



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

SOSTENIBILIDAD DEL PROCESO DE RESERVA ÓPTIMO CON PAGO DE DIVIDENDOS

Tesis presentada para la obtención del grado de
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS APLICADAS

por

ELÍAS RAFAEL MANZO ROMERO

Asesorado por

DR. REI ISRAEL ORTEGA GUTIÉRREZ (FCFM, BUAP)

DR. RAÚL MONTES DE OCA MACHORRO (DM UAM-I)

Título: SOSTENIBILIDAD DEL PROCESO DE RESERVA ÓPTIMO CON PAGO DE DIVIDENDOS

Estudiante: ELÍAS RAFAEL MANZO ROMERO

COMITÉ

Dr. Hugo Adán Cruz Suárez
Presidente

Dr. Ruy Alberto López Ríos
Secretario

Dr. José Juan Castro Alva
Vocal

Dr. Rei Israel Ortega Gutiérrez (FCFM, BUAP)
Asesor

Dr. Raúl Montes de Oca Machorro (DM UAM-I)
Asesor

Dedicado a mi mamá y a mi abuelita.

Agradecimientos

A mi mamá, por haber luchado para que yo llegara hasta este momento y haberme enseñado que nada es imposible por más difíciles que sean las cosas. Por siempre haberme tenido paciencia y apoyarme en las decisiones que tomaba en mi carrera.

A mis tíos, Arcelia y Hugo, por permitirme vivir con ellos para poder estudiar fuera de mi ciudad de origen, dándome mejores oportunidades. También a mis primos por ser ejemplo para mí, desde más joven, de lo que es superarse profesionalmente.

A Andrea, por ser mi compañera de vida, darme su apoyo y cariño, ser impulso para salir adelante y haber compartido juntos momentos tan bonitos.

A todos mis amigos y compañeros que conocí durante la licenciatura, que no solo me apoyaron académicamente, sino que compartimos buenos momentos juntos.

A mi amigo Iván Fougerat, por haberme enseñado a programar y sembrar en mi la curiosidad por la ciencia de datos.

Al maestro Manuel Ibarra por haber sentado los fundamentos de la carrera, habernos enseñado lo difícil que iba a ser el camino, pero lo más importante, el amor por las matemáticas.

A mis asesores, el Dr. Rei Israel Ortega y el Dr. Raúl Montes de Oca por guiarme en la elaboración de esta tesis y darme sus consejos.

A los miembros del jurado calificador de mi examen profesional el Dr. Hugo Adán Cruz, Dr. Ruy Alberto López y el Dr. José Juan Castro por revisar mi trabajo y hacer sugerencias para mejorarlo.

Índice general

Introducción	VII
1. Preliminares	1
2. Procesos de Reserva Óptimos	8
2.1. Proceso de reserva a tiempo discreto	8
2.2. Prima óptima descontada	11
2.3. Sostenibilidad del proceso de reserva	14
3. Casos de Estudio	16
3.1. Reclamaciones TSA	16
3.1.1. Análisis de los datos	16
3.1.2. Cálculo de la sostenibilidad del proceso de reserva	22
3.1.3. Solución del proceso de decisión de Markov	23
3.2. Reclamaciones Automovilísticas	24
3.2.1. Análisis de los datos	24
3.2.2. Cálculo de la sostenibilidad del proceso de reserva	30
3.2.3. Solución al proceso de decisión de Markov	32
4. Codificación en Python	34
4.1. Reclamaciones TSA	34
4.1.1. Análisis de Datos	34
4.1.2. Cálculo de la sostenibilidad del proceso de reserva	39
4.2. Reclamaciones Automovilísticas	40
4.2.1. Análisis de datos	40
4.2.2. Cálculo de la sostenibilidad del proceso de reserva	45
5. Conclusiones	48
A. Procesos de control de Markov a tiempo discreto	50
A.1. Problemas de costo descontado con horizonte infinito	50
A.2. Problemas de costos medios a largo plazo	54
B. Distribución Gamma y pruebas de hipótesis	57
B.1. Distribución Gamma	57
B.2. Prueba de hipótesis para la media	59
B.3. Prueba de hipótesis de Kolmogorov-Smirnov	59
Bibliografía	61

Índice de figuras

1.1. Representación simbólica del modelo ejemplo	5
3.1. Información general de la base de datos de TSA	17
3.2. Histograma del tipo de reclamo 'Passenger Theft'.	18
3.3. Histograma y distribución de las reclamaciones 'Passenger Property Loss'.	19
3.4. Histograma de ξ de las reclamaciones TSA	19
3.5. Nuevo histograma de ξ de las reclamaciones TSA	20
3.6. Histograma y ajuste de distribución gamma ξ para 'Passenger Property Loss'	21
3.7. Una simulación del proceso de reserva de TSA con $u = 3000$	23
3.8. Descripción general de la base de datos	25
3.9. Histograma de las reclamaciones automovilísticas	25
3.10. Histograma de ξ de las reclamaciones automovilísticas	26
3.11. Histograma de las reclamaciones automovilísticas	26
3.12. Histograma de valores de $\xi \leq 15000$	27
3.13. Histograma de valores de $\xi > 15000$	27
3.14. Ajuste de distribución gamma para los valores de $\xi \leq 15000$	28
3.15. Ajuste de distribución gamma de los valores de $\xi > 15000$	29
3.16. Ajuste de distribución mixta a las reclamaciones automovilísticas	30
3.17. Una simulación del proceso de reserva de reclamaciones automovilísticas con $u = 60000$	32

Introducción

Para el proceso de reserva de una compañía aseguradora, es crucial establecer una barrera de capital para controlar el nivel de reservas acumuladas. Al superar este umbral, se suelen distribuir dividendos, lo que beneficia a los inversionistas y aumenta su interés en seguir aportando capital para el crecimiento de la empresa. Alternativamente, el excedente también puede reinvertirse para mejorar servicios, instalaciones, equipos para los empleados, entre otros. Este concepto es especialmente relevante en el modelo de reserva de Crámer-Lundberg (véase [9], [21]), ya que, si los ingresos por primas superan el promedio de los montos de las reclamaciones, es casi seguro que el proceso de reserva tenderá a acumular capital en exceso, creciendo hacia el infinito conforme avanza el tiempo.

En la práctica, la acumulación infinita de reservas plantea varios riesgos, entre los cuales destacan: 1) Ineficiencia de capital, ya que podría indicar que los recursos no se están utilizando de manera óptima; 2) Propensión a decisiones arriesgadas, lo cual puede llevar a asumir compromisos que pongan en peligro la estabilidad financiera a largo plazo; y 3) Reducción del atractivo para los accionistas, debido a que no se obtiene el rendimiento, ni el crecimiento esperados en sus inversiones.

Así, el pago de dividendos se presenta como una estrategia para controlar el crecimiento ilimitado del capital. Una política posible es establecer la estrategia de dividendos que maximice el valor esperado de la función de utilidad mediante técnicas de control. Este enfoque ha sido estudiado en tiempo discreto por [7, 11, 17], donde los autores aplicaron teoría de control óptimo en el contexto de compañías aseguradoras. En particular, Martin-Löf ([17]) estableció las técnicas de control a tiempo discreto mediante la teoría de procesos de control de Markov descontados.

En el caso a tiempo continuo, existen métodos de control óptimo diseñados para minimizar o maximizar un criterio de rendimiento, entre los más comunes se encuentran: el Control Lineal Cuadrático (LQR), que minimiza un costo cuadrático en función del estado y la entrada del sistema; y el Control de Hamilton-Jacobi-Bellman, basado en la solución de una ecuación diferencial parcial.

Algunos métodos para la distribución de dividendos han sido propuestos (véase [3, 12, 18]). En lo que nos vamos a concentrar es en el plan siguiente: dado una barrera de capital $Z > 0$, si la reserva la excede, entonces los dividendos se distribuyen o se reinvierte el capital. Se propondrá un modelo de reserva con una barrera fija, modelado como un proceso de decisión de Markov donde los controles admisibles pertenecen a un conjunto compacto. Los límites de este conjunto dependen del Principio de Valor Esperado. Además, la distribución del monto total de reclamos por intervalo de tiempo, representa un proceso compuesto que se supone general, ya que solamente se requiere para su densidad ser continua casi en todas partes.

Los procesos de decisión de Markov a tiempo discreto son aquellos que se utilizan para modelar problemas de toma de decisiones secuenciales en situaciones de incertidumbre (véase [14]). En general, un proceso de decisión de Markov se compone de los siguiente: en un momento particular t se observa el sistema y, dependiendo del estado actual, un control es aplicado, este control lleva a pagar un costo y por una ley de transición dada, el sistema llega a un nuevo estado.

El Proceso de Decisión de Markov se ve significativamente influido por la aplicación de controles, donde una sucesión de estos controles se denomina política. Cuando una política logra minimizar una función de costo, que en este caso penaliza el pago de dividendos en exceso o en momentos inoportunos, se considera una política óptima. Determinar esta política óptima es esencial para alcanzar un equilibrio entre la rentabilidad para los accionistas y la sostenibilidad financiera de la empresa. Para identificar esta política óptima, se emplean técnicas de programación dinámica, que permiten descomponer el problema en etapas sucesivas y calcular de manera eficiente las decisiones que maximizan el valor esperado de las reservas en cada etapa. Este enfoque asegura que cada decisión esté alineada con la meta de largo plazo, ya sea acumulación de capital controlada o distribución estratégica de dividendos.

Este trabajo presenta en el primer capítulo conceptos como la definición de Kéneles Estocásticos, el Proceso de Decisión de Markov y cómo es el cálculo de primas óptimas, lo que permitirán entender la construcción del Proceso de Reserva en el Capítulo 2. Aquí mostramos de manera general la definición del proceso de reseva, el cual induce a un proceso de decisión de Markov, que nos ayudará a determinar el valor de la prima óptima para este proceso, donde finalmente se demuestra el Teorema 2.3.1 que servirá para determinar el tiempo de sostenibilidad del proceso de reserva bajo la prima óptima. Para todos estos cálculos usualmente se usarán resultados provenientes de la teoría de procesos de decisión de Markov, estos se encontrarán en el Apéndice A.

En el Capítulo 3, se trabaja con dos bases de datos. Una muestra datos sobre reclamaciones hechas a la Transportation Security Administration (TSA) de Estados Unidos, la cual es una empresa gubernamental y, la segunda base de datos refleja reclamos por accidentes automovilísticos ocurridos en Estados Unidos. Ambas bases de datos resultan interesantes a analizar por la distribución de probabilidad que siguen los registros de reclamaciones y así para ambos conjuntos de datos se calcula la barrera con la cual la reserva debe pagar dividendos o hacer otro tipo de manejo financiero en el caso de la TSA y también el tiempo de sostenibilidad bajo la prima óptima calculada.

Finalmente en el Capítulo 4 se expone la codificación realizada en Python para la implementación de la teoría mostrada en los capítulos anteriores con comentarios acerca de su funcionamiento y dividida según cada base de datos. Pero, cada análisis viene ligado con una teoría dentro del Apéndice B, para comprender un poco más sobre la Estimación de Densidad de Kernel y de la distribución de probabilidad Gamma, que son las que se usarán en cada conjunto de reclamaciones.

Capítulo 1

Preliminares

Este primer capítulo proporciona una base teórica fundamental que será utilizada a lo largo de los capítulos siguientes. Al establecer estos conceptos preliminares, permite centrarse en la teoría específica y más avanzada en cada capítulo posterior sin necesidad de reiterar los fundamentos básicos. A través de esta estructura, garantizamos una comprensión sólida y cohesiva de los Procesos de Control de Markov y Teoría de Ruina, permitiendo una progresión natural y lógica hacia los temas más complejos. Además, este capítulo servirá como una referencia esencial a la que se podrá recurrir para aclarar conceptos y términos clave a medida que avanzamos en nuestro estudio.

Conceptos Misceláneos

Los siguientes conceptos que mostraremos en este apartado (véase [14]) corresponden a algunos temas de teoría de la medida enfocada en probabilidad, a su vez de estar adaptada a \mathbb{R} que es el conjunto sobre el cual vamos a trabajar.

Definición 1.0.1. (Función semicontinua inferior) Sea $X \subseteq \mathbb{R}$ y v una función de X a \mathbb{R} tal que $v(x) < \infty$ para al menos un punto $x \in X$. v diremos que es semicontinua inferior en $x \in X$ si

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} v(x_n) \geq v(x)$$

para cualquier sucesión $\{x_n\}$ en X que converge a x . La función v se llamará semicontinua inferior si es semicontinua inferior en cada punto de X .

Definición 1.0.2. (Espacio de Borel) Un espacio de Borel en \mathbb{R} es un espacio medible que consiste en un conjunto X y una σ -álgebra de Borel $\mathcal{B}(X)$, que es la σ -álgebra más pequeña de subconjuntos de X que contienen todos los conjuntos abiertos en X . Así, cuando se haga referencia funciones "medibles" será con respecto a $\mathcal{B}(X)$.

Un subconjunto de Borel de un espacio métrico completo será llamado espacio de Borel. Un subconjunto de un espacio de Borel es en sí mismo un espacio de Borel.

Definición 1.0.3. Sea T un espacio de Borel parcialmente ordenado. Sea P y P' medidas de probabilidad en $(T, \mathcal{B}(T))$. Diremos que P' domina estocásticamente a P si $\int g dP \leq \int g dP'$ para toda función $g : T \rightarrow \mathbb{R}$ medible, acotada y creciente. Si esto se cumple, se denotará como $P \leq^{st} P'$.

Lema 1.0.1. *Sea T un espacio de Borel completo y supongamos que T está parcialmente ordenado. Sea P y P' las medidas de probabilidad en $(T, \mathcal{B}(T))$ tal que $P \stackrel{st}{\leq} P'$. Entonces $\int H_* dP \leq \int H_* dP'$, para $H_* : T \rightarrow \mathbb{R}$ la cual es una función medible, no negativa, no decreciente y posiblemente acotada.*

La demostración se puede consultar en [10].

Definición 1.0.4. (Multifunción) *Sean X y A dos espacios de Borel. Una multifunción ψ de X a A es una función tal que $\psi(x)$ es un subconjunto no vacío de A para todo $x \in X$. La gráfica de la multifunción ψ es un subconjunto de $X \times A$ definido por*

$$Gr(\psi) := \{(x, a) : x \in X, a \in \psi(x)\}.$$

Definición 1.0.5. (Selector) *Una función $f \in \mathbb{F}$ se denomina selector para una multifunción ψ .*

Kérneles Estocásticos

Ahora, toca presentar la definición de un Kernel Estocástico además de algunas notaciones (véase [14]), que se estudian para construir conjuntos sobre los cuales, más adelante, se definen las funciones que estudiaremos para trabajar el problema de decisión de Markov.

Definición 1.0.6. (Kernel Estocástico) *Sean X y Y dos espacios de Borel. Un kernel estocástico (ver [14]) en X dado Y es una función $P(\cdot | \cdot)$ de tal forma que*

- (a) $P(\cdot | y)$ es una medida de probabilidad sobre X , para cada $y \in Y$ fijo, y
- (b) $P(B | \cdot)$ es una función medible sobre Y , para cada $B \in \mathcal{B}(X)$.

El conjunto de todos los kérneles estocásticos en X dado Y se denota por $\mathcal{P}(X | Y)$.

En lo que sigue, $P \in \mathcal{P}(X | Y)$ es un kernel estocástico, $M(X)$ denota el espacio de funciones medibles en X y $L(X)$ es la subclase de funciones que son semicontinuas inferiores y acotadas inferiormente. $M_b(X)$ es el espacio de funciones acotadas en $M(X)$ y $C_b(X)$ es el subespacio de funciones continuas y acotadas en X .

Definición 1.0.7. Φ *denota el conjunto de todos los kérneles estocásticos $\varphi \in \mathcal{P}(X | Y)$ tal que $\varphi(A(x)|x) = 1$ para todo $x \in X$ y \mathbb{F} indica el conjunto de todas las funciones medibles $f : X \rightarrow A$ que satisfacen $f(x) \in A(x)$ para todo $x \in X$.*

Procesos de Control de Markov

El principal objetivo de esta sección es sentar las bases para el resto de este trabajo, introduciendo los procesos estocásticos de control en los que estamos interesados. Una presentación informal de los conceptos que nos aguardan es que los Procesos de Decisión de Markov en tiempo discreto se caracterizan por ser observados periódicamente bajo condiciones de incertidumbre y pueden ser manipulados mediante la aplicación de controles. La sucesión de estos controles recibe

el nombre de política.

Para obtener una política óptima, se minimiza una función de costo que penaliza la falta de pago de dividendos, donde la solución óptima se determina explícitamente utilizando la técnica de programación dinámica. Además, se considera la función de costo promedio, en cuyo caso la política óptima resulta ser la misma que en el caso descontado.

A continuación, usando la notación y terminología empleada en [14] y [15], se presentarán todos estos conceptos y teoremas necesarios, comenzando con una explicación detallada de lo que es un Proceso de Control de Markov y algunas de sus propiedades.

Definición 1.0.8. *Un Proceso de Control de Markov es una quintupla*

$$(X, A, \{A(x) : x \in X\}, Q, c) \tag{1.1}$$

conformada por X un espacio de Borel conocido como el espacio de estados, A un espacio de Borel referido como el conjunto de acciones o controles, $\{A(x) : x \in X\}$ es una familia de subconjuntos medibles $A(x)$ de A , donde $A(x)$ representa el conjunto de acciones o controles admisibles cuando el sistema está en el estado $x \in X$, y con la propiedad de que el conjunto

$$\mathbb{K} := \{(x, a) : x \in X, a \in A\}$$

de estados-acciones admisibles es un subconjunto medible de $X \times A$. Q un kernel estocástico en X dado \mathbb{K} llamado ley de transición y $c : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función medible conocida como función de costo por etapa.

Esta definición se interpreta de la siguiente forma (véase [14]): el modelo de control (1.1) describe un sistema estocástico controlado que se observa en los tiempos $t = 0, 1, \dots$. Si en el tiempo t el sistema está en el estado $x_t \in X$ y se aplica el control $a_t \in A(x)$, entonces ocurren dos eventos:

- (1) se incurre en un costo $c(x, a)$ y
- (2) el sistema transita al estado x_{t+1} , una variable aleatoria que toma valores en X con distribución $Q(\cdot|x, a)$, es decir, $Q(B|x, a) := \mathbb{P}(x_{t+1} \in B|x_t = x, a_t = a)$ con $B \in \mathcal{B}(X)$.

Después de la transición al nuevo estado, se selecciona un nuevo control y el proceso se repite. Los puntos (1) y (2) son las características esenciales de un Proceso de Control de Markov; es decir, en cualquier momento dado, el costo y la ley de transición dependen únicamente del estado actual del sistema y de la acción actual.

La ley de transición Q se define mediante una ecuación de la forma

$$x_{t+1} = F(x_t, a_t, \xi_t),$$

para $n = 0, 1, \dots$, con un $x_0 \in X$ dado, donde $\{x_n\}$ y $\{a_n\}$ son sucesiones de estados y controles respectivamente, y $\{\xi_n\}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con valores en algún espacio S , función de densidad común e independientes del estado inicial x_0 , donde $F : \mathbb{K} \times S \rightarrow X$ es una función medible.

Luego, consideremos el modelo de control de Markov (1.1) y para cada $t = 0, 1, \dots$, definamos el espacio H_t de historiales admisibles en el tiempo t , con $H_0 := X$ y

$$H_t := \mathbb{K}^t \times X = \mathbb{K} \times H_{t-1}, \quad t = 1, 2, \dots$$

Un elemento $h_t \in H_t$, denominado *t-historial admisible*, es un vector de la forma $h_t = (x_0, a_0, \dots, x_{t-1}, a_{t-1}, x_t)$, donde $(x_i, a_i) \in \mathbb{K}$ para $i = 0, 1, \dots, t-1$ y $x_t \in X$.

Con esto en mente, se procede a definir una *política de control*.

Definición 1.0.9. Una *política de control*, o simplemente una *política*, es una sucesión de *kérneles estocásticos* $\{\pi_t\}$, con $t = 0, 1, \dots$, en el conjunto de control A dado H_t , que cumple la siguiente condición:

$$\pi_t(A(x_t)|h_t) = 1,$$

para todo $h_t \in H_t$ y $t = 0, 1, \dots$. El conjunto de todas las políticas se denota por Π .

En otras palabras, una política $\pi = \{\pi_t\}$ se define mediante una sucesión $\{a_t\}$ de variables aleatorias en A tal que, para cada *t-historial* h_t y para $t = 0, 1, \dots$, la distribución de a_t es $\pi_t(\cdot|h_t)$ y está concentrada en $A(x)$.

De esta forma, veamos una clasificación de políticas que resulta útil para definir distintos tipos de modelos de control.

Definición 1.0.10. Una política $\pi = \{\pi_t\} \in \Pi$ se clasifica como:

- (a) *Política de Markov aleatoria* si existe una sucesión $\{\varphi_t\}$ de *kérneles estocásticos* $\varphi_t \in \Phi$ tal que para todo $h_t \in H_t$ y $t = 0, 1, \dots$,

$$\pi_t(\cdot|h_t) = \varphi_t(\cdot|x_t).$$

- (b) *Política de Markov estacionaria* si existe $\varphi_t \in \Phi$ de tal forma que para todo $h_t \in H_t$ y $t = 0, 1, \dots$,

$$\pi(\cdot|h_t) = \varphi_t(\cdot|x_t).$$

- (c) *Política determinista o pura* si existe una sucesión $\{g_t\}$ de funciones medibles $g_t : H_t \rightarrow A$ tal que, para todo $h_t \in H_t$, $t = 0, 1, \dots$ y $C \in \mathcal{B}(A)$,

$$\pi_t(C|h_t) = I_C[g_t(h_t)].$$

- (d) *Política de Markov determinista* si existe una sucesión $\{f_t\}$ de funciones $f_t \in \mathbb{F}$ tal que $\pi_t(\cdot|h_t)$ está concentrada en $f_t(x_t) \in A(x_t)$ para todo $h_t \in H_t$ y $t = 0, 1, \dots$

- (e) *Política determinista estacionaria* si existe una función $f \in \mathbb{F}$ tal que $\pi_t(\cdot|h_t)$ está concentrada en $f(x_t) \in A(x_t)$ para todo $h_t \in H_t$ y $t = 0, 1, \dots$

Denotamos el conjunto de todas las políticas de Markov aleatorizadas por Π_{RM} y el conjunto de las políticas aleatorizadas estacionarias por Π_{RS} . Cabe destacar que $\Pi_{RS} \subset \Pi_{RM} \subset \Pi$.

Análogamente, utilizamos Π_D para representar el conjunto de todas las políticas deterministas, Π_{DM} para las políticas deterministas de Markov, y Π_{DS} para las políticas deterministas estacionarias. En este caso, tenemos que $\Pi_{DS} \subset \Pi_{DM} \subset \Pi_D \subset \Pi$.

Ahora, se mostrará el siguiente ejemplo:

En el sistema descrito por la figura 1, en cada etapa de decisión, el sistema puede encontrarse en uno de dos estados: x_1 o x_2 . Si el sistema está en el estado x_1 , se puede elegir entre dos acciones posibles: $a_{1,1}$ o $a_{1,2}$. Por otro lado, si el sistema está en el estado x_2 , solo está disponible la acción $a_{2,1}$.

Seleccionar la acción $a_{1,1}$ en el estado x_1 implica un costo de 5 unidades. Además, en la siguiente etapa, el sistema estará en el estado x_1 con una probabilidad de 0.5 y en el estado x_2 también con una probabilidad de 0.5.

En cambio, si se toma la acción $a_{1,2}$ en el estado x_1 , toma un costo inmediato de 10 unidades y en la siguiente época se mueve a estado x_2 con probabilidad 1. En el estado x_2 , se toma la acción $a_{2,1}$ y como consecuencia, se incurre en un costo de 1 unidad y el sistema se encuentra en el estado x_2 .

Una descripción formal de este problema es el siguiente:

- Etapas: $t \in \{1, 2, \dots, N\}$ con $N \leq \infty$.
- Estados: $X = \{x_1, x_2\}$.
- Acciones: $A(x_1) = \{a_{1,1}, a_{1,2}\}$, $A(x_2) = \{a_{2,1}\}$.
- Costos: $c(x_1, a_{1,1}) = 5$, $c(x_1, a_{1,2}) = 10$, $c(x_2, a_{2,1}) = -1$.
- Probabilidades de transición: $Q(x_1|x_1, a_{1,1}) = 0.5$, $Q(x_1|x_1, a_{1,2}) = 0$, $Q(x_1|x_2, a_{2,1}) = 0$, $Q(x_2|x_1, a_{1,1}) = 0.5$, $Q(x_2|x_1, a_{1,2}) = 1$, $Q(x_2|x_2, a_{2,1}) = 1$.

La siguiente figura muestra una representación simbólica de este modelo.

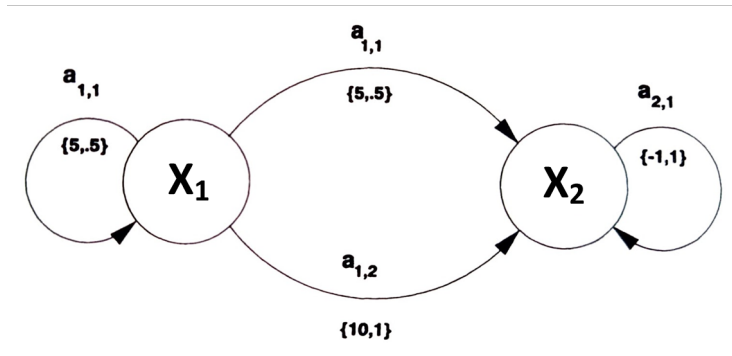


Figura 1.1: Representación simbólica del modelo ejemplo

Observación 1.0.1. *Tomemos la siguiente notación:*

(a) Si $\pi \in \Pi_{RM}$ es una política de Markov aleatorizada y $\{\varphi_t\}$ es como en la Definición 1.0.10 (a), entonces se escribirá $\pi = \{\varphi_t\}$ en lugar de $\pi = \{\pi_t\}$, mientras que si $\pi \in \Pi_{RS}$ y $\varphi \in \Phi$ como en la Definición 1.0.10 (b), entonces se escribirá π como φ^∞ . Similarmente, se denota a π como $\{g_t\}$, $\{f_t\}$ y f^∞ si π está en Π_D , Π_{DM} y Π_{DS} respectivamente.

(b) Sea Φ y \mathbb{F} los conjuntos definidos en la Definición 1.0.7, y sean c y Q el costo por etapa y la ley de transición respectivamente, como se establece en la Definición 1.0.8. Entonces, para cada $x \in X$, se define:

$$c(x, \varphi) := \int_A c(x, a) \varphi(da|x) \tag{1.2}$$

y

$$Q(\cdot|x, \varphi) := \int_A Q(\cdot|x, a)\varphi(da|x) \quad (1.3)$$

En particular, para una función $f \in \mathbb{F}$, (1.2) y (1.3) resultan ser

$$c(x, f) = c(x, f(x)) \quad y \quad Q(B|x, f) = Q(B|x, f(x)).$$

Con estas nociones generales sobre el proceso de control de Markov, profundizaremos en los tipos de problemas que surgen y en cómo abordarlos. Usaremos estos resultados a lo largo del siguiente capítulo, por tanto, se hace referencia a ellos para su consulta en el Apéndice A.

Cálculo de Primas

Una *prima* se va a definir como el pago que realiza un asegurado por la cobertura total o parcial de un riesgo determinado, con los términos y condiciones que esto conlleva (véase [12]). En este apartado se analizarán algunas propiedades y principios generales sobre el cálculo de primas, pero primero definamos formalmente un riesgo (Véase [1]).

Definición 1.0.11. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ el conjunto de clases de equivalencia de variables aleatorias integrables (es decir, funciones $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $\mathbb{E}[|X|] < \infty$). Un riesgo es una variable aleatoria $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ con una medida de riesgo $P : L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow \mathbb{R}$ que asigna un valor real a cada riesgo X .

Una regla que asigne un valor numérico a $P(X)$ se referirá como un principio de cálculo de primas (véase [24]). La siguiente lista incluye algunas de las propiedades básicas de los principios de primas.

- (a) *Monotonía.* Si X y Y son dos riesgos tales que $X(\omega) \leq Y(\omega)$ para todo $\omega \in \Omega$ entonces $P(X) \leq P(Y)$.
- (b) *Recargo no negativo.* Esta propiedad requiere que $P(X) \geq \mathbb{E}[X]$, lo que significa que una prima no puede ser menor que las reclamaciones esperadas.
- (c) *Aditividad.* Esta propiedad dice que si X_1 y X_2 son dos riesgos independientes, entonces la prima del riesgo combinado, denotada por $P(X_1 + X_2)$ debe ser igual a $P(X_1) + P(X_2)$.
- (d) *Consistencia.* Si tenemos un riesgo Y tal que $Y = X + c$, donde $c > 0$, entonces $P(Y) = P(X) + c$. Por tanto, si un riesgo se incrementa en una constante, la prima refleja ese cambio incrementándose esa cantidad.
- (e) *Invarianza de escala.* Esta propiedad requiere que si $Y = cX$, donde $c > 0$, entonces $P(Y) = cP(X)$. Esto quiere decir que si la cuantificación del riesgo X cambia de escala, entonces se considera el riesgo cX .

La prima pura de riesgo está dada por $P = \mathbb{E}[X]$. Esta fórmula podría parecer justa para el asegurado, pero no ocurre para el asegurador, quien no tendría ningún margen de ganancia promedio por su negocio, quien también debe cubrir gastos administrativos (véase [24]). Para ello vamos a ver un principio que nos ayuda a obtener en lo siguiente una prima óptima.

Principio del valor esperado. Este principio (véase [12]) establece que una prima debe calcularse como sigue:

$$P = (1 + \theta)\mathbb{E}[X],$$

donde $\theta > 0$ se denomina *factor de recargo*. El recargo en la prima es por tanto $\theta\mathbb{E}[X]$.

Este principio satisface la propiedad de recargo no negativo, ya que $(1 + \theta)\mathbb{E}[X] \geq \mathbb{E}[X]$. Similarmente, el principio es aditivo porque

$$(1 + \theta)\mathbb{E}[X_1 + X_2] = (1 + \theta)\mathbb{E}[X_1] + (1 + \theta)\mathbb{E}[X_2]$$

y la escala es invariante ya que para $Z = aX$,

$$P(Z) = (1 + \theta)\mathbb{E}[Z] = a(1 + \theta)\mathbb{E}[X] = aP(X)$$

El principio del valor esperado no es consistente. Para $Y = X + c$,

$$P(Y) = (1 + \theta)(\mathbb{E}[X] + c) > P(X) + c.$$

y tal como pedíamos en las propiedades, vemos que este principio nos da una prima que es de fácil cálculo.

Habiendo introducido todos estos conceptos preliminares, es momento de comenzar a abordar la teoría concerniente al problema que queremos resolver.

Capítulo 2

Procesos de Reserva Óptimos

Durante este capítulo se presentarán resultados sobre la optimalidad de un proceso de reserva con ayuda de la teoría de Proceso de Control de Markov, con el fin de conseguir el valor del ingreso óptimo por primas para cada etapa del proceso de reserva a la vez de obtener el tiempo de sostenibilidad de dicho proceso, teniendo que el contenido presentado a continuación está basado en [19].

2.1. Proceso de reserva a tiempo discreto

Este tipo de proceso estocástico a tiempo discreto, trata de modelar el cambio a lo largo del tiempo del capital de una compañía aseguradora dado un número de reclamaciones. Supongamos que $u \in \{0, 1, 2, \dots\}$ corresponde al capital inicial mencionado y que por cada unidad de tiempo, la compañía aseguradora recibe una unidad monetaria por concepto de primas.

Si X_1, X_2, \dots son los montos de las reclamaciones por cada unidad de tiempo, entonces definiremos el capital total de la compañía aseguradora al tiempo $n \geq 1$ como una variable aleatoria R_n como sigue.

Definición 2.1.1. *El proceso de reserva a tiempo discreto $\{R_n : n \geq 0\}$ se define como*

$$R_n = u + P_n - S_n$$

donde $u \geq 0$ es la reserva inicial, P_n representa las primas ganadas y S_n es el monto total por reclamaciones al tiempo n .

Notemos que las primas están determinadas continuamente como (véase [9], [21]), $P_n = Cn$ con $C > 0$. Además, S_n está dado por

$$S_n = \sum_{j=1}^{N(n)} X_j$$

conformado mediante X_1, X_2, \dots que son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con valores en los enteros no negativos de tal forma que $u\mathbb{E}[X_i] < C$ y de $\{N(n)\}_{n \geq 0}$ un proceso Poisson homogéneo con media $\lambda > 0$.

La desigualdad $\lambda\mathbb{E}[X_i] < C$ se denomina condición de ganancia neta. Esta surge (véase [24]) en que si tomamos la sucesión T_0, T_1, T_2, \dots de los tiempos aleatorios en donde la aseguradora recibe

reclamaciones y definimos, para cada entero $k \geq 1$, la variable aleatoria $Y_k = C(T_k - T_{k-1}) - X_k$, que puede ser interpretado como el balance de la compañía aseguradora entre dos eventos sucesivos, entonces la esperanza de esta variable aleatoria es

$$\mathbb{E}(Y_k) = C\mathbb{E}(T_k - T_{k-1}) - \mathbb{E}(X_k) = C(1/\lambda) - \mathbb{E}(X_k).$$

Luego, la ruina de la compañía aseguradora es casi segura si $\mathbb{E}(Y_k) \leq 0$, como tenemos interés en que esto no ocurra, supondremos que $\mathbb{E}(Y_k) > 0$, por tanto podemos concluir satisfactoriamente la condición de ganancia neta.

Con esta condición estaremos diciendo que en promedio, el ingreso por primas por cada unidad de tiempo, C , es mayor que el total de reclamaciones por unidad de tiempo, $\lambda\mathbb{E}(X_k)$.

A su vez, notemos que el proceso $\{R_n : n \geq 0\}$ está caracterizado por tener un espacio de estados en el conjunto de los enteros ya que, naturalmente, una aseguradora con capital inicial $u \geq 0$, puede recibir reclamaciones grandes de tal forma que lleven al proceso a tomar valores en el conjunto de los enteros negativos. A este estado se le llama *ruina* (véase [12], [17]).

Formalmente, diremos que una compañía aseguradora se encuentra en ruina al tiempo $n \geq 1$ si $R_n < 0$ y además definimos el *tiempo de ruina* τ como el primer tiempo en el que se manifiesta la ruina, esto es $\tau = \inf\{n \geq 1 : R_n \leq 0\}$. Por tanto, podemos definir la probabilidad de ruina como sigue (véase [7], [12]).

Definición 2.1.2. *La probabilidad de ruina $\psi(u)$, con $u \geq 0$ está dada por*

$$\begin{aligned} \psi(u) &= \mathbb{P}(\tau < \infty \mid C_0 = u) \\ &= \mathbb{P}(\tau \in \{1, 2, \dots\} \mid C_0 = u). \end{aligned}$$

Ahora, si consideramos $\{R_n\}$ un proceso de reserva a tiempo discreto con capital inicial $R_0 = u > 0$ y $n > 0$ (véase [11], ([27])), entonces se tiene que

$$R_{n+1} - R_n = (P_{n+1} - P_n) - (S_{n+1} - S_n),$$

para $n = 0, 1, \dots$, donde $(P_{n+1} - P_n)$ y $(S_{n+1} - S_n)$ son las primas obtenidas y el monto total por reclamaciones durante el periodo $(n, n + 1]$, respectivamente.

Sea $x_n := R_n$, $a_n := (P_{n+1} - P_n)$ y $\xi_n := (S_{n+1} - S_n)$. Entonces, para $n > 0$, el modelo de reserva a tiempo discreto será:

$$x_{n+1} = x_n + a_n - \xi_n, \tag{2.1}$$

con $x_0 = u > 0$.

De acuerdo a la Definición 2.1.2, la ruina de la compañía se alcanza cuando $x_n + a_n - \xi_n \leq 0$ para algún $n > 0$.

Luego, se considera la siguiente sucesión,

$$x_{n+1} = [x_n + a_n - \xi_n]^+,$$

para $n = 1, 2, \dots$, con $x_0 = u > 0$, donde $[z]^+ = \max\{0, z\}$. Entonces la ruina se alcanza cuando $x_n = 0$ para algún $n = 1, 2, \dots$

En función de evitar la acumulación de ganancias, proponemos establecer una cota superior Z a x_n , de tal forma que cuando $x_n > Z$, la diferencia $x_n - Z$ se paga como dividendos. Los

dividendos se entienden como los pagos que hace una compañía a sus accionistas, ya sea en efectivo o en acciones. Formalmente, los dividendos en efectivo, d_n , se definen como $d_n = [R_t - Z]^+$.

Lo anterior se describe con la siguiente proposición:

$$x_{n+1} = \min\{[x_n + a_n - \xi_n]^+, Z\} \quad (2.2)$$

Con $x_0 = u > 0$. En este caso, x_n , a_n , ξ_n denotan reserva, primas y el monto total por reclamaciones respectivamente para una compañía aseguradora al inicio del periodo $(n, n + 1]$. Para la sucesión $\{\xi_n\}$ se dará el siguiente supuesto que servirá tanto para la teoría que nos resta analizar como para la parte de implementación en el capítulo continuo.

Supuesto 2.1.1. *Supongamos que $\{\xi_n\}_{n \geq 0}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con valores en $[0, \infty)$ y una distribución común F cuya densidad f es continua, con $\mathbb{E}[\xi] < \infty$ (ξ siendo un elemento genérico de la sucesión $\{\xi_n\}_{n \geq 0}$)*

El Supuesto 2.1.1 se tomará como hipótesis para lo que resta del capítulo.

Usando el principio de esperanza para el cálculo de las primas, se asegura que la condición de recargo para el proceso descrito en (2.2) se cumple. Se define

$$K := (1 + \epsilon)\mathbb{E}[\xi] \quad \text{y} \quad M := (1 + \beta)\mathbb{E}[\xi],$$

donde $0 < \epsilon < \beta$. Entonces, por lo visto en capítulo de Preliminares y dado que $K < M$, por tanto, el conjunto de primas que son admisibles son el conjunto $[K, M]$.

Cada vez que la reserva esté por debajo de la cota Z , el no pagar dividendos se penaliza. Por tanto, la siguiente función de costo se propone:

$$c(x, a) := [Z - x]^+ \quad (2.3)$$

para cada $x \in (0, \infty)$ y $a \in [K, M]$.

Observación 2.1.1. *Notemos que este modelo define un Proceso de Decisión de Markov, tomamos $X = [0, \infty)$ como el espacio de estados, $A = [K, M]$ como el espacio de acciones, $A(x) = [K, M]$ como el conjunto de acciones admisibles para cada $x \in X$, la ley de transición Q se induce de la función $G(x, a, s) := \min\{[x + a - s]^+, Z\}$ para cada $(x, a) \in \mathbb{K}$ y $s \in [0, \infty)$ y con (2.3) como función de costo.*

De acuerdo con esto último, existe un problema para determinar la sucesión de primas $\pi = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que optimizan

$$v_\alpha(\pi, x) := \mathbb{E}_x^\pi \left[\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n [Z - x_n]^+ \right], \quad (2.4)$$

donde $x \geq 0$ es la reserva inicial y α es un factor de descuento dado.

2.2. Prima óptima descontada

Por definición de la función de costo (2.3) se entiende que esta es no negativa y continua. Además, para cada $x \in X$, $A(x) = [K, M]$ es un conjunto cerrado y acotado. Entonces, solo resta corroborar el Supuesto A.1.1, el cual se muestra en el siguiente lema (véase [19], [20]).

Lema 2.2.1. *La ley de transición Q , inducida por (2.2), es fuertemente continua.*

Demostración. Sea $h : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función medible acotada por una constante γ . Usando el Teorema de Cambio de Variable (véase [2]), se tiene que

$$\int h(y)Q(dy|x, a) = \int_0^\infty h(\min\{[x+a-s]^+, Z\})\Delta(s)ds,$$

para $(x, a) \in \mathbb{K}$.

Además,

$$\int_0^\infty h(\min\{[x+a-s]^+, Z\})\Delta(s)ds = h(0)(1-F(x+a)) + h(Z)F(x+a-Z) + \int_{x+a}^{x+a-Z} h(x+a-s)\Delta(s)ds,$$

para $(x, a) \in \mathbb{K}$, donde F es la distribución común de ξ y como Δ es una función continua, también lo es F (véase [2]).

Con lo anterior, es suficiente probar que

$$\int_{x+a-Z}^{x+a} h(x+a-s)\Delta(s)ds$$

es una función continua para $(x, a) \in \mathbb{K}$.

Para este propósito, sea $\{(x_k, a_k)\}$ una sucesión en \mathbb{K} que converge a $(x, a) \in \mathbb{K}$. Por el Teorema de Cambio de Variable ([2]),

$$\int_{x+a-Z}^{x+a} h(x+a-s)\Delta(s)ds = \int_0^Z h(y)\Delta(x+a-y)dy.$$

Considerando las siguientes funciones definidas por

$$\begin{aligned} h_k(y) &:= h(y)\Delta(x_k + a_k - y)I_{[0, Z]}(y), \\ g_k(y) &:= \gamma\Delta(x_k + a_k - y)I_{[0, Z]}(y), \end{aligned}$$

para $k = 1, 2, \dots, y \in [0, \infty)$, donde $I_B(\cdot)$ denota la función indicadora sobre el conjunto B .

Notemos que $|h_k| \leq g_k$ para todo $k \geq 1$. Además, $\{g_k\}$ converge a la función g la cual está definida por

$$g(y) := \gamma\Delta(x+a-y)I_{[0, Z]}(y)$$

con $y \in [0, \infty)$. Además,

$$\begin{aligned} \int g_k(y)dy &= \gamma \int_0^Z \Delta(x_k + a_k - y)dy, \\ &= \gamma\mathbb{P}[x_k + a_k - Z \leq \xi \leq x_k + a_k] \\ &= \gamma(F(x_k + a_k) - F(x_k + a_k - Z)), \end{aligned}$$

donde la distribución F es continua. Entonces

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int g_k(y) dy = \int g(y) dy. \quad (2.5)$$

Finalmente, por el Teorema de Convergencia Dominada (véase [26]),

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{x_k + a_k - Z}^{x_k + a_k} h(x_k + a_k - s) \Delta(s) ds &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int h_k(y) dy \\ &= \int \lim_{k \rightarrow \infty} h_k(y) dy \\ &= \int_0^Z h(y) \Delta(x + a - y) dy \\ &= \int_{x+a-Z}^{x+a} h(x + a - s) \Delta(s) ds \end{aligned}$$

y por tanto, el resultado se cumple. □

Observación 2.2.1. *Por el Lema 2.2.1, Supuesto A.1.1 se cumple y por tanto el Teorema A.1.1 garantiza la existencia de la política óptima $f^* \in \mathbb{F}$, la cual, en el contexto del proceso de reserva, describe una sucesión de primas óptimas que minimizan el desempeño dado en (2.4) por el Proceso de Decisión de Markov establecido.*

Luego, presentemos el lema siguiente que aborda dos propiedades importantes: el orden estocástico de la ley de transición Q y el decrecimiento de las funciones de valor óptimo y valor iterado.

Lema 2.2.2.

(a) *La ley de transición Q , inducida por (2.2), es estocásticamente ordenada, es decir,*

$$Q(\cdot | x, a) \leq^{st} Q(\cdot | w, b)$$

para cada $(x, a), (w, b) \in \mathbb{K}$ con $x \leq w$ y $a \leq b$.

(b) *La función de valor óptimo $V_\alpha^*(\cdot)$, y las funciones de iteración de valores $V_{\alpha, n}(\cdot)$, definidas en (A.5), son decrecientes en X .*

Demostración.

(a) Sea $(x, a), (w, b) \in \mathbb{K}$ con $x \leq w$ y $a \leq b$. Notemos que

$$[x + a - s]^+ \leq [w + b - s]^+, \quad (2.6)$$

con $s \in [0, \infty)$. Por otro lado, si $\min\{[w + b - s]^+, Z\} = Z$, entonces $\min\{[x + a - s]^+, Z\} \leq \min\{[w + b - s]^+, Z\}$ y si $\min\{[w + b - s]^+, Z\} = [w + b - s]^+$, por (2.6) $\min\{[x + a - s]^+, Z\} \leq \min\{[w + b - s]^+, Z\}$. Por tanto,

$$\min\{[x + a - s]^+, Z\} \leq \min\{[w + b - s]^+, Z\}, \quad (2.7)$$

con $s \in [0, \infty)$. Así, por (2.7) si $\min\{[w + b - \xi]^+, Z\} \leq \varsigma$, entonces $\min\{[x + a - \xi]^+, Z\} \leq \varsigma$ y por tanto

$$Q(\min\{[w + b - \xi]^+, Z\} \leq \varsigma | w, b) \leq Q(\min\{[x + a - \xi]^+, Z\} \leq \varsigma | x, a).$$

Finalmente, por el Lema 1.0.1, se tiene el resultado.

(b) Primero mostremos que V_n es decreciente sobre X . Haremos la prueba por inducción matemática.

Sea $x, w \in X$ con $x \leq w$. Por la definición de $V_{\alpha,n}$, para $n = 1$,

$$V_{\alpha,1}(x) = \min_{a \in A(x)} \{[Z - x]^+\},$$

esto implica que $V_{\alpha,1}(x) = [Z - x]^+$, entonces $V_{\alpha,1}$ es decreciente en X . Ahora, para $n = 2$,

$$\begin{aligned} V_{\alpha,2}(x) &= \min_{a \in A(x)} \left\{ c(x, a) + \alpha \int V_{\alpha,1}(\min\{x + a - s, Z\}) \Delta(s) ds \right\} \\ &= \min_{a \in A(x)} \left\{ c(x, a) + \alpha \int [Z - \min\{x + a - s, Z\}]^+ \Delta(s) ds \right\} \\ &= \min_{a \in A(x)} \left\{ c(x, a) + \alpha \int (Z - \min\{x + a - s, Z\}) \Delta(s) ds \right\} \\ &= \min_{a \in A(x)} \left\{ [Z - x]^+ + \alpha Z - \alpha \int \min\{x + a - s, Z\} \Delta(s) ds \right\} \\ &= \min_{a \in A(x)} \left\{ [Z - x]^+ + \alpha Z - \alpha \int y Q(dy|x, a) \right\}. \end{aligned}$$

Por tanto, por el inciso a) de este Lema y usando el Lema 1.0.1 con $H_*(y) = y$, $y \in X$, la función g_* definida por

$$g_*(a) := -\alpha \int y Q(dy|x, a),$$

con $a \in [K, M]$ es decreciente y su mínimo es M . Entonces,

$$V_{\alpha,2}(x) = [Z - x]^+ + \alpha Z - \alpha \int y Q(dy|x, M).$$

Como $x \leq w$, se puede llegar a que $V_2(w) \leq V_2(x)$ y dado que x y w fueron arbitrarios, entonces V_2 es una función decreciente en X .

Ahora, supongamos que V_n es decreciente sobre X para algun $n > 2$. Tomemos $x, w \in X$ con $x \leq w$. Entonces

$$\begin{aligned} V_{\alpha,n+1}(x) &= \min_{a \in A(x)} \left\{ c(x, a) + \alpha \int V_{\alpha,n}(\min[x + a - s, Z]) \Delta(s) ds \right\} \\ &= \min_{a \in A(x)} \left\{ [Z - x]^+ + \alpha \int V_{\alpha,n}(y) Q(dy|x, a) \right\} \end{aligned}$$

Sea $a \in [k, M]$, por la hipótesis de inducción matemática y por el orden estocástico que tiene Q , se cumple que

$$[Z - w]^+ + \alpha \int V_{\alpha,n}(y) Q(dy|w, a) \leq [Z - x]^+ + \alpha \int V_{\alpha,n}(y) Q(dy|x, a)$$

luego tomamos el mínimo en $a \in [K, M]$ en ambos lados de la desigualdad y obtenemos que $V_{\alpha,n+1}(w) \leq V_{\alpha,n+1}(x)$. Por tanto, $V_{\alpha,n+1}$ es decreciente y por el Teorema A.1.1, $V_{\alpha,n}(x) \rightarrow V_{\alpha}^*(x)$, con $x \in X$ lo que implica que V_{α}^* es una función decreciente en X .

□

Así, analicemos el último teorema de esta sección, donde estableceremos que un proceso de reserva que incluye dividendos, la política óptima es constante, facilitando la implementación en escenarios prácticos dado que no se requieren frecuentes ajustes en estrategias de control.

Teorema 2.2.1. *La política óptima para el proceso de reserva con dividendos, inducida por (2.2), es $f^*(\cdot) \equiv M$.*

Demostración. Sea $x \in X$ fijo. Por el Teorema A.1.1, V_α^* satisface la ecuación de optimalidad (A.7), es decir,

$$V_\alpha^*(x) = \min_{a \in A(x)} \left\{ [Z - x]^+ + \alpha \int V_\alpha^*(y) Q(dy|x, a) \right\}.$$

También, por el Lema 2.2.2, V_α^* es decreciente y Q es estocásticamente ordenada. Entonces, si $a, b \in [K, M]$ con $a \leq b$, se sigue que

$$\alpha \int V_\alpha^*(y) Q(dy|x, b) \leq \alpha \int V_\alpha^*(y) Q(dy|x, a).$$

Sumando $[Z - x]^+$ de ambos lados de la desigualdad anterior, se concluye que, para $a \in [K, M]$ y por el Lema ,

$$H(a) := [Z - x]^+ + \alpha \int V_\alpha^*(y) Q(dy|x, a)$$

es una función decreciente y su mínimo se alcanza en M . Por tanto, como x fue arbitraria, se ha demostrado el teorema. □

Finalmente, por el Teorema 2.2.1 se obtiene que la función de valor óptimo es de la forma

$$V_\alpha^*(x) = v_\alpha(M, x) = \mathbb{E}_x^M \left[\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n [Z - x_n]^+ \right],$$

para cada $x \in X$. Esto es, el coste total descontado previsto de las penalizaciones por no alcanzar la barrera Z , y por tanto no pagar los dividendos a los socios es traído al valor actual dado por el factor de descuento α .

2.3. Sostenibilidad del proceso de reserva

Vamos a presentar una tasa de probabilidad de ruina la cual va a permitir determinar un periodo de sostenibilidad para la aseguradora bajo el proceso de reserva óptima, es decir, el proceso bajo la prima óptima $f^* \equiv M$ (véase [19]),

$$x_{n+1}^M = \min\{[x_n^M + M - \xi_n]^+, Z\}, \tag{2.8}$$

con $x_0^M = u > 0$.

Para ello, veamos que

$$\psi_d^N(u) := \mathbb{P}[x_0^M = u, x_1^M \neq 0, \dots, x_{N-1}^M \neq 0, x_N^M = 0]$$

está definida para $u > 0$ y $N > 2$. Observe que $\psi_d^N(u)$ es la probabilidad de ruina cuando $\tau_d(u) = N$, donde τ_d es el tiempo cuando la reserva llega cero.

Teorema 2.3.1. *Sea $\{x_n^M\}$ un proceso de reserva óptimo generado por la política óptima $f^* \equiv M$, con $x_0^M = u > 0$ y $N > 2$. Entonces,*

$$\psi_d^N(u) \leq (\mathbb{P}[\xi < Z + M])^{N-2} \cdot \mathbb{P}[\xi < u + M]. \quad (2.9)$$

Demostración. El proceso óptimo $\{x_n^M\}$ es un proceso homogéneo de Markov con ley de transición Q .

Consideremos los siguientes conjuntos: $B_0 = \{x_0^M = u\}$, $B_N = \{x_N^M = 0\}$ y $B_i = \{x_i^M \neq 0\}$, para $i = 1, 2, \dots, N-1$ y observe que $B_i \in \mathcal{B}(X)$ para $i = 1, 2, \dots, N$. Entonces, por la proposición 7.3, página 130 en [8],

$$\begin{aligned} \psi_d^N(u) &= \mathbb{P}[x_0^M = u, x_1 \neq 0, \dots, x_{N-1}^M \neq 0, x_N^M = 0] \\ &= \int_{B_{N-1}} \cdots \int_{B_0} Q(B_N|w_{N-1}, M)Q(dw_{N-1}|w_{N-2}, M) \cdots Q(dw_1|w_0, M)\rho(dw_0), \end{aligned}$$

donde la distribución inicial ρ es la medida de Dirac concentrada en u .

Por otro lado, nótese que

$$Q(B_N|w_{N-1}, M) \leq 1.$$

Por tanto,

$$\psi_d^N(u) \leq \int_{B_{N-1}} \cdots \int_{B_0} Q(dw_{N-1}|w_{N-2}, M) \cdots Q(dw_1|w_0, M)\rho(dw_0).$$

Además, para cada $i = 1, 2, \dots, N-1$, $B_i \subseteq \{\xi_{i-1} < x_{i-1}^M + M\} \subseteq \{\xi < Z + M\}$; esto implica que

$$Q(B_i|w_{i-1}, M) \leq \mathbb{P}[\xi_{i-1} < x_{i-1}^M + M] \leq \mathbb{P}[\xi < Z + M].$$

Entonces

$$\psi_d^N(u) \leq \int_{B_{N-2}} \cdots \int_{B_0} \mathbb{P}[\xi < Z + M]Q(dw_{N-2}|w_{N-3}, M) \cdots Q(dw_1|w_0, M)\rho(dw_0)$$

Finalmente, iterando de esta forma $N-3$ veces y como ρ está concentrada en B_0 , se obtiene que

$$\psi_d^N(u) \leq (\mathbb{P}[\xi < Z + M])^{N-2}Q(B_1|u, M),$$

donde $Q(B_1|u, M) = Q(x_1^M \neq 0|u, M) = \mathbb{P}[\xi < u + M]$. □

Con estos resultados presentados, se procede a analizar dos casos de estudio en donde se busca aplicar la teoría de este capítulo y de Procesos de Decisión de Markov.

Capítulo 3

Casos de Estudio

En el sentido de implementar la teoría de la que se ha estado hablando a lo largo de este trabajo, se usarán dos bases de datos. Una contiene información proveniente de la Agencia de Seguridad en Terminales de Estados Unidos (TSA), la cual es responsable de proteger los sistemas de transporte en dicho país. En la segunda base de datos encontramos registros de una agencia aseguradora por accidentes automovilísticos. En ambos casos se hará un análisis estadístico de los datos y posteriormente la aplicación del Teorema 2.3.1 para concluir con la resolución al proceso de decisión de Markov.

Para analizar y aplicar la teoría correspondiente, se utilizará Python. En este capítulo se presentarán los resultados obtenidos y el código que se implemente estará expuesto en el Capítulo 4, según se vaya analizando cada base de datos.

3.1. Reclamaciones TSA

La TSA se encarga de la inspección de pasajeros y empleados antes de que entren en las zonas seguras del aeropuerto. Esta agencia a veces comete errores y estos se traducen en personas que pueden terminar heridas y sus propiedades pueden ser dañadas, perdidas o robadas. Generalmente, las reclamaciones contra la TSA se presentan por lesiones personales y por propiedad perdida o dañada durante las inspecciones y mantienen un registro de cada reclamación en un periodo comprendido entre 2002 y 2015 ¹.

3.1.1. Análisis de los datos

La base de datos está conformada por 204270 observaciones y 13 columnas de datos los cuales son:

- | | |
|------------------|------------------|
| 1) Claim Number | 6) Airline Name |
| 2) Date Received | 7) Claim Type |
| 3) Incident Date | 8) Claim Site |
| 4) Airport Code | 9) Item |
| 5) Airport Name | 10) Claim Amount |

¹Los datos originales pueden ser encontrados aquí: <https://www.dhs.gov/tsa-claims-data>

- 11) Status 13) Disposition
- 12) Close Amount

Entrando aún más en los detalles generales de la base de datos, se obtiene la siguiente información:

```
<class 'pandas.core.frame.DataFrame'>
RangeIndex: 204270 entries, 0 to 204269
Data columns (total 13 columns):
#   Column          Non-Null Count  Dtype
---  -
0   Claim Number    204267 non-null  object
1   Date Received   204004 non-null  object
2   Incident Date   202084 non-null  object
3   Airport Code    195743 non-null  object
4   Airport Name    195743 non-null  object
5   Airline Name    169893 non-null  object
6   Claim Type      196354 non-null  object
7   Claim Site      203527 non-null  object
8   Item            200301 non-null  object
9   Claim Amount    200224 non-null  object
10  Status          204262 non-null  object
11  Close Amount    135315 non-null  object
12  Disposition     131359 non-null  object
dtypes: object(13)
```

Figura 3.1: Información general de la base de datos de TSA

donde observamos que existen observaciones vacías en algunas de las columnas de la base de datos.

Primero, mediante código se llega a que en 'Claim Amount' y 'Close Amount' existen entradas con los símbolos \$, - o ; las cuales se remueven para dejar solo números en cada observación.

Luego, en la Figura 3.1 notamos que hay columnas que no se encuentran con el tipo de datos adecuado para la información que se maneja. Así, las columnas 'Date Received' e 'Incident Date' se transforman a columnas con datos de tipo fecha, 'Claim Amount' y 'Close Amount' a datos de tipo flotante.

Como siguiente paso, removemos de la base de datos las filas duplicadas, quitamos las filas donde tengan dato vacío como observación en 'Claim Amount' y 'Claim type', también omitimos aquellas filas donde su monto de reclamación sea igual a 0.0 y finalmente quitamos observaciones completas de pasajeros donde se haya registrado una fecha mal escrita.

Habiendo hecho esto, nos encontramos con que no todas las columnas son de interés, por lo que 'Airport Code', 'Airport Name', 'Airline Name', 'Claim Site' e 'Item' se descartan de la base de datos. Así, tendremos la siguiente información para trabajar:

- 1) Claim Number 5) Claim Amount
- 2) Date Received 6) Status
- 3) Incident Date 7) Close Amount
- 4) Claim Type 8) Disposition

Luego, quitamos aquellas filas donde hay un dato nulo en las columnas 'Disposition' y 'Close Amount'. Después nos fijamos en los tipos de reclamos, que se registraron y se tiene el listado que sigue,

- | | |
|----------------------------|---------------------------|
| 1) Property Damage | 4) Motor Vehicle |
| 2) Passenger Property Loss | 5) Passenger Theft |
| 3) Personal Injury | 6) Employee Loss (MPCECA) |

Mediante código clasificamos en un diccionario de Python cada registro por tipo de reclamo y, si por ejemplo realizamos un histograma de los montos de reclamación para los reclamos por 'Passenger Theft', se obtiene lo siguiente:

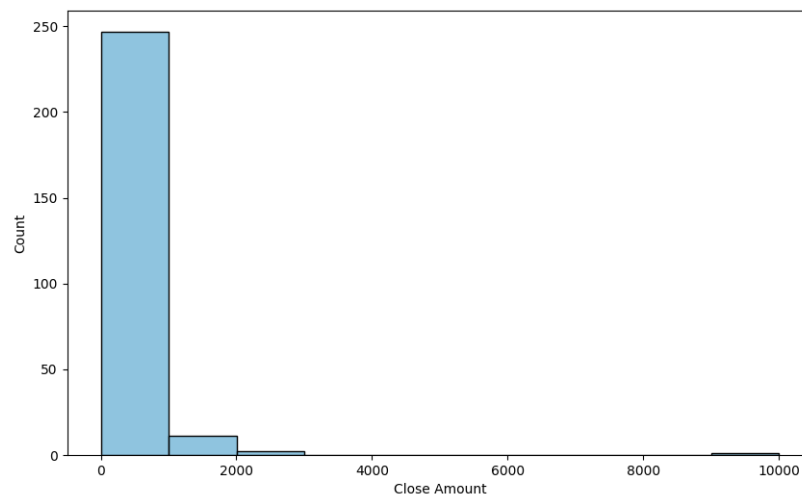


Figura 3.2: Histograma del tipo de reclamo 'Passenger Theft'.

donde se puede ver que existen datos extremos los cuales podrían causar cierta imprecisión en lo consecutivo. Para manejar este problema, se aplicará a cada tipo de reclamación una limpieza con el Método Intercuartil, teniendo como resultado que la cantidad de datos final por cada tipo de reclamación es de:

- Property Damage: 42997
- Passenger Property Loss: 64513
- Personal Injury: 529
- Motor Vehicle: 120
- Passenger Theft: 364
- Employee Loss (MPCECA): 362

para un total de 108885 observaciones, es decir, tendremos dicha cantidad de registros de reclamaciones hechas por pasajeros y empleados, aunado a los 8 tipos de datos por registro. Por el número de datos por cada tipo de reclamo, se puede ver que causa más interés fijarse en las reclamaciones hechas por 'Property Damage' o 'Passenger Property Loss'. Para lo consecuente usaremos las reclamaciones hechas por 'Passenger Property Loss'.

Los datos registrados para este tipo de reclamo, tienen un valor mínimo de 1.0 y un valor máximo de 1277.30, con una media de 267.0660. La siguiente imagen muestra el histograma de estos reclamos con su respectiva distribución.

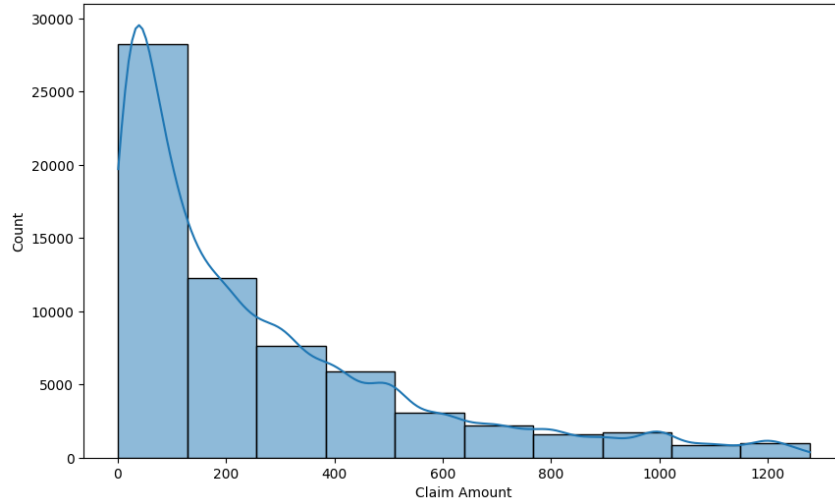


Figura 3.3: Histograma y distribución de las reclamaciones 'Passenger Property Loss'.

Con estos datos, construimos la sucesión $\xi_n := (S_{n+1} - S_n)$ tal y como se definió en (2.1), siendo $(S_{n+1} - S_n)$ el monto total por reclamaciones en el periodo $(n, n - 1]$. Considerando que tenemos las reclamaciones registradas con su fecha en que fue recibida, tomaremos los periodos $(n, n - 1]$ como los días en los que se tenga registro de al menos un reclamo, sumaremos el monto total reclamado por día y esta suma representará ξ_n . Después de haber hecho este proceso, obtenemos que la sucesión ξ_n tiene una cantidad de días registrados de 1781 en donde 3.29 es el monto total diario con menor valor y 27673.91 es el monto total diario con un valor máximo. ξ_n tiene con una media de 1735.8584, con el siguiente histograma:

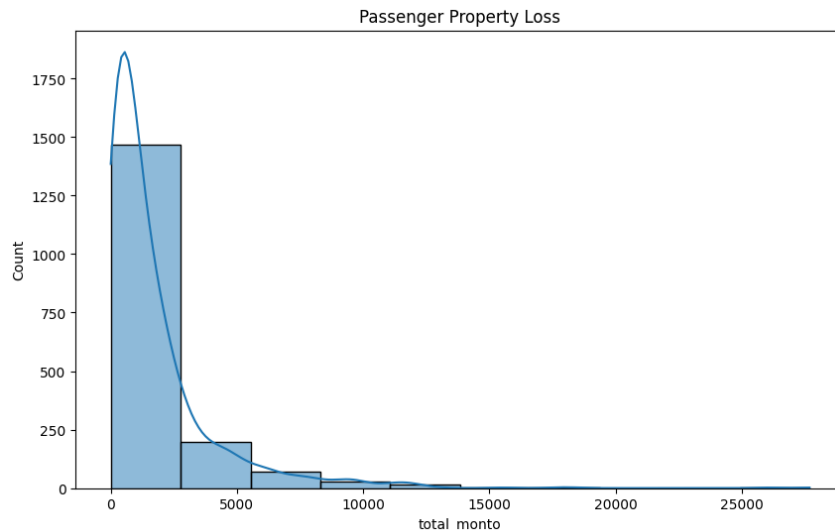


Figura 3.4: Histograma de ξ de las reclamaciones TSA

Se observa que en la parte derecha del histograma están registrados valores muy grandes, lo cual podría dificultar la estimación de los parámetros de alguna distribución. Por ello, haremos una limpieza de los datos con el método Intercuartil y obtenemos este nuevo histograma de ξ , donde ahora tiene un media de 1194.62 y valor máximo de 4790.01.

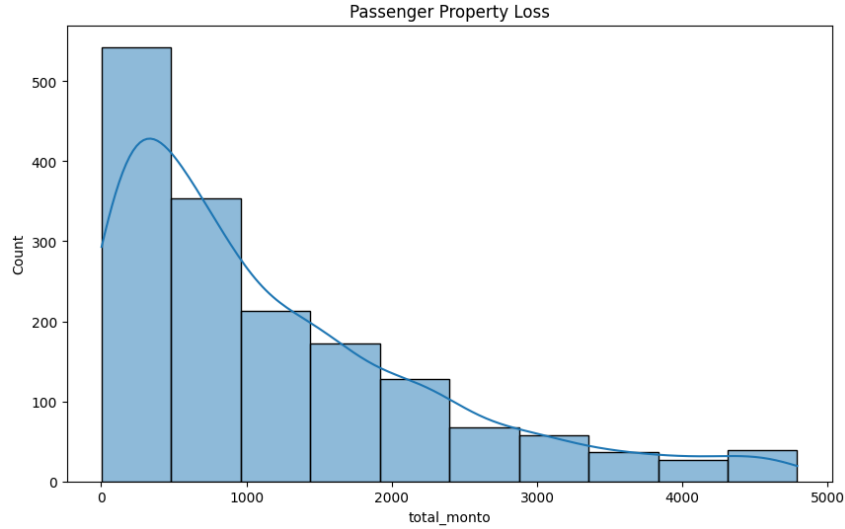


Figura 3.5: Nuevo histograma de ξ de las reclamaciones TSA

Analizando visualmente el histograma, se puede deducir que se puede ajustar una distribución de probabilidad gamma. En Apéndice B.2 se puede ver si una variable aleatoria W sigue una distribución gamma, esta tiene dos parámetros $\alpha > 0$ y $\lambda > 0$, correspondientes a la forma y a la escala de la distribución. Entonces, estimando los parámetros de una distribución gamma para ξ de manera computacional (véase Capítulo 4), son

$$\alpha = 0.9824 \quad \text{y} \quad \lambda = 1215.9890$$

Para verificar lo anterior haremos una prueba de hipótesis de Kolmogorov-Smirnov (ver Apéndice B.4) planteado como sigue:

Hipótesis Nula (H_0): ξ sigue una distribución Gamma con parámetros α y λ .

Hipótesis Alternativa (H_a): ξ no sigue una distribución Gamma con parámetros α y λ .

Usaremos el estadístico de prueba D de Kolmogorov-Smirnov, el cual tiene el valor de

$$D = 0.0279$$

Luego, calculando el valor p , obtenemos que

$$\text{Valor } p = 0.1516$$

Finalmente, usando un nivel de significancia de 0.05, tenemos que valor $p > 0.05$, por tanto no rechazamos la hipótesis nula. Por tanto $\xi \sim \text{Gamma}(\alpha, \lambda)$.

Así, la función de densidad de ξ es:

$$f(x) = \frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)} \quad (3.1)$$

con $x > 0$, $\alpha = 0.9824$, $\lambda = 1215.9890$ y $\Gamma(\alpha)$ es la función Gamma definida como en el Apéndice B.2.

Graficando el histograma de las reclamaciones ξ con la distribución gamma que acabamos de ajustar, obtenemos:

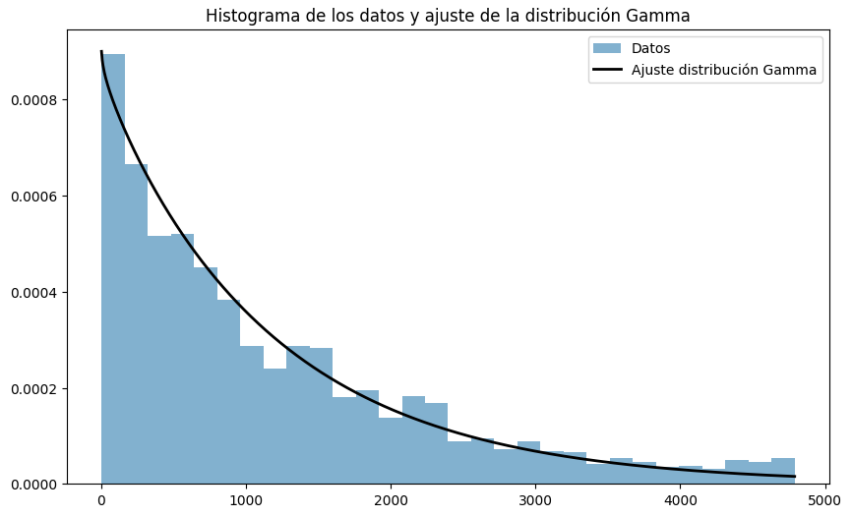


Figura 3.6: Histograma y ajuste de distribución gamma ξ para 'Passenger Property Loss'

Luego, nos será útil poder saber la esperanza de los datos. Viendo lo descrito en el Apéndice B.2, la media de ξ se determinará como:

$$\mathbb{E}[\xi] = \alpha/\lambda.$$

Calculando, se obtiene que $\mathbb{E}[\xi] = 1194.62004$. Para corroborar este resultado, se procede con una prueba de hipótesis planteada como sigue:

Hipótesis Nula (H_0): La media de los datos μ_ξ es igual a 1194.62004.

Hipótesis Alternativa (H_a): La media de los datos μ_ξ no es igual a 1194.62004.

Usaremos un estadístico de prueba normal Z , calculado de la siguiente forma:

$$Z = \frac{\mu_\xi - \mathbb{E}[\xi]}{\sigma_\xi/\sqrt{n}} = \frac{267.0660 - 266.7246}{282.2009/\sqrt{64513}} = 0.3072$$

Luego, calculando el valor p para una prueba de dos colas, obtenemos que

$$\text{Valor } p = 2 * (1 - \Phi(Z)) = 0.3072$$

donde $\Phi(x)$ es la función de distribución acumulada de una distribución normal estándar.

Finalmente, usando un nivel de significancia de 0.05, tenemos que valor $p > 0.05$, por tanto no rechazamos la hipótesis nula. La esperanza estimada por KDE puede representar la media de las reclamaciones. Por tanto $\mu_\xi = 266.7246$.

Por tanto, habiendo estimado la función de densidad del conjunto de reclamaciones hechas y también su esperanza, procederemos a aplicar el Teorema 2.3.1 para calcular el tiempo de sostenibilidad del proceso de reserva.

3.1.2. Cálculo de la sostenibilidad del proceso de reserva

En función de querer aplicar el Teorema 2.3.1 para calcular el tiempo de sostenibilidad del proceso de reserva, primero, veamos que la función de distribución acumulada de ξ será:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(\xi)d\xi \quad (3.2)$$

Luego, vamos a suponer que la probabilidad de ruina $\psi_d^N(u) = 0.001$ y $\nu := 1 - \psi_d^N(u)$, donde $u > 0$ es el capital inicial y N representa la cantidad de días. Además, escogeremos Z de tal forma que $\mathbb{P}[\xi < Z + M] = \nu$.

Teniendo que las reclamaciones ξ de la base de datos que estamos manejando tiene una distribución estimada por (3.1), habiendo comprobado que su esperanza es $\mathbb{E}[\xi] = 1194.62004$ y usando un factor de recargo $\theta = 0.2$, se tiene que la prima óptima es

$$M = (1 + \theta)\mathbb{E}[\xi] = 1433.5440$$

Entonces, como se escogió Z de tal forma que $\mathbb{P}[\xi < Z + M] = \nu$, se tiene que buscar el valor de Z que resuelva la ecuación

$$F(M + Z) - \nu = 0$$

donde $M = 1433.5440$ y $\nu = 0.001$.

Resolviendo computacionalmente, se obtiene que el valor de Z que satisface dicha ecuación es

$$Z = 6909.6578$$

Luego en la inecuación (2.9), se toma la ecuación:

$$\psi_d^N(u) = (\mathbb{P}[\xi < Z + M])^{N-2} \cdot \mathbb{P}[\xi < u + M] \quad (3.3)$$

y, con el supuesto para $u > 0$, $\psi_d^N(u) = 0.001$, habiendo calculado $M = 1433.5440$, $Z = 6909.6578$ y con (3.2) como la función de distribución de ξ , se calcula el valor de N en (3.3) como sigue:

$$N = \frac{\ln\left(\frac{\psi_d^N(u)}{\mathbb{P}[\xi < u + M]}\right)}{\ln(\mathbb{P}[\xi < Z + M])} + 2 \quad (3.4)$$

Para distintos valores de u , digamos $u = 1, 5, 10$ se llega a los siguientes resultados para el valor de N :

$$\begin{aligned} \text{Para } u = 1, \quad N &= 6549.11 \\ \text{Para } u = 5, \quad N &= 6550.53 \\ \text{Para } u = 10, \quad N &= 6552.30 \end{aligned}$$

Nota: Se consideran dichos valores pequeños de u dadas las complicaciones computacionales que implica usar un valor de u muy grande, ya que el programa da resultados de N infimamente grandes.

Además, el Proceso de Reserva (2.8) quedaría definido de la siguiente forma:

$$x_{n+1}^M = \min\{[x_n^M + M - \xi_n]^+, Z\},$$

con $M = 1433.5440$, $Z = 6909.6578$ y $x_0^M = u > 0$.

Entonces, una simulación de este proceso de reserva, con $u = 3000$ podría ser el siguiente, notando que se va a la ruina después del primer año.

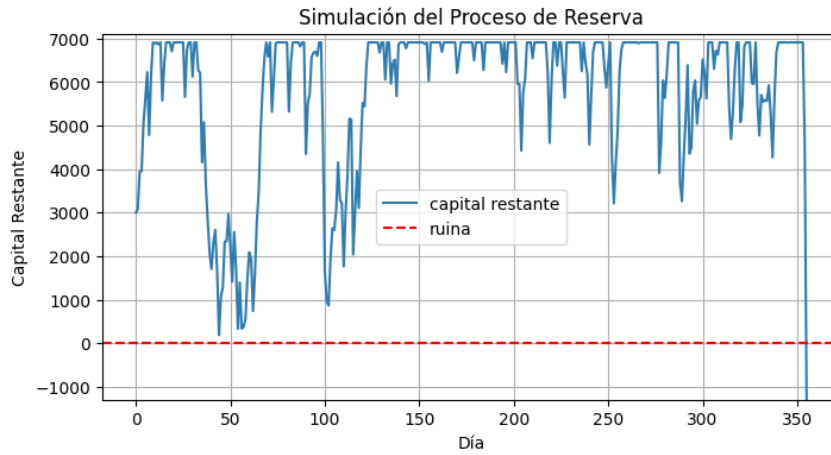


Figura 3.7: Una simulación del proceso de reserva de TSA con $u = 3000$

3.1.3. Solución del proceso de decisión de Markov

Recordemos que en la Observación 2.1.1 se plantea un nuevo Proceso de Decisión de Markov en base al proceso de reserva, definiéndolo de la siguiente forma: tomamos $X = [0, \infty)$ como el espacio de estados, $A = [K, M]$ como el espacio de acciones, $A(x) = [K, M]$ como el conjunto de acciones admisibles para cada $x \in X$, la ley de transición Q se induce de la función $G(x, a, s) := \min\{[x + a - s]^+, Z\}$ para cada $(x, a) \in \mathbb{K} \times s \in [0, \infty)$ y con $c(x, a) := [Z - x]^+$ como función de costo.

Para el cálculo de K y M , habrá que escoger ϵ y θ tales que $\epsilon < \theta$ para conseguir que $K < M$. Por tanto, tomemos $\epsilon = 0.1$ y anteriormente, ya habíamos escogido $\theta = 0.2$. Luego, usando el Principio de Valor Esperado y sabiendo que $\hat{\mathbb{E}}[\xi] = 1194.62004$,

$$K = (1 + \epsilon)\hat{\mathbb{E}}[\xi] = 1314.0820$$

y, de la sección anterior conocemos $M = 1433.5440$.

Además, con $Z = 6909.6578$ y habiendo calculado K y M , obtenemos que el proceso de Decisión de Markov queda definido de la siguiente forma:

- Espacio de estados: $X = [0, \infty)$.
- Espacio de acciones: $A = [1314.0820, 1433.5440]$.

- Conjunto de acciones admisibles: $A(x) = [1314.0820, 1433.5440]$ para todo $x \in X$.
- Ley de transición: $Q(x, a, s) = \min\{[x + a - s]^+, 6909.6578\}$ para cada $(x, a) \in \mathbb{K}$.
- Función de costo por etapa: $c(x, a) := [6909.6578 - x]^+$.

El problema será encontrar la sucesión de primas $\pi = \{a_n\}$ que optimicen la ecuación (2.4), que con los resultados que tenemos, nos queda que la ecuación a optimizar es:

$$v_\alpha(\pi, u) := \mathbb{E}_u^\pi \left[\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n [6909.6578 - x_n]^+ \right],$$

donde $u \geq 0$ es la reserva inicial, α es un factor de descuento dado y, x_n representa las reclamaciones hechas para $n = 1, 2, \dots$

Por el Teorema 2.2.1, la política que optimiza el PDM es $f^*(\cdot) = M = 1433.5440$. Por tanto, la función de valor óptimo es de la forma:

$$V_\alpha^*(x) = v_\alpha(M, x) = \mathbb{E}_u^M \left[\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n [Z - x_n]^+ \right] = \mathbb{E}_x^{1314.0820} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n [6909.6578 - x_n]^+ \right],$$

para cada $x \in X$. Es decir, el costo total descontado previsto de las penalizaciones por no alcanzar la barrera $Z = 6909.6578$, y por tanto no pagar los dividendos a los clientes es traído al valor actual dado por el factor de descuento α .

3.2. Reclamaciones Automovilísticas

Como se anticipó, ahora se trabajará con un conjunto de registros sobre accidentes automovilísticos ocurridos en Estados Unidos durante el año 2015, en donde se incluye información general sobre la fecha y lugar del accidente, monto de reclamo por lesiones físicas a personas, montos de reclamo por daños materiales y automovilísticos, el número de póliza del asegurado, información general sobre el automóvil asegurado, entre otros.

3.2.1. Análisis de los datos

Tenemos que la base de datos cuenta con una cantidad de 1000 registros de accidentes y 40 columnas que detallan algunos aspectos acerca del accidente. En la siguiente tabla se muestran las columnas, qué tipo de datos contiene y a su vez la cantidad de datos no nulos.

Aquí notemos que se encuentra una columna llamada 'fraud_reported' donde se especifica si la reclamación registrada, tras una investigación, tiene indicios de ser un posible fraude para la empresa. Se indica con Y aquellos registros donde si haya reporte de fraude y con N los que no. Por tanto, tomaremos aquellas reclamaciones donde no haya riesgo de fraude para trabajar en lo que sigue.

Casos de Estudio

3.2 Reclamaciones Automovilísticas

```

Index: 753 entries, 2 to 999
Data columns (total 40 columns):
#   Column                               Non-Null Count  Dtype  20  incident_severity           753 non-null  object
---  ---                               -----
0   months_as_customer              753 non-null   int64  21  authorities_contacted       668 non-null  object
1   age                             753 non-null   int64  22  incident_state              753 non-null  object
2   policy_number                   753 non-null   int64  23  incident_city               753 non-null  object
3   policy_bind_date                753 non-null   object  24  incident_location           753 non-null  object
4   policy_state                    753 non-null   object  25  incident_hour_of_the_day    753 non-null  int64
5   policy_csl                      753 non-null   object  26  number_of_vehicles_involved 753 non-null  int64
6   policy_deductable               753 non-null   int64  27  property_damage             753 non-null  object
7   policy_annual_premium           753 non-null   float64  28  bodily_injuries             753 non-null  int64
8   umbrella_limit                  753 non-null   int64  29  witnesses                   753 non-null  int64
9   insured_zip                     753 non-null   int64  30  police_report_available     753 non-null  object
10  insured_sex                     753 non-null   object  31  total_claim_amount          753 non-null  int64
11  insured_education_level         753 non-null   object  32  injury_claim                753 non-null  int64
12  insured_occupation              753 non-null   object  33  property_claim              753 non-null  int64
13  insured_hobbies                 753 non-null   object  34  vehicle_claim               753 non-null  int64
14  insured_relationship            753 non-null   object  35  auto_make                   753 non-null  object
15  capital_gains                   753 non-null   int64  36  auto_model                  753 non-null  object
16  capital_loss                    753 non-null   int64  37  auto_year                   753 non-null  int64
17  incident_date                   753 non-null   object  38  fraud_reported              753 non-null  object
18  incident_type                   753 non-null   object  39  _c39                        0 non-null   float64
19  collision_type                  753 non-null   object
dtypes: float64(2), int64(17), object(21)

```

Figura 3.8: Descripción general de la base de datos

El número de reclamos que no tienen reporte de fraude son 753, cuyos montos totales se ven graficados en el siguiente histograma, con valor mínimo de 100 y valor máximo de 114920, con media de 50288.605:

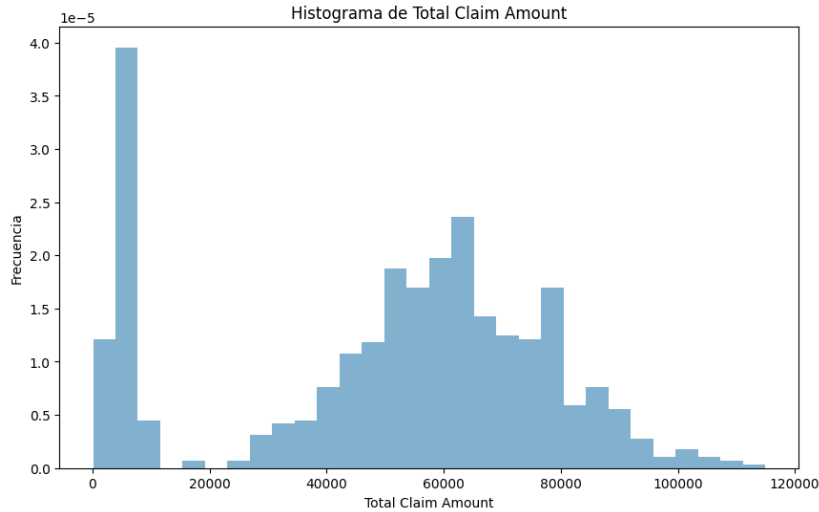


Figura 3.9: Histograma de las reclamaciones automovilísticas

Con esto, construimos la sucesión $\xi_n := (S_{n+1} - S_n)$ tal y como la definimos en (2.1), siendo $(S_{n+1} - S_n)$ el monto total por reclamaciones durante el periodo $(n, n - 1]$. Considerando que se tienen las reclamaciones registradas con su fecha en que fue recibida, se tomarán los periodos $(n, n - 1]$ como los días en los que se tenga registro de al menos un reclamo, se sumará el monto total reclamado por día y esta suma representará ξ_n . Habiendo hecho este proceso, se obtiene que la sucesión ξ_n tiene una cantidad de días registrados de 719 en donde 100 es el monto total diario con menor valor y 178950 es el monto total diario con un valor máximo. ξ_n tiene con una media de 52666.6481, con el siguiente histograma:

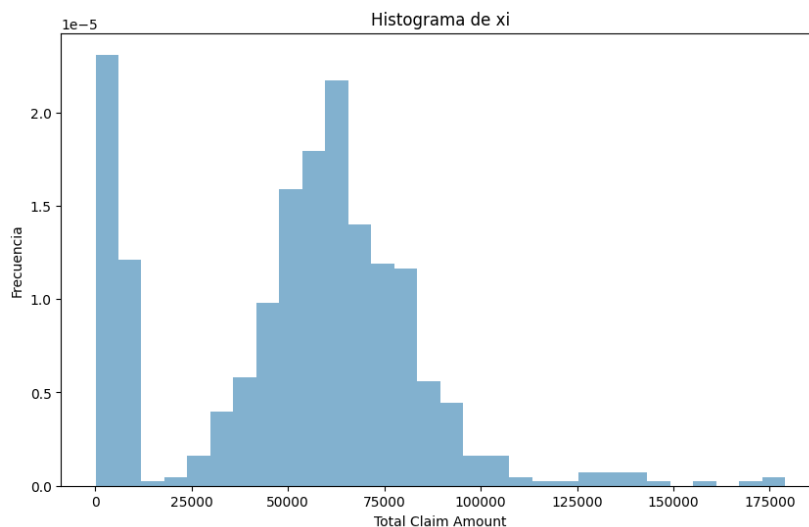


Figura 3.10: Histograma de ξ de las reclamaciones automovilísticas

Pero note que en la parte derecha del histograma están registrados valores muy grandes, lo cual podría dificultar la estimación de los parámetros de alguna distribución. Por tanto se hará una limpieza de los datos con el método Intercuartil y con ello se obtiene este nuevo histograma de ξ_n , donde ahora tiene un media de 50728.7215 y valor máximo de 114920.

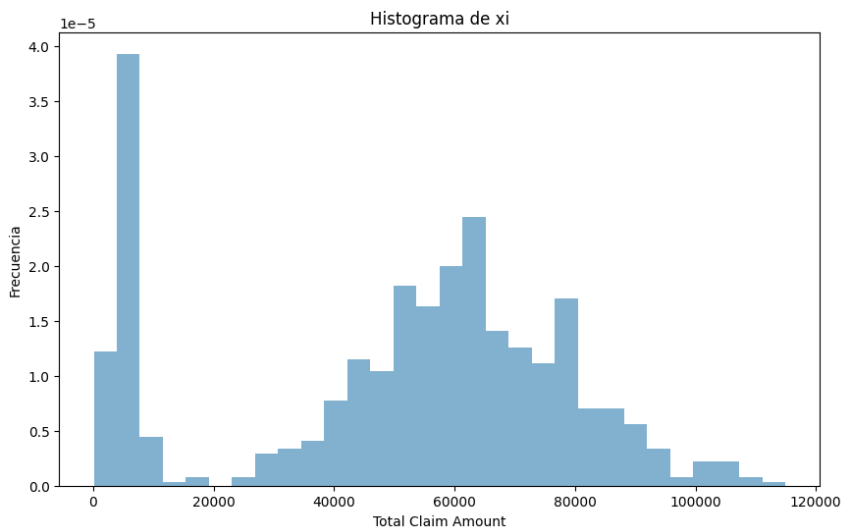


Figura 3.11: Histograma de las reclamaciones automovilísticas

Si denominamos como ξ a la variable aleatoria que representa los montos totales por reclamación registrados de manera diaria con los datos calculados en ξ_n , se observa que existen dos partes claras en las que se podría dividir su distribución. Esto se hará con el objetivo de estimar de una forma más precisa toda la distribución de los datos. Se dividen los valores de las reclamaciones en menores o iguales a 15000 y en mayores a este mismo valor, teniendo que sus histogramas individuales son:

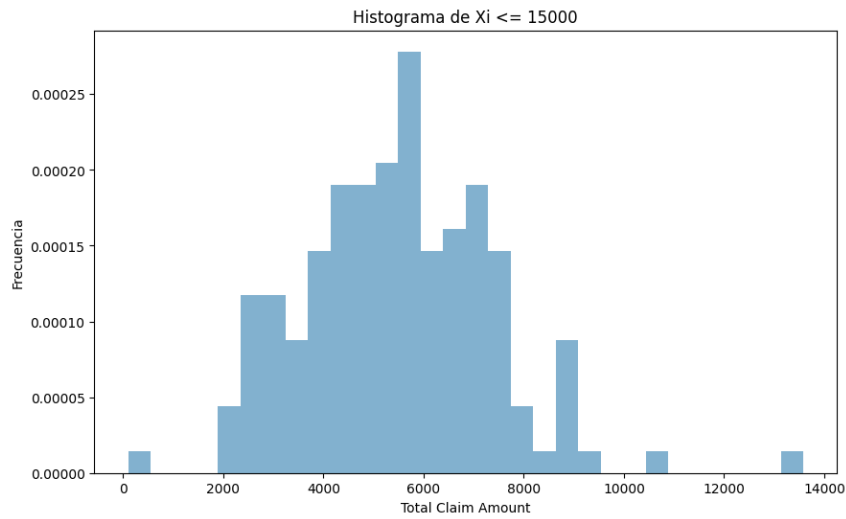


Figura 3.12: Histograma de valores de $\xi \leq 15000$

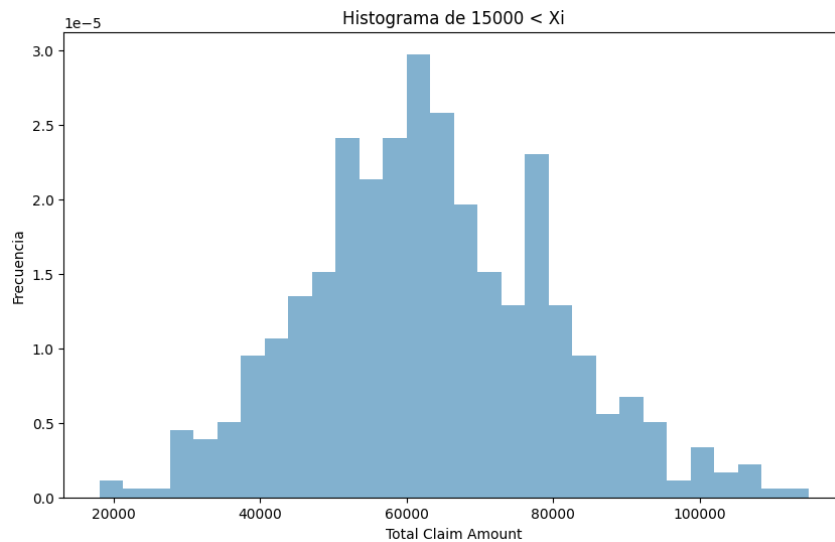


Figura 3.13: Histograma de valores de $\xi > 15000$

Analizando visualmente cada histograma, se puede deducir que en cada caso se puede ajustar una distribución de probabilidad gamma para describir los datos. Denominemos X_1 a la variable aleatoria de los montos de reclamo menores o iguales a 15000 y X_2 a la variable aleatoria de los montos de reclamación mayores a 15000.

En Apéndice B.2 se puede ver si una variable aleatoria W sigue una distribución gamma, esta tiene dos parámetros $\alpha > 0$ y $\lambda > 0$, correspondientes a la forma y a la escala de la distribución. Entonces, estimando los parámetros de una distribución gamma para X_1 de manera computacional (Ver Capítulo 4), llamándolos α_1 y λ_1 respectivamente, son

$$\alpha_1 = 46.7761 \quad \text{y} \quad \lambda_1 = 275.0074.$$

Para corroborar el supuesto de que X_1 sigue una distribución gamma con parámetros α_1 y λ_1 , haremos una prueba de hipótesis de Kolmogorov-Smirnov (ver Apéndice B.4) planteado como sigue:

Hipótesis Nula (H_0): X_1 sigue una distribución Gamma con parámetros α_1 y λ_1 .

Hipótesis Alternativa (H_a): X_1 no sigue una distribución Gamma con parámetros α_1 y λ_1 .

Usaremos el estadístico de prueba D de Kolmogorov-Smirnov, el cual tiene el valor de

$$D = 0.0368$$

Luego, calculando el valor p , obtenemos que

$$\text{Valor } p = 0.981508$$

Finalmente, usando un nivel de significancia de 0.05, tenemos que valor $p > 0.05$, por tanto no rechazamos la hipótesis nula. Por tanto $X_1 \sim \text{Gamma}(\alpha_1, \lambda_1)$.

Graficando el histograma de las reclamaciones X_1 con su respectiva distribución gamma que acabamos de ajustar, obtenemos lo siguiente:

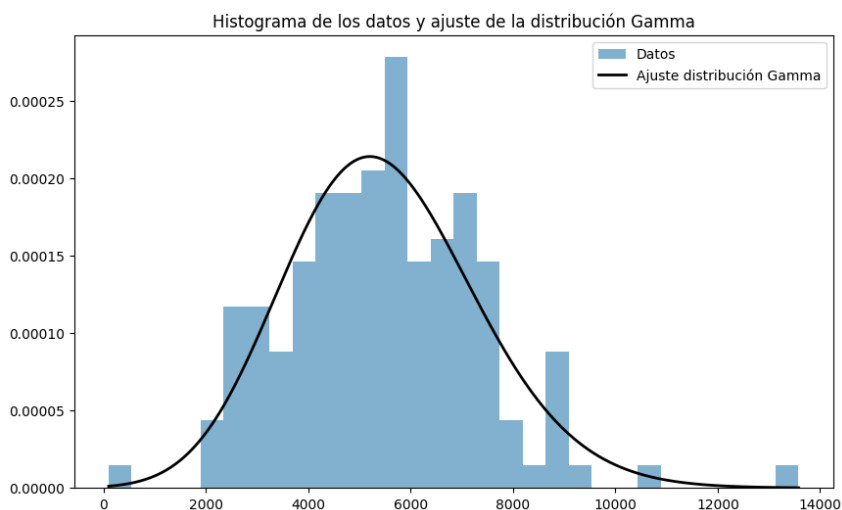


Figura 3.14: Ajuste de distribución gamma para los valores de $\xi \leq 15000$

Por tanto, su función de densidad f_1 es

$$f_1(x) = \frac{\lambda_1^{\alpha_1} x^{\alpha_1-1} e^{-\lambda_1 x}}{\Gamma(\alpha_1)}$$

con $\alpha_1 = 46.7761$, $\lambda_1 = 275.0074$ y $x > 0$.

De manera análoga, si definimos como X_2 a la variable aleatoria que represente a los montos de reclamaciones mayores a 15000 y estimando los parámetros α_2 y λ_2 de una distribución gamma, obtenemos que

$$\alpha_2 = 70.12658 \quad \text{y} \quad \lambda_2 = 1976.173307.$$

Luego, planteamos una prueba de hipótesis de Kolmogorov-Smirnov de la siguiente forma:

Hipótesis Nula (H_0): X_2 sigue una distribución Gamma con parámetros α_2 y λ_2 .

Hipótesis Alternativa (H_a): X_2 no sigue una distribución Gamma con parámetros α_2 y λ_2 .

Usaremos el estadístico de prueba D de Kolmogorov-Smirnov, el cual tiene el valor de

$$D = 0.028968$$

Calculando el valor p , tenemos que

$$\text{Valor } p = 0.73185$$

Así, usando un nivel de significancia de 0.05, tenemos que valor $p > 0.05$, por tanto no rechazamos la hipótesis nula. Por tanto $X_2 \sim \text{Gamma}(\alpha_2, \lambda_2)$.

En el siguiente gráfico se muestra el histograma de los montos por reclamaciones con el ajuste de la distribución gamma con parámetros α_2 y λ_2 .

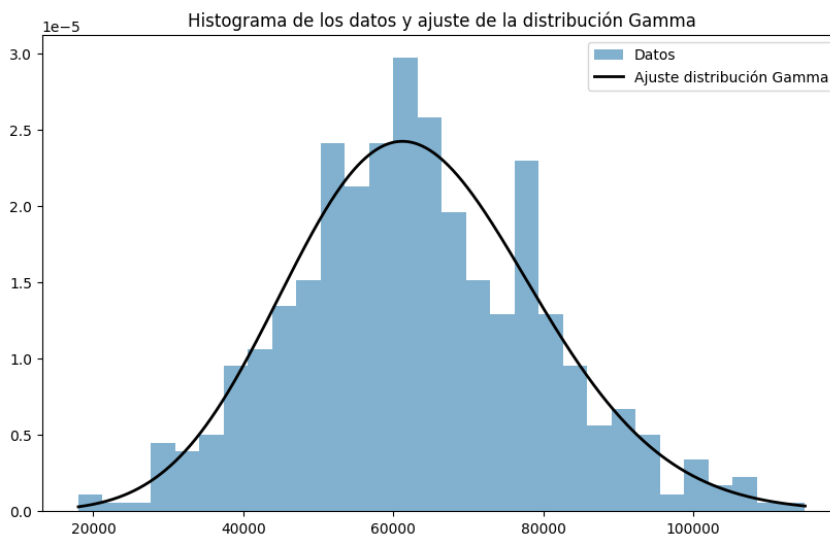


Figura 3.15: Ajuste de distribución gamma de los valores de $\xi > 15000$

Explícitamente, la función de densidad de este conjunto de reclamaciones X_2 es la siguiente:

$$f_1(x) = \frac{\lambda_2^{\alpha_2} x^{\alpha_2-1} e^{-\lambda_2 x}}{\Gamma(\alpha_2)}$$

con $\alpha_2 = 70.12658$, $\lambda_2 = 1976.173307$ y $x > 0$.

Por tanto, tenemos las distribuciones de probabilidad de cada parte en la que dividimos el total de montos de reclamo. Sin embargo, nos interesa tener una distribución global la cual se ajuste a todos los montos de reclamación. Usando las funciones de densidad f_1 y f_2 , definamos

$$f(x) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x)$$

donde $a_1 + a_2 = 1$.

Para estimar a_1 calculemos la proporción del número de datos de menores o iguales a 15000 entre el número total de datos y obtenemos que $a_1 = 0.21602$ y por tanto, $a_2 = 1 - a_1 = 0.786718$.

Entonces, explícitamente tenemos que f queda definido por

$$f(x) = 0.21602f_1(x) + 0.786718f_2(x)$$

donde f_1 y f_2 son las distribuciones gamma estimadas anteriormente.

Y así, definimos una distribución mixta que se ajusta a todos los montos de reclamación, cuyo gráfico se presenta a continuación:

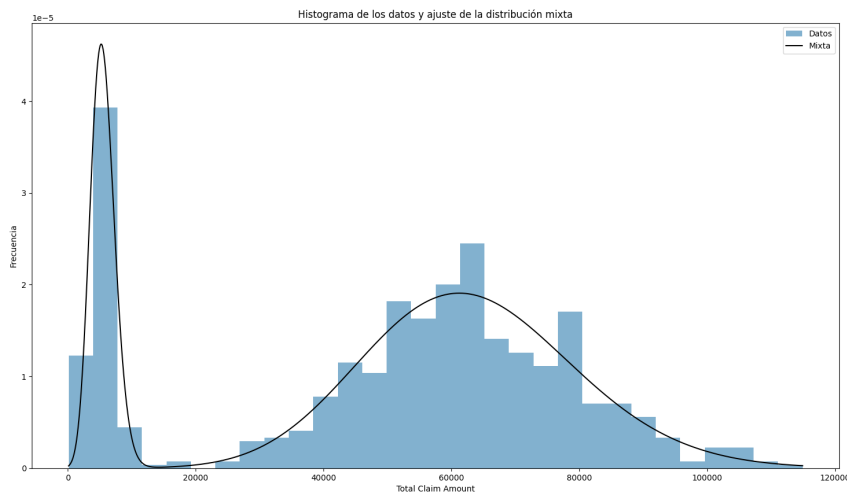


Figura 3.16: Ajuste de distribución mixta a las reclamaciones automovilísticas

3.2.2. Cálculo de la sostenibilidad del proceso de reserva

Antes de usar el Teorema 2.3.1 para calcular el tiempo de sostenibilidad del proceso de reserva, hagamos el cálculo de la esperanza de los montos de reclamo, cuya variable aleatoria denominaremos ξ , su función de densidad es f .

Notemos que $\mathbb{E}[\xi] = a_1\mathbb{E}[X_1] + a_2\mathbb{E}[X_2]$ y sabiendo anteriormente que $X_1 \sim \text{Gamma}(\alpha_1, \lambda_1)$ y $X_2 \sim \text{Gamma}(\alpha_2, \lambda_2)$, sus esperanzas serán, según lo planteado en el Apéndice B.2,

$$\mathbb{E}[X_1] = \frac{\alpha_1}{\lambda_1} = 5478.9473,$$

$$\mathbb{E}[X_2] = \frac{\alpha_2}{\lambda_2} = 63188.8043.$$

Entonces, $\mathbb{E}[\xi] = 50895.3591$.

Para corroborar que esta sea la esperanza de ξ , haremos una prueba de hipótesis para la media planteada de la siguiente manera:

Hipótesis Nula (H_0): La media de los datos μ_ξ es 50895.3591.

Hipótesis Alternativa (H_a): La media de los datos μ_ξ no es igual 50895.3591.

Usaremos un estadístico de prueba normal Z , calculado de la siguiente forma:

$$Z = \frac{\mu_\xi - \mathbb{E}[\xi]}{\sigma_\xi/\sqrt{n}} = \frac{50728.72159 - 50895.3591}{27934.72925/\sqrt{704}} = -0.15827$$

Luego, calculando el valor p para una prueba de dos colas, obtenemos que

$$\text{Valor } p = 2 * (1 - \Phi(Z)) = 0.874239$$

donde $\Phi(x)$ es la función de distribución acumulada de una distribución normal estándar.

Finalmente, usando un nivel de significancia de 0.05, tenemos que valor $p < 0.05$, por tanto no rechazamos la hipótesis nula. Así, $\mu_\xi = 50895.3591$.

Ahora, dado que $f(x)$ es la función de densidad de ξ , la siguiente función será la función de distribución acumulada de ξ :

$$F(x) = \begin{cases} 0.21513F_1(x) + 0.78486F_2(x), & x \leq 114920 \\ 1, & e.o.c \end{cases} \quad (3.5)$$

donde F_1 y F_2 son las funciones de distribución acumulada de X_1 y X_2 respectivamente.

Por tanto, se tiene lo necesario para poder empezar a trabajar en la aplicación del Teorema 2.3.1 para encontrar el tiempo de sostenibilidad de la aseguradora. Suponga que para un capital inicial $u > 0$, $\Psi_d^N(u) = 0.001$ y $\nu := 1 - \psi_d^N(u)$, con $N > 0$ representando la cantidad de días de sostenibilidad. También se escoje Z de tal manera que $\mathbb{P}[\xi < M + Z] = \nu$.

Empleando un factor de recargo $\theta = 0.2$ y usando el Principio de Valor Esperado, se obtiene que la prima óptima M es:

$$M = (1 + \theta)\mathbb{E}(\xi) = 61074.4309$$

Por tanto, como escogimos Z de tal forma que $\mathbb{P}[\xi < Z] = \nu$, Z tendrá que satisfacer la ecuación

$$F(Z) - \nu = 0$$

que encuentra solución en $Z = 48916.3549$.

En la inecuación (2.9), se toma la ecuación:

$$\psi_d^N(u) = (\mathbb{P}[\xi < Z + M])^{N-2} \cdot \mathbb{P}[\xi < u + M] \quad (3.6)$$

y, teniendo el supuesto para $u > 0$, $\psi_d^N(u) = 0.001$, previamente calculado $M = 61074.4309$, $Z = 48916.3549$ y con (3.5) como la función de distribución de ξ , se calcula el valor de N en (3.6) como sigue:

$$N = \frac{\ln\left(\frac{\psi_d^N(u)}{\mathbb{P}[\xi < u + M]}\right)}{\ln(\mathbb{P}[\xi < Z + M])} + 2 \quad (3.7)$$

Para distintos valores de u , sea $u = 1, 2, 3$ se tiene los siguientes resultados para el valor de N :

$$\begin{aligned} \text{Para } u = 1, & \quad N = 63371.34 \\ \text{Para } u = 2, & \quad N = 63371.67 \\ \text{Para } u = 3, & \quad N = 63372.00 \end{aligned}$$

Nota: Se consideran dichos valores pequeños de u dadas las complicaciones computacionales que implica usar un valor de u muy grande, ya que el programa da resultados de N infimamente grandes.

Así, el Proceso de Reserva (2.8) queda definido de la siguiente forma:

$$x_{n+1}^M = \min\{[x_n^M + M - \xi_n]^+, Z\},$$

con $M = 61074.4309$, $Z = 48916.3549$ y $x_0^M = u > 0$.

Una simulación del proceso de reserva con $u = 60000$ puede ser el siguiente, el cual cae en ruina después del día 40.

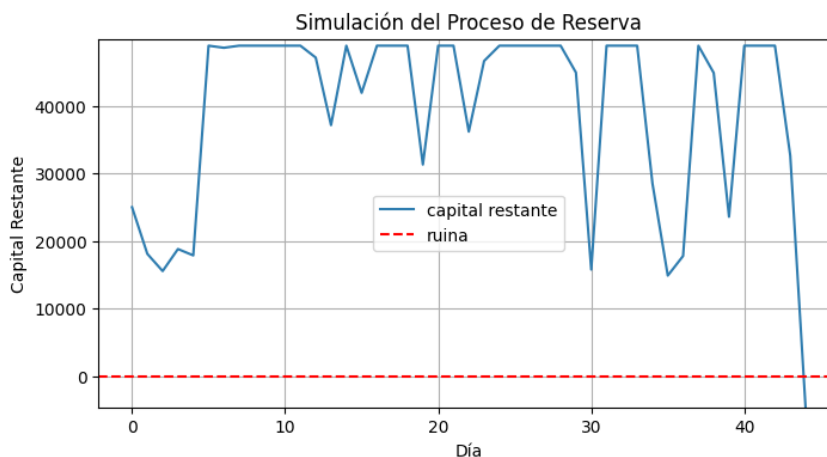


Figura 3.17: Una simulación del proceso de reserva de reclamaciones automovilísticas con $u = 60000$

3.2.3. Solución al proceso de decisión de Markov

Así como en el caso de estudio anterior, en la Observación 2.1.1 se plantea un nuevo Proceso de Decisión de Markov en base al proceso de reserva. Para el cálculo de K y M que conforman al conjunto de acciones $A(x)$, habrá que escoger ϵ y θ tales que $\epsilon < \theta$ para conseguir que $K < M$. Entonces, sea $\epsilon = 0.1$ y, ya habíamos escogido $\theta = 0.2$. Luego, usando el Principio de Valor Esperado y sabiendo que $\mathbb{E}[\xi] = 50433.1584$,

$$K = (1 + \epsilon)\hat{\mathbb{E}}[\xi] = 55984.89505$$

y, de la sección anterior conocemos $M = 61074.4309$.

Por tanto, con $Z = 50669.5739$ y con K y M ya estimadas, obtenemos que el proceso de Decisión de Markov queda definido de la siguiente forma:

- Espacio de estados: $X = [0, \infty]$.
- Espacio de acciones: $A = [55984.89505, 61074.4309]$.
- Conjunto de acciones admisibles: $A(x) = [55984.89505, 61074.4309]$ para todo $x \in X$.
- Ley de transición: $Q(x, a, s) = \min\{[x + a - s]^+, 48916.3549\}$ para cada $(x, a) \in \mathbb{K}$.
- Función de costo por etapa: $c(x, a) := [48916.3549 - x]^+$.

Luego, el problema será encontrar la sucesión de primas $\pi = \{a_n\}$ que optimicen la ecuación (2.4), que con los resultados que se tienen, nos queda que la ecuación a optimizar es:

$$v_\tau(\pi, u) := \mathbb{E}_u^\pi \left[\sum_{n=0}^{\infty} \tau^n [48916.3549 - x_n]^+ \right],$$

donde $u \geq 0$ es la reserva inicial, τ es un factor de descuento dado y, x_n representa las reclamaciones hechas para $n = 1, 2, \dots$

Por el Teorema 2.2.1, la política que optimiza el PDM es $f^*(\cdot) = M = 61074.4309$. Por tanto, la función de valor óptimo queda definida:

$$V_\tau^*(x) = v_\tau(M, x) = \mathbb{E}_x^M \left[\sum_{n=0}^{\infty} \tau^n [Z - x_n]^+ \right] = \mathbb{E}_x^{61074.4309} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \tau^n [48916.3549 - x_n]^+ \right],$$

para cada $x \in X$. Es decir, el coste total descontado previsto de las penalizaciones por no alcanzar la barrera $Z = 48916.3549$, y por tanto no pagar los dividendos a los clientes es traído al valor actual dado por el factor de descuento τ .

Capítulo 4

Codificación en Python

En este Apéndice se presenta el código en Python utilizado para la implementación del capítulo 'Casos de Estudio'. El código está organizado en el mismo orden en que se analizaron las bases de datos y estructurado según el análisis hecho.

4.1. Reclamaciones TSA

Primero mostraremos el código con el cual fue hecho todo el análisis estadístico e implementación del teorema 2.3.1 de la base de datos de la TSA.

4.1.1. Análisis de Datos

```
#Librerías generales usadas a lo largo de toda la implementación
import pandas as pd #librería para manejar bases de datos
import numpy as np #librería para realizar álgebra lineal
import seaborn as sns #librería alterna para manejo de bases de datos
import matplotlib.pyplot as plt #librería para realizar gráficos
import scipy.stats as stats #librería para realizar pruebas estadísticas

#Guardamos la base de datos con ayuda de la librería pandas
DF = pd.read_csv('tsa_claims.csv')

#Dimensiones de la base de datos
DF.shape

#Información sobre datos no nulos, tipos de datos y nombre de cada columna
DF.info()

#Quitamos columnas que no son de interés y guardamos en otra base de datos
DF1 = DF.drop(columns=['Airport Code', 'Airport Name', 'Airline Name', '
    Claim Site', 'Item'])

#Quitamos símbolos raros en las columnas de reclamos
DF1['Claim Amount'] = DF1['Claim Amount'].str.replace('$', '', regex=False)
DF1['Claim Amount'] = DF1['Claim Amount'].str.replace('; ', '', regex=False)
DF1['Claim Amount'] = DF1['Claim Amount'].str.replace('-', '', regex=False)
```

```
DF1['Close Amount'] = DF1['Close Amount'].str.replace('$', '', regex=False)
DF1['Close Amount'] = DF1['Close Amount'].str.replace('; ', '', regex=False)
DF1['Claim Type'] = DF1['Claim Type'].replace('-', np.nan)

#Convertimos los tipos de datos de las siguientes columnas correspondientes
DF1['Claim Amount'] = pd.to_numeric(DF1['Claim Amount']) #Numerico
DF1['Close Amount'] = pd.to_numeric(DF1['Close Amount']) #Numerico
DF1['Date Received'] = pd.to_datetime(DF1['Date Received']) #Fecha

#Quitamos las filas donde las fechas están mal escritas
DF1['Date Received'] = pd.to_datetime(DF1['Date Received'], format='%m/%d/%Y',
                                     errors='coerce')
DF1['Incident Date'] = pd.to_datetime(DF1['Incident Date'], format='%m/%d/%Y',
                                     errors='coerce')
DF1 = DF1.dropna(subset=['Incident Date'])

#Contamos las filas duplicadas
DF1[(DF1.duplicated())].count()
#Quitamos las filas duplicadas y vemos la dimensión de la base de datos
DF1 = DF1.drop_duplicates()

#Quitamos los datos que tienen valor 0.0 en la columna de reclamos
DF1 = DF1[DF1['Close Amount'] != 0.0]

#Quitamos datos nulos en reclamos, tipo de reclamo y disposición
DF1 = DF1.dropna(subset=['Claim Type'])
DF1 = DF1.dropna(subset=['Close Amount'])

#Reiniciamos los índices de la base de datos
DF1 = DF1.reset_index(drop=True)

#Vemos los datos únicos de las columnas de tipo de reclamo, estatus y
disposición
for column in ['Claim Type', 'Status', 'Disposition']:
    valores_unicos = DF1[column].unique()
    print(f"Valores únicos en la columna '{column}':")
    print(valores_unicos) #Imprime valores únicos
    print() # Imprime una línea en blanco

#Clasificamos la base de datos por tipos de reclamos
Tipos = {tipo: DF1[DF1['Claim Type'] == tipo] for tipo in DF1['Claim Type'].
         unique()}

#Reiniciamos los índices de cada base de datos por tipo
for tipo in Tipos.keys():
    Tipos[tipo] = Tipos[tipo].reset_index(drop=True)

#Histograma del tipo de reclamo 'Passager theft'
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.hist(Tipos['Passenger Theft']['Close Amount'].values, bins=60, density=
         True, alpha=1, color = '#6ab1d5', label='Datos')
plt.show()

#Ciclo para hacer limpieza de los tipos de reclamo por método intercuartil
for i in list(Tipos.keys()): #se recorren los tipos
```

```
x1 = Tipos[i]['Close Amount'].quantile(0.25) #se calcula el cuantil
0.25 del tipo i
x2 = Tipos[i]['Close Amount'].quantile(0.75) #se calcula el cuantil
0.75 del tipo i

I = x2 - x1 #se calcula la londitud entre los cuantiles calculados

lower_bound = x1 - 1.5 * I #Se calcula el límite inferior
upper_bound = x2 + 1.5 * I #Se calcula el límite superior

print(i, ' : x1 = ', lower_bound, ', x2 = ', upper_bound)
print(' x1: ', len(Tipos[i][ (Tipos[i]['Close Amount'] < lower_bound) ]),
      ' x2: ', len(Tipos[i][ (Tipos[i]['Close Amount'] > upper_bound) ]))

Tipos[i] = Tipos[i][ ( (Tipos[i]['Close Amount'] >= lower_bound) & (Tipos[
i]['Close Amount'] <= upper_bound) ) ] #Se eliminan los datos outliers

#Reiniciamos los índices de cada base de datos por tipo
for tipo in Tipos.keys():
    Tipos[tipo] = Tipos[tipo].reset_index(drop=True)

#Contamos la cantidad de datos por cada tipo de reclamo
suma = 0
for tipo in Tipos.keys():
    print(f"Cantidad de datos en: {tipo}: {len(Tipos[tipo]['Close Amount'])
}")
    suma += len(Tipos[tipo]['Close Amount'])
print(f"\nTotal de datos: {suma}")

#Descripción estadística de 'Passenger Property Loss'
Tipos['Passenger Property Loss']['Close Amount'].describe()

#Histograma y distribución de 'Passenger Property Loss'
plt.figure(figsize=(10, 6))
sns.histplot(Tipos['Passenger Property Loss']['Close Amount'], bins=10, kde=
True) # Gráfica de distribución
plt.show()
```

Ahora, el código que sigue realiza la construcción de ξ que representa los montos totales por reclamación en cada etapa n , además se muestra la forma en la que se hizo la estimación de la distribución de probabilidad Gamma de ξ .

```
#Se guarda la base de datos de los registros por 'Passenger Property Loss'
DF2 = Tipos['Passenger Property Loss']

#Se ordenan los registros por fechas
DF2 = DF2.sort_values(by='Date Received') # Ordenar por la columna de fecha
DF2 = DF2.reset_index(drop=True)

#Se agrupan las reclamaciones por día
reclamaciones_por_dia = DF2.groupby(DF2['Date Received'].dt.date)['Close
Amount'].count()

#Se agrupan por día las reclamaciones y se suman los montos
monto_por_dia = DF2.groupby(DF2['Date Received'].dt.date)['Close Amount'].
sum()
```

```
#Se convierte el resultado a un dataframe
monto_por_dia = monto_por_dia.reset_index()
monto_por_dia.columns = ['fecha', 'total_monto'] #Tendrá columnas de fecha y
    monto total

#Se observa el monto mínimo total por día y el monto máximo
min(montos), max(montos)

#Histograma de xi
plt.figure(figsize=(10, 6))
sns.histplot(monto_por_dia['total_monto'], bins=10, kde=True)
plt.title('Passenger Property Loss')
plt.show()

#Se hace una limpieza de xi por método intercuartil
x1 = monto_por_dia['total_monto'].quantile(0.25) #se calcula el cuantil
    0.25 de la columna i
x2 = monto_por_dia['total_monto'].quantile(0.75) #se calcula el cuantil
    0.75 de la columna i

I = x2 - x1 #se calcula la longitud entre los cuantiles calculados

lower_bound = x1 - 1.5 * I #Se calcula el límite inferior para la limpieza
upper_bound = x2 + 1.5 * I #Se calcula el límite superior para la limpieza

print(i, ': x1 = ', lower_bound, ', x2 = ', upper_bound)
print(' x1: ', len(monto_por_dia[monto_por_dia['total_monto'] <
    lower_bound]), ', x2: ', len(monto_por_dia[monto_por_dia['total_monto']
    > upper_bound]))

monto_por_dia = monto_por_dia[((monto_por_dia['total_monto'] >= lower_bound)
    & (monto_por_dia['total_monto'] <= upper_bound))] #Se eliminan los
    datos outliers

#Histograma de xi
plt.figure(figsize=(10, 6))
sns.histplot(monto_por_dia['total_monto'], bins=10, kde=True)
plt.title('Passenger Property Loss')
plt.show()

#Se guarda en un arreglo los montos por día
montos = monto_por_dia['total_monto'].values
print(np.mean(montos)) #Se ve la media de los montos
print(len(montos)) #Cantidad total de días con reclamación

#Estimación de distribución gamma
#Estimación de parámetros gamma
params1 = stats.gamma.fit(montos, floc=0)
shape1, loc1, scale1 = params1

#Se imprime los parámetros estimados
print(f"Parámetros estimados de la distribución Gamma:\n - Forma (shape): {
```

```
shape1}\n - Locación (loc): {loc1}\n - Escala (scale): {scale1}")

#Prueba Kolmogorov-Smirnov
#Estadístico de prueba y valor p
D, p_value = stats.kstest(montos, 'gamma', args=params1)
print(f"\nResultado de la prueba K-S:\n - Estadístico D: {D}\n - Valor p: {
    p_value}")

#Dictamen
alpha = 0.05
if p_value > alpha:
    print("\nNo se rechaza la hipótesis nula: Los datos podrían seguir una
    distribución Gamma.")
else:
    print("\nSe rechaza la hipótesis nula: Los datos no siguen una
    distribución Gamma.")

#Histograma y ajuste de distribución gamma
x = np.linspace(min(montos), max(montos), 1000)
pdf = stats.gamma.pdf(x, shape1, loc1, scale1)
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.hist(montos, bins=30, density=True, alpha=0.6, color='#2f7db0', label='
    Datos')
plt.plot(x, pdf, 'k-', lw=2, label='Ajuste distribución Gamma')
plt.title("Histograma de los datos y ajuste de la distribución Gamma")
plt.legend(loc='best')
plt.show()
```

Para el cálculo de la esperanza se utilizó la siguiente codificación:

```
from scipy.stats import gamma, norm
from scipy.integrate import quad

#Cálculo de media de la distribución gamma
data = montos
gamma_dist = gamma(a=shape1, loc=loc1, scale=scale1)
esperanza_gamma = gamma_dist.mean()

#Cálculo de la media y desviación estándar de los datos
media_datos = np.mean(data)
desv_std_datos = np.std(data, ddof=1)
n = len(data)

#Cálculo del valor z
z = (media_datos - esperanza_gamma) / (desv_std_datos / np.sqrt(n))

#Cálculo el valor p para una prueba de dos colas
p_valor = 2 * (1 - norm.cdf(abs(z)))

#Resultado
print("Esperanza estimada", esperanza_gamma)
print("Media de los datos:", media_datos)
print("Valor z:", z)
print("Valor p:", p_valor)
```

```
#Conclusión
alpha = 0.05
if p_valor < alpha:
    print("Rechazamos la hipótesis nula: la esperanza no representa la media
de los datos.")
else:
    print("No rechazamos la hipótesis nula: la esperanza puede representar
la media de los datos.")
```

4.1.2. Cálculo de la sostenibilidad del proceso de reserva

A continuación se detalla el proceso computacional que se siguió para la aplicación del Teorema 2.3.1.

```
#Función para resolver ecuaciones
from scipy.optimize import root_scalar

#Parámetros
K = (1+0.1)*esperanza_gamma #Valor K
M = (1+0.2)*esperanza_gamma #Valor M
v = 0.999 #Probabilidad objetivo

#Se define la función g(x) para encontrar la raíz
def g(x):
    n = len(data)
    return stats.gamma.cdf(x+M, a=shape1, loc=loc1, scale=scale1) - p

#Se calcula el valor de Z
resultado = root_scalar(g, bracket=[0, 1000000], method='bisect')

#Valor de Z
Z = resultado.root if resultado.converged else None
print("Valor de Z:", Z)
print("Valor de M:", M)
print("Valor de K:", K)

#Cálculo de N
u = 1
N = ((np.log(0.0001/stats.gamma.cdf(u+M)))/np.log(stats.gamma.cdf(M+Z)))+2

#Simulación del Proceso de Reserva
# Parámetros de la simulación
u = 3000 # Capital inicial
c = M # Ingreso por primas
N = int(N) # Número de días de reserva

#Datos de reclamaciones
datos_reclamaciones = montos

#Distribución gamma
gamma_pdf = gamma(a=shape1, loc=loc1, scale=scale1)

# Inicializar el capital restante
capital_restante = [u]
```

```
# Simulación del proceso de reserva
for i in range(N):
    reclamacion = gamma.rvs(a=shape1, loc=loc1, scale=scale1) # Genera una
    reclamación
    nuevo_capital = capital_restante[-1] + c - reclamacion
    if nuevo_capital <= 0:
        capital_restante.append(nuevo_capital)
        break # Ruina alcanzada
    elif nuevo_capital > Z:
        nuevo_capital = Z
    capital_restante.append(nuevo_capital)

#Gráfico del proceso de reserva en estilo continuo
plt.figure(figsize=(8, 4))
plt.plot(capital_restante, linestyle='-', color='b', label='capital
         restante')
plt.title("Simulación del Proceso de Reserva")
plt.xlabel("Dia")
plt.ylabel("Capital Restante")
plt.axhline(0, color='r', linestyle='—', label='ruina') # Línea de ruina
plt.ylim(min(capital_restante) - 1, max(capital_restante) + 1)
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.show()
```

4.2. Reclamaciones Automovilísticas

Acorde al orden, es momento de ver la codificación seguida para el análisis de datos y de la aplicación del Teorema 2.3.1 para la base de datos con las reclamaciones por accidentes automovilísticos.

4.2.1. Análisis de datos

```
#Librerías generales usadas a lo largo de toda la implementación
import pandas as pd #librería para manejar bases de datos
import numpy as np #librería para realizar álgebra lineal
import seaborn as sns #librería alterna para manejo de bases de datos
import matplotlib.pyplot as plt #librería para realizar gráficos
import scipy.stats as stats #librería para realizar pruebas estadísticas

#Guardamos la base de datos con ayuda de la librería pandas
DF = pd.read_csv('insurance_claims.csv')

#Dimensiones de la base de datos
DF.shape

#Información sobre datos no nulos, tipos de datos y nombre de cada columna
DF.info()

#Guardamos las reclamaciones sin reporte de fraude
DF = DF[DF['fraud_reported']!= 'N']
```

```
#Reiniciamos los índices de las filas
DF = DF.reset_index(drop=True)

#Vemos la descripción estadística de los montos totales por reclamos
DF['total_claim_amount'].describe()

#Extraemos los valores de las reclamaciones
claims = DF['total_claim_amount'].values

#Histograma de las reclamaciones
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.hist(claims, bins=30, density=True, alpha=0.6, color='g', label='Datos')
plt.show()

#Se dividen los reclamos en dos partes
limite_inferior = 10790
DF_1 = DF[(DF['total_claim_amount'] <= 10790)]
DF_2 = DF[(DF['total_claim_amount'] > 10790)]
print(f"Cantidad de datos:\n - Primera parte: {len(DF_1)}\n - Segunda parte:
      {len(DF_2)}")

#Se guardan los valores de ambas partes de las reclamaciones
claims1 = DF_1['total_claim_amount'].values
claims2 = DF_2['total_claim_amount'].values

#Gráfico individual de cada parte de las reclamaciones
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.hist(claims1, bins=30, density=True, alpha=0.6, color='g', label='Datos')
plt.show()

plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.hist(claims2, bins=30, density=True, alpha=0.6, color='g', label='Datos')
plt.show()

Luego, se presenta la construcción de  $\xi$  y la manera en la que se estimaron los parámetros de cada distribución gamma y de la distribución mixta.

#Se agrupa por día y suma los montos
monto_por_dia = DF.groupby(DF['policy_bind_date'].dt.date)['total_claim_amount'].sum()

#Se convierte el resultado a un dataframe
monto_por_dia = monto_por_dia.reset_index()
monto_por_dia.columns = ['fecha', 'total_monto']

#Se toman los valores de los montos totales por día
montos = monto_por_dia['total_monto'].values
print(len(montos)) #número de días con registros
print(np.mean(montos)) #Media de los montos totales por día

#Histograma de xi
plt.figure(figsize=(10, 6))
```

```
plt.hist(montos, bins=30, density=True, alpha=0.6, color='#2f7db0')
plt.xlabel('Total Claim Amount')
plt.ylabel('Frecuencia')
plt.title('Histograma de xi')
plt.show()

#División de los datos
limite = 15000
M_1 = monto_por_dia[monto_por_dia['total_monto'] <= limite]
M_2 = monto_por_dia[(monto_por_dia['total_monto'] > limite) & (monto_por_dia
    ['total_monto'] < 120000)]
M_3 = monto_por_dia[monto_por_dia['total_monto'] >= 120000]
print(f"Cantidad de datos:\n - Primera parte: {len(M_1)}\n - Segunda parte:
    {len(M_2)}\n - Segunda parte: {len(M_3)}")

#Limpieza de xi por método intercuartil
x1 = monto_por_dia['total_monto'].quantile(0.25) #se calcula el cuantil
    0.25 de la columna i
x2 = monto_por_dia['total_monto'].quantile(0.75) #se calcula el cuantil
    0.75 de la columna i

I = x2 - x1 #se calcula la longitud entre los cuantiles calculados

lower_bound = x1 - 1.5 * I #Se calcula el límite inferior para la limpieza
upper_bound = x2 + 1.5 * I #Se calcula el límite superior para la limpieza

print(' x1 = ', lower_bound, ', x2 = ', upper_bound)
print(' x1: ', len(monto_por_dia[monto_por_dia['total_monto'] <
    lower_bound]), ', x2: ', len(monto_por_dia[monto_por_dia['total_monto']
    > upper_bound]))

monto_por_dia = monto_por_dia[((monto_por_dia['total_monto'] >= lower_bound)
    & (monto_por_dia['total_monto'] <= upper_bound))] #Se eliminan los
    datos outliers

#Nuevo histograma de xi
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.hist(montos, bins=30, density=True, alpha=0.6, color='#2f7db0')
plt.xlabel('Total Claim Amount')
plt.ylabel('Frecuencia')
plt.title('Histograma de xi')
plt.show()

#Estimación de parámetros de la distribución gamma de la primera parte
montos1 = M_1['total_monto'].values
params1 = stats.gamma.fit(montos1)
shape1, loc1, scale1 = params1
print(f"Parámetros estimados de la distribución Gamma:\n - Forma (shape): {
    shape1}\n - Locacion (loc): {loc1}\n - Escala (scale): {scale1}")

#Estadístico de prueba y valor p con la prueba de Kolmogorov-Smirnov
```

```
D, p_value = stats.kstest(montos1, 'gamma', args=params1)
print(f"\nResultado de la prueba K-S:\n - Estadístico D: {D}\n - Valor p: {
    p_value}")

#Dictamen final de la prueba con alpha = 0.05
alpha = 0.05
if p_value > alpha:
    print("\nNo se rechaza la hipótesis nula: Los datos podrían seguir una
    distribución Gamma.")
else:
    print("\nSe rechaza la hipótesis nula: Los datos no siguen una
    distribución Gamma.")

#Histograma y la distribución gamma estimada
x1 = np.linspace(min(montos1), max(montos1), 1000)
pdf = stats.gamma.pdf(x1, shape1, loc1, scale1)
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.hist(montos1, bins=30, density=True, alpha=0.6, color='g', label='Datos')
plt.plot(x1, pdf, 'k-', lw=2, label='Ajuste distribución Gamma')
plt.title("Histograma de los datos y ajuste de la distribución Gamma")
plt.legend(loc='best')
plt.show()

#Estimación de parámetros de la distribución gamma de la segunda parte
montos2 = M_2['total_monto'].values
params2 = stats.gamma.fit(montos2)
shape2, loc2, scale2 = params2
print(f"Parámetros estimados de la distribución Gamma:\n - Forma (shape): {
    shape2}\n - Locacion (loc): {loc2}\n - Escala (scale): {scale2}")

#Estadístico de prueba y valor p de la prueba de hipótesis de Kolmogorov-
Smirnov
D, p_value = stats.kstest(montos2, 'gamma', args=params2)
print(f"\nResultado de la prueba K-S:\n - Estadístico D: {D}\n - Valor p: {
    p_value}")

#Dictamen de la prueba con alpha = 0.05
alpha = 0.05
if p_value > alpha:
    print("\nNo se rechaza la hipótesis nula: Los datos podrían seguir una
    distribución Gamma.")
else:
    print("\nSe rechaza la hipótesis nula: Los datos no siguen una
    distribución Gamma.")

#Gráfico del histograma y la distribución gamma estimada
x2 = np.linspace(min(montos2), max(montos2), 1000)
pdf_gamma = stats.gamma.pdf(x2, shape2, loc2, scale2)
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.hist(montos2, bins=30, density=True, alpha=0.6, color='g', label='Datos')
plt.plot(x2, pdf_gamma, 'k-', lw=2, label='Ajuste distribución Gamma')
plt.title("Histograma de los datos y ajuste de la distribución Gamma")
plt.legend(loc='best')
```

```
plt.show()

#Distribución mixta
montos = monto_por_dia['total_monto'].values

#Cálculo de pesos
a1 = len(M_1)/len(monto_por_dia['total_monto'])
a2 = 1 - a1
print(f"Pesos:\n - a1: {a1}\n - a2: {a2}\n Suma: {a1+a2}")

#Definición de los c_i
c0=min(montos1)
c1=max(montos1)
c2=min(montos2)
c3=max(montos2)

#Cálculo de F(c_i) y sus diferencias
Fc0 = stats.gamma.cdf(c0, shape1, loc1, scale1)
Fc1 = stats.gamma.cdf(c1, shape1, loc1, scale1)
Fc2 = stats.gamma.cdf(c2, shape2, loc2, scale2)
Fc3 = stats.gamma.cdf(c3, shape2, loc2, scale2)

dif1 = Fc1 - Fc0
dif2 = Fc3 - Fc2

#Reajuste de los pesos
a1 = a1/dif1
a2 = a2/dif2

#Función de densidad mixta con las dos distribuciones gamma
def mixed_gamma(x, a1, shape1, loc1, scale1, a2, shape2, loc2, scale2):
    return a1 * stats.gamma.pdf(x, a=shape1, loc=loc1, scale=scale1) + a2 *
        stats.gamma.pdf(x, a=shape2, loc=loc2, scale=scale2)

#Valores sobre el eje x para graficar
x = np.linspace(min(montos), max(montos), 1000)

#Se calcula las densidades de las gammas individuales y mixta
pdf_gamma1 = stats.gamma.pdf(x, a=shape1, loc = loc1, scale=scale1)
pdf_gamma2 = stats.gamma.pdf(x, a=shape2, loc = loc2, scale=scale2)
pdf_mixta = mixed_gamma(x, a1, shape1, loc1, scale1, a2, shape2, loc2,
    scale2)

#Gráfico de gammas individuales y distribución mixta
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.hist(montos, bins=30, density=True, alpha=0.6, color='g', label='Datos')
plt.plot(x, pdf_gamma1, 'r—', label=f'Gamma 1')
plt.plot(x, pdf_gamma2, 'b—', label=f'Gamma 2')
plt.plot(x, pdf_mixta, 'k-', label='Mixta')
plt.legend(loc='best')
plt.show()

#Gráfico de distribución mixta
plt.figure(figsize=(18, 10))
plt.hist(montos, bins=30, density=True, alpha=0.6, color='g', label='Datos')
```

```
plt.plot(x, pdf_mixta, 'k-', label='Mixta')
plt.legend(loc='best')
plt.show()
```

Luego, hacemos el cálculo de la esperanza de la distribución mixta, haciendo una prueba de hipótesis para corroborar que el resultado se ajuste a la media real.

```
#Esperanza de cada distribución gamma
mean1 = stats.gamma(a=shape1, scale=scale1).mean()
mean2 = stats.gamma(a=shape2, scale=scale2).mean()
#Esperanza de la distribución mixta
mean_mixture = a1 * mean1 + a2 * mean2

print("Esperanza de la primera distribución gamma:", mean1)
print("Esperanza de la segunda distribución gamma:", mean2)
print("Esperanza de la mezcla:", mean_mixture)

from scipy.integrate import quad
from scipy.stats import norm

#Se calcula la media y desviación estandar de los datos
media_datos = np.mean(montos)
desv_std_datos = np.std(montos, ddof=1)
n = len(montos)

#Se calcula el valor z
z = (media_datos - mean_mixture) / (desv_std_datos / np.sqrt(n))

#Se calcula el valor p para una prueba de dos colas
p_valor = 2 * (1 - norm.cdf(abs(z)))

#Resultado
print("Esperanza estimada:", mean_mixture)
print("Media de los datos:", media_datos)
print("Valor z:", z)
print("Valor p:", p_valor)

#Conclusión
alpha = 0.05
if p_valor < alpha:
    print("Rechazamos la hipótesis nula: la esperanza no representa la media
          de los datos.")
else:
    print("No rechazamos la hipótesis nula: la esperanza puede representar
          la media de los datos.")
```

4.2.2. Cálculo de la sostenibilidad del proceso de reserva

Así como en el caso de estudio anterior, después del análisis estadístico y haber estimado la función de densidad que siguen los datos, procedemos a resolver computacionalmente la aplicación del Teorema 2.3.1.

```
#Librería para integrar
from scipy import stats, integrate
```

```
#Se define la función de distribución acumulada
def mixed_gamma_cdf(x, a1, shape1, loc1, scale1, a2, shape2, loc2, scale2):
    if x < 0: #soporte gamma es positivo
        return 0.0

    elif x > max(montos):
        return 1.0

    cdf, _ = quad(
        mixed_gamma, #Función a integrar
        0, x, #Límites de integración
        args=(a1, shape1, loc1, scale1, a2, shape2, loc2, scale2)
    )
    return cdf

#Librería para encontrar raíces
from scipy.optimize import root_scalar

#Parámetros
K = (1+0.1)*mean_mixture #Valor K
M = (1+0.2)*mean_mixture #Valor M
v = 0.999 # Probabilidad objetivo

#Función inversa de la función de distribución
def mixed_gamma_icdf(p, a1, shape1, loc1, scale1, a2, shape2, loc2, scale2):
    if not 0 <= p <= 1:
        raise ValueError("La probabilidad p debe estar entre 0 y 1.")

    #Función para resolver F(x) - p = 0
    def func(x):
        return mixed_gamma_cdf(x+M, a1, shape1, loc1, scale1, a2, shape2,
        loc2, scale2) - p

    #Se busca la raíz usando un intervalo razonable
    result = root_scalar(func, bracket=[0, 1000000], method='bisect')

    if result.converged:
        return result.root
    else:
        raise ValueError("No se pudo calcular la inversa de la CDF.")

#Valor de Z
Z = mixed_gamma_icdf(0.999, a1, shape1, loc1, scale1, a2, shape2, loc2,
    scale2)
print("Valor de Z:", Z)
print("Valor de M:", M)

#Cálculo de N
u = 1 #Capital inicial
N = ((np.log(0.001/mixed_gamma_cdf(u+M)))/np.log(mixed_gamma_cdf(M+Z)))+2

#Simulación del proceso de reserva
# Parámetros de la simulación
```

```
u = 25000    #Capital inicial
c = M       #Ingreso constante por primas
N = int(N)  #Número de días de reserva

#Densidad de gamma mixta
pdf_mixta = mixed_gamma(x, a1, shape1, loc1, scale1, a2, shape2, loc2,
                        scale2)

# Inicializar el capital restante
capital_restante = [u]

#Función para generar reclamaciones
def generar_reclamacion():
    #Elegir entre la primera y la segunda distribución basada en los pesos
    if np.random.rand() < a1:
        #Generar un valor aleatorio de la primera distribución gamma
        return stats.gamma.rvs(a=shape1, loc=loc1, scale=scale1)
    else:
        #Generar un valor aleatorio de la segunda distribución gamma
        return stats.gamma.rvs(a=shape2, loc=loc2, scale=scale2)

#Simulación del proceso de reserva
for i in range(N):
    reclamacion = generar_reclamacion() #Genera una reclamación
    nuevo_capital = capital_restante[-1] + c - reclamacion
    if nuevo_capital <= 0:
        capital_restante.append(nuevo_capital)
        print("Ruina alcanzada en el día", i + 1)
        break #Ruina alcanzada
    elif nuevo_capital > Z:
        nuevo_capital = Z
    capital_restante.append(nuevo_capital)

#Gráfico el proceso de reserva en estilo continuo
plt.figure(figsize=(8, 4))
plt.plot(capital_restante, linestyle='-', color='b', label='capital
         restante')
plt.title("Simulación del Proceso de Reserva")
plt.xlabel("Día")
plt.ylabel("Capital Restante")
plt.axhline(0, color='r', linestyle='—', label='ruina') #Línea de ruina
plt.ylim(min(capital_restante) - 1, max(capital_restante) + 1)
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.show()
```

Capítulo 5

Conclusiones

A lo largo de este trabajo se ha analizado el comportamiento de un Proceso de Reserva para una compañía aseguradora, modelándolo mediante un Proceso de Decisión de Markov. Este enfoque permitió establecer una barrera Z , diseñada para evitar la acumulación excesiva de reservas y permitir a la empresa disponer de capital para inversiones o distribución de dividendos. El proceso descrito en (2.2) detalla el comportamiento de la reserva cuando se encuentra por debajo de esta barrera, induciendo el Proceso de Decisión de Markov descrito en la Observación 2.1.1.

Para encontrar la prima óptima, se propusieron dos funciones objetivo: una de costo descontado y otra de costo promedio. En ambos enfoques, se llegó a la conclusión de que la prima óptima es M , definida según el Principio de Valor Esperado. Con esta prima óptima, un capital inicial, una probabilidad de ruina y la barrera Z , se emplea el Teorema 2.3.1 para calcular el tiempo de sostenibilidad de la compañía bajo la política óptima.

En el primer caso particular que estudiamos, se llega a que la prima óptima es $M = 1433.5440$, mientras que la barrera Z se determinó que tiene un valor de 6909.6578. Esto permite establecer un tiempo de sostenibilidad de 6549.11 días para la reserva del tipo de seguro por 'Passenger Property Loss', teniendo un capital inicial y con ello una probabilidad de ruina definida. Y, como dijimos, solo se trata de una aplicación para un solo tipo de seguro en esta empresa, por lo que puede hacerse para más tipos de siniestros y con ello fijar una barrera global para la reserva.

Cabe destacar que la TSA es una entidad gubernamental con un plan de seguros para casos como los registrados en la base de datos estudiada. Por lo tanto, sus ganancias no se distribuyen entre accionistas, ya que el gobierno financia directamente los costos y requerimientos de la agencia. Sin embargo, estas ganancias pueden destinarse a reinversiones que mejoren la calidad del servicio al cliente, como la modernización de instalaciones y la adopción de nuevas tecnologías. Por esta razón, establecer un umbral para el capital disponible destinado a reclamos sigue siendo una medida relevante para asegurar una gestión eficiente y sostenible de los recursos.

En el segundo caso de estudio, al tratarse de una aseguradora privada, la empresa puede utilizar el excedente de reserva por encima de la barrera Z para distribuir dividendos entre sus accionistas o destinar un porcentaje a inversiones internas que mejoren sus operaciones. Dado que la prima óptima calculada es de 61074.4309 y que la barrera de reserva se ha fijado en 48916.3549, el proceso de reserva tiene un tiempo de sostenibilidad estimado de al menos 63371.34 días.

En general, es posible seguir un proceso similar al desarrollado en el caso de estudio para otros tipos de seguros, considerando los siguientes pasos: 1) Estimar la distribución del monto total de siniestros por intervalo de tiempo, lo cual es fundamental tanto para determinar

una cota de la probabilidad de ruina como para establecer el valor adecuado de la barrera; 2) Tomar factores de recargo, denotados por ϵ y θ con $\epsilon < \theta$, según el tipo de siniestro asegurado, y calcular las primas óptimas empleando el Principio de Valor Esperado; 3) Definir una probabilidad de ruina y determinar el valor de Z ; 4) Estimar el tiempo de sostenibilidad N .

La barrera de capital en el proceso de reserva y el cálculo del tiempo de sostenibilidad son herramientas clave que permiten a una empresa aseguradora desarrollar estrategias financieras efectivas y sostenibles. Con estos elementos, la empresa puede establecer planes de reinversión orientados a mejorar la calidad del servicio y satisfacción del cliente, lo cual contribuye a su posicionamiento competitivo en el mercado. Además, la implementación de una barrera de capital controlada permite explorar opciones para reducir las primas, ofreciendo productos financieros atractivos y accesibles para los clientes. Al mismo tiempo, esta estrategia asegura un balance adecuado de capital que respalde siniestros futuros, garantizando así la solvencia y estabilidad financiera a largo plazo, fundamental para la confianza del cliente y el crecimiento sostenido de la empresa.

Apéndice A

Procesos de control de Markov a tiempo discreto

En este Apéndice se toma la teoría mostrada acerca de Proceso de Control de Markov en el Capítulo de Preliminares para abarcar los problemas de costo descontado con horizonte infinito y problemas de costes medios a largo plazo, los cuales nos darán herramientas para encontrar la política óptima de nuestra función de costo objetivo al momento de manejar los procesos de reserva.

A.1. Problemas de costo descontado con horizonte infinito

El problema de control que nos interesa abordar en esta sección consiste en la minimización del costo total descontado en un horizonte infinito. Para este propósito, consideremos un modelo de control de Markov a tiempo discreto, representado por la quintupla $(X, A, \{A(x) \mid x \in X\}, Q, c)$. En este contexto, introducimos la siguiente suposición.

Supuesto A.1.1. *Supongamos que para todo $x \in X$, $A(x)$ es compacto, que el costo por etapa c es semicontinua inferior y no negativa y que la ley de transición Q es fuertemente continua, es decir, la función h' definida en \mathbb{K} por*

$$h'(x, a) := \int h(y)Q(dy|x, a)$$

es continua y acotada para cada función acotada y medible h en X .

Sea $(X, A, \{A(x)|x \in X\}, Q, c)$ un modelo de control de Markov a tiempo discreto. El *costo total descontado esperado* se define como

$$V(\pi, x) := \mathbb{E}_x^\pi \left[\sum_{t=0}^{\infty} \alpha^t c(x_t, a_t) \right], \quad (\text{A.1})$$

donde $\pi \in \Pi$, dado el estado inicial $x_0 = x \in X$. En este caso, $\alpha \in (0, 1)$ se define como un *factor de descuento* (notemos que α es fija), y \mathbb{E}_x^π denota la esperanza con respecto a la medida de probabilidad \mathbb{P}_x^π inducida por π y x (véase [4], [14]).

Se dice que una política π^* es óptima si

$$V(\pi^*, x) = V^*(x), \quad (\text{A.2})$$

para cada $x \in X$, donde

$$V^*(\cdot) := \inf_{\pi \in \Pi} V(\pi, \cdot) \quad (\text{A.3})$$

o también denominada la *función de valor óptimo*.

En lo siguiente, se supone que el costo por etapa c no es negativo y además, usaremos V_n para denotar el costo en la etapa n , definido como (véase [22])

$$V_n = \mathbb{E}_x^\pi \left[\sum_{t=0}^{n-1} \alpha^t c(x_t, a_t) \right], \quad (\text{A.4})$$

entonces, se puede escribir $V(\pi, x)$ como

$$V(\pi, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n(\pi, x).$$

Una función medible $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ se dice que es una solución a la *ecuación de optimalidad de costo total descontado* si satisface

$$g(x) = \min_{A(x)} \left[c(x, a) + \alpha \int_X g(y) Q(dy|x, a) \right], \quad \forall x \in X$$

Además, será útil considerar las funciones de iteración de valores definidas como

$$V_{\alpha, n}(x) := \min_{A(x)} \left[c(x, a) + \alpha \int_X v_{n-1}(y) Q(dy|x, a) \right] \quad (\text{A.5})$$

para todo $x \in X$ y $n = 1, 2, \dots$, con $V_{\alpha, 0}(\cdot) = 0$. Luego, notemos que $V_{\alpha, n}$ es la función de valor de la etapa n con costo descontado V_n en (A.4) con costo terminal cero, es decir

$$V_{\alpha, n}(x) = \inf_{\Pi} V_n(\pi, x), \quad \forall x \in X. \quad (\text{A.6})$$

Presentamos a continuación nuestro resultado principal en esta sección, relacionado con la Ecuación de Optimalidad y sus propiedades. Este resultado será clave para resolver el problema de decisión de Markov al implementarlo en el caso de estudio que desarrollaremos más adelante.

Teorema A.1.1. *Bajo el Supuesto A.1.1, tenemos lo siguiente (véase [5], [6]).*

(a) *La función de valor óptimo V^* satisface ser la solución minimal a la ecuación de optimalidad*

$$V^*(x) = \min_{a \in A(x)} \left\{ c(x, a) + \alpha \int V^*(y) Q(dy|x, a) \right\} \quad (\text{A.7})$$

para cada $x \in X$.

(b) *Existe una política estacionaria óptima $f_* \in \mathbb{F}$ tal que*

$$V^*(x) = c(x, f_*(x)) + \alpha \int V^*(y) Q(dy|x, f_*(x)) \quad (\text{A.8})$$

para cada $x \in X$.

(c) *Si π^* es una política tal que $V(\pi^*, \cdot)$ es una solución de la ecuación de optimalidad y satisface*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^n \mathbb{E}_x^{\pi^*} V(\pi^*, x_n) = 0 \quad (\text{A.9})$$

para toda $\pi \in \Pi$ y $x \in X$, entonces $V(\pi^*, \cdot) = V^*(\cdot)$. Por tanto π^* es α descontada óptima.

Para hacer la demostración de este último teorema será necesario presentar algunos lemas. El primero de ellos [Hernández-Lerma y Muñoz de Ozak (1992)], que habla sobre el intercambio de límites y mínimos.

Lema A.1.1. *Sea u y u_n con $n = 0, 1, \dots$, sean funciones semicontinuas inferiores, acotadas inferiormente y compactos en \mathbb{K} . Si $u_n \uparrow u$ (véase [25]), entonces*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \min_{A(x)} u_n(x, a) = \min_{A(x)} u(x, a), \quad \forall x \in X.$$

Demostración. Definamos, para $x \in X$,

$$l(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} \min_{A(x)} u_n(x, a) \text{ y } u^*(x) := \min_{A(x)} u(x, a).$$

Como $u_n \uparrow u$, tenemos $l(\cdot) \leq u^*(\cdot)$. Para probar la inecuación inversa, fijemos un estado arbitrario $x \in X$ y consideremos los conjuntos

$$\begin{aligned} A_n &:= \{a \in A(x) \mid u_n(x, a) \leq u^*(x)\}, \quad n = 1, 2, \dots, \\ A_0 &:= \{a \in A(x) \mid u(x, a) = u^*(x)\}. \end{aligned}$$

Por la hipótesis de inf-compacidad y la hipótesis de que $u_n \uparrow u$, cada uno de estos conjuntos es no vacío y compacto y A_n decrece a un conjunto compacto el cual es fácil de ver que es A_0 , es decir, $A_n \downarrow A_0$.

Para cada $n \geq 1$, sea $a_n \in A_n$ tal que $u_n(x, a_n) = \min_{A(x)} u_n(x, a)$ cuya existencia de tal a_n se asegura por la Proposición D.6. Por la compacidad y convergencia de $A_n \downarrow A_0$, existe un $a_0 \in A_0$ y una subsecuencia $\{a_{n_i}\}$ de $\{a_n\}$ tal que $a_{n_i} \rightarrow a_0$.

Ahora, usando que u_n es monótona creciente, tenemos para $n \geq 1$,

$$u_{n_i}(x, a_{n_i}) \geq u_n(x, a_{n_i}), \quad \forall n_i \geq n.$$

Tomando $i \rightarrow \infty$, la hipótesis de semicontinuidad inferior implica $l(x) \geq u_n(x, a_0)$, que a su vez, conforme $u_n \uparrow u$, implica $l(x) \geq u(x, a_0) = u^*(x)$. Como $x \in X$ fue arbitrario, la demostración queda concluida. □

Ahora introduzcamos la siguiente notación.

Definición A.1.1. $M(X)^+$ denota el conjunto de funciones medibles no negativas en X y, para cada $u \in M(X)^+$, T_u es la función en X definida como

$$T_u(X) := \min_{A(X)} \left[c(x, a) + \alpha \int_X u(y) Q(dy|x, a) \right], \quad x \in X. \quad (\text{A.10})$$

Lema A.1.2. *Supongamos que la Hipótesis A.1.1 se cumple. Bajo esta hipótesis, T mapea $M(X)^+$ en sí mismo. Además, existe un selector $f \in \mathbb{F}$ tal que*

$$T_u(x) = c(x, f) + \alpha \int_X u(y) Q(dy|x, f), \quad \forall x \in X.$$

Note también que, usando el operador T , se puede reescribir la ecuación de optimalidad (A.7) y las funciones de iteración de valores (A.5) como

$$V^* = TV^*, \text{ y } V_{\alpha, n} = TV_{\alpha, n-1},$$

respectivamente, para $n \geq 1$ con $v_0 := 0$.

Ahora, deseamos relacionar V^* con funciones u que satisfagan $u \geq Tu$ o $u \leq Tu$. Para ello, se presenta el siguiente lema que es útil para acotar el valor óptimo V^* desde arriba o desde abajo, dependiendo de la relación de una función medible u con el operador T .

Lema A.1.3. *Suponga que la Hipótesis A.1.1 se cumple. Entonces, se cumplen las siguientes proposiciones:*

- (a) *Si $u \in M(X)^+$ es de tal forma que $u \geq T_u$, entonces $u \geq V^*$.*
- (b) *Si $u : X \rightarrow \mathbb{R}$ es una función medible tal que T_u está bien definida, $u \leq T_u$ y*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^n \mathbb{E}_x^\pi [u(x_n)] = 0, \quad \forall x \in X, \quad (\text{A.11})$$

entonces $u \leq V^$.*

Demostración. Véase la demostración en [14] páginas 48-49. □

El lema que se presenta a continuación (Véase [14]) es esencial porque garantiza que V^* se puede obtener como el límite de una sucesión de aproximaciones y que cumple con la ecuación de optimalidad, lo cual es clave para resolver problemas de optimización en procesos de decisión de Markov.

Lema A.1.4. (Convergencia de las funciones de iteración de valores) *Supongamos que la Hipótesis A.1.1 se cumple. Entonces, $V_{\alpha,n} \uparrow V^*$ y V^* satisface la ecuación de optimalidad (A.7).*

Demostración. Notemos que, por (A.6), (A.1) y el supuesto de que $c \geq 0$,

$$V_{\alpha,n}(x) \leq V_n(\pi, x) \leq V(\pi, x), \quad \forall n, \pi, x.$$

Por tanto,

$$V_{\alpha,n}(x) \leq V^*(x), \quad \forall x \in X. \quad (\text{A.12})$$

Ahora, el operador T en (A.10) es monótona, es decir, que si u y u' son funciones en $M(X)^+$ tal que $u \geq u'$, entonces $Tu \geq Tu'$. Así, como $v_0 := 0$ y $v_n := Tv_{n-1}$ para $n \geq 1$, las funciones α -VI conforman una secuencia no decreciente en $M(X)^+$, lo que implica que $v_n \uparrow v^*$ para alguna función $v^* \in M(X)^+$.

Esto, a su vez implica $u_n \uparrow u$, donde

$$\begin{aligned} u_n(x, a) &:= c(x, a) + \alpha \int v_n(y) Q(dy|x, a), \\ u(x, a) &:= c(x, a) + \alpha \int v^*(y) Q(dy|x, a). \end{aligned}$$

Por otro lado, mostraremos que las funciones no negativas u y u_n ($n \geq 1$) son semicontinuas inferiormente e inf-compactas en \mathbb{K} . Así, por el Lema A.1.1,

$$v^* = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \lim_{n \rightarrow \infty} Tv_{n-1} = Tv^*,$$

es decir, v^* satisface la ecuación $v^* = Tv^*$.

Por tanto, solo resta mostrar que $v^* = V^*$. Por el Lema A.1.3 (a), $v^* = Tv^*$ implica $v^* \geq V^*$ y la inecuación inversa se sigue de (A.12) y previamente establecimos el hecho de que $v_n \uparrow v^*$. \square

Después de presentar estos Lemas, procedemos a la demostración del Teorema A.1.1 (véase [3], [14]).

Demostración del Teorema A.1.1

Véase la demostración en [14] páginas 50-51.

A.2. Problemas de costos medios a largo plazo

En este apartado se analizará una clase particular de problemas de control con horizonte infinito, caracterizados porque la función objetivo depende exclusivamente del comportamiento asintótico del proceso. Para ello, consideremos un modelo de control de Markov, denotado por $(X, A, \{A(x) \mid x \in X\}, Q, c)$. Además, sea

$$J_n(\pi, x) := \mathbb{E}_x^\pi \left[\sum_{t=0}^{n-1} c(x_t, a_t) \right],$$

el costo total esperado en la etapa n al utilizar la política π , dado que el estado inicial es $x_0 = x$. En consecuencia, el *costo medio a largo plazo* (CM) al emplear la política $\pi \in \Pi$, dado el estado inicial $x_0 = x$, se define como

$$J(\pi, x) := \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{J_n(\pi, x)}{n},$$

y el *Problema de CM* se trata de encontrar una política π^* tal que

$$J(\pi^*, x) = \inf_{\Pi} J(\pi, x) =: J^*(x) \quad \forall x \in X. \quad (\text{A.13})$$

Una política π^* que satisface (A.13) se denomina *CM óptimo* y $J^*(\cdot)$ es la *Función de valor CM*.

Para caracterizar las políticas óptimas de CM, presentaremos la relación entre el caso de descuento y el caso medio. Esta relación se conoce como el *enfoque del factor de descuento evanescente* (véase [14]), en el cual se considera que α es variable y tiende a uno. Para $\alpha \in (0, 1)$, denótese por $V_\alpha^*(\cdot)$ la correspondiente función de valor óptimo definida en (A.3).

Supuesto A.2.1. *Existe un estado $y \in X$ y números reales $\beta \in (0, 1)$ y $M \geq 0$ tal que*

- (a) $(1 - \alpha)V_\alpha^*(y) \leq M$ para todo $\alpha \in [\beta, 1]$. Además, existe una constante $N > 0$ y una función no negativa $b(\cdot)$ de tal forma que, con $h_\alpha(x) := V_\alpha^*(x) - V_\alpha^*(y)$, $x \in X$.
- (b) $N \leq h_\alpha(x) \leq b(x)$, para todo $x \in X$ y $\alpha \in [\beta, 1]$.

Teorema A.2.1. *Suponga la Hipótesis A.1.1 y entonces*

- (1) *Asumiendo que el Supuesto A.2.1 se cumple, existe una constante $\rho^* \geq 0$, una función medible $h : X \rightarrow \mathbb{R}$ con*

$$-N \leq h(x) \leq b(x), \quad \forall x \in X, \quad h(y) = 0, \quad (\text{A.14})$$

y un selector $g \in \mathbb{F}$ tal que

- (a) para todo $x \in X$, $\rho^* + h(x) \geq \min_{a \in A(x)} \left[c(x, a) + \int h(y)Q(dy|x, a) \right]$.
- (b) $\rho^* + h(x) \geq c(x, g(x)) + \int h(y)Q(dy|x, g(x))$, para $x \in X$ y además,
- (c) g es CM óptimo y ρ^* es la Función de valor CM, es decir

$$J^*(x) = J(g, x) = \rho^*, \text{ para todo } x \in X, \quad (\text{A.15})$$

por lo que $\rho^* = \inf_X J^*(x) = \inf_X J(\pi, x)$. De hecho, cualquier selector $g \in \mathbb{F}$ que satisfaga (b) también satisface (A.15).

- (2) Por el contrario, si $g \in \mathbb{F}$ es CM óptimo y satisface (A.15), entonces existe una función medible $\hat{h} \geq 0$ en X tal que (ρ^*, \hat{h}, g) satisface (b) y por tanto (a) de igual forma.

Este teorema proporciona una caracterización fundamental de los elementos que definen el valor y la política óptima en problemas de control estocástico con horizonte infinito y costo promedio, asegurando la existencia y propiedades de las soluciones óptimas bajo ciertas condiciones. Para su demostración primero introduzcamos el siguiente lema.

Lema A.2.1. *Bajo el Supuesto A.2.1, existe una constante ρ^* , con $0 \leq \rho^* \leq M$ y una secuencia de factores de descuento $\alpha(n) \uparrow 1$ que satisfacen*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \alpha(n))V_{\alpha(n)}^*(x) = \rho^*, \quad \forall x \in X. \quad (\text{A.16})$$

Demostración. Por el Supuesto A.2.1 (a), existe un número $\rho^* \in [0, M]$ el cual es un punto límite de $(1 - \alpha)V_{\alpha}^*(z)$ a medida de que $\alpha \uparrow 1$. Sea $\alpha(n) \uparrow 1$ una secuencia tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \alpha(n))V_{\alpha(n)}^*(z) = \rho^* \quad (\text{A.17})$$

Por tanto, para cualquier estado $x \in X$, los Supuestos A.2.1 (b) y (A.17) nos llevan a que

$$\begin{aligned} |(1 - \alpha(n))V_{\alpha(n)}^*(x) - \rho^*| &\leq (1 - \alpha(n))|h_{\alpha(n)}(x)| + |(1 - \alpha(n))V_{\alpha(n)}^*(z) - \rho^*| \\ &\leq (1 - \alpha(n)) \cdot \max\{N, b(x)\} + |(1 - \alpha(n))V_{\alpha(n)}^*(z) - \rho^*| \end{aligned}$$

Donde este último término se aproxima a 0 conforme $n \rightarrow \infty$. Lo cual prueba (A.16). □

Ahora, podemos continuar con la demostración del Teorema A.2.1 (Véase [14]).

Demostración del Teorema A.2.1

Véase la demostración en [14] páginas 89-91.

Para finalizar con esta sección presentemos los siguientes supuestos que nos permitirán mostrar un último teorema acerca de la función $V^*(\cdot)$.

Supuesto A.2.2. *Existe un estado $y \in X$ y un número positivo α_0 tal que, para todo $(x, a) \in \mathbb{K}$, $Q(\{y\}|x, a) \geq \alpha_0$.*

Supuesto A.2.3. Existe un número $\lambda_0 \in (0, 1)$ tal que $\sup_{k, k'} \|Q(\cdot|k) - Q(\cdot|k')\| \leq 2\lambda_0$, donde el sup es sobre todo $k, k' \in \mathbb{K}$.

Para $f \in \mathbb{F}$, la probabilidad transitoria de n pasos $Q^n(\cdot|x, f(x))$, $x \in X$, está dada recursivamente por

$$Q^n(D|x, f(x)) = \int Q^{n-1}(D|y, f(y))Q(dy|x, f(x)),$$

para todo $D \in \mathcal{B}(X)$ y $n \geq 1$, donde $Q^0(\cdot|x, f(x)) := p_x(\cdot)$ es la medida de probabilidad concentrada en el punto $x \in X$.

Teorema A.2.2. Tomemos que los Supuestos A.1.1 y A.2.2 se cumplen. Además, afirmemos que la función de costo $c \in \mathbb{K}$. Entonces

$$|V_\alpha^*(x) - V_\alpha^*(y)| \leq \frac{2\|c\|}{1 - \lambda_0},$$

para todo $x \in X$, donde λ_0 es la constante en el Supuesto A.2.3 y y es un estado fijo.

Demostración. Véase la demostración en [19] páginas 90-91. □

Este teorema nos ha caracterizado con una medida de cómo varía el valor óptimo descontado entre distintos estados, estableciendo una cota máxima para esta diferencia, lo cual es útil para evaluar la estabilidad y consistencia de las soluciones en problemas de decisión de Markov.

Apéndice B

Distribución Gamma y pruebas de hipótesis

En este Apéndice daremos un repaso acerca de la distribución Gamma, su definición y propiedades, así como de las pruebas de hipótesis para la media y de Kolmogorov-Smirnov que servirá para corroborar que la distribución que estamos estimando sea la correcta.

B.1. Distribución Gamma

Cuando una variable aleatoria X tiene una distribución gamma con parámetros $\alpha > 0$ y $\lambda > 0$, su función de densidad está dada por

$$f(x) = \frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)}$$

para $x > 0$, donde $\Gamma(\alpha)$ es la función Gamma definida como

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

En el caso especial cuando α es un entero, la distribución también se conoce como la distribución de Erlang y, con repetidas integraciones por partes obtenemos la función de distribución como

$$F(x) = 1 - \sum_{j=0}^{\alpha-1} e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^j}{j!}$$

para $x \geq 0$. Los momentos y la función generadora de momentos de la distribución gamma pueden ser encontrados notando que de

$$\int_0^\infty f(x) dx = 1$$

se cumple que

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx = \frac{\Gamma(\alpha)}{\lambda^\alpha}. \quad (\text{B.1})$$

Así, el n -ésimo momento es

$$\mathbb{E}[X^n] = \int x^n \frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)} dx = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{n+\alpha-1} e^{-\lambda x} dx$$

y por (B.1) se sigue que

$$\mathbb{E}[X^n] = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\lambda^{\alpha+n}} = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)\lambda^n}$$

En particular, $\mathbb{E}[X] = \alpha/\lambda$ y $\mathbb{E}[X^2] = \alpha(\alpha+1)/\lambda^2$. Podemos encontrar la función generadora de momentos de una manera similar. Como

$$M_X(t) = \int_0^\infty e^{tx} \frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)} dx = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-(\lambda-t)x} dx, \quad (\text{B.2})$$

y por (B.1), obtenemos

$$M_X(t) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha)}{(\lambda-t)^\alpha} = \left(\frac{\lambda}{\lambda-t} \right)^\alpha.$$

Notemos que en (B.1), $\lambda > 0$. Por tanto, en el sentido de aplicar (B.1) a (B.2), será necesario que $\lambda - t > 0$, por tanto, la función generadora de momentos existe cuando $t < \lambda$.

Estimación de parámetros por método de momentos

Dado un conjunto de datos $X = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, se pueden calcular los parámetros α y β de una distribución Gamma empleando las propiedades muestrales de media y varianza en un método llamado Método de Momentos. Primero, consideremos que la media muestral y la varianza muestral se calculan como sigue:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n x_i,$$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=0}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}.$$

Sabiendo que una distribución Gamma tiene media $\mu = \alpha/\beta$ y $\sigma^2 = \alpha/\beta^2$, obtendremos las siguientes ecuaciones:

$$\bar{x} = \frac{\alpha}{\beta} \quad \text{y} \quad s^2 = \frac{\alpha}{\beta^2}$$

Al sustituir $\alpha = \bar{x}\beta$ en la segunda ecuación, se obtiene

$$s^2 = \frac{\bar{x}\beta}{\beta^2} = \frac{\bar{x}}{\beta}$$

Luego,

$$\hat{\beta} = \frac{\bar{x}}{s^2}$$

Así, sustituyendo el valor de $\hat{\beta}$ para calcular $\hat{\alpha}$, se consigue

$$\hat{\alpha} = \bar{x}\hat{\beta} = \frac{\bar{x}^2}{s^2}$$

Por tanto, se puede estimar los parámetros α y β de una distribución gamma con

$$\hat{\alpha} = \frac{\bar{x}^2}{s^2} \quad \text{y} \quad \hat{\beta} = \frac{\bar{x}}{s^2}$$

respectivamente.

B.2. Prueba de hipótesis para la media

Sea X_1, \dots, X_n una muestra aleatoria de una población normal con media desconocida μ y varianza conocida σ^2 . Sabemos que \bar{X} tiene una distribución $N(\mu, \sigma^2/n)$. Por lo tanto,

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1).$$

Sea $\mu_0 \in \mathbb{R}$. La hipótesis que nos planteamos es la siguiente (véase [23]):

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{vs} \quad H_a : \mu \neq \mu_0.$$

El problema es encontrar una regla para decidir cuándo rechazar H_0 en favor de H_a con base en los datos de la muestra aleatoria. Cuando H_0 es cierta, tenemos que $\bar{X} \sim N(\mu_0, \sigma^2/n)$ y por tanto

$$\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1).$$

El estadístico $Z = (\bar{X} - \mu_0)/(\sigma/\sqrt{n})$ es una medida natural de la distancia entre \bar{X} y su esperanza μ_0 cuando H_0 es cierta. Entonces es razonable rechazar H_0 cuando Z sea grande. Así, tomamos como criterio de decisión rechazar H_0 cuando $|Z| \geq k$, para determinada constante k .

Para encontrar el valor de k , nos fijamos en una tabla de la distribución normal para encontrar un valor $z_{\alpha/2}$ tal que $\mathbb{P}(|Z| \geq z_{\alpha/2}) = \alpha$, en donde α se determina arbitrariamente, usualmente ocupado $\alpha = 0.05$.

A la variable aleatoria Z se le llama estadístico de prueba y la prueba se denomina prueba de dos colas pues la región de rechazo consta de las dos colas de la distribución normal. Llevar a cabo esta prueba de hipótesis consiste simplemente en usar los datos de la muestra para encontrar el valor de Z , si resulta que $|Z| \geq z_{\alpha/2}$, entonces se rechaza H_0 , en caso contrario no se rechaza H_0 .

B.3. Prueba de hipótesis de Kolmogorov-Smirnov

Supongamos que tenemos una muestra de variables aleatorias idénticamente distribuidas e independientes X_1, \dots, X_n con una distribución D desconocida y nos gustaría probar la hipótesis de que P es igual a una distribución particular P_0 , es decir plantear las siguientes hipótesis (véase [16]):

$$H_0 : P = P_0 \quad \text{vs} \quad H_a : P \neq P_0.$$

Primero, denotemos por $F(x) = \mathbb{P}(X_1 \leq x)$ la función de distribución acumulada de la verdadera distribución que siguen la muestra de variables aleatorias. Definimos una función de distribución acumulada empírica como

$$F_n(x) = \mathbb{P}_n(X \leq x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(X_i \leq x)$$

donde $I(X_i \leq x)$ es la función indicadora, igual a 1 si $X_i \leq x$ e igual a 0 en otro caso. Esta función cuenta la proporción de los puntos de muestra que están por debajo de x . El estadístico de Kolmogorov-Smirnov está dado por

$$D_n = \sup_x |F_n(x) - F(x)|$$

Distribución Gamma y pruebas de hipótesis
B.3 Prueba de hipótesis de Kolmogorov-Smirnov

Si la muestra viene de una distribución $F(x)$, entonces D_n converge a 0 cuando el límite tiende a infinito. Para cualquier punto fijo $x \in \mathbb{R}$, por la ley de los grandes números, tenemos que

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(X_i \leq x) \rightarrow \mathbb{E}(I(X_i \leq x)) = \mathbb{P}(X_i \leq x) = F(x)$$

es decir, la proporción de la muestra en el conjunto $(-\infty, x]$ aproxima la probabilidad de este conjunto.

Bibliografía

- [1] André Philipp Mundt, *Dynamic Risk Management with Markov Decision Processes* (Karlsruhe: Universitätsverlag Karlsruhe, 2007).
- [2] Ash, R.B., Doléans-Dade, C.A.: *Probability and Measure Theory*. Elsevier, London, 2000.
- [3] Azcue, P., Muler, N. *Stochastic Optimization in Insurance a Dynamic Programming Approach*. Springer, London, 2014.
- [4] Bäuerle, Nicole, and Ulrich Rieder. *Markov Decision Processes with Applications to Finance*. Berlin: Springer, 2011.
- [5] Bellman, Richard. *Dynamic Programming*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1957.
- [6] Bertsekas, Dimitri P. *Dynamic Programming and Optimal Control*. 3rd ed. Vol. 1. Belmont, MA: Athena Scientific, 2012.
- [7] Bulinskaya, Y.G., Muromskaya, A.: Discrete-time insurance model with capital injections and reinsurance. *Methodol. Comput. Appl. Probab.* 2014.
- [8] Breiman, L.: *Probability*. SIAM, Berkeley, 1992. (Chapman and Hall, London, 1986).
- [9] Cramér, H. *On the Mathematical Theory of Risk*. Skandia Jubilee, Stockholm, 1930.
- [10] Cruz-Suárez, D., Montes-de-Oca, R., Salem-Silva, F.: Conditions for the uniqueness of optimal policies of discounted Markov decision processes. *Math. Methods Oper. Res.* 60, 415-436, 2004.
- [11] Diasparra, M.A., Romera, R.: Bounds for the ruin probability of a discrete-time risk process. *J. Appl. Probab.* 2009.
- [12] Dickson, David C. M. *Insurance Risk and Ruin*. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2005.
- [13] GeorGIN, J.P.: Controle des chaines de Markov sur des espaces arbitraires. *Ann. Inst. H. Poincaré* 14, Sect. B, 255-277, 1978
- [14] Hernández-Lerma, Onésimo, and Jean B. Lasserre. *Discrete Time Markov Control Processes: Basic Optimality Criteria*. New York: Springer, 1996.
- [15] Hernández-Lerma, Onésimo, and Jean B. Lasserre. *Further Topics on Discrete-Time Markov Control Processes*. New York: Springer, 1999.
- [16] Klugman, Stuart A., Harry H. Panjer, and Gordon E. Willmot. *Loss Models: From Data to Decisions*. 4th ed. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2012.
- [17] Martin-Löf, A.: Lectures on the use of control theory in insurance. *Scand. Actuarial J.* 1994.

- [18] Martínez-Morales, M. Adaptive Premium in an Insurance Risk Process. Doctoral thesis, Texas Tech University, Texas, 1991.
- [19] Montes-de-Oca, R., Saavedra, P., Zacarías-Espinoza, G., Cruz-Suárez, D. (2018). Markov Decision Processes Applied to the Payment of Dividends of a Reserve Process. En: Parlier, G., Liberatore, F., Demange, M. (eds) Operations Research and Enterprise Systems. ICORES 2017. Communications in Computer and Information Science, vol 884. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-94767-9_5
- [20] Montes-de-Oca, R., Saavedra, P., Zacarías-Espinoza, Cruz-Suárez, D. Optimal policies for payment of dividends through a fixed barrier at discrete time. En: Proceedings of the 6th International Conference on Operations Research and Enterprise Systems (ICORES 2017), pp. 140–149, 2017. <https://doi.org/10.5220/0006193701400149>.
- [21] Lundberg, F.: Über die theorie der ruckversicherung. Trans. VIth Int. Congr. Act. 1, 1909.
- [22] Puterman, Martin L. Markov Decision Processes: Discrete Stochastic Dynamic Programming. 2nd ed. Hoboken, NJ: Wiley, 2014.
- [23] Rincón, Luis. Curso Elemental de Probabilidad y Estadística. 3rd ed. México: Trillas, 2013.
- [24] Rincón, Luis. Introducción a la teoría de riesgo. 2^a ed. Ciudad de México: Editorial Limusa, 2012.
- [25] Ross, Sheldon M. Introduction to Stochastic Dynamic Programming. San Diego: Academic Press, 1983.
- [26] Royden, H.L.: Real Analysis. Macmillan, New York, 1988.
- [27] Schmidli, Hanspeter. Stochastic Control in Insurance. London: Springer, 2008.