{r}) \propto \sum_{n=1}^N A^2\left(\frac{\alpha_{\nu,n}}{\alpha_{\nu,N}}R\right) J_\nu^2(\alpha_{\nu,n}r/r_0). \quad (6)$$

As is well know, the degree of coherence of the partially coherent field can be numerically evaluated as (13)

$$\gamma = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n=1}^N \lambda_n^2}{\left[\sum_{n=1}^N \lambda_n\right]^2}. \quad (7)$$

Substituting for λ_n from Equation (4) into Equation (7), we find that in our case

$$\gamma = \frac{\sum_{n=1}^N \left(J_{\nu+1}^2(\alpha_{\nu,n}) A^2\left(\frac{\alpha_{\nu,n}}{\alpha_{\nu,N}}R\right) \right)^2}{\left[\sum_{n=1}^N J_{\nu+1}^2(\alpha_{\nu,n}) A^2\left(\frac{\alpha_{\nu,n}}{\alpha_{\nu,N}}R\right) \right]^2}. \quad (8)$$

As can be seen from Equations (6) and (8), both the spectral density and the degree of coherence of generated beam depend on the apodization function $A(\rho)$. Further, we investigate this dependence in details.

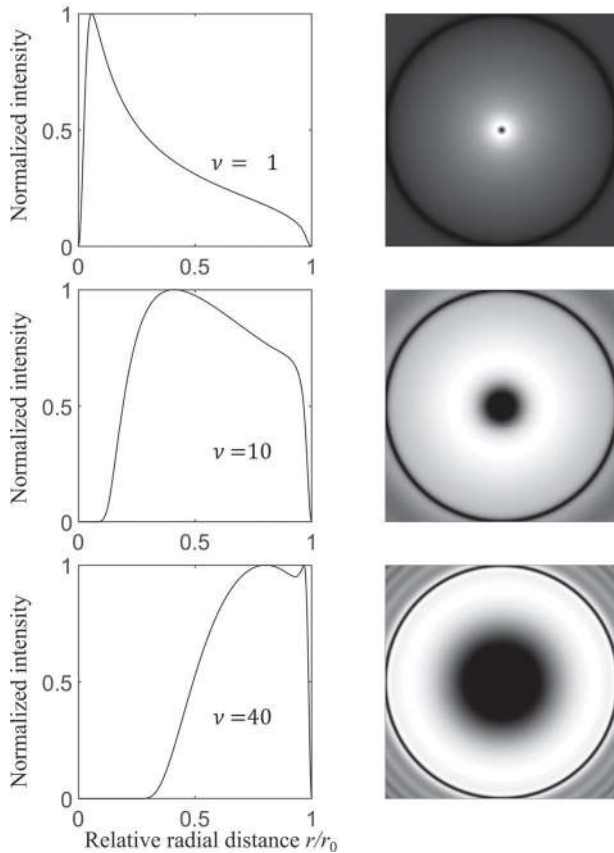
3. Effect of apodization

To observe the behaviour of $S(\mathbf{r})$ and γ as a function of the chosen illumination, we realized the numerical simulation of the proposed technique. In our calculus, as an aperture function $A(\rho)$, we used the standard apodization windows given in Table 1 (see, e.g. (14)).

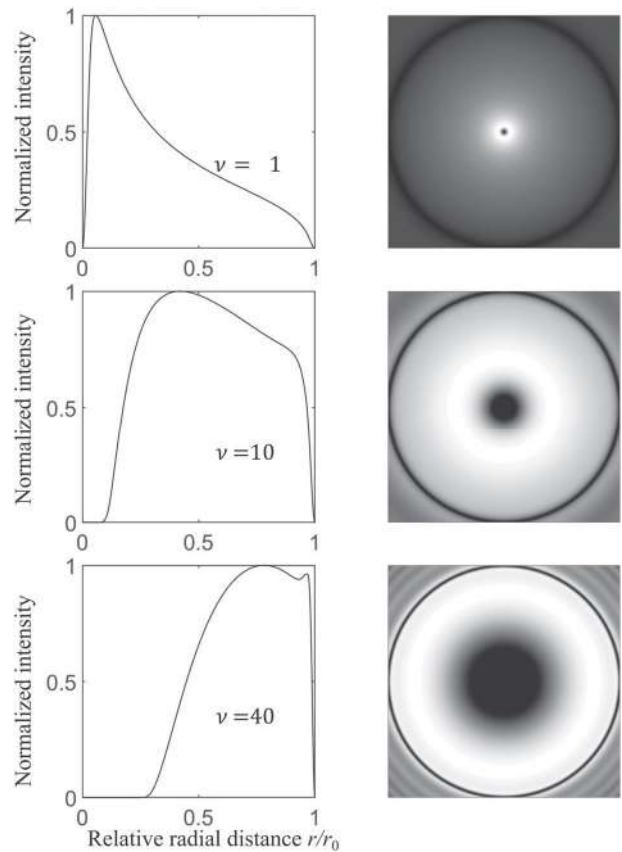
We calculated the corresponding spectral densities $S(\mathbf{r})$ in accordance with Equation (6) for different values of topological charge ν and for $N = 30$. The calculated profiles of $S(\mathbf{r})$ and the corresponding 2-D patterns are shown in Figures 2–7.

Table 1. Apodization windows.

Type	Apodization function
Connes	$A(\rho) = \left(1 - \left(\frac{\rho^2}{R^2}\right)\right)^2$
Bartlett	$A(\rho) = 1 - \frac{\rho}{R}$
Cosine	$A(\rho) = \cos\left(\frac{\pi\rho}{2R}\right)$
Welch	$A(\rho) = 1 - \frac{\rho^2}{R^2}$
Gaussian	$A(\rho) = \exp\left(-\frac{\rho^2}{2R^2}\right)$
Uniform	$A(\rho) = \text{circ}\left(\frac{\rho}{R}\right)$


Figure 2. Spectral density $S(\mathbf{r})$ for Connes apodization window.

As can be seen from these figures, the generated field exhibits a typical doughnut-like shape whose inner radius increases with the increase of the topological charge for a fixed number of modulating rings and for any apodization function. As the topological charge increases, the peak value of intensity distribution becomes less sharp and for cases of Gaussian and uniform illumination (Figures 6 and 7) small oscillations along the transverse profile appear. For cases shown in Figures 2–7, the peak intensity is also softened with the increase of topological charge. While these characteristics are reminiscent of low coherence vortices, Figures 2–7 reveal a remarkable feature. In all cases, as the inner radius increases, the high


Figure 3. Spectral density $S(\mathbf{r})$ for Bartlett apodization window.

intensity gradient is shifted from the vortex core towards the outer radius. This effect occurs for all apodization filter being uniform and Gaussian illumination, the cases where a relatively high intensity gradient is present at both radius. The overall behaviour of the spectral intensity as a function of the topological charge indicates that low topological charges maintain the high intensity gradient in a neighbourhood of the core vortex, whereas high topological charges shift the high intensity gradient to the outer vortex radius. Raising the intensity gradient at such location suggests that it could be advantageous for isolating and sorting of small particles

Further, we calculated the degree of coherence γ in accordance with Equation (8) for different kinds of apodization filters. The calculated values of γ are plotted as a function of topological charge ν in Figure (8). From the figure, it can be seen that the degree of coherence depends on the type of filter employed. The lowest degree of coherence values is attained for Gaussian and uniform apodization while their spectral densities have practically the same behaviour. The same occurs for the pairs Bartlett–Connes and Cosine–Welch apodization functions. It is worth to note that, in general, the degree of coherence depends on the number of modes N employed in the synthesis of the field. Here, we have chosen $N = 30$

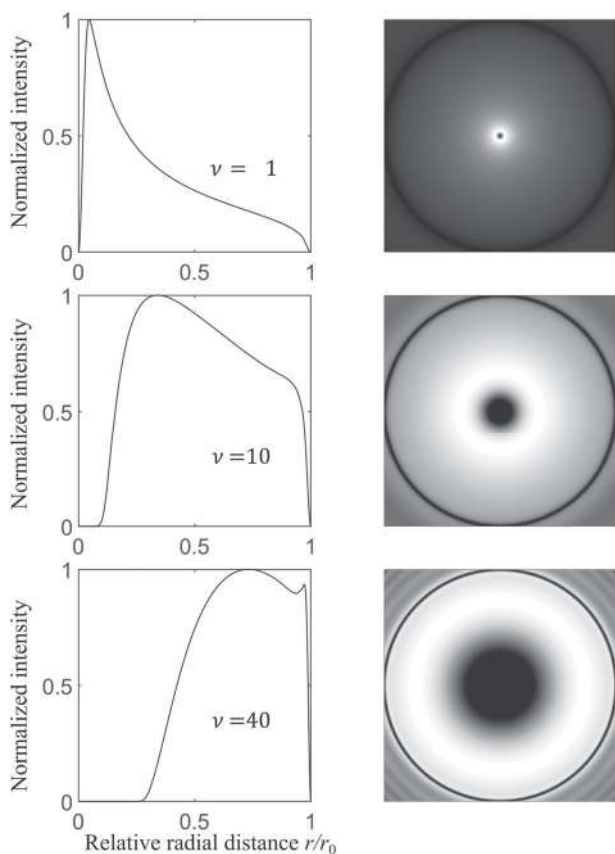


Figure 4. Spectral density $S(\mathbf{r})$ for Cosine apodization window.

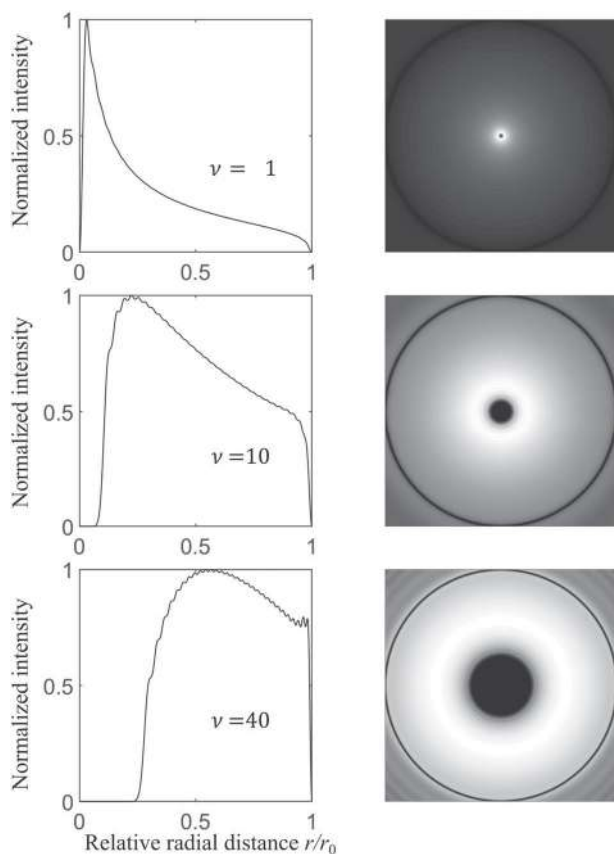


Figure 6. Spectral density $S(\mathbf{r})$ for Gaussian apodization window.

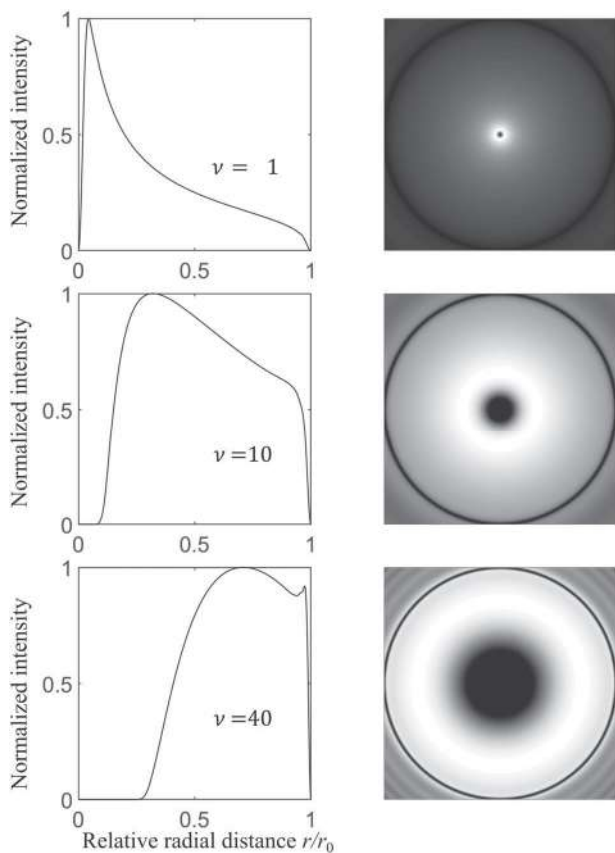


Figure 5. Spectral density $S(\mathbf{r})$ for Welch apodization window.

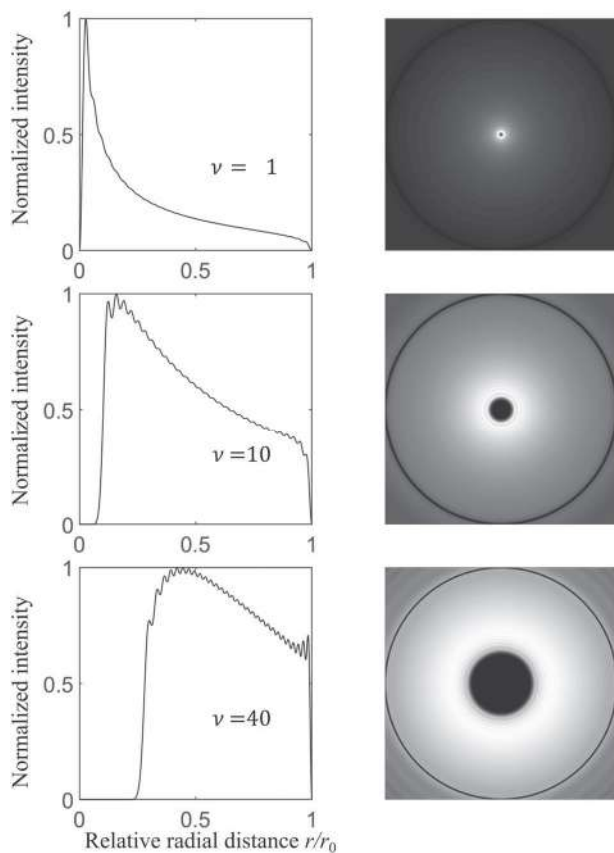


Figure 7. Spectral density $S(\mathbf{r})$ for Uniform apodization window.

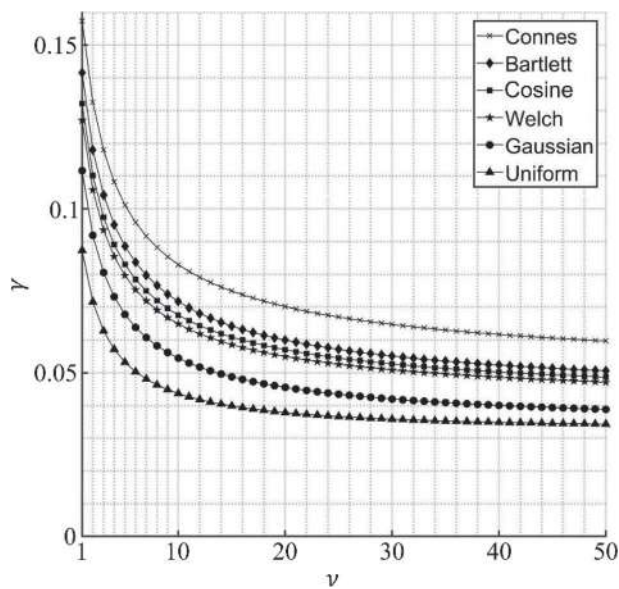


Figure 8. Numerical values of the degree of coherence as a function of ν for each apodization window.

and this number determines the value of γ attained in the plot. Other choices of N will lead to different values of γ but such values still can be modulated with the choice of an apodization filter. This shows the possibility of generating vortex beams with practically identical spectral density but different degrees of coherence independently of the number of modes used in the synthesis of the field.

The obtained results show that a wider family of partially coherent vortex beams can be generated by suitable choices of apodization functions. Physically they can be realized in an optical Fourier transforming system incorporating an LC SLM at its input and by placing the desired apodization window that matches the active radius of the SLM at the output plane of the primary illumination system. In (10), we have presented experimental results that illustrate the efficiency of such technique for the particular case where the coherence properties are modulated by changing the width of the primary illumination.

4. Conclusions

In conclusion, we have demonstrated theoretically and numerically that the coherence and power spectrum of a partially coherent Bessel vortex beams can be modulated by suitable choices of the topological charge and apodization window acting on the primary illumination source. By doing so a wide class of partially coherent vortex beams has been proposed. The obtained results show that the joint effect of apodization windows with high

topological charges induce transitions of the high intensity gradient from the vortex core to the outer vortex rim, being the same tendency for every apodization filters. These results indicate that low topological charges maintain the high intensity gradient at the neighbourhood of the core vortex, whereas high topological charges shift the high intensity gradient to the outer vortex radius. We also showed that the suitable choice of apodization filters leads to a change of the spatial degree of coherence as a function of the topological charge. We believe that the obtained results can be useful in the design of advanced optical systems for trapping and manipulating microparticles.

Disclosure statement

No potential conflict of interest was reported by the authors.

ORCID

J. García García  <http://orcid.org/0000-0003-4103-9916>

References

- (1) Liu, X.; Zeng, J.; Cai, Y. Review on Vortex Beams with Low Spatial Coherence. *Adv. Phys.: X.* **2019**, *4*, 1.
- (2) Zeng J.; Lin R.; Liu X.; Zhao C.; Cai Y. Review on Partially Coherent Vortex Beams. *Front. Optoelectron.* **2019**, *12* (3), 229–248.
- (3) Zhao C.; Cai Y.; Korotkova O. Radiation Force of Scalar and Electromagnetic Twisted Gaussian Schell-Model Beams. *Opt. Express* **2009**, *17* (24), 21472–21487.
- (4) Zhao C.; Cai Y. Trapping Two Types of Particles Using a Focused Partially Coherent Elegant Laguerre-Gaussian Beam. *Opt. Lett.* **2011**, *36* (12), 2251–2253.
- (5) Cai Y.; Chen Y.; Wang F. Generation and Propagation of Partially Coherent Beams with Nonconventional Correlation Functions: A Review [Invited]. *J. Opt. Soc. Amer. A* **2014**, *31* (9), 2083–2096.
- (6) Brown D.P.; Brown T.G. Partially Correlated Azimuthal Vortex Illumination: Coherence and Correlation Measurements and Effects in Imaging. *Opt. Express* **2008**, *16* (25), 20418–20426.
- (7) Rao L.; Pu J. Focusing of Partially Coherent Vortex Beams by An Aperture Lens. *Chin. Phys. Lett.* **2007**, *24* (5), 1252–1255.
- (8) Ostrovsky A.S.; García-García J.; Rickenstorff-Parrao C.; Olvera-Santamaría M.Á. Partially Coherent Diffraction-Free Vortex Beams with a Bessel-Mode Structure. *Opt. Lett.* **2017**, *42* (24), 5182–5185.
- (9) Ostrovsky A.S.; Martínez-Niconoff G.; Ramírez-Sanjuan J.C. Coherent-mode Representation of Propagation-invariant Fields. *Opt. Commun.* **2001**, *195* (1-4), 27–34.
- (10) Olvera Santamaría M.Á.; Garcapiña J.L.R.; García García J.; Ostrovsky A.S. Generation of a Partially Coherent Secondary Source with Bessel-Mode Vortex Structure by Liquid Crystal Spatial Light Modulator. *Opt. Commun.* **2019**, *439*, 312–316.
- (11) Arfken G.B.; Weber H.J.; Harris F.E. *Mathematical Methods for Physicists*, 7th ed.; Academic Press: Boston, 2013.

- (12) Mandel, L.; Wolf, E. *Optical Coherence and Quantum Optics*, 1st ed.; Cambridge University Press: Cambridge, 1995.
- (13) Ozaktas H.M.; Gulcu T.C.; Kutay M.A. *Linear Algebraic Theory of Partial Coherence: Continuous Fields and Measures of Partial Coherence*. *J. Opt. Soc. Amer. A* **2016**, 33 (11), 2115–2124.
- (14) Weisstein, E.W. *CRC Concise Encyclopedia of Mathematics*, 2nd ed.; CRC Press: New York, 2002.



Cylindrically polarized perfect optical vortex: Generation and focusing properties

M.Á. Olvera-Santamaría^a, J. García-García^a, A. Tlapale-Aguilar^a, J. Silva-Barranco^b,
C. Rickenstorff-Parrao^c, A.S. Ostrovsky^{a,*}

^a Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla 72000, Mexico

^b Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica, Apdo. Postal 51/216, Puebla, Puebla 72000, Mexico

^c Facultad de Ciencias de la Electrónica, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla 72000, Mexico

ARTICLE INFO

Keywords:

Perfect vortex
Cylindrical polarization
Focusing

ABSTRACT

In this paper we extend the concept of perfect optical vortex to the vector case and investigate its focusing properties in the high numerical aperture regime. We show that simultaneous phase encoding of orthogonal components can be realized by means of a $4f$ imaging system incorporating a phase only liquid-crystal spatial light modulator whose director axis is rotated 45° with respect to the horizontal axis. As an example of application, we demonstrate theoretically and experimentally that a ring-shaped field with inner radius of 0.15λ can be obtained by focusing a radially polarized perfect vortex and a tight spot of 0.34λ FWHM can be obtained by focusing an azimuthally polarized perfect vortex.

1. Introduction

Recently the concept of Perfect Optical Vortex (POV) was introduced as a theoretical model to decouple the vortex radius dependence on the topological charge and the corresponding generation techniques were proposed [1,2]. This concept has been recognized and successfully applied by the optics community in a number of investigations including propagation invariant fields, beam shaping, quantum information theory, micro-manipulation and focusing (see, e.g., [3–7]).

Up to now, the majority of generation techniques have been developed in the scalar case. In the vector case, generation techniques of polarized POVs are based on the superposition of circularly polarized vortex beams with opposite handedness. Not long ago the POV was extended to the case where the topological charge is independent of the polarization order with stable state polarization upon propagation and generated by means of an interferometric technique [8]. By using the method of the Fourier transform of Bessel vortex beams, a technique to generate perfect vector vortex beams by incorporating two Liquid Crystal Spatial Light Modulators (LC-SLM's) was proposed [9] whereas the same method was employed for high order Bessel beams and q-plates to generate perfect vector beams [10]. A method to generate POVs of any state of polarization termed perfect Poincaré beams by independent phase encoding of orthogonal components in a single SLM was proposed [11]. A similar approach was employed to generate perfect cylindrical vector beams with tunable ring diameter [12].

Applications of high-order cylindrically POVs have been also investigated. A method for POV shaping was proposed under tight focusing

conditions where ring width, ring diameter, position and topological charges can be controlled [13]. More recently, a detailed analytical and numerical investigation of focused high-order cylindrically polarized vortex beams was carried out showing that subwavelength focal spots can be generated when the order of polarization and topological charge coincide [14].

The increasing range of potential applications of vector vortex beams demands feasible experimental schemes. However, generation techniques frequently require bulky optical systems and complicated alignments which make its experimental realization rather cumbersome in practical applications. Here we introduce a simple and easy to implement technique based on a $4f$ imaging system incorporating a single phase-only LC-SLM whose director axis is rotated 45° with respect to the horizontal axis. We show that the proposed technique allows simultaneous phase encoding of orthogonal field components avoiding the need of separating them in elaborated optical systems and laborious alignments.

As an example of application we consider strong focusing of the cylindrically polarized POV. The resulting focused field is not perfect as its radius depends on the topological charge. However, the focal fields can overcome the Rayleigh resolution limit. We show theoretically and experimentally that a ring-shaped field with inner radius of 0.15λ can be created by focusing a radially polarized POV and a tight spot of 0.34λ FWHM can be created by focusing an azimuthally polarized POV. We believe that the proposed technique can be of benefit in practical

* Corresponding author.

E-mail address: andreyo@cfm.buap.mx (A.S. Ostrovsky).

applications where a single SLM is used for tailoring vector vortex beams.

2. Cylindrically polarized POV

We start defining the cylindrically polarized POV as a beam propagating in the z direction with transverse field distribution given by the 2D electric vector

$$\mathbf{E}_n^{cyl}(r, \phi) = \delta(r - r_0) \exp[in\phi] \begin{pmatrix} \cos(n\phi + \phi_0) \\ \sin(n\phi + \phi_0) \end{pmatrix}, \quad (1)$$

where r and ϕ are polar coordinates, $\delta(\cdot)$ is the Dirac δ -function, r_0 is the vortex radius, n is an integer known as the topological charge and ϕ_0 is a constant. Two particular cases of value ϕ_0 are of special interest. When $\phi_0 = 0$, we obtain

$$\mathbf{E}_n(r, \phi) = \delta(r - r_0) \exp(in\phi) \begin{pmatrix} \cos n\phi \\ \sin n\phi \end{pmatrix}, \quad (2)$$

and when $\phi_0 = \pi/2$ we obtain

$$\mathbf{E}_n(r, \phi) = \delta(r - r_0) \exp(in\phi) \begin{pmatrix} \sin n\phi \\ -\cos n\phi \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Eqs. (2) and (3) describe radially and azimuthally polarized POVs respectively whose polarization do not change along the radial direction but experiences $2\pi n$ rotations in the interval $0 \leq \phi \leq 2\pi$.

3. Technique of generation

Now, we will show that the cylindrically polarized POV (1) can be approximately generated in a $4f$ imaging system incorporating the reflective LC-SLM operating in phase-only modulation mode followed by a quarter wave plate (Q) as shown in Fig. 1. We assume that the extraordinary axis of the phase only LC-SLM is oriented at 45° to the x axis while the extraordinary axis of the QWP is parallel to the y axis. Employing Jones calculus, the beam at the exit of the system is given by

$$\mathbf{L} = \mathbf{Q}\mathbf{R}(-\pi/4)\mathbf{T}\mathbf{R}(\pi/4)\mathbf{E}_0, \quad (4)$$

where

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad (5)$$

is the matrix of a quarter wave plate,

$$\mathbf{R}(\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

is the rotation matrix by angle $\pi/4$,

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \exp(-i2\beta) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

is the matrix of the SLM, β is the applied control signal and \mathbf{E}_0 is the input beam. Then the resulting matrix characterizing the system is given by

$$\mathbf{L} = \exp(-i\beta) \begin{pmatrix} \sin(\beta) & -i\cos(\beta) \\ \cos(\beta) & -i\sin(\beta) \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Let us assume now that the input beam is a horizontally polarized electric vector and the control signal is of the form $\beta = n\phi + \phi_0$. Then the resulting electric vector at the output of the system is given by

$$\mathbf{E}_{out}(r, \phi) \propto \exp(in\phi) \begin{pmatrix} \cos(n\phi + \phi_0) \\ \sin(n\phi + \phi_0) \end{pmatrix}. \quad (9)$$

From this equation, it is clear that the choice of ϕ_0 defines a space-variant polarization vector. In particular, for the choice $\phi_0 = 0$, the resulting electric vector represents a radially polarized field whereas the choice $\phi_0 = \pi/2$ leads to an azimuthally polarized field.

The resulting vector field can be used to generate a perfect vortex at a given plane by means of a $4f$ imaging system and spatial filtering

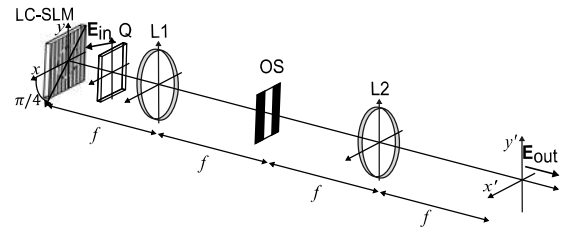


Fig. 1. System of a rotated SLM followed by a quarter wave-plate Q for generating a cylindrically polarized POV in a $4f$ imaging system. \mathbf{E}_{in} stands for the input beam, L is a lens and OS represents an optical stop.

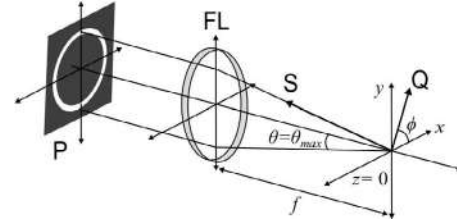


Fig. 2. Geometry of a high numerical aperture optical system. P stands for the pupil function, FL represents the Focusing Lens, S is a vector along a ray trajectory in the focal region and Q is the point where the field is calculated.

incorporating the LC-SLM at the input. We assume that $\beta = n\phi + \phi_0$ inside of a ring area of radius r_0 and width Δr and $\beta' = p_0x$ in the complementary zone of this area. We note that the exponential factor $\exp(-ip_0x)$ appearing due to control signal β' is responsible for deviating the undesirable light (passing through the complementary zone) from the axial direction and, hence, with the proper choice of p_0 , can be rejected by the optical stop (OS) placed in the first lens focal plane. Finally, when the incident light is linearly polarized in the x direction, the resulting electrical field at the output of the system is formed as

$$\mathbf{E}_{out}(r, \phi) \propto \begin{cases} \exp(in\phi) \begin{pmatrix} \cos(n\phi + \phi_0) \\ \sin(n\phi + \phi_0) \end{pmatrix} & r \in D \\ 0 & r \notin D \end{cases}, \quad (10)$$

where $D = [r_0 - \Delta r/2, r_0 + \Delta r/2]$. It is clear that if we choose $\Delta r \ll r_0$, Eq. (10) can be accepted as a good approximation of the POV defined by Eq. (1).

4. Focusing properties

Once the cylindrically polarized POV has been defined, we turn our attention to the problem of focusing such a beam through a high Numerical Aperture (NA) optical system. Following Richards and Wolf, the electric field at point $\mathbf{Q}(r, \phi)$ near focus can be approximated by the Debye integral as follows [12]:

$$\mathbf{E}_Q \propto \iint_{\Omega} \mathbf{T}(\mathbf{S}) \exp[i\frac{2\pi}{\lambda}(S_x x + S_y y + S_z z)] d\Omega, \quad (11)$$

where Ω is the solid angle formed by the geometric rays passing through the exit pupil, $\mathbf{T}(\mathbf{S})$ is the vector pupil distribution containing information about polarization, phase and amplitude distribution at the exit pupil and $\mathbf{S} = (S_x, S_y, S_z)$ is the unit vector along a ray trajectory in the focal region. The geometry corresponding to Eq. (11) is shown in Fig. 2. Considering the origin located in the back focal plane of the lens, we write vectors \mathbf{S} and \mathbf{Q} in spherical coordinates, $S_x = \sin \theta \cos \phi$, $S_y = \sin \theta \sin \phi$, $S_z = \cos \theta$, $x = \rho_Q \sin \theta \cos \phi_Q$, $y = \rho_Q \sin \theta \sin \phi_Q$ and $z = \rho_Q \cos \theta_Q$, respectively. Denoting $r = \rho_Q \sin \theta_Q$

as the geometrical projection of vector \mathbf{Q} along the focal plane and substituting the components of \mathbf{S} and \mathbf{Q} into Eq. (11), we obtain

$$\begin{aligned} E_Q \propto \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \mathbf{T}(\theta, \phi) \exp \left[i \frac{2\pi}{\lambda} r \sin \theta \cos(\phi - \phi_Q) \right] \\ \times \exp \left[i \frac{2\pi}{\lambda} z \cos \theta \right] \sin \theta d\theta d\phi. \end{aligned} \quad (12)$$

In order to solve Eq. (12) we need the analytical expression for $\mathbf{T}(\theta, \phi)$. In the general case, this function has the form $\mathbf{T}(\theta, \phi) = \mathbf{P}(\theta, \phi) P(\theta, \phi)$, where $\mathbf{P}(\theta, \phi)$ is the polarization vector and $P(\theta, \phi)$ can be regarded as an apodization function. The polarization vector is defined as $\mathbf{P}(\theta, \phi) = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{R} \mathbf{P}_0$, where

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos n\phi & \sin n\phi & 0 \\ -\sin n\phi & \cos n\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (13)$$

describes the coordinate transformation for rotation around the z axis,

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (14)$$

describes the changes in the electric field as it traverses the lens, and $\mathbf{P}_0 = (a(\theta, \phi), b(\theta, \phi), 0)^T$ represents the polarization of the transverse input beam, components $a(\theta, \phi)$ and $b(\theta, \phi)$ will be defined below and T stands for the transpose operation. We choose the factor $P(\theta, \phi)$ to have the form of a POV, which in terms of the considered coordinate system, can be written as follows

$$P(\theta, \phi) \propto \delta(\theta - \theta_0) \exp(in\phi). \quad (15)$$

Substituting Eqs. (13)–(15) into the expression for \mathbf{P} we find

$$\mathbf{P}(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} a[f(\theta, \phi)] + b[g(\theta, \phi)] \\ a[g(\theta, \phi)] + b[h(\theta, \phi)] \\ -\sin\theta[a\cos n\phi + b\sin n\phi] \end{pmatrix}, \quad (16)$$

where

$$f(\theta, \phi) = \cos \theta \cos^2 n\phi + \sin^2 n\phi, \quad (17)$$

$$g(\theta, \phi) = \cos \theta \sin n\phi \cos n\phi - \sin n\phi \cos n\phi, \quad (18)$$

$$h(\theta, \phi) = \cos \theta \sin^2 n\phi + \cos^2 n\phi. \quad (19)$$

We begin analyzing the case when $a(\theta, \phi)$ and $b(\theta, \phi)$ are given by Eq. (2), i.e. the case of a radially polarized POV. In this case the expression for \mathbf{P} reduces to

$$\mathbf{P}^{\text{rad}}(\theta, \phi) = \delta(\theta - \theta_0) \exp(in\phi) \begin{pmatrix} \cos \theta \cos n\phi \\ \cos \theta \sin n\phi \\ -\sin \theta \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Substituting Eq. (20) into Eq. (12) and applying the sifting property of δ function, with $\theta_0 = \theta_{\max}$, we obtain

$$\begin{aligned} E_Q \propto \sin \theta_{\max} A(z) \int_0^{2\pi} \exp(in\phi) \begin{pmatrix} \cos \theta_{\max} \cos n\phi \\ \cos \theta_{\max} \sin n\phi \\ -\sin \theta_{\max} \end{pmatrix} \\ \times \exp \left[i \frac{2\pi}{\lambda} r \sin \theta_{\max} \cos(\phi - \phi_Q) \right] d\phi, \end{aligned} \quad (21)$$

where

$$A(z) = \exp \left[i \frac{2\pi}{\lambda} z \cos \theta_{\max} \right]. \quad (22)$$

Recalling the definition of the numerical aperture $\text{NA} = n_0 \sin \theta$ where n_0 is the refracting index of the medium and considering $\text{NA} \approx 1$, we have $\theta_{\max} \approx \pi/2$, $\sin \theta_{\max} \approx 1$ and $\cos \theta_{\max} \approx 0$. Substituting the assumed approximations into Eq. (21), we have

$$E^{\text{rad}} \propto \int_0^{2\pi} \exp(in\phi) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \exp [ikr \cos(\phi - \phi_Q)] d\phi, \quad (23)$$

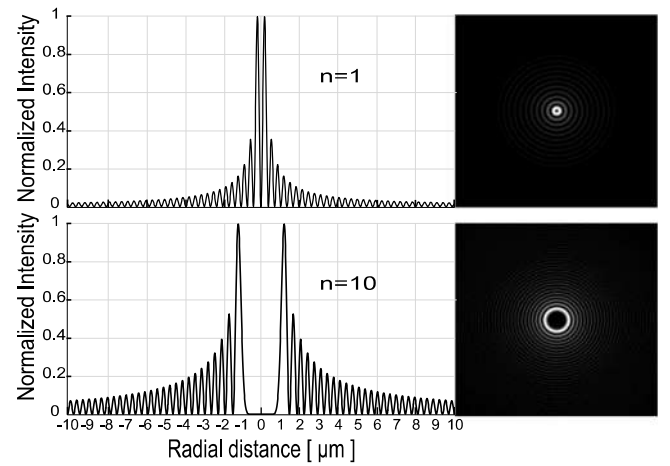


Fig. 3. Normalized intensity of the focused radially polarized POV calculated from Eq. (26).

where $k = 2\pi/\lambda$ and the order of magnitude of transverse components is so small that can be disregarded. Therefore the z field component is given by

$$E_z^{\text{rad}} \propto - \int_0^{2\pi} \exp(in\phi) \exp [ikr \cos(\phi - \phi_Q)] d\phi. \quad (24)$$

Introducing the change of variable $\gamma = \phi - \phi_Q$ and employing the identity [15]

$$J_n(x) = \frac{i^{-n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(in\varphi) \exp [ix \cos \varphi] d\varphi, \quad (25)$$

the intensity of the focused beam is given by

$$I_z^{\text{rad}} \propto J_n^2(kr). \quad (26)$$

The normalized intensity distribution of the generated field calculated from Eq. (26) for topological charges $n = 1, 10$ is shown in Fig. 3. As depicted in the figure, the considered field exhibits an annular shape with a dark central region whose radius rises with the increase of the topological charge. Interestingly, besides the original field is transverse, the focused field exhibits a ring-shaped and longitudinal component with inner radius of 0.15λ . Its peak intensity is concentrated in the first ring and the intensity of subsequent rings decreases monotonically. It is important to note that the main contribution of the field comes from the longitudinal ring shaped component whereas a small transversal component is present.

Now, we consider the case of an azimuthally polarized POV given by Eq. (3), in this case Eq. (20) becomes

$$\mathbf{P}^{\text{azi}}(\theta, \phi) \propto \delta(\theta - \theta_0) \exp(in\phi) \begin{pmatrix} \sin n\phi \\ -\cos n\phi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (27)$$

and the pupil function is chosen as before. On substituting $\mathbf{P}(\theta, \phi)$ from Eq. (27) into Eq. (12) and following a procedure analogous to the previous case we obtain

$$E^{\text{azi}} \propto \int_0^{2\pi} \exp(in\phi) \begin{pmatrix} \sin n\phi \\ -\cos n\phi \\ 0 \end{pmatrix} \exp [ikr \cos(\phi - \phi_Q)] d\phi. \quad (28)$$

This time the field is transverse with components given by

$$E_x^{\text{azi}} \propto \int_0^{2\pi} \exp(in\phi) \sin n\phi \exp [ikr \cos(\phi - \phi_Q)] d\phi, \quad (29)$$

$$E_y^{\text{azi}} \propto - \int_0^{2\pi} \exp(in\phi) \cos n\phi \exp [ikr \cos(\phi - \phi_Q)] d\phi. \quad (30)$$

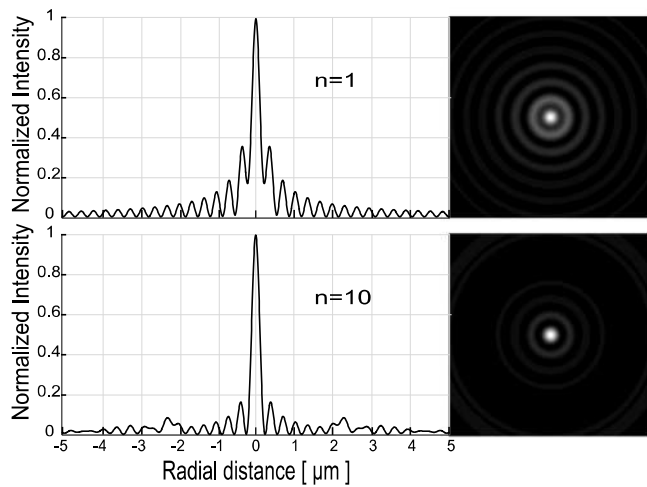


Fig. 4. Normalized intensity of the focused azimuthally polarized POV calculated from Eq. (33).

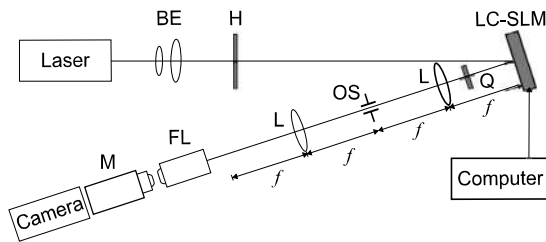


Fig. 5. Experimental setup used for generating and focusing the cylindrically polarized POV. BE beam expander, H half wave plate, Q quarter wave plate, L lens, f focal length, OS optical stop, FL focusing lens, M microscope.

Expressing the above $\text{sinn}\phi$ and $\text{cosn}\phi$ terms using Euler's formula and applying the same change of variable as before with due regard of the identity (25), Eqs. (29) and (30) can be written as

$$E_x^{\text{azi}} \propto \pi i^{n-1} [\exp(i2n\phi_Q) J_{2n}(kr) - J_0(kr)], \quad (31)$$

$$E_y^{\text{azi}} \propto -\pi i^n [\exp(i2n\phi_Q) J_{2n}(kr) + J_0(kr)], \quad (32)$$

This time the intensity distribution at the focal plane is given by

$$I^{\text{azi}} \propto |J_{2n}(kr)|^2 + |J_0(kr)|^2. \quad (33)$$

From this equation is clear that the field is transverse and comprises a tight central spot surrounded by concentric rings whose number, in this case, is lower than in the radial case. The normalized intensity distribution calculated from Eq. (33) for two values of the topological charge is shown in Fig. 4. It is worth to note that, for high topological charges the peak intensity is strongly concentrated in the small central spot at focal plane, for the particular case of $n = 1$ the FWHM of the spot is 0.34λ . Hence we have shown that by focusing an azimuthally polarized POV it is possible to create a tight focal spot.

5. Experiments and results

To verify the presented results in practice, we realized two experiments of focusing radially and azimuthally polarized POVs using the setup sketched schematically in Fig. 5. In these experiments the input beam is a linearly polarized monochromatic plane wave whose transverse width and polarization direction are adjusted by means of the beam expander and a half wave-plate respectively. The δ condition defining the perfect vortex can be approximated by codifying a thin annular mask in the modulator. We employed the computer-controlled

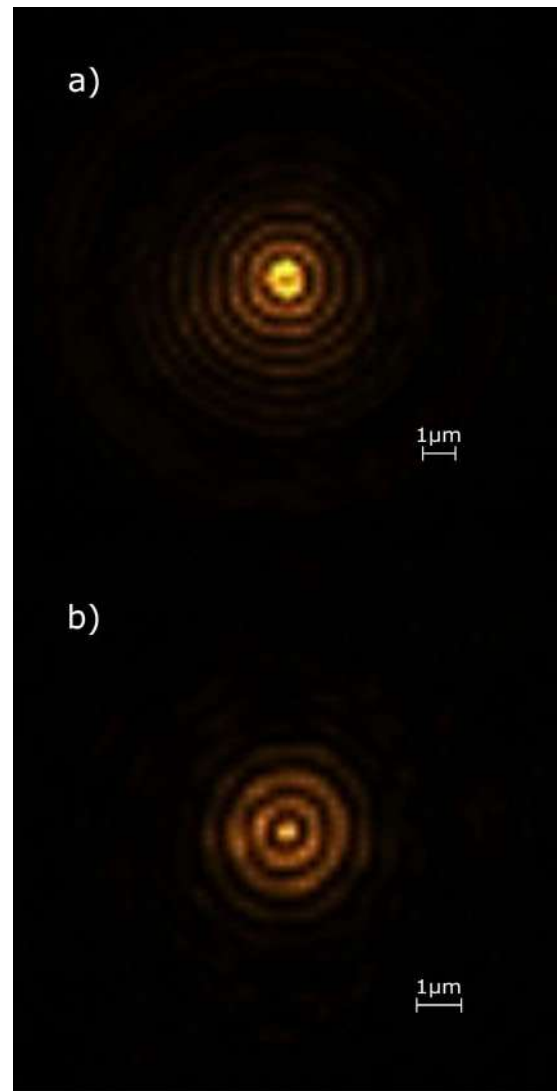


Fig. 6. Experimental results. (a) intensity distribution of the focused radially polarized POV, (b) intensity distribution of the focused azimuthally polarized POV.

phase-only reflective LC SLM Pluto-Vis from HoloEye Photonics AG with 1920×1080 pixel resolution and the radius of the active zone of 4.32 mm. A $4f$ imaging system with $f = 200$ mm and a low pass filter generate, at the entrance pupil of the focusing system, the image of a ring modulating zone displayed on the SLM. The ring modulating zone is taken to be 50 pixels width. The focusing system consists of a Newport microscope objective with 60x, and 0.85 NA. To register the results, we employed an Olympus microscope objective with 100x and 1.25 NA. Images were taken with a camera IMAGINGSOURCE DFK 33UX290 with 1920×1080 pixel resolution.

In the first experiment we focused the radially polarized POV. The theoretical value for the inner radius when $\text{NA} \approx 1$ is 0.15λ which is equivalent to $0.09 \mu\text{m}$. In this case however, for an objective microscope with 0.85 NA, the resulting focal field can be calculated from Eq. (26) in the form $I_z^{\text{rad}} \propto J_n^2(kr\text{NA})$. In this case, for $n = 1$, the corresponding value becomes 0.17λ which is equivalent to $0.11 \mu\text{m}$. This value is about 13% above the value attainable if an objective with $\text{NA} = 1$ were employed. Fig. 6a shows the intensity distribution at the focal plane exhibiting a well-defined dark hollow profile. The obtained field intensity distribution agrees well with the theoretical prediction. The inhomogeneities at the dark-hollow can be explained by the fact that the ring modulating zone displayed on the LC-LM is not continuous but

discrete and its width is not infinitely narrow but fixed to 50 pixels. In the second experiment we focused the azimuthally polarized POV. The theoretical value for the FWHM of the spot when $NA = 1$ is 0.34λ which is equivalent to $0.21 \mu\text{m}$. Analogous to the radial case, the resulting FWHM of the focal spot when $NA = 0.85$ can be calculated from Eq. (33). For $n = 1$, the calculated value is 0.41λ , which is equivalent to $0.25 \mu\text{m}$. This value is about 20% above the FWHM for the theoretical case when $NA = 1$. The transverse intensity distribution corresponding to the focal spot is shown in Fig. 6b. The obtained results confirm that a tight spot can be created by strong focusing of an azimuthally POV. Fig. 6b shows that the intensity distribution of the first rings appears higher than in the theoretical case. Such a difference can be explained by the fact that the ring aperture used to approximating the POV is not infinitely thin. A ring of width less than 50 pixels can be used at the expense of the total power available. We consider that the obtained results are a good approximation to strong focusing of the cylindrically polarized POV with a numerical aperture slightly lower than 1 as in practice is rather difficult to obtain an objective with exactly $NA = 1$.

Other research works have shown the possibility to obtain focal spots from radially polarized vortices and ring-shaped fields from azimuthally polarized vortices both with FWHM beyond the resolution limit. Here however, we have shown that it is also possible to obtain a ring shaped field by strong focusing of the radially polarized POV and a tight spot by strong focusing of the azimuthally polarized POV, including transverse profiles beyond the resolution limit. The obtained results can be useful when a ring-shaped field is desired from radial polarization and a small focal spot is desired from azimuthal polarization.

6. Conclusions

In conclusion we have proposed a new technique for generating a cylindrically polarized POV and investigated its focusing properties in the high NA regime. The proposed technique relies on a single LC-SLM whose director axis is rotated 45° with respect to the horizontal at the input of a $4f$ imaging system and is notable for the simplicity of its experimental realization. As an example of application, we have shown that by focusing radially and azimuthally polarized POVs it is possible to create a dark hollow field with inner radius of 0.15λ and a small spot of 0.34λ FWHM respectively in the high NA regime. We believe

the presented results can be of benefit in areas such as microscopy, imaging and micro manipulation.

References

- [1] A.S. Ostrovsky, C. Rickenstorff-Parrao, V. Arrizón, Generation of the “perfect” optical vortex using a liquid-crystal spatial light modulator, *Opt. Lett.* 38 (4) (2013) 534–536, <http://dx.doi.org/10.1364/OL.38.000534>.
- [2] J. García-García, C. Rickenstorff-Parrao, R. Ramos-García, V. Arrizón, A.S. Ostrovsky, Simple technique for generating the perfect optical vortex, *Opt. Lett.* 39 (18) (2014) 5305–5308, <http://dx.doi.org/10.1364/OL.39.005305>.
- [3] S.G. Reddy, P. Chithrabhanu, P. Vaity, A. Aadhi, S. Prabhakar, R. Singh, Non-diffracting speckles of a perfect vortex beam, *J. Opt.* 18 (5) (2016) 055602, <http://dx.doi.org/10.1088/2040-8978/18/5/055602>.
- [4] Z. Chen, T. Zeng, B. Qian, J. Ding, Complete shaping of optical vector beams, *Opt. Express* 23 (14) (2015) 17701–17710, <http://dx.doi.org/10.1364/OE.23.017701>.
- [5] M. Jabir, N.A. Chaitanya, A. Aadhi, G. Samanta, Generation of “perfect” vortex of variable size and its effect in angular spectrum of the down-converted photons, *Sci. Rep.* 6 (2016) 21877, <http://dx.doi.org/10.1038/srep21877>.
- [6] M. Chen, M. Mazilu, Y. Arita, E.M. Wright, K. Dholakia, Dynamics of microparticles trapped in a perfect vortex beam, *Opt. Lett.* 38 (22) (2013) 4919–4922, <http://dx.doi.org/10.1364/OL.38.004919>.
- [7] D. Deng, Y. Li, Y. Han, X. Su, J. Ye, J. Gao, Q. Sun, S. Qu, Perfect vortex in three-dimensional multifocal array, *Opt. Express* 24 (25) (2016) 28270–28278, <http://dx.doi.org/10.1364/OE.24.028270>.
- [8] P. Li, Y. Zhang, S. Liu, C. Ma, L. Han, H. Cheng, J. Zhao, Generation of perfect vectorial vortex beams, *Opt. Lett.* 41 (10) (2016) 2205–2208, <http://dx.doi.org/10.1364/OL.41.002205>.
- [9] S. Fu, T. Wang, C. Gao, Generating perfect polarization vortices through encoding liquid-crystal display devices, *Appl. Opt.* 55 (23) (2016) 6501–6505, <http://dx.doi.org/10.1364/AO.55.006501>.
- [10] Y. Ke, S. Chen, W. Shu, H. Luo, Generation of perfect vector beams based on the combined modulation of dynamic and geometric phases, *Opt. Commun.* 446 (2019) 191–195, <http://dx.doi.org/10.1016/j.optcom.2019.04.077>.
- [11] D. Li, S. Feng, S. Nie, C. Chang, J. Ma, C. Yuan, Generation of arbitrary perfect Poincaré beams, *J. Appl. Phys.* 125 (7) (2019) 073105, <http://dx.doi.org/10.1063/1.5079850>.
- [12] P. Pradhan, M. Sharma, B. Ung, Generation of perfect cylindrical vector beams with complete control over the ring width and ring diameter, *IEEE Photon. J.* 10 (1) (2018) 1–10, <http://dx.doi.org/10.1109/JPHOT.2018.2790175>.
- [13] X. Liu, Y. Li, Y. Han, D. Deng, D. Zhu, High order perfect optical vortex shaping, *Opt. Commun.* 435 (2019) 93–96, <http://dx.doi.org/10.1016/j.optcom.2018.11.029>.
- [14] S.N. Khonina, Vortex beams with high-order cylindrical polarization: features of focal distributions, *Appl. Phys. B* 125 (6) (2019) 100, <http://dx.doi.org/10.1007/s00340-019-7212-1>.
- [15] G. Arfken, m. Hans-Jürgen Weber, H. Weber, F. Harris, *Mathematical Methods for Physicists*, Elsevier, 2005.

Apéndice D

Participaciones en congresos

LX CONGRESO NACIONAL DE FÍSICA de la Sociedad Mexicana de Física 2017

Segundo Congreso Internacional "Luz, Ciencia y Arte" (II-CILCA)

LXII CONGRESO NACIONAL DE FÍSICA de la Sociedad Mexicana de Física 2019

puede elegir de tal manera que la familia de cáusticas coincida con los máximos del patrón de intensidad.

M2C010 Vórtice Óptico invariante en propagación Joaquín García García * (216570289@alumnos.fcfm.buap.mx), FCFM-BUAP; Andrey S. Ostrovsky (andreyo@fcfm.buap.mx), FCFM-BUAP. *Expositor.

En este trabajo se muestra la teoría y generación experimental de un vórtice óptico parcialmente coherente que se propaga en el espacio libre sin expansión por difracción. Por medio de la representación en modos coherentes se define a este tipo de haz como la suma ponderada de N funciones de Bessel con desfases aleatorios. Los resultados experimentales son verificados por medio de un arreglo experimental utilizando un modulador espacial de luz de cristal líquido de fase PLUTO-VIS.

M2C011 Modelo Teórico de un Biosensor de Resonancia de Plasmones Superficiales JOSUE COHENETE CRISOSTOMO* (cofeas@gmail.com), Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la UMSNH; Irving Rendón Ojeda (irving.rondon@gmail.com), Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la UMSNH; Mary Carmen Peña Gomar (mgomar@gmail.com), Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la UMSNH. *Expositor.

Los sensores de resonancia de plasmones superficiales (SPR, por sus siglas en inglés), miden el cambio del índice de refracción de una onda electromagnética proveniente entre un metal y un dieléctrico. Son básicamente sensores de campo evanescente que presentan alta sensibilidad en la detección de cambios ópticos en el material de análisis. En este trabajo se presenta un análisis teórico de un biosensor que está basado en el efecto de resonancia de plasmones superficiales. Se analiza la configuración de Kretschmann que utiliza un sistema de 3 y 4 capas sobre un prisma de vidrio SF10. Se muestra la simulación de las curvas SPR utilizando programación en MATLAB, permitiendo analizar propiedades ópticas como el espesor de la película y el índice de refracción. Las muestras biológicas estudiadas consistieron en componentes del ojo humano y una biopelícula de bacterias *E. Coli*. De esta forma, con el análisis de simulación de las curvas SPR se pueden encontrar los parámetros ópticos necesarios para establecer las condiciones experimentales para estudiar diferentes materiales biológicos.

M2C012 Difracción de Fraunhofer para la determinación del diámetro de alambres de cobre Jesus Alberto Soria Rojas,ESFM-IPN; Mauricio Emmanuel Juarez Peña*, ESFM-IPN; María Magdalena Mendez-González (mmendezg07@yahoo.com.mx), ESFM-IPN. *Expositor.

Se presentan los resultados del diámetro de nueve alambres de cobre, obtenidos mediante la aplicación de la difracción de Fraunhofer. La aplicación de esta técnica de difracción, permite obtener errores porcentuales muy pequeños en la determinación de los diámetros, lo que la constituye una herramienta relativamente sencilla de aplicar como método de control de calidad para alambres de diámetros de décimas de milímetros.

M2C013 Obtención del grosor de cabello humano mediante interferencia de luz Tania Argelia Vázquez Pérez, ESFM-IPN; Diego Ramírez Chávez*, ESFM-IPN; María Magdalena Méndez-González (mmendezg07@yahoo.com.mx), ESFM-IPN. *Expositor.

Se presentan los resultados del grosor del cabello de 15 mujeres y 15 hombres de 5 a 63 años y de 14 a 63 años respectivamente. Mediante la incidencia de luz láser en las muestras de cabello, se obtiene un patrón de difracción similar al que produce una doble rendija. Apareciendo un máximo principal de difracción fuertemente iluminado y a sus lados, separados por zonas oscuras otros máximos secundarios. Este máximo principal, aparece seccionado en una serie de zonas brillantes separadas por zonas oscuras, debido al fenómeno de interferencia producido por los bordes del cabello, resultando superpuestas la difracción y la interferencia. La determinación del grosor del cabello se realiza solamente en el máximo principal de difracción, obteniendo que el grosor del cabello en una persona mayor es más pequeño que el de una persona joven.

M2C014 Obtención de las funciones colorimétricas y de longitudes de onda equivalentes mediante aditividad cromática de la base RGB Jhonnatan Gama Vázquez* (jgamav3@gmail.com), ESFM-IPN; María Magdalena Méndez-González, ESFM-IPN. *Expositor.

Se obtuvo la longitud de onda equivalente correspondiente a la adición de diferentes flujos luminosos de los colores de la base cromática RGB a través de la generación de metámeros de colores cuya longitud de onda es conocida, presentando un error máximo del 4.35%. Con los coeficientes de distribución medidos se obtuvieron las funciones colorimétricas a partir de su ajuste a polinomios de segundo y tercer grado. Se propone este procedimiento experimental con el fin de acercarnos al estudio y naturaleza del color, así como a los fundamentos de la colorimetría y se da una metodología para la comprobación experimental de las Leyes de Grassman.

M2C015 Obtención de índices de refracción de soluciones usadas en estudios celulares in vitro, mediante el disco de Hartl, un refractómetro de sección cuadrada y polinomios de La-

acterización mediante métodos instrumentales, pasando por la investigación bibliográfica correspondiente.

PMJ22 Enfocamiento de un vórtice óptico perfecto cilíndricamente polarizado: Joaquín García García, joaquin.garcia.g@gmail.com, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas; Andrey S. Ostrovsky, andreyo@fcfm.buap.mx, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas; Miguel Angel Olvera Santamaría, molvera@fcfm.buap.mx, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

En numerosas aplicaciones en óptica es necesario obtener distribuciones de campo con resolución superior al límite de Rayleigh. Esto ha proporcionado múltiples ventajas de la observación de estructuras micro y nanométricas. Por otro lado, también ha hecho posible no solo observar sino confinar partículas para el estudio de la interacción de la radiación con la materia. En los últimos años se ha dado gran importancia al desarrollo de campos ópticos con polarización estructurada espacialmente y los resultados han evidenciado su capacidad para generar campos ópticos con dimensiones menores al límite de Rayleigh. En este trabajo abordamos el problema del enfocamiento, bajo abertura numérica grande, de un vórtice óptico cilíndricamente polarizado. Demostramos que es posible obtener un spot con tamaño de 0.34 a partir de un VOP azimutalmente polarizado y un campo anular con tamaño 0.62 a partir de un VOP radialmente polarizado. Se discuten algunas aplicaciones en atrapamiento óptico que ilustran las potenciales aplicaciones de los campos generados. Los resultados obtenidos indican que el enfocamiento de un VOP con polarización estructurada posibilita la generación de distribuciones de campo sub-difracción y es una herramienta con prometedoras aplicaciones en microscopía y micromanipulación.

PMJ23 Light propagation and phase retrieval: Viridiana Gonzáles Escalante, astral-fobos@hotmail.com, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla; Rigoberto Juárez Salazar, rjuarezsalazar@gmail.com, Instituto Politécnico Nacional, CITEDI; Carlos Ignacio Robledo Sánchez, crobledo@fcfm.buap.mx, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

In many metrological applications, the object phase has

a predominant importance. Interferometrical methods recover the object phase by adding a reference wavefront. However, this approach cannot be used in applications such as optical imaging and microscopy. A solution to this problem is provided by the Gerchberg-Saxton algorithm where the object phase is recovered using only the intensity of the optical field at two planes; namely, the image and Fourier planes. In this paper, we analyze the role of light propagation in the formulation of the Gerchberg-Saxton algorithm. The developed theoretical analysis is verified experimentally recovering the phase modulated with a spatial light modulator.

PMJ24 Derivada del frente de onda en el experimento de Young: Luis Mario Arellano Gonzalez, luis.m.arellano.g.3dv@gmail.com, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas; Ceciibet Mendoza Rodriguez, cecit_14_borr@hotmail.com, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas; Carlos Ignacio Robledo Sánchez, crobledo@fcfm.buap.mx, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas; Rigoberto Juárez Salazar, rjuarezsalazar@gmail.com, Instituto Politécnico Nacional, CITEDI

El patrón de franjas observado en el experimento de Young pone de manifiesto la naturaleza ondulatoria de la luz. El patrón observado se puede explicar usando dos principios físicos clave. El primero, conocido como principio de Huygens, sugiere que cada punto de un frente de onda se puede considerar como una fuente esférica secundaria. El segundo, conocido como principio de Fresnel, sugiere que el frente de onda propagado es el resultado de la superposición de los frentes de onda generados por las fuentes secundarias de Huygens. En este trabajo se usan los principios de Huygens y Fresnel para mostrar que el experimento de Young permite obtener la derivada de un frente de onda. Se muestran los resultados experimentales que verifican el análisis teórico realizado.

PMJ25 Relación de dispersión temporal 2D+1 y 3D+1: José de Jesús Salazar Arrieta, jose.arrieta@inaoep.mx, Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica

Se presenta los resultados obtenidos al analizar un circuito 3D, este circuito representa una red cúbica simple con celdas unitarias formadas en sus aristas por induc-

cimiento Coherente, que predice, además de las resonancias plasmónicas de partículas individuales, un nuevo modo a frecuencias menores. Asimismo se analizan las condiciones en las que esta excitación aparece al considerar nanopartículas de materiales realistas, como el oro y la plata, y se estudia su comportamiento como función del ángulo de incidencia, longitud de onda y fracción de cubierta. Asimismo, se propone el uso de este nuevo modo para biosensado.

M8404 “Eficiencia de la luminosidad de una fibra óptica simulada con las extensiones de TOPAS basadas en GEANT4” *Margarita Amaro Aranda (mgmaro1@gmail.com), Benemérita Universidad Autónoma de Puebla; Jorge Naoki Domínguez Kondo (Jorge.dominguezk@alumno.buap.mx), Benemérita Universidad Autónoma de Puebla; Eduardo Moreno Barbosa (emoreno@fcfm.buap.mx), Benemérita Universidad Autónoma de Puebla; Carlos Miguel Cuatrecatl* (carhendfend11@gmail.com), Benemérita Universidad Autónoma de Puebla; *Expositor.*

Se realizó la simulación de las características físicas de una fibra óptica del tipo BCF-10 la cual está optimizada para diámetros mayores a $250 \mu\text{m}$ que se identifica por tener un color azul en el espectro de luz visible y que cuenta con un pico de emisión de 432 nm a un tiempo de decaimiento de 2.7 ns y por la cual pasan aproximadamente del orden de 8000 fotones por Mev con las extensiones que ofrece TOPAS con la finalidad de obtener el porcentaje de pérdida de fotones al paso por la fibra óptica con las características antes mencionadas y con ello poder verificar la eficiencia y optimización con la que la fibra fue construida de acuerdo a la luminosidad emitida durante la simulación.

M8414 **Análisis de error por desalineación de una superficie esférica evaluada por deflectometría.** *Diana Nallely Castán Ricaño* (diana.ncr@gmail.com), Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica; Fermín Salomón Granados Agustín (fermin@inaoep.mx), Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica; Maximino Avendaño Alejo (maximino.avendano@icat.unam.mx), Universidad Nacional Autónoma de México; María Elizabeth Percino Zacarías (epercino@inaoep.mx), Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica; Alejandro Cornejo Rodríguez (acornejo@inaoep.mx), Universidad Nacional Autónoma de México; *Expositor.*

En el presente trabajo, se utiliza la deflectometría para medir la calidad de las superficies ópticas, por la precisión que se puede alcanzar. Para implementar esta técnica, se usa una pantalla para elegir algunos rayos incidentes que serán analizados. Para ello, se mide la intersección de los rayos elegidos al ser refractados por la superficie bajo prueba, en un plano de detección. Se usa una configuración nula la cual tiene un arreglo ordenado de puntos en el plano de detección, para ello se diseña la pantalla. Se ilumina la pantalla con un frente de onda esférico, la fuente puntual usada se coloca sobre el eje óptico junto con la

pantalla, con esto se garantiza tener una distribución nula. Sin embargo, si existen desalineaciones de la superficie bajo prueba una nueva distribución de puntos se observa y se necesita corregir. Se muestran algunas simulaciones cuando existe descentramiento e inclinación de la superficie óptica bajo prueba y como afecta en la evaluación de la superficie.

M8429 **ESCANEO 3D DE UNA SUPERFICIE OCULAR** *Omar Palillero Sandoval (omar.palillero@uaem.mx), Universidad Autónoma del Estado de Morelos; Mireya Lucia Hernández Jaimes* (mireyahj8@gmail.com), Universidad Autónoma del Estado de Morelos; Rafael Amador Condado Pérez (rafa_rx2@hotmail.com), Universidad Autónoma del Estado de Morelos; Abraham Bernal Franco (abraham.bernalfra@uaem.edu.mx), Universidad Autónoma del Estado de Morelos; *Expositor.*

En el presente trabajo se muestra un proceso de modelado 3D de objetos extendidos mediante la técnica Hoja de Luz, particularmente escaneando una superficie ocular, con el objetivo de realizar análisis dimensional así como las propiedades específicas que permitan detectar alguna irregularidad mediante un sistema híbrido óptico digital.

M8432 **Superando el límite de resolución de Rayleigh con un vórtice perfecto cilíndricamente polarizado.** *Joaquín García García* (216570285@alumnos.buap.mx), Benemérita Universidad Autónoma de Puebla; Miguel Angel Olvera Santamaría (molvera@fcfm.buap.mx), Benemérita Universidad Autónoma de Puebla; Andrey S. Ostrovsky (andreyo@fcfm.buap.mx), Benemérita Universidad Autónoma de Puebla; *Expositor.*

En numerosas aplicaciones en óptica es necesario obtener distribuciones de campo con resolución superior al límite de Rayleigh. Esto ha proporcionado múltiples ventajas de la observación de estructuras micro y nanométricas. Por otro lado, también ha hecho posible no solo observar sino confinar partículas para el estudio de la interacción de la radiación con la materia. En los últimos años se ha dado gran importancia al desarrollo de campos ópticos con polarización estructurada espacialmente y los resultados han evidenciado su capacidad para generar campos ópticos con dimensiones menores al límite de Rayleigh. En este trabajo abordamos teórica y experimentalmente el problema del enfocamiento, bajo abertura numérica grande, de un vórtice óptico cilíndricamente polarizado. Demostramos que es posible obtener un spot con tamaño de $.36\lambda$ a partir de un VOP azimutalmente polarizado y un campo anular con radio interno de $.145\lambda$ a partir de un VOP radialmente polarizado.

M8436 **GENERACIÓN DE UN VÓRTICE ÓPTICO PERFECTO CON POLARIZACIÓN CILÍNDRICA POR MEDIO DEL MODULADOR ESPACIAL DE LUZ DE CRISTAL LÍQUIDO** *Andrey S. Ostrovsky (andreyo@fcfm.buap.mx), Benemérita Universidad Autónoma de Puebla; Miguel Angel Olvera*

Bibliografía

- [1] AL Dudley and A Forbes, “Optical Vortices: Properties, Applications and Experiments”
- [2] Amol Jain , “Creation of Optical Vortices Using an Adjustable Spiral Phase Plate and Computer-Generated Holograms Physics”, Individual Project Siemens-Westinghouse Competition October 2005
- [3] A. M. Yao and M. J. Padgett, “Orbital angular momentum: origins, behaviour and applications”; *Advances in optics and photonics*. **3**, pp 161-204 (2011).
- [4] M. E. J. Friese, H. Rubinsztein-Dunlop, J. Gold, P. Hagberg and D. Hanstorp, “Optically driven micromachine elements” , *Appl. Phys. Lett.* **78**, 547-549 (2001).
- [5] A. Terray, J. Oakey and D. W. M. Marr, “Fabrication of linear colloidal structures for microfluidic applications”, *Appl. Phys. Lett.* **81**, 1555-1557 (2002).
- [6] C.-S. Guo, X. Liu, J.-L. He, and H.-T. Wang, “Optimal annulus structures of optical vortices”, *Opt. Express* **12**, 4625-4634 (2004).
- [7] C.-S. Guo, X. Liu, X.-Y. Ren, and H.-T. Wang, “Optimal annular computer-generated holograms for the generation of optical vortices”, *J. Opt. Soc. Am. A* **22**, 385-390 (2005).
- [8] J. Lin, X.-C. Yuan, S. H. Tao, and Burge, “Variable-radius focused optical vortex with suppressed sidelobes”, *Opt. Lett.* **31**, 1600-1602 (2006).
- [9] J. Chen, X.-C. Yuan, X. Zhao, Z. L. Fang, and S. W. Zhu, “Generalized approach to modifying optical vortices with suppressed sidelobes using Bessel-like functions”, *Opt. Lett.* **34**, 3289-3291 (2009).
- [10] R. Vasilyeu, A. Dudley, N. Khilo, and A. Forbes, “Generating superposition of higher-order Bessel beams”, *Opt. Express* **17**, pp., 23389-23395 (2009).
- [11] V. Arrizón, D. Sánchez-de-la-Llave, U. Ruiz, and G. Méndez, “Efficient generation of an arbitrary nondiffracting Bessel beam employing its phase modulation”, *Opt. Lett.* **34**, pp. 1456-1458 (2009).
- [12] J. Chen, X. Zhao, Z. Fang, and X.-C Yuan, “Explicit relations and optimal parameters for sidelobe suppression in optical vortices with a modified Bessel function”, *J. Opt. Soc. Am. A* **27**, pp. 935-940 (2010).
- [13] J. Chen, Y. Yu, and F. Wang, “Production of annular flat-top vortex beam”, *Chinese Opt. Lett.* **9**, pp. 1-4 (2011).
- [14] A. S. Ostrovsky, C. Rickenstorff-Parrao and V. Arrizón; “Generation of the perfect optical vortex using a liquid crystal spatial light modulator”, *Opt. Lett.* **38**, 534-536 (2013).

- [15] A. S. Ostrovsky, C. Rickenstorff-Parrao, J. García-García, V. Arrizón, and R. Ramos-García. “Simple technique for generating the perfect optical vortex”, *Opt. Lett.* **39**, no 19 (2014).
- [16] Zhiyuan Qin, Rumao Tao, Pu Zhou, Xiaojun Xu, and Zejin Liu, “Coherence evolution of partially coherent beams carrying optical vortices propagating in non-Kolmogorov turbulence”, *Appl. Opt.* **52**, 8176-8183 (2013).
- [17] T. Alieva, J. A. Rodrigo, A. Cámara, and E. Abramochkin2, “Partially coherent stable and spiral beams”, *J. Opt. Soc. Am. A*, **30**, No. 11, November 2013.
- [18] Zhu Y, Chen M, Zhang Y, Li Y. “Propagation of the OAM mode carried by partially coherent modified Bessel-Gaussian beams in an anisotropic non-Kolmogorov marine atmosphere”, *J Opt Soc Am A Opt Image Sci Vis*. December 2016.
- [19] Qin, Zhiyuan; Tao, Rumao; Zhou, Pu; Xu, Xiaojun; Liu, Zejin, “Propagation of partially coherent Bessel-Gaussian beams carrying optical vortices in non-Kolmogorov turbulence”, *Optics and Laser Technology*, **56**, p. 182-188. (2014).
- [20] S. A. Ponomarenko, “A class of partially coherent beams carrying optical vortices”, *J. Opt. Soc. Am. A* **18**, 150-156 (2001)
- [21] G. Gbur and T. Visser, “vortices in partially coherent beams”, *Opt. Vommun.* **222**, 117-125 (2003).
- [22] F. Gori, M. Santarisiro, R. Borghi, and S. Vicalvi, “Partially coherent sources with helicoidal modes”, *J. Mod. OPT.* **45**, 539-554 (1998).
- [23] G. A. Swartzlander, Jr. And J. Schmit, “Temporal correlation vortices and topological dispersion.”. *Phys. Rev. Lett.* **99**, 163901 (2007).
- [24] Q. Zhan, “Cylindrical vector beams: from mathematicla concepts to applications”. *Advances in Optics and Photonics*, **1**, pp 1-57, (2008).
- [25] S. E. Skelton, M. Sergides, R. Patel, E. Karczewska, O. M. Maragó and P-H. Jones, “Optical trapping and optical binding using cylindrical vectro beams”, *Attidella Accademia Peloritana dei Pericolanti*, **89**, (2011).
- [26] Q. Zhan, “Trapping metallic rayleigh particles with radial polarization”, *Opt. Express*, **12**, pp. 3377-3382, (2004).
- [27] I. Iglesias and J. J. Sáenz, “Light spin forces in optical traps: comment on Trapping metallic Rayleigh particles with radial polarization”. *Opt. Express*, **20**, pp. 2832-2834, (2012).
- [28] A. Yariv and P. Yeh. “Optical waves in crystals”. *John WileydSons USA* (1984)
- [29] P.G de Gennes. “The physics of liquid crystals”. *Clarendon Press Oxford* (1975) Cap. 3.
- [30] A. Hermerschmidt, S. Quiram, F. Kallmeyer and H.J. Eichler. “Determination of the Jones Matrix of an LC cell and derivation of the physical parameters of LC molecules”. Hojas del fabricante Holoeye, 2007.
- [31] F. Bruyneel, H. De Smet, J. Vanfleteren and A. Van Calster. “Method for measuring the cell gap in liquid crystal displays”. *Opt. Eng.* **40**, pp. 259-267, (2001).
- [32] J.L. Pezzantini and R.A Chipman. “Phase only modulation of twisted nematic liquid-crystal display by the use of eigenpolarization states”. *Opt. Lett.* **18**,pp. 1567-1569, (1993).

- [33] M. Yamauchi. “Origin and characteristics of amiguous properties on measuring physical parameters of twisted-nematic liquid crystal spatial light modulators”. *Opt. Eng.*, **41**, pp. 1134-1141, (2002).
- [34] M. Yamauchi. “Jones-matrix models for twisted-nematic liquid-crystal devices”. *Appl. Opt.*, **44**, pp. 4484-4493, (2005).
- [35] Ruslan Vasilev, Angela Dudley, Nikolai Khilo, Andrew Forbes, Piotr Ropot. “Controlling the evolution of non diffracting speckle by complex amplitude modulation on a phase only spatial lighth modulator.”, *Opt. Comm.* **285**, pp. 5-12, (2012)
- [36] J. Durin “Exact solutions fo nondiffracting beams In The escalar theory.”, *J. Opts. Soc. Am. A*, Vol. **4**, No. 4, PP. 651-654 (1987).
- [37] F. Gori and G. Guattari, “Bessel-Gaussian beams.”, *Opt. Commun.*, Vol. **64**, No. 6, pp. 491-495 (1987).
- [38] F. Gori, “Mode propagation of the field generated by Collet-Wolf Schell-mode sources.”, *Opt Commun.*, Vol. **46**, No.3-4, pp. 149-154 (1983).
- [39] I. D. Maleev and G. A. Swartzlander, Jr., “Propagation of spatial correlation vortices,” *J. Opt. Soc. Am. B* **25**, 915-922 (2008)
- [40] J. Durnin, J. J. Miceli, Jr., and J. H. Eberly, “Comparison of Bessel and Gaussian beams.”, *Opt. Lett.*, Vol. **13**, No. 2, pp. 79-80 (1988).
- [41] J. C. Gutiérrez-Vega, M. D. Iturbide-Castillo, and S. Chávez-Cerda, “Alternative formulation for invariant optical fields: Mathieu beams.” *Opt. Lett.*, Vol. **25**, No. 20, pp. 1493-1495 (2000).
- [42] S. Chávez-Cerda and G. H. C. New, “Evolution of focused Hnakerl waves and Bessel beams.” *Opt. Commun.*, Vol. **181**, No. 4-6, pp. 369-377 (2000).
- [43] J. Durnin, J. J. Miceli, Jr., and J. H. Eberly, “Diffraction-free beams.” *Phys. Rev. Lett.*, Vol. **58**, No. 14, pp. 1499-1501 (1987).
- [44] L. Vicari, “Truncation of non-diffracting beams.”, *Opt. Commun.*, Vol. **70**, No. 4, pp. 263-266 (1989).
- [45] J. Ojeda-Castaleda and A. Noyola-Iglesias, “Nondiffracting wave fields in GRIN and free-space.”, *Microwave and Opt. Techn. Lett.*, Vol. **3**, No. 12, pp. 430-433 (1990).
- [46] F. Bloisi and L. Vicari, “Comparison of nondiffracting laser beams.”, *Opt. Commun.*, Vol. **75**, No. 5-6, pp 353-357 (1990).
- [47] Z. Bouchal anda M. Olivík, “Non-diffractive vector Bessel beams.”, *J. Modern Opt.*, Vol. **21**, No. 8, pp. 1555-1566 (1995).
- [48] S. Chávez-Cerda and M. A. Meneses-Nava, “Interference of traveling non-diffracting beams.” *Opt. Lett.*, Vol. **23**, No. 24, pp. 1871-1873 (1998).
- [49] R. Piestun and J. Shamir, “Generalized propagation-invariant wave fields.”, *J. Opt. Soc. Am. A*, Vol. **15**, No. 12, pp. 3039-3044 (1998).
- [50] G. Indebetouw, “Nondiffracting optical fields: some remarks on their analysis and synthesis.”, *J. Opt. Soc. Am. A*, Vol. **6**, No. 1, pp. 150-152 (1989).
- [51] J. Turunen, a. Vasara, and A. T. Fridberg, “Holographic generation of diffraction-free beams.” **Appl. Opt.**, Vol. **27**, No. 19, pp. 3959-3962 (1988).

- [52] A. Vasara, J. Turunen, and A. T. Friedberg, “General diffraction-free beams produced by computer-generated holograms.” *Proc. SPIE*, Vol. **311**, pp. 85-89 (1989).
- [53] A. Vasara, J. Turunen, and A. T. Friberg, “Realization of general nondiffracting beams with computer generated holograms.” *J. Opt. Soc. Am. A*, Vol. 6, No. 11, pp. 1748-1754 (1989).
- [54] G. Scott and N. McArdle, “Efficient generation of nearly diffraction-free beams using an axicon.” *Opt. Eng.*, Vol. **31**, No. 12, pp. 2641-2643 (1992).
- [55] V. Kettunen and J. Turunen, “Propagation-invariant spot arrays.”, *Opt. Lett.*, Vol. **23**, No. 16, pp. 1247-1249 (1998).
- [56] R. M. Herman and T. A. Wiggins, “Production and uses of diffractionless beams.”, *J. Opt. Soc. Am. A*, Vol. **8**, No. 6, pp. 932-942 (1991).
- [57] P. Szwaykoyski and J. Ojeda-Castañeda, “Nondiffracting beams and the self-imaging phenomenon.”, *Opt. Commun.*, Vol. **83**, No. 12, pp. 1-4 (1991).
- [58] J. Rogel-Salazar, G. H. C. New, and S. Chávez-Cerda, “Bessel-Gaussian beams optical resonator.”, *Opt. Commun.*, Vol. **190**, No. 1-3, pp. 117-122 (2001).
- [59] G. Häusler and W. Heckel, “Light sectioning with large depth and high resolution.”, *Appl. Opt.*, Vol. **27**, No. 24, pp. 5165-5169 (1988).
- [60] M. Florjanczyk and R. Tremblay, “Guiding of atoms in traveling-wave laser trap formed by axicon.”, *Opt. Commun.*, Vol. 73, No. 6, pp. 448-450 (1989).
- [61] K. M. Iftekharuddin and M. A. Karim, “Heterodyne detection by using a diffraction-free beam: tilt and offset effects.”, *Appl. Opt.*, Vol. **31**, No. 23, pp. 4853-4856 (1992).
- [62] Y. Ohtsuka, Y. Nozoe, and Y. Imai, “Acoustically modified spatial coherence in optical Fresnel diffraction región.”, *Opt. Commun.*, Vol. **35**, No. 2, pp. 157-160 (1980).
- [63] Y. Ohtsuka, “Non-modified propagation of optical mutual intensity in the Fresnel diffraction región.”, *Opt. Commun.*, Vol. **39**, No. 5, pp. 283-286 (1981).
- [64] J. Turunen, A. Vasara, and A. T. Friedberg, “Propagation invariance and self-imaging in variable-coherent optics.”, *J. Opt. Soc. Am. A*, Vol. **8**, No. 2, pp. 282-289 (1990).
- [65] A.S. Ostrovsky, “Coherent-mode Representations in Optics.”, SPIE Press, Bellingham, Washington USA, ISBN:0-8194-6350-7, (2006).
- [66] L. Mandel, E. Wolf, “Optical Coherence and Quantum Optics.”, Cambridge University, (1995).
- [67] M.A. Olvera Santamaría, J.L. Rodríguez Garcíapiña, J. García García, A.S. Ostrovsky, “Generation of a partially coherent secondary source with Bessel-mode vortex structure by liquid crystal spatial light modulator.”, *Opt. Commun.*, Volume **439**, 312-316, (2019).
- [68] Martin J. Bastiaans, “New class of uncertainty relations for partially coherent light,” *J. Opt. Soc. Am. A* **1**, 711-715 (1984).
- [69] Haldun M. Ozaktas, Talha Cihad Gulcu, and M. Alper Kutay, “Linear algebraic theory of partial coherence: continuous fields and measures of partial coherence,” *J. Opt. Soc. Am. A* **33**, 2115-2124 (2016).
- [70] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, “Table of Integrals.”, Series, and Products, 5th ed., Academic Press, New York (1994).

- [71] S.G. Reddy, P. Chithrabhanu, P. Vaity, A. Aadhi, S. Prabhakar, R. Singh, “Nondiffracting speckles of a perfect vortex beam.”, *J. Opt.* **18** (5), 055602,(2016).
- [72] Z. Chen, T. Zeng, B. Qian, J. Ding, “Complete shaping of optical vector beams.”, *Opt. Express* **23** (14), 17701?17710,(2015).
- [73] M. Jabir, N.A. Chaitanya, A. Aadhi, G. Samanta, “Generation of “perfect” vortex of variable size and its effect in angular spectrum of the down-converted photons.”, *Sci. Rep.* **6** ,21877,(2016).
- [74] M. Chen, M. Mazilu, Y. Arita, E.M. Wright, K. Dholakia, “Dynamics of microparticles trapped in a perfect vortex beam.”, *Opt. Lett.* **38** (22) , 4919?4922,(2013).
- [75] D. Deng, Y. Li, Y. Han, X. Su, J. Ye, J. Gao, Q. Sun, S. Qu, “Perfect vortex in three-dimensional multifocal array.”, *Opt. Express* **24** (25), 28270?28278,(2016).
- [76] Li, Y. Zhang, S. Liu, C. Ma, L. Han, H. Cheng, J. Zhao, “Generation of perfect vectorial vortex beams.”, *Opt. Lett.* **41** (10) ,2205?2208, (2016).
- [77] S. Fu, T. Wang, C. Gao, “Generating perfect polarization vortices through encoding liquid-crystal display devices, *Appl. Opt.* **55** (23), 6501?6505, (2016).
- [78] Y. Ke, S. Chen, W. Shu, H. Luo, “Generation of perfect vector beams based on the combined modulation of dynamic and geometric phases.”, *Opt. Commun.* **446** ,191?195, (2019).
- [79] D. Li, S. Feng, S. Nie, C. Chang, J. Ma, C. Yuan, “Generation of arbitrary perfect Poincaré beams.”, *J. Appl. Phys.* **125** (7), 073105, (2019).
- [80] P. Pradhan, M. Sharma, B. Ung, “Generation of perfect cylindrical vector beams with complete control over the ring width and ring diameter.”, *IEEE Photon. J.* **10** (1), 1?10,(2018).
- [81] Han W, Yang Y, Cheng W et al (2013) Vectorial optical field generator for the creation of arbitrarily complex fields. *Opt Express* 21: 20692-20706.
- [82] Dennis G. Hall, ”Vector-beam solutions of Maxwell’s wave equation,”*opt. Lett.* **21**, 9-11 (1996)
- [83] Zhang, Yuquan, Dou, Xiujie and Yang, Yong and Xie, Chen and Bu, Jing and Min, Changjun and Yuan, Xiacong. (2017). Flexible generation of femtosecond cylindrical vector beams. *Chinese Optics Letters*.
- [84] X. Liu, Y. Li, Y. Han, D. Deng, D. Zhu, “High order perfect optical vortex shaping.”, *Opt. Commun.* **435**, 93?96, (2019).
- [85] S.N. Khonina, “Vortex beams with high-order cylindrical polarization: features of focal distributions.”, *Appl. Phys. B*, **125** (6) 100,(2019).
- [86] I. Moreno, J. Davis, D. Cottrell, and R. Donoso, “Encoding high-order cylindrically polarized light beams.”, *Appl. Opt.* , **53**, 5493-5501 (2014).
- [87] Wolf E. and Gabor Dennis, “Electromagnetic diffraction in optical systems - I. An integral representation of the image field”253 *Proc. R. Soc. Lond. A*.
- [88] Richards B. , Wolf E. and Gabor Dennis, “Electromagnetic diffraction in optical systems, II. Structure of the image field in an aplanatic system”253 *Proc. R. Soc. Lond. A*.
- [89] Török, P. Varga, Z. Laczik, and G. R. Booker, “Electromagnetic diffraction of light focused through a planar interface between materials of mismatched refractive indices: an integral representation,” *J. Opt. Soc. Am. A*, **12**, 325-332 (1995).

- [90] Griffiths, David J., “Introduction to Electrodynamics. Upper Saddle River.”, N.J.: Prentice Hall, (1999).
- [91] Jackson, John David. “Classical electrodynamics.”, 3rd ed. New York, NY: Wiley, (1999).
- [92] Iwo Bialynicki-Birula, Zofia Bialynicka-Birula, “Canonical separation of angular momentum of light into its orbital and spin parts.”, *Journal of Optics*, **13**, 063014 (2011).
- [93] Saleh, Bahaa E. A., and Malvin Carl Teich. “Fundamentals of Photonics.”, New York: Wiley, (1991).
- [94] L. Allen, M. Padgett, and M. Babiker, “The orbital angular momentum of light.”, *Prog. Opt.* **39**, 291-372 (1999).
- [95] J. W. Simmons and M. J. Guttman., “States, Waves, and Photons: a Modern Introduction to Light.” (Addison-Wesley, (1970).
- [96] L. Allen, M. W. Beijersbergen, R. J. C. Spreeuw, and J. P. Woerdman, “Orbital angular-momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes.”, **Phys. Rev. A** **45**, 8185-8189 (1992).
- [97] L. Allen, M. Padgett, and M. Babiker, “The orbital angular momentum of light.”, *Prog. Opt.* **39**, 291-372 (1999).
- [98] Alison M. Yao and Miles J. Padgett, “Orbital angular momentum: origins, behavior and applications,” *Adv. Opt. Photon.* **3**, 161-204 (2011)
- [99] Joshua W. Shaevitz, *Apractical Guide to Optical Trapping*, August 22, (2006).
- [100] Thomas Gaboriski ,Zhi Liao. *Optical Traps*.
- [101] Niemien et al. 2007.
- [102] M. Woerdemann, *Structured Light Fields*, Chapter 2, Springer Theses, Berlin (2012)