Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Curvas integrales del vector de Poynting de los haces Hermite-Gaussianos mediante el enfoque del potencial cuántico

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

Licenciado en Física

por

Edna Gabriela Gochicoa Fuentes

Asesorada por

Dr. Gilberto Silva Ortigoza y Dr. Ernesto Espíndola Ramos

Puebla Pue.
Septiembre de 2023

Título: Curvas integrales del vector de Poynting de los haces Hermite-Gaussianos mediante el enfoque del potencial cuántico
Estudiante: Edna Gabriela Gochicoa Fuentes

COMITÉ

Dr. Gerardo Torres del Castillo
Presidente

Dr. Maximino Luis Arroyo Carrasco
Secretario

Dra. Marcela Maribel Méndez Otero
Vocal

Dra. María del Rosario Pastrana Sánchez
Vocal

Dr. Gilberto Silva Ortigoza y Dr. Ernesto Espíndola Ramos
Asesor

Índice general

Resumen **IX**

1. Introducción **1**

2. Teoría Básica **3**
2.1. Ecuaciones de Maxwell y ondas electromagnéticas 3
2.1.1. Las Ecuaciones de Maxwell 3
2.1.2. Deducción de la ecuación de onda 4
2.1.3. Ecuación de Helmholtz 4
2.1.4. Ecuación paraxial de onda 5
2.2. Flujo de energía 6
2.2.1. Densidad de energía del campo eléctrico y magnético 7
2.2.2. Deducción del flujo de energía a partir de las ecuaciones de Maxwell 7
2.2.3. Momento lineal y momento angular de la luz 8
2.2.4. Flujo de energía en la aproximación geométrica 9
2.3. Formulación de Madelung-Bohm de la mecánica cuántica y analogía con la ecuación paraxial de onda 9
2.3.1. La ecuación de Schrödinger en la formulación de Madelung-Bohm 10
2.3.2. Analogía entre la ecuación paraxial de onda y la ecuación de Schrödinger . 10
2.3.3. Trayectorias asociadas con la función de onda 11
2.3.4. Curvas integrales del vector de Poynting 12

3. Curvas integrales del vector de Poynting de los haces Hermite-Gaussianos **15**
3.1. Potencial cuántico, Fuerza cuántica y las curvas integrales del vector de Poynting del haz Gaussianos 15
3.2. Deducción de los haces Hermite-Gaussianos 18
3.3. Potencial cuántico de los haces Hermite-Gaussianos 20
3.4. Curvas integrales del vector de Poynting 20
3.5. Ceros del potencial cuántico 21

Bibliografía **27**

Agradecimientos

Agradezco a mi padre, Eduardo A. A. Gochicoa Solano, por haberme inculcado el amor por la ciencia desde temprana edad.

A mi madre, Ana Fuentes Reyes, por su amor y apoyo a lo largo de esta etapa de mi vida.

A mis hermanos, Isaac y Samuel, por su constante respaldo.

A mis amigos y compañeros de carrera, que fueron parte fundamental de mi experiencia universitaria.

Finalmente, a mis asesores, el Dr. Gilberto Silva Ortigoza y el Dr. Ernesto Espíndola Ramos. Sin su paciencia y orientación este trabajo no habría sido posible.

Resumen

En este trabajo se aplica el procedimiento del potencial cuántico a los haces Hermite-Gaussianos para determinar las curvas integrales del vector de Poynting. Más específicamente, se determinan: el potencial cuántico, la fuerza cuántica, el sistema Hamiltoniano y la segunda ley de Newton que describen las propiedades de la partícula de masa $m = 1$ asociada con los haces Hermite-Gaussianos. Se muestra que las curvas integrales del vector de Poynting pertenecen a un subconjunto de soluciones de las ecuaciones de Hamilton y por lo tanto de la segunda ley de Newton correspondientes. Se encuentra que la fuerza cuántica determinada por estos haces es exactamente igual a la fuerza cuántica determinada por el haz Gaussiano. Finalmente, se muestra que los ceros del potencial cuántico para estos haces forman una superficie hiperboloide en el espacio.

Capítulo 1

Introducción

En 1952 Bohm [1, 2] introdujo una nueva formulación de la mecánica cuántica. Para ello, partió de la ecuación de Schrödinger para una partícula de masa m bajo la influencia de un potencial clásico, $U(\mathbf{r})$, luego, escribiendo la función de onda compleja en su forma polar obtuvo un sistema de dos ecuaciones acopladas que gobiernan la evolución de la amplitud, R, y la fase, S, de la función de onda. Una ecuación expresa la conservación de la probabilidad y la otra es formalmente la ecuación de Hamilton-Jacobi para una partícula de masa m bajo la influencia de un potencial dado por la suma del potencial $U(\mathbf{r})$ y un término $Q(\mathbf{r})$ el cual se le conoce con el nombre de potencial cuántico. En esta formulación cada solución a la ecuación de Schrödinger se le asocia un conjunto de trayectorias determinadas por la fase de la función de onda. Estas trayectorias resultan ser las curvas integrales de la densidad de corriente de probabilidad y son las trayectorias permitidas para la partícula cuántica de masa m.

En la referencia [3] se aplicó un procedimiento análogo a la ecuación escalar paraxial de onda en el espacio libre. Es decir, al escribir la función de onda en su forma polar se mostró que su amplitud R y su fase Φ satisfacen un sistema de dos ecuaciones acopladas que gobiernan su evolución. Una de estas ecuaciones es análoga a la conservación de probabilidad (en nuestro caso la densidad de probabilidad corresponde a la intensidad asociada con la onda de luz escalar paraxial), y la segunda formalmente es la ecuación de Hamilton-Jacobi para una partícula de masa $m = 1$ bajo la influencia del potencial cuántico correspondiente. De esta manera, se mostró que en general cualquier solución de la ecuación de onda escalar paraxial en el espacio libre determina un sistema hamiltoniano para una partícula de masa $m = 1$ con dos grados de libertad bajo la influencia de una interacción producida por su potencial cuántico asociado. Además, se encontró que las curvas integrales del vector de Poynting conforman un subconjunto de las soluciones de las ecuaciones de Hamilton y por lo tanto de la segunda ley de Newton. Se remarcó que la familia de rectas tangentes a las curvas integrales del vector de Poynting en los ceros del potencial cuántico conforman una familia de soluciones de las ecuaciones de Hamilton para una partícula de masa $m = 1$ con dos grados de libertad en el espacio libre. Estos resultados generales fueron aplicados a los haces Laguerre-Gaussianos.

En este trabajo aplicamos el procedimiento del potencial cuántico a los haces Hermite-Gaussianos. Es decir, determinamos en sistema Hamiltoniano y segunda ley de Newton de la partícula de masa $m = 1$ asociada con los haces Hermite-Gaussianos. Mostramos que las curvas integrales del vector de Poynting forman un subconjunto de las soluciones de las ecuaciones que describen la evolución de la partícula de masa $m = 1$. En particular, demostramos que las fuerzas cuánticas determinadas por el haz Gaussianos y los haces Hermite-Gaussianos son iguales. Finalmente, mostramos que los ceros del potencial cuántico determinado por los haces Hermite-Gaussianos conforman una superficie hiperboloide en el espacio. Los haces Hermite-Gaussianos forman una familia de soluciones exactas a la ecuación paraxial de onda en el espacio libre, los cuales mantienen la forma de su perfil transversal, haciéndolos estructuralmente estables y permitiendo

su aplicación en comunicación óptica[4].

La estructura del presente trabajo es la siguiente. En el capítulo 2, se introducen los fundamentos básicos para nuestro estudio. En el capítulo 3, se presentan los resultados originales de nuestro trabajo. Finalmente, se presentan las conclusiones.

Capítulo 2

Teoría Básica

En este capítulo se introducen los fundamentos necesarios para este estudio. Se presentan las ecuaciones de Maxwell y se deduce la ecuación de onda electromagnética en medios isótropos y homogéneos. Además, se introduce la ecuación de Helmholtz (ecuación de onda independiente del tiempo) y se establecen las aproximaciones que conducen a la ecuación paraxial de onda. Dicha ecuación es de particular interés, ya que el problema que se aborda en este trabajo pertenece a este régimen. Para establecer un precedente, se estudia el haz Gaussiano, el cual describe el comportamiento del láser [5, 6].

2.1. Ecuaciones de Maxwell y ondas electromagnéticas

En esta sección se obtiene la ecuación de onda electromagnética. A partir de las ecuaciones de Maxwell, considerando el caso sin fuentes, se deduce la ecuación de onda, la cual establece cómo los campos eléctrico y magnético se propagan en medios isótropos y homogéneos. A partir de esto, se introduce la ecuación de Helmholtz (ecuación de onda independiente del tiempo) y se establecen las aproximaciones que conducen a la ecuación paraxial de onda.

2.1.1. Las Ecuaciones de Maxwell

Las leyes del electromagnetismo, que establecen las interacciones entre los campos eléctrico y magnético, así como su relación con la materia, se describen mediante cuatro ecuaciones fundamentales conocidas como las ecuaciones de Maxwell. Estas ecuaciones son la ley de Gauss, la ley de Ampere, la ley de Gauss del magnetismo y la ley de Faraday [7, 8]. A continuación, se proporciona una breve descripción de cada una de estas leyes.

Ley de Gauss

La ley de Gauss describe la "tendencia de flujo" del campo eléctrico en relación con la densidad de carga. Esta ley establece que la divergencia del campo eléctrico $\mathbf{E}$ es equivalente a la densidad de carga ρ dividida por la permitividad eléctrica en el vacío $\epsilon_0 \simeq 8{,}85 \times 10^{-12} \frac{C^2}{N \cdot m^2}$:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \tag{2.1}$$

Ley de Ampere

La ley de Ampere indica que una densidad de corriente eléctrica, $\mathbf{J}$, y un campo eléctrico que varía en el tiempo, generan un campo magnético circulante:

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{J}. \tag{2.2}$$

donde $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0} \simeq 3{,}00 \times 10^8$ m/s es la velocidad de la luz y $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ N/A^2 la permeabilidad magnética en el vacío.

Ley de Gauss del Magnetismo

Es la versión correspondiente de la ley de Gauss para el campo magnético **B**. Esta ley establece que, al no haber fuentes magnéticas (es decir, no existen cargas magnéticas), la divergencia del campo magnético es nula.

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \tag{2.3}$$

Ley de Faraday

Similar a la ley de Ampere, la ley de Faraday establece que un campo magnético que varía en el tiempo produce un campo eléctrico circulante.

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0. \tag{2.4}$$

2.1.2. Deducción de la ecuación de onda

En regiones donde no hay carga o corriente eléctrica las ecuaciones de Maxwell constituyen un sistema de ecuaciones acopladas de primer orden para **E** y **B** de la forma

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \tag{2.5}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \tag{2.6}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{2.7}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \tag{2.8}$$

Estas ecuaciones se pueden desacoplar aplicando el operador rotacional a la ley de Ampere (2.6) y a la ley de Faraday (2.8).

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla \times (-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}), \qquad \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla \times (\frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}), \tag{2.9}$$

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2\mathbf{E} = -\frac{\partial(\nabla \times \mathbf{B})}{\partial t}, \qquad \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2\mathbf{B} = \frac{1}{c^2}\frac{-\partial(\nabla \times \mathbf{E})}{\partial t}, \tag{2.10}$$

$$\Rightarrow \nabla^2\mathbf{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0, \quad \nabla^2\mathbf{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0. \tag{2.11}$$

A partir del procedimiento anterior, se obtienen dos ecuaciones de onda vectoriales para los campos eléctrico **E** y magnético **B**, las cuales son ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden. Por lo tanto, en el vacío, cada componente cartesiana de **E** y **B** satisface la ecuación escalar de onda

$$\nabla^2\Psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0. \tag{2.12}$$

Es importante notar que no toda solución a la ecuación vectorial de onda es solución a las ecuaciones de Maxwell, éstas imponen condiciones extras a tales soluciones.

2.1.3. Ecuación de Helmholtz

Soluciones de particular interés son las funciones de onda armónicas de frecuencia angular ω, longitud de onda λ y constante de propagación k relacionadas de la siguiente manera [9]

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}. \tag{2.13}$$

Debido a que diferentes frecuencias dentro del rango de luz visible corresponden con diferentes colores, a estas ondas se les denomina ondas monocromáticas. Consideramos el caso donde la función de onda tiene la forma

$$\Psi(\mathbf{r},t) = \psi_h(\mathbf{r})e^{-i\omega t}, \tag{2.14}$$

donde, $\psi_h(\mathbf{r})$, es la amplitud de onda compleja independiente del tiempo; es decir, únicamente depende de $\mathbf{r}$. Al sustituir la expresión (2.14) en la ecuación de onda (2.12), un cálculo directo muestra que $\psi_h(\mathbf{r})$ debe satisfacer la siguiente ecuación:

$$\nabla^2\psi_h(\mathbf{r}) + k^2\psi_h = 0, \tag{2.15}$$

esta es la ecuación de Helmholtz o ecuación de onda independiente del tiempo.

2.1.4. Ecuación paraxial de onda

La aproximación paraxial de la ecuación de Helmholtz describe la propagación de haces altamente direccionales. Para deducirla, se toma como base ondas monocromáticas de frecuencia angular ω que se propagan predominantemente en la dirección z. Por lo tanto, la amplitud de onda ψ_h adopta la siguiente forma.

$$\psi_h(\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r})e^{ikz}, \tag{2.16}$$

donde $\psi(\mathbf{r})$ es la envolvente compleja, la cual describe el perfil transversal del haz en $\mathbf{r}$.

Sustituyendo la expresión (2.16) en la ecuación de Helmholtz (2.15) un cálculo directo reduce la ecuación a la forma

$$\nabla^2\psi(\mathbf{r}) + 2ik\frac{\partial\psi(\mathbf{r})}{\partial z} = 0. \tag{2.17}$$

Para describir haces paraxiales se considera que el campo transversal varía poco sobre z a distancias de propagación en escala de la longitud de onda λ. Debido a esto, para perfiles transversos suaves se implica la desigualdad

$$\frac{1}{k}\left|\frac{\partial\psi(\mathbf{r})}{\partial z}\right| = \frac{\lambda}{2\pi}\left|\frac{\partial\psi(\mathbf{r})}{\partial z}\right| \ll |\psi(\mathbf{r})|, \tag{2.18}$$

$$\frac{1}{k}\left|\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\psi(\mathbf{r})}{\partial z}\right)\right| = \frac{\lambda}{2\pi}\left|\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\psi(\mathbf{r})}{\partial z}\right)\right| \ll \left|\frac{\partial\psi(\mathbf{r})}{\partial z}\right|. \tag{2.19}$$

Por lo tanto, la segunda derivada parcial en z de $\psi(\mathbf{r})$ puede ser eliminada de la ec. (2.17) obteniendo como resultado que $\psi(\mathbf{r})$ satisface la ecuación paraxial de onda

$$\nabla_\perp^2\psi + 2ik\frac{\partial\psi}{\partial z} = 0, \tag{2.20}$$

donde $\nabla_\perp^2$ es el Laplaciano transverso a la dirección de propagación z.

Una solución de la ecuación paraxial de onda ampliamente conocida e importante, debido principalmente a su descripción del láser, está dada por el haz Gaussiano, el cual es descrito por la función de onda [5]

$$\psi_G(\mathbf{r}) = \frac{A_0}{w_z}e^{-\frac{x^2+y^2}{w_z^2}+ik(\frac{x^2+y^2}{2R_z}-\frac{\varphi_g}{k})}, \tag{2.21}$$

las funciones w_z, R_z, y φ_z son la cintura del haz, radio de curvatura y la fase de Gouy del haz respectivamente, y están dadas por

$$w_z = w_0\sqrt{1+\frac{4z^2}{k^2w_0^4}}, \tag{2.22}$$

$$R_z = z + \frac{k^2w_0^4}{4z}, \tag{2.23}$$

$$\varphi_g = \arctan\left(\frac{2z}{kw_0^2}\right), \tag{2.24}$$

w_0 es la cintura del haz en $z = 0$ (definido donde el haz es más estrecho) y A_0 es una constante. Por definición los frentes de onda físicos determinados por este haz están dados por todos los puntos del espacio x, y, z tales que

$$k\left(z + \frac{x^2 + y^2}{2R_z} - \frac{\varphi_g}{k}\right) = k\mathcal{C}, \tag{2.25}$$

donde $\mathcal{C}$ es una constante real que etiqueta cada uno de los frentes de onda asociados con el haz Gaussiano. De las ecs. (2.23) y (2.24) se tiene que cuando $z \to 0$, $R_z \to \infty$ y $\varphi_g \to 0$. Por lo tanto, de la ec. (2.25) se deduce que $\mathcal{C} = 0$, mientras que las coordenadas x, y pueden tomar todos sus valores permitidos. De esto se concluye que el frente de onda dado por $\mathcal{C} = 0$ corresponde al plano $z = 0$. Si denotamos a los frentes de onda por el número entero N tal que el punto de intersección entre el frente de onda y el eje z corresponde al punto $(0, 0, Nz_R)$ entonces de la ec. (2.25) se tiene que $\mathcal{C} = Nz_R - (\arctan N)/k$. Por lo tanto, de la ec. (2.25) se tiene que los frentes de onda físicos determinados por el haz Gaussiano se pueden escribir de la siguiente manera

$$\mathbf{r} = \sqrt{2R_z\left(\mathcal{C} + \frac{\varphi_g}{k} - z\right)}\,(\cos\phi\,\hat{x} + \sin\phi\,\hat{y}) + z\hat{z}, \tag{2.26}$$

donde $0 \leq \phi \leq 2\pi$. En la figura 2.1 se representa, en el plano $y = 0$, el gráfico correspondiente a la cintura del haz (rojo) dada por la ec. (2.22) y algunos frentes de onda físicos (azul) dados por la ec. (2.25). El radio de curvatura de estos frentes de onda está dado por (2.23). Además, se muestra la distancia de Rayleigh $z_R = kw_0^2/2$, parámetro que aparece en las funciones w_z, R_z y ϕ_z que caracterizan al haz Gaussiano.

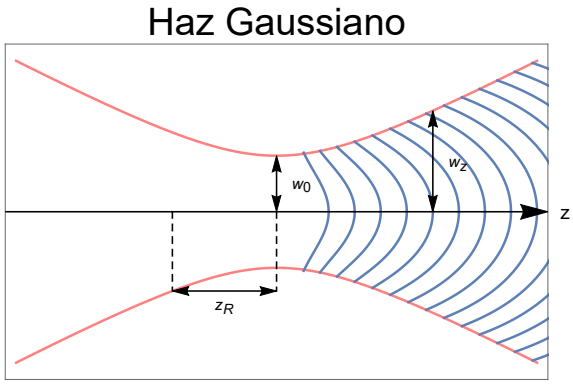

Figura 2.1: Perfil de propagación del haz Gaussiano con cintura w_0 en $z = 0$ y distancia de Rayleigh $z_R = kw_0^2/2$. Las curvas en rojo corresponden a la evolución de la cintura del haz w_z, en el plano $y = 0$, cuando el haz se propaga en dirección z. Estas dos curvas en rojo conforman las dos ramas de una hipérbola. Además, se presentan algunos los frentes de onda físicos asociados con el haz Gaussiano, con radio de curvatura R_z.

2.2. Flujo de energía

Una de las propiedades fundamentales de las ondas electromagnéticas es su capacidad para transportar energía y momento. Esta sección se enfoca en el estudio del flujo de energía asociado a los campos electromagnéticos, y aborda la deducción del teorema de Poynting y el vector de Poynting desde diversas perspectivas.

2.2.1. Densidad de energía del campo eléctrico y magnético

El trabajo necesario para ensamblar una distribución de carga y el requerido para hacer que las corrientes se muevan es [7]

$$W_{\mathrm{e}} = \frac{\epsilon_0}{2}\int E^2 d\tau, \quad W_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2\mu_0}\int B^2 d\tau, \tag{2.27}$$

respectivamente, donde $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ son los campos eléctrico y magnético resultantes respectivamente. Esto sugiere que la energía total almacenada en los campos electromagnéticos, por unidad de volumen es

$$u = \frac{1}{2}\left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2\right). \tag{2.28}$$

Una relación útil entre la magnitud de los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ para una variedad de ondas (como el caso de ondas planas monocromáticas) es $E = cB$ [10]. Usando el hecho de que $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$, se tiene que

$$u_E = u_B, \tag{2.29}$$

por lo tanto, las contribuciones eléctrica y magnética son iguales

$$u = u_E + u_B, \tag{2.30}$$

$$u = \epsilon_0 E^2, \tag{2.31}$$

o, equivalentemente

$$u = \frac{1}{\mu_0}B^2. \tag{2.32}$$

Estos resultados son de gran utilidad para establecer la relación trabajo-energía para la electrodinámica, relación expresada mediante una ecuación de continuidad. Además, permiten describir el flujo de energía asociado a las ondas electromagnéticas.

2.2.2. Deducción del flujo de energía a partir de las ecuaciones de Maxwell

Uno de los métodos para deducir el teorema de Poynting parte del trabajo que realizan los campos eléctrico y magnético sobre una carga q. De acuerdo con la ley de Lorentz, el trabajo ejercido sobre una carga q en un intervalo de tiempo dt es [7]

$$\mathbf{F}\cdot d\mathbf{l} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{v}dt. \tag{2.33}$$

En términos de la densidad de carga y corriente $q \to \rho d\tau$ y $\rho\mathbf{v} \to \mathbf{J}$. Por lo que, la razón de cambio del trabajo realizado sobre las cargas contenidas en un volumen $\mathcal{V}$ es

$$\frac{dW}{dt} = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{E}\cdot\mathbf{J}d\tau. \tag{2.34}$$

El trabajo por unidad de tiempo por unidad de volumen $\mathbf{E}\cdot\mathbf{J}$ se puede expresar únicamente en términos de los campos. Para lograr esto, se utiliza la ley de Ampere (2.2) y se elimina la corriente $\mathbf{J}$

$$\mathbf{E}\cdot\mathbf{J} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E}\cdot(\nabla\times\mathbf{B}) - \epsilon_0\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E}\cdot\nabla\times\mathbf{B} - \epsilon_0\frac{1}{2}\frac{\partial E^2}{\partial t}. \tag{2.35}$$

A continuación, se utiliza la identidad vectorial $\nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{B}) = \mathbf{B}\cdot\nabla\times\mathbf{E} - \mathbf{E}\cdot\nabla\times\mathbf{B}$, para reescribir el rotacional del campo magnético, de esta forma se obtiene que

$$\mathbf{E}\cdot\mathbf{J} = \frac{1}{\mu_0}(-\nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{B}) + \mathbf{B}\cdot\nabla\times\mathbf{E}) - \frac{1}{2}\epsilon_0\frac{\partial E^2}{\partial t}. \tag{2.36}$$

Ahora se usa la ley de Faraday (2.4) para simplificar esta última ecuación. Es decir

$$\mathbf{E}\cdot\mathbf{J} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2\right) - \frac{1}{\mu_0}\nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{B}). \tag{2.37}$$

Por lo tanto, usando este resultado y la definición de la densidad de energía (2.28) de los campos eléctrico y magnético, la ec. (2.34) toma la siguiente forma

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{V}} u d\tau - \oint_{S'}\mathbf{S}\cdot d\mathbf{a}, \tag{2.38}$$

donde

$$\mathbf{S} \equiv \frac{1}{\mu_0}(\mathbf{E}\times\mathbf{B}), \tag{2.39}$$

es el vector de Poynting, y S' es la superficie que encierra el volumen $\mathcal{V}$. La ec. (2.38) es conocida como el teorema de Poynting y se interpreta como una ecuación de conservación de energía. En cada punto del espacio, la magnitud del vector de Poynting proporciona la energía por unidad de tiempo por unidad de área transportada por el campo electromagnético y su dirección proporciona la dirección del flujo de la energía electromagnética. En regiones donde no hay carga ni corriente $\mathbf{E}\cdot\mathbf{J} = 0$ el teorema de Poynting implica que

$$\nabla\cdot\mathbf{S} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0. \tag{2.40}$$

2.2.3. Momento lineal y momento angular de la luz

Utilizando un procedimiento similar al que fue usado para obtener el teorema de Poynting, se puede mostrar que la fuerza total electromagnética, por unidad de volumen, sobre las cargas en el volumen $\mathcal{V}$ se puede escribir de la siguiente forma

$$\mathbf{f} = \nabla\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{T}} - \epsilon_0\mu_0\frac{\partial\mathbf{S}}{\partial t}, \tag{2.41}$$

donde $\overleftrightarrow{\mathbf{T}}$ es el tensor de estrés de Maxwell, con componentes cartesianas

$$T_{ij} \equiv \epsilon_0\left(E_iE_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}E^2\right) + \frac{1}{\mu_0}\left(B_iB_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}B^2\right), \tag{2.42}$$

y $\mathbf{S}$ es el vector de Poynting.

Por otra parte, de la segunda ley de Newton, sabemos que la fuerza total sobre un objeto es igual a la razón de cambio de su momento lineal; es decir

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}_{\text{mec}}}{dt}. \tag{2.43}$$

Por lo tanto, usando la ec. (2.41) se obtiene que

$$\frac{d\mathbf{p}_{mec}}{dt} = \oint_{S'}\overleftrightarrow{\mathbf{T}}\cdot d\mathbf{a} - \frac{d}{dt}\int_{\mathcal{V}}\epsilon_0\mu_0\mathbf{S}d\tau, \tag{2.44}$$

donde $\mathbf{p}_{mec}$ es el momento mecánico de las partículas en el volumen $\mathcal{V}$. El primer término es el momento por unidad de tiempo que fluye a través de la superficie S', y el segundo término proporciona el momento almacenado en los campos

$$\mathbf{p} = \int_{\mathcal{V}}\epsilon_0\mu_0\mathbf{S}d\tau. \tag{2.45}$$

Es decir, la densidad de momento lineal almacenada en los campos está dada por

$$\mathbf{g} = \epsilon_0\mu_0\mathbf{S} = \epsilon_0(\mathbf{E}\times\mathbf{B}). \tag{2.46}$$

Por lo tanto, la densidad de momento angular asociada con un campo electromagnético está dada por

$$\ell = \mathbf{r}\times\mathbf{g} = \epsilon_0[\mathbf{r}\times(\mathbf{E}\times\mathbf{B})]. \tag{2.47}$$

2.2.4. Flujo de energía en la aproximación geométrica

El campo electromagnético asociado con la propagación de luz visible esta caracterizado por oscilaciones muy altas o equivalentemente, longitudes de ondas cortas. En la aproximación geométrica se desprecia la longitud de onda ($\lambda \to 0$) o equivalentemente $k \to \infty$.

Considerando campos electromagnéticos armónicos

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}(\mathbf{r})e^{i(kS(\mathbf{r})-\omega t)}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{h}(\mathbf{r})e^{i(kS(\mathbf{r})-\omega t)}, \tag{2.48}$$

donde $\mathbf{e}$ y $\mathbf{h}$ son las amplitudes de los campos vectoriales respectivos, S en una función escalar real, y $\mathbf{H} = \mu\mathbf{B}$ en un medio lineal, homogéneo e isótropo; las ecuaciones de Maxwell (2.5)-(2.8) toman la forma

$$\nabla S \times \mathbf{h} + c\mathbf{e} = -\frac{1}{ik}\nabla \times \mathbf{h}, \tag{2.49}$$

$$\nabla S \times \mathbf{e} - \mu\mathbf{h} = -\frac{1}{ik}\nabla \times \mathbf{e}, \tag{2.50}$$

$$\mathbf{e} \cdot \nabla S = -\frac{1}{ik}(\mathbf{e} \cdot \nabla \ln \epsilon + \nabla \cdot \mathbf{e}), \tag{2.51}$$

$$\mathbf{h} \cdot \nabla S = -\frac{1}{ik}(\mathbf{h} \cdot \nabla \ln \mu + \nabla \cdot \mathbf{h}). \tag{2.52}$$

Al aplicar el límite geométrico anteriormente mencionado, las ecs. (2.49)-(2.52) se reducen al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\nabla S \times \mathbf{h} + \epsilon\mathbf{e} = 0, \tag{2.53}$$

$$\nabla S \times \mathbf{e} - \mu\mathbf{h} = 0, \tag{2.54}$$

$$\mathbf{e} \cdot \nabla S = 0, \tag{2.55}$$

$$\mathbf{h} \cdot \nabla S = 0. \tag{2.56}$$

Despejando $\mathbf{h}$ en (2.54) y haciendo una sustitución con la expresión resultante en (2.53) se obtiene

$$\frac{1}{\mu}\left[(\mathbf{e} \cdot \nabla S)\nabla S - \mathbf{e}(\nabla S)^2\right] + \epsilon\mathbf{e} = 0, \tag{2.57}$$

como se debe satisfacer la ec. (2.55) y en general se trata de soluciones tales que $\mathbf{e} \neq 0$ se obtiene una ecuación diferencial independiente de $\mathbf{e}$ y $\mathbf{h}$:

$$(\nabla S)^2 = n^2(\mathbf{r}), \tag{2.58}$$

donde $n = \sqrt{\mu\epsilon}$ es el índice de refracción del medio. Esta es la ecuación iconal y en la aproximación geométrica, $\lambda \to 0$, gobierna la evolución de los rayos de luz geométricos y frentes de onda geométricos asociados con el campo electromagnético. Por definición los frentes de onda geométricos están dados por las superficies de nivel de la función S, y los rayos de luz geométricos están definidos como las curvas integrales del vector ∇S. En este caso, la dirección del vector de Poynting está dada por $\mathbf{e} \times \mathbf{h}$; es decir, es perpendicular a $\mathbf{e}$ y $\mathbf{h}$. Por lo tanto, de las ecs. (2.55) y (2.56) se concluye que en la aproximación geométrica el vector de Poynting (2.39) es proporcional al gradiente de la función S.

2.3. Formulación de Madelung-Bohm de la mecánica cuántica y analogía con la ecuación paraxial de onda

En esta sección se introduce la formulación de la mecánica cuántica de Madelung-Bohm [1, 2], en la cual cada solución a la ecuación de Schrödinger tiene asociada un conjunto de trayectorias

determinadas por la fase de la función de onda, estas trayectorias resultan ser las curvas integrales de la densidad de corriente de probabilidad y son consideradas como caminos de partículas cuánticas. Además, se aborda la analogía entre la ecuación paraxial de onda y la ecuación de Schrödinger.

2.3.1. La ecuación de Schrödinger en la formulación de Madelung-Bohm

En la mecánica cuántica el estado de una partícula de masa m bajo la influencia de un potencial U está determinado por la función de onda obtenida al resolver la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi + U\Psi. \tag{2.59}$$

En la interpretación probabilística de la mecánica cuántica, la función de onda es una amplitud de probabilidad que representa el estado de una partícula cuántica, siendo $\mathcal{P}(\mathbf{r},t) = |\Psi(\mathbf{r},t)|^2$ la densidad de probabilidad. La función de onda compleja, Ψ, puede ser expresada en la forma

$$\Psi(\mathbf{r},t) = R(\mathbf{r},t)e^{i\mathcal{S}(\mathbf{r},t)/\hbar}, \tag{2.60}$$

donde R y $\mathcal{S}$ son funciones reales. Con la función compleja expresada de esta forma la densidad de probabilidad puede escribirse como $\mathcal{P} = R^2$. Tomando esto en cuenta y sustituyendo la función (2.60) en la ecuación de Schrödinger se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial t} + \nabla\cdot\left(\mathcal{P}\frac{\nabla\mathcal{S}}{m}\right) = 0, \tag{2.61}$$

$$\frac{\partial\mathcal{S}}{\partial t} + \frac{(\nabla\mathcal{S})^2}{2m} + U - \frac{\hbar^2}{4m}\left[\frac{\nabla^2\mathcal{P}}{\mathcal{P}} - \frac{1}{2}\frac{(\nabla\mathcal{P})^2}{P^2}\right] = 0. \tag{2.62}$$

Suponiendo que sobre cada partícula además de un potencial clásico actúa un "potencial cuántico" definido como

$$Q(\mathbf{r}) = \frac{-\hbar^2}{4m}\left[\frac{\nabla^2\mathcal{P}}{\mathcal{P}} - \frac{1}{2}\frac{(\nabla\mathcal{P})^2}{\mathcal{P}^2}\right] = \frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\nabla^2 R}{R}, \tag{2.63}$$

entonces se puede considerar a la ec. (2.62) como una ecuación de Hamilton-Jacobi para un ensamble de partículas con velocidad $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \nabla\mathcal{S}(\mathbf{r})/m$. Por lo tanto, la ec. (2.66) puede ser expresada como

$$\partial\mathcal{P}/\partial t + \nabla\cdot(\mathcal{P}\mathbf{v}) = 0, \tag{2.64}$$

donde $\mathcal{P}\mathbf{v}$ es la densidad de corriente de probabilidad; es decir, la ec. (2.64) establece la conservación de la probabilidad.

En la formulación de Madelung-Bohm a cada partícula cuántica se le asocian valores definidos de posición y momento en cada instante de tiempo. La solución a la ecuación de Hamilton-Jacobi (2.62) define un conjunto de posibles trayectorias para la partícula bajo la influencia de un potencial clásico U y un potencial cuántico Q, que puede ser obtenida de la función de Hamilton-Jacobi, $\mathbf{S}(\mathbf{r})$.

2.3.2. Analogía entre la ecuación paraxial de onda y la ecuación de Schrödinger

Ahora aplicaremos el procedimiento introducido por Bohm a la ecuación paraxial de onda, la cual describe el perfil transversal del haz paraxial (2.16). Para este propósito se escribe la amplitud de onda compleja en su forma polar; es decir

$$\psi(\mathbf{r}) = R(\mathbf{r})e^{ik\Phi(\mathbf{r})}. \tag{2.65}$$

Sustituyendo la ec. (2.65) en la ecuación paraxial de onda (2.20), un cálculo directo muestra que la evolución de las funciones R y Φ es gobernada el siguiente sistema acoplado de dos ecuaciones diferenciales parciales

$$\nabla_\perp \cdot \left(R^2 \nabla_\perp \Phi\right) + \frac{\partial R^2}{\partial z} = 0, \tag{2.66}$$

$$\frac{1}{2}\left(\nabla_\perp \Phi\right)^2 - \frac{\nabla_\perp^2 R}{2k^2 R} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \tag{2.67}$$

donde

$$Q(\mathbf{r}) \equiv -\frac{\nabla_\perp^2 R}{2k^2 R}, \tag{2.68}$$

es el potencial cuántico asociado con el haz óptico paraxial. De las ecs. (2.64) y (2.66) se observa que la coordenada z toma el lugar de la coordenada temporal t, y R^2 juega el papel de la densidad de probabilidad, entonces $\mathbf{v}_\perp = \nabla_\perp \Phi$ puede ser identificada con la velocidad de una partícula de masa $m = 1$ y densidad de corriente de probabilidad dada por

$$\mathbf{J}_\perp \equiv R^2 \nabla_\perp \Phi. \tag{2.69}$$

Por lo tanto, la ec. (2.67) es la ecuación de Hamilton-Jacobi para una partícula de masa $m = 1$ con dos grados de libertad evolucionando bajo la acción del potencial cuántico (2.68). Los puntos sobre la trayectoria de la partícula son etiquetados por la coordenada z.

2.3.3. Trayectorias asociadas con la función de onda

El Hamiltoniano determinado por la ecuación de Hamilton-Jacobi (2.67) es el siguiente:

$$H \equiv \frac{\mathbf{p}_\perp \cdot \mathbf{p}_\perp}{2} + Q(\mathbf{r}), \tag{2.70}$$

donde

$$\mathbf{p}_\perp = \nabla_\perp \Phi. \tag{2.71}$$

Esto entonces significa que las curvas integrales del vector de densidad de corriente son soluciones a las ecuaciones de Hamilton

$$\frac{d\mathbf{r}_\perp}{dz} = \mathbf{p}_\perp, \quad \frac{d\mathbf{p}_\perp}{dz} = -\nabla_\perp Q(\mathbf{r}). \tag{2.72}$$

Además, estas ecuaciones son equivalentes a la segunda ley de Newton dada por

$$\frac{d^2\mathbf{r}_\perp}{dz^2} = \mathbf{F}, \tag{2.73}$$

donde $\mathbf{F}$, denominada fuerza cuántica, está definida por

$$\mathbf{F} \equiv -\nabla_\perp Q(\mathbf{r}) = \nabla_\perp \left(\frac{\nabla_\perp^2 R}{2k^2 R}\right). \tag{2.74}$$

Por lo tanto, se concluye que cualquier solución, ψ, de la ecuación paraxial de onda en el espacio libre de la forma (2.65), tiene asociada un sistema Hamiltoniano de dos grados de libertad, con función Hamiltoniana (2.70) y momento dado por (2.71). Es decir, con toda solución a la ecuación paraxial de onda (2.20) se le asocian un potencial cuántico y una fuerza cuántica que gobiernan las curvas integrales del vector de densidad de corriente (2.69). Es decir, una vez se ha determinado una solución particular, ψ, a la ecuación paraxial de onda en el espacio libre, se le puede asociar una partícula de masa $m = 1$ con dos grados de libertad que evoluciona bajo la interacción dada

por un potencial cuántico, tal que el momento lineal de esta partícula esta dado por (2.71). Por lo tanto, el momento angular de la partícula está definido por

$$\mathbf{L}_\perp \equiv \mathbf{r}_\perp \times \mathbf{p}_\perp. \tag{2.75}$$

Usando las ecs. (2.70)-(2.75), un cálculo directo muestra que

$$\frac{d\mathbf{L}_\perp}{dz} = \mathbf{N}_\perp, \tag{2.76}$$

$$\mathbf{N}_\perp \equiv \mathbf{r}_\perp \times \mathbf{F}, \tag{2.77}$$

donde $\mathbf{N}_\perp$ es el torque experimentada por la partícula. Además, la velocidad areolar está dada por

$$\frac{d\mathbf{A}_\perp}{dz} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{r}_\perp \times \frac{d\mathbf{r}_\perp}{dz}\right) = \frac{\mathbf{L}_\perp}{2}. \tag{2.78}$$

Usando coordenadas cartesianas (x, y, z) la ecuación de Hamilton-Jacobi (2.67) se puede escribir en la siguiente forma

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2\right] + Q(x, y, z) + \frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0. \tag{2.79}$$

Es decir, la Hamiltoniana está dada por

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + Q(x, y, z), \tag{2.80}$$

y las ecuaciones de Hamilton correspondientes toman la siguiente forma

$$\frac{dx}{dz} = p_x, \qquad \frac{dp_x}{dz} = -\frac{\partial Q}{\partial x}, \tag{2.81}$$

$$\frac{dy}{dz} = p_y, \qquad \frac{dp_y}{dz} = -\frac{\partial Q}{\partial y}. \tag{2.82}$$

Finalmente, la segunda ley de Newton (2.73) está dada por

$$\frac{d^2x}{dz^2} = -\frac{\partial Q}{\partial x}, \qquad \frac{d^2y}{dz^2} = -\frac{\partial Q}{\partial y}. \tag{2.83}$$

2.3.4. Curvas integrales del vector de Poynting

El vector de Poynting determinado por la solución de la ecuación paraxial de onda en el espacio libre (2.20) puede ser escrito en la siguiente forma [11]

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) \equiv R^2 \nabla S. \tag{2.84}$$

donde $S = \Phi + z$. Por lo tanto, si los puntos de las curvas integrales del vector de Poynting son parametrizados con la coordenada z entonces estas están dadas por todos los puntos en el espacio con vector de posición

$$\mathbf{r}(z) = \mathbf{r}_\perp(z) + z\hat{z}, \tag{2.85}$$

donde $\mathbf{r}_\perp(z)$ está determinado por las ecuaciones de Hamilton (2.72). De este modo, se le puede asociar momento linear y momento angular a curvas integrales del vector de Poynting dados por

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_\perp + \hat{z}, \tag{2.86}$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_\perp + (\mathbf{r}_\perp - z\mathbf{p}_\perp) \times \hat{z}. \tag{2.87}$$

La evolución del momento angular (2.87) y la velocidad areolar determinados por las curvas integrales del vector de Poynting están dadas por

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{L}}{dz} &= \mathbf{N} = \mathbf{N}_{\perp} - z\mathbf{F} \times \hat{z}. \\ \frac{d\mathbf{A}}{dz} &= \frac{\mathbf{L}}{2}. \end{aligned} \tag{2.88}$$

En este trabajo suponemos que conocemos la solución ψ; es decir, R y Φ son conocidas, entonces el potencial cuántico, la fuerza cuántica y las trayectorias de la partícula de masa $m = 1$ determinadas por la solución a la ecuación paraxial de onda en el espacio libre son calculadas usando las ecuaciones (2.68), (2.74), (2.81) y (2.82) con la condición (2.71). Es importante remarcar que en general el potencial cuántico (2.68) es una función de las coordenadas locales (x, y, z). Por lo tanto, si el potencial cuántico no es idénticamente cero, entonces en el espacio existe una región determinada por los ceros del potencial cuántico. Dependiendo de las propiedades de la solución de la ecuación paraxial de onda, esta región estará constituida por superficies bidimensionales, curvas o puntos. Estas regiones son importantes porque en estos puntos la ecuación de Hamilton-Jacobi (2.79) se reduce a la ecuación de Hamilton-Jacobi para una partícula libre. Esto a su vez significa que se puede asociar una familia de líneas rectas con la solución de la ecuación paraxial de onda en el espacio libre. Esta familia de lineas rectas está definida por las rectas tangentes a las curvas integrales del vector de Poynting en los ceros del potencial cuántico. Por construcción, estas líneas rectas son soluciones de las ecuaciones de Hamilton para una partícula de masa $m = 1$ con dos grados de libertad en el espacio libre; es decir, estas son soluciones a las ecuaciones de Hamilton (2.81) y (2.82) con $Q = 0$. En general, esta familia de líneas rectas no coincide con los rayos de luz geométricos asociados con la onda paraxial [12], no obstante, para los haces Laguerre-Gaussianos estas líneas rectas tangentes a los ceros del potencial cuántico correspondiente coinciden con los rayos de luz geométricos [11, 3]. Por lo que, creemos que un estudio futuro sería importante determinar si esto también es aplicable en el caso de los haces Hermite-Gaussianos.

Capítulo 3

Curvas integrales del vector de Poynting de los haces Hermite-Gaussianos

En este capítulo, presentamos los cálculos originales correspondientes a nuestra investigación. Es decir, obtenemos el potencial cuántico, la fuerza cuántica, las curvas integrales del vector de Poynting y analizamos los ceros del potencial cuántico para los haces Hermite-Gaussianos. Con el propósito de ser lo más claro posible primero presentamos los resultados para el haz Gaussiano.

3.1. Potencial cuántico, Fuerza cuántica y las curvas integrales del vector de Poynting del haz Gaussianos

Una solución exacta a la ecuación paraxial de onda está dada por el haz Gaussiano (2.21), el cual tiene una amplitud R y una fase Φ dadas por

$$R(\mathbf{r}) = \frac{A_0}{w_z} e^{-\frac{\rho^2}{w_z^2}}, \quad \Phi(\mathbf{r}) = \frac{\rho^2}{2R_z} - \frac{\varphi_g}{k}, \tag{3.1}$$

donde $\rho^2 = x^2 + y^2$. Usando las ecs. (2.68), (2.74) y (3.1), un cálculo directo muestra que el potencial y la fuerza cuánticos determinados por el haz Gaussiano están dados por

$$Q_G(\mathbf{r}) = \frac{2}{k^2 w_z^2}\left(1 - \frac{\rho^2}{w_z^2}\right), \tag{3.2}$$

$$\mathbf{F}_G(\mathbf{r}) = \left(\frac{4\rho}{k^2 w_z^4}\right)\hat{\rho}. \tag{3.3}$$

De estas ecuaciones se puede observar que el potencial cuántico determinado por el haz Gaussiano es positivo para $w_z > \rho$, negativo para $w_z < \rho$, y cero en la superficie

$$\rho = w_z. \tag{3.4}$$

La fuerza cuántica correspondiente, es cero en $\rho = 0$, repulsiva para $\rho \neq 0$, y tiende a cero cuando $z \to \infty$. De las ecs. (2.81) y (2.82) se deduce que las ecuaciones de Hamilton asociadas con el haz Gaussiano están dadas por

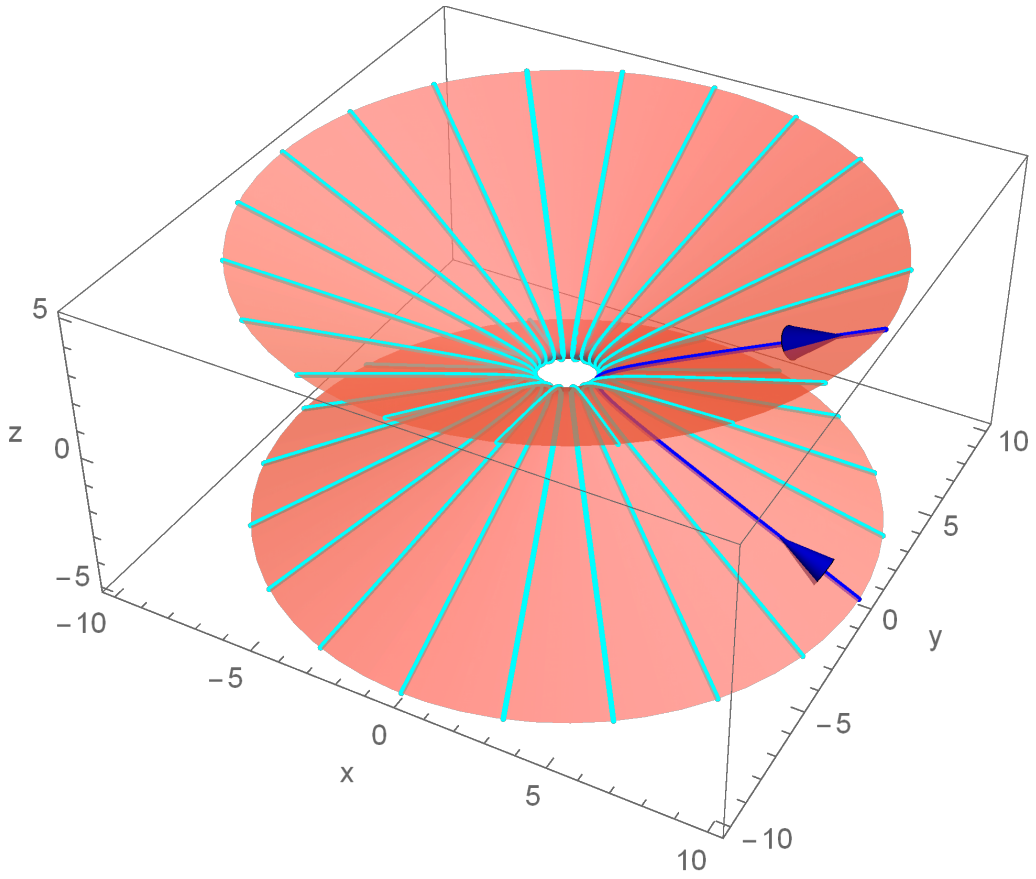

Figura 3.1: Ceros del potencial cuántico (rojo) y algunas curvas integrales del vector de Poynting (cian, azul) para el haz Gaussiano con $k = 1$ y $w_0 = 1$.

$$\frac{d\rho}{dz} = p_\rho, \quad \frac{d\phi}{dz} = \frac{p_\phi}{\rho^2}, \tag{3.5}$$

$$\frac{dp_\rho}{dz} = \frac{p_\phi^2}{\rho^3} + \frac{4\rho}{k^2 w_z^4}, \quad \frac{dp_\phi}{dz} = 0. \tag{3.6}$$

De las ecs. (2.73), (2.74) y (3.3), se encuentra que la segunda ley de Newton determinada por el haz Gaussiano se puede escribir en la siguiente forma

$$\frac{d^2\rho}{dz^2} - \rho\left(\frac{d\phi}{dz}\right)^2 = \frac{4\rho}{k^2 w_z^4}, \quad \frac{d}{dz}\left(\rho^2\frac{d\phi}{dz}\right) = 0. \tag{3.7}$$

Es importante remarcar que las ecs. (3.5) y (3.6) son las ecuaciones de Hamilton y las ecuaciones dadas en (3.7) corresponden a la segunda ley de Newton determinadas por el haz Gaussiano. La solución general a estas ecuaciones involucra cuatro constantes de integración, que es equivalente a obtener una integral completa de la ecuación de Hamilton-Jacobi correspondiente. Sin embargo, las soluciones a estas ecuaciones determinadas por la fase del haz Gaussiano Φ dada por la ec. (3.1) son aquellas que satisfacen la condición (2.71), la cual para el caso del haz Gaussiano es equivalente a

$$p_\rho(z) = \frac{\rho}{R_z}, \quad p_\phi(z) = 0. \tag{3.8}$$

Usando este resultado en las ecuaciones de Hamilton (3.5) y (3.6) un cálculo directo muestra que

$$\rho(z) = \rho_0 \sqrt{\frac{4z^2 + k^2 w_0^4}{4z_0^2 + k^2 w_0^4}}, \quad \phi(z) = \phi_0, \tag{3.9}$$

donde ρ_0 y ϕ_0 son valores de ρ y ϕ en $z = z_0$ respectivamente. Por lo tanto, el vector de posición de los puntos sobre las trayectorias y el momento lineal de la partícula de masa $m = 1$ determinados por el haz Gaussiano se pueden escribir en la siguiente forma

$$\mathbf{r}_\perp = \rho \hat{\rho}_0, \tag{3.10}$$

$$\mathbf{p}_\perp = \frac{\rho \hat{\rho}_0}{R_z}, \tag{3.11}$$

donde $\hat{\rho}_0 = \cos\phi_0 \hat{x} + \operatorname{sen}\phi_0 \hat{y}$. Observe que el momento angular $\mathbf{L}_\perp = 0$ y la velocidad areolar $d\mathbf{A}_\perp/dz = 0$. Por otro lado, las propiedades mecánicas asociadas con las curvas integrales del vector de Poynting del haz Gaussiano están dadas por

$$\mathbf{r} = \rho \hat{\rho}_0 + z\hat{z}, , \tag{3.12}$$

$$\mathbf{p} = \frac{\rho \hat{\rho}_0}{R_z} + \hat{z}, \tag{3.13}$$

$$\mathbf{L} = \rho \left(\frac{z}{R_z} - 1 \right) \hat{\phi}_0, \tag{3.14}$$

donde $\hat{\phi}_0 = -\operatorname{sen}\phi_0 \hat{x} + \cos\phi_0 \hat{y}$. Además,

$$\frac{d\mathbf{L}}{dz} = \frac{k^2 w_0^4 \rho}{4 z R_z^2} \hat{\phi}_0, \tag{3.15}$$

$$\frac{d\mathbf{A}}{dz} = \frac{\mathbf{L}}{2}. \tag{3.16}$$

De la ec. (3.12) se obtiene que las curvas integrales del vector de Poynting del haz Gaussiano en el espacio de configuraciones extendido con coordenadas locales (ρ, ϕ, z) pueden ser escritas de la siguiente forma

$$\mathbf{r}\left(\rho_0, \phi_0, z\right) = \rho_0 \sqrt{\frac{4z^2 + k^2 w_0^4}{4z_0^2 + k^2 w_0^4}} \left(\cos\phi_0 \hat{x} + \sin\phi_0 \hat{y}\right) + z\hat{z}. \tag{3.17}$$

Esto significa que las trayectorias en el espacio de configuraciones extendido para $\rho_0 \neq 0$ se encuentran sobre hiperboloides de una hoja dados por

$$\left(\frac{4z_0^2}{k^2 w_0^4} + 1 \right) \left(\frac{x^2 + y^2}{\rho_0^2} \right) - \left(\frac{2z}{k w_0^2} \right)^2 = 1, \tag{3.18}$$

para $\rho_0 = 0$ se reduce al eje z. En la ec. (3.18) los parámetros que caracterizan la familia de hiperboloides son ρ_0 y z_0. Los ceros del potencial cuántico del haz Gaussiano dados por (3.4) corresponden al hiperboloide tal que $\rho_0^2 = w_0^2 \left(1 + 4z_0^2/k^2 w_0^4\right)$. Es decir, los ceros del potencial cuántico determinado por el haz Gaussiano están dados por todos los puntos en el espacio con coordenadas (x, y, z) tal que

$$\left(\frac{x^2 + y^2}{w_0^2} \right) - \left(\frac{2z}{k w_0^2} \right)^2 = 1. \tag{3.19}$$

En la figura 3.1 se presenta los ceros del potencial cuántico (Rojo) dados por la ec. (3.4) y las curvas integrales del vector de Poynting (Cian-Azul) dadas por la ec. (3.17) para el haz Gaussiano con $k = 1$ y $w_0 = 1$.

3.2. Deducción de los haces Hermite-Gaussianos

La expresión del haz Gaussiano representa únicamente la solución de menor orden dentro de una familia de soluciones a la ecuación paraxial de onda en el espacio libre. Una de las formas que puede tomar la familia de soluciones es la de los haces Hermite-Gaussianos, los cuales se derivan en esta sección.

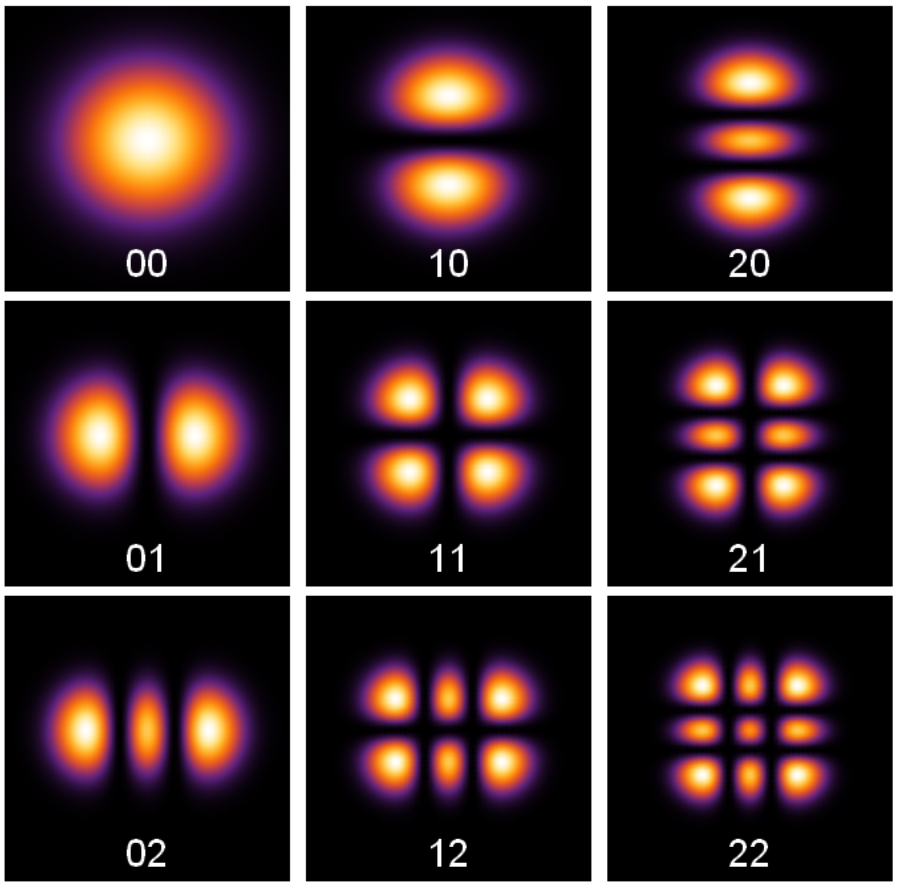

Figura 3.2: *Patrones de intensidad de los haces Hermite-Gaussianos con* $m, n = [0, 2]$

Los haces Hermite-Gaussianos son soluciones de la ecuación paraxial de onda en coordenadas rectangulares. Para deducir estas soluciones se propone una solución de prueba de la siguiente forma

$$\psi_{mn}(x, y, z) = u_m(x, z)u_n(y, z). \tag{3.20}$$

Substituyendo la ec. (3.20) en la ecuación paraxial de onda en el vacío (2.20) se obtiene que

$$u_n \left(\frac{\partial^2 u_m}{\partial x^2} + 2ik\frac{\partial u_m}{\partial z} \right) + u_m \left(\frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2} + 2ik\frac{\partial u_n}{\partial z} \right) = 0. \tag{3.21}$$

Los haces Hermite-Gaussianos se obtienen al poner la condición de que u_m y u_n sean tales que

$$\frac{\partial^2 u_m}{\partial x^2} + 2ik\frac{\partial u_m}{\partial z} = 0 \tag{3.22}$$

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2} + 2ik\frac{\partial u_n}{\partial z} = 0. \tag{3.23}$$

A continuación, se busca una solución de la ec. (3.22) de la siguiente forma

$$u_m(x,z) = \mathcal{H}_m\left(\frac{\sqrt{2}x}{w_z}\right)\psi_G(x,z)e^{i\phi(z)}, \tag{3.24}$$

donde w_z es la función de la cintura del haz (2.22), $\psi_G(x,z)$ es la solución del haz Gaussiano que depende transversalmente únicamente de x, $\mathcal{H}$ y ϕ son dos funciones que se determinan substituyendo la ec (3.24) en la ec. (3.22). Un cálculo directo muestra que

$$\frac{\partial^2\mathcal{H}\left(\frac{\sqrt{2}x}{w_z}\right)}{\partial x^2} + \frac{2}{\psi_G}\frac{\partial\psi_G}{\partial x}\frac{\partial\mathcal{H}\left(\frac{\sqrt{2}x}{w_z}\right)}{\partial x} + 2ik\frac{\partial\mathcal{H}\left(\frac{\sqrt{2}x}{w_z}\right)}{\partial z} - 2k\mathcal{H}\left(\frac{\sqrt{2}x}{w_z}\right)\frac{d\phi(z)}{dz} = 0. \tag{3.25}$$

Aplicando un cambio de variable de la forma

$$\chi = \frac{\sqrt{2}x}{w_z}, \quad \xi = z, \tag{3.26}$$

tal que para cualquier función $u(\chi(x,z),\xi(x,z))$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\sqrt{2}}{w_z}\frac{\partial u}{\partial\chi}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial\xi} - \frac{\chi}{w_z}\frac{dw_z}{dz}\frac{\partial u}{\partial\chi}, \tag{3.27}$$

la ec. (3.25) toma la siguiente forma

$$\frac{1}{w_z^2}\frac{d^2\mathcal{H}(\chi)}{d\chi^2} + \frac{1}{w_z}\frac{d\mathcal{H}(\chi)}{d\chi}\left(\frac{2}{w_z\psi_G}\frac{\partial\psi_G}{\partial\chi} - ik\chi\frac{dw_z}{dz}\right) - k\mathcal{H}(\chi)\frac{d\phi(\xi)}{d\xi} = 0, \tag{3.28}$$

desarrollando $\frac{\partial\psi_G}{\partial\chi}$, un calculo directo muestra que la ec. (3.28) se puede escribir en la siguiente forma

$$\frac{1}{\mathcal{H}(\chi)}\left(\frac{d^2\mathcal{H}}{d\chi^2} - 2\chi\frac{d\mathcal{H}}{d\chi}\right) = kw_z^2\frac{d\phi(\xi)}{d\xi}, \tag{3.29}$$

Para soluciones no triviales de la ecuación diferencial, ambos lados de la ecuación deben iguales a una constante arbitraria $-2m$, resultando en dos ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{d^2\mathcal{H}}{d\chi^2} - 2\chi\frac{d\mathcal{H}}{d\chi} + 2m\mathcal{H}(\chi) = 0, \tag{3.30}$$

$$\frac{d\phi(\xi)}{d\xi} + 2\frac{m}{kw_z^2} = 0. \tag{3.31}$$

La ec. (3.30) es la ecuación de Hermite, y una de sus soluciones son los denominados polinomios de Hermite [13]. Además, encontramos que la solución de la ec. (3.31) dada por

$$\phi(z) = -m\varphi_g, \tag{3.32}$$

donde φ_g es la fase de Gouy del haz Gaussiano (2.24). Por lo tanto, se obtiene que una solución a la ecuación paraxial de onda en el vacío, en coordenadas rectangulares, se puede escribir en la siguiente forma

$$\psi(\mathbf{r}) = A_{mn}H_m\left(\frac{\sqrt{2}x}{w_z}\right)H_n\left(\frac{\sqrt{2}y}{w_z}\right)\psi_G(x,y,z)e^{-i(m+n)\varphi_g}, \tag{3.33}$$

donde A_{mn} son constantes dadas por

$$A_{nm} = \sqrt{\frac{2}{\pi 2^{m+n}m!n!}}. \tag{3.34}$$

$H_m(u)$ es el polinomio de Hermite de orden m con argumento u y ψ_G es el haz Gaussiano (2.21). A la solución (3.33) se le conoce como haz Hermite-Gaussiano. En la figura 3.2 se muestran patrones de intensidad, en el plano $z = 0$, para algunos modos m y n de los haces Hermite-Gaussianos. El perfil de intensidad del haz Gaussiano corresponde al caso $m = 0$ y $n = 0$ [14].

3.3. Potencial cuántico de los haces Hermite-Gaussianos

De las ecs. (2.21) y (3.33) se encuentra que la amplitud y la fase de los haces Hermite-Gaussianos están dadas por

$$R(\mathbf{r}) = \frac{A_{mn}}{w_z} H_m\left(\frac{\sqrt{2}x}{w_z}\right) H_n\left(\frac{\sqrt{2}y}{w_z}\right) e^{-\left(\frac{x^2+y^2}{w_z^2}\right)}, \tag{3.35}$$

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{x^2+y^2}{2R_z} - (m+n+1)\frac{\varphi_g}{k}, \tag{3.36}$$

donde m y n son los índices de los modos de los haces Hermite-Gaussianos, H_m y H_n son los polinomios de Hermite de orden m y n respectivamente. Las funciones w_z, R_z, φ_g son la cintura del haz, radio de curvatura, y fase de Gouy del haz fundamental, respectivamente, y están dados por las ecs. (2.22)-(2.24). El haz o fotón queda completamente determinado por los cuatro parámetros n, m, k y w_0. Usando las ecs. (2.68), (2.74) y (3.35), un cálculo directo muestra que el potencial y la fuerza cuánticos asociados con cada haz Hermite-Gaussiano se pueden escribir en la siguiente forma

$$Q_{HG}(\mathbf{r}) = \frac{2}{w_z^2 k^2}\left(m+n+1-\frac{x^2+y^2}{w_z^2}\right), \tag{3.37}$$

$$\mathbf{F}_{HG}(\mathbf{r}) = \frac{4}{w_z^4 k^2}\left(x\hat{x}+y\hat{y}\right). \tag{3.38}$$

Es importante destacar que la fuerza cuántica asociada a cada haz Hermite-Gaussiano es idéntica a la fuerza de un haz Gaussiano (3.3) expresado en coordenadas rectangulares.

3.4. Curvas integrales del vector de Poynting

A partir de las ecs. (2.81), (2.82) y (3.37), se obtiene que las ecuaciones de Hamilton correspondientes al haz Hermite-Gaussiano, están dadas por:

$$\frac{dx}{dz} = p_x, \qquad \frac{dy}{dz} = p_y, \tag{3.39}$$

$$\frac{dp_x}{dz} = \frac{4x}{w_z^4 k^2}, \qquad \frac{dp_y}{dz} = \frac{4y}{w_z^4 k^2}. \tag{3.40}$$

Usando las ecs. (2.73), (2.74) y (3.38), un cálculo directo muestra que la segunda ley de Newton determinada por los haces Hermite-Gaussianos está dada por

$$\frac{d^2x}{dz^2} = \frac{4x}{w_z^4 k^2}, \quad \frac{d^2y}{dz^2} = \frac{4y}{w_z^4 k^2}. \tag{3.41}$$

Entre todas las soluciones a las ecuaciones de Hamilton (3.39), (3.40) y a la segunda ley de Newton (3.41) están aquellas determinadas por los haces Hermite-Gaussianos, las cuales satisfacen la condición (2.71). Estas soluciones son tales que

$$p_x(z) = \frac{x}{R_z}, \quad p_y(z) = \frac{y}{R_z}. \tag{3.42}$$

Por lo tanto, un cálculo directo muestra que las soluciones a las ecs. (3.39) y (3.40) determinadas por lo haces Hermite-Gaussianos están dadas por las ecs. (3.42) con

$$x(z) = x_0\sqrt{\frac{4z^2 + k^2w_0^4}{4z_0^2 + k^2w_0^4}}, \tag{3.43}$$

$$y(z) = y_0\sqrt{\frac{4z^2 + k^2w_0^4}{4z_0^2 + k^2w_0^4}}, \tag{3.44}$$

donde x_0, y_0 son los valores de $x(z)$ y $y(z)$ en $z = z_0$. Las soluciones (3.42)-(3.44) son las mismas que las encontradas para el haz Gaussiano representadas en coordenadas rectangulares con $x_0 = \rho_0 \cos\phi_0$ y $y_0 = \rho_0 \operatorname{sen}\phi_0$. Por lo tanto: la trayectoria, el momento linear y el momento angular de la partícula determinada por el haz Hermite-Gaussiano están dados por

$$\mathbf{r}_\perp = x\hat{x} + y\hat{y}, \tag{3.45}$$

$$\mathbf{p}_\perp = \frac{x\hat{x}}{R_z} + \frac{y\hat{y}}{R_z}, \tag{3.46}$$

$$\mathbf{L}_\perp = 0. \tag{3.47}$$

Por otro lado, las propiedades mecánicas asociadas con las curvas integrales del vector de Poynting para los haces Hermite-Gaussianos están dadas por

$$\mathbf{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{k}, \tag{3.48}$$

$$\mathbf{p} = \frac{x\hat{x}}{R_z} + \frac{y\hat{y}}{R_z} + \hat{k}, \tag{3.49}$$

$$\mathbf{L} = \left(1 - \frac{z}{R_z}\right)(y\hat{x} - x\hat{y}). \tag{3.50}$$

Por lo tanto, la evolución del momento angular está dada por

$$\frac{d\mathbf{L}}{dz} = -\frac{k^2w_0^4}{4zR_z^2}(y\hat{x} - x\hat{y}). \tag{3.51}$$

Es importante destacar que los resultados anteriores son equivalentes a los del haz Gaussiano. Por lo tanto, las curvas integrales del vector de Poynting para el haz Hermite-Gaussiano en el espacio de configuraciones extendido pueden ser expresadas por la ec. (3.17). Estas curvas se encuentran sobre hiperboloides de una hoja, definidas por la ec. (3.18).

3.5. Ceros del potencial cuántico

Si n y m son igual cero, el potencial cuántico del haz Hermite-Gaussiano se reduce al del haz Gaussiano dado por (3.2). Para $m \neq 0$ y $n \neq 0$ el potencial cuántico puede ser reescrito de la siguiente forma

$$Q_{HG}(\mathbf{r}) = \frac{2}{w_z^4k^2}\left(a^2 - \rho^2\right), \tag{3.52}$$

$$a^2 = (m + n + 1)w_z^2, \tag{3.53}$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2. \tag{3.54}$$

Entonces para $0 \leq \rho < a$ el potencial es positivo, para $\rho > a$ el potencial es negativo, y es cero en la superficie $\rho = a$; es decir

$$x^2 + y^2 = (m + n + 1)w_z^2. \tag{3.55}$$

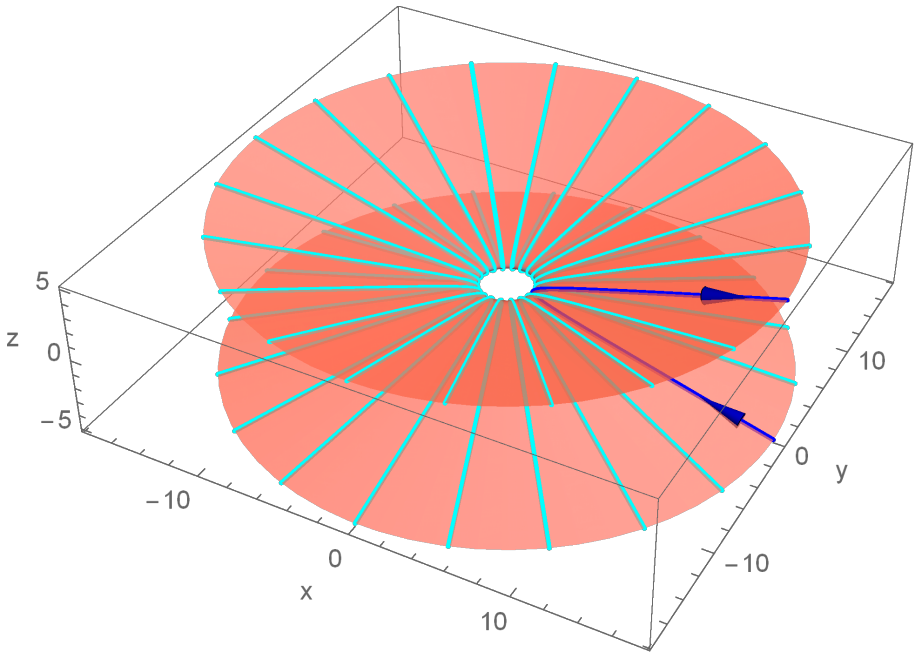

Figura 3.3: Ceros del potencial cuántico (rojo) y algunas curvas integrales del vector de Poynting (cian, azul) para el haz Hermite-Gaussiano con $m = 1$, $n = 1$, $k = 1$ y $w_0 = 1$

Los ceros del potencial cuántico para el haz Hermite-Gaussiano dados por la ec. (3.55) corresponden al hiperboloide (3.18) tal que $\rho_0^2 = (m+n+1)w_0^2(1+4z_0^2/k^2w_0^4)$. Esto quiere decir que, los ceros del potencial cuántico determinados por el haz Hermite-Gaussiano están dados por todos los puntos en el espacio con coordenadas (x, y, z) tales que

$$\left(\frac{x^2+y^2}{w_0^2(m+n+1)}\right) - \left(\frac{2z}{kw_0^2}\right)^2 = 1. \tag{3.56}$$

En la figura 3.3 se presentan los ceros del potencial cuántico (rojo) dados por la ec. (3.55) o más explícitamente por la ec. (3.56) y algunas curvas integrales del vector de Poynting (cian-azul) dadas por la ec. (3.17) para el haz Hermite-Gaussiano con $m = 1$, $n = 1$ $k = 1$ y $w_0 = 1$.

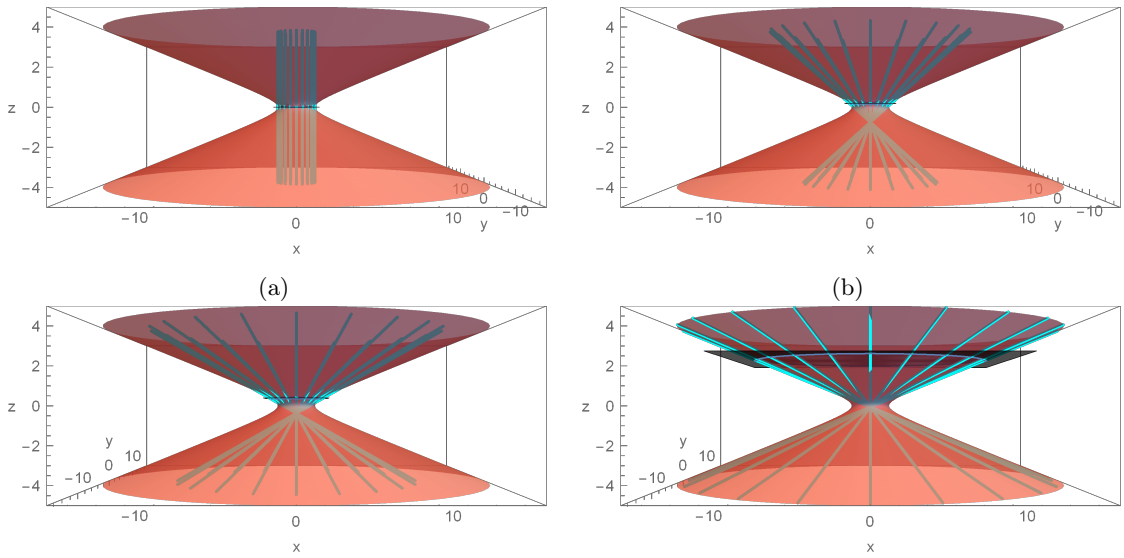

Figura 3.4: Trayectorias rectas (cian) asociadas a los ceros del potencial de los haces Hermite-Gaussianos en: a) $z = 0$, b) $z = z_R$, c) $z = z_R/2$, y $z > z_R$, donde z_R es la distancia de Rayleigh. En rojo se muestra la evolución del ancho del haz que se propaga en el eje z, la cual forma una superficie hiperboloide con ancho mínimo en $z = 0$. Es importante destacar que en la figura a), los rayos no convergen. Sin embargo, a medida que aumenta el valor de z, su punto "focal" proviene desde $z \to \infty$ y tiende hacia $z = 0$ (punto focal o cáustica de un haz Gaussiano). Además, las trayectorias rectas se alinean cada vez más con el comportamiento asintótico del hiperboloide.

Conclusión

En este trabajo hemos aplicado el procedimiento del potencial cuántico, introducido por Bohm en el contexto de la mecánica cuántica, a los haces Hermite-Gaussianos. Es decir, para estos haces hemos determinado: el potencial cuántico, la fuerza cuántica, las ecuaciones de Hamilton y las curvas integrales el vector de Poynting. Hemos demostrado que la partícula de masa $m = 1$ asociada con los haces Hermite-Gaussianos experimenta una fuerza cuántica repulsiva, exactamente igual que la fuerza determinada por el haz Gaussiano. Hemos demostrado que las curvas intregrales del vector de Poynting conforman un subconjunto de las soluciones de las ecuaciones de Hamilton y de la segunda ley de Newton correspondientes. Además, encontramos que los ceros del potencial cuántico determinado por estos haces forman una superficie hiperboloide en el espacio. Finalmente, remarcamos que las propiedades de los haces Hermite-Gaussianos, desde el punto de vista del potencial cuántico, son muy parecidas a las propiedades del haz Gaussiano. Creemos que sería interesante determinar en un trabajo a futuro los rayos de luz geométricos, los frentes de onda geométricos y la región cáustica de los haces Hermite-Gaussianos.

Bibliografía

[1] David Bohm. A suggested interpretation of the quantum theory in terms of "hidden"variables. i. *Phys. Rev.*, 85:166–179, Jan 1952.

[2] David Bohm. A suggested interpretation of the quantum theory in terms of "hidden"variables. ii. *Phys. Rev.*, 85:180–193, Jan 1952.

[3] Gilberto Silva-Ortigoza, Jessica Ortiz-Flores, Citlalli Teresa Sosa-Sánchez, and Ramón Silva-Ortigoza. Mechanical properties of the particle associated with the laguerre gauss beams via the quantum potential point of view. *J. Opt. Soc. Am. B*, 40(1):215–223, Jan 2023.

[4] Mitchell A Cox, Luthando Maqondo, Ravin Kara, Giovanni Milione, Ling Cheng, and Andrew Forbes. The resilience of Hermite and Laguerre-Gaussian modes in turbulence. *Journal of Lightwave Technology*, 37(16):3911–3917, 2019.

[5] A. E. Siegman. *Lasers*. University Science Books, 1986.

[6] Javier Alda. Laser and Gaussian beam propagation and transformation. *Encyclopedia of Optical and Photonic Engineering, Second Edition*, page 1–15, 2015.

[7] David J. Griffiths. *Introduction to electrodynamics*. Pearson, 4th edition, 2014.

[8] Rafael G González-Acuña and Héctor A Chaparro-Romo. The Maxwell equations. *Stigmatic Optics*, 2020.

[9] Max Born and Emil Wolf. *Principles of optics: Electromagnetic theory of progagation, interference and diffraction of light*. Cambridge University Press, 7th edition, 1999.

[10] Eugene Hecht. *Optics*. Pearson, 2017.

[11] M. V. Berry and K. T. McDonald. Exact and geometrical optics energy trajectories in twisted beams. *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics*, 10(3):035005, 2008.

[12] Ernesto Espíndola-Ramos, Gilberto Silva-Ortigoza, Citlalli Teresa Sosa-Sánchez, Israel Julián-Macías, Adriana González-Juárez, Omar de Cabrera-Rosas, Paula Ortega-Vidals, Carolina Rickenstorff-Parrao, and Ramón Silva-Ortigoza. Classical characterization of quantum waves: Comparison between the caustic and the zeros of the Madelung–Bohm potential. *Journal of the Optical Society of America A*, 38(3):303, 2021.

[13] George B. Arfken and Hans-Jurgen Weber. *Mathematical methods for physicists*. Elsevier Acad. Press, 6th edition, 2005.

[14] Antoine Weis. Wolfram demonstrations project, Nov 2008.