BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

"SISTEMA PARA COADYUVAR AL DESARROLLO DE HABILIDADES COGNITIVAS NECESARIAS EN LA RESOLUCIÓN DE ECUACIONES ALGEBRAICAS DE PRIMER GRADO"

TESIS

Que para obtener el grado de

LICENCIATURA EN INGENIERÍA EN CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN

Presenta

LÁZARO REYES FLORES

Asesores

DRA. EUGENIA ÉRICA VERA CERVANTES

DR. MARIO AURELIO RODRÍGUEZ PINEDA

PUEBLA NOVIEMBRE, 2019

Dedico este trabajo:

A mis padres Víctor y Pascuala, por su siempre apoyo incondicional.

A mis hermanos Víctor y Luz María con sus respectivas parejas Angélica y Juan por su comprensión y apoyo.

A mi hijo José Geovany que fue quien me alentó para lograr esta meta, y quien fue el que más ha sufrido a lo largo de esta carrera, porque su existencia ha sido y será siempre el motivo más grande que me ha impulsado para alcanzar este y muchos otros propósitos.

A él quiero decirle: gracias, pues por muy mal que estén las cosas, tengo tu confianza, apoyo y tu hermosa presencia a mi lado.

Agradecimientos

En primer lugar, agradezco a mi asesora de tesis la Doctora Eugenia Érica Vera Cervantes, por su tiempo y atenciones al aporte y revisión para la elaboración de esta tesis.

Agradezco también, a mi asesor de tesis el Doctor Mario Aurelio Rodríguez Pineda, por su esfuerzo y dedicación, sus conocimientos y orientación, así también su paciencia y apoyo incondicional, ya que fue el principal pilar de lograr esta meta y ayudarme siempre a ser una mejor persona.

Expreso mi gratitud infinita a cada uno de los profesores de la Facultad de Ciencias de la Computación, quienes con su apoyo y dedicación compartieron sus conocimientos para que lograra concluir mi formación académica.

A mis amigos y compañeros: Enrique Márquez por su paciencia al momento de asesorarme cuando fue necesario, y por aconsejarme para mejorar este trabajo de tesis; Miguel Ángel Ramírez por su honestidad y consejos, José Luis Bolaños por su paciencia y actitud, pues con la ayuda de ellos pude salir adelante en esta etapa que compartimos.

A mi abuela María de la Luz González, a mi tío Aarón Reyes y mi primo Santiago Guevara por su apoyo y motivación en algunos momentos cruciales de esta meta.

Asimismo, agradezco al honorable jurado que se ha tomado la molestia de brindarme un poco de su tiempo para leer y juzgar el presente trabajo.

Contenido

Introducción

El papel de la Educación es fundamental en todas las culturas, pues puede ser promotora del desarrollo de los países. Este es un hecho reconocido por la UNESCO a través de su Comisión Internacional sobre la Educación para el Siglo XXI, y también por distintos organismos nacionales e internacionales. Todas esas organizaciones consideran a la educación como “una posibilidad al servicio del desarrollo humano para combatir la pobreza, la exclusión, la intolerancia, la opresión y las guerras”.

Sin embargo, de acuerdo a parámetros nacionales e internacionales, la Educación en México es de bajo nivel. De ello hay diversas evidencias, tanto personales como institucionales. Por ejemplo, de acuerdo a los resultados de las pruebas ENLACE (actualmente PLANEA) y PISA (**P**rograma **I**nternacional para la **E**valuación de los **A**lumnos) (Secretaría de Educación Pública), la mayoría de los y las jóvenes, “no tiene potencial para realizar actividades de alta complejidad cognitiva, científicas u otras”.

Con base en esos resultados, representantes de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE) en México (como Blanca Rubio) (Diario la Jornada 2007), han opinado sobre qué fuerza laboral tendrá nuestro país: “Un porcentaje alto no tiene los requisitos mínimos indispensables para desempeñar tareas productivas o para seguir adelante en sus estudios; “no podrá realizar más allá de las labores mecánicas asociadas a la fuerza física”.

Para abandonar tal situación, el sistema educativo oficial ha realizado reformas en las cuales se incluye el uso de las tecnologías de la información. Sin embargo, la mayoría de esas constan solamente de software para presentar información y conocimiento, dejando un papel pasivo al sujeto cognoscente. Este rol no le permite practicar y adquirir las habilidades cognitivas necesarias para poder tener el llamado pensamiento complejo. Esa es una posible causa por la cual los jóvenes mexicanos ocupan los últimos lugares en los exámenes nacionales e internacionales mencionados líneas arriba. Por ello, en el presente trabajo se ha diseñado y elaborado un sistema computacional que va más allá de la participación pasiva del sujeto cognoscente, donde éste participe activamente, y al mismo tiempo que desarrolla ciertas habilidades cognitivas, adquiera un conocimiento matemático.

Por otra parte, respecto al uso de la inclusión del software en el aprendizaje, en los últimos tiempos ha habido un gran desarrollo de software interactivo para apoyar metodologías de aprendizaje en muchas y variadas áreas, debido a que algunos autores piensan que tecnologías como software, multimedios e Internet, pueden constituirse en “buenas herramientas” para diseñar ambientes de software que faciliten y estimulen la construcción de aprendizajes. Es tan abundante la producción en ese sentido, que para identificar el tipo de software algunos autores lo han clasificado a partir del rol del sujeto cognoscente, el papel de la tecnología y las demandas conductuales y cognitivas del software: Software para presentar información y conocimiento, software para representar información y conocimiento, y software para construir información y conocimiento.

El producto del presente trabajo puede considerarse parcialmente en la última clase mencionada, ya que se pretende a través de la participación activa del sujeto cognoscente, que él mismo reconstruya el método para resolver ecuaciones algebraicas de primer grado, usando los resultados adecuados de las estructuras algebraicas. Es un software educativo con requerimientos más activos y flexibles, donde el sujeto cognoscente pueda hacer cosas con el software y no que el software haga cosas con él. Este tipo de software se caracteriza por reutilizar conceptos e ideas de los juegos computacionales, pero con el valor agregado de la puesta de contenidos de aprendizaje explícitos, y con la intencionalidad de desarrollar o estimular el uso de algún proceso cognitivo y la obtención de aprendizaje.

Lo hemos desarrollado de esa manera porque es sabido que cualquier método de enseñanza asume diferentes posiciones epistemológicas. Algunas consideran al objeto cognoscible como realidad objetiva preexistente al intelecto y a la voluntad del sujeto; perciben al sujeto cognoscente como perceptivo, contemplativo, pasivo y receptivo, que concibe a la realidad como parte de su producción. Como consecuencia de tales concepciones, en el terreno educativo se tiene la existencia de docentes que transmiten información, vigilan su correcto aprendizaje y tratan de evitar errores en los alumnos, imponen su visión del mundo e inculcan sus valores como los más adecuados para la vida. Como consecuencia de ello se obtiene un estudiante dependiente, inseguro, apático, pasivo, individualista, superficial e imitador acrítico.

Por otro lado, existen posiciones epistemológicas que conciben al objeto cognoscible como una realidad objetiva social, multifacética, multideterminada, histórica, influyente e influenciable. Perciben al sujeto cognoscente como activo, creador, que interactúa con el objeto transformándolo y transformándose. Resultado de ello, es un educando independiente, activo, propositivo, seguro de sí, solidario y creativo.

En el presente trabajo compartimos esta última posición epistemológica. Por eso, hemos elaborado una *Base Orientadora de la Acción* (**BOA**) (Piaget, J.1976, Talízina, N. F. 1981) con soporte en la *Teoría de la Actividad* (Lakatos Imre., 1976) y el *Paradigma Constructivista Histórico-Cultural* (Chávez Uribe Alfonso).

La BOA que proponemos consiste de un software interactivo que permite al usuario por un lado practicar el uso de las propiedades de *campo* necesarias para resolver ecuaciones algebraicas de primer grado; y por otra parte, promover en sí mismo el desarrollo de algunas estructuras mentales asociadas al mismo tema matemático, específicamente la *reversibilidad*; la cual, según Piaget (Patiño Garzón Luceli.), si su presencia es endeble en un ser humano, éste no tiene la capacidad de devolverse, y tendrá una visión limitada de la realidad, lo que le impedirá la consolidación de su pensamiento formal, pues *reversibilidad* “es la capacidad para ejecutar una acción en los dos sentidos y la base para el razonamiento lógico”.

El presente trabajo está organizado en tres capítulos. En el primer capítulo se presentan tanto las razones que le dieron origen, como la justificación desde el punto de vista psicopedagógico. El segundo capítulo contiene algunos conceptos formales necesarios para resolver ecuaciones algebraicas, particularmente las de primer grado, como son el de *campo* y algunas de sus propiedades, y se muestra cómo se aplican éstas para resolver sistemas de ecuaciones lineales en el *anillo de matrices*. Finalmente, en el tercer capítulo se explican los aspectos técnicos de la programación realizada para la elaboración del software.

CAPÍTULO I
MARCO TEÓRICO

Como se ha mencionado en la introducción, todo método de enseñanza conlleva diversas concepciones epistemológicas, y en este trabajo hemos considerado aquella que asume al objeto cognoscible como una realidad objetiva y multifacética, y asume al sujeto cognoscente como activo, creador, que interactúa con el objeto transformándolo y transformándose. Esto es coincidente con el pensamiento de Paulo Freire (Freire Paulo, 2002) quien afirmaba: "*Quien forma se forma y reforma al formar, y quien es formado se forma y reforma al ser formado*".

Por eso hemos recurrido al paradigma constructivista histórico cultural, cuyas características consideradas en el presente trabajo, serán mencionadas a continuación.

1.1. Paradigma Constructivista Histórico-Cultural

Existe mucha literatura relacionada con este paradigma (Medina Liberty Adrián), (Talízina, N. F. 1993, Vygotsky, L. S. 1978). Aquí nos limitaremos a mencionar algunos aspectos relacionados directamente con el presente trabajo.

Según Vygotski, el ser humano es un ser sociocultural desde su nacimiento, que va internalizando paulatinamente los distintos *sistemas simbólicos*.

Así, por ejemplo, de cero a dos años se tiene un lenguaje comunicativo en el cual los símbolos son el llanto, la sonrisa, las gesticulaciones, etc. Posteriormente, al aprender a hablar paulatinamente nos apropiamos de los signos lingüísticos. Según esta concepción, sólo después de haberse apropiado del lenguaje comunicativo y del lenguaje hablado, puede el ser humano aprender los símbolos propios de la matemática.

Para Vygotski, **"***la mente es la apropiación de esos sistemas simbólicos*" (*mente semiótica*). Por eso, una de las tareas de la educación, es la de *inducir* al educando para que se vaya apropiando de los diversos sistemas simbólicos propios del conocimiento que se pretende aprenda.

Por eso, en el software elaborado en el presente trabajo, antes de presentar el método de resolver ecuaciones algebraicas usando las propiedades necesarias de la estructura algebraica llamada *campo*, se proponen actividades accesibles al sujeto cognoscente como lo son las diferencias y semejanzas, mismas que se manifiestan en la identificación del elemento "intruso" en un conjunto dado, así como en la presentación de secuencias cuyos términos deben ser presentados en el orden inverso. Ambos tipos de actividades corresponden a dos de las estructuras mentales madre.

Pero, ¿Cómo podemos *inducir* al educando?

La Teoría de la actividad (Leontiev, A., 1981) nos da una respuesta.

1.2. Teoría de la Actividad

Esta teoría se debe al psicólogo Leontiev (1981), seguidor de Vygotski. Leontiev define la actividad como categoría rectora, concebida esta como un proceso de solución por el hombre, de tareas vitales, impulsado por el objetivo a cuya consecución está orientado y que refleja alguna necesidad.

El cumplimiento de la *acción* por el sujeto presupone siempre la existencia de determinado objetivo que, a su vez, se alcanza sobre la base de cierto motivo. La *acción* está siempre dirigida al objeto material o ideal.

El cumplimiento de la *acción* por el sujeto presupone la existencia en este último de una determinada representación tanto de la *acción* que se cumple como de las condiciones en las que esta *acción* se cumple.

El ejecutor de las acciones examinadas es siempre el sujeto de la *acción*. Finalmente, toda *acción* incluye un determinado conjunto de operaciones.

El *aprendizaje*, de acuerdo con la teoría de Leontiev, es una *actividad o sistema de actividades.*

Por otra parte, la *teoría de la actividad* explica cómo se ajusta el individuo al contexto y a las condiciones bajo las cuales cambia su pensamiento, y hace referencia a tres condiciones particulares: *la interacción con los objetos, con los otros y con el yo.*

La *actividad* se concibe como estructuras y sistemas que producen eventos a partir de las mediaciones.

La *acción*, por su parte, es la unidad de análisis para construir un objeto específico a través de operaciones mentales.

La actividad relaciona al sujeto con un objeto, un objetivo y las herramientas del pensamiento.

Es necesario tener en cuenta los aspectos que se relacionan con la actividad como categoría psicológica, a partir de los cuales se considera al hombre dentro de un permanente sistema de relaciones con el mundo y con los demás individuos, cuya base es su propia actividad en el interior de este sistema, con el cual interactúa de manera constante.

Leontiev considera que *"la actividad no es una reacción ni un conjunto de reacciones, sino un sistema que tiene estructura, sus transiciones y transformaciones internas, su desarrollo"*.

De esta manera, la *actividad* es un proceso complejo; conforma un sistema que, como tal, posee una estructura.

Ahora bien, ¿cómo estructurar una acción para inducir al educando a apropiarse de los sistemas simbólicos? Una opción es sugerida por las llamadas bases orientadoras de la acción (BOAS).

En este trabajo, la BOA elaborada está orientada, desde el punto de vista matemático, a obtener la solución de ecuaciones algebraicas de primer grado usando las necesarias propiedades de *campo*; y a promover el desarrollo de algunas estructuras mentales en el educando, específicamente las diferencias y semejanzas, y la reversibilidad.

1.3. Bases Orientadoras de la Acción

La Base Orientadora de la Acción (BOA) *es la imagen de la acción y la del medio donde se realiza la acción, es el sistema de condiciones en que realmente se apoya el estudiante o la estudiante*.

De acuerdo con N F. Talízina (1981), (seguidora de las ideas de A. N. Leontiev):

"Cualquier imagen sea percepción, representación o concepto, debe estar relacionada con un determinado sistema de acciones. De esta manera, la formación de los conceptos es un proceso de formación no sólo de una imagen especial como cuadro del mundo, sino igualmente de un determinado sistema operacional que tiene su estructura interna. Las acciones intervienen como medio de formación de los conceptos y como medio de su existencia: al margen de las acciones el concepto no puede ser asimilado ni aplicado posteriormente a la solución de problemas. Por ello, las particularidades de los conceptos formados no pueden ser comprendidas sin la orientación a la actividad cuyo producto representan."

Es importante destacar que la *teoría de la actividad* deja bien explícito la imposibilidad de aprender fuera de la propia actividad: "los conocimientos como imágenes de los objetos, fenómenos, acciones, etc., del mundo material nunca existen en la cabeza del hombre fuera de alguna actividad, fuera de algunas acciones. Siguiendo el principio de la actividad y separando la acción como unidad de análisis, desde el principio incluimos con ello los conocimientos en la estructura de la acción. Al ocupar el lugar estructural del objeto de la acción, los conocimientos pasan por las mismas etapas de las acciones (actividad) en su conjunto"

Según Talízina, la base *orientadora de la acción* depende, entre otras cosas, de las peculiaridades del objeto de la acción; del carácter y orden de las operaciones que entran en la acción; de los rasgos peculiares de los instrumentos utilizados. Estas condiciones influyen en el éxito de la acción independiente de si la o el educando está consciente o no de ellas.
Según los trabajos de Talízina y sus colegas (Pántina, Reshetova, Sachko, Galperin) plantean que la parte orientadora de la acción está dirigida a:

a) La construcción correcta y racional de la *parte ejecutora*, en estos casos, su contenido consiste en tomar en cuenta las condiciones objetivamente necesarias para la estructuración correcta y racional de la parte ejecutora dada de antemano y

b) Asegurar la elección racional de uno de los posibles cumplimientos.

Investigaciones realizadas sobre cómo orientar, demuestran que la eficacia de la *base orientadora* NO depende de cómo está representada (material, materializada, verbal externa, etc.), pero **SÍ depende sustancialmente del grado de generalización** de los conocimientos que forman parte de ella y de la plenitud del reflejo en ellos, de las condiciones que determinan objetivamente el éxito de la acción.

Según P. Ya. Galperin (Galperin, 1982), las diferencias en el carácter generalizado, la plenitud y el modo de obtención de la *base orientadora de la acción* pueden servir de fundamento para separar sus distintos tipos. De acuerdo con esas características es posible determinar varios tipos de bases orientadoras, de ellas por vía experimental fueron descubiertos cuatro tipos de BOA, pero teóricamente puede haber muchos más.

Las BOAS tienen como fundamento tres parámetros fundamentales, a saber: *su grado de completamiento, de generalidad y de independencia*. Cada uno de ellos posee sus aspectos positivos y negativos. En (Talízina, N. F. 1993) se describen tres tipos de BOAS que regularmente son las más generales.

El primer tipo de *Base Orientadora* se caracteriza por el hecho de que *el individuo actúa por la vía del ensayo-error*. En este tipo de BOA la o el educando NO recibe todos los conocimientos sobre la acción, sino que él mismo o ella misma trata de encontrarlos; como no sabe cómo ejecutar la acción, sigue la vía de los ensayos probando de una forma ciega. Es el tipo de orientación llamado *"aprendizaje por ensayo-error"*.

En el segundo tipo de *Base Orientadora*, la o el educando recibe desde el inicio un sistema completo y preelaborado de orientaciones.

El tercer tipo se distingue porque *la orientación no se da aplicada a un objeto concreto; por consiguiente, la habilidad, o la acción que se está formando, al no dirigirse únicamente a un objeto específico, permite al individuo llegar a una orientación para cada caso particular.*

Es de destacar que el método generalizado del cual se habla no es descubierto por la o el educando, sino que se le enseña. Si él lo descubriera por su propia cuenta estaría realizando una actividad creadora.

Cada uno de estos tipos puede caracterizarse por el grado de integralidad de la base orientadora que, en líneas generales, está constituido por los puntos de orientación y el modo de obtención.

Las BOAS propuestas en este trabajo de Tesis, son del segundo tipo, y para su elaboración hemos considerado también el *Método de Pruebas y Refutaciones*.

1.4. Método de Pruebas y Refutaciones

En una obra titulada "*Pruebas y refutaciones*", Imre Lakatos (1976) analiza el hecho de que la Ciencia es mucho más opinable de lo que la gente se cree. Ni siquiera los teoremas matemáticos se libran de la polémica, e Imre Lakatos lo ilustra utilizando el *método socrático* para profundizar en una discusión concreta que tuvo lugar entre matemáticos a la hora de enunciar y demostrar un teorema que definiera la relación entre el número de vértices, aristas y caras de un poliedro.

Este método de *Pruebas y refutaciones* fue resultado de diversos trabajos de Imre Lakatos, reunidos por sus colaboradores directos J. Warrall y E. Zahar, quienes aplicaron la "metodología de los programas de investigación" al caso de las Matemáticas. Tal método fue presentado en el libro "*Pruebas y refutaciones, la lógica del descubrimiento matemático*" (Imre Lakatos 1976). Escrito en forma de diálogo entre un profesor y sus alumnos en un aula imaginaria, PRUEBAS Y REFUTACIONES escenifica el rechazo del enfoque formalista o deductivista de las matemáticas, que las identifica con su abstracción axiomática formal, les niega carácter histórico y las concibe como un conjunto siempre creciente de verdades eternas e inmutables, en el que no pueden entrar los contraejemplos, las refutaciones o la crítica. En oposición a esta concepción deductivista, que esconde la lucha y oculta la aventura, Lakatos propone un nuevo enfoque heurístico. En este enfoque, el profesor plantea alguna pregunta, que lleva implícito algún resultado importante para el tema de estudio. Los alumnos elaboran conjeturas y tratan de responder esa pregunta por sus propios medios. Todas sus respuestas son expuestas ante todo el grupo. Si alguien del grupo tiene una objeción a alguna respuesta dada, la manifiesta y propone algún contraejemplo. Tanto quien emite la respuesta o conjetura, como quien da la refutación, deben admitir la argumentación correspondiente.

Al final, el grupo y profesor hacen una síntesis de resultados obtenidos.

El profesor solamente conduce la sesión, y su participación es mínima. Da contraejemplos y refuta si nadie lo ha hecho, a pesar de que se requiera para llegar a las respuestas adecuadas a la pregunta inicialmente planteada.

En el presente trabajo, este método se manifiesta al permitir que el educando participe activamente en la realización de las actividades planteadas. Cada vez que "se equivoca", el software "le refuta" haciéndole volver a empezar, hasta que no haya "equivocaciones". De ese modo puede considerarse que la participación de quien "enseña" (el software) es mínima, transformándose paulatinamente en un "*espectador empático*".

1.5. Estructuras mentales

El papel de la Educación es fundamental en todas las culturas, pues puede ser promotora del desarrollo de los países. Este es un hecho reconocido por la UNESCO a través de su ***Comisión Internacional sobre la Educación para el Siglo XXI*** (UNESCO, 1993), y también por distintos organismos nacionales e internacionales. Todas esas organizaciones consideran a la educación como una posibilidad al servicio del desarrollo humano para combatir la pobreza, la exclusión, la intolerancia, la opresión y las guerras. Consideran también que las necesidades de la educación del planeta para el siglo XXI deberán satisfacer: *aprender a vivir juntos, aprender a lo largo de la vida, aprender a enfrentar una variedad de situaciones y que cada quien aprenda a entender su propia personalidad*.

Para llevar a cabo lo anterior se hace necesario, entre tantos aspectos, promover el desarrollo del llamado *pensamiento complejo*, pues para aprender las habilidades y adquirir las destrezas sociales necesarias para gestar escenarios de convivencia sana y pacífica, no solo depende de la personalidad de los individuos y del contexto en el que interactúan, sino que también depende de su desarrollo cognitivo. Para que exista conciencia de lo social y ser capaz de vivir en espacios de cordialidad, trabajo en equipo y construcción colectiva se hace necesario que la persona logre ponerse en el lugar del otro, que se reconozca como individuo y reconozca a los demás, que tenga la capacidad para evaluar lo que ocurre en determinadas situaciones, de percibir, reconocer e interpretar correctamente las acciones y las necesidades de los otros y que tenga la capacidad para imaginar posibles cursos de acción, así como seleccionar el más apropiado.

Para lograr lo anterior, es necesario que la persona adquiera desde la infancia una habilidad cognitiva llamada *reversibilidad*, misma que forma parte de las llamadas *estructuras mentales madres*. En la siguiente sección se revisa ese concepto.

1.6. Estructuras mentales – matemáticas (reversibilidad)

En su libro *Estructuralismo* (Piaget, J. 1970), Piaget escribió que resulta sorprendente constatar que las primeras operaciones con las que se ayuda al niño en su desarrollo, y que derivan directamente de las coordinaciones generales de sus acciones sobre los objetos, pueden precisamente partirse en tres grandes categorías, según su *reversibilidad* proceda por inversión, a la amanera de las *estructuras algebraicas,* o por *reciprocidad*, como en las *estructuras de orden*; o que en lugar de fundarse sobre los *parecidos y las diferencias*, las reuniones procedan por leyes de *vecindad, de continuidad y de fronteras,* lo que constituye *estructuras topológicas elementales* (A. N. Kolmogorov, M. A. Laurentiev, A. D. Aleksandrov. 2014).

En consecuencia, consideró la existencia de tres estructuras matemáticas de las cuales se obtienen otras: *estructuras algebraicas* (grupo, anillo, campo, módulo, etc.), *estructuras de orden,* cuyo prototipo es el concepto de *red* o *armazón* (*lattice*), y las *estructuras topológicas*, fundadas sobre las nociones de vecindad, continuidad y límite.

El siguiente diagrama muestra la relación entre las estructuras mentales madres, y sus correspondientes estructuras matemáticas madre:

Estructuras mentales madre	Estructuras matemáticas madre
Reversibilidad	*algebraicas*
Reciprocidad	*orden*
diferencias y semejanzas	*topológicas*

En el capítulo II del presente trabajo se revisan formalmente algunos de tales conceptos, particularmente los necesarios para resolver ecuaciones algebraicas.

En la siguiente sección revisamos el concepto de *reversibilidad* (asociado al concepto de estructura algebraica), y su importancia en el desarrollo del ser humano.

1.7. Reversibilidad.

Un elemento central del estudio piagetiano del desarrollo, en su relación con el pensamiento matemático y con otros, es el concepto de *operación*, que es un tipo especial de acción mental, en el sentido de que se puede deshacer ejecutando otra acción, devolviendo al sistema a su estado original. Esta posibilidad de hacer y deshacer transformaciones, que también se llama *reversibilidad*, es característica de las estructuras del pensamiento operatorio. En la teoría de Piaget, los estados del desarrollo del individuo en su camino hacia la madurez intelectual se definen por la presencia o la ausencia de ciertas operaciones.

Según la investigación de Piaget, los niños muy pequeños no piensan de forma operatoria en absoluto. Pueden actuar sobre el entorno, pero cuando han acabado de ejecutar una acción, no son capaces de recordar el aspecto que tenían las cosas antes. Por lo tanto, no son capaces de deshacer mentalmente sus acciones; en términos técnicos piagetianos, todavía no han conseguido la *reversibilidad*. Por el contrario, Piaget dice que los niños de esta etapa primitiva del desarrollo intelectual se caracterizan porque están muy influidos por las características sensoriales y perceptuales de los acontecimientos que los rodean. Aceptan que las cosas son como se las presentan. No pueden ejecutar las transformaciones mentales -tan características del pensamiento de los niños mayores y de los adultos-, lo que permite que los datos perceptuales dominen su pensamiento en mucho mayor grado.

Piaget ilustra este predominio de los modos de pensamiento perceptuales, y la incapacidad de pensar de forma reversible, en sus conocidos estudios de la conservación y de la clasificación (Piaget, J. 1976).

En esta dependencia de las características perceptuales de los objetos o de las configuraciones y la capacidad de pensar de forma reversible caracterizan al pensamiento que Piaget ha llamado *preoperatorio*. En sus trabajos presenta al pensamiento preoperatorio como típico de los niños de entre 2 años y unos 6 o 7. Después, a la edad aproximada en que los niños ya están bien integrados en la escuela, alcanzan la etapa que Piaget llama *operatoria concreta*. En esta etapa, según Piaget, los niños pueden pensar de forma operatoria: son capaces de imaginar que realizan las transformaciones y que las deshacen; saben pensar en términos de más de una dimensión al mismo tiempo. Y al aplicar cada vez a más ideas estas capacidades ampliadas de razonamiento lógico, sus concepciones matemáticas y científicas se acercan cada vez más a las de los adultos.

Sin embargo, en el transcurso de la elaboración del presente trabajo, se observó que hay personas que, teniendo una edad mayor a 7 años, no podían deshacer diversas operaciones[1].

[1] Se les pidió a algunas personas cuyas edades varían entre los 7 y 40 años de edad a realizar tres o más instrucciones consecutivas. Por ejemplo, del lugar donde están paradas, dar tres pasos a su izquierda, dos pasos hacia atrás y uno para adelante, y después regresar al mismo lugar donde estaban inicialmente invirtiendo las indicaciones. Algunas personas no captaban las indicaciones y menos seguirlas en manera inversa. La mayoría de personas no lo lograron y solo caminaban al punto de origen ignorando dichas instrucciones. [2]

Por lo anterior, para que el individuo logre crear empatía con sus semejantes y con su entorno se hace necesario que adquiera habilidad en el manejo de ciertos procesos cognitivos como son la *reversibilidad* y la anticipación, procesos previos y fundamentales para llegar a la autorregulación. En ese sentido, la reversibilidad es entendida como la capacidad que tiene la persona de devolverse en el pensamiento para lograr comprender nuevas relaciones resultantes de un recorrido que se hace desde el estado inicial de un hecho a uno más complejo. Cuando un individuo presenta dicha capacidad logra comprender mejor una situación y logra sacar mayor provecho de esta. Sin embargo, para que exista esta reversibilidad es necesario que el ser humano logre salir del egocentrismo, que sea capaz de mirar una situación desde otros puntos de vista y logre hacer relaciones con la información que va recopilando. De esta manera el campo de comprensión de un fenómeno se amplía y el aprendizaje se hace más efectivo.

Piaget es enfático en manifestar que los niños en el estadio pre operacional (de 2 a 6 años de edad) no tienen reversibilidad, no están capacitados para negar o deshacer una acción y esto se debe a que aún no han adquirido las habilidades necesarias para pensar de manera lógica y formal.

Según este autor, los niños en este estadio tienden a ser egocéntricos, es decir, ven el mundo desde una perspectiva personal y no están dispuestos a reconocer el punto de vista del otro. A menudo los niños creen que las demás personas están viendo lo que ellos ven, están escuchando lo que ellos escuchan, están pensando lo que ellos piensan y están actuando como ellos lo hacen. Su lenguaje no se adapta a las necesidades del oyente.

Este egocentrismo se manifiesta en la incapacidad para la descentración, lo cual los imposibilita para observar una situación desde múltiples perspectivas. Ellos se enfocan en la característica principal del hecho e ignoran otras variables que permiten su comprensión. Al ser tan unilaterales no logran gestar relaciones, por lo tanto, el entendimiento de un hecho es limitado y a veces equívoco.

Se cree que en la medida en la que el niño sea capaz de regresar en el pensamiento podrá evaluar las diferentes situaciones que vive diariamente, de tal manera que encuentre mejores formas para vivir.

Cabe decir que, la *reversibilidad* es un proceso cognitivo que cuesta más dificultad de lograr en esta etapa, porque esto conlleva a ser capaz de invertir las operaciones lógicas. Por ejemplo, si a un niño de cuatro años, llamado Geovani, que tiene una hermana llamada María Fernanda, le preguntan si su hermana tiene un hermano, probablemente contestará: “Somos dos hermanos y María Fernanda no tiene ningún hermano”. Aún faltaría salir de su punto de

---

[2]Así mismo, otras personas con mayor capacitación académica que las anteriores, tuvieron serias dificultades para invertir las secuencias presentadas en el software producto del presente trabajo. A esas ultimas personas también se les pidió modificar una cantidad *X* con dos o más operaciones matemáticas (suma, resta, multiplicación y división), y regresar a la cantidad inicial invirtiendo esas operaciones, lo cual les fue difícil. De esta manera se puede notar que la mayoría de esas personas no están usando la habilidad de reversibilidad.

vista y ver las cosas desde el otro, es decir, aún no dispone de capacidad de *reversibilidad*, fundamental por otra parte en las operaciones matemáticas.

Según Piaget es en el estadio de la inteligencia intuitiva (estadio de la primera infancia 2-7 años) donde se desarrolla la reversibilidad gracias a la aparición del lenguaje el cual permite al niño la capacidad de construir relatos que narran sus acciones pasadas y anticipar sus acciones futuras.

Curiosamente la *reversibilidad* se construye al mismo tiempo que la socialización, es decir, cuando se adquiere la capacidad de admitir otros puntos de vista, o de lograr la capacidad de empatía. Desde aquí, es capacidad de reflexión sobre su comportamiento; representación más comprensiva y acertada de la realidad (presente, pasado y futuro), pensamiento que va más allá de los actos y hechos presentes e inmediatos.

En síntesis, Piaget consideraba que la inteligencia puede representarse de forma lógico-matemática, al igual que si fuera una función matemática: es decir, que todo acto de inteligencia o razonamiento es una operación matemática interiorizada, reversible y coordinada en una estructura. Considera la *reversibilidad*, como la capacidad para ejecutar una acción en los dos sentidos y como la base para el razonamiento lógico.

La *reversibilidad* es implementada como estrategia cognitiva cuando al devolverse en su pensamiento el sujeto es capaz de comprender las nuevas relaciones que aparecen, dándole así verdadero sentido a la acción. Por lo tanto, **el ser humano que no tiene la capacidad de devolverse tendrá una visión limitada de la realidad lo que le impedirá la consolidación de su pensamiento formal** (Coll y Gillieron, C. 1985).

El pensamiento *reversible* en el ámbito social se puede definir como una manera de pensar amplia, que permite resolver las dificultades interpersonales, ya sean viejas discusiones o el drama de la vida diaria, ofreciendo la posibilidad de mirar los conflictos de manera diferente, y empezar a resolverlos. Es una manera de pensar flexible, de ida y vuelta que no busca quien tiene razón, sino que procura localizar más de dos vías de acción en cada situación. Este tipo de pensamiento nos pone en movimiento, nos hace pasar con comodidad de un polo al otro abriendo las opciones que estaban fuera de nuestra vista. Entrenar el *pensamiento reversible* permite: Ver los defectos y a la vez los talentos, ver la ventaja y a la vez la desventaja, ver el logro y también el riesgo.

Para llegar a la metacognición, ideal cognitivo en el ser humano, se hace necesario desarrollar los procesos de anticipación y reversibilidad en los seres humanos, de tal manera que sean capaces de devolverse en el pensamiento para tener conciencia de los hechos pasados y proyectarse en el futuro, anticipándose a posibles situaciones.

La reversibilidad y la anticipación permitirán planificar y organizar estrategias para conseguir logros específicos en cualquier ámbito, hacer un seguimiento adecuado de la ejecución de acciones y apreciar la eficacia de las estrategias utilizadas.

Planear, monitorear y evaluar son procesos metacognitivos que requieren de habilidades de pensamiento altas; la anticipación y la *reversibilidad* se presentan como un camino seguro para la adquisición de dichas habilidades.

CAPÍTULO II

ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS

Según los aportes del gran científico Jean Piaget, las tres estructuras matemáticas "madres" (*topológicas, algebraicas,* y *de orden*) se corresponden con lo que él mismo denominó "*estructuras mentales madres*" (*diferencias y semejanzas, reversibilidad,* y *reciprocidad*); de manera que la coordinación de esas es necesaria para el desarrollo de cualquier inteligencia. A continuación se presentan los conceptos de dos *estructuras algebraicas* llamadas *grupo* y *campo*, así como algunos resultados básicos inherentes a tales estructuras (Leo Corry. 2004, 1992).

2.1. La noción de grupo.

En su libro "*El Estructuralismo*", Piaget escribió "que es imposible hacer una exposición crítica del estructuralismo sin comenzar por el examen de las *estructuras matemáticas*, esto por razones no solamente lógicas, sino vinculadas también con la historia misma de las ideas". En ese sentido, empezaremos a hablar de una de las estructuras más antiguas y conocidas, específicamente la estructura llamada *grupo*[2].

Definición 1. Sea ***G*** un conjunto no vacío donde está definida una operación binaria que denotaremos por *, la cual cumple los siguientes axiomas:

1. $\forall a,b \in G \Rightarrow (a*b) \in G$ (*cerradura*)
2. $\forall a,b,c \in G \Rightarrow (a*b)*c = a*(b*c)$ (*asociativa*)
3. $\exists i \in G : (\forall a \in G \Rightarrow a*i = a = i*a)$ (el elemento ***i*** se llama *identidad* o *neutro*)
4. $\forall a \in G$, existe un elemento $a' \in G :\ a*a' = i = a'*a$ (***a***' se llama *elemento inverso de **a***)

La pareja (***G, ****) se llama *grupo.*
Si además se satisface el siguiente axioma,

5. $\forall a,b \in F \Rightarrow a*b = b*a$ (*conmutatividad*)

entonces se dice que la pareja (***G, ****) es un grupo *conmutativo* o *abeliano*[3].

---

[2] El concepto de ***grupo*** fue establecido por el joven **matemático y revolucionario** francés ***Evariste Galois*** (conocido como "***El elegido de los Dioses***"), al tratar de hallar las condiciones necesarias y suficientes bajo las cuales una ecuación algebraica de grado mayor a cuatro, sea resoluble por el *método de radicales*. Debido a sus ideas de que *todos somos iguales, y el pensamiento de cada quien debe tener el mismo valor, independientemente de su procedencia, raza, posición, etc.,* fue asesinado por la policía del rey, simulando un duelo a balazos.

Notación.

	La operación se denota como	El elemento identidad se denota como	El inverso de ***a*** se denota como	El grupo se llama
Si la operación es *suma*	$\oplus$	**0**	***-a***	***aditivo***
Si la operación es *producto*	$\otimes$	**1**	a^{-1}	***multiplicativo***

Ejemplo 1. En el conjunto $G = Z_3 = \{0, 1, 2\}$ se define la operación *suma* de acuerdo a la siguiente tabla:

$\oplus$	0	1	2
0	**0**	**1**	**2**
1	**1**	**2**	**0**
2	**2**	**0**	**1**

La pareja $(Z_3, \oplus)$ es un *grupo*, en el cual

	porque
0 es el *elemento identidad* (*neutro aditivo*)	0 + **0** = 0
	1 + **0** = 1
	2 + **0** = 2

Para	el *inverso aditivo* es	y suele denotarse como,	porque
0	0	**-** 0	$0 \oplus 0 =$ **0**
1	2	**-** 1	$1 \oplus 2 =$ **0**
2	1	**-** 2	$2 \oplus 1 =$ **0**

El axioma de cerradura se satisface pues como puede observarse en la tabla, todos los resultados de la operación pertenecen al conjunto Z_3. El axioma de asociatividad se cumple también.
Como puede observarse, por ejemplo,

$$\mathbf{(2 \oplus 1) \oplus (-2) = 0 \oplus (-2) = -2 = 1,}$$

$$\mathbf{(-1 \oplus 2) \oplus (2) = (2 \oplus 2) \oplus 2 = 1 \oplus 2 = 0,}$$

[3]En honor al joven matemático noruego ***Niels H. Abel***, quien investigaba parcialmente los mismos temas que Evariste Galois (además de otros), acerca de los cuales obtuvo propios resultados, mismos que no le fueron

suficientes para lograr un reconocimiento en el mundo matemático de su época, por lo cual no pudo conseguir empleo, y murió de inanición.

Ejemplo 2.
Sea X un conjunto no vacío, y consideremos el conjunto $\boldsymbol{G}$ de todas las transformaciones biyectivas $f: X \to X$, y la operación binaria * definida como $\forall f, g \in G, g * f = g \circ f$, donde $\circ$ denota la *composición* de funciones.
Puede demostrarse que $(G, \circ)$ es un grupo no abeliano, en el cual la transformación “que no es transformación” $I: X \to X$ definida como $I(x) = x$, para toda $x \in X$, es el *elemento identidad*, y, para cada $f: X \to X$ existe su transformación inversa $f^{-1}: X \to X$, es tal que $f^{-1} \circ f = I = f \circ f^{-1}$.

Ejemplo 3.
Considérese el conjunto $\mathbb{Z}$ de todos los números enteros, y la operación *suma usual* $\oplus$. La pareja $(\mathbb{Z}, \oplus)$ es un grupo, donde el número cero (0) es el elemento *identidad*, y para cada número $a \in \mathbb{Z}$, existe su *inverso* $-a \in \mathbb{Z}$, tal que $a \oplus (-a) = -a \oplus a = 0$.

Ejemplo 4.
Considérese el conjunto $\mathbb{Q}$ de todos los números racionales, y la operación producto usual $\otimes$. La pareja $(\mathbb{Q} - \{o\}, \otimes)$ es un grupo, donde el número uno (1) es el elemento identidad, y para cada número $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} - \{o\}$, existe su *inverso* $\frac{q}{p} \in \mathbb{Q} - \{o\}$, tal que $\frac{p}{q} \otimes \left(\frac{q}{p}\right) = 1$.

Como fundamento del álgebra, la estructura de grupo resultó ser de una generalidad y fecundidad extraordinarias. Se la encuentra en casi todos los ámbitos no solo de la matemática, sino también en la física, la química, etc.

Ejemplo 5.
Consideremos el triángulo equilátero cuyos vértices son v_1, v_2, v_3, así como el conjunto S_3 de todas las permutaciones de dichos vértices:

$$S_3 = \{\sigma_0,\ \sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3,\ \sigma_4,\ \sigma_5,\},$$

donde

$$\sigma_0 = \begin{Bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{Bmatrix};\ \sigma_1 = \begin{Bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ v_2 & v_1 & v_3 \end{Bmatrix}$$

$$\sigma_2 = \begin{Bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ v_3 & v_1 & v_2 \end{Bmatrix};\ \sigma_3 = \begin{Bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ v_3 & v_2 & v_2 \end{Bmatrix}$$

$$\sigma_4 = \begin{Bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ v_2 & v_3 & v_1 \end{Bmatrix};\ \sigma_5 = \begin{Bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ v_1 & v_3 & v_2 \end{Bmatrix}$$

En S_3 se define la operación composición, $\sigma_j \cdot \sigma_i$ efectuando primero la permutación σ_i, y a continuación la σ_j. Los resultados se muestran en la siguiente tabla;

$\cdot$	$\boldsymbol{\sigma_0}$	$\boldsymbol{\sigma_1}$	$\boldsymbol{\sigma_2}$	$\boldsymbol{\sigma_3}$	$\boldsymbol{\sigma_4}$	$\boldsymbol{\sigma_5}$
$\boldsymbol{\sigma_0}$	σ_0	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5
$\boldsymbol{\sigma_1}$	σ_1	σ_0	σ_5	σ_4	σ_3	σ_2
$\boldsymbol{\sigma_2}$	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5	σ_0	σ_2
$\boldsymbol{\sigma_3}$	σ_3	σ_2	σ_1	σ_0	σ_5	σ_4
$\boldsymbol{\sigma_4}$	σ_4	σ_5	σ_0	σ_4	σ_2	σ_3
$\boldsymbol{\sigma_5}$	σ_5	σ_4	σ_3	σ_2	σ_1	σ_0

Como puede observarse en la tabla, el elemento identidad es σ_0, y respecto a los inversos se tiene que:

Elemento	Inverso
$\boldsymbol{\sigma_0}$	σ_0
$\boldsymbol{\sigma_1}$	σ_1
$\boldsymbol{\sigma_2}$	σ_4
$\boldsymbol{\sigma_3}$	σ_3
$\boldsymbol{\sigma_4}$	σ_2
$\boldsymbol{\sigma_5}$	σ_5

Nótese que no es cierto que para cualquier *i, j,* $\sigma_i \cdot \sigma_j = \sigma_j \cdot \sigma_i$, por ejemplo $\sigma_5 \cdot \sigma_4 = \sigma_3 \neq \sigma_4 \cdot \sigma_5 = \sigma_1$

Por lo tanto, este es un ejemplo de grupo no abeliano.

2.2. Campo.

Definición 2. Sea $\boldsymbol{F}$ un conjunto no vacío donde están definidas dos operaciones binarias: SUMA ($\oplus$) y PRODUCTO ($\otimes$), cumpliendo los siguientes ONCE axiomas:

S1. $\forall a,b \in F \Rightarrow (a \oplus b) \in F$
S2. $\forall a,b,c \in F \Rightarrow (a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$
S3. $\exists 0 \in F : (\forall a \in F \Rightarrow a \oplus o = a = o \oplus a)$
S4. Cada elemento $a \in F$, tiene un elemento *inverso* $a' \in F :\ a \oplus a' = o = a' \oplus a$
S5. $\forall a,b \in F \Rightarrow a \oplus b = b \oplus a$
P6. $\forall a,b \in F \Rightarrow (a \otimes b) \in F$
P7. $\forall a,b,c \in F \Rightarrow (a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$
P8. $\exists i \in F : (\forall a \in F \Rightarrow a \otimes i = a = i \otimes a)$
P9. Cada elemento $a \in F$, $a \neq o$, tiene un elemento *inverso*

$a^{-1} \in F : \ a \otimes a^{-1} = id = a^{-1} \otimes a$

P10. $\forall a, b \in F \Rightarrow a \otimes b = b \otimes a$.

11. $\forall a, b, c \in F \Rightarrow a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$ ……. Propiedad distributiva

La terna $(F, \oplus, \otimes)$ se llama ***campo.***

Ejemplo 5. En el conjunto $Z_3 = \{0, 1, 2\}$ se definen dos operaciones de acuerdo a las siguientes tablas:

suma

$\oplus$	0	1	2
0	**0**	**1**	**2**
1	**1**	**2**	**0**
2	**2**	**0**	**1**

producto

$\otimes$	0	1	2
0	**0**	**0**	**0**
1	**0**	**1**	**2**
2	**0**	**2**	**1**

La terna $(Z_3, \oplus, \otimes)$ es un *campo*.

En ese campo (conocido como *sistema de numeración ternario*), se tienen por ejemplo:

$$1 \oplus 2 \otimes (2 \oplus 1) =$$
$$1 \oplus 2 \otimes 2 \oplus 2 \otimes 1 =$$
$$1 \oplus 1 \oplus 2 =$$
$$2 \oplus 2 =$$
$$1$$

También,

	porque
0 es el *elemento identidad* de la suma (*neutro aditivo*)	0 + **0** = 0
	1 + **0** = 1
	2 + **0** = 2

Para	el *inverso aditivo* es	y suele denotarse como,		porque
0	0	0^-	- 0	$0 \oplus 0 =$ **0**
1	2	1^-	- 1	$1 \oplus 2 =$ **0**
2	1	2^-	- 2	$2 \oplus 1 =$ **0**

	porque
1 es el *elemento identidad* del producto (*neutro multiplicativo*)	$0 \otimes$ **1** = 0
	$1 \otimes$ **1** = 1
	$2 \otimes$ **1** = 2

Para	el *inverso multiplicativo* es	y suele denotarse como,	porque
1	1	1^{-1}	$1 \otimes 1 =$ **1**
2	2	2^{-1}	$2 \otimes 2 =$ **1**

De acuerdo al axioma **P9**, el elemento neutro aditivo **0** no tiene inverso multiplicativo.

Ejemplo 6. El conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales, con las operaciones usuales de suma + y producto *, es un campo.

Ejemplo 7. El conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales, con las operaciones usuales de suma + y producto *, es un campo.

Ejemplo 8. El conjunto $\mathbb{C}$ de todos los números complejos, con las operaciones usuales de suma + y producto *, es un campo.

Definición* 3. (*RESTA en cualquier campo $(F, \oplus, \otimes)$). Si $a, b \in F$, la ***resta*** de a y b se define como

$$a - b = a \oplus b^{-} \text{ (o como } a - b = a \oplus (-b)\text{)},$$

donde b^{-} (o $-b$) denota el inverso aditivo de b.

Ejemplo 9. En el campo $(Z_3, \oplus, \otimes)$, se tiene:

$$\begin{aligned} &1 - 2 = \\ &1 \oplus (-2) = \\ &1 \oplus 1 = \\ &2. \end{aligned}$$

El *inverso aditivo* de **2** se denota como **-2**, y es igual a **1**

Definición* 4. (*DIVISIÓN en cualquier campo $(F, \oplus, \otimes)$). Si $a, b \in F$, $b \neq 0$, la ***división*** de a por b se define como

$$\frac{a}{b} = a \otimes b^{-1},$$

donde b^{-1} denota el inverso multiplicativo de b.

Ejemplo 9. En el campo $(Z_3, \oplus, \otimes)$, se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= 1 \otimes 2^{-1} \\ &= 1 \otimes 2 \\ &= 2. \end{aligned}$$

El *inverso multiplicativo* de **2** se denota como 2^{-1}, y es igual a **2**

Axiomas de la igualdad en cualquier campo $(F, \oplus, \otimes)$.

Sean cualesquiera $a, b, c, d \in F$. La igualdad (=) es una relación definida en ***F***, que cumple los siguientes axiomas:

I1. $a = a$ …………………………………. *reflexiva*
I2. $a = b \Rightarrow b = a$ …………………………….. *simétrica*
I3. $(a = b \wedge b = c) \Rightarrow a = c$ …………………… *transitiva*
I4. $(a = b \wedge c = d) \Rightarrow a \oplus c = b \oplus d$
I5. $(a = b \wedge c = d) \Rightarrow a \otimes c = b \otimes d$
I6. $a = b \Rightarrow a \oplus c = b \oplus c$
I7. $a = b \Rightarrow a \otimes c = b \otimes c$

Observación. Las últimas dos propiedades serán utilizadas durante el proceso para resolver ecuaciones algebraicas, específicamente "*al sumar o multiplicar por la misma cantidad ambos miembros, la igualdad no se altera*".

2.3. Resultados básicos en cualquier campo $(F, \oplus, \otimes)$.

Lema 1 (*propiedad de cancelación aditiva***).** Sea (***F***, ⊕, ⊗) un campo, y $a, b, c \in F$.
Si $a \oplus c = b \oplus c$, entonces $a = b$.
Demostración.

$$\{(c \in F \Rightarrow \exists -c \in F : -c \oplus c = o) \wedge (a \oplus c = b \oplus c)\} \Rightarrow (a \oplus c) \oplus (-c) = (b \oplus c) \oplus (-c)$$

$$\Rightarrow a \oplus (c \oplus (-c)) = b \oplus (c \oplus (-c)) \quad \Rightarrow a \oplus o = b \oplus o \Rightarrow a = b . \square$$

Lema 2. (*propiedad de cancelación multiplicativa***).** Sea (***F***, ⊕, ⊗) un campo, y $a, b, c \in F$
Si $a \otimes c = b \otimes c$, $c \neq 0$, entonces $a = b$.

Demostración.

$$\{(c \in F \Rightarrow \exists c^{-1} \in F : c^{-1} \otimes c = 1) \wedge (a \otimes c = b \otimes c)\}$$

$\Rightarrow (a \otimes c) \otimes c^{-1} = (b \otimes c) \otimes c^{-1}$ igualdad en campo

$\Rightarrow a \otimes (c \otimes c^{-1}) = b \otimes (c \otimes c^{-1})$ asociativa del producto

$\Rightarrow a \otimes 1 = b \otimes 1$ inverso multiplicativo

$\Rightarrow a = b$. neutro multiplicativo

Observación. Los anteriores dos lemas serán utilizados durante el proceso para resolver ecuaciones algebraicas, específicamente "*al restar o dividir por la misma cantidad ambos miembros, la igualdad no se altera*".

Teorema 1. Sean ($\boldsymbol{F}$, ⊕, ⊗) un campo y $\boldsymbol{o}$ el elemento identidad para la suma en $\boldsymbol{F}$. Entonces $\forall a \in F, a \otimes o = o$.

Demostración. Para cualquier $a \in F$, consideremos la siguiente cadena de implicaciones:

$$o \oplus o = o \Rightarrow a \otimes (o \oplus o) = a \otimes o \Rightarrow (a \otimes o) \oplus (a \otimes o) = a \otimes o$$
$$\Rightarrow (a \otimes o) \oplus (a \otimes o) = (a \otimes o) \oplus o \Rightarrow a \otimes o = o. \square$$

Teorema 2. Sean ($\boldsymbol{F}$, ⊕, ⊗) un campo, $\boldsymbol{o}$ el elemento identidad para la suma en $\boldsymbol{F}$, y **1** el elemento identidad para el producto en $\boldsymbol{F}$, y $a, b \in F$.

Si $a \otimes b = o$ entonces $a = \boldsymbol{o}$ o $b = \boldsymbol{o}$.

Demostración.

Debemos demostrar que es verdadera la proposición ($a = \boldsymbol{o}$ o $b = \boldsymbol{o}$). Para ello, es suficiente demostrar que es verdadera alguna de sus componentes.
<u>Si suponemos por ejemplo que $a \neq \boldsymbol{o}$, entonces debemos demostrar que $b = \boldsymbol{o}$.</u>

$$\{(a \neq o \Rightarrow \exists a^{-1} \in F : a^{-1} \otimes a = 1) \wedge (a \otimes b = o)\} \Rightarrow a^{-1} \otimes (a \otimes b) = a^{-1} \otimes o$$
$$\Rightarrow (a^{-1} \otimes a) \otimes b = o \quad \Rightarrow 1 \otimes b = o \Rightarrow b = o. \square$$

Observación. Este resultado no es válido en general para anillos. Por ejemplo en el anillo de las matrices cuadradas 2x2:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lema 3. $\forall a \in F \Rightarrow -(-a) = a$

Demostración.

$$-(-a) \oplus (-a) = o \quad \Rightarrow -(-a) \oplus (-a) \oplus a = o \oplus a \quad \Rightarrow -(-a) \oplus ((-a) \oplus a) = o \oplus a$$
$$\Rightarrow -(-a) \oplus o = a \Rightarrow -(-a) = a.$$

La igualdad $-(-a) = a$ significa que *el inverso aditivo del inverso aditivo de* ***a,*** es el mismo ***a.***

Por ejemplo, en el campo $(Z_3, \oplus, \otimes)$, se tiene – (–2) = 2, – (–1) = 1

Similarmente se demuestra el siguiente lema, que es el análogo del producto, del lema 3.

Lema 4. $(\forall a \in F, a \neq o) \Rightarrow (a^{-1})^{-1} = a$

Demostración.

$(a^{-1})^{-1} \otimes (a^{-1}) = 1$

$\Rightarrow (a^{-1})^{-1} \otimes (a^{-1}) \otimes a = 1 \otimes a$

$\Rightarrow (a^{-1})^{-1} \otimes ((a^{-1}) \otimes a) = 1 \otimes a$

$\Rightarrow (a^{-1})^{-1} \otimes 1 = a$

$\Longrightarrow (a^{-1})^{-1} = a.$

Lema 5. $-(a \otimes b) = -a \otimes b$

Demostración.

$$\{(-(a \otimes b) \oplus (a \otimes b) = o) \wedge (-a \oplus a = o)\} \Rightarrow -(a \otimes b) \oplus (a \otimes b) = -a \oplus a$$

$$\Rightarrow -(a \otimes b) \oplus (a \otimes b) = (-a \oplus a) \otimes b$$

$$\Rightarrow -(a \otimes b) \oplus (a \otimes b) = (-a \otimes b) \oplus (a \otimes b) \ \Rightarrow -(a \otimes b) = -a \otimes b\,.$$

La igualdad $-(a \otimes b) = -a \otimes b$ significa que *el producto del inverso aditivo de* ***a,*** por ***b,*** es igual al *inverso aditivo del producto de* ***a*** y ***b***[4].

Por ejemplo, en el campo $(Z_3, \oplus, \otimes)$, se tiene por un lado $-(2 \otimes 1) = -(2) = -2$ y por otra parte, $-2 \otimes 1 = -2 = 1$. Así, se verifica que $-2 \otimes 1 = -(2 \otimes 1)$. Los resultados son **de acuerdo a las tablas correspondientes del citado campo**, y NUNCA de "la ley de los signos *menos por más da menos*".

Lema 6. $(-a) \otimes (-b) = a \otimes b$.

Demostración.

$$(-a) \otimes (-b) = ((-1) \otimes a) \otimes (-b) \ \Rightarrow (-a) \otimes (-b) = (-1) \otimes (a \otimes (-b))$$
$$\Rightarrow (-a) \otimes (-b) = (-1) \otimes (-(a \otimes b)) \Rightarrow (-a) \otimes (-b) = -(-(a \otimes b))$$
$$\Rightarrow (-a) \otimes (-b) = a \otimes b\ .$$

La igualdad $(-a) \otimes (-b) = a \otimes b$ significa que *el producto del inverso aditivo de* ***a,*** y *el inverso aditivo de* ***b,*** es igual al *producto de* ***a*** y ***b***[5].

[4] Comúnmente esta proposición se presenta de manera imprecisa, diciendo que "*menos por más da menos*".
[5] Comúnmente esta proposición se presenta de manera imprecisa, diciendo que "*menos por menos da más*".

Por ejemplo, en el campo $(Z_3, \oplus, \otimes)$, algunas de las anteriores propiedades pueden visualizarse de la siguiente manera:

a	***-a***	***b***	***-b***	**- (-*a*)**	**-*a*⊗ *b***	**-(*a*⊗ *b*)**	**-*a*⊗ -*b***	***a*⊗*b***
0	**-0 = 0**	0	**0**	0	**-0⊗0 = 0⊗0 = 0**	**-(0⊗0) = -0=0**	**-0⊗-0=0⊗0= 0**	**0⊗0=0**
1	**-1 = 2**	1	**2**	1	**-1⊗1 = 2⊗1 = 2**	**-(1⊗1) = -1=2**	**-1⊗-1 = 2⊗2= 1**	**1⊗1=1**
2	**-2 = 1**	2	**1**	2	**-2⊗2 = 1⊗2 = 2**	**-(2⊗2) = -1=2**	**-2⊗-2 = 1⊗1= 1**	**2⊗2=1**

Resolviendo ecuaciones algebraicas con coeficientes en un campo $(F, \oplus, \otimes)$.

Resolver la ecuación $a \otimes x \oplus b = 0$, con $a \neq 0, b, x \in F$, **0** es el elemento neutro aditivo, e *i* el elemento neutro multiplicativo en *F*.

Solución.

$a \otimes x \oplus b = 0 \Leftrightarrow [a \otimes x \oplus b] \oplus (-b) = 0 \oplus (-b)$

$\Leftrightarrow a \otimes x \oplus [b \oplus (-b)] = 0 \oplus (-b)$

$\Leftrightarrow a \otimes x \oplus 0 = 0 \oplus (-b)$

$\Leftrightarrow a \otimes x = -b$

$\Leftrightarrow a^{-1} \otimes [a \otimes x] = a^{-1} \otimes (-b)$

$\Leftrightarrow [a^{-1} \otimes a] \otimes x = a^{-1} \otimes (-b)$

$\Leftrightarrow i \otimes x = a^{-1} \otimes (-b)$

$\Leftrightarrow x = a^{-1} \otimes (-b)$.

Ejemplo 10. En el campo $(Z_3, \oplus, \otimes)$, la ecuación $2 \otimes x \oplus 1 = 0$ se resuelve como se muestra a continuación.

$2 \otimes x \oplus 1 = 0 \Leftrightarrow 2 \otimes x \oplus 1 \oplus 2 = 0 \oplus 2$

$\Leftrightarrow 2 \otimes x \oplus (1 \oplus 2) = 0 \oplus 2$

$\Leftrightarrow 2 \otimes x \oplus 0 = 0 \oplus 2$

$\Leftrightarrow 2 \otimes x = 2$

$\Leftrightarrow 2 \otimes 2 \otimes x = 2 \otimes 2$

$\Leftrightarrow (2 \otimes 2) \otimes x = 2 \otimes 2$

$\Leftrightarrow 1 \otimes x = 1$

$\Leftrightarrow x = 1$.

Ejemplo 11. En el campo $(Z_3, \oplus, \otimes)$, la ecuación $2 \otimes x - 1 = 0$ se resuelve como se muestra a continuación.

$2 \otimes x - 1 = 0 \iff 2 \otimes x \oplus (-1) = 0 \iff [2 \otimes x \oplus (-1)] \oplus (-(-1)) = 0 \oplus (-(-1))$

$\iff [2 \otimes x \oplus 2] \oplus 1 = 0 \oplus 1 \iff 2 \otimes x \oplus (2 \oplus 1) = 1 \iff 2 \otimes x \oplus 0 = 1$

$\iff 2 \otimes x = 1 \iff 2^{-1} \otimes [2 \otimes x] = 2^{-1} \otimes 1 \iff (2^{-1} \otimes 2) \otimes x = 2^{-1} \otimes 1$

$\iff (2 \otimes 2) \otimes x = 2 \otimes 1 \iff 1 \otimes x = 2 \iff x = 2.$

Ejemplo 12. En el campo $(Z_3, \oplus, \otimes)$, la ecuación $\frac{2 \otimes x - 1}{2} = 2$ se resuelve como se muestra a continuación.

$\frac{2 \otimes x - 1}{2} = 2 \iff 2^{-1} \otimes (2 \otimes x - 1) = 2 \iff 2^{-1} \otimes \big(2 \otimes x \oplus (-1)\big) = 2$

$\iff 2^{-1} \otimes (2 \otimes x) \oplus 2^{-1} \otimes (-1) = 2 \iff (2^{-1} \otimes 2) x \oplus 2^{-1} \otimes (-1) = 2$

$\iff (2 \otimes 2) x \oplus 2 \otimes 2 = 2 \iff 1 \otimes x \oplus 1 = 2 \iff x \oplus 1 = 2$

$\iff (x \oplus 1) \oplus (-1) = 2 \oplus (-1) \iff x \oplus (1 \oplus (-1)) = 2 \oplus (-1)$

$\iff x \oplus (1 \oplus 2) = 2 \oplus 2 \iff x \oplus 0 = 1 \iff x = 1.$

Ejemplo 13. En el campo $(\mathbb{R}, +, \times)$, la misma ecuación $2 \times x + 1 = 0$, se resuelve como enseguida se muestra:

$2 \times x + 1 = 0 \iff 2 \times x + 1 + (-1) = 0 + (-1)$

$\iff 2 \times x + \big(1 + (-1)\big) = 0 + (-1)$

$\iff 2 \times x + 0 = 0 + (-1)$

$\iff 2 \times x = -1$

$$\iff \frac{1}{2} \times 2 \times x = \frac{1}{2} \times (-1)$$

$$(\frac{1}{2} \times 2) \times x = \frac{1}{2} \times (-1)$$

$$\iff 1 \times x = \frac{1}{2} \times (-1)$$

$$\iff x = -\frac{1}{2}$$

2.4. Anillos

Otra estructura algebraica relacionada con la solución de ecuaciones algebraicas es la de *anillo*, cuya definición se revisa en la presente sección, así como su aplicación en la solución de sistemas de ecuaciones lineales.

Definición. Un *anillo* $\langle R, \oplus, \otimes \rangle$ es una terna que consta de un conjunto R no vacío, junto con dos operaciones $\oplus, \otimes$ llamadas respectivamente suma y multiplicación, definidas sobre R tales que satisfacen los siguientes axiomas:

A_1. $\langle R, \oplus \rangle$ es un grupo abeliano.
A_2. $\langle R, \oplus \rangle$ la multiplicación es asociativa.
A_3. Para todas las $a, b, c \in R$, se cumple la ley distributiva izquierda y derecha:

$$a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c), \qquad (b \oplus c) \otimes a = (b \otimes a) \oplus (c \otimes a).$$

Ejemplo. Sea $\langle F, \oplus, \otimes \rangle$ cualquier campo. Considérese el conjunto $M_2(F)$ de todas las matrices cuadradas de 2×2

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{21}} \end{pmatrix}.$$

Se puede probar que ese conjunto, con las operaciones usuales de suma y multiplicación de matrices, es un *anillo* no conmutativo, pero aquí no se hará. Lo que sí haremos notar es que en tal anillo, todo sistema de ecuaciones lineales de 2×2 puede resolverse usando la *reversibilidad*, tal como para el caso de las ecuaciones algebraicas de primer grado son utilizadas las propiedades de campo.

Consideremos el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

con coeficientes en el conjunto de números reales, y variables desconocidas x_1, x_2.

Utilizando la multiplicación usual de una matriz por un vector, ese sistema puede rescribirse como:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{21}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b_1} \\ \boldsymbol{b_2} \end{pmatrix}.$$

Haciendo

$$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{21}} \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{x_2} \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b_1} \\ \boldsymbol{b_2} \end{pmatrix},$$

se obtiene **una sola ecuación con una sola incógnita**:

$$Ax = b.$$

Esta última ecuación puede resolverse usando las propiedades de anillo, análogas a las de campo, usadas para resolver ecuaciones algebraicas de primer grado:

$$Ax = b \Leftrightarrow$$
$$A^{-1}Ax = A^{-1}b \Leftrightarrow$$
$$(A^{-1}A)x = A^{-1}b \Leftrightarrow$$
$$Ix = A^{-1}b \Leftrightarrow$$
$$x = A^{-1}b.$$

Aquí, I representa la matriz identidad de 2×2.
En el proceso anterior se nota una vez más la importancia desde el punto de vista teórico, el uso de la *reversibilidad*.

CAPÍTULO III

DISEÑO Y DESARROLLO DEL SOFTWARE

En este capítulo se describe la **B**ase **O**rientadora de la **A**cción, producto del trabajo de Tesis. En la sección 3.1 se explica la metodología utilizada en este trabajo. 3.2 se explica brevemente aplicaciones existentes para resolver ecuaciones algebraicas. 3.3 se presenta una versión de la *reversibilidad* utilizada para resolver ecuaciones algebraicas de primer grado. En la sección 3.4 se describe el software que le da nombre al trabajo de Tesis.

3.1. Metodología de desarrollo

3.1.1. Propósito.

Elaborar un sistema computacional para aprender a resolver ecuaciones de primer grado, de una manera interactiva.

3.1.2. Sugerencias de lectura y audiencia objetivo.

El presente documento puede ser leído por cualquier persona interesada en este trabajo, para las personas interesadas se recomienda enfatizar en los capítulos I y II que hablan sobre las estructuras mentales madre y su relación con las estructuras matemática madre, así como las estructuras algebraicas. Como también es muy recomendable echar un vistazo al anexo 1 donde podrá comprender mejor su funcionamiento.

Los desarrolladores que pretendan dar continuidad a este trabajo o implementar uno nuevo, encontraran información útil para el desarrollo en el capítulo III de este trabajo.

3.1.3. Definición del producto.

Diseñar un Sistema Computacional para coadyuvar al desarrollo de algunas habilidades cognitivas necesarias en el proceso de resolver ecuaciones algebraicas de primer grado, con la intención de ser instalado en diferentes instituciones académicas, así como facilitarlo a toda persona interesada, usando tecnología compatible en equipos de cómputo del año 2001 a la fecha.

3.1.4. Descripción general.

Perspectiva del producto.

El software referido en este trabajo nace como una idea con respecto a las diferentes causas por lo cual les es difícil el aprendizaje de ecuaciones algebraicas de primer grado, de acuerdo con algunas encuestas realizadas a diferentes tipos de personas, ya que es diseñado especialmente para dicho aprendizaje e ir desarrollando ciertas habilidades cognitivas.

Funciones del producto.

Este software permite la facilidad de practicar y desarrollar algunas habilidades cognitivas, así como aprender algunos conceptos algebraicos como:

- Diferencias y semejanzas.
- Reversibilidad.
- Imágenes mentales.
- Concepto de igualdad.
- Axioma del elemento inverso aditivo.
- Hacer usos de cada uno de los puntos mencionados anteriormente al resolver ecuaciones algebraicas de primer grado.

Tipos de usuarios y características.

Cualquier persona puede hacer uso de este software, no hay límite de edad basta con estar interesado en aprender a resolver ecuaciones algebraicas de primer grado, así como a desarrollar algunas habilidades cognitivas, sin embargo, al inicio de este trabajo fue pensado y diseñado para alumnos de primero de secundaria que presentan problemas al momento de resolver ecuaciones algebraicas de primer grado.

Las personas con mayor experiencia académica pueden ir observando los avances de las personas al practicar con este sistema de cómputo.

Entorno de funcionamiento.

El Sistema propuesto en este escrito está diseñado para poder funcionar bajo sistema Microsoft Windows XP (32 o 64 bits) o superior, requiere el uso Adobe Flash 3.0 o superior, memoria RAM de 512 MB o más, procesador Intel Pentium IV con uno o más núcleos (se recomienda Intel Core i3) y 259 MB de espacio en disco duro, navegador web Mozilla Firefox 20, Google Chrome 45 o Microsoft EDGE o superiores.

Diseño e implementación de restricciones.

Los intervalos de tiempo asociados al trabajo pueden ser muy variables según la fecha, lo cual podría generar desfase de actividades, sumado a eso, se requiere especial cuidado al momento de programar cada uno de los niveles, del mismo modo, la forma de entrega de documentación y publicación de versiones, que están sujetas a aprobación de mis asesores de tesis, se ve forzada a trabajar con tiempos más reducidos.

No se puede liberar una versión sin pasar por aprobación, del mismo modo, se prohíbe el acceso a cualquier elemento del producto (código fuente, modelos o documentación) a cualquier persona ajena a este trabajo de tesis. Se avanza pegado a los estándares de documentación, la aplicación sólo existe en español latinoamericano, del mismo modo, la única entidad que aprueba cambios sobre el código fuente son mis asesores de tesis.

Adicionalmente cada versión debía ser ejecutada en un equipo de cómputo con las características mínimas establecidas anteriormente para garantizar un funcionamiento fluido.

Documentación para el usuario.

- Manual del usuario, que incluye elementos de uso simples, elementos de interfaz y tutoriales básico.

La documentación se entrega al momento de la entrega del software final, bajo estándares internos de documentación.

3.1.5. Requisitos para interfaz externa.

Interfaces de usuario.

Aplica las reglas básicas de GUI haciendo uso de los elementos más primitivos para que cualquier desarrollador autorizado pueda modificar el contenido. Las ventanas no rebasarán los 1216 pixeles de tamaño implementa botones estándar, sin atajos por teclado, la interface genera alertas cuando se elige la opción incorrecta, elementos de ayuda, el diseño del entorno gráfico supone aceptación de elementos útiles dejando en segundo plano el contexto estético.

Interfaces de Hardware.

La implementación de código de medio nivel permite una comunicación eficiente con los componentes de hardware a usar, todos los dispositivos tipo Plug & Play son absolutamente compatibles, y los dispositivos licenciados por fabricantes de renombre son útiles únicamente si se posee el software controlador correspondiente.

Interfaces de Software.

Este sistema está creado con **STENCYL 3.4.0 (**David Vallejo Fernández, Carlos González Morcillo y David Frutos Talavera**)** ya que es una plataforma de creación de videojuegos 2D, se eligió este motor de desarrollo ya que permite exportar el producto en formato HTML o FLASH, tecnologías soportadas por los ordenadores con capacidades mencionadas anteriormente, así pues, se puede distribuir a diferentes instituciones académicas y como se sabe no siempre se tienen las características necesarias o actuales en los equipos de cómputo. También tiene la opción de codificar por bloques o por código escrito utilizando como leguaje JAVA (Javier Moldes Teo 2011, Francisco Javier Ceballos Sierra 2010).

3.1.6. Características del sistema.

Características primarias.

Prioridad

- Revisiones y cambios determinados por mis asesores de tesis, mismos que señalaban errores o fallos de programación que eran corregidos al momento de ser notificados.

Requisitos Funcionales.

El sistema deberá proporcionar imágenes precisas para que el usuario pueda elegir claramente la opción que desea, para cada uno de los niveles que lo conforman.

Nivel 1:

- El sistema deberá ser capaz de leer entrada por teclado y determinar si corresponde a un control de movimiento.
- El sistema deberá generar en pantalla los elementos del conjunto en orden aleatorio, correspondientes al nivel de ejecución.
- Cuando el actor principal entra en contacto con un objeto del conjunto dado, el sistema deberá determinar si dicha colisión corresponde a una respuesta correcta o incorrecta.

- Si la elección es correcta avanza al siguiente escenario, caso contrario perderá una *“vida”* de tres disponibles.
- Se podrá reiniciar el nivel bajo las siguientes condiciones:
  i) Cuando no se selecciones ningún elemento del conjunto dado.
  ii) También cuando haya cometido tres colisiones erróneas.

Nivel 2:

- El sistema elegirá una secuencia aleatoria de un banco predefinido de secuencias.
- Al momento de invertir la secuencia el sistema deberá ser capaz de verificar si la nueva secuencia es correcta.
- Se podrá reiniciar el escenario cuando la secuencia introducida es incorrecta.

Nivel 3:

- El sistema deberá de identificar el tipo de objeto seleccionado por el mouse, y así eliminar un objeto equivalente en el lado contrario si es que existe.
- El sistema deberá garantizar el funcionamiento del punto anterior sin importar el orden en el que los elementos hayan sido seleccionados y sin importar el lado en el que se haya trabajado.

Nivel 4:

- El sistema deberá generar un ítem (moneda) al momento de presionar un botón, este mismo ítem deberá ser eliminado al ser arrastrado a un área designada.
- El sistema deberá garantizar la existencia de un único ítem o ninguno a la vez.
- El ítem deberá ser arrastrado por el mouse y ser soltado en cualquier parte de la pantalla.
- El sistema deberá reconocer en qué lado de la balanza fue soltado el ítem.
- El sistema deberá mostrar un historial de las operaciones realizadas en la balanza y con base en ello modificar las animaciones de los objetos en pantalla.
- Se podrá reiniciar el escenario si el ítem es soltado en el lado incorrecto de la balanza.

Nivel 5:

- El sistema deberá proporcionar el planteamiento de la ecuación a resolver.
- El sistema deberá identificar los botones pulsados de la calculadora y con base a ellos generar una ficha que contendrá la operación aritmética seleccionada.

- El sistema deberá restringir operaciones que no sean consideradas válidas para la solución del ejercicio.
- El sistema deberá reconocer en qué lado la ficha es soltada, si el lado es correcto procederá hacer la operación en el mismo y si es incorrecto podrás reiniciar el escenario.

Otros requisitos no funcionales.

Requisitos de desempeño.

El Sistema no debe bloquearse ni caerse independientemente de la plataforma o versión de Java o navegador que ejecute, del mismo modo ofreciendo así la máxima portabilidad y rendimiento posible.

Se debe poder reiniciar el escenario de cualquier nivel al cometer un error.

Requisitos de privacidad.

Este producto está diseñado para ser independiente de otro software, es decir, no se puede ni debe intentar conectarse con software de terceros, tampoco recaudara ningún tipo de información del equipo o del usuario.

Atributos de calidad del software.

El sistema no debería bloquearse bajo ninguna circunstancia, además de poder operar en forma local haciendo uso de su servidor interno (localhost).

El tiempo de espera para iniciar en cualquier nivel no debe demorar más de 30 segundos.

El sistema es fácil de aprender a usar y resulta amigable para cualquier usuario que lo tome por vez primera.

No requiere de mantenimiento.

Este producto es para uso exclusivo del aprendizaje de ecuaciones algebraicas de primer grado, así como desarrollar algunas habilidades cognitivas, sin embargo, se puede disponer de las clases y/o algunos segmentos de código para generar otros sistemas a futuro, ya sea para el mismo fin u otro diferente.

El sistema puede ser utilizado innumerables ocasiones, siempre y cuando se disponga de un administrador que se haga cargo del uso del mismo.

Otros requisitos.

Este software podrá ser usado sin licencia y se puede duplicar o redistribuir.

El producto está diseñado para su uso en México, por lo cual, sólo dispone de paquete de idioma español latino y no se garantizan actualizaciones de paquetes de idiomas distintos, a reserva de que se solicite.

3.1.7. Cronograma de actividades.

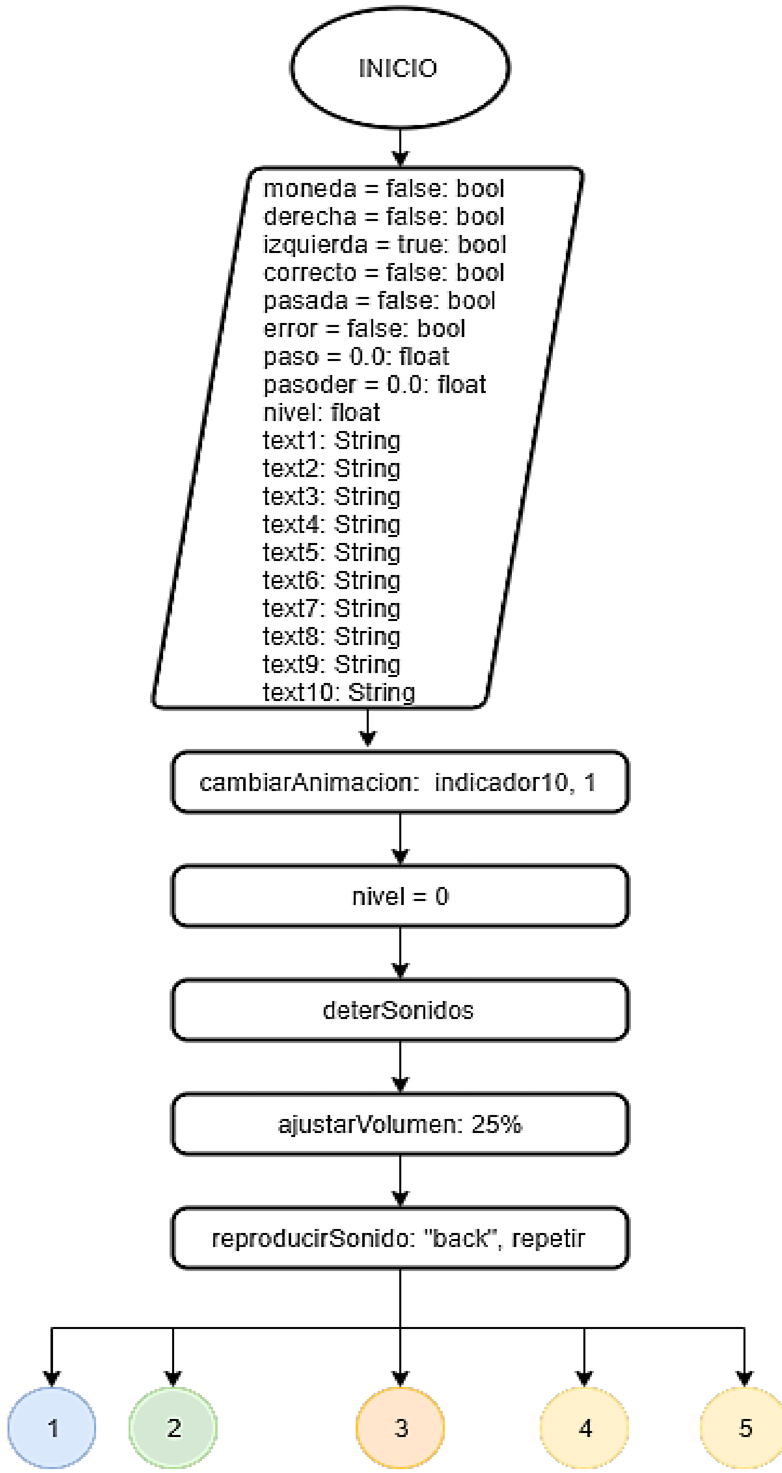
Para llevar a cabo el Proyecto seguiremos las siguientes etapas:

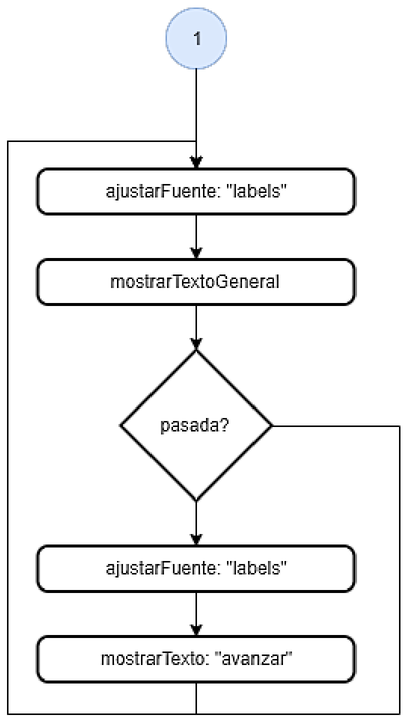
1. Realizar entrevistas con docentes y estudiantes para conocer diversas causales por las cuales suele hacer difícil la solución de ecuaciones algebraicas.
2. Revisar diversas fuentes que contienen información respecto a la solución de ecuaciones algebraicas.
3. Revisar las herramientas computacionales y aplicaciones tecnológicas disponibles, mediante las cuales se resuelven ecuaciones algebraicas.
4. Revisar la información respecto a las estructuras mentales y sus relaciones con sus análogas estructuras matemáticas madres.
5. Revisar la información donde se precisa la relación entre la estructura mental llamada *reversibilidad* y su análoga *estructura algebraica* (*campo*).
6. Diseñar actividades para resolver ecuaciones algebraicas, considerando algunas relaciones entre las *estructuras mentales madres* (en particular la *reversibilidad*), y las *estructuras matemáticas madres* (en particular la estructura de *campo*).
7. Determinar las herramientas necesarias a nivel software, para llevar a cabo las actividades diseñadas en la sexta etapa.
8. Diseño del sistema.
9. Realizar la programación bajo el ambiente adecuado, las actividades diseñadas en la etapa 6.
10. Realizar pruebas del sistema elaborado.

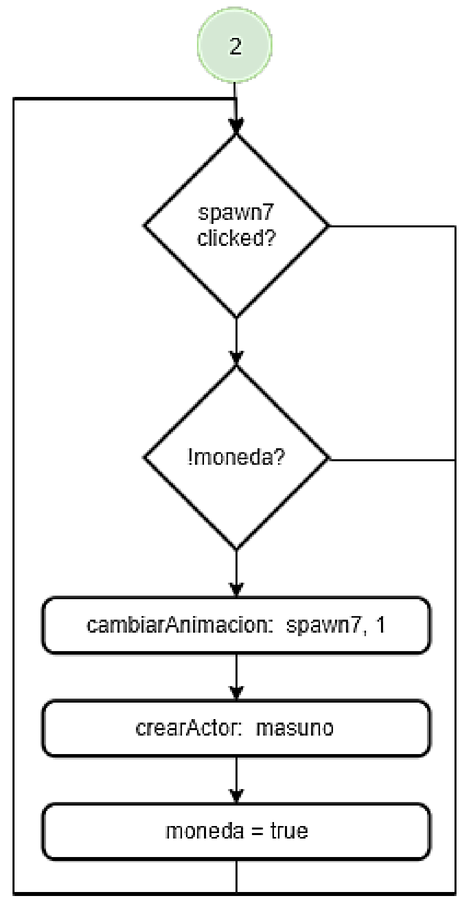
Cronograma de actividades									
Actividades	**Mes 1**	**Mes 2**	**Mes 3**	**Mes 4**	**Mes 5**	**Mes 6**	**Mes 7**	**Mes 8**	**Mes 9**
1	X								
2	X	X							
3		X							
4		X	X						
5			X	X					
6			X	X	X				
7			X	X	X	X			
8			X	X	X	X			
9							X	X	
10								X	X

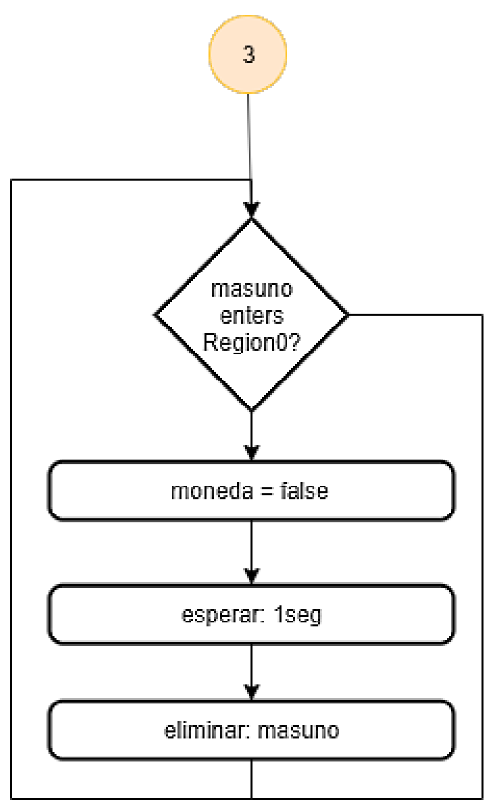
3.1.8. Diagramas

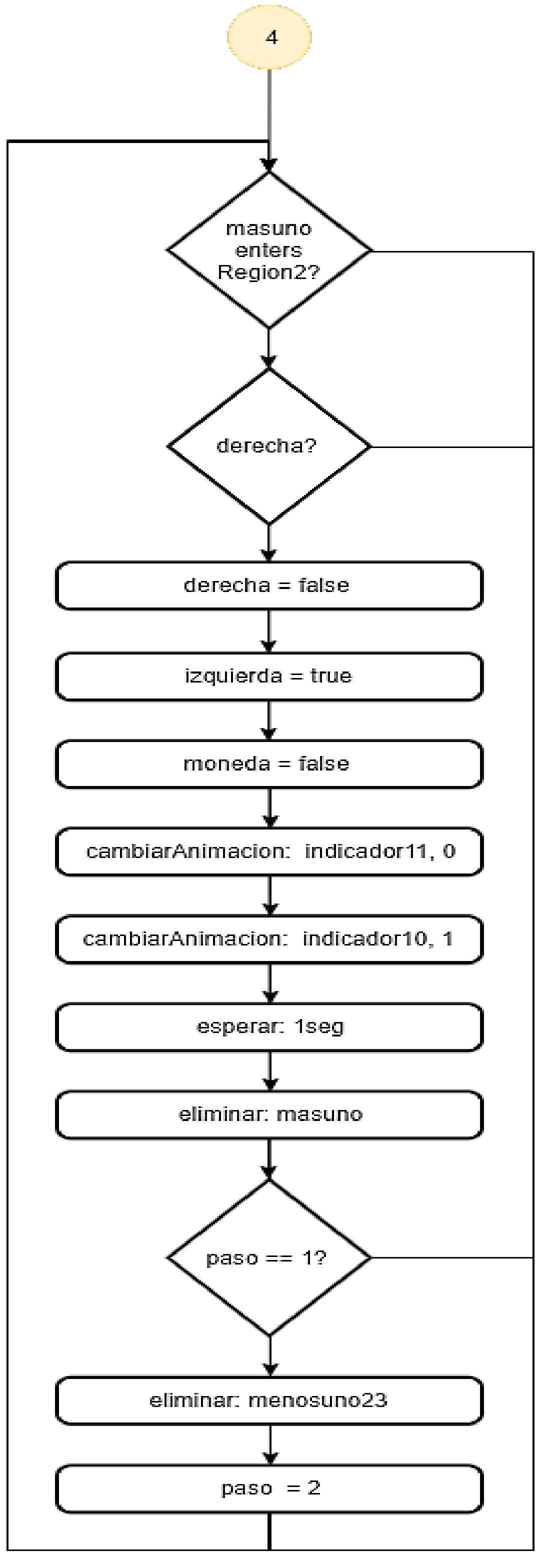
Nivel 4 instrucciones



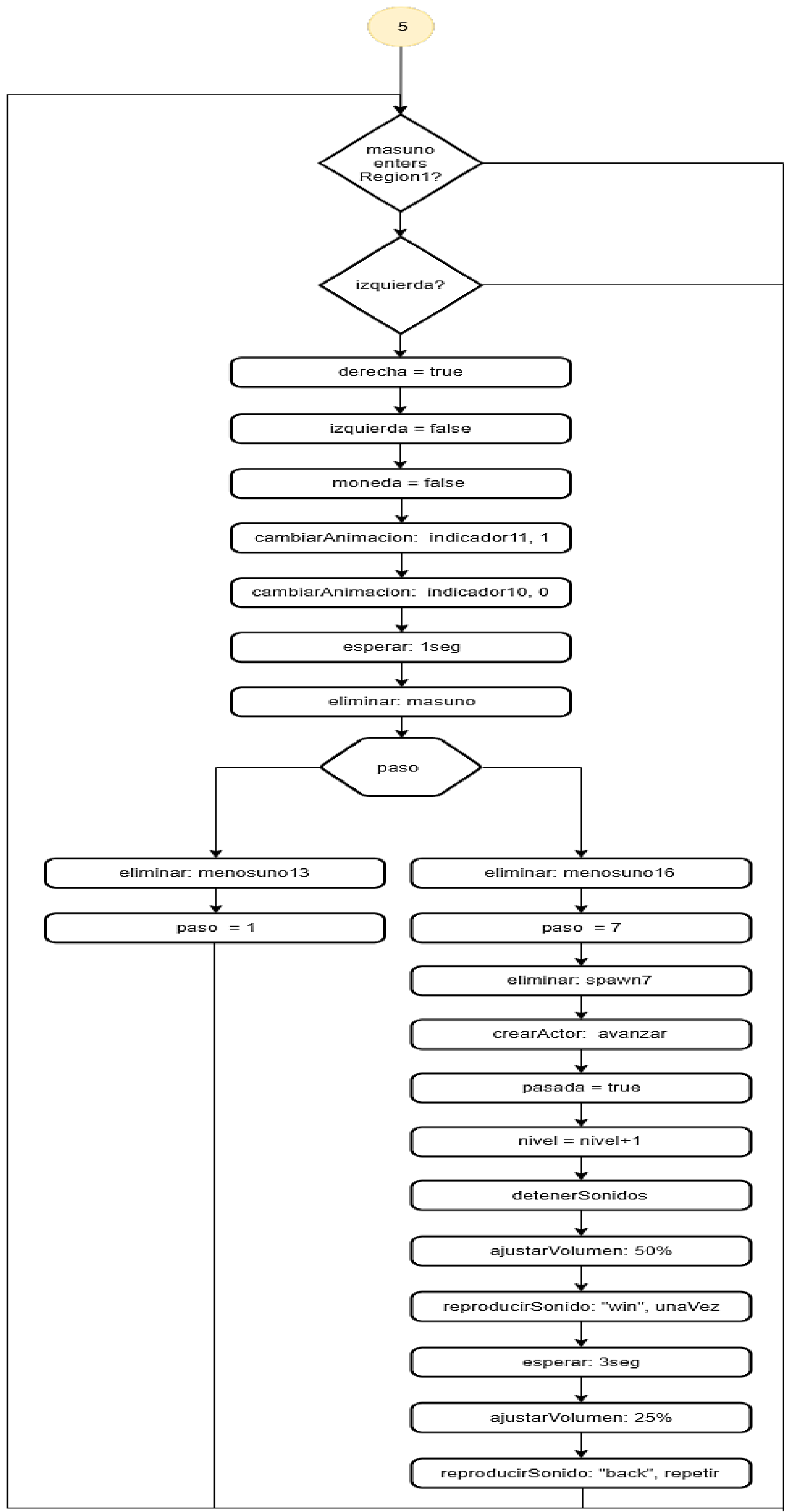

1
ajustarFuente: "labels"
mostrarTextoGeneral
pasada?
ajustarFuente: "labels"
mostrarTexto: "avanzar"


2
spawn7 clicked?
!moneda?
cambiarAnimacion: spawn7, 1
crearActor: masuno
moneda = true

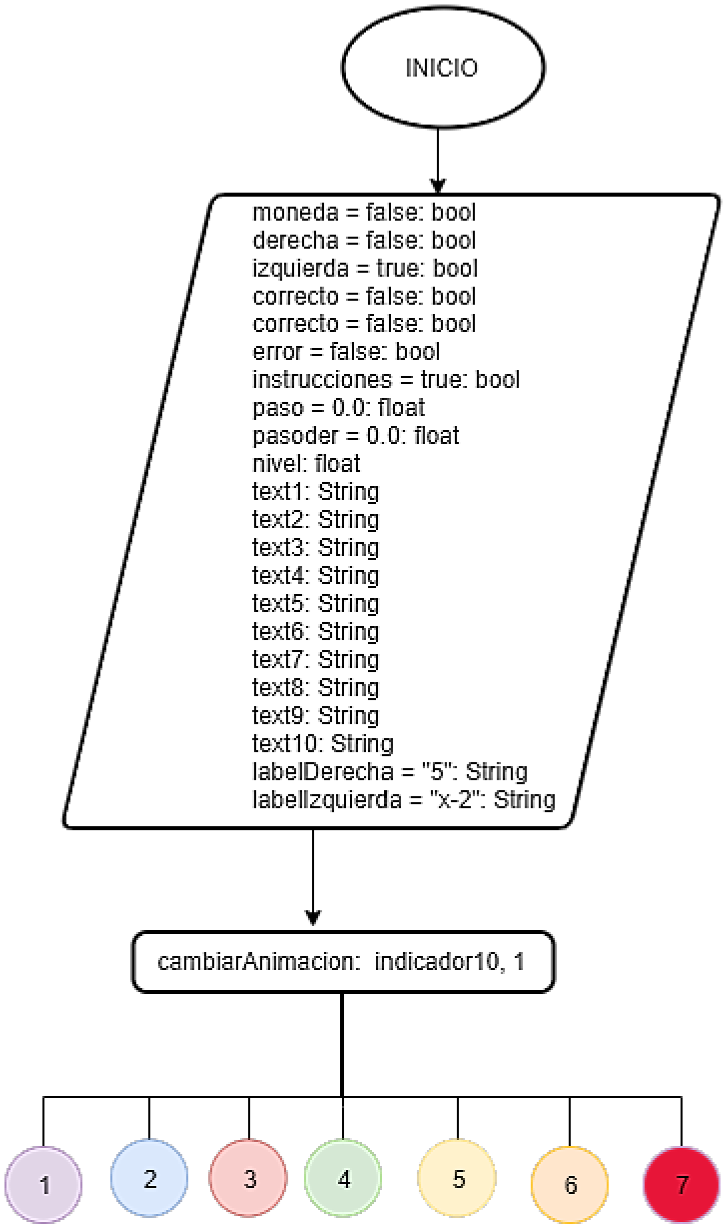

3
masuno enters Region0?
moneda = false
esperar: 1seg
eliminar: masuno

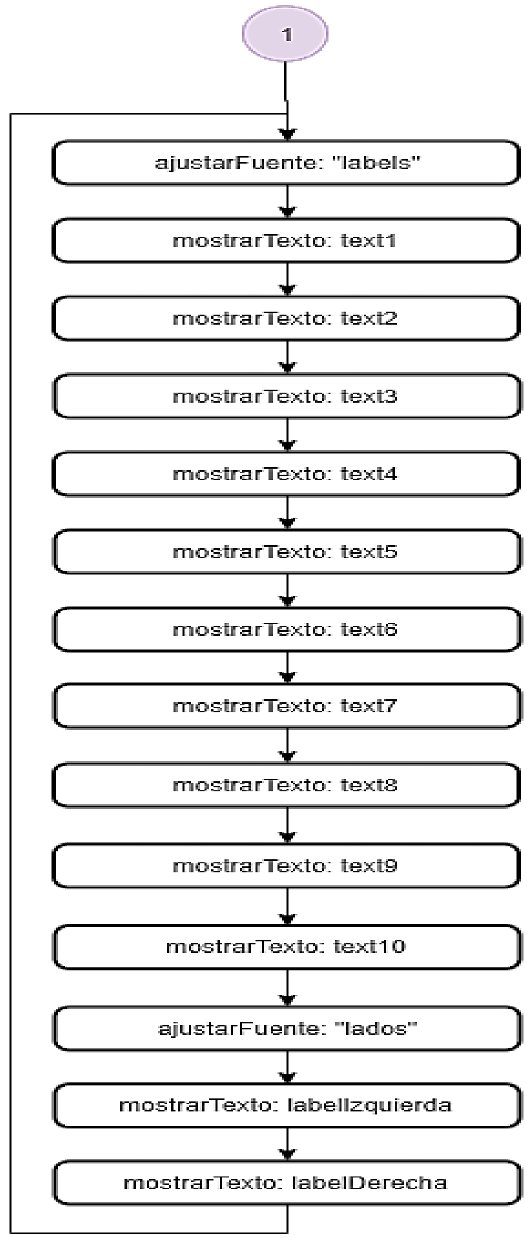


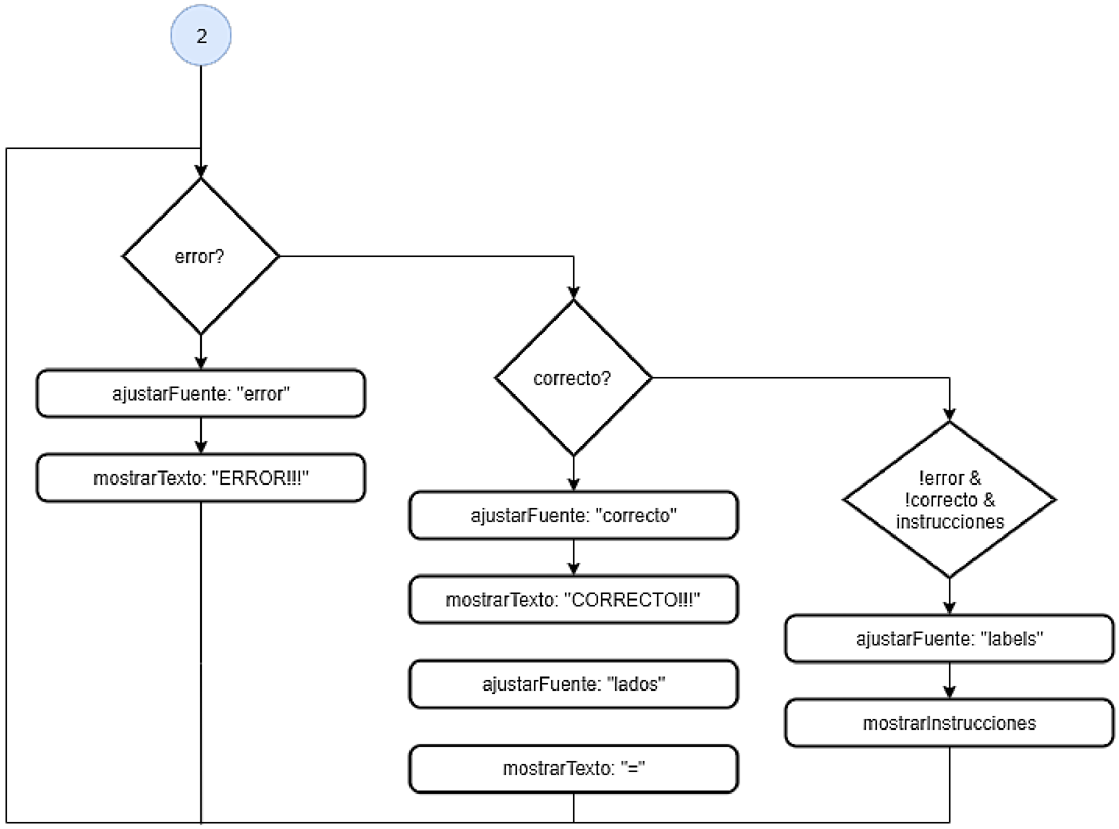
4
masuno enters Region2?
derecha?
derecha = false
izquierda = true
moneda = false
cambiarAnimacion: indicador11, 0
cambiarAnimacion: indicador10, 1
esperar: 1seg
eliminar: masuno
paso == 1?
eliminar: menosuno23
paso = 2

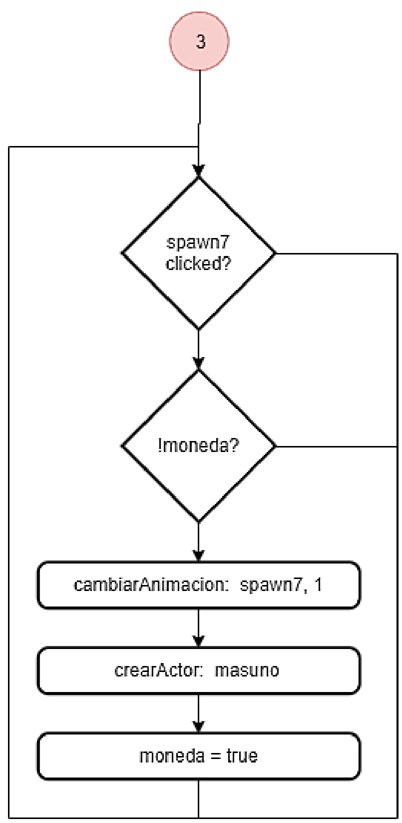

5
masuno enters Region1?
izquierda?
derecha = true
izquierda = false
moneda = false
cambiarAnimacion: indicador11, 1
cambiarAnimacion: indicador10, 0
esperar: 1seg
eliminar: masuno
paso
eliminar: menosuno13
paso = 1
eliminar: menosuno16
paso = 7
eliminar: spawn7
crearActor: avanzar
pasada = true
nivel = nivel+1
detenerSonidos
ajustarVolumen: 50%
reproducirSonido: "win", unaVez
esperar: 3seg
ajustarVolumen: 25%
reproducirSonido: "back", repetir

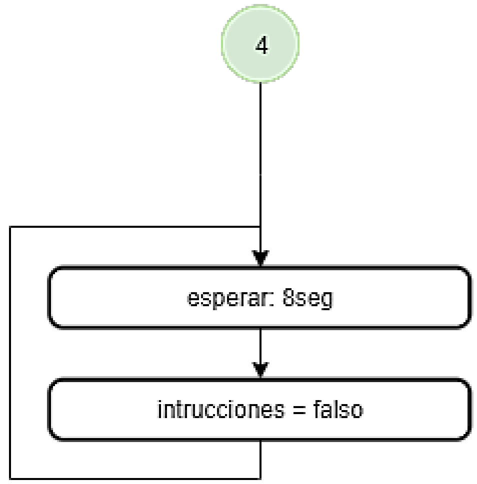
Nivel 4 ecuación1

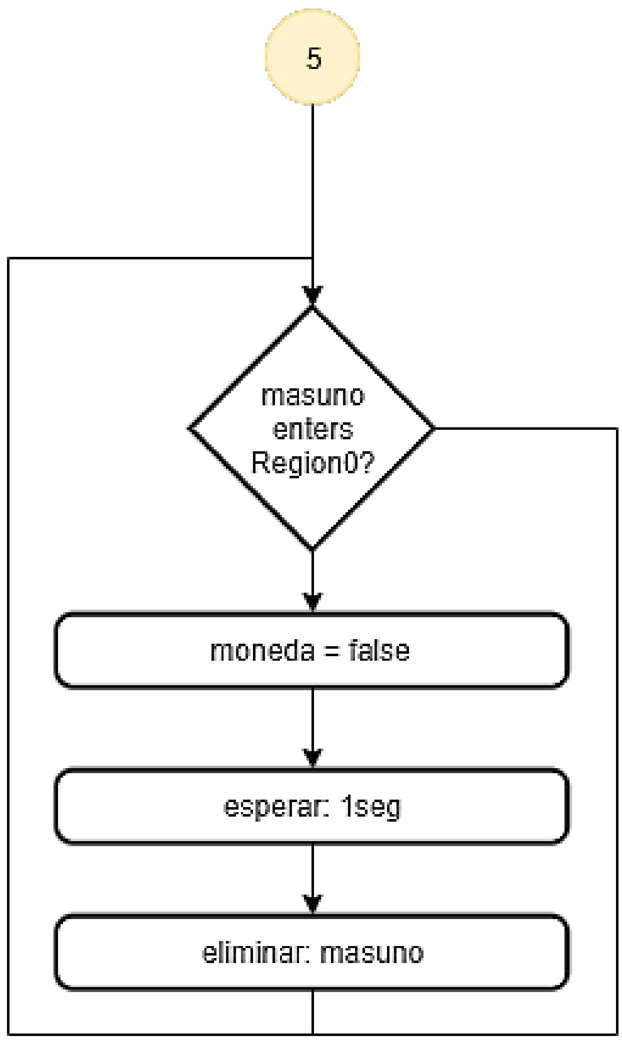


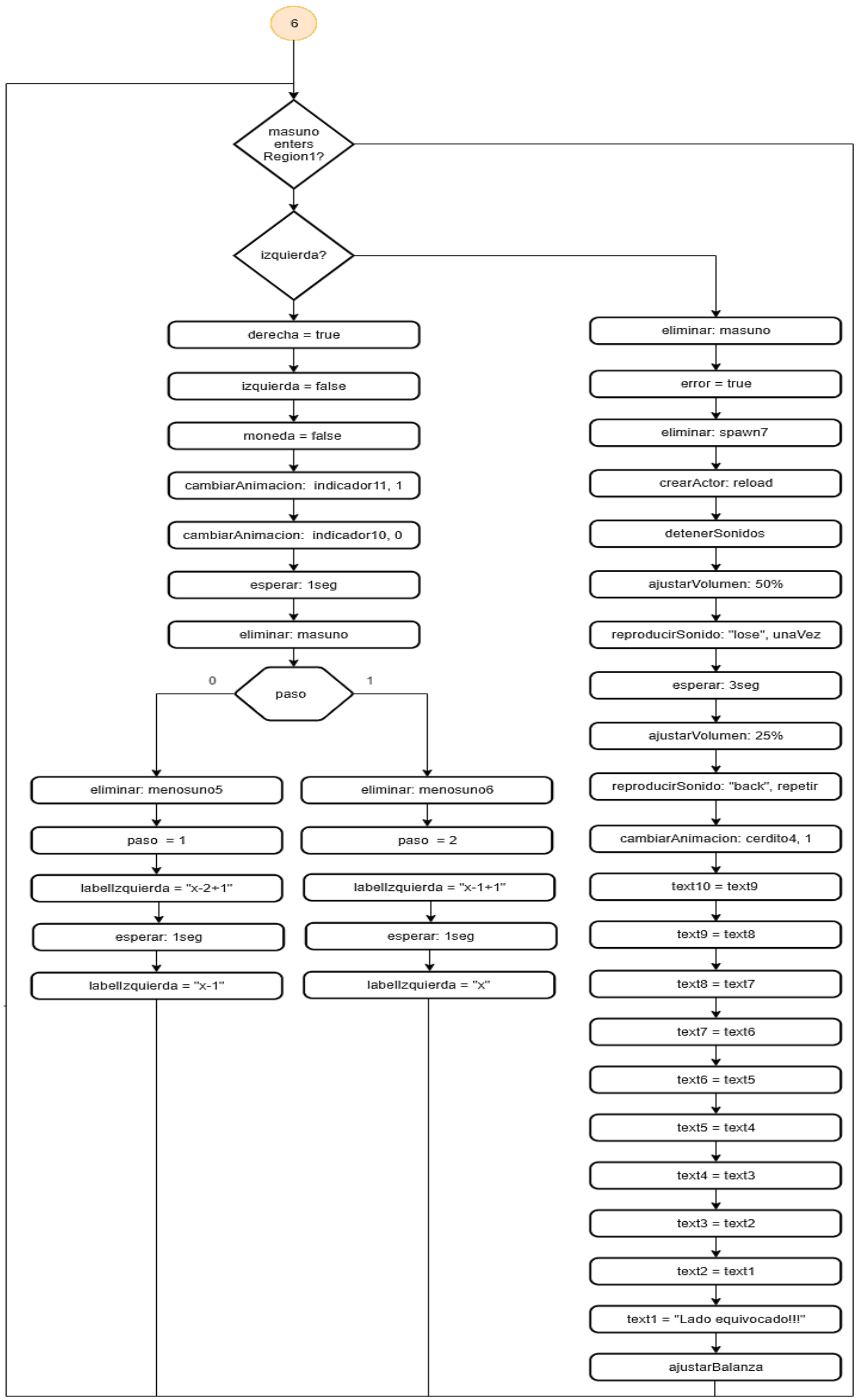

1
ajustarFuente: "labels"
mostrarTexto: text1
mostrarTexto: text2
mostrarTexto: text3
mostrarTexto: text4
mostrarTexto: text5
mostrarTexto: text6
mostrarTexto: text7
mostrarTexto: text8
mostrarTexto: text9
mostrarTexto: text10
ajustarFuente: "lados"
mostrarTexto: labelIzquierda
mostrarTexto: labelDerecha

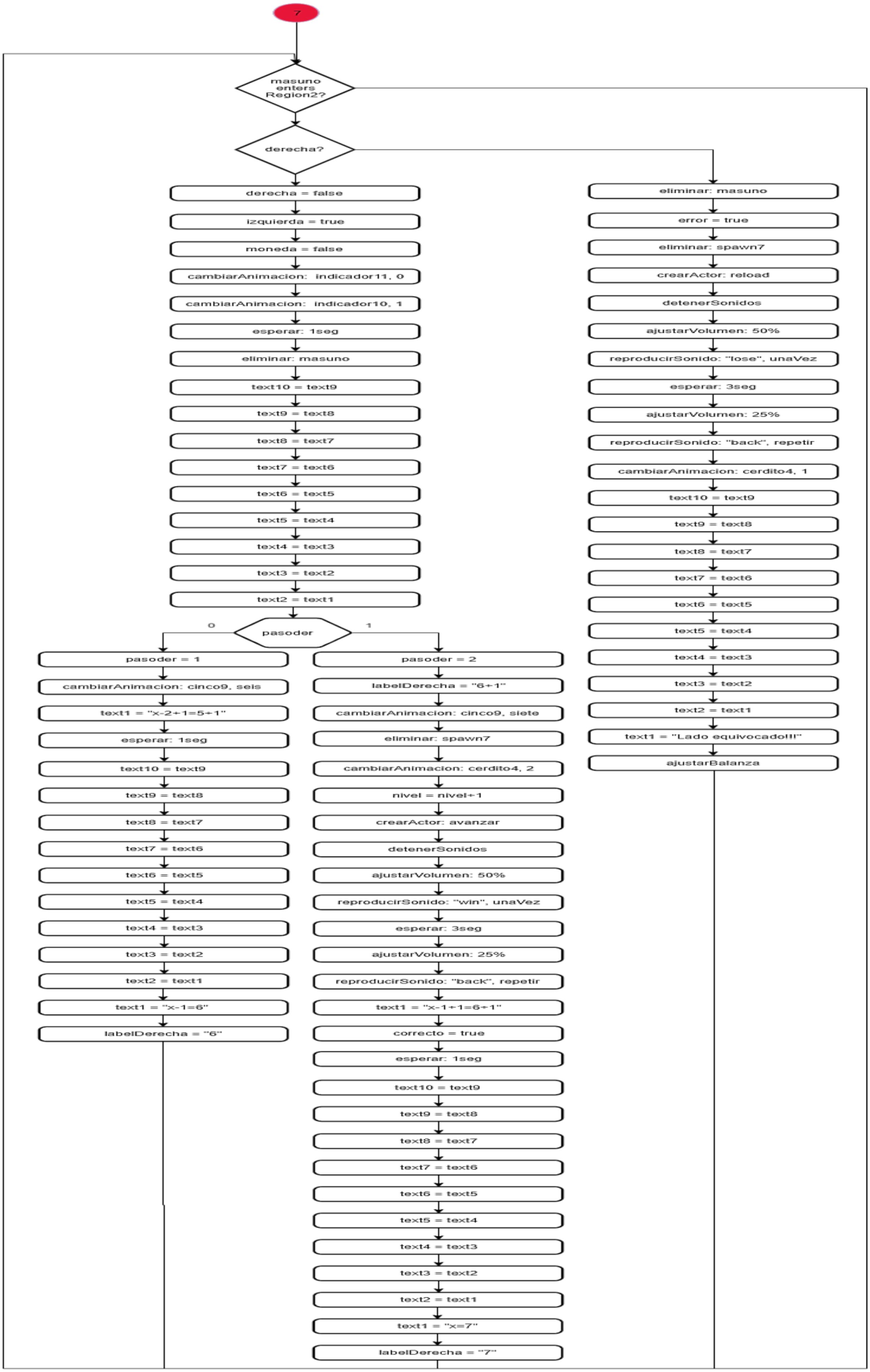

2
error?
ajustarFuente: "error"
mostrarTexto: "ERROR!!!"
correcto?
ajustarFuente: "correcto"
mostrarTexto: "CORRECTO!!!"
ajustarFuente: "lados"
mostrarTexto: "="
!error &
!correcto &
instrucciones
ajustarFuente: "labels"
mostrarInstrucciones


3
spawn7
clicked?
!moneda?
cambiarAnimacion: spawn7, 1
crearActor: masuno
moneda = true

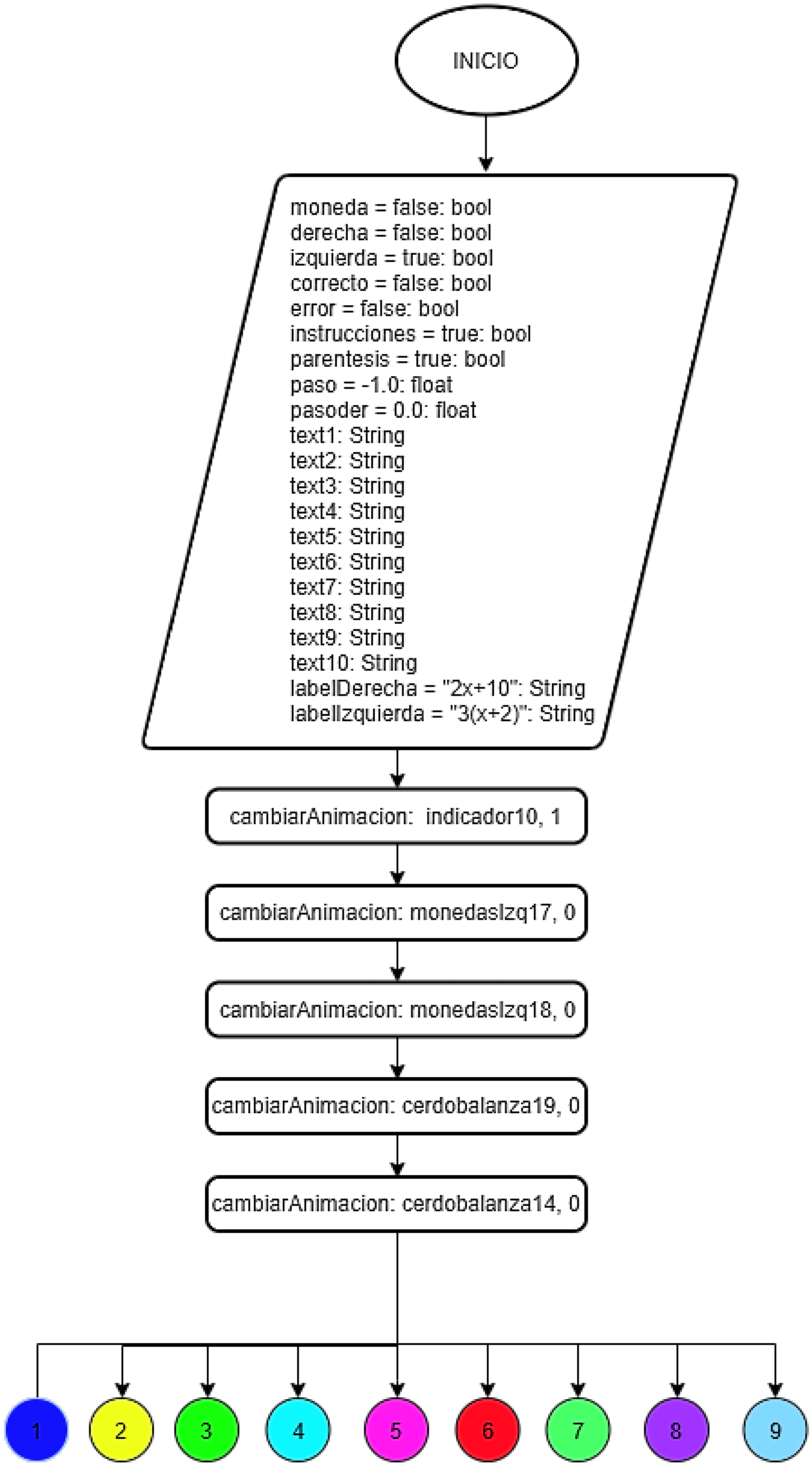

4
esperar: 8seg
intrucciones = falso

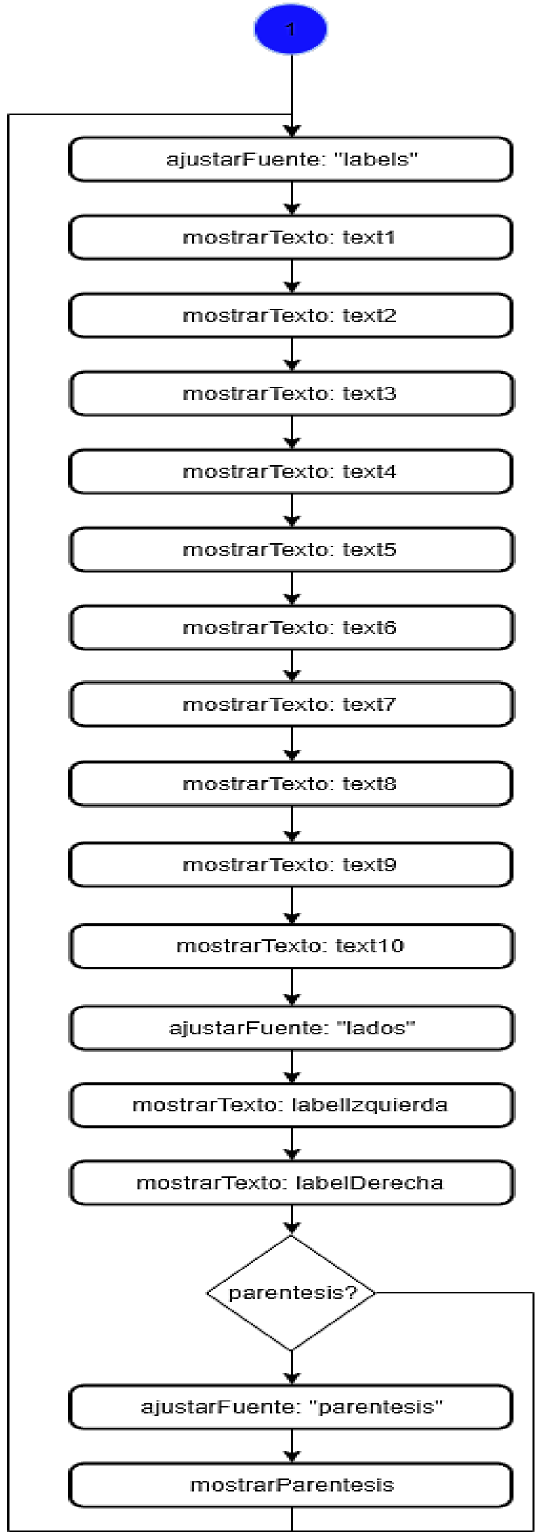

5
masuno
enters
Region0?
moneda = false
esperar: 1seg
eliminar: masuno

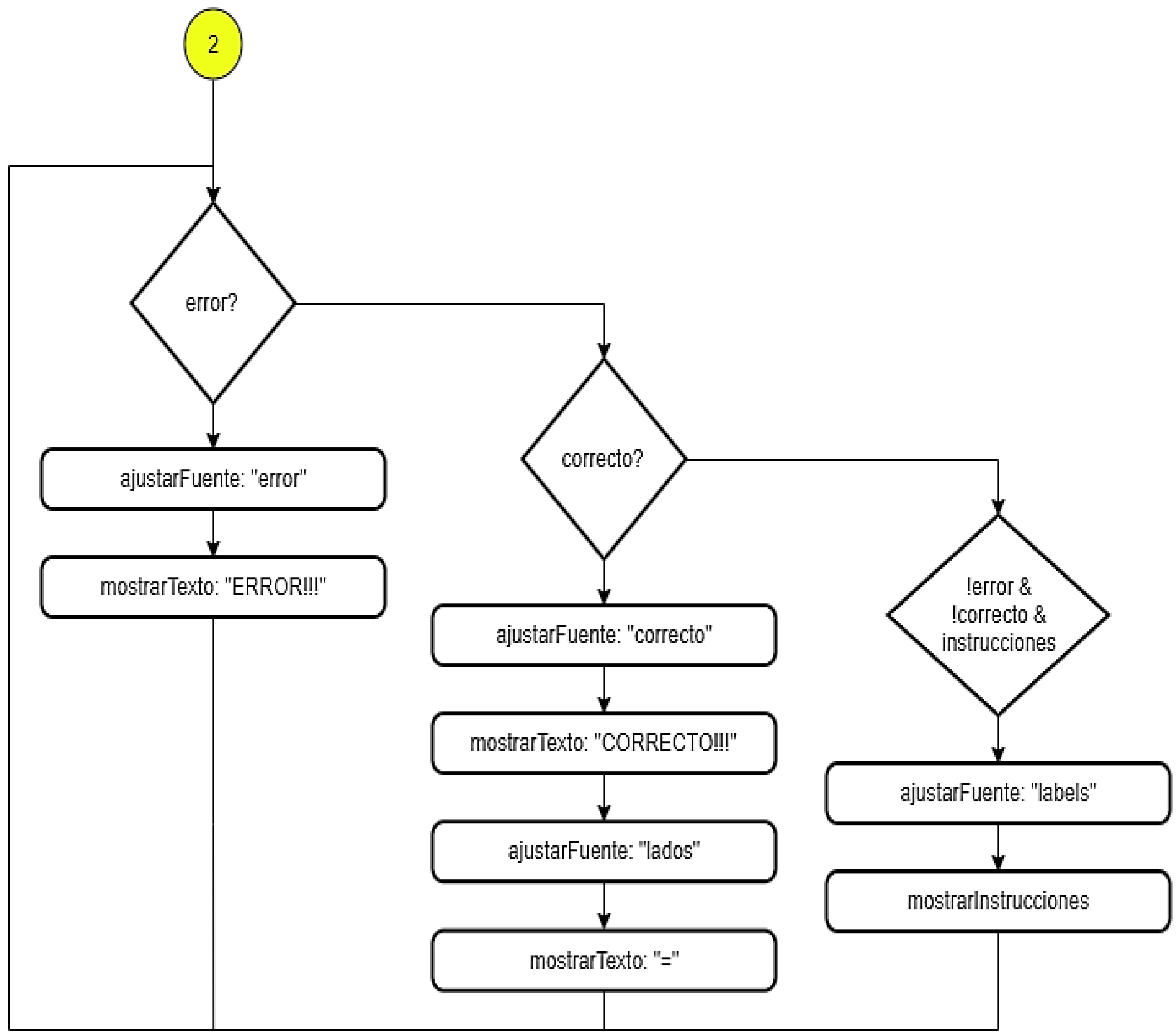

6
masuno enters Region1?
izquierda?
derecha = true
izquierda = false
moneda = false
cambiarAnimacion: indicador11, 1
cambiarAnimacion: indicador10, 0
esperar: 1seg
eliminar: masuno
paso
0
1
eliminar: menosuno5
paso = 1
labelIzquierda = "x-2+1"
esperar: 1seg
labelIzquierda = "x-1"
eliminar: menosuno6
paso = 2
labelIzquierda = "x-1+1"
esperar: 1seg
labelIzquierda = "x"
eliminar: masuno
error = true
eliminar: spawn7
crearActor: reload
detenerSonidos
ajustarVolumen: 50%
reproducirSonido: "lose", unaVez
esperar: 3seg
ajustarVolumen: 25%
reproducirSonido: "back", repetir
cambiarAnimacion: cerdito4, 1
text10 = text9
text9 = text8
text8 = text7
text7 = text6
text6 = text5
text5 = text4
text4 = text3
text3 = text2
text2 = text1
text1 = "Lado equivocado!!!"
ajustarBalanza

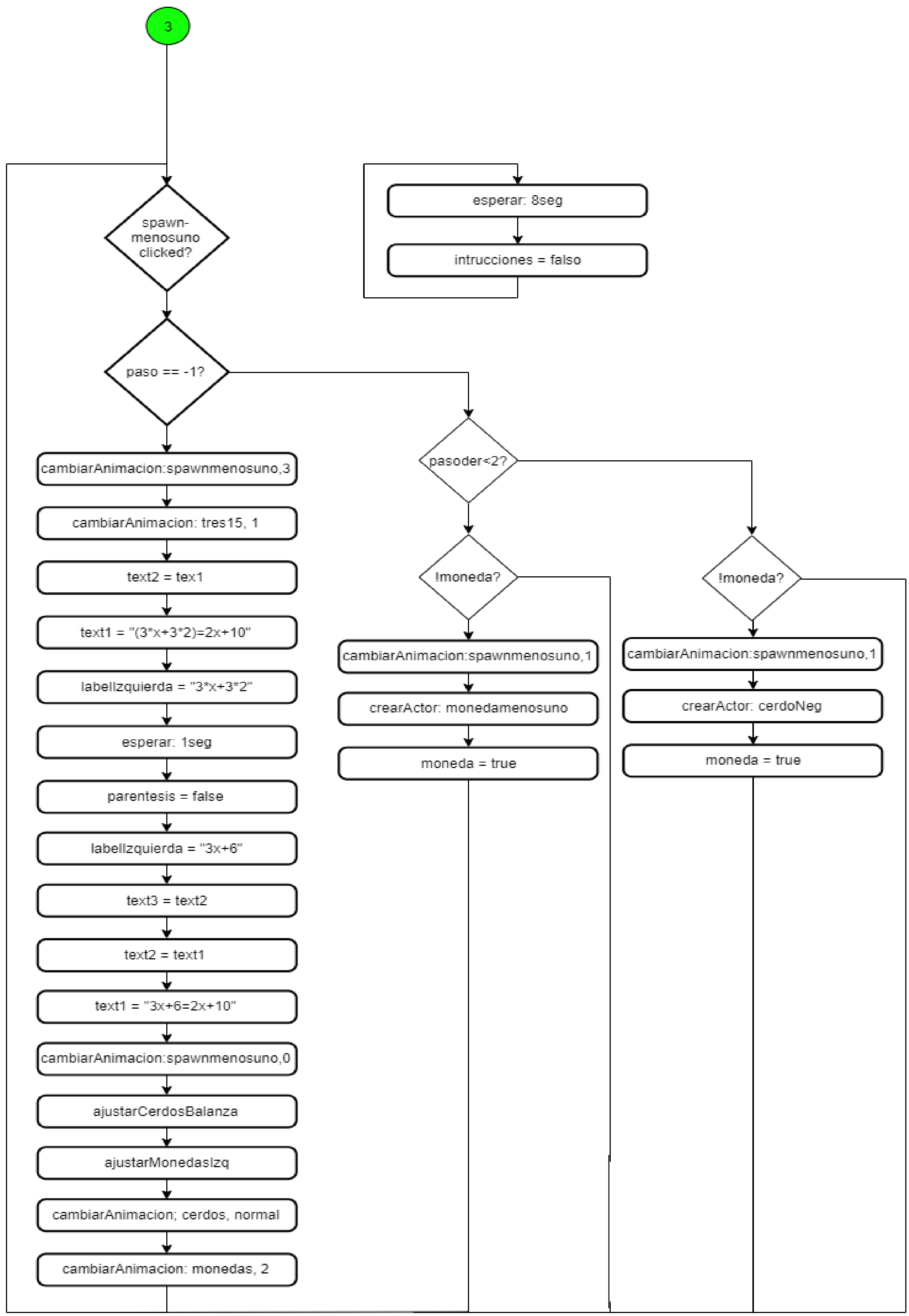

7
masuno enters Region2?
derecha?
derecha = false
izquierda = true
moneda = false
cambiarAnimacion: indicador11, 0
cambiarAnimacion: indicador10, 1
esperar: 1seg
eliminar: masuno
text10 = text9
text9 = text8
text8 = text7
text7 = text6
text6 = text5
text5 = text4
text4 = text3
text3 = text2
text2 = text1
pasoder
0
1
pasoder = 1
cambiarAnimacion: cinco9, seis
text1 = "x-2+1=5+1"
esperar: 1seg
text10 = text9
text9 = text8
text8 = text7
text7 = text6
text6 = text5
text5 = text4
text4 = text3
text3 = text2
text2 = text1
text1 = "x-1=6"
labelDerecha = "6"
pasoder = 2
labelDerecha = "6+1"
cambiarAnimacion: cinco9, siete
eliminar: spawn7
cambiarAnimacion: cerdito4, 2
nivel = nivel+1
crearActor: avanzar
detenerSonidos
ajustarVolumen: 50%
reproducirSonido: "win", unaVez
esperar: 3seg
ajustarVolumen: 25%
reproducirSonido: "back", repetir
text1 = "x-1+1=6+1"
correcto = true
esperar: 1seg
text10 = text9
text9 = text8
text8 = text7
text7 = text6
text6 = text5
text5 = text4
text4 = text3
text3 = text2
text2 = text1
text1 = "x=7"
labelDerecha = "7"
eliminar: masuno
error = true
eliminar: spawn7
crearActor: reload
detenerSonidos
ajustarVolumen: 50%
reproducirSonido: "lose", unaVez
esperar: 3seg
ajustarVolumen: 25%
reproducirSonido: "back", repetir
cambiarAnimacion: cerdito4, 1
text10 = text9
text9 = text8
text8 = text7
text7 = text6
text6 = text5
text5 = text4
text4 = text3
text3 = text2
text2 = text1
text1 = "Lado equivocado!!!"
ajustarBalanza

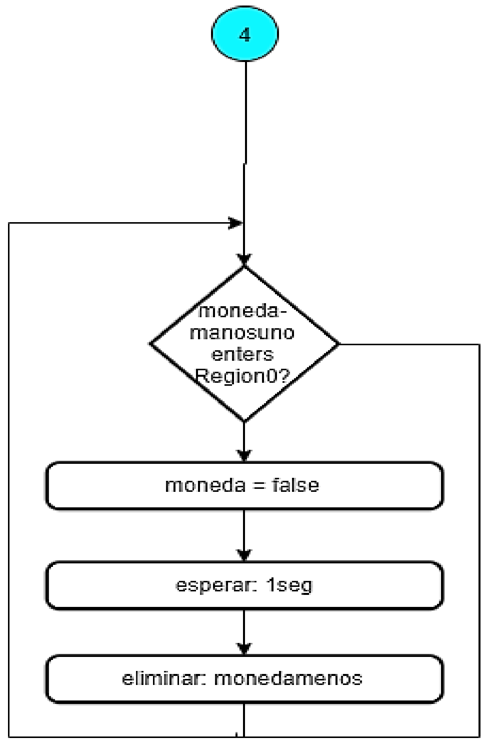
Nivel 4 ecuación2

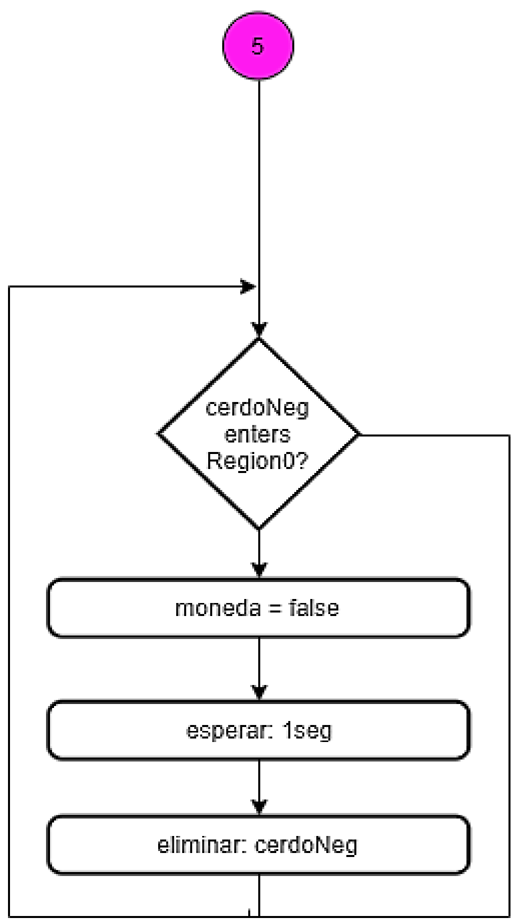


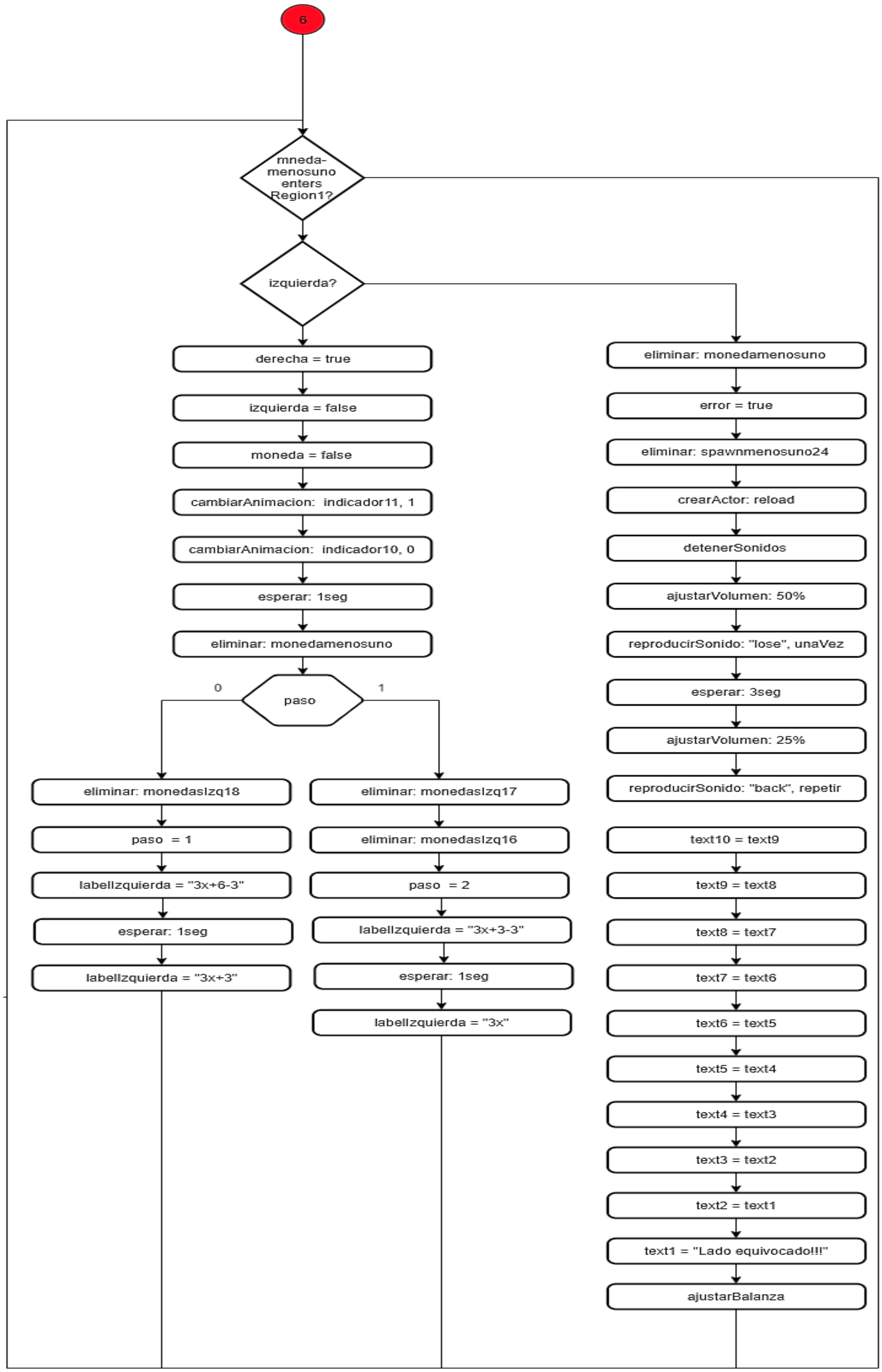

1
ajustarFuente: "labels"
mostrarTexto: text1
mostrarTexto: text2
mostrarTexto: text3
mostrarTexto: text4
mostrarTexto: text5
mostrarTexto: text6
mostrarTexto: text7
mostrarTexto: text8
mostrarTexto: text9
mostrarTexto: text10
ajustarFuente: "lados"
mostrarTexto: labelIzquierda
mostrarTexto: labelDerecha
parentesis?
ajustarFuente: "parentesis"
mostrarParentesis

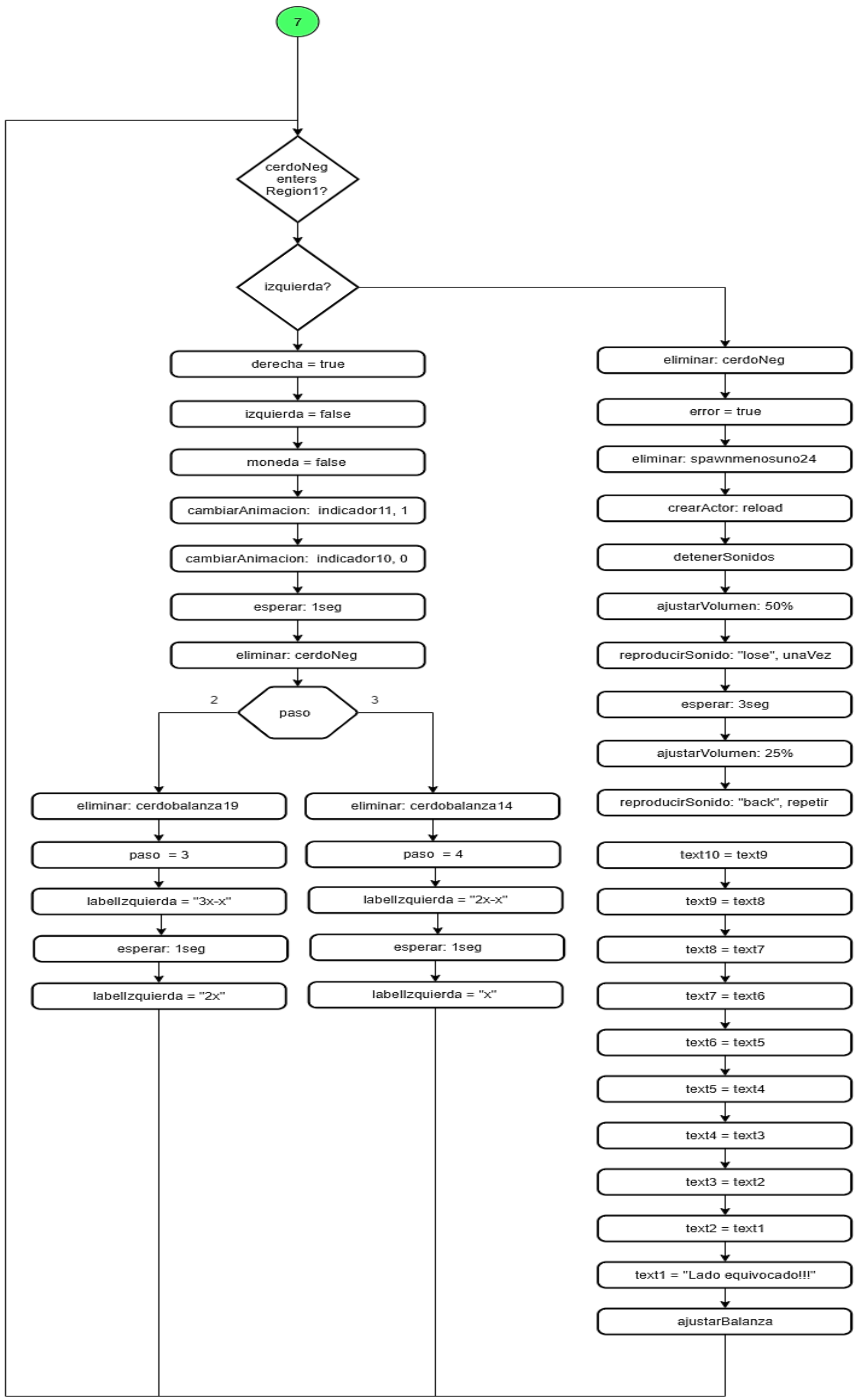

2
error?
ajustarFuente: "error"
mostrarTexto: "ERROR!!!"
correcto?
ajustarFuente: "correcto"
mostrarTexto: "CORRECTO!!!"
ajustarFuente: "lados"
mostrarTexto: "="
!error &
!correcto &
instrucciones
ajustarFuente: "labels"
mostrarInstrucciones

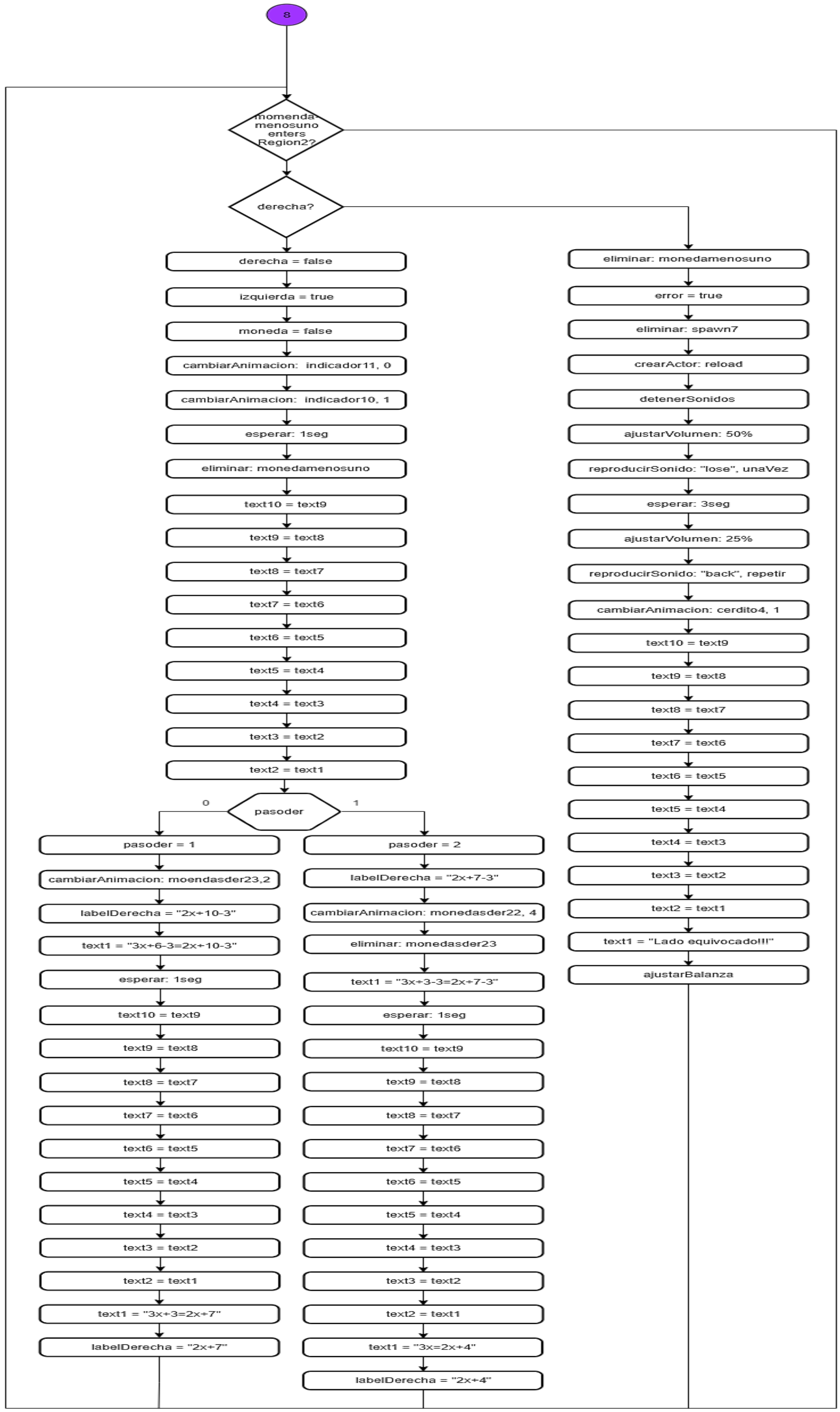

3
esperar: 8seg
intrucciones = falso
spawn-menosuno clicked?
paso == -1?
cambiarAnimacion:spawnmenosuno,3
cambiarAnimacion: tres15, 1
text2 = tex1
text1 = "(3*x+3*2)=2x+10"
labelIzquierda = "3*x+3*2"
esperar: 1seg
parentesis = false
labelIzquierda = "3x+6"
text3 = text2
text2 = text1
text1 = "3x+6=2x+10"
cambiarAnimacion:spawnmenosuno,0
ajustarCerdosBalanza
ajustarMonedasIzq
cambiarAnimacion; cerdos, normal
cambiarAnimacion: monedas, 2
pasoder<2?
!moneda?
cambiarAnimacion:spawnmenosuno,1
crearActor: monedamenosuno
moneda = true
!moneda?
cambiarAnimacion:spawnmenosuno,1
crearActor: cerdoNeg
moneda = true


4
moneda-manosuno enters Region0?
moneda = false
esperar: 1seg
eliminar: monedamenos


5
cerdoNeg enters Region0?
moneda = false
esperar: 1seg
eliminar: cerdoNeg


6
mneda-menosuno enters Region1?
izquierda?
derecha = true
izquierda = false
moneda = false
cambiarAnimacion: indicador11, 1
cambiarAnimacion: indicador10, 0
esperar: 1seg
eliminar: monedamenosuno
paso
0
1
eliminar: monedasIzq18
paso = 1
labelIzquierda = "3x+6-3"
esperar: 1seg
labelIzquierda = "3x+3"
eliminar: monedasIzq17
eliminar: monedasIzq16
paso = 2
labelIzquierda = "3x+3-3"
esperar: 1seg
labelIzquierda = "3x"
eliminar: monedamenosuno
error = true
eliminar: spawnmenosuno24
crearActor: reload
detenerSonidos
ajustarVolumen: 50%
reproducirSonido: "lose", unaVez
esperar: 3seg
ajustarVolumen: 25%
reproducirSonido: "back", repetir
text10 = text9
text9 = text8
text8 = text7
text7 = text6
text6 = text5
text5 = text4
text4 = text3
text3 = text2
text2 = text1
text1 = "Lado equivocado!!!"
ajustarBalanza


7
cerdoNeg enters Region1?
izquierda?
derecha = true
izquierda = false
moneda = false
cambiarAnimacion: indicador11, 1
cambiarAnimacion: indicador10, 0
esperar: 1seg
eliminar: cerdoNeg
paso
2
3
eliminar: cerdobalanza19
paso = 3
labelIzquierda = "3x-x"
esperar: 1seg
labelIzquierda = "2x"
eliminar: cerdobalanza14
paso = 4
labelIzquierda = "2x-x"
esperar: 1seg
labelIzquierda = "x"
eliminar: cerdoNeg
error = true
eliminar: spawnmenosuno24
crearActor: reload
detenerSonidos
ajustarVolumen: 50%
reproducirSonido: "lose", unaVez
esperar: 3seg
ajustarVolumen: 25%
reproducirSonido: "back", repetir
text10 = text9
text9 = text8
text8 = text7
text7 = text6
text6 = text5
text5 = text4
text4 = text3
text3 = text2
text2 = text1
text1 = "Lado equivocado!!!"
ajustarBalanza


8
momenda menosuno enters Region2?
derecha?
derecha = false
izquierda = true
moneda = false
cambiarAnimacion: indicador11, 0
cambiarAnimacion: indicador10, 1
esperar: 1seg
eliminar: monedamenosuno
text10 = text9
text9 = text8
text8 = text7
text7 = text6
text6 = text5
text5 = text4
text4 = text3
text3 = text2
text2 = text1
pasoder
0
1
pasoder = 1
cambiarAnimacion: moendasder23,2
labelDerecha = "2x+10-3"
text1 = "3x+6-3=2x+10-3"
esperar: 1seg
text10 = text9
text9 = text8
text8 = text7
text7 = text6
text6 = text5
text5 = text4
text4 = text3
text3 = text2
text2 = text1
text1 = "3x+3=2x+7"
labelDerecha = "2x+7"
pasoder = 2
labelDerecha = "2x+7-3"
cambiarAnimacion: monedasder22, 4
eliminar: monedasder23
text1 = "3x+3-3=2x+7-3"
esperar: 1seg
text10 = text9
text9 = text8
text8 = text7
text7 = text6
text6 = text5
text5 = text4
text4 = text3
text3 = text2
text2 = text1
text1 = "3x=2x+4"
labelDerecha = "2x+4"
eliminar: monedamenosuno
error = true
eliminar: spawn7
crearActor: reload
detenerSonidos
ajustarVolumen: 50%
reproducirSonido: "lose", unaVez
esperar: 3seg
ajustarVolumen: 25%
reproducirSonido: "back", repetir
cambiarAnimacion: cerdito4, 1
text10 = text9
text9 = text8
text8 = text7
text7 = text6
text6 = text5
text5 = text4
text4 = text3
text3 = text2
text2 = text1
text1 = "Lado equivocado!!!"
ajustarBalanza

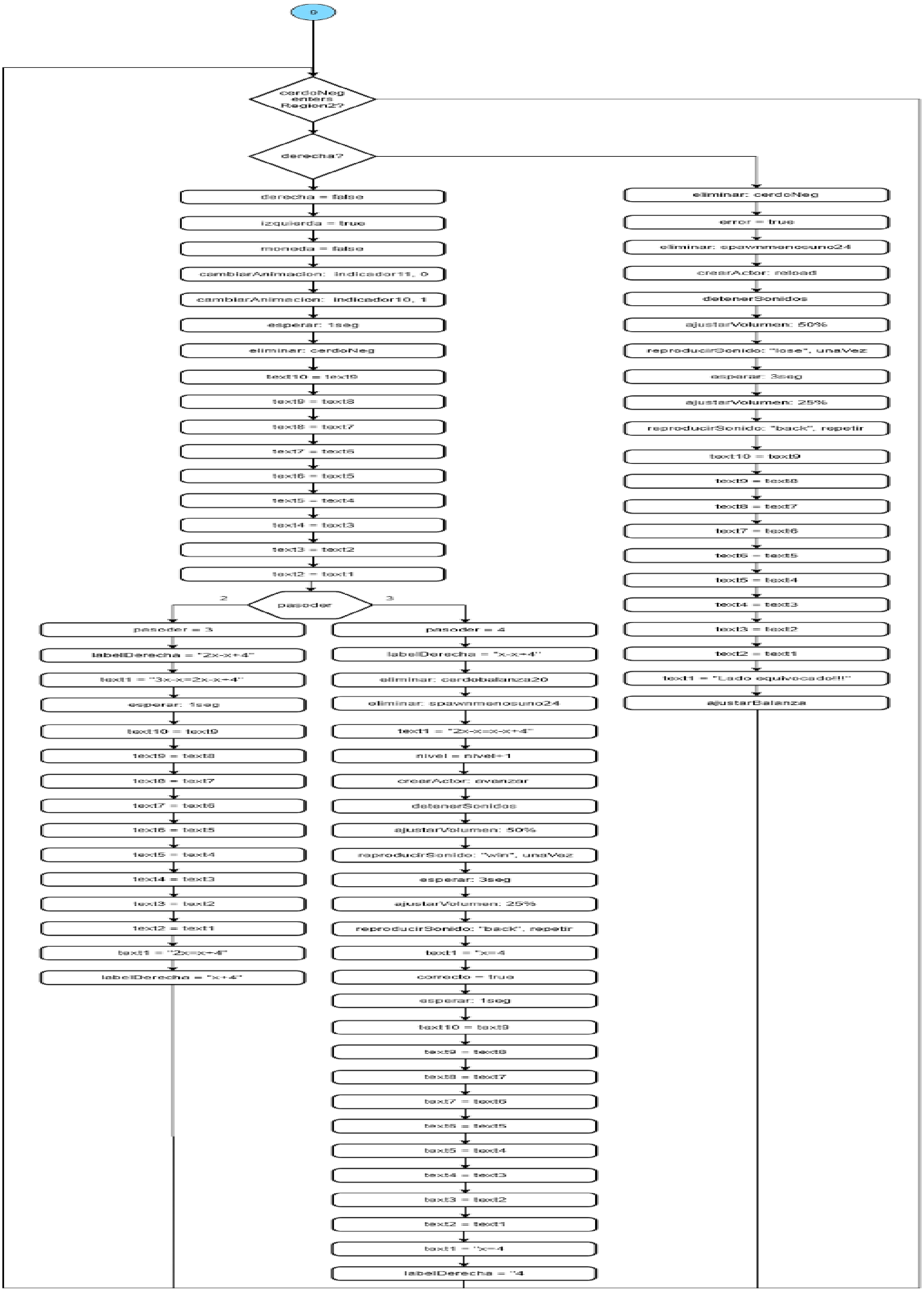
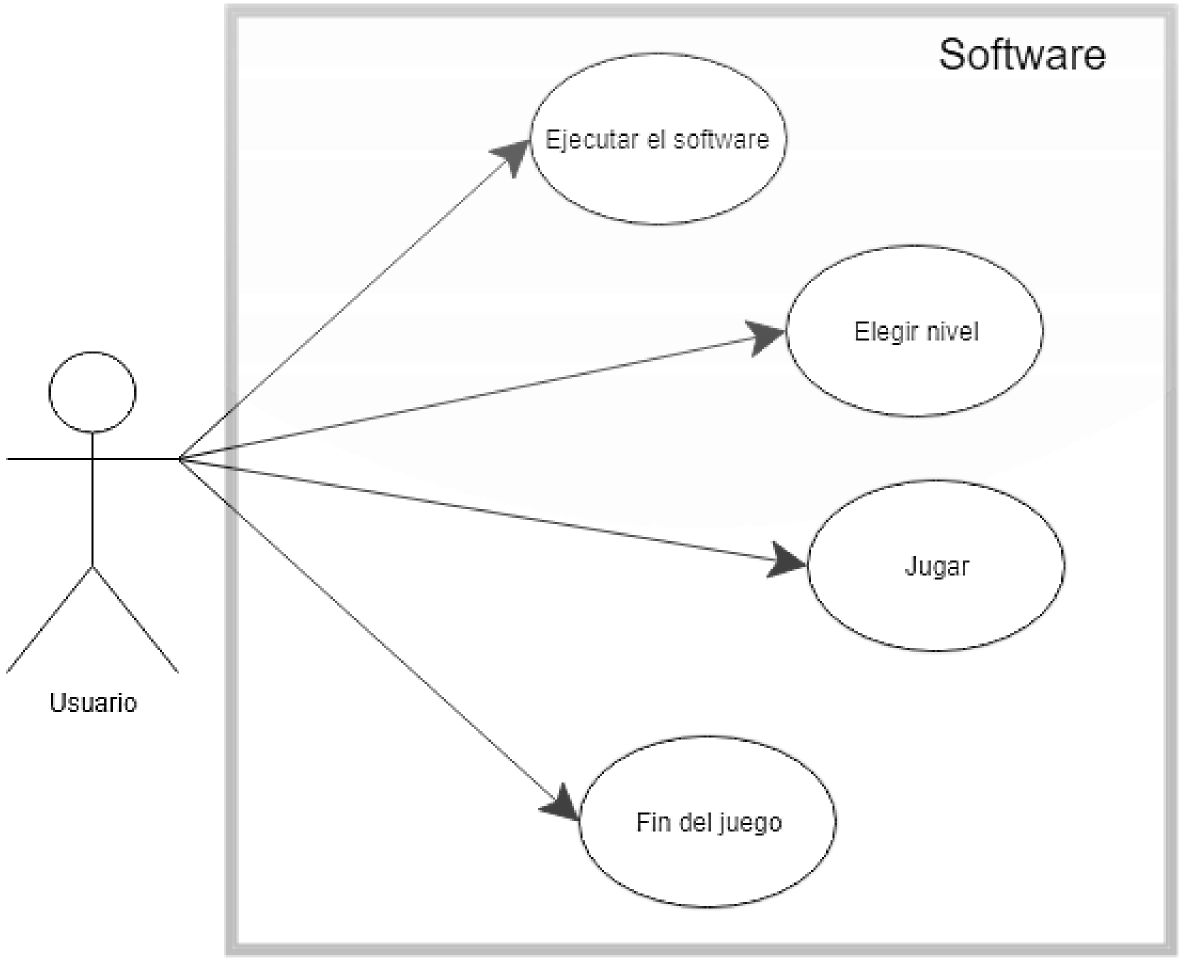
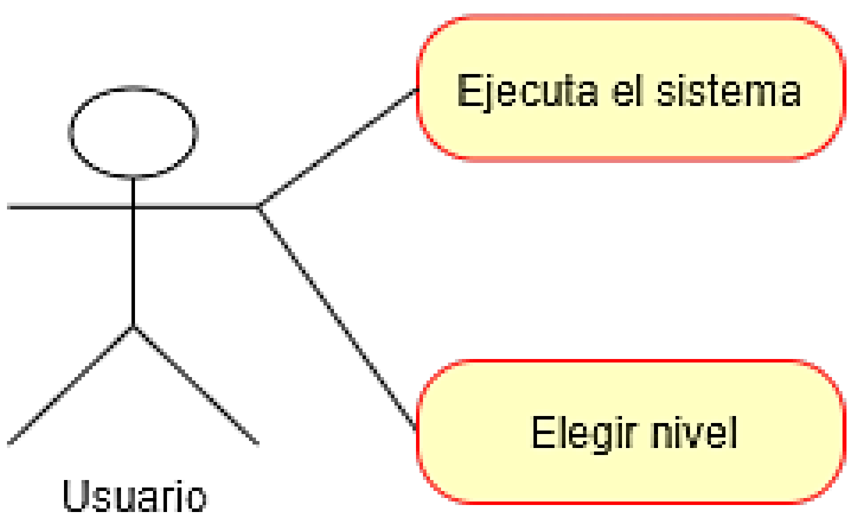
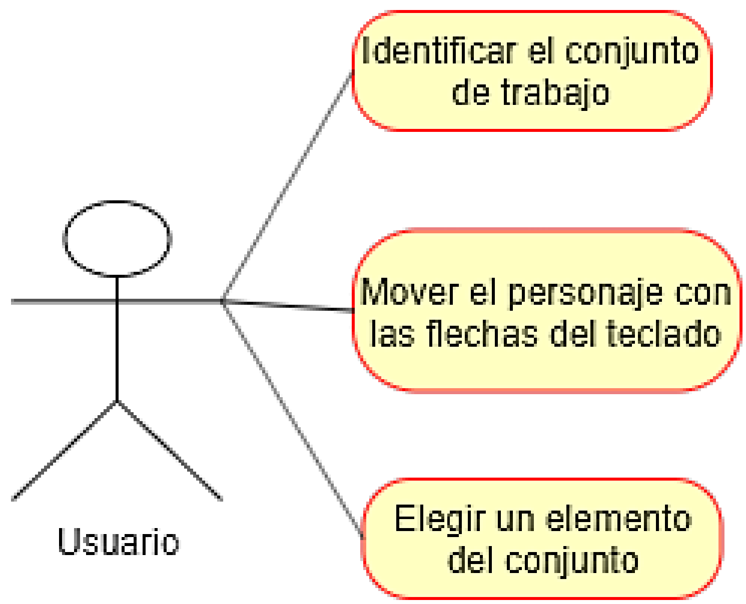

9
cerdoNeg enters Region2?
derecha?
derecha = false
izquierda = true
moneda = false
cambiarAnimacion: indicador11, 0
cambiarAnimacion: indicador10, 1
esperar: 1seg
eliminar: cerdoNeg
text10 = text9
text9 = text8
text8 = text7
text7 = text6
text6 = text5
text5 = text4
text4 = text3
text3 = text2
text2 = text1
pasoder
2
3
pasoder = 3
labelDerecha = "2x-x+4"
text1 = "3x-x=2x-x+4"
esperar: 1seg
text10 = text9
text9 = text8
text8 = text7
text7 = text6
text6 = text5
text5 = text4
text4 = text3
text3 = text2
text2 = text1
text1 = "2x=x+4"
labelDerecha = "x+4"
pasoder = 4
labelDerecha = "x-x+4"
eliminar: cerdobalanza20
eliminar: spawnmenosuno24
text1 = "2x-x=x-x+4"
nivel = nivel+1
crearActor: avanzar
detenerSonidos
ajustarVolumen: 50%
reproducirSonido: "win", unaVez
esperar: 3seg
ajustarVolumen: 25%
reproducirSonido: "back", repetir
text1 = "x=4
correcto = true
esperar: 1seg
text10 = text9
text9 = text8
text8 = text7
text7 = text6
text6 = text5
text5 = text4
text4 = text3
text3 = text2
text2 = text1
text1 = "x=4
labelDerecha = "4
eliminar: cerdoNeg
error = true
eliminar: spawnmenosuno24
crearActor: reload
detenerSonidos
ajustarVolumen: 50%
reproducirSonido: "lose", unaVez
esperar: 3seg
ajustarVolumen: 25%
reproducirSonido: "back", repetir
text10 = text9
text9 = text8
text8 = text7
text7 = text6
text6 = text5
text5 = text4
text4 = text3
text3 = text2
text2 = text1
text1 = "Lado equivocado!!!"
ajustarBalanza

Diagrama de casos de uso

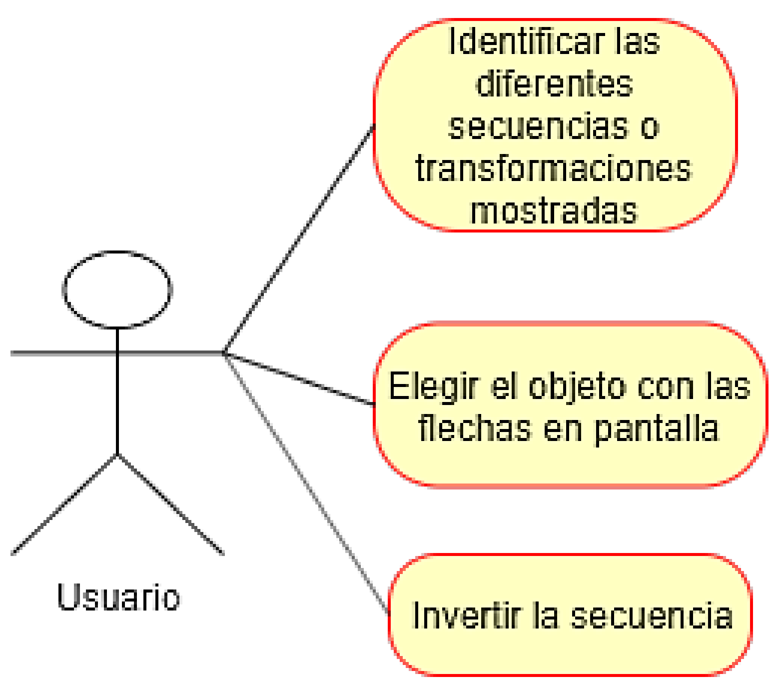




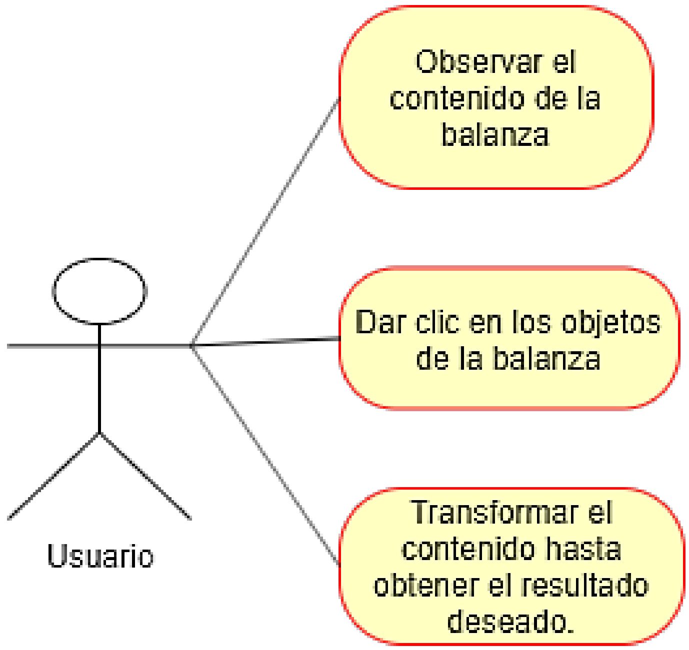
NIVEL 1



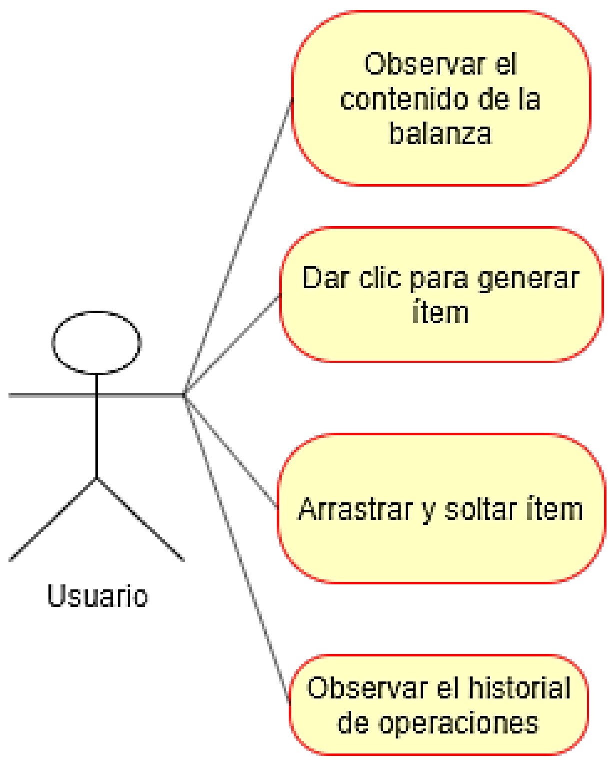
NIVEL 2



NIVEL 3



NIVEL 4



NIVEL 5

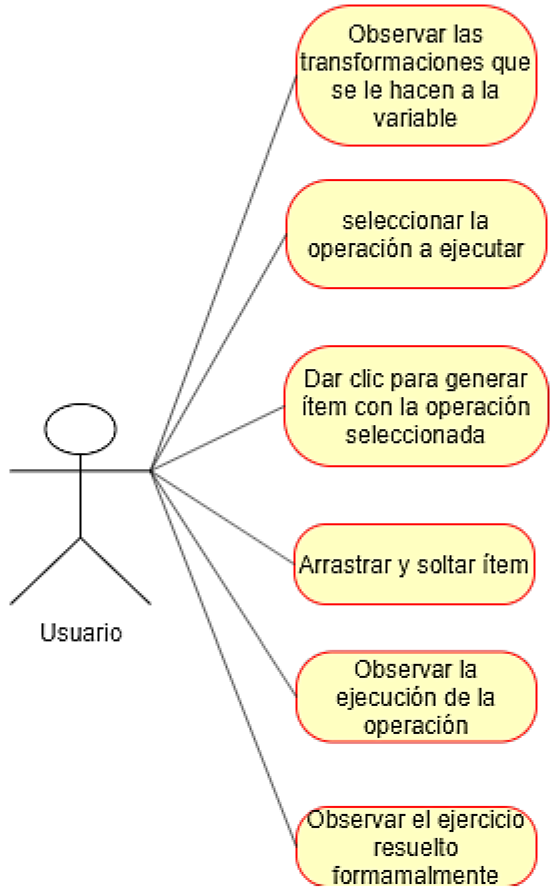
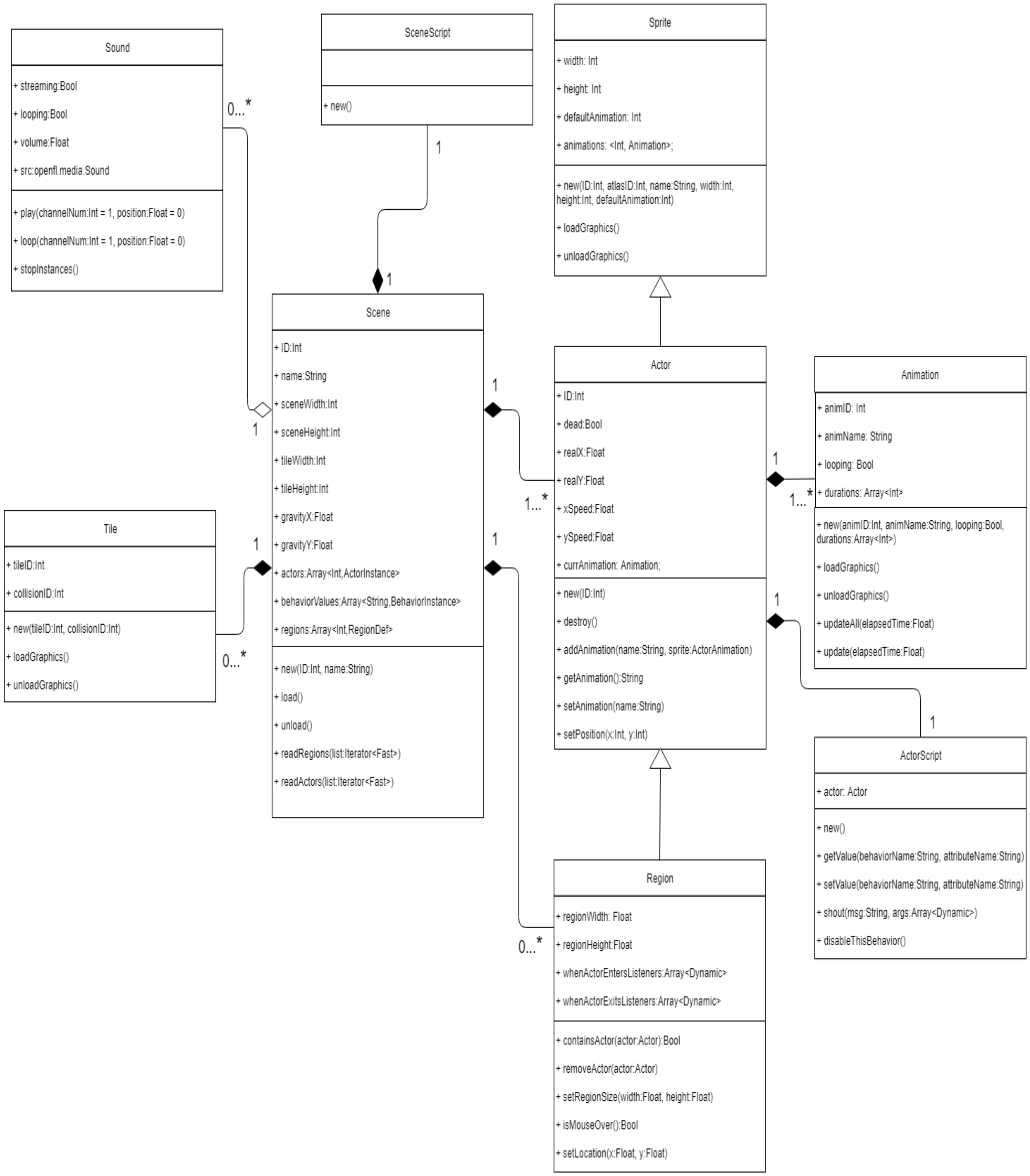
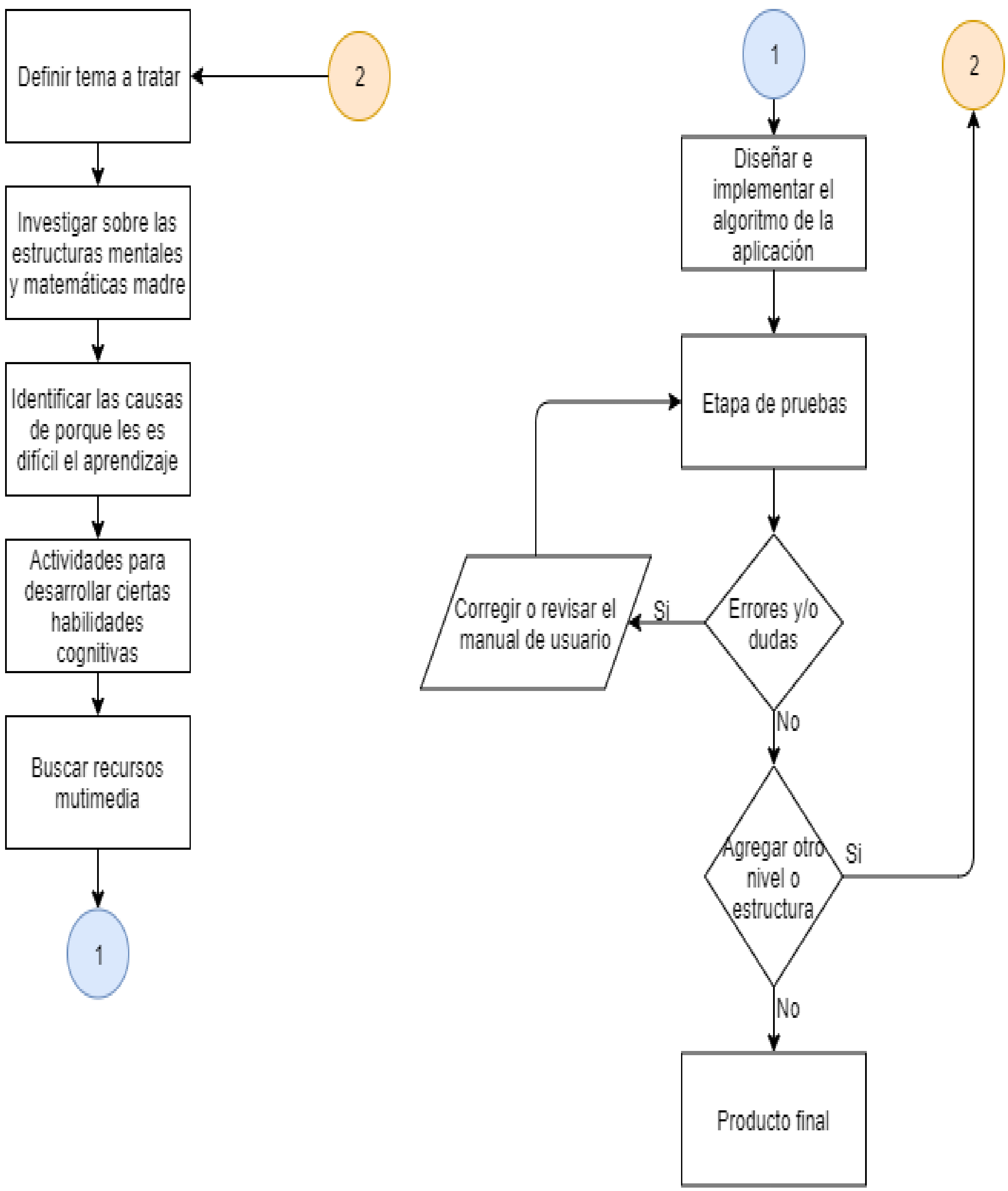

Observar las transformaciones que se le hacen a la variable
seleccionar la operación a ejecutar
Dar clic para generar ítem con la operación seleccionada
Usuario
Arrastrar y soltar ítem
Observar la ejecución de la operación
Observar el ejercicio resuelto formamalmente

Diagrama de clases.



Modelo de prototipo.



3.1.9. Pruebas.

Elemento de prueba	Prueba	Salida esperada	Salida Obtenida	Observaciones
Animaciones	Cambiar animación	Funcionamiento correcto	No cambia la animación	La bandera asignada no se activa
Colisiones	Probar colisiones de los objetos	Colisionar correctamente	Error al colisionar	Ajustar la región de colisión para su mejor funcionamiento
Audio	Reproducción de audio	Correcto funcionamiento	Sin reproducción	Hacer la conversión del formato compatible con stencyl
Flujo de escenas	Verificar el correcto cambio de escenario	Paso a la escena determinada	Paso a la escena de inicio	El identificador de la escena era incorrecto
Captura de secuencias	Capturar los inputs del usuario	La secuencia probada debería ser correcta	La secuencia de prueba es correcta	Ninguna
Eliminación de actores	Eliminar de la escena los actores seleccionados	Los actores indicados desaparecen	Los actores indicados desparecen	Ninguna
Entrada a regiones	Un ciclo infinito evalúa si un actor determinado entra a una región dada	Se activa una bandera	Se activa una bandera	Ninguna
Evaluación de regiones	Un ciclo infinito evalúa si el actor entró a la región indicada	Un evento elimina al actor si es que entró a la región correcta	El actor fue eliminado	El actor no fue equipado con el evento que lo elimina
Ejecución en navegador	La aplicación se ejecuta en un navegador	La aplicación es lanzada y funciona	El reproductor Flash se activa, pero	La codificación web usa etiquetas no compatibles con otros navegadores

			no ejecuta la aplicación	
Eliminación de actores equivalentes	Una estructura de condicional múltiple elige el actor a eliminar según la existencia de otros actores	Sin importar el orden, los actores son eliminados	Sin importar el orden, los actores son eliminados	Ninguna
Selección en navegador	Según el elemento pulsado, se lanza la aplicación Flash correspondiente	La aplicación requerida es lanzada	La aplicación requerida es lanzada	Ninguna
Transformaciones elementales	Uso de transformaciones geométricas para modificar la actual animación del actor	El actor rota, se escala o se mueve según el comando indicado	El actor rota en un ángulo distinto	Los ángulos en Stencyl se miden en sentido contrario a la medición matemática convencional
Input drag n' drop	El actor indicado es arrastrado por el mouse y soltado correctamente	El actor arrastrado se mueve a la velocidad indicada	El mouse batalla al arrastrar el actor y cae muy despacio al ser soltado	El objeto tenía demasiada resistencia al viento y la gravedad de la escena era demasiado baja

Árbol de secuencias	En el nivel 2, cada posible secuencia dispone del árbol para cada caso que haya introducido el usuario y todos tienen una salida	Todos los caminos llevan a una respuesta adecuada según la respuesta del usuario	Todos los caminos dan la respuesta adecuada	Ninguna
Exclusividad de un actor	En determinados niveles se pretende que haya un único actor creado por el usuario, haciendo imposible crear otro del mismo tipo sin haber eliminado al existente	Presionar el botón de crear token crea uno nuevo, si ya existe uno, una bandera restringe la creación de otro	Presionar el botón de crear token crea uno nuevo, si ya existe uno, una bandera restringe la creación de otro	Ninguna
Posición de textos	Los textos se visualizan correctamente en la posición indicada	Los textos son legibles en todo momento y en la posición indicada	Los textos son legibles, pero no están en el sitio adecuado	Las coordenadas de posición no eran correctas
Condiciones de avance y reinicio	Al fallar la respuesta aparecerá un botón de reinicio, de lo contrario, un botón de avance.	Al finalizar el nivel, según el resultado se muestra el botón deseado	Los botones requeridos son mostrados	Ninguna

Información del proyecto

Proyecto	Sistema para coadyuvar al desarrollo de ciertas habilidades cognitivas en la resolución de ecuaciones algebraicas de primer grado.
Líder del proyecto / Líder de pruebas de software	Lázaro Reyes Flores

Resumen ejecutivo

El presente plan de pruebas tiene como propósito resaltarlos aspectos de funcionalidad más importantes de cada uno de los niveles presentados en el software, ilustrando las salidas contenidas y comparándolas con las salidas deseadas. Así como los criterios de aceptación y la infraestructura utilizadas para dicha evaluación, además de incluir la metodología aplicada con el fin de documentar los resultados de las pruebas y las correcciones aplicadas cuando así fuera requerido.

3.1.10. Alcance de las pruebas

Elementos de pruebas

Nivel 1:

- Funcionalidad de las cajas de colisiones, de actor principal y de elementos del conjunto.
- Evento identificador de respuesta correcta o incorrecta.
- Correcta eliminación de actores en la pantalla cuando el usuario proporciona su respuesta.
- Funcionalidad del contador de vidas.
- Generación aleatoria de elementos del conjunto.

Nivel 2:

- Selección aleatoria de la secuencia a utilizar.
- Captura adecuada de la respuesta del usuario.
- Despliegue correcto del texto.
- Visualización adecuada de las transformaciones de los actores.
- Captura adecuada de la respuesta del usuario.

Nivel 3:

- Eliminación adecuada del actor indicado.
- Discriminación de actores no existentes en pantalla.
- Visualización de las animaciones de los actores.
- Algoritmo de selección de actor equivalente en el lado opuesto de la balanza.
- Funcionalidad de las cajas de colisiones, de actor principal y de elementos del conjunto.

Nivel 4:

- Funcionalidad de historial de operaciones.
- Generación y eliminación del ítem.
- Funcionalidad de arrastrar y soltar.
- Sistema de bloqueo para garantizar que sólo exista un ítem a la vez.

- Identificar la región en la que el ítem ha sido soltado.

Nivel 5:

- Adecuada presentación de la ecuación.
- Captura de la operación introducida por el usuario.
- Evaluación de la valides de la operación introducida por el usuario.
- Visualización de la transformación de la pantalla.

Funcionalidades a no probar

- Tamaño correcto de los Sprite.
    - Razón: fueron diseñados al tamaño exacto que deberán ser mostrados.
    - Riesgos:
        - Los Sprite pueden ser mostrados incorrectamente, al momento de ser escalado podrían distorsionarse.
        - Las cajas de colisión podrían no coincidir o no ajustarse al tamaño del Sprite.
- Compatibilidad en navegadores recientes.
    - Razón: el formato FLASH en teoría garantiza la compatibilidad con navegadores desde el año 2001 a la fecha.
    - Riesgos:
        - El navegador actual podría no ejecutar correctamente el formato FLASH.
        - Las etiquetas de audio de la aplicación WEB podrían no funcionar en diferentes navegadores.
- Física de los objetos en pantalla.
    - Razón: Cada actor en pantalla fue configurado con las características de física que requería al momento de ser agregado a la aplicación.
    - Riesgos:
        - Una actualización del motor de física podría invalidar la configuración de la física establecida en un principio.
        - Comportamiento errático de los actores en pantalla.
        - Entorpecer el manejo por parte del usuario.
- Tamaño del escenario.
    - Razón: Fue diseñada en baja resolución para ser compatible con la mayoría de resoluciones de monitores.
    - Riesgos:
        - Tener un usuario con una resolución muy inferior al tamaño de la aplicación.
- Calidad de la reproducción de sonido.
    - Razón: El motor de desarrollo en teoría respeta la calidad de los audios que se agregan a la aplicación.
    - Riesgos:
        - Que no respete la calidad de audio.
        - Que el formato de audio sea incompatible.
        - Que no se reproduzca el clip de audio completo.

3.1.11. Criterios de aceptación o rechazo

- Todos los elementos probados en el apartado de elementos de prueba han demostrado funcionar adecuadamente.
- Ninguno de los elementos a no probar interfirió en forma negativa en la prueba de la aplicación.
- Ninguno de los elementos a no probar se convirtió en un problema o error.
- La aplicación fue ejecutada en su totalidad al menos tres veces.
- No se podrá dar por terminada la etapa de pruebas si al menos uno de los elementos a probar no cumple con su trabajo.

3.1.12. Recursos

Requerimientos de entornos – Hardware

- Fue probado en siete equipos de cómputo diferentes algunos con las siguientes características:
  - Intel celeron 1017, 1.2 GHz, 2 nucleos
  - AMD A4-9125, 2.30GHz, 4GB, 500GB.
  - Intel Atom N450 1.67GHz, 1GB DDR2 RAM
- Mouse, teclado y monitor con resolución superior a 1024 x 768.

Requerimientos de entornos – Software

- Driver de audio y video funcionando adecuadamente en el equipo.
- Reproductor FLASH instalado en el equipo de cómputo.
- Recomendable tener instalado WAMP o XAMP server para ejecutar el software.

3.1.13. Planificación y organización

Procedimientos para las pruebas

1. Ejecutar el software.
2. Avanzar el software hasta el evento que se deberá probar
3. Identificar el resultado esperado en la ejecución
4. Ejecutar el evento a probar.
5. Anotar el resultado y anomalías detectadas en el proceso.
6. Comprar el resultado obtenido con el resultado esperado.
7. Si el resultado no es satisfactorio, ir al paso 8, de lo contrario ir al paso 13.
8. Identificar el segmento de código responsable de generar el resultado erróneo.
9. Verificar la lógica y flujo de las instrucciones.
10. Desarrollar la solución.
11. Implementar la solución al código.
12. Volver al paso 1.
13. Documentar el error y las correcciones que dieron solución al problema.

3.2. Aplicaciones para resolver ecuaciones algebraicas

En relación con la solución de ecuaciones algebraicas, existen en el mercado diversos productos como los siguientes:

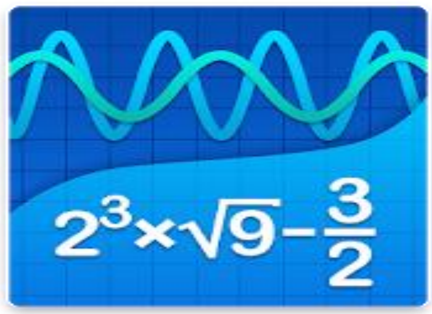
Photomath – iOS | Android

Una de las alternativas más completas e interesantes que podemos encontrar actualmente es Photomath, una excelente aplicación con la que podemos apuntar a un problema matemático usando la cámara de nuestro smartphone y obtener el resultado en una fracción de segundo. Sin duda, una de sus ventajas es que no se limita a mostrarnos la solución. En lugar de ello, Photomath nos muestra todos los pasos necesarios hasta llegar a la solución, se encuentra de forma gratuita.

Mathpix

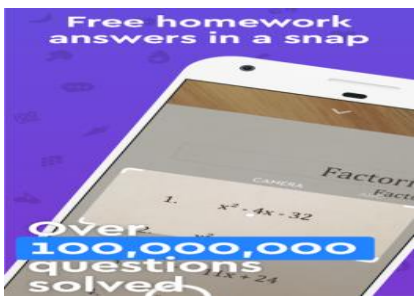
Mathpix, una poderosa herramienta gratuita que intenta corregir el complejo problema de PhotoMath y es el no poder comprender texto escrito a mano. No siendo suficiente. Entonces, Mathpix no solo entregará la respuesta paso a paso tras apuntarle a la ecuación con la cámara, sino que, en los casos posibles, presentará de inmediato una gráfica interactiva en la que se pueden cambiar los parámetros que intervienen.

Calculadora Gráfica + Math



Mathlab le ayudará a desarrollar sus habilidades matemáticas al mostrarle los resultados intermedios de distintas operaciones matemáticas a medida que tipea, le ayudará a resolver problemas y a desarrollar el pensamiento crítico, de gran importancia para su desarrollo académico futuro. Incluye calculadora científica, grafica, de algebra y de matrices.

Socratic - Ayuda con Matemáticas y Tareas



Toma una FOTO de tu pregunta de tarea o ecuación de matemáticas y recibe explicaciones, gráficos, videos y ayuda paso a paso AL INSTANTE. Es 100% gratis y sin compras desde la aplicación. Por desgracia, sólo está disponible en inglés. No sirve de nada descargarla y escanear preguntas en español porque no hallará la respuesta adecuada.

En todos los productos antes mencionados, la participación del sujeto cognoscente es pasiva, pues regularmente sólo se limita a capturar la ecuación y esperar la solución.

3.3. Reversibilidad y solución de ecuaciones lineales.

Sabemos que en la naturaleza hay procesos o cambios a los que se les puede invertir su efecto; por ejemplo:

- *Si estamos en algún lugar y caminamos unos pasos hacia adelante*, podemos regresar al MISMO LUGAR *caminando el mismo número de pasos hacia atrás* (y recíprocamente).
- *Si estás en determinada posición y giras sobre tí mismo cierto monto en algún sentido*, puedes regresar a TU POSICIÓN ORIGINAL *girando sobre ti mismo igual tanto, pero en sentido contrario* (y recíprocamente).
- *Si tienes determinada cantidad y le agregas* (*o sumas*) *algo*, puedes recuperar la CANTIDAD QUE TENÍAS *quitándole* (o restando) AL RESULTADO, *ese mismo algo que agregaste*.
- *Si tienes determinada cantidad y la multiplicas por cierto factor*, puedes recuperar la CANTIDAD QUE TENÍAS, *dividiendo* AL RESULTADO *por ese mismo factor*.
- *Si tienes determinada cantidad y la divides por cierto número*, puedes recuperar la CANTIDAD QUE TENÍAS *multiplicando* AL RESULTADO *por ese mismo número*.

Al menos las secuencias de operaciones aritméticas básicas (suma, resta, multiplicación, división y potenciación), **SÍ admiten secuencias inversas**.

Ejemplo 1. Considérese la siguiente tabla:

Cantidad original	Secuencia de operaciones	Secuencia de operaciones inversas
4	**3***4** + **6** = 18	$\frac{18-6}{3}$ = **4**
2	**4***2** – **9** = 1^{-}	$\frac{1^{-}+9}{4}$ = **2**
10	$\frac{10}{5}+4=6$	5*(6 – 4) = 10
21	$\frac{21}{7}-8=5^{-}$	$7*(5^{-}+8)=21$
x	**3***x* – **5** = 19	$\frac{19+5}{3}=\frac{24}{3}=8=$***x***
a	$\frac{a+1}{3}=2$	2*3 –1 = 5 = ***a***
h	$\frac{h}{3}-1=0$	3*(0+1) = *h*

OBSERVANDO las columnas 1 y 3, se nota que, al realizar la secuencia de operaciones inversas, se obtiene LA CANTIDAD INICIAL.

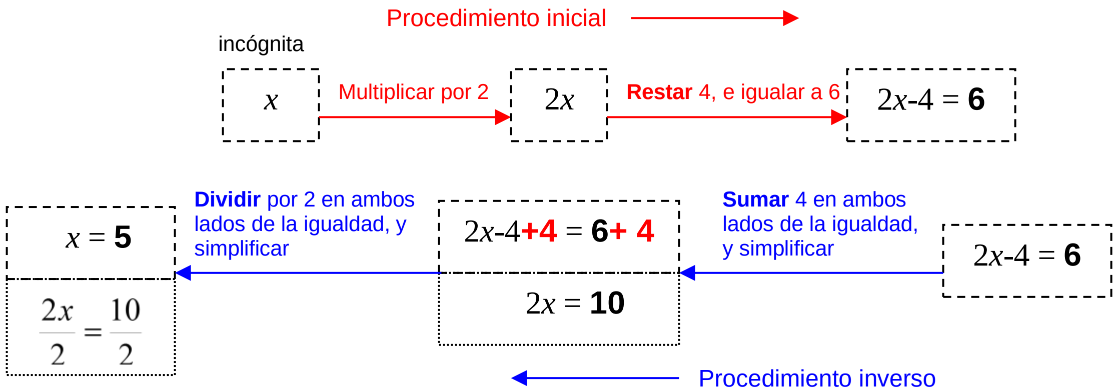
Notación: Cuando se dan expresiones como se hizo en las tres últimas filas de la tabla del ejemplo 1, se dice que estamos dando una ***ecuación algebraica*** (segunda columna de dichas filas); y al hallar la correspondiente secuencia de operaciones inversas decimos que estamos ***resolviendo la ecuación algebraica*** (tercera columna de las citadas filas). Al final de la secuencia de operaciones inversas obtenemos un valor o expresión que representa a la letra (***incógnita*** o ***variable***, también se dice).

De acuerdo a lo realizado en las dos últimas filas de la tabla del ejemplo 1, y las filas de las tablas dadas en los ejercicios donde tuvo que hallarse la correspondiente secuencia de operaciones inversas, podemos señalar lo siguiente:

Tres pasos básicos para *resolver una ecuación,* en la que se han aplicado varias operaciones a la *incógnita*:

- Identificar la incógnita
- Determinar el orden en que las operaciones se aplicaron a la *incógnita*
- Hallar la secuencia de operaciones inversas, empezando por la última operación que se le hizo a la incógnita, luego la antepenúltima, y así sucesivamente hasta llegar a la primera.

Ejemplo 2. A continuación se muestra un proceso aplicado a la variable $\boldsymbol{x}$ para obtener una ecuación, así como el respectivo proceso inverso para resolver tal ecuación.



Algunas veces esos dos pasos NO se escriben como en el ejemplo, sino que son efectuados como se muestra en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 3. **R**esolver la ecuación $\mathbf{2}\boldsymbol{x} - \mathbf{4} = \mathbf{6}$

Solución:

$$\mathbf{2}\boldsymbol{x} - \mathbf{4} = \mathbf{6}$$

En *ambos* lados de la igualdad, se suma **4**, y simplificar

$$\mathbf{2}\boldsymbol{x} -4 + 4 = 6+4$$

$$\mathbf{2}\boldsymbol{x} = 10$$

En *ambos* lados de la igualdad se divide por **2**, y simplificar

$$\frac{1}{2}(\mathbf{2}\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}(10)$$

$$\boldsymbol{x} = \mathbf{5.}$$

Versión formal:

$\mathbf{2}\boldsymbol{x} - \mathbf{4} = \mathbf{6} \Leftrightarrow \mathbf{2x \oplus (-4) = 6 \Leftrightarrow [2x \oplus (-4)] \oplus 4 = 6 \oplus 4 \Leftrightarrow}$

$\mathbf{2x \oplus [(-4) \oplus 4] = 10 \Leftrightarrow 2x \oplus 0 = 10 \Leftrightarrow 2x = 10 \Leftrightarrow}$

$\mathbf{\frac{1}{2}(2x) = \frac{1}{2}(10) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} \cdot 2\right) x = 5 \Leftrightarrow 1x = 5 \Leftrightarrow x = 5.}$

Estos esquemas son los que hemos seguido en el software para resolver ecuaciones.

*Ejemplo 4***.** Despejar la variable ***x*** en la siguiente ecuación:

$$4*(x-y)-1 = 3$$

Aplicamos en *ambos miembros* de la igualdad, la operación inversa de RESTAR 1: SUMAR **1.**

$$4*(x-y) = 3 + 1$$

Al aplicar la secuencia de operaciones inversas, la *incógnita* se "va quedando solita" en el miembro izquierdo.

$$4*(x-y) = 4$$

$$x - y = \frac{4}{4}$$

Aplicamos en *ambos miembros* de la igualdad, la operación inversa de MULTIPLICAR POR 4: DIVIDIR POR **4.**

Cuando se "queda completamente sola", se dice que la ecuación ha sido resuelta.

$$x - y = 1$$

Aplicamos en *ambos miembros* de la igualdad, la operación inversa de RESTAR *y*: SUMAR ***y*.**

$$x = 1 + y$$

Versión formal:

$$\mathbf{4(x-y)\text{-}1 = 3 \Leftrightarrow 4\otimes\big(x\oplus(-y)\big)\oplus(-1) = 3 \Leftrightarrow \big[4\otimes\big(x\oplus(-y)\big)\oplus -1\big]\oplus 1 = 3\oplus 1 \Leftrightarrow}$$

$$\mathbf{4\otimes\big(x\oplus(-y)\big)\oplus[(-1)\oplus 1] = 4 \Leftrightarrow 4\otimes\big(x\oplus(-y)\big)\oplus 0 = 4 \Leftrightarrow 4\otimes\big(x\oplus(-y)\big) = 4 \Leftrightarrow}$$

$$\mathbf{\frac{\big[4\otimes\big(x\oplus(-y)\big)\big]}{4} = \frac{4}{4} \Leftrightarrow \frac{4}{4}\otimes[x\oplus(-y)] = 1 \Leftrightarrow 1\otimes[x\oplus(-y)] = 1 \Leftrightarrow x\oplus(-y) = 1 \Leftrightarrow}$$

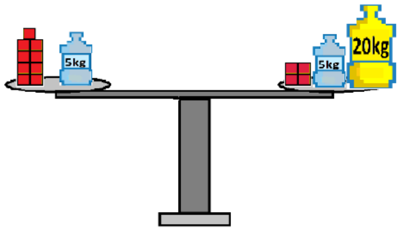
$$\mathbf{x\oplus(-y) = 1 \Leftrightarrow x\oplus(-y)\oplus y = 1\oplus y \Leftrightarrow x\oplus[(-y)\oplus y] = 1\oplus y \Leftrightarrow}$$

$$\mathbf{x\oplus 0 = 1\oplus y \Leftrightarrow x = 1\oplus y.}$$

Como puede observarse en este último ejemplo, el uso de la secuencia de operaciones inversas también es aplicable a ecuaciones con más de una variable.

Los siguientes ejemplos han sido retomados en el software con fines didácticos.

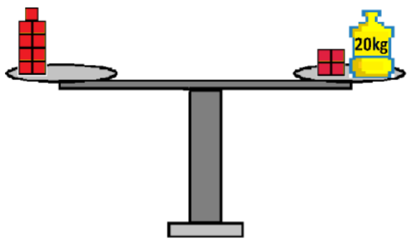
Ejemplo 5. En la siguiente figura se representa una balanza en equilibrio.



$$9l + 5k = 4l + 5k + 20k$$

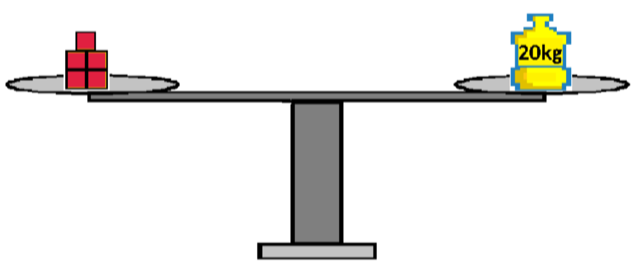
¿Cuál es el peso de cada ladrillo?

Resolver la ecuación para *l*



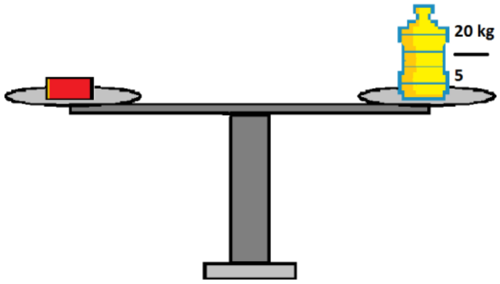
De cada platillo se retiran *5kg*, y se mantiene el equilibrio:

Ecuación	Propiedad	Versión breve
$9l + 5kg - 5kg = 4l + 5kg + 20kg - 5kg$	Igualdad en campos I6	$9l + 5kg = 4l + 5kg + 20kg$
$9l + 5kg + (-5kg) = 4l + 20kg + 5kg + (-5kg)$	Definición de la resta	$9l = 4l + 5kg + 20kg - 5kg$
$9l + [5kg + (-5kg)] = 4l + 20kg + [5kg + (-5kg)]$	Asociativa de suma	$9l = 4l + 20\text{kg}$
$9l + 0kg = 4l + 20\text{kg}$	Inverso aditivo	
$9l = 4l + 20\text{kg}$	Neutro aditivo	



De cada platillo se retiran 4 ladrillos, y se mantiene el equilibrio:

Ecuación	Propiedad	Versión breve
$9l - 4l = 4l + 20kg - 4l$	Igualdad en campos I6	
$9l + (-4l) = 4l + 20kg + (-4l)$	Definición de la resta	$9l - 4l = 20kg$
$5l = 4l + (-4l) + 20kg$	Conmutativa de suma	$5l = 20kg$
$5l = [4l + (-4l)] + 20kg$	Asociativa de suma	
$5l = 0kg + 20kg$	Inverso aditivo	
$5l = 20kg$	Neutro aditivo	

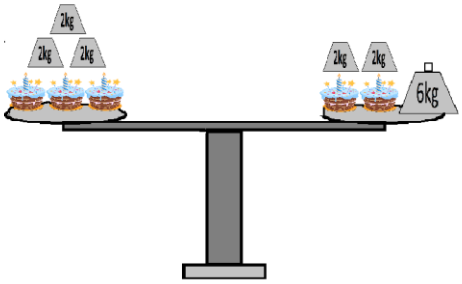


Se reparten 20 *kg* en cada uno de los 5 ladrillos:

Ecuación	Propiedad	Versión breve
$\left(\frac{1}{5}\right) 5l = \left(\frac{1}{5}\right) 20\text{kg}$	Igualdad en campos I7	
$\left(\frac{1}{5} * 5\right) l = \frac{20\ kg}{5}$	Asociativa del producto	$l = \frac{20\ kg}{5}$
$1l = 4kg$	Inverso Multiplicativo	$l = 4\ kg$
$l = 4kg$	Neutro Multiplicativo	

En conclusión, el peso de cada ladrillo es de 4 *kg*.

Ejemplo 6.



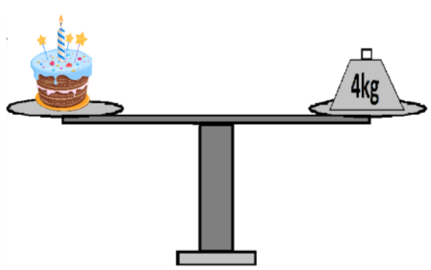
$$3p + 6kg = 2p + 10kg$$

Resolver la ecuación para p

¿Cuál es el peso de cada pastel?

De cada platillo se retira el peso de 6 kg, y se mantiene el equilibrio:

Ecuación	Propiedad	Versión breve
$3p + 6kg - 6kg = 2p + 10kg - 6kg$	Igualdad en campos I6	$3p + 6kg = 2p + 10kg$
$3p + 6kg + (-6kg) = 2p + 10kg + (-6kg)$	Definición de la resta	$3p = 2p + 10kg - 6kg$
$3p + [6kg + (-6kg)] = 2p + [10kg + (-6kg)]$	Asociativa de suma	$3p = 2p + 4kg$
$3p + 0kg = 2p + 4kg$	Inverso aditivo	
$3p = 2p + 4kg$	Neutro aditivo	

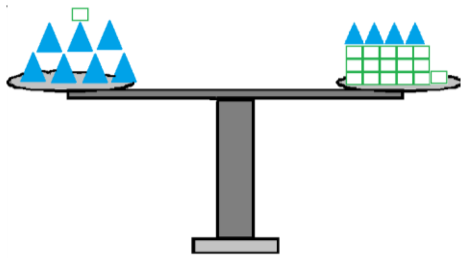


De cada platillo se retira dos pasteles y se mantiene el equilibrio.

Ecuación	Propiedad	Versión breve
$3p - 2p = 2p + 4kg - 2p$	Igualdad en campos I6	$3p - 2p = 4kg$
$3p + (-2p) = 2p + 4kg + (-2p)$	Definición de la resta	$p = 4kg$
$p = 2p + (-2p) + 4kg$	Conmutatividad de la suma	
$p = [2p + (-2p)] + 4kg$	Asociativa de la suma	
$p = 0p + 4kg$	Inverso aditivo	
$p = 4kg$	Neutro aditivo	

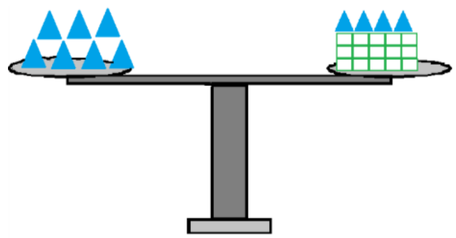
En conclusión, el peso de cada pastel es de 4kg.

Ejemplo 7.



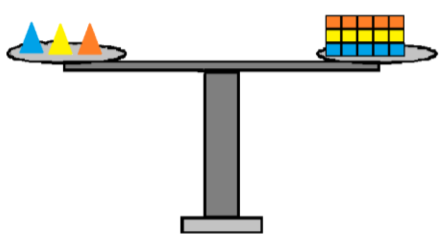
Resolver la ecuación para *t*:
$7t + 1c = 4t + 16c$

¿Cuántos cuadros equivalen a cada triángulo?



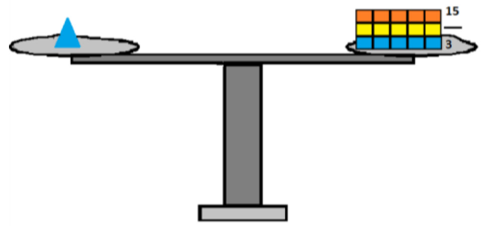
De cada platillo se retira un cuadrito, y se mantiene el equilibrio:

Ecuación	Propiedad	Versión breve
$7t + 1c - 1c = 4t + 16c - 1c$	Igualdad en campos I6	$7t + 1c = 4t + 16c$
$7t + 1c + (-1c) = 4t + 16c + (-1c)$	Definición de la resta	$7t = 4t + 16c - 1c$
$7t + [1c + (-1c)] = 4t + [16c + (-1c)]$	Asociativa de suma	$7t = 4t + 15c$
$7c + 0c = 4t + 15c$	Inverso aditivo	
$7t = 4t + 15c$	Neutro aditivo	



De cada platillo se retiran cuatro triángulos y se mantiene el equilibrio.

Ecuación	Propiedad	Versión breve
$7t - 4t = 4t + 15c - 4t$	Igualdad en campos I6	$7t = 4t + 15c$
$7t + (-4t) = 4t + 15c + (-4t)$	Definición de la resta	$7t - 4t = 15c$
$3t = 4t + (-4t) + 15c$	Conmutativa de suma	$3t = 15c$
$3t = [4t + (-4t)] + 15c$	Asociativa de suma	
$3t = 0t + 15c$	Inverso aditivo	
$3t = 15c$	Neutro aditivo	



Se reparten 15 cuadros en cada uno de los tres triángulos.

Ecuación	Propiedad	Versión breve
$(\frac{1}{3})3t = (\frac{1}{3})15c$	Igualdad en campos I7	$3t = 15c$
$(\frac{1}{3} * 3)t = (\frac{1}{3} * 15)c$	Asociativa del producto	$t = \frac{15}{3}c$
$1t = \frac{15}{3}$	Inverso multiplicativo	$t = 5c$
$t = 5c$	Neutro multiplicativo	

En conclusión, cada triángulo equivale a cinco cuadros.

Ejemplo 8.

$v_0 - \frac{xq^2}{k} = d$	Ecuación inicial
$v_0 - \frac{xq^2}{k} - v_0 = d - v_0$	Igualdad en campos
$(v_0 - v_0) - \frac{xq^2}{k} = d - v_0$	Asociativa de la suma
$-\frac{xq^2}{k} = d - v_0$	Neutro aditivo
$\frac{-k}{-k} xq^2 = -k\,(d - v_0)$	Igualdad en campos
$(1)xq^2 = -k\,(d - v_0)$	Inverso multiplicativo
$xq^2 = -k\,(d - v_0)$	Neutro multiplicativo
$\frac{xq^2}{q^2} = \frac{-k\,(d - v_0)}{q^2}$	Igualdad en campos
$x(1) = \frac{-k\,(d - v_0)}{q^2}$	Inverso multiplicativo
$x = \frac{-k\,(d - v_0)}{q^2}$	Neutro multiplicativo

Versión rápida

$$v_0 - \frac{xq^2}{k} = d$$

$$-\frac{xq^2}{k} = d - v_0$$

$$xq^2 = -k\,(d - v_0)$$

$$x = \frac{-k\,(d - v_0)}{q^2}$$

3.4. Descripción del software.

En este apartado se describirá el funcionamiento del software en general, así como las partes que lo conforman y su funcionamiento.

3.4.1 Actividades a realizar por el sujeto cognoscente.

Para este proyecto se utilizaron las BOAS de segundo tipo mencionadas en el apartado 1.3, ya que son un sistema completo y pre elaborado de orientaciones encaminadas a realizar actividades mediante las cuales el usuario (sujeto cognoscente) ejercite algunos procesos mentales necesarios para resolver ecuaciones algebraicas de primer grado. Tales actividades se enmarcan en las estructuras mentales de *diferencias y semejanzas*, así como la *reversibilidad***.**

En cada actividad el usuario recibirá instrucciones de cómo realizarla. Si tuviese alguna equivocación o no, se le hará saber. De esa manera el software funge como el “experto” que enseña en una situación esencialmente interactiva, promoviendo *zonas de desarrollo próximo* (Álvarez, A. y Del Río, 1990, Leontiev, A., 1981), creando un sistema de apoyo que J. Bruner (1978) ha denominado "andamiaje" por donde transita el usuario (y sin el cual no podría aspirar a niveles superiores de desempeño y ejecución).

Para ello, el software consta de cinco niveles ordenados de menor a mayor complejidad, hasta llegar a resolver ecuaciones algebraicas de primer grado utilizando las propiedades adecuadas de *campo*.

A continuación se describe cada uno de los niveles que constituyen el software.

Nivel 1.
Una de las frecuentes actividades del ser humano es la *clasificación* y el *reconocimiento*. Algunas veces, depende de ello la existencia misma de la vida. Por eso, no es extraño que uno de los problemas fundamentales de la Matemática sea *clasificar* y *reconocer* objetos (aquí, objetos se entiende como cualquier elemento de un conjunto universo de trabajo o discurso).
Esto puede interpretarse de la siguiente manera: Dada una colección de objetos y alguna relación de equivalencia, el *problema de clasificación* para esta colección consiste en hallar una manera para decidir cuándo dos objetos son *equivalentes* en algún sentido.
Por otra parte, *el problema de reconocimiento* consiste en encontrar un método por el cual pueda determinarse si un objeto dado es equivalente a un prototipo, forma canónica, patrón, forma, o estructura (si existe) en una colección de estructuras.
Eso es lo que subyace en el presente nivel, pues se presenta un conjunto no vacío *X* cuyos elementos comparten “evidentes” características, excepto uno (que llamaremos *intruso*). El usuario identificará tales características y por lo tanto al intruso.
Hemos incluido cinco conjuntos, cada uno de los cuales con su propio criterio de semejanza. Los elementos de cada conjunto aparecerán en la parte superior de la pantalla y descenderán sobre la misma, al tiempo que el usuario desplazará horizontalmente la figura de un *diablito* con el cual tocará al *intruso*.

Para eso se tienen tres oportunidades por cada uno de los cinco ejercicios, que se pueden observar en la parte superior izquierda de la pantalla. Si el usuario las agotase sin identificar al intruso, el software le regresará al principio del nivel.

Ejercicio 1. El conjunto es X = {a, b, c, d, g, p, q}.

Escena 1. Se muestra un conjunto de objetos en el cual debe identificarse cual criterio de clasificación se ha utilizado para descubrir al "intruso".

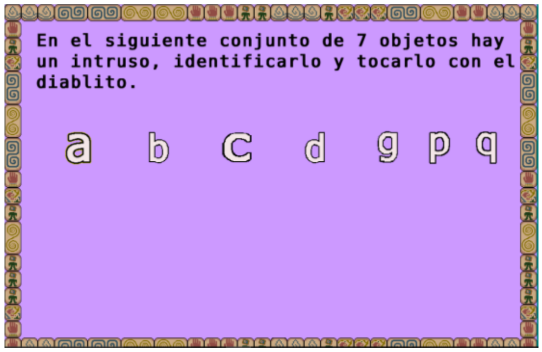


Ilustración 1. Presentación del conjunto X = {a, b, c, d, g, p, q}.

Escena 2. Se muestran los objetos descendiendo de forma aleatoria.

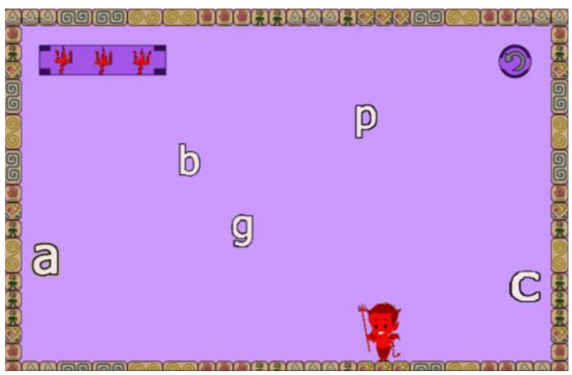


Ilustración 2. Objetos descendiendo aleatoriamente.

Ejercicio 2. El conjunto es X = {  }.

Escena 3.

Ilustración 3. Presentación de *X* = {cereza, fresa, brócoli, naranja, manzana, plátano, sandía}.

Escena 4.

Ilustración 4. Objetos descendiendo.

Ejercicio 3. El conjunto es $X = \{0, 4, 6, 8\}$.

Escena 5.

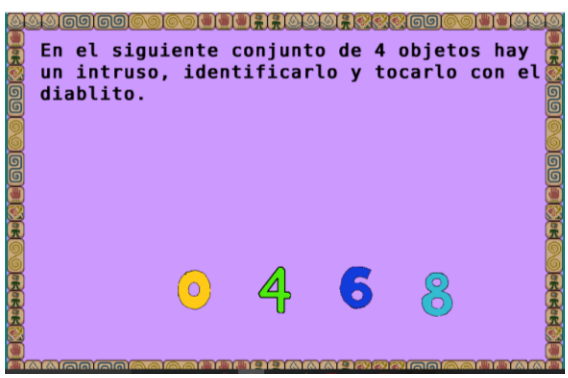


Ilustración 5. Presentación del conjunto *X*= {0, 4, 6, 8}.

Escena 6.

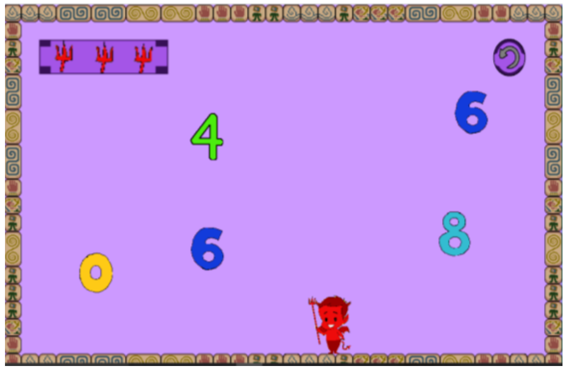


Ilustración 6. Objetos descendiendo aleatoriamente.

Ejercicio 4. El conjunto es X = {  }.

Escena 7.

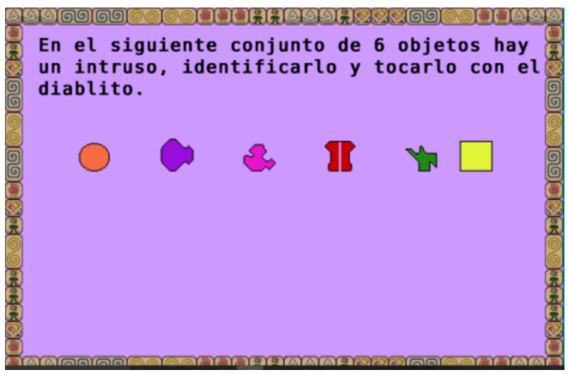


Ilustración 7. Presentación del conjunto *X*.

Escena 8.

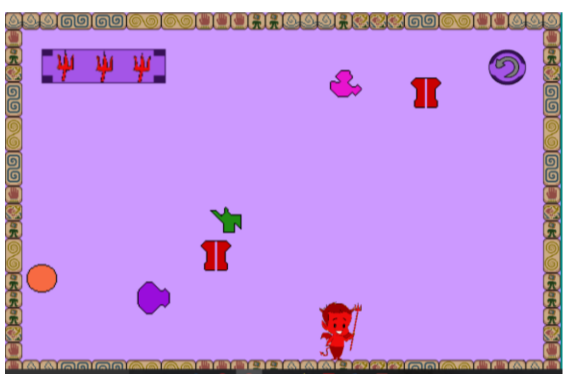


Ilustración 8. Objetos descendiendo.

Ejercicio 5. El conjunto es X = {j, k, l, m, n}.

Escena 9.

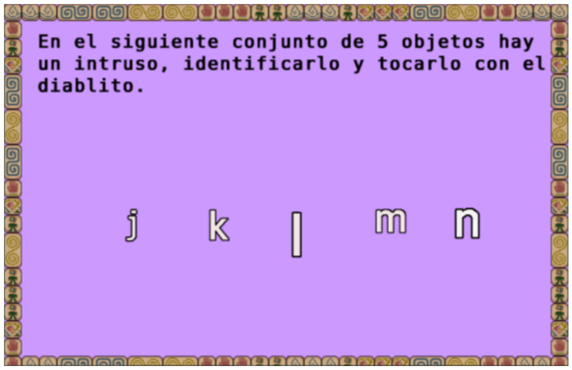


Ilustración 9. Presentación de X = {j, k, l, m, n}.

Escena 10.

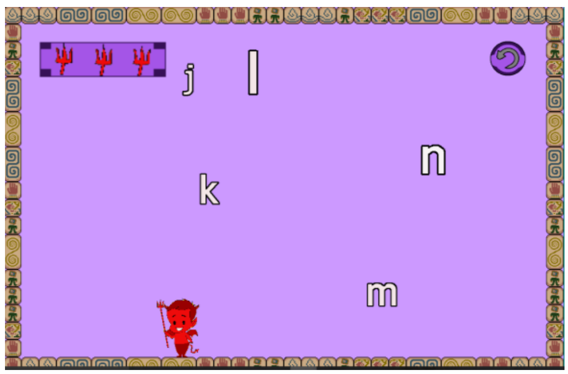
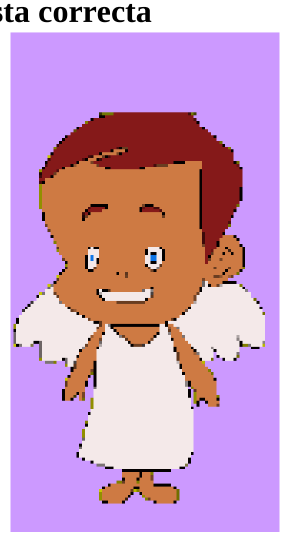


Ilustración 10. Objetos descendiendo.

Evaluación-control:

Sprite para respuesta correcta



Cada vez que se identifica correctamente al "intruso", la figura del "diablito" se cambiará por la de un "ángel".

Sprite para respuesta incorrecta

Cada vez que no se identifique al “intruso”, aparecerá el “diablito” llorando y emitiendo un sonido de error.

Nivel 2.

Una versión del pensamiento complejo señala que éste consta de pensamiento básico, creativo, y crítico; y que este último implica conectar, evaluar y analizar, que significa entre otras cosas: clasificar, reconocer patrones y hallar secuencias.

En el presente nivel el sujeto cognoscente pondrá en práctica la *reversibilidad* aplicándola a las secuencias que aparecerán en seis ejercicios ordenados de menor a mayor complejidad. Aquí, el usuario presentará de manera inversa las secuencias que se le mostrarán.

Ejercicio 1. – frutas

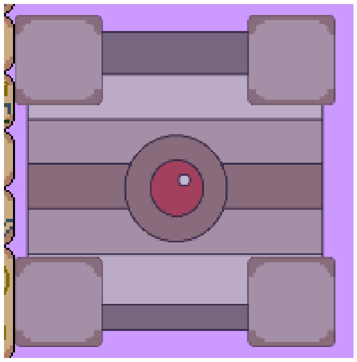
En la parte superior de la pantalla se mostrará una tarjeta que presentará sólo una vez la secuencia de imágenes de frutas, y que el sujeto cognoscente deberá observar. La tarjeta inferior funciona como un selector, cuyas flechas le permitirán desplazarse por las diferentes figuras hasta encontrar la que considere adecuada. Luego confirmará dando click en el botón “aceptar”. Si seleccionó la figura correcta entonces repetirá la acción con otras figuras hasta terminar la secuencia; de lo contrario, se le notificará con un mensaje de error y tendrá que reiniciar el ejercicio.

La secuencia de figuras que se le presenta al usuario se selecciona por el software aleatoriamente de entre un banco de seis distintas figuras. Para avanzar al siguiente ejercicio, el usuario deberá reconstruir correctamente dos secuencias.

Ilustración 11. Escenario del ejercicio.

Evaluación-control.

Sprite para respuesta incorrecta



Si la secuencia no es invertida adecuadamente, no se obtendrá el premio que hay dentro de la caja fuerte, pues se desvanecerá. Adicionalmente, será refutado por el software emitiendo un sonido de fallo y activando el botón de reiniciar.

Sprite para respuesta correcta

Si la respuesta es correcta, se muestra una medalla dentro de la caja fuerte.

Ejercicio 2 – semáforo de tres colores.
La pantalla para este ejercicio (ilustración 12) muestra un semáforo al lado izquierdo, cuya función es mostrar una secuencia de tres colores. El participante debe introducir de forma invertida dicha secuencia con las tarjetas que tiene al lado derecho, que funciona como un selector, mostrando diferentes opciones. Al iniciar el ejercicio sólo estará habilitada la tarjeta selectora inferior (obligando a elegir los eslabones en forma inversa).

La secuencia de colores que se le presenta al usuario se selecciona por el software aleatoriamente de entre un banco de seis distintos colores. Para avanzar al siguiente ejercicio, el usuario deberá reconstruir correctamente tres secuencias.

Ilustración 12. Escenario del ejercicio 2.

Evaluación-control.

Pantalla de error:

Si el usuario no introduce algún eslabón de forma correcta, será refutado por el software y perderá la oportunidad de ganar el trofeo, pues en tal caso se desvanece en pantalla.

Pantalla de éxito:

Si la secuencia de colores fue invertida correctamente, el trofeo será completado en su totalidad, dando a entender al usuario que ha logrado obtener el triunfo en este ejercicio.

Ejercicio 3. Disco de cuatro colores.

En el disco de la ilustración 13 se mostrará una secuencia de cuatro colores elegida aleatoriamente por el software, y el usuario la replicará en forma inversa dando click en cada uno de los segmentos del disco que sean necesarios; de esta manera las etiquetas que aparecen en el lado derecho de la pantalla serán activadas de forma ascendente. Cuando todas esas sean mostradas, se considerará como un triunfo para el participante.

Se invertirán dos secuencias correctas para avanzar al siguiente nivel.

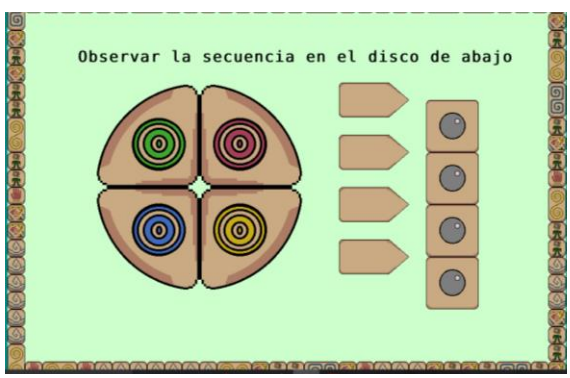
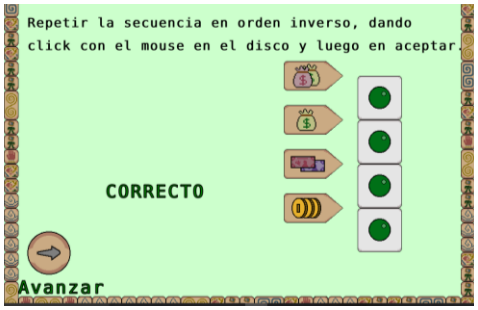


Ilustración 13. Escenario del ejercicio 3.

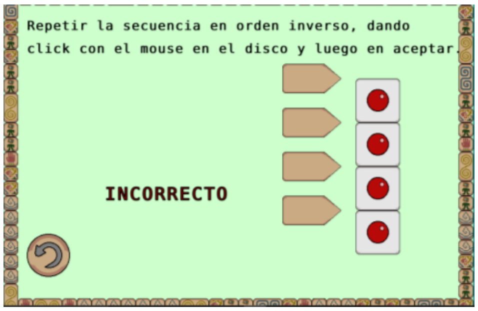
Evaluación-control.

Pantalla de éxito:



Se mostrará en pantalla la leyenda “CORRECTO”, siempre que la secuencia haya sido invertida exitosamente.

Pantalla de error:



Si no se eligió el color correspondiente, se mostrará la leyenda “INCORRECTO”, obligando al participante a repetir el ejercicio.

Ejercicio 4. Transformaciones.
En este ejercicio (ilustración 14) se muestra en la parte superior de la pantalla una secuencia con diferentes transformaciones aplicadas a una imagen. Al centro de la escena se mostrará el inicio y final de la misma secuencia, dejando el ícono intermedio vacío, para ser llenado por el usuario. En la parte inferior se habilitarán tres opciones (botones), cada una con diferente transformación. Al dar click en alguna de esas opciones se mostrará la figura con la transformación correspondiente aplicada; de esta manera se evaluará si la selección ha sido correcta, es decir, si la secuencia central es idéntica a la superior. Esta se elige aleatoriamente por el software de entre un banco de cuatro posibles.

Ilustración 14. Escenario del ejercicio 4.

Evaluación-control.

Pantalla de error

Si se ha elegido una transformación errónea, el ícono intermedio cambiará a una "***X***", y aparecerá en pantalla la leyenda "INCORRECTO" obligando al participante a reiniciar el ejercicio.

Pantalla de éxito

Si se ha elegido la transformación correcta, el ícono intermedio cambiará a una *palomita* y aparecerá en pantalla la leyenda "CORRECTO", permitiendo al participante avanzar a la siguiente escena.

Ejercicio 5. Segundo ejercicio de Transformaciones.

Al invertir satisfactoriamente la secuencia del ejercicio 4, se le presentará al usuario una nueva escena similar a la anterior, con la diferencia que esta secuencia tendrá dos transformaciones intermedias. El funcionamiento es idéntico al que presenta el ejercicio 4. Las notificaciones de éxito y error se comportan de igual manera. La secuencia se elige aleatoriamente de entre un total de 4 secuencias.

Ilustración 15. Segundo escenario del ejercicio 5.

Ejercicio 6. Más transformaciones.
En este ejercicio se pretende que el participante memorice las transformaciones realizadas a la tarjeta original. Posteriormente deberá presionar los botones necesarios que se aprecian en el lado derecho de la pantalla, invirtiendo la secuencia. El objetivo es invertir la secuencia de transformaciones.

Ilustración 16. Escenario del ejercicio 6.

Evaluación-control.

Pantalla de triunfo

Al elegir la combinación correcta de botones, la sección de historial cambia por íconos de *palomita* y se muestra la leyenda "CORRECTO".

Pantalla de fallo

Al cometer un error, el historial muestra un icono con una "***X***" en el paso incorrecto. También se muestra una leyenda que notifique la falla.

Nivel 3.

Al llegar a este nivel, se espera que el usuario tenga ya cierta experiencia para *invertir* transformaciones realizadas a determinado objeto, la cual facilitará invertir operaciones aritméticas utilizando algunas propiedades de la igualdad en *campos*, misma que será representada por una balanza con sus dos platillos (uno para cada miembro de la igualdad) en equilibrio. El contenido de cada platillo de la balanza se transformará manteniendo el equilibrio. La transformación consiste en quitar de ambos platillos la misma cantidad de objetos, lo que formalmente corresponde a *sumar el inverso aditivo de cierta cantidad en cada miembro de la igualdad, aplicar la propiedad asociativa de la suma, así como el axioma del inverso aditivo y elemento neutro aditivo*

El presente nivel consta de dos ejercicios.

Ejercicio 1. Ladrillos y cajas de naranja.

En este ejercicio se hacen las transformaciones necesarias para encontrar el peso de cada ladrillo, empezando por eliminar las cajas de naranja de 5 *kg*. Posteriormente deberán eliminarse los ladrillos necesarios en cada lado. Este proceso obliga al participante a eliminar los elementos en un orden determinado, como se observa en la ilustración 17.

Ilustración 17. Escenario del ejercicio 1.

Evaluación-control.

Si el proceso fue realizado correctamente, el "diablito" será cambiado por un ángel, y se mostrará la leyenda "*felicidades*", acompañada por la solución del problema.

Ilustración 18. Escenario de evaluación del ejercicio 1.

Ejercicio 2. Pasteles y pesas.
El procedimiento de este ejercicio es igual al del ejercicio 1; la única diferencia serán los elementos de la balanza, esta vez representados por pasteles y pesas. La pantalla de evaluación también se mantiene igual.

Ilustración 19. Escenario del ejercicio 2.

Nivel 4.
El presente nivel consta de una actividad introductoria, y dos ejercicios. En la primera el usuario practicará el *axioma del elemento inverso aditivo*, para lo cual deberá generar una "ficha positiva" dando click en el botón amarillo ubicado en la parte superior izquierda de la pantalla, luego deberá ser arrastrada y soltada en el contenedor correcto, mismo que será identificado a través de los indicadores inferiores. Al arrojar la ficha en el lugar designado, se "*neutralizará* un objeto negativo". Esta acción deberá repetirse hasta eliminar todos los elementos en los contenedores. Si el participante desea eliminar la ficha generada por el botón amarillo, esta deberá ser arrastrada a la zona definida por el ícono del basurero.

Ilustración 20. Escena de introducción.

Ejercicio 1. Resolver la ecuación $x - 1 = 7$**.**

La balanza mostrará la operación $x - 1$, representada con una alcancía (la variable) y un elemento negativo (la operación sobre la variable). Para generar un objeto positivo el usuario dará click en el botón superior derecho; posteriormente el objeto creado deberá ser arrastrado y soltado en el lado de la balanza que muestren los indicadores inferiores. Si es necesario eliminar este objeto, entonces se procederá como en la actividad introductoria. Toda acción realizada sobre los lados de la balanza se verá reflejada en forma matemática en el historial ubicado en la parte inferior derecha de la pantalla.

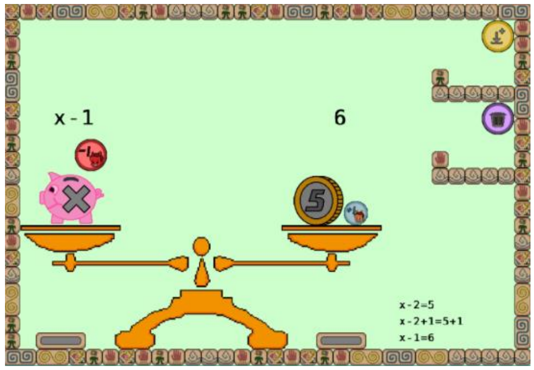


Ilustración 21. Escenario del ejercicio 1.

Evaluación-control.

Pantalla de error

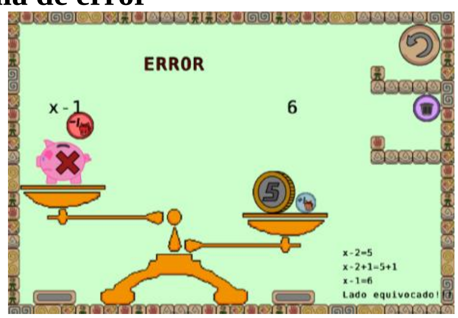


Ilustración 22. Escenario de un intento fallido.

Si el objeto generado por el participante es soltado en el lado incorrecto de la balanza, el software emitirá un sonido de fallo y mostrará la leyenda de error. Adicionalmente se ilustrará la balanza en desequilibrio, y habilitará el botón de reinicio.

Pantalla de éxito

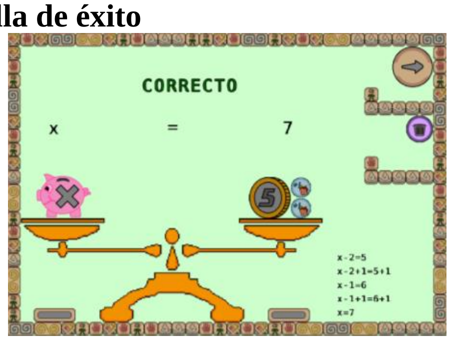


Ilustración 23. Escenario de triunfo.

Si se eliminan los objetos negativos correctamente, la pantalla mostrará la leyenda “CORRECTO”, acompañado del valor de la variable.

Ejercicio 2. Resolución de ecuaciones.
Al iniciar la escena se simulará una multiplicación, representada por un bloque con el número **tres** en el lado izquierdo de la balanza. Dicha operación deberá ser resuelta dando click en el botón ubicado en la parte superior derecha. Esta acción agregará elementos necesarios en el lado izquierdo para representar el resultado de la multiplicación. Posteriormente el ejercicio continuará bajo las mismas reglas que el anterior.

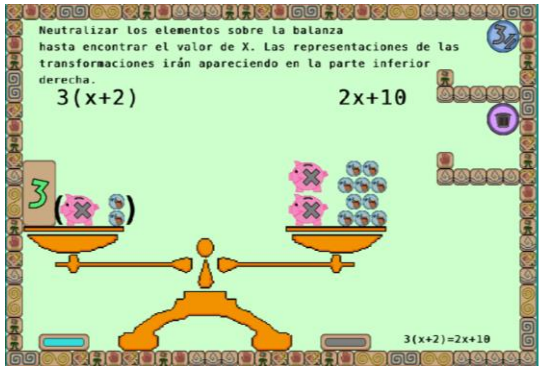


Ilustración 24. Escenario del ejercicio 2.

Pantallas de evaluación
Las pantallas de éxito y error serán manejadas del mismo modo que el ejercicio previo.

Nivel 5.

Introducción
En este nivel el participante practicará algunas propiedades de campo necesarias para resolver ecuaciones algebraicas de primer grado, y que en posteriores apariciones serán referenciadas usando la notación mostrada en pantalla (ilustración 25).

Escena 1.

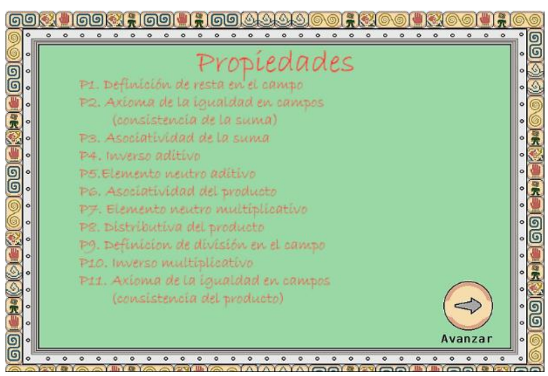


Ilustración 25. Propiedades de campo utilizadas en el nivel cinco.

Escena 2.
El siguiente escenario muestra la funcionalidad de cada uno de los objetos en pantalla; el panel derecho muestra una calculadora donde se podrán sumar o restar constantes y términos en "*x*", así como multiplicar o dividir constantes positivas y negativas. Al dar click en el botón morado de confirmación será creada una esfera en el lado superior izquierdo de la escena, la cual contendrá la operación seleccionada previamente y deberá ser arrastrada y soltada en cualquiera de los dos lados (verde, blanco) del pizarrón. Este proceso debe repetirse para operar en el lado contrario como se muestra en la ilustración 26:

Ilustración 26. Escenario de introducción del nivel cinco.

Resolviendo ecuaciones algebraicas de primer grado.

A continuación, se presentarán nueve ecuaciones de primer grado, que serán resueltas por el usuario con la asistencia oportuna del software. En algunas se le presentará al usuario la variable a usar en la igualdad ("*x*" en este caso). Dicha variable será transformada en tiempo real paso a paso hasta obtener una ecuación. Esto se hace con el fin de que el usuario identifique la secuencia de transformaciones realizadas a la variable. Inmediatamente después se le solicitará confirmar de entre cuatro opciones, tales operaciones, y en seguida el participante identificará también de entre cuatro opciones, la secuencia de operaciones inversas. Finalmente se resuelve la ecuación dada, mostrando al final (si el procedimiento realizado por el participante es correcto) una pantalla con cada uno de los pasos y propiedades realizados de manera formal. Así, el sujeto cognoscente aprenderá a resolver ecuaciones, e identificará las propiedades de *campo* que subyacen en el proceso de resolver una ecuación algebraica de primer grado (ilustración 30).

Todo ese proceso será mostrado en cuatro escenas.

Ejercicio 1. Resolviendo la ecuación *x*-1 = 2.

Escena 1.

Ilustración 27. Primer escenario para resolver la ecuación *x*-1 = 2.

Escena 2.

Ilustración 28. Segundo escenario para resolver la ecuación *x*-1 = 2.

Escena 3.

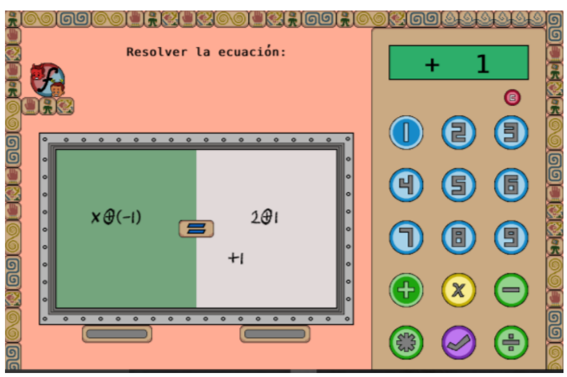


Ilustración 29. Solución de la ecuación *x* – 1=2.

Escena 4.

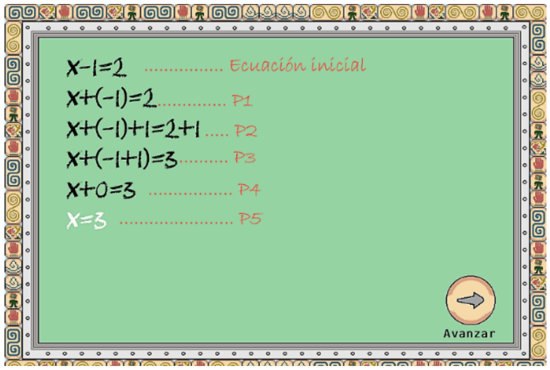


Ilustración 30. Sumario de la ecuación $x - 1 = 2$.

Ejercicio 2. Resolviendo la ecuación $2x = 9$.

Escena 1.

Ilustración 31. Primer escenario para resolver la ecuación $2x = 9$.

Escena 2.

Ilustración 32. Segundo escenario para resolver la ecuación $2x = 9$.

Escena 3.

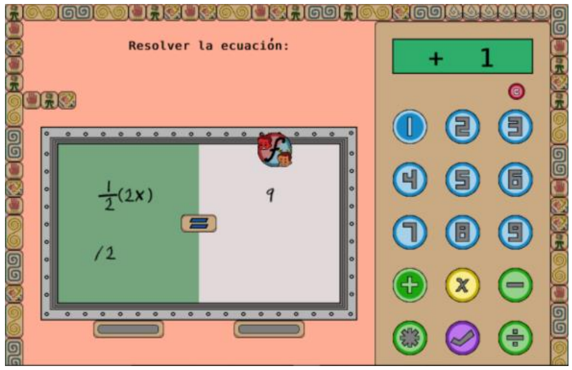


Ilustración 33. Solución de la ecuación $2x = 9$.

Escena 4.

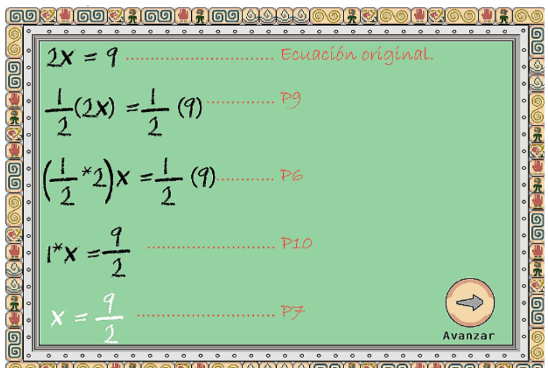


Ilustración 34. Sumario de la ecuación $2x = 9$.

Ejercicio 3. Resolviendo la ecuación $\frac{x}{-7} = 8$.

Escena 1.

Ilustración 35. Primer escenario para resolver la ecuación $\frac{x}{-7} = 8$.

Escena 2.

Ilustración 36. Segundo escenario para resolver la ecuación $\frac{x}{-7} = 8.$

Escena 3.

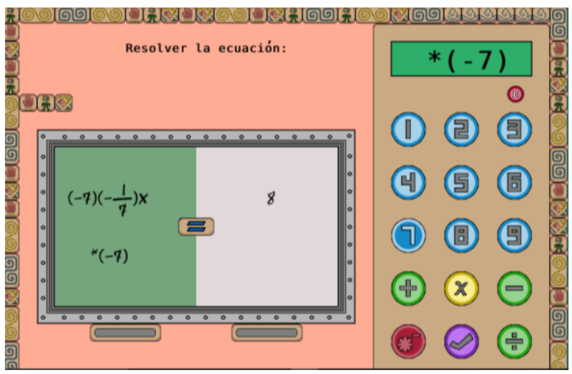


Ilustración 37. Solución de la ecuación $\frac{x}{-7} = 8.$

Escena 4.

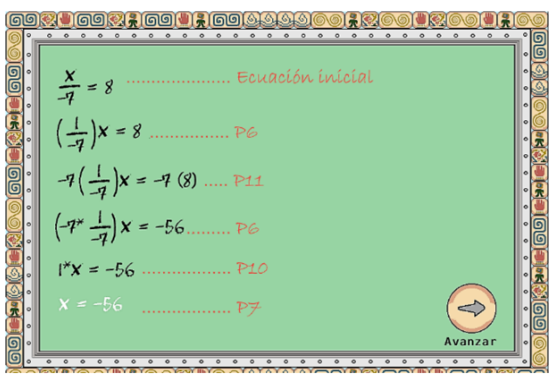


Ilustración 38. Sumario de la ecuación $\frac{x}{-7} = 8.$

Ejercicio 4. Resolviendo la ecuación $2x - 1 = 7$.

Escena 1.

Ilustración 39. Primer escenario para la ecuación $2x - 1 = 7$.

Escena 2.

Ilustración 40. Segundo escenario para la ecuación $2x - 1 = 7$.

Escena 3.

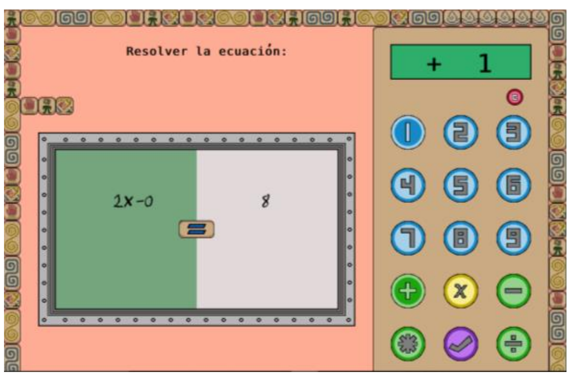


Ilustración 41. Solución de la ecuación $2x - 1 = 7$.

Escena 4.

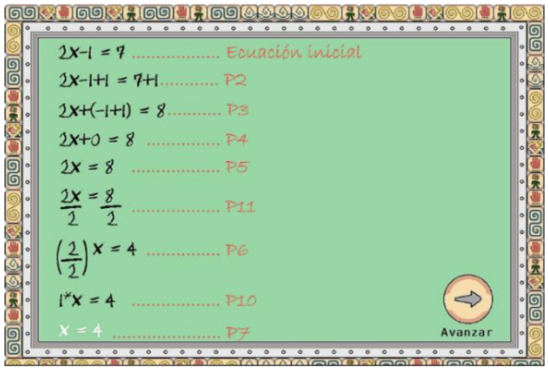


Ilustración 42. Sumario de la ecuación $2x - 1 = 7$.

Ejercicio 5. Resolviendo la ecuación $\frac{3x}{4} - 1 = 5$.

Escena 1.

Ilustración 43. Primer escenario para resolver la ecuación $\frac{3x}{4} - 1 = 5$.

Escena 2.

Ilustración 44. Segundo escenario para resolver la ecuación $\frac{3x}{4} - 1 = 5$.

Escena 3.

Ilustración 45. Solución de la ecuación $\frac{3x}{4} - 1 = 5.$

Escena 4.

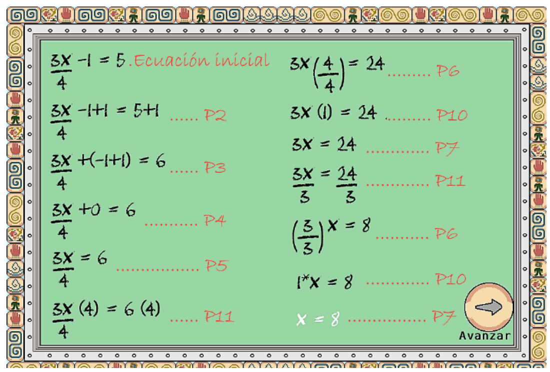


Ilustración 46. Sumario de la ecuación $\frac{3x}{4} - 1 = 5.$

Ejercicio 6. Resolviendo la ecuación $\frac{3x}{4} - 1 = \frac{x}{2} + 3.$

En este ejercicio se omite la escena 1.

Escena 2.

Ilustración 47. Segundo escenario de la ecuación $\frac{3x}{4} - 1 = \frac{x}{2} + 3.$

Escena 3.

Ilustración 48. Solución de la ecuación $\frac{3x}{4} - 1 = \frac{x}{2} + 3$.

Escena 4.

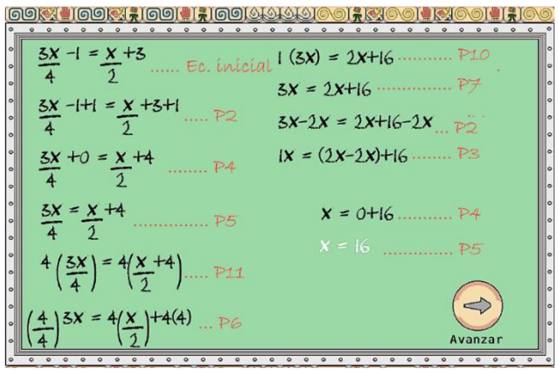


Ilustración 49. Sumario de la ecuación $\frac{3x}{4} - 1 = \frac{x}{2} + 3$.

Ejercicio 7. Resolviendo la ecuación $x + 2 = \frac{2x-2}{3}$.

Se omite la escena 1.

Escena 2.

Ilustración 480. Segundo escenario para la ecuación $x + 2 = \frac{2x-2}{3}$.

Escena 3.

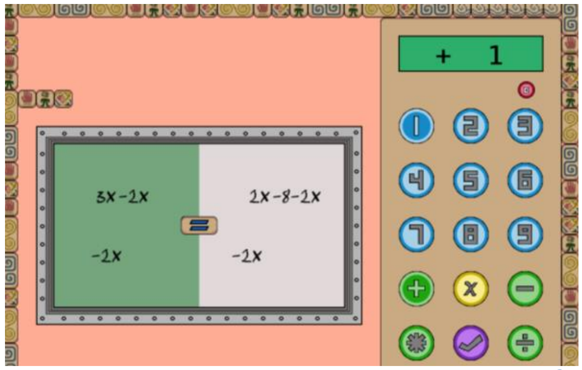


Ilustración 51. Segundo escenario para la ecuación $x + 2 = \frac{2x-2}{3}$.

Escena 4.

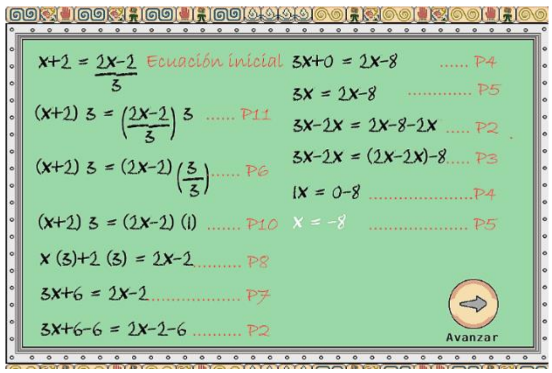


Ilustración 52. Sumario de la ecuación $x + 2 = \frac{2x-2}{3}$.

Ejercicio 8. Resolviendo la ecuación $\frac{3x-1}{2} - \frac{x-1}{3} = 1$.

Escena 1.

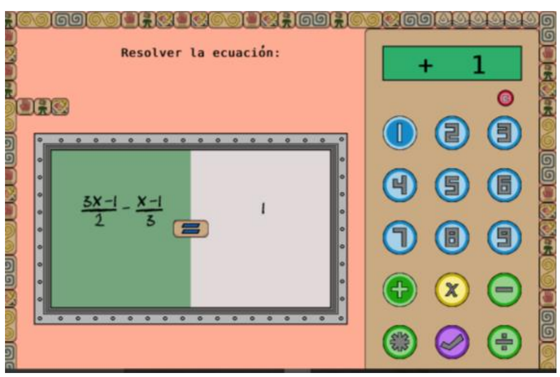


Ilustración 53. Escenario de presentación de la ecuación $\frac{3x-1}{2} - \frac{x-1}{3} = 1$.

Escena 2.

Ilustración 54. Segundo escenario para la ecuación $\frac{3x-1}{2} - \frac{x-1}{3} = 1.$

Escena 3.

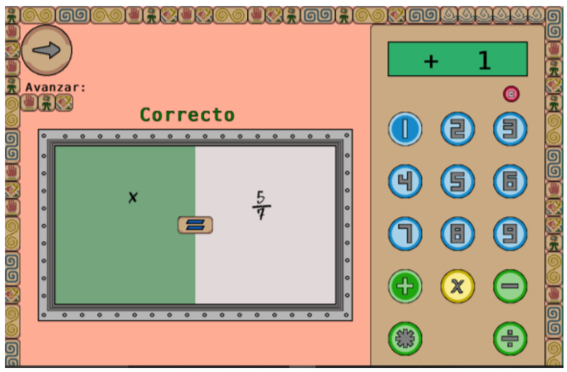


Ilustración 55. Solución de la ecuación $\frac{3x-1}{2} - \frac{x-1}{3} = 1.$

Escena 4.

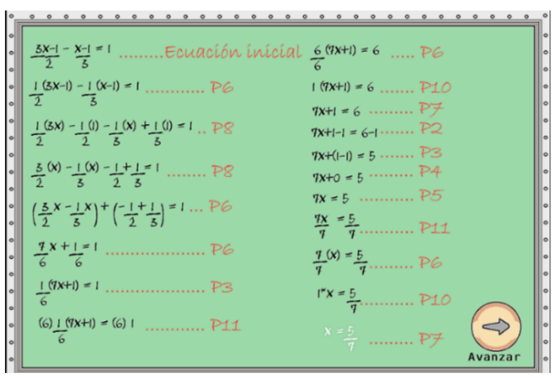


Ilustración 56. Sumario de la ecuación $\frac{3x-1}{2} - \frac{x-1}{3} = 1.$

Ejercicio 9. Resolviendo para *x* la ecuación $v_0 - \frac{xg^2}{k} = d$, para $k \neq 0$.

Escena 1.

Ilustración 57. Primer escenario para la ecuación $v_0 - \frac{xg^2}{k} = d$.

Escena 2.

Ilustración 58. Segundo escenario para la ecuación $v_0 - \frac{xg^2}{k} = d$.

Escena 3.

Ilustración 59. Solución de la ecuación $v_0 - \frac{xg^2}{k} = d$.

Escena 4.

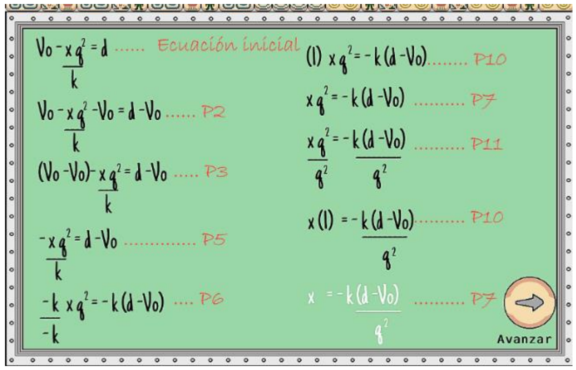


Ilustración 60. Sumario de la ecuación $v_0 - \frac{xg^2}{k} = d$.

Evaluación-control.

Para los nueve ejercicios del presente nivel 5, las pantallas de evaluación serán las mismas, y son las siguientes:

Pantalla de error:

Se le refutará al participante mostrándole un mensaje de error y dándole la opción de reiniciar el ejercicio hasta lograr el resultado esperado. De este modo, quien "enseña" (el software) obtiene una participación mínima ayudando al sujeto cognoscente, asumiendo el papel de un "*espectador empático*" (Álvarez, A. y Del Río, 1990).

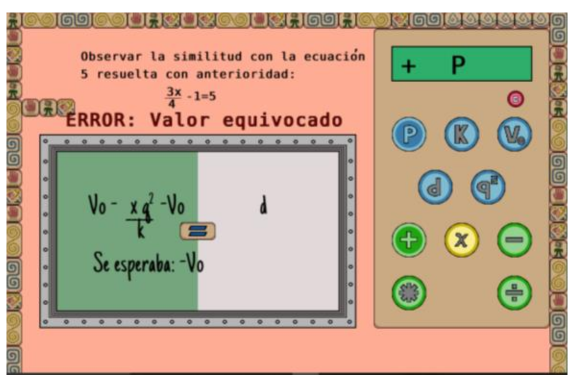


Ilustración 61. Escenario de error.

Pantalla de éxito:

Se mostrará un mensaje en pantalla indicando al participante que ha logrado desarrollar de manera correcta el procedimiento de la ecuación.

Ilustración 62. Escenario de triunfo.

3.4.2 Desarrollo del Software

- **Funcionalidades generales del sistema.**
  Con la planeación y desarrollo de este proyecto se creó un sistema que sea capaz de coadyuvar al participante a desarrollar habilidades cognitivas, específicamente la relación **“reversibilidad”–“estructuras algebraicas”. E**s un software que puede ayudar a la construcción de conocimiento.

- **Hardware utilizado.**
  Para la elaboración de este software se utilizó una computadora laptop de gama media con las siguientes características:
  - Laptop Lenovo G40-70
  - Procesador Intel(R) Core (TM) i3
  - Memoria (RAM) 4.00 GB
  - Disco duro 1TB
  - Sistema operativo Microsoft Windows 10 de 64bits

  Estas características son bajo las cuales se desarrolló el software. Pero cualquier computadora que tenga instalado **ADOBE FLASH** sin importar la versión, podrá utilizar el software sin ningún problema. Cabe aclarar que, si la computadora en la que se ejecute el software tiene bajas características, se verá afectado un poco el rendimiento, sin embargo, este software no dejará de funcionar.

- **Software utilizado**
  Durante la elaboración del software, así como de los objetos utilizados, se utilizaron algunas herramientas que permitieron que se llevaran a cabo todas las tareas de una manera eficaz y adecuada. Estas herramientas son:

  - Lenguaje de programación
    - Java 8
  - Herramientas de desarrollo
    - Stencyl 3.4.0
    - Piskel 0.14.0
    - Audacity 2.3.0
    - Photoshop
  - Descripción de las herramientas de desarrollo
    - **Stencyl 3.4.0**
      Es una plataforma de creación de videojuegos 2D. Permite crear videojuegos desde Linux, OS X y Windows para varias plataformas

como iPhone, iPad, Android, Flash, Windows, Mac y Linux. También tiene la opción de codificar por bloques o por código escrito utilizando como leguaje JAVA.

Los juegos creados en Stencyl pueden ser exportados a la web en formato Adobe Flash Player, y como ejecutable para computadoras personales, así como a varios dispositivos móviles como iOS y Android. La física y las colisiones son administradas por Box2D, el cual puede ser selectivo o completamente deshabilitado para disminuir cualquier impacto potencial al rendimiento para juegos que no requiere una simulación de física exigente.

Gracias a la ayuda de esta herramienta se pudo programar el comportamiento de todos los actores, así como su física, utilizados en el software. De esta manera se logró obtener con éxito cada una de las tareas dentro del mismo. Cabe mencionar que en cada tarea el proceder es diferente, en algunos tienen mayor grado de dificultad y en otros son exclusivamente ilustrativos.

- **Piskel 0.14.0**
  Es un editor de sprites 2D fácil de usar. Se puede usar para crear sprites de juegos y animaciones. El editor de Piskel está construido puramente en JavaScript, HTML y CSS.

  Piskel permite crear un previo en tiempo real del trabajo que se vaya realizando. Tiene una interfaz bien sencilla con varias herramientas que la mayoría conocemos y que simplifican el proceso de trabajo para realizar ese pixel art.
  Algunas de las herramientas son el lápiz, lápiz espejo, bote de pintura, borrador, varita mágica, mano o formas rectangulares o circulares entre otras tantas que ofrecen la habilidad de poder crear ese personaje pixelado. Una vez terminado el diseño, se puede obtener una vista previa con el propio programa, que nos permitirá ver si está todo perfecto o hay que retocar algún pixel.

  Esta herramienta ayudó al diseño y a la creación de todos los objetos utilizados en el software, que fueron alrededor de 500.

- **Audacity 2.3.0**
  Es un editor de audio gratuito. Permite grabar y reproducir sonidos, importar y exportar archivos WAV, AIFF, y MP3, y más. Se utiliza para editar sonidos usando Cortar, Copiar y Pegar (con ilimitados Deshacer), mezclar pistas, o aplicar efectos a las grabaciones. También posee un editor de envolvente con amplitud propia, un modo espectrograma ajustable a medida, y una ventana de análisis de

frecuencia para aplicaciones de análisis de audio. Efectos propios incluidos Bass Boost (Realzador de Graves), Wahwah, y Removedor de Ruido, y también soporta efectos plug-in VST.

Con Audacity se logró eliminar el ruido de fondo, así como ajustar el audio de manera eficaz para un mejor funcionamiento de sonido.

- **Photoshop CS4**
  Es un programa de edición de imágenes, sirve para editar y retocar imágenes de todo tipo. Es una de las mejores y más completas herramientas en su categoría.
  Usado en este proyecto principalmente para el retoque de imágenes y para crear algunas otras con texto. Es una de las aplicaciones de edición de imágenes más utilizada, por la facilidad de uso que tiene para el usuario, de hecho, se ha convertido, en el estándar para el retoque fotográfico, pero también se usa extensivamente en multitud de disciplinas en el campo del diseño y fotografía, como diseño web, composición de imágenes en mapa de bits, estilismo digital, fotocomposición, y básicamente en cualquier actividad que requiera el tratamiento de imágenes digitales.

3.4.3 Arquitectura del software

- **Nivel 1**

  En el nivel uno, el jugador debe elegir el objeto indicado para lograr pasar al siguiente escenario, tiene tres oportunidades para lograr superar el escenario, de lo contrario sin importar en qué escenario se encuentre simpre será regresado al inicio del juego.

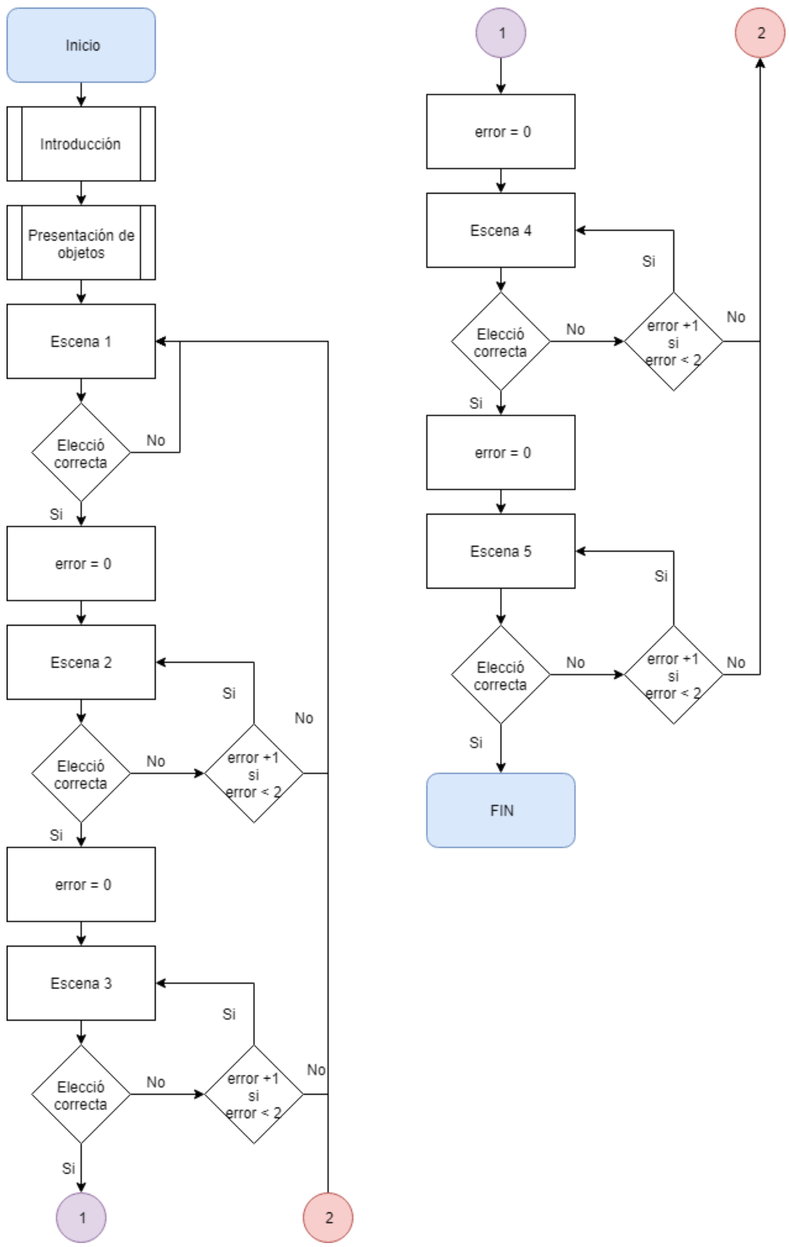


Ilustración 63. Diagrama de flujo del nivel 1.

- **Nivel 2**

  En este nivel de juego se avanza con respecto a los aciertos logrados ya que de manera aleatoria se lanzan las preguntas en cada escenario. Al responder correctamente y alcanzar los aciertos necesarios se logra pasar al siguiente escenario.

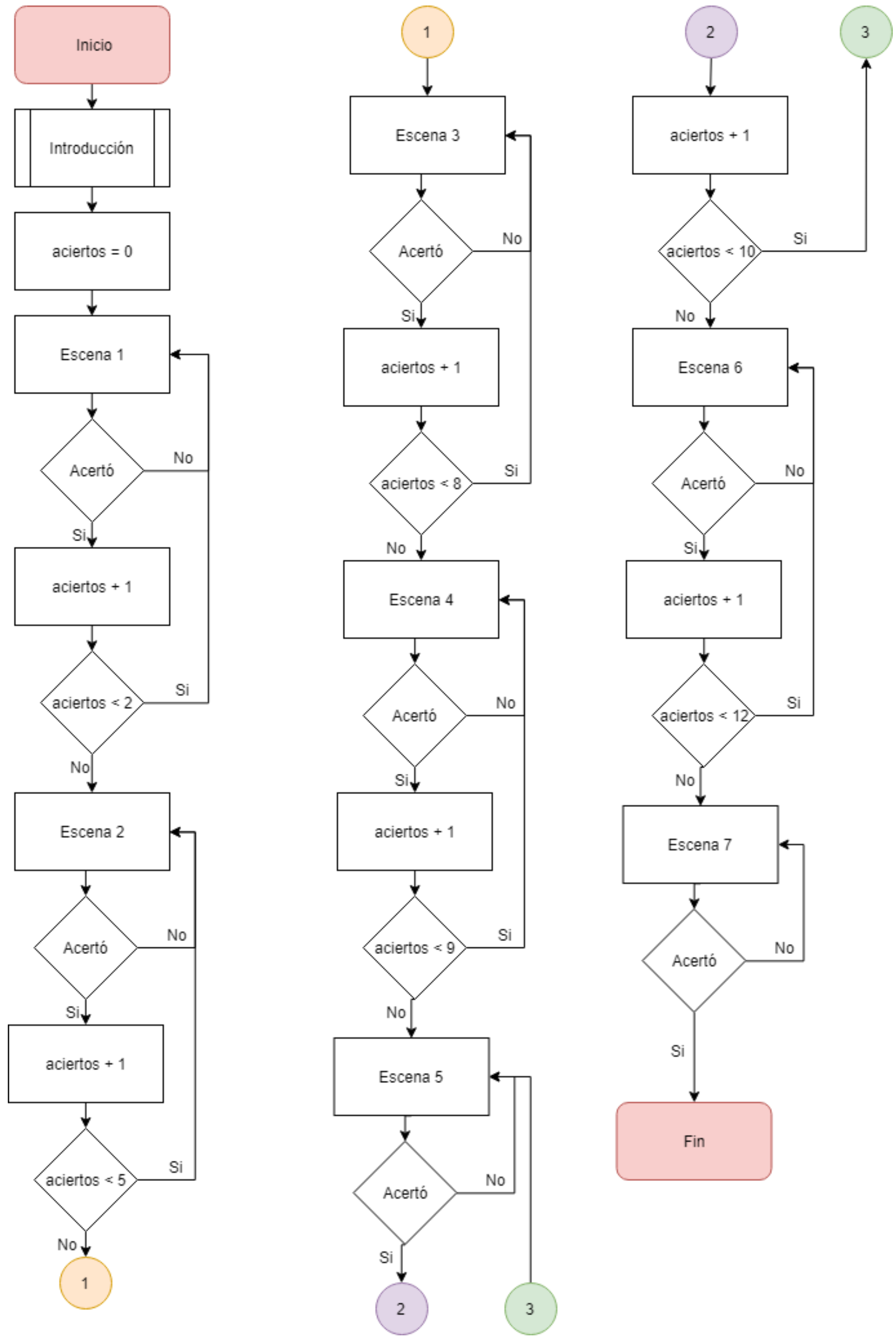


Ilustración 64. Diagrama de flujo del nivel 2.

- **Nivel 3**
  Se pretende dar a conocer el funcionamiento de los niveles más avanzados, por lo cual se usa la propiedad de la igualdad I6 de campos, la cual es representada por medio de una balanza.

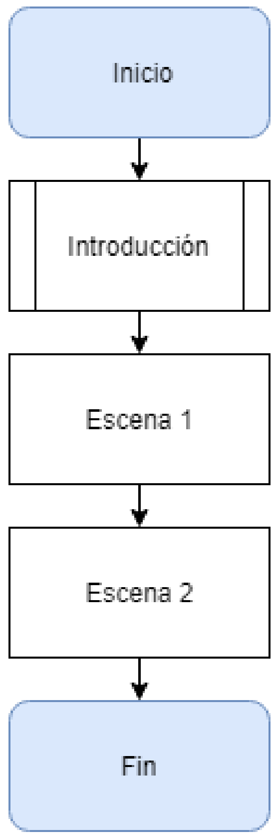


Ilustración 65. Diagrama de flujo del nivel 3.

- **Nivel 4**

  Se le da una breve introducción al usuario del funcionamiento de este nivel para despues encontra el valor de la variable *x*. Si el valor encontrado es el correcto, puede avanzar, de lo contrario se reinicia el escenario actual.

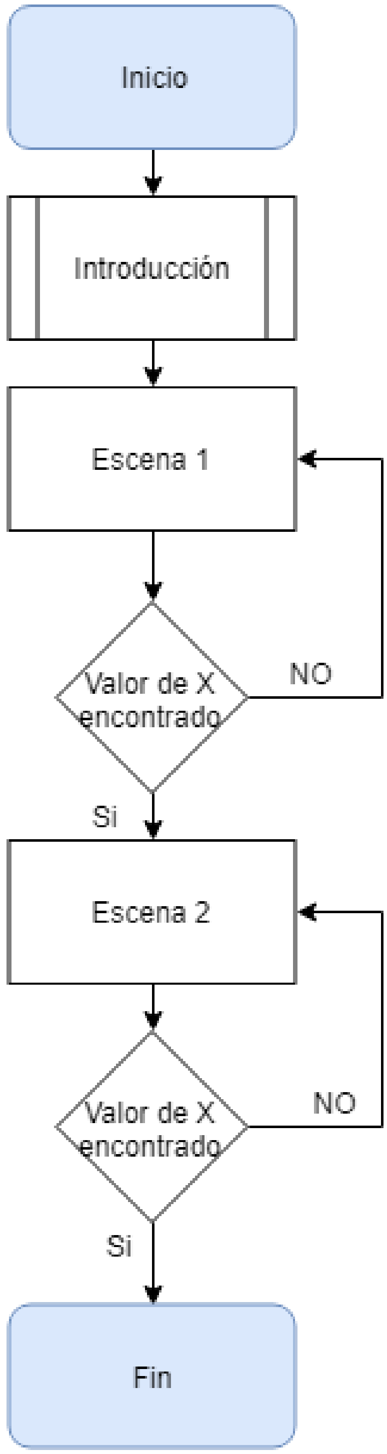


Ilustración 66. Diagrama de flujo del nivel 4.

- **Nivel 5**

Se le explica brevemente el funcionamiento de este nivel en una pequeña introducción para el manejo de los objetos, y de igual manera ir resolviendo la ecuación hasta encontrar el valor de la variable *x*.

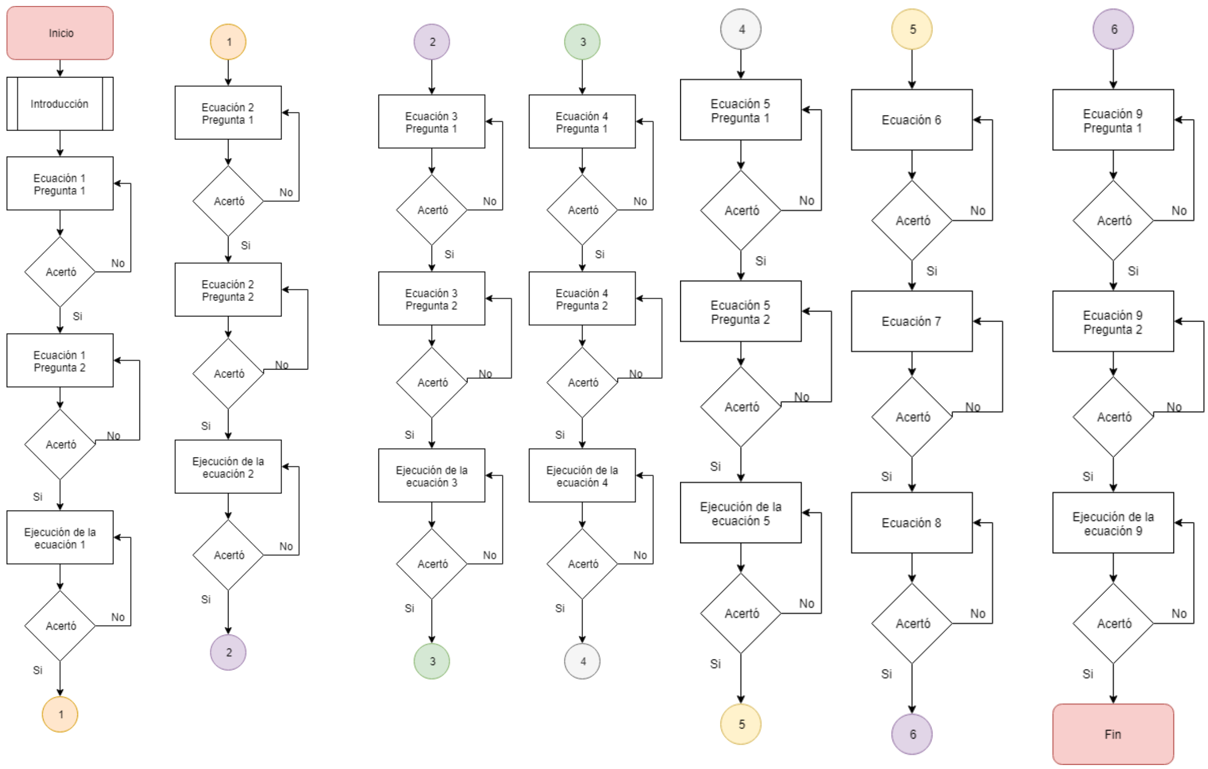


Ilustración 67. Diagrama de flujo del nivel 5.

RESULTADOS

Al inicio de este proyecto se realizó una encuesta con el objetivo de identificar las razones por las cuales los individuos de la muestra tienen dificultades al momento de aprender a resolver ecuaciones algebraicas de primer grado. La encuesta consistió en una única pregunta: ***"¿Cuáles son las causas por las cuales suele ser difícil hallar la solución de ecuaciones algebraicas?".***

Dicha encuesta fue aplicada a más de 100 personas con diferentes escolaridades, que van desde ningún nivel hasta licenciatura (en educación).

Las respuestas más frecuentes que proporcionaron los individuos encuestados fueron:

- Olvidar las leyes y reglas o aprendizaje deficiente de las mismas.
- No ser capaces de identificar las variables requeridas, y no emplear las operaciones básicas.
- No seguir el orden o la jerarquía al resolver la ecuación.
- No disponer de calculadora para evitar la resolución manualmente.
- Falta de comprensión al momento de leer y analizar los problemas.
- Capacitación y técnicas poco eficientes por parte del educador.
- Desorientación y confusión total al momento de operar.
- No conocer la relación de las operaciones elementales con sus inversas.
- Desidia al momento de pensar y analizar conceptos matemáticos.

Se realizó la aplicación de la técnica de enseñanza propuesta en este trabajo junto con algunas más:

Sin ayuda teórica: A un conjunto de estudiantes no se les dio alguna explicación sobre resolución de ecuaciones durante la aplicación de la prueba. Los niveles de experiencia con las ecuaciones van desde nunca haberlas conocido hasta reconocer su uso constante en la vida cotidiana. Se emplea este grupo de personas como grupo inicial de control.

Sin ayuda teórica, pero con aplicación del software desarrollado: es el mismo grupo de personas, pero con el uso del software. De esta forma evaluamos si el software es capaz de ayudar a los usuarios a desarrollar la habilidad de reversibilidad, al mismo tiempo de enseñar a resolver una ecuación algebraica de primer grado.

Uso del método simplificado ("si está sumando…, entonces pasa…"): Se retomó el grupo anterior donde a las personas con mayor conocimiento académico se les recuerda el método simplificado, y las personas con menor grado académico darles a conocer el mismo. El grupo es utilizado para ver la dificultad que tienen las personas al momento de resolver ecuaciones empleando dicha técnica.

Explicando algunas propiedades de campo (igualdad, conmutativa, asociativa, distributiva, etc.): Siguiendo con el grupo de personas inicial, un 95 % no tenían conocimiento de las propiedades y solo un 5 % lo tenían vagamente. Este grupo pretende ilustrar si el conocimiento de las propiedades en campo basta para mejorar el rendimiento de la solución de ecuaciones.

Explicando el uso de reversibilidad: Se complementa el método que estamos tratando de implementar.

Método de enseñanza propuesto y con el software: una vez que el grupo ya conoce todo el proceso del presente trabajo, retoman el uso del software para evaluar nuevamente si es un factor que puede ayudar a mejorar el rendimiento al momento de resolver ecuaciones de primer grado.

El grupo de personas estuvo conformado en un rango de edad que va desde los 7 hasta los 40 años, obteniendo como resultado las siguientes descripciones:

Resultados	Personas		
Resolver una ecuación	Avanzadas	Intermedias	Atrasadas
Sin ayuda teórica	Todos los individuos lograron resolverlas.	Ningún individuo logró resolverlas.	Ningún individuo logró resolverlas.
Sin ayuda teórica, pero con aplicación del software desarrollado	Decrece ligeramente la cantidad de individuos que lograron resolverlas.	Cerca del 50% de las personas sintieron malestares ligeros como dolor de cabeza y mal humor. Incrementa un poco el número de personas que lograron resolver las ecuaciones.	Casi todas las personas notaron varias molestias como dolor de cabeza, mal humor, náuseas, sueño, cansancio mental, y solo pocas personas lograron resolver las ecuaciones.
Uso del método simplificado (“si esta…, entonces pasa…”):	Algunas de las personas entendieron rápido, pero la mayoría mostró cierta confusión.	Se les hizo fácil, pero no entendían por qué, así como se cuestionó y qué pasa si lo paso restando también no tiene sentido ya que no hay un porqué de las cosas.	Mucha confusión, no entendía por qué se aplicaba la inversa de la operación.
Explicando algunas propiedades de campo (igualdad, conmutativa, asociativa, distributiva, etc.)	No sabían que existían y les causó mucha confusión, al igual que ahora ya sabían por qué hacían de la forma convencional las ecuaciones.	Las personas con educación primaria comprendieron muy rápido y fueron aclarando sus dudas anteriores.	Fueron las personas que más rápido entendieron.

Explicando el uso de reversibilidad	A algunos se les dificultó, no así a otras personas. Dijeron que les era más fácil aplicando la reversibilidad porque así no tendrían equivocaciones a la hora de resolver una ecuación, y algunos que aún están estudiando les ayudaría mucho en sus exámenes y tareas.	El aprendizaje fue mayor de lo esperado ya que podían identificar las operaciones realizadas a la variable para después aplicar su inverso.	El resultado fue increíble ya que estas personas observaban la ecuación, identificaban las operaciones realizadas a la variable, las anotaban y debajo de esas anotaciones escribían su inverso para después empezar con la aplicación de la última operación, y se les facilito mucho, lo cual ellas mismas estaban sorprendidas ya que algunas personas no tienen ningún tipo de educación escolar, pero que sí saben las operaciones básicas, y ya cuentan con familia e hijos a los que a veces no podían ayudar con su tarea.
Método de enseñanza propuesto y con el software	La mayoría de las personas no fueron capaces de resolver la ecuación ilustrando la secuencia paso a paso como lo requiere el método, solo 9 pudieron explicar lógicamente y mostrar los pasos.	El 50% de las personas mostraron mejoría utilizando el método de enseñanza propuesto, finalizando con una mejor actitud.	En esta etapa una cantidad mínima de individuos presentó malestares físicos, comparada con el grupo de control. Casi el total de las personas mostraron mejoría empleando los pasos adquiridos durante el proceso de este trabajo superando el índice de éxito de la prueba de las personas avanzadas.

CONCLUSIONES

Se ha elaborado un software el cual puede fungir como un acompañante de mayor experiencia respecto al usuario que pretenda aprender cómo se resuelven ecuaciones algebraicas de primer grado, utilizando para ello las propiedades de la estructura algebraica llamada *campo*. Con ese fin, se ha utilizado la programación en 2D por la facilidad de ejecución en los equipos de cómputo ya que no es necesario tener características especiales instaladas en el mismo, además se usó Java como lenguaje de programación por la compatibilidad que tiene con las herramientas utilizadas en este trabajo. Hubiese sido conveniente haberlo realizado con inteligencia artificial, en 3D u otras herramientas para resolver las ecuaciones, lo cual nos llevaría a instalar características especiales en el equipo de cómputo para obtener una mejor utilidad del software por el usuario.

Por los resultados obtenidos al haber sido utilizado el software por diferente tipo de usuarios, se observó la utilidad del mismo no sólo para el aprendizaje del tema matemático mencionado, sino también como coadyuvante en el desarrollo de ciertas habilidades cognitivas, específicamente aquellas relacionadas con dos de las estructuras mentales madre como son la *reversibilidad* y las *diferencias-semejanzas*. Por la interacción que tiene el usuario, el software ciertamente puede ser un andamiaje por el cual no solamente se mejoran las individuales *zonas de desarrollo real*, sino que pueden crearse *zonas de desarrollo próximo*.

Se han planteado Bases Orientadoras de la Acción con las cuales se pretende fortalecer la formación humana y social del sujeto cognoscente, pues promueven en él la *reversibilidad*, estructura mental necesaria (mas no suficiente) para la tolerancia y solidaridad. Con eso, pensamos, se desarrollan habilidades del pensamiento complejo, las cuales sirven entre otras cosas, para dar respuesta a la formación de competencias requeridas a nivel mundial, como son: *Analizar*, que significa hallar secuencias, reconocer patrones e identificar supuestos.

Con el tipo de BOAS propuestas, pensamos lograr una persona que escucha, interpreta, piensa, critica y reflexiona; sustenta una postura personal y colectiva sobre temas de interés y relevancia general considerando otros puntos de vista. Eso le permitirá mantener una actitud respetuosa hacia la interculturalidad y a la diversidad de creencias, valores, ideas y prácticas sociales.

Cabe aclarar, que hemos llevado a la práctica algunas de estas BOAS, pero las hemos acompañado de actividades propias de la neuro estimulación, obteniendo muy buenos resultados; sin embargo, también hemos observado que, sin la presencia de tales actividades, los resultados no siempre son halagadores.

También mostramos que el conocimiento matemático no tiene por qué ser elitista, y que éste puede enseñarse y adquirirse por una gran mayoría, pues **la educación debe ser para todos y todas**.

Referencias

1. Álvarez, A. y Del Río, P. (1990a). "Educación y desarrollo: la teoría de Vygotsky y la Zona de Desarrollo Próximo". En Coll, C., Palacios, J. y Marchesi, A. (comps.), *Desarrollo psicológico y educación. Vol. II* (pp. 93-119). Madrid: Alianza

2. Bruner, J. (1978), *El proceso mental en el aprendizaje,* Madrid: Nancea, p. 86.

3. Chávez Uribe Alfonso, *El paradigma sociocultural en la psicología educativa*, http://www.slideshare.net/psialf/sociocultural, p. 5.

4. Coll y Gillieron, C. 1985., Jean Piaget, *el desarrollo de la inteligencia y la construcción del pensamiento racional*, Madrid.

5. Delors (*Informe a la UNESCO de la Comisión Internacional sobre la Educación para el siglo XXI,* UNESCO ediciones, 1993.).

6. Desarrollo de Videojuegos Multiplataforma. Un enfoque práctico con NME. David Vallejo Fernández, Carlos González Morcillo y David Frutos Talavera. https://www.stencyl.es/tag/manual-stencyl/

7. Diario la Jornada, miércoles 5 de diciembre del 2007. (Nota de Karina Avilés)

8. Dirección General de Evaluación de la Secretaria de Educación Pública, México. www.sep.gob.mx/work/appsite/dge/archivos/publica/doctos/diversos/**pisa**finalb.pdf

9. Freire Paulo, *Pedagogía de la Autonomía,* Siglo XXI editorial, octubre 2002.

10. Galperin, P. Ya., *Introducción a la Psicología*, Pueblo y Educación editorial, La Habana, 1982.

11. INGENIERÍA DE SOFTWARE: UNA PERSPECTIVA ORIENTADA A OBJETOS.BRAUDE, ERIC J. 2003.

12. Ingeniería del software: UN ENFOQUE PRÁCTICO SÉPTIMA EDICIÓN Roger S. Pressman, Ph.D. University of Connecticut.

13. Ingeniería de software: Ian Sommerville 2011.

14. Java 7 Francisco Javier Moldes Teo 2011.

15. Java 2. Curso de Programación 4ª Ed. Francisco Javier Ceballos Sierra 2010.

16. Kolmogorov, Laurentiev, A. D. Aleksandrov. (2014). Las Matemática, su método, contenido y significado. Tomos I, II, III.

17. Laudon, Kenneth C. y Laudon, Jane P. Sistemas de información gerencial. México 2012.

18. Lakatos Imre., *Pruebas y refutaciones, la lógica del descubrimiento matemático*, Alianza editorial, 1976.

19. Leontiev, A., *The problem of activity, consciousness, and personalit*y, Englewood clips. N. J., Prentice May, 1981.

20. Leo Corry. (1992). Mathematical Structures from Hilbert to bourbaky – Semantic Scholar

21. Leo Corry. (2004). Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures

22. Medina Liberty Adrián, *Pensamiento y lenguaje, enfoques constructivistas*, Mc Graw Hill Interamericana, México. D. F. pp. 11-44.

23. Patiño Garzón Luceli., *Aportes del enfoque histórico cultural para la enseñanza*. Educación y Educadores, Volumen 10, No. 1. http://dialnet.unirioja.es/servlet/fichero_articulo?articulo=2360423&orden=87796 .

24. Piaget, J. (1970), *Estructuralismo.*

25. Piaget, J. (1976), *Biology and cognition*. En B. Inhelder & H. Chipman (Eds.) "*Piaget and his scholl*". Nueva York: Springer-Verlag, pp. 45-62.

26. Talízina, N. F. *Psicología de la Enseñanza*, Progreso editorial, Moscú, 1981.

27. Talízina, N. F. (1993), *Los fundamentos de la enseñanza en la educación superior*, Trad. (del ruso) Rafael Bell Rodríguez, México, UAMX-Ángeles Editores

28. Vygotsky, L. S. (1986), *Concrete human psychology*. *Soviet Psychology*, 27, p. 2 (Publicado originalmente en 1929).

29. Vygotsky, L. S. (1978), *Prehistoria del lenguaje escrito*. En L. S. Vygotsky (1978) *mind in Society.* Cambridge, MA.: Harvard University Press.

30. Vygotski, L. S. (1989, o.1930-34). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Barcelona: Crítica. [Edición de Michael Cole et al.

Anexos

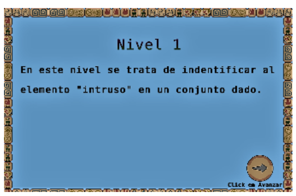
Anexo 1. Manual de Usuario

Pantalla de inicio, al dar clic (presionar) en el botón de avanzar manda a la siguiente pantalla.

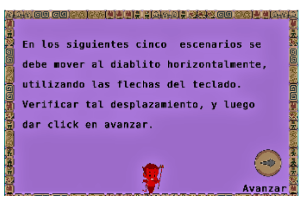
Contiene el menú de selección puede dar clic en nivel de juego de su preferencia.

Nivel 1

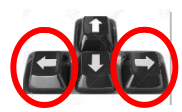
Funcionamiento

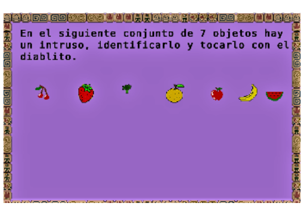


Descripción del nivel, posteriormente dar clic en avanzar.



Mover al diablito horizontalmente utilizando las flechas del teclado, como se muestra.





Observar el conjunto de elementos que caen de forma predeterminada.

Utilizando las flechas del teclado mover al diablito para encontrar el elemento deseado.

Al hallar al elemento indicado cambia la animación del diablito por la de un Angelito.

Si no encuentras el elemento indicado la animación del diablito cambia por un diablito llorando.

Fin del nivel 1

Nivel 2

Funcionamiento

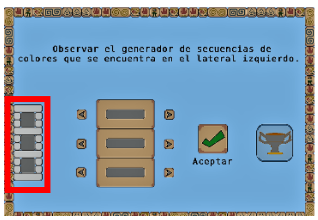
Dar clic (presionar), en cada uno de los botones que se muestran en pantalla para observar el funcionamiento de estos.

Observar la secuencia que aparece en la parte superior como se remarca en la imagen.

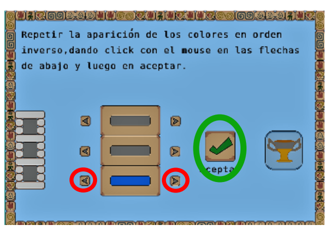
Repetir la secuencia eligiendo la fruta deseada con las flechas (remarcadas en rojo) que están en los lados del rectángulo, posteriormente dar clic en el botón de aceptar (remarcado en verde), así se repite el proceso hasta completar la secuencia.

Si la secuencia es completada correctamente nos da la opción de avanzar (dar clic en el botón remarcado en rojo) al siguiente escenario.

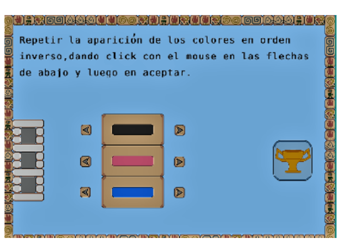
Cuando la secuencia es incorrecta nos permite reiniciar el ejercicio dando clic en el botón remarcado en rojo.



Al avanzar al siguiente escenario, se debe poner mucha atención, y observar la secuencia de colores que se muestra en la parte izquierda de la pantalla remarcado con rojo.



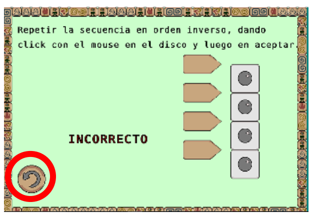
Posteriormente elegimos el color de nuestra preferencia utilizando las flechas (remarcadas en rojo), al obtener el color deseado dar clic en aceptar remarcado en verde.



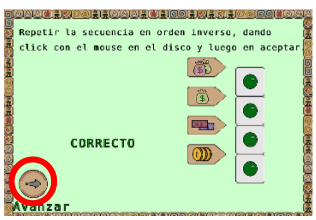
Así se repite el mismo proceso con cada uno de los colores a introducir hasta completar la secuencia, poder avanzar al siguiente escenario.

Observar cuidadosamente la secuencia mostrada en el disco de colores (remarcado el rojo).

Dar clic en cada parte del disco (remarcado en rojo) que consideres necesaria para completar la secuencia.



Si presionaste alguna parte del disco que no pertenecía a la secuencia dar clic en el botón de reiniciar remarcado en rojo.

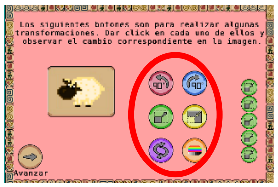


Al completar la secuencia correctamente podrás avanzar al siguiente escenario dando clic en el botón de avanzar remarcado en rojo.

Observar la secuencia de transformaciones realizadas a la imagen (remarcado en rojo), posteriormente presionar el botón que consideres realizara la transformación correspondiente (remarcado en verde) para completar la secuencia.

Si la transformación elegida es correcta dar clic en el botón de avanzar (remarcado en rojo).

El funcionamiento en este escenario es análogo al explicado anteriormente con la diferencia de que se le aumenta una transformación más.



Dar clic en cada uno de los botones (remarcados en rojo) para ver su funcionamiento realizando una transformación a la imagen.

Si presionas algún botón que no corresponde a la secuencia puedes reiniciar (remarcado en rojo) el juego.

Si la secuencia es correcta puedes retroceder en el navegador ( ) para regresar al menú de selección.

Nivel 3

Funcionamiento

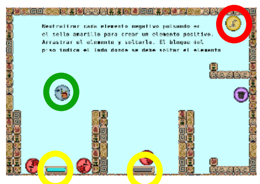
Se muestra un escenario de introducción para poder el funcionamiento de cada objeto.

Al dar clic en algún objeto automáticamente se elimina uno equivalente el lado contrario del platillo como se observa en la imagen (remarcado en rojo), así con cada uno de los objetos necesarios hasta resolver el ejercicio.

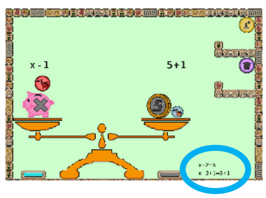
Una vez resuelto el ejercicio damos clic en avanzar (remarcado en rojo) y poder avanzar al siguiente escenario que se comporta de manera similar a este.

Nivel 4

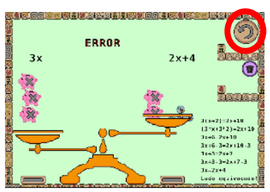
Funcionamiento



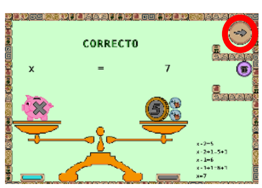
Escenario de introducción para mostrar el funcionamiento.
Dar clic en el botón ubicado en la parte superior derecha (remarcado en rojo) para generar una ficha (remarcado en verde) y poder arrastrarlo a don de los indicadores (remarcados en amarillo) nos indiquen.



Así al ir resolviendo el ejercicio podemos observar los pasos realizados en un historial que se muestra en la parte inferior derecha de la pantalla (remarcado en azul).



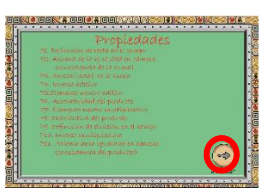
Al arrastrar y soltar en el lado equivocado la balanza queda en desequilibrio como se muestra en pantalla, puedes reiniciar el juego dando clic en al botón remarcado en rojo.



Para avanzar al siguiente escenario dar clic en el botón de avanzar (remarcado en rojo), en donde el funcionamiento es análogo al este.

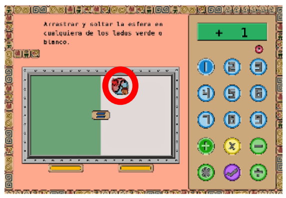
Nivel 5

Funcionamiento



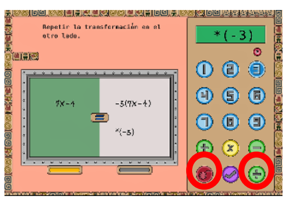
Se muestra una lista de las propiedades de campo necesarias para la resolución de ecuaciones algebraicas de primer grado, para avanzar dar clic en el botón de avanzar (remarcado en rojo).

Posteriormente nos muestra una escena de introducción donde nos muestra el funcionamiento de este nivel de juego aquí tenemos que dar clic (presionar) en los botones de la calculadora (remarcados en rojo) y después de elegir el termino deseado dar clic en el botón morado (remarcado en amarillo).



Así se generará una capsula (remarcada en rojo) y la podemos arrastrar y soltar en cualquiera de los lados del pizarrón (verde o blanco)

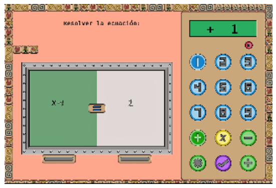
Así repetir el proceso en el lado contrario como se muestra en la imagen



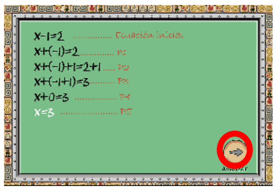
Puede realizar multiplicaciones o divisiones con números negativos dando doble clic (presionando dos veces consecutivas) el botón de multiplicar o dividir (remarcados en rojo) para obtener el termino deseado.

Al terminar de poner en práctica el funcionamiento de este escenario dar clic en avanzar (remarcado en rojo) para poder resolver los ejercicios propuestos

Al terminar de mostrarse las transformaciones del ejercicio se hace la pregunta que se muestra en pantalla y así poder elegir la opción (remarcado en rojo) que considere correcta.



Al responder correctamente las preguntas realizadas anteriormente podrá empezar a resolver el ejercicio propuesto utilizando los pasos antes mencionados con respecto al funcionamiento de los objetos mostrados en pantalla



Al terminar de resolver el ejercicio se mostrarán los pasos realizados anteriormente de manera formal de cómo se resuelve una ecuación algebraica de primer grado, para pasar al resolver el siguiente ejercicio dar clic en avanzar (remarcado en rojo), los siguientes ejercicios se resuelven utilizando los pasos mencionados anteriormente.