



**Benemérita
Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ciencias de la Computación**

**Evaluación de Bironchigramas por Integración
Numérica**

Tesis Profesional

**Para Obtener el Título de
Licenciatura en Ciencias de la Computación**

**Presenta
Saúl Zárate Vázquez**

**Asesores
Dra. María de Lourdes Sandoval Solís
Dr. Alberto Cordero Dávila**

Puebla, Puebla, Octubre 2020

Dedicatoria

A Don Luis, Doña Matilde, Doña Alba, Doña Carmina, Don Alejandro.

Agradecimientos

A el Dr. Alberto Cordero Dávila, por la dedicación, apoyo, paciencia, desde el inicio, el desarrollo hasta la conclusión del trabajo de Tesis.

A el Dr. Esteban Luna García por el apoyo, aportaciones, sugerencias y guías durante el desarrollo del trabajo.

A la Dra. María de Lourdes Sandoval Solís por el apoyo, orientación y consejos durante el trabajo de Tesis.

Al grupo del taller de Óptica Maestros y Estudiantes : Alberto Cordero Dávila, Jorge Cuatle Cortez, Carlos Robledo Sánchez, Esteban Luna Aguilar, Sergio Vazquez Montiel, María Elizabeth Percino Zacarias, Jorge Castro Ramos, Leonardo Téllez Arriaga, Luz Adriana Cordero, Carlos Ortiz Lima, José de Jesus Díaz Anzures, Juan Manuel Nuñez Alfonso, Jorge González García, Eduardo Brito Carcaño.

Al Departamento de Aplicación de Microcomputadoras del Instituto de Ciencias de la Universidad Autónoma de Puebla: Dr. Harold V.McIntosh, M.C. Jose Luis San Miguel Espejel, Hugo García Monroy, José Pedro Hernández Enríquez, María Luisa Limón Monjaraz, Elizabeth Aguilar Garduño, Angel Bernardo Canto Gómez, Jorge Cerón Ortega, Amilcar Menses Viveros, Rodolfo del Razo Lazcano.

A mis compañeros Marisol Roldán Palacios, José Pedro Hernández Enríquez, Amilcar Menses Viveros.

A los profesores: M.C. Maria del Carmen Santiago Díaz, Dr. Pedro García Juárez, que dedicaron tiempo a la revisión de este trabajo y contribuyeron con sus valiosos comentarios y observaciones.

Al Observatorio Astronómico Nacional de la UNAM ubicado en la Sierra de San Pedro Mártir, B.C.N.

Al Instituto de Astronomía Ensenada de la Universidad Nacional Autónoma de México.
A la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.

Contenido

Dedicatoria	ii
Agradecimientos	iii
1 Introducción	3
1.1 Planteamiento del Problema y Objetivo de la Tesis	3
1.2 Descripción de capítulos y apéndices	6
2 Pruebas ópticas	11
2.1 Prueba de la Navaja	13
2.2 Prueba del Alambre	15
2.3 Prueba de Ronchi	16
2.4 Evaluación de Ronchigramas	20
3 Mínimos Cuadrados	23
3.1 Introducción	23
3.2 Ajuste Bidimensional de Mínimos Cuadrados	23
4 Integración con Ajuste de Mínimos Cuadrados	26
4.1 Introducción	26
4.2 Obtención de los datos	27
4.3 Ajuste con monomiales	27
5 Integración Numérica, con la Regla del Trapecio	31
5.1 Introducción	31
5.2 El Método del Trapecio	32
5.3 Obtención de los datos Experimentales	35
5.4 Descripción del algoritmo	36
6 Algoritmos para recalcular varias veces W	38
6.1 Introducción	38
6.2 Recorrido con patrones de línea recta.	38
6.3 Recorrido con patrones circulares	44

6.3.1	Calcular la diferencia $\mathbf{W}_{B_k} - \mathbf{W}_{A_i}$, con una celda básica.	46
7	Centroides y órdenes de interferencia.	51
7.1	Introducción	51
7.2	CCDs	51
7.3	VICAR	52
7.4	Asignación manual de los órdenes de interferencia	54
7.5	Asignación automática de los órdenes de interferencia	55
8	Programa <i>EBRINT</i>	58
8.1	Introducción	58
8.2	Los bloques de Ebrint	59
8.2.1	Datos del Sistema Óptico Bajo Prueba	59
8.2.2	Datos de la Imagen Digitalizada.	60
8.2.3	Datos de la Prueba.	61
8.2.4	Evaluador.	62
8.2.5	Guardar los resultados en archivos.	62
8.2.6	Gráficas de Superficies y *Contornos de Nivel	63
8.2.7	Valores Máximo, Mínimo y RMS	65
8.3	Los bloques del Evaluador.	66
8.3.1	Procesamiento digital de la imagen	66
8.3.2	Edición del bironchigrama	68
8.3.3	Integración Numérica	69
9	Resultados	71
9.1	Introducción	71
9.2	Arreglo experimental y registro de patrones	72
9.3	Resultados de la evaluación de los Bironchigramas.	72
9.3.1	Gráficas de la superficie de W por integración numérica con la regla del trapecio de los Bironchigramas evaluados.	73
9.3.2	Gráficas de la superficie de W por integración numérica con ajuste con un polinomio de grado 7 de los Bironchigramas evaluados. . .	79
9.3.3	Elección del grado de polinomio de ajuste.	86
10	Conclusiones	89
10.1	Perspectivas.	90
A	Polinomios de Zernike	91
B	Monomios	93
C	Promedio de dos aproximaciones de serie de Taylor	94

Capítulo 1

Introducción

Este capítulo nos introduce como se hacen las pruebas de un sistema óptico con la prueba de Ronchi y Bironchi, es decir, prueba de Ronchi con una rejilla cuadriculada, de donde se obtienen simultáneamente, los datos experimentales del gradiente de W a partir de los cuales mediante integración numérica se construye una aproximación a W , que define los errores medidos desde el frente de onda esférico. Los inconvenientes del uso del ajuste de mínimos cuadrados como método de integración numérica y proponer un algoritmo de integración numérica teniendo como base la regla del trapecio.

1.1 Planteamiento del Problema y Objetivo de la Tesis

Para evaluar un sistema óptico o una superficie óptica se pueden aplicar diferentes tipos de pruebas. En el taller de óptica de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla se usa comúnmente la prueba de Ronchi. La cual consiste en iluminar el sistema óptico bajo prueba con una fuente puntual y obstruir la luz transmitida y/o reflejada con una rejilla de bandas rectas igualmente espaciadas, ver Figura 1.1.

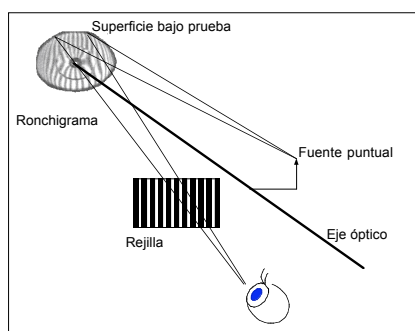


Figura 1.1: *Prueba de Ronchi aplicada a una Superficie*, Cordero Dávila A.(1991) [8].

En el caso de una lente, al observar la luz transmitida, ver Figura 1.2, a través de la rejilla se observa un patrón llamado Ronchigrama que se localiza sobre la última superficie de la lente.

Las franjas observadas son directamente proporcionales a las curvas de nivel de $\partial W/\partial x$

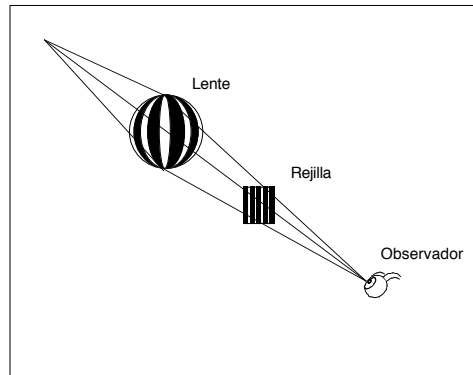


Figura 1.2: Prueba de Ronchi aplicada a una lente, Cordero Dávila A.(1991) [8].

donde W es la función que define los errores medidos desde el frente de onda esférico. En el caso en que el ronchigrama se toma con las líneas de la rejilla orientadas en la dirección x , el patrón representa las curvas de nivel de $\partial W/\partial y$ y cuando las líneas están orientadas en la dirección y el patrón representa las curvas de nivel de $\partial W/\partial x$, ver Figura 1.3.

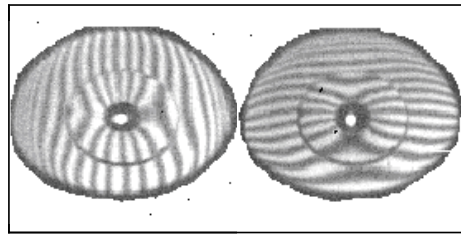


Figura 1.3: Ronchigramas observados con la rejilla orientada en direcciones y y x respectivamente, pruebas de esfera de Hindle (Elizabeth Percino (1995)).

De manera independiente, en ninguno de los casos es posible estimar W . Sin embargo, una mejor opción, desarrollada en el taller de óptica, consiste en usar una rejilla cuadriculada, ver Figuras 1.4. En cuyo caso se obtiene otro patrón que llamamos birronchigrama, ver Figura 1.5. Este patrón es la intersección de los dos anteriores y por tanto contiene la información de las dos derivadas direccionales. Por lo que, con sólo este birronchigrama es posible reproducir los errores , W , con una precisión que puede ser de

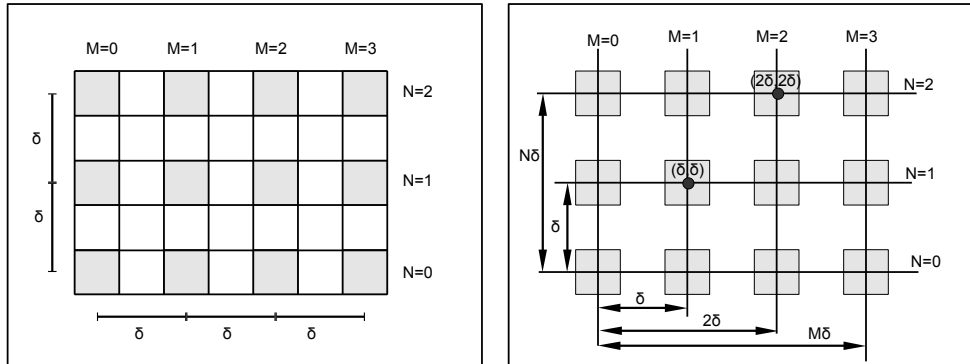


Figura 1.4: Esquemas de la rejilla cuadriculada.

décimas de un micrómetro. Para calcular la forma de los errores del frente de onda W se han usado hasta ahora ajustes polinómicos de mínimos cuadrados. Sin embargo éstos, o bien sobresuavizan la forma de los errores del frente de onda W o introducen oscilaciones inexistentes de alto orden. Los errores en la forma de los birronchigramas están relacionados con las derivadas de los errores del frente de onda y con esto, los problemas anteriores se ven incrementados, Cordero-Dávila, A., E.Luna-Aguilar, et.al. (1998) [12].

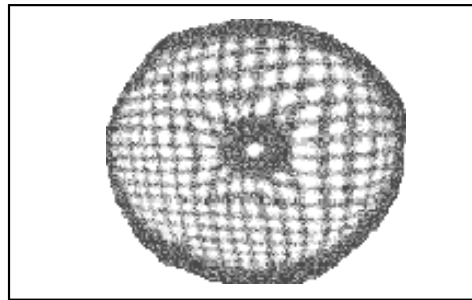


Figura 1.5: Birronchigrama, pruebas de esfera de Hindle (Elizabeth Percino (1995)).

El objetivo de esta tesis consiste en desarrollar un algoritmo que permita, a partir del birronchigrama, obtener la forma de los errores del frente de onda, W , usando integración numérica, con la regla del Trapecio.

Además de incorporarlo a otros programas para computadora y construir un Evaluador de BiRonchigramas por Integración Numérica con la regla del Trapecio, EBRINT.

Los programas surgen de trabajos de investigación del Taller de Óptica de la Facul-

tad de Ciencias Físico Matemáticas de la BUAP y el Observatorio Astronómico Nacional de la UNAM en Ensenada B.C.N. Y nos apoyaremos con el sistema PLOT-90c[5][22] de gráficas por computadora desarrollado en el Departamento de Aplicación de Microcomputadoras del Instituto de Ciencias UAP y el sistema VICAR[4][3] de procesamiento de imágenes digitales del Jet Propulsion Laboratory, California Institute of Technology.

1.2 Descripción de capítulos y apéndices

En el capítulo dos, *Pruebas Ópticas*, se explican las bases de la prueba de Ronchi, donde se justificó matemáticamente la relación entre el patrón obtenido del Bironchigrama y las derivadas direccionales (T_x, T_y) de la forma de los errores del frente de onda W . En la figura 1.6 del lado derecho, se pintan los puntos $(x_i, y_i, T_{x_i}, T_{y_i})$, como el vector coordenadas (T_{x_i}, T_{y_i}) con origen en (x_i, y_i) que son los centroides de las machas del bironchigrama Roma04 que esta al lado izquierdo.

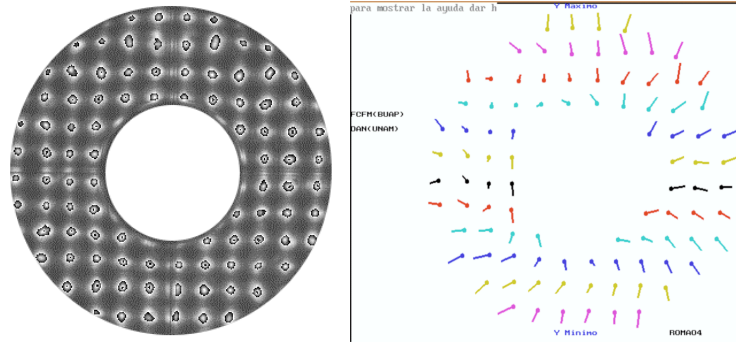


Figura 1.6: Fotografía del Bironchigrama Roma04. Derivadas direccionales (T_x, T_y) de W de Roma04.

En el capítulo tres, *Mínimos Cuadrados*, se describe el ajuste bidimensional, con el que se obtiene los coeficientes α_k del polinomio que ajustan a una función $f(x, y)$, a partir de un conjunto de puntos $(x_i, y_i, f(x_i, y_i) = z_i)$.

En el capítulo cuatro, *Integración con Ajuste de Mínimos Cuadrados*, el trabajo Malacara y Cornejo (1976) [15], describe como usa dos veces el método de ajuste de mínimos cuadrados para obtener los coeficientes α_k del polinomio que define a W , como:

$$W = \sum_{k=1}^n \alpha_k M_k(x, y) \quad (1.1)$$

donde los M_k son los monomiales, ver apéndice B.

La primera vez se aplica a los datos experimentales, $(x_i, y_i, T_x(x_i, y_i) = z_i)$, donde :

$$z_i = \frac{\partial W}{\partial x}(x_i, y_i) \quad (1.2)$$

con el modelo :

$$T_x(x, y) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \frac{\partial M_k}{\partial x}(x, y) \quad (1.3)$$

y la segunda cuando los $(x_i, y_i, T_y(x_i, y_i) = z_i)$, donde :

$$z_i = \frac{\partial W}{\partial y}(x_i, y_i) \quad (1.4)$$

con el modelo :

$$T_y(x, y) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \frac{\partial M_k}{\partial y}(x, y) \quad (1.5)$$

y así reconstruir los coeficientes α_k a partir de los coeficientes α_k^* de las derivadas direccionales T_x y T_y ajustadas.

En el capítulo cinco, *Algoritmo de Integración Numérica*, estudia :

- El Algoritmo para la evaluación del frente de onda propuesto en "Ronchi test with a squared grid", Cordero-Dávila, A., E.Luna-Aguilar, S.Vázquez-Montiel, S.Zárate-Vázquez and M.E.Percino-Zacarias (1998) [12].
- El método *TRAPEZOIDAL* de integración numérica, Burden R., et.al. (1985) [2], Chapra, S., et.al. (2010) [7], Press, William H.et.al. (1986) [30], y como se aplica para aproximar la diferencia $f(B) - f(A)$, dados $A, B, f'(A), f'(B)$, y f es C^1 de R en R :

$$f(B) - f(A) = \int_A^B f'(x) dx \quad (1.6)$$

donde $f'(x)$ es :

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} \quad (1.7)$$

Explicando, como es usado para calcular la aproximación de la integral línea, Mardsen Jerrold E.; Tromba, Anthony J. [29] (1988), donde W es una función C^1 de R^2 en R :

$$\int_{\sigma} \nabla W = W(\sigma(1)) - W(\sigma(0)) = W(\mathbf{B}) - W(\mathbf{A}) \quad (1.8)$$

$$\nabla W = \left(\frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y} \right) = (T_x, T_y) \quad (1.9)$$

Donde la trayectoria σ es una función C^1 a trozos de R en R^2 .

$$\sigma(t) = (x(t), y(t)) \text{ para } t \in [0, 1], \sigma(0) = \mathbf{A} \text{ y } \sigma(1) = \mathbf{B} \quad (1.10)$$

y conociendo las derivadas evaluadas en los extremos :

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}(\mathbf{A}), \frac{\partial W}{\partial y}(\mathbf{A}) \right) \text{ y } \left(\frac{\partial W}{\partial x}(\mathbf{B}), \frac{\partial W}{\partial y}(\mathbf{B}) \right). \quad (1.11)$$

En el capítulo seis, *Algoritmos para recalcular varias veces W*. Desarrolla los algoritmos para recalcular la aproximación a W , una vez que los datos son puestos en la matriz se escoge un punto de partida y calcula W para todos sus vecinos cercanos. Luego seleccionar uno de sus vecinos cercanos del punto de partida y lo convierte en el nuevo punto de referencia y ahora para todos sus vecinos cercanos calcula la aproximación a W , y así sucesivamente hasta no tener más vecinos que convertir en puntos de referencia, en la matriz. El como elegir el siguiente vecino, convertirlo en punto de referencia y como calcular W para todos sus vecinos, es planteado en los algoritmos:

- Recorrido con patrones de línea recta.
- Recorrido con patrones circulares concéntricos.

“...se tomó especial cuidado de recalcular varias veces W para cada punto partiendo ahora desde todos sus vecinos cercanos y finalmente promediando todos los valores obtenidos...”, Cordero-Dávila, A., E.Luna-Aguilar, et.al (1998) [12].

Los capítulos siguientes son la implementación de los programas del procesamiento de la imagen digital, Evaluador de Bironchigramas y los resultados obtenidos al aplicarlo con Bironchigramas experimentales.

En el capítulo siete, *Procesamiento con VICAR de la imagen digitalizada del Bironchigrama y asignación de los ordenes de interferencia*, describe las propiedades de los archivos que contienen las imagenes de los bironchigramas, por ejemplo ver figura 1.6 lado izquierdo, que son procesados con VICAR, un sistema de procesamiento digital

de imágenes, para obtener los centroides de las manchas del borde. Los centroides del borde serán necesarios para encontrar el radio y las coordenadas del centro del círculo que ajusten a las manchas del borde, Cordero-Davila, A. , A. Cornejo-Rodriguez and O. Cardona-Nuñez (1993) [9] y así transformar todas las coordenadas de los centroides de las manchas dentro de un círculo unitario. Luego se obtienen las coordenadas de los centroides de todas las manchas, a los que se les asignará los ordenes de interferencia de manera automática, estableciendo una relación de vecindad entre ellos, si no es correcta la asignación se modificará con la edición manual. Las coordenadas de todos los centroides normalizadas y sus ordenes de interferencia se usarán en el cálculo de las derivadas parciales de W que son los datos experimentales utilizados en la integración Numérica con la Regla del Trapecio y el Ajuste de Mínimos Cuadrados.

En el capítulo ocho, *Evaluación de BiRonchigramas por INtegración con la regla del Trapecio. EBRINT* , se describe como se amalgamaron los diferentes programas y las interfaces entre ellos y con el usuario. Los programas están organizados en módulos independientes con una función específica, para poder sustituirse sin afectar la operación de todo el conjunto, el requisito es que sus archivos de datos a procesar y el formato de los resultados generados sean los mismos del módulo a sustituir. Los programas escritos en los lenguajes de programación, Fortran, Basic o C, son la implantación de los algoritmos desarrollados a los que se les integra librerías de VICAR, Bunch, Walter, et.al. (2016)[3] y PLOT-C, Canto Gómez, A. B.; McIntosh , Harlod V.(1994)[5], J.P. Hernández Henríquez (1993)[22].

En el capítulo nueve, *Resultados*, luego de procesar los bironchigramas y aplicar la integración numérica, se muestran los resultados de 26 Bironchigramas, de las pruebas aplicadas al telescopio de 2.1 metros de diámetro del Observatorio Astronómico Nacional de la UNAM en San Pedro Martir, Baja California. Primero una tabla con los valores máximo , mínimo y RMS de cada uno de los bironchigramas y su gráfica. Luego las graficas de las aproximaciones a W y el campo gradiente.

En el capítulo diez, *Conclusiones*, en el programa *EBRINT*, quedaron integrados los programas que calculan, con el método de Integración Numérica de la regla del trapecio la aproximación a W y sus correspondientes valores de Máximo, Mínimo y RMS, donde sólo se hacen con los datos experimentales. En contraste con los cálculos del método Ajuste de Mínimos Cuadrados, una vez ajustado W , se hace sobre un conjunto de datos más amplio que no necesariamente incluyen, los experimentales, además de tener una caracterización de W . La representación gráfica de la superficie de W , con torres aisladas, para la regla del trapecio. Y con curvas de nivel y contornos ortográficos para el ajuste con monomiales de grado 7.

Con el método del trapecio, tenemos dos algoritmos para recalcular varias veces W para cada punto partiendo desde todos sus vecinos cercanos y finalmente promediando todos los valores obtenidos y reducir el error por el método numérico de integración.

Con el uso de VICAR[4] encontramos los centroides de las manchas del bironchigrama, el usuario escoge el nivel del umbral, si le parece que no es correcto, lo cambia y tiene otro conjunto de centroides, cuando considera que el conjunto es correcto, se inicia el proceso de la asignación automática de los ordenes de interferencia que le facilita el trabajo, en caso que tenga algunos detalles puede editarlos para hacer la corrección.

Revisemos los apéndices, los coeficientes que se obtienen del ajuste de mínimos cuadrados son con una base de polinomios monomiales. En el apéndice "B" muestra la forma general de representar los polinomio monomiales, los cuales mediante una matriz de cambio de base aplicados a estos se obtienen los coeficientes en términos de polinomios de Zernike en el apéndice "A" hay una parte de la traducción de Computation of Zernike Polynomials in Optical Testing, Malacara Daniel, et.al.(1976)[24], que da la interpretación óptica de cada uno de los términos.

El apéndice "C" se muestra un desarrollo alternativo para la ecuación 5.19 utilizando el promedio de dos aproximaciones de la serie de Taylor de primer orden Courant(1976)[17]. Con este punto de vista se puede mostrar la representación gráfica de los errores, para el caso de una dimensión .

Capítulo 2

Pruebas ópticas

Como bases para desarrollar este trabajo describiremos algunos de los conceptos y técnicas utilizadas en pruebas ópticas con **medición de pendiente**. Éstas sirven para conocer las deformaciones del frente de onda a partir de las mediciones de **las pendientes de los rayos** y así evaluar una superficie o un sistema óptico.

En general el **Frente de Onda Ideal** es una esfera perfecta en donde los rayos son *perpendiculares* al frente de onda. En el caso en que de un frente de onda esférico todos los rayos llegarán a un solo punto, el centro de la esfera, llamado **punto imagen ideal** o **gaussiano**, ver figura 2.1.

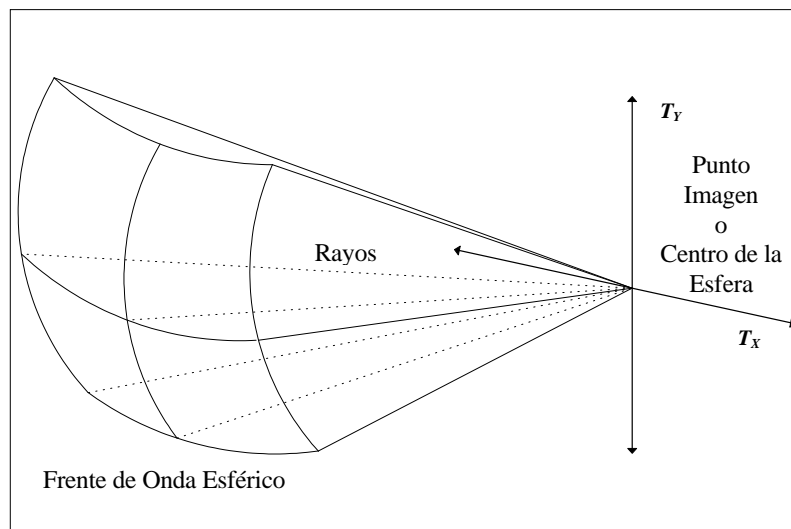


Figura 2.1: *Frente de onda esférico.*

En seguida describiremos algunas de las pruebas anteriores a la de Ronchi aplicadas a los frentes de onda esféricos y al final las aplicaremos a los frente de onda que se desvían de los esféricos.

Dentro de las llamadas pruebas Schlieren, Alejandro Cornejo-Rodriguez, et.al. (2017)[14], la más antigua es la de la navaja y es la que será abordada en primer lugar, no sólo por su antigüedad sino, por servir como base conceptual para entender la prueba de Ronchi. En todas estas pruebas tenemos involucrados tres planos, ver figura 2.2, los de la pupila de salida, obstrucción y observación, en la figura 2.3 se identifican estos en un sistema óptico.

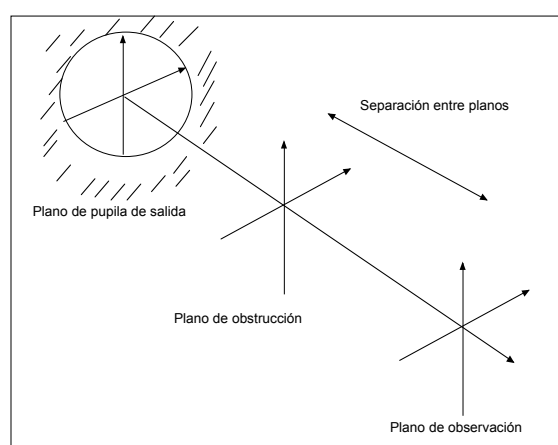


Figura 2.2: Representación de los Planos: pupila de salida, obstrucción y observación.

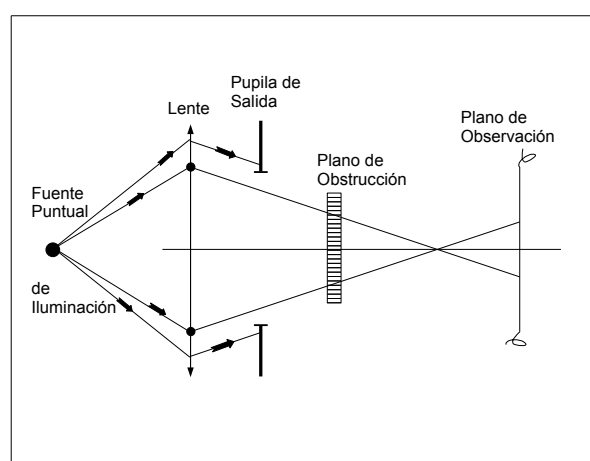


Figura 2.3: Corte del sistema óptico en que se muestran los planos(1991)[8].

Por el plano de la pupila de salida salen todos los rayos de luz que fueron desviados por la lente y que provienen de la fuente puntual de luz. En el plano de obstrucción se coloca la rejilla de Ronchi que permite el paso de la luz sólo en algunas partes. Finalmente en el plano de observación es donde se registra la luz que saliendo de la pupila de salida es obstruida por la rejilla.

2.1 Prueba de la Navaja

Supongamos que se tiene un *frente de onda esférico perfecto* saliendo de la pupila de salida de un sistema óptico y que se coloca una navaja con filo BC . El filo de una navaja define la frontera de la obstrucción del paso de parte de los rayos de luz, ver Figura 2.4; entonces el borde de la sombra que se proyectará en algún plano de observación corresponderá a una *línea recta*, independientemente de la orientación y localización del plano de observación, de la longitud de onda de la luz y de la posición y orientación de la navaja, Alejandro Cornejo-Rodriguez, et.al. (2017)[14].

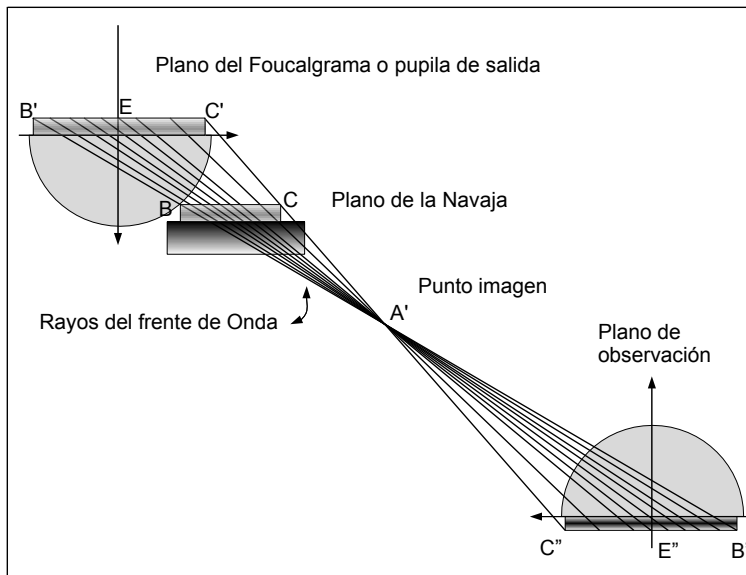


Figura 2.4: *Foucaultgrama del frente de onda esférico*, Alejandro Cornejo-Rodriguez, et.al. (2017)[14].

Este resultado puede apreciarse con ayuda de la Figura 2.4 donde se muestra que, despreciando los efectos de difracción ¹, la frontera entre las zonas oscura e iluminada está necesariamente delimitada por el plano que contiene al borde de la navaja BC y, por supuesto, por el punto imagen A' donde deben pasar todos los rayos, ya que el frente

¹desde el punto de vista de la óptica geométrica

de onda es esférico. Al intersectar el plano mencionado con algún otro plano de observación E'' , se definirá una recta $B''C''$ correspondiente a la frontera de la sombra que se observará.

La forma más usual de observación, ver figura 2.5, corresponde al caso en que se coloca la lente de una cámara cerca del punto imagen A' , enfocándose hacia el plano de la pupila de salida E . En este caso, la frontera virtual (en similitud con las imágenes virtuales), de la sombra será también una recta y la imagen real de ésta, formada con la lente de la cámara se grabará en el plano del detector (CCD CMOS, placa fotográfica o la retina del ojo en caso de observación directa), Alejandro Cornejo-Rodriguez, et.al. (2017)[14].

La posición de la lente de la cámara, cerca del punto imagen A' es muy importante; porque garantiza que los rayos de luz incidan en la lente muy cerca de su eje óptico y por tanto, todas las aberraciones, excepto las cromáticas, tendrán un valor muy cercano a cero.

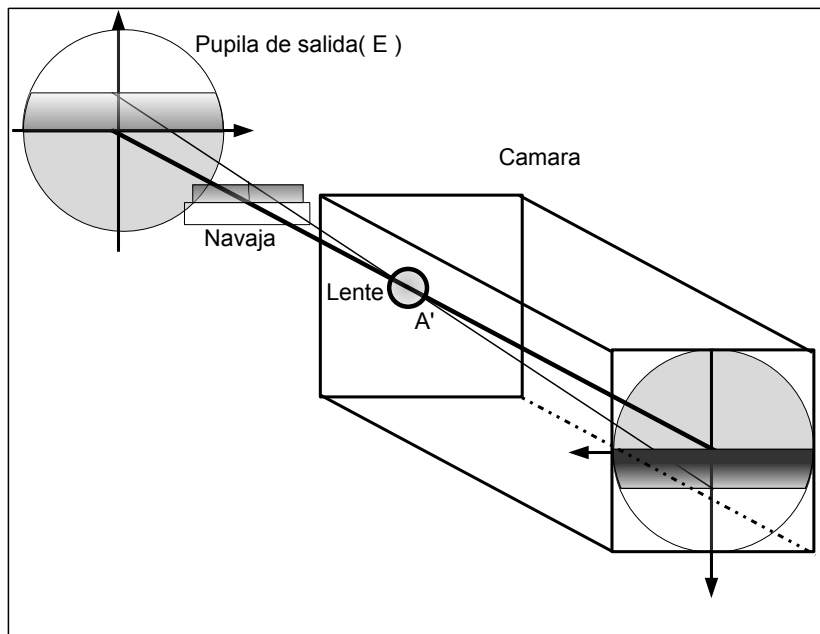


Figura 2.5: *Foucaultgrama grabado por medio de una cámara enfocada en la pupila de salida del sistema bajo prueba, Alejandro Cornejo-Rodriguez, et.al. (2017)[14].*

Cuando los rayos de luz no converjan hacia un único punto, entonces la sombra proyectada no será una recta, ya sea por efectos de difracción o porque el frente de onda no sea esférico. En el caso geométrico el borde de la sombra corresponderá a todos aquellos puntos por donde pasan los rayos de luz que llegan exactamente al borde de la

navaja e igual que antes el patrón puede ser real o virtual. Como se dijo al inicio, en el desarrollo de ésta sección se ha supuesto que la iluminación del sistema bajo prueba es con una fuente puntual, Alejandro Cornejo-Rodriguez, et.al. (2017)[14].

2.2 Prueba del Alambre

La prueba de la navaja es muy usada para analizar frentes de onda esféricos y particularmente para probar superficies esféricas con la fuente colocada en el plano del centro de curvatura del espejo. Sin embargo, en la prueba de espejos aesféricos la prueba de la navaja no es muy sensible ya que se pierden detalles. La prueba del alambre puede ser considerada como una primera extensión de la prueba de la navaja ya que un alambre puede pensarse como una navaja muy angosta de doble filo. Por lo cual, el análisis de los resultados de los alambregramas (patrones observados) será idéntico que los navajagramas, sólo que en éste caso, se tendrán dos bordes, paralelos entre sí y a distancias Q_a y Q_b del eje óptico, correspondientes a cada uno de los filos del alambre, ver Figura 2.6, Alejandro Cornejo-Rodriguez, et.al. (2017)[14]. En el caso particular de un frente onda esférico perfecto, el patrón completo estará formado por una banda recta y de ancho constante.

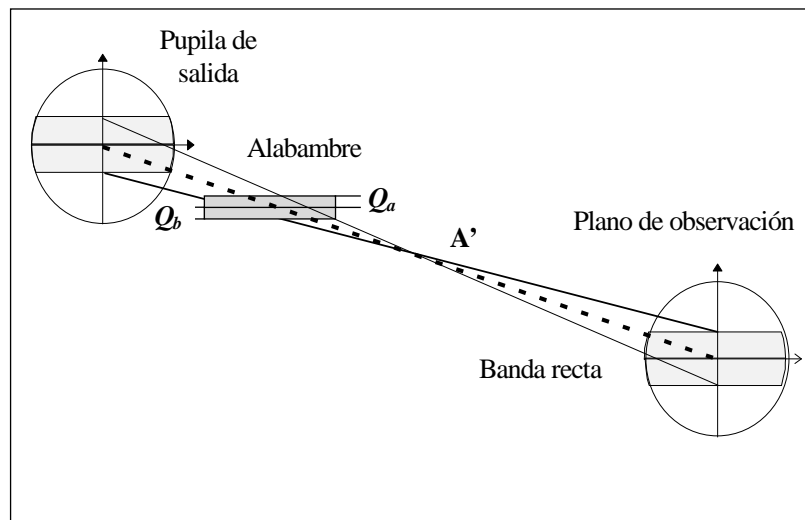


Figura 2.6: Prueba del alambre. Un alambre se coloca para obstruir el paso de la luz y, si el frente de onda es esférico el patrón es una banda recta, (2017)[14].

2.3 Prueba de Ronchi

Así como la prueba del alambre fue considerada conceptualmente como extensión de la prueba de la navaja, de igual forma la prueba de Ronchi puede pensarse, ver Figura 2.7, como una extensión de la prueba del alambre si es que, se considera que una rejilla de Ronchi está formada por varios alambres rectos e igualmente espaciados y, por tanto, con bandas claras y oscuras alternadas que supondremos paralelas al eje X , Alejandro Cornejo-Rodríguez, et.al. (2017)[14].

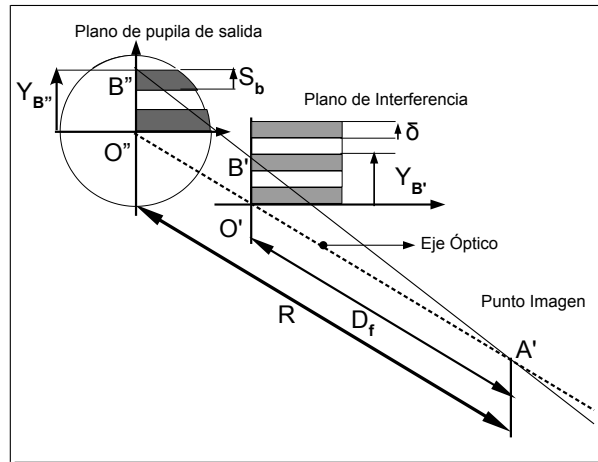


Figura 2.7: Ronchigrama para un frente de onda esférico donde A' es el centro de curvatura del frente de onda ideal; O' es el plano de la rejilla localizado a lo largo del eje óptico; O'' es el plano de la pupila de salida o el plano de la prueba de la superficie, (2017)[14].

La extensión de la que hablamos debe pensarse también en el paso de una a dos dimensiones dando una diferencia cualitativa con las pruebas de Foucault (Navaja) y del alambre, ya que en la prueba de Ronchi es posible obtener una información global de la superficie. Es decir, es una prueba donde la información se obtiene de varias rendijas que cubren todo el plano de la pupila de salida del sistema bajo prueba, dejando de ser así una prueba zonal.

Si se está probando un frente de onda esférico con una rejilla de Ronchi, el ronchigrama corresponderá a un patrón de bandas rectas e igualmente espaciadas; que sean franjas rectas se desprende del análisis hecho en la prueba de la navaja y que sean igualmente espaciadas puede concluirse con ayuda de la Figura 2.7 y particularmente de los triángulos semejantes $A'O''B''$ y $A'O'B'$, de los que se obtiene.

$$\frac{Y_{B''}}{R} = \frac{Y_{B'}}{D_f} \quad (2.1)$$

En éste caso A' es el punto imagen perfecto, O' el punto de intersección del plano de la rejilla de Ronchi con el eje óptico, O'' el centro de la pupila de salida, B' un punto del m -ésimo borde de la rejilla sobre el plano meridional esto es:

$$Y_{B'} = m\delta \quad (2.2)$$

donde R es el radio de curvatura del frente de onda, D_f es la separación, $A'O'$ entre el punto imagen A' y el punto O' del plano de la rejilla, y δ es la distancia entre dos bordes consecutivos en la rejilla de Ronchi (período de la rejilla), Alejandro Cornejo-Rodriguez, et.al. (2017)[14].

El punto B'' del ronchigrama correspondiente al m -ésimo borde de la franja en el mismo plano meridional de donde; sustituyendo 2.2 en 2.1 y resolviendo para $Y_{B''}$ se obtiene:

$$Y_{B''} = \frac{Rm\delta}{D_f} \quad (2.3)$$

Ya que los planos de la rejilla y del ronchigrama son paralelos y que todos los rayos se dirigen al mismo punto imagen A' , además de que la separación entre dos bordes consecutivos en la rejilla es fijo; entonces de la ecuación 2.3 puede obtenerse que la separación, S_b , entre dos bordes consecutivos en el ronchigrama está dado por:

$$S_b = \frac{R}{D_f}\delta \quad (2.4)$$

De la ecuación 2.4 se desprende un resultado bien conocido en la aplicación de la prueba de Ronchi:

- En la medida en que la magnitud de D_f crece, esto es, en que la rejilla se separe del punto imagen A' , el ancho de las franjas tiende a disminuir lo que se traducirá en un aumento del número de franjas en el campo de la pupila de salida.
- En contraparte, si D_f tiende a cero entonces S_b se hace infinito; en cuyo caso se observa experimentalmente un campo totalmente brillante u oscuro en dependencia de que la luz llegue a una banda clara u oscura de la rejilla de Ronchi.

Este resultado es importante si se desea localizar al punto imagen A' de un sistema óptico ya que es en este caso cuando la rejilla se coloca en el plano que contiene al punto imagen entonces las franjas se harán, teóricamente, infinitamente anchas, pero en la práctica sólo podrá medirse un ancho igual al diámetro de la pupila de salida del sistema bajo prueba; por lo que será inevitable una incertidumbre en la localización del punto

imagen A' .

En el caso de un espejo esférico y con la fuente en el mismo plano que la rejilla, se logra el efecto anterior cuando el plano de la rejilla de Ronchi se localiza en el plano que contiene a la del centro de curvatura del espejo. Otro resultado bien conocido de esta prueba y que se desprende de la misma ecuación 2.4, es la dependencia del ancho de las franjas, S_b , con el ancho de las bandas de la rejilla, δ . Cuando usamos una rejilla de mayor frecuencia, con un δ menor, la frecuencia de las franjas aumentará también; es decir, S_b disminuirá, Alejandro Cornejo-Rodriguez, et.al. (2017) [14] .

En el caso de un frente de onda esférico y una rejilla de Ronchi cuadriculada, el patrón de Ronchi o ronchigrama debe ser una cuadrícula perfecta. Esto es así porque el nuevo patrón sería la superposición de dos patrones cruzados de franjas rectas, ver Figura 2.8.

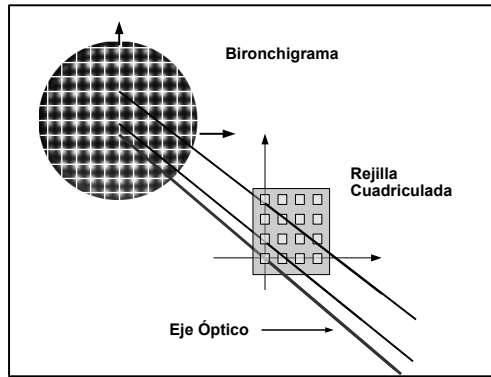


Figura 2.8: *Bironchigrama de un frente de onda esférico.*

Idealmente, el frente de onda que sale de la pupila de salida, XOY de un Sistema Óptico es una esfera (punteada) de radio R , ver figura 2.9.

Si asumimos que los rayos de luz son perpendiculares al frente de onda, entonces todos los rayos se intersectan en el centro de la esfera, G , que se denomina punto imagen Gaussiano. El frente de onda real (curva continua) está separado del ideal en una cantidad QQ' , conocida como aberración del frente de onda, $W(x, y)$, la cual depende de las coordenadas del punto en la pupila de salida. Las coordenadas (T_X, T_Y, T_Z) , de un punto P' de un rayo real se mide en el sistema centrado en G . Y la relación entre (x, y) , (T_X, T_Y, T_Z) y $W(x, y)$ está dado por la fórmula 2.5

$$(T_X, T_Y) = \frac{1}{R} (xT_Z, yT_Z) - R \left(\frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y} \right) \quad (2.5)$$

Esta fórmula (2.5), es válida si $|w| \ll |R|$ (Delano, OST).

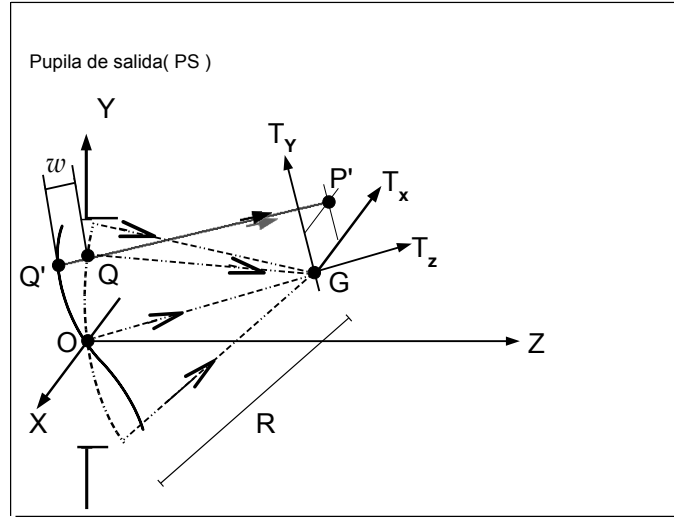


Figura 2.9: Frente de onda esférico y real.

En el caso en que las aberraciones se midan en el plano $T_z = 0$, entonces la ecuación anterior se reduce a :

$$\mathbf{T} = -R\nabla W \quad (2.6)$$

En cuyo caso puede demostrarse que :

$$W(\mathbf{B}) - W(\mathbf{A}) = \frac{1}{R} \int_C \mathbf{T} \cdot d\mathbf{r} \quad (2.7)$$

ver por ejemplo Fulks [20], pp 322,

"Si existe una función ϕ definida en una región R y si un campo de fuerza \mathbf{F} tiene la propiedad de que :

$$\mathbf{F} = \nabla\phi \quad (2.8)$$

entonces se dice que ϕ es un potencial de \mathbf{F} .

Teorema. Sea \mathbf{F} un campo gradiente con potencial ϕ definido en una región R sean \mathbf{Q}_0 y \mathbf{Q}_1 dos puntos cualesquiera en R

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{P} = \phi(\mathbf{Q}_1) - \phi(\mathbf{Q}_0) \quad (2.9)$$

donde C es una curva seccionalmente suave de R yendo de \mathbf{Q}_0 a \mathbf{Q}_1 "

Existen pruebas ópticas (Newton, Fizeau (1992)[28], Twyman-Green (1992) [27]) donde se obtienen las curvas de nivel de W y hay otras como la de Ronchi, Cornejo-Rodriguez, A. (1992) [16], donde se conocen las curvas de nivel de cada una de las componentes de \mathbf{T} . Recientemente se ha desarrollado la prueba Bi-Ronchi, Cordero-Dávila, A., E.Luna-Aguilar, et.al.(1998)[12], en la cual se obtienen las curvas de nivel de las componentes de T_x y T_y simultáneamente. Algunas de las ventajas principales en la aplicación práctica de este tipo de pruebas radica en la tolerancia existente para la estimación de los errores:

- La separación entre los planos de obstrucción, de observación y
- Los desplazamientos de la pantalla de obstrucción y/o del plano de observación.

Esto es así, porque pueden efectuarse ajustes posteriores para estimar dichos errores y compensarlos, aunque debe controlarse cuidadosamente la estructura de la pantalla.

Otra de las grandes ventajas de estas pruebas radica en que, sin usar óptica auxiliar, es posible detectar errores en los frentes de onda aún cuando la forma nominal de éstos no sea la esférica, como es el caso de las pruebas de superficies cónicas, donde estas pruebas son particularmente populares, ya que son usadas cuantitativamente y no sólo a nivel cualitativo.

En contraparte, una de las principales desventajas de este tipo de pruebas consiste en la introducción de errores debidos al **método de integración** que se usa para pasar de los valores de las **pendientes de los rayos** a los valores de la **diferencia de caminos ópticos**, Alejandro Cornejo-Rodriguez, et.al. (2017) [14] .

2.4 Evaluación de Ronchigramas

El objetivo de la aplicación de estas pruebas es el de **conocer las deformaciones de los frentes de onda** y con esto evaluar una superficie o cualquier sistema óptico. Cuando decimos que se evaluarán las deformaciones del frente de onda nos referimos a que se desea **conocer los valores de la diferencia de caminos ópticos, \mathbf{W}** , como función de las **coordenadas de la pupila de salida** del sistema que se esta probando.

De la ecuación 2.5 se desprende que para evaluar \mathbf{W} , usando la prueba de Ronchi, se necesitan dos Ronchigramas cruzados porque los puntos pertenecientes a las franjas de un ronchigrama son las curvas de nivel de sólo una de las componentes de la aberración transversal, las cuales están relacionadas con \mathbf{W} por la Ecuación 2.6. Para obtener los dos ronchigramas puede, Alejandro Cornejo-Rodriguez, et.al. (2017) [14] :

- Usarse una sola rejilla, grabar un ronchigrama, rotar la rejilla 90° y entonces grabar el segundo ronchigrama. En este caso, no es posible la *grabación simultánea* de los

dos patrones, por lo que se pierde precisión en los resultados si es que hay variaciones temporales en \mathbf{W} , como en el caso de un telescopio donde existe turbulencia atmosférica.

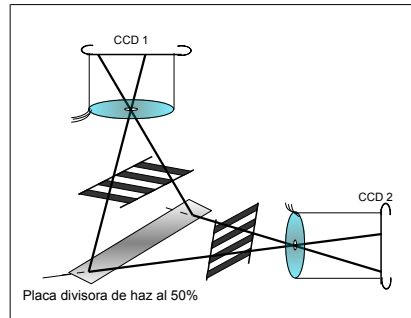


Figura 2.10: *Divisor de Haz.*

- Una segunda opción se logra al dividir en amplitud al frente de onda en dos canales similares consistiendo cada uno de una lente, una rejilla y un detector, ver figura 2.10.
- Una tercera opción se logra con el uso de una rejilla cuadrículada en lugar de la clásica de Ronchi, en cuyo caso los puntos pertenecientes a este último patrón pueden considerarse como los de intersección de los dos ronchigramas cruzados mencionados arriba y que se requieren para poder calcular \mathbf{W} .

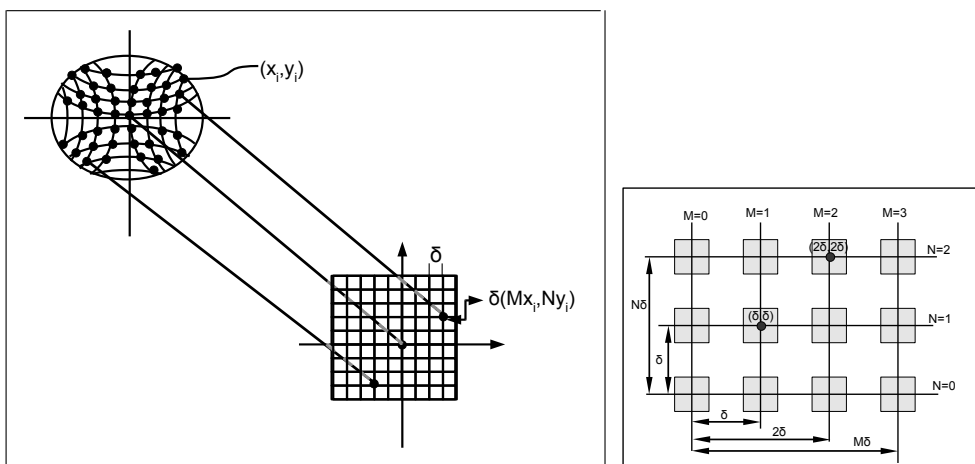


Figura 2.11: *Manchas brillantes originadas por el orificio de la rejilla.*

Para usar este último enfoque debemos interpretar que cada **mancha brillante**, ver figura 2.11, del patrón de franjas observado corresponde a la posición del rayo de luz

que pasa por un orificio de la rejilla cuadrículada. Como esencialmente se debe medir la pendiente de cada rayo de luz, entonces es necesario medir las coordenadas de la mancha (x_i, y_i) del rayo de luz en el plano de la pupila de salida, donde deja al sistema óptico. Además debe especificar las coordenadas del rayo cuando éste pasa por la rejilla $\delta(Mx_i, Ny_i)$. Aquí estamos suponiendo que los orificios de la rejilla están espaciados una distancia δ (en ambas direcciones) y que como en una rejilla cuadrículada Mx_i y Ny_i son enteros.

La evaluación de cada ronchigrama, para aquel en el que sus líneas son paralelas al eje Y , se parte de N_p triadas (X_i, Y_i, Mx_i) ; donde (X_i, Y_i) son las coordenadas asociados a los máximos y/o mínimos de intensidad de las franjas del ronchigrama y Mx_i son los ordenes de interferencia asociados a la franja. Sobre las triadas mencionadas se aplica un ajuste de mínimos cuadrados para obtener la expresión polinómicas de grado $K - 1$ para T_x . De forma similar se obtiene el polinomio para T_y . Si se supone que \mathbf{W} también puede expresarse como otro polinomio pero ahora de grado K ; entonces la integración, de la que hablamos arriba, se realiza usando la relación entre los coeficientes de las expresiones polinómicas de \mathbf{W} con las de T_x y T_y . Un procedimiento similar al anterior puede seguirse si se usa una rejilla cuadrículada. En este caso, los datos N_p del patrón se almacenan en la matriz (X_i, Y_i, Mx_i, Ny_i) , con $i = 1, 2, \dots, N_p$, donde a cada punto de coordenadas (X_i, Y_i) se le asocian los ordenes de interferencia (Mx_i, Ny_i) .

Un punto importante para iniciar la evaluación de patrones definidos dentro de un círculo es el de conocer las coordenadas del centro y el radio del círculo para **escalar y centrar** adecuadamente el **patrón bajo análisis**. Cordero et.al. (1993) [9] han propuesto un algoritmo con ayuda del cual es posible evaluar las coordenadas del centro y el radio del patrón partiendo de puntos del borde que los autores suposieron están afectados por ruido azaroso Gaussiano.

La evaluación de los ronchigramas usando *ajustes polinómicos* tiene la **desventaja** de que se **introduce sobresuavización** a través de la elección del grado del polinomio. Por lo que Cordero et.al. (1994)[10] y A. Cordero-Dávila, et.al. (1994)[11] han propuesto nuevos algoritmos en los que se realizan los ajustes suponiendo que el **ruido** azaroso Gaussiano está sobre las **coordenadas de las franjas** y no sobre la *aberración transversal*, como se efectúa clásicamente.

Otra algoritmo, Cordero-Dávila, A., E.Luna-Aguilar, et.al.(1998)[12], fue desarrollado para evitar la sobresuavización y la interpretación incorrecta en los bordes para lo cual se usa **integración numérica** de igual forma se aplica en la prueba de Hartmann. Desafortunadamente este procedimiento sólo puede emplearse en la prueba de Ronchi con la rejilla cuadrículada. Se han mostrado las bases de la prueba de Ronchi y la relación entre el patrón obtenido, Bironchigrama y las derivadas direccionales (T_x, T_y) de la forma de los errores del frente de onda W . Continuamos con la revisión del ajuste de mínimos cuadrados que usaremos como base, para un método de integración numérica.

Capítulo 3

Mínimos Cuadrados

3.1 Introducción

Tenemos un conjunto de datos experimentales (x_i, y_i, z_i) (ver figura 3.1) y queremos encontrar alguna función $f(x, y)$ que represente a estos valores, en ciertas circunstancias se requiere que $f(x_i, y_i) = z_i$, en otras no, y solo represente la tendencia de los datos experimentales, Chapra, et.al. (2010) [7]. Al encontrar $f(x, y)$ podremos aproximar el valor de z_k real por $f(x_k, y_k) = z$ para algún otro dato (x_k, y_k) que no está en los experimentales.

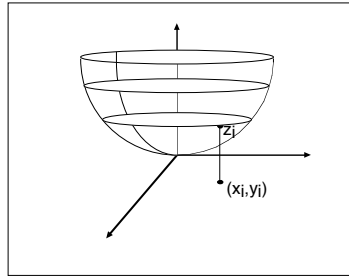


Figura 3.1: Los (x_i, y_i, z_i) sobre la superficie

3.2 Ajuste Bidimensional de Mínimos Cuadrados

En este caso se tiene un conjunto de N_p triadas experimentales (x_i, y_i, z_i) y la suposición de que los puntos ideales (sin ruido) obedecen a una relación funcional, Cordero Dávila A. (1991)[8], como la siguiente:

$$z(x, y) = \sum_{n=0}^g \sum_{m=0}^n a_{nm} x^m y^{n-m}, \quad g \in \{0, 1, 2, \dots, \} \quad (3.1)$$

En este caso se usan, como funciones base, los monomios $x^n y^m$, ver apéndice B, aunque en general pueden usarse cualquier conjunto completo de N_t funciones ; $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$, \dots , $f_{N_t}(x, y)$ de tal forma que se tenga, en general :

$$z = \sum_{k=1}^{N_t} a_k f_k(x, y) \quad (3.2)$$

Si se sustituyen los valores experimentales (x_i, y_i, z_i) en la ecuación 3.2 entonces la igualdad no se cumple y debe incluirse el error azaroso ϵ_i para cada punto experimental como sigue :

$$z_i = \sum_{k=1}^{N_t} \alpha_k f_k(x_i, y_i) + \epsilon_i \quad (3.3)$$

con $i = 1, \dots, N_p$.

La suma de cuadrados de los errores, ϵ_i , esta dada por:

$$S^2 = \sum \epsilon_i^2 \quad (3.4)$$

Para aplicar el método de mínimos cuadrados se sustituye ϵ_i de 3.3 en 3.4 y se obtiene la siguiente suma de cuadrados.

$$S^2 = \sum_{i=1}^{N_p} \left[z_i - \sum_{k=1}^{N_t} \alpha_k f_k(x_i, y_i) \right]^2 \quad (3.5)$$

Ya que se busca que S^2 sea un mínimo, respecto a α_k , entonces

$$\frac{\partial S^2}{\partial \alpha_k} = 0 \quad (3.6)$$

con $k = 1, \dots, N_t$.

Al realizar la derivada de 3.6 en 3.5 se obtiene el siguiente sistema normal de ecuaciones :

$$\sum_{i=1}^{N_p} \left[z_i - \sum_{k=1}^{N_t} \alpha_k f_k(x_i, y_i) \right] f_j(x_i, y_i) = 0 \quad (3.7)$$

con $k = 1, \dots, N_t; j = 1, \dots, N_t$, que finalmente podemos expresar como :

Capítulo 4

Integración con Ajuste de Mínimos Cuadrados

4.1 Introducción

Como se mencionó en el capítulo dos, la ecuación 2.6, la aberración transversal está relacionada con la aberración del frente de onda W a través de

$$\mathbf{T} = -R\nabla W, \quad (4.1)$$

o bien equivalentemente

$$T_x = -R \frac{\partial W}{\partial x} \quad (4.2)$$

y

$$T_y = -R \frac{\partial W}{\partial y} \quad (4.3)$$

En este capítulo seguiremos el trabajo de Malacara y Cornejo (1976)[15] con el objetivo de encontrar la expresión polinómica de W a partir de las expresiones polinómicas de T_x y T_y .

En la evaluación tradicional de interferogramas, Cordero Dávila A.(1991)[8], se supone que la diferencia de caminos ópticos, W , puede expresarse como una combinación lineal de un conjunto completo de N_t funciones, $g_k(x, y)$, $k = 1, \dots, N_t$ definidas en la región de interés, esto es :

$$W(x, y) = \sum_{k=1}^{N_t} a_k g_k(x, y), \quad (4.4)$$

donde los coeficientes $a_k (k = 1, \dots, N_i)$ están asociados al modelo que se desea estimar y son desconocidos. Sustituyendo W de la Ecuación 4.4 en las Ecuaciones 4.2 y 4.3

$$T_x = -R \sum_{k=1}^{N_i} a_k \frac{\partial g_k}{\partial x}(x, y) \quad (4.5)$$

$$T_y = -R \sum_{k=1}^{N_i} a_k \frac{\partial g_k}{\partial y}(x, y) \quad (4.6)$$

Es evidente que si tenemos dos expresiones polinómicas, para T_x y T_y , podemos relacionar sus coeficientes con las de W , esto es con las a_k . En lo que sigue de este capítulo lograremos tal relación ; hecha por primera vez por Malacara y Cornejo (1976)[15].

4.2 Obtención de los datos

Experimentalmente podemos **medir**, del bi-Ronchigrama (ver Figura 4.1), a las coordenadas (x_i, y_i) de los centroides de las manchas. A cada punto le asociamos la pareja (T_{X_i}, T_{Y_i}) en el plano de la rejilla. Esto es así ya que a cada rayo que pasa por (X_i, Y_i) cruza a la rejilla en el orificio de coordenadas (T_{X_p}, T_{Y_p}) , ponerse como :

$$\mathbf{T}(x_p, y_p) = (m_p, n_p)\delta \quad (4.7)$$

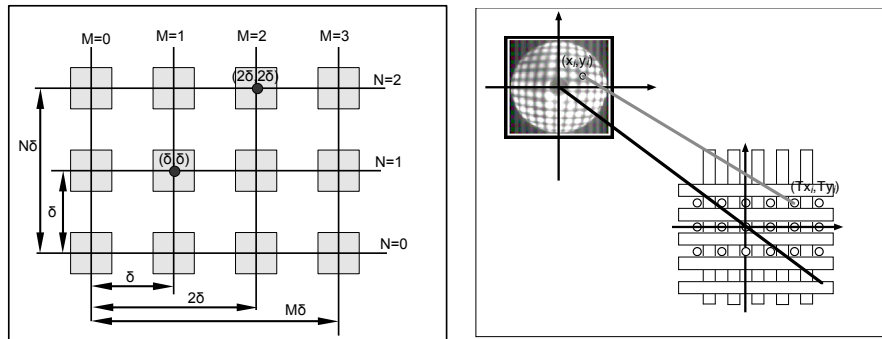


Figura 4.1: *Rejilla ampliada. Centroide (x_i, y_i) asignado a (T_{X_i}, T_{Y_i}) en la rejilla.*

donde δ es el período de la rejilla cuadrículada y (m_p, n_p) indican la ubicación del orificio en la rejilla.

4.3 Ajuste con monomiales

Cuando utilizamos los monomiales, W es representada como un polinomio en dos dimensiones de grado k de la forma siguiente:

$$W(x, y) = \sum_{n=0}^k \sum_{m=0}^n B_{nm} x^m y^{n-m} \quad (4.8)$$

y en este caso las aberraciones transversales, salvo el factor constante $-R$ están dadas por:

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \sum_{n=1}^k \sum_{m=1}^n m B_{nm} x^{m-1} y^{n-m} \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial W}{\partial y} = \sum_{n=1}^k \sum_{m=0}^n (n-m) B_{nm} x^m y^{(n-m)-1} \quad (4.10)$$

En la prueba de Ronchi se miden ¹ los valores de (x, y) sobre la pupila de salida del sistema óptico correspondientes a T_x y T_y . Salvo un factor constante R , se puede suponer que T_x es representado como un polinomio bidimensional de grado $k-1$ que tiene la forma siguiente:

$$\frac{1}{R} T_x(x, y) = \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^i C_{ij} x^j y^{i-j} \quad (4.11)$$

Los datos de los puntos (x_p, y_p) usados para obtener los estimadores \hat{C}_{ij} de C_{ij} , corresponden a las mediciones de los máximos y/o mínimos, en intensidad de las franjas verticales de interferencia, ver figura 4.1. Los valores de $T_x(x, y)$ experimentales son de la forma:

$$T_x(x_i, y_i) = \delta m_i \quad (4.12)$$

donde m_i es el orden correspondiente al punto (x_i, y_i) y δ es el periodo de la rejilla.

Al sustituir x_i, y_i y δm_i en la ecuación 4.11, la relación no se mantiene exacta ya que existe un error azaroso, ϵ_i , que se expresa por:

$$\epsilon_i = \delta m_i + R \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^i C_{ij} x_p^j y_p^{i-j} \quad (4.13)$$

La hipótesis de gaussianidad de las ϵ_i , está implícita en el hecho de que en la evaluación tradicional de interferogramas los estimadores \hat{C}_{ij} de C_{ij} son aquellos que minimizan a la suma de cuadrados siguiente:

¹ver sección 2.4

$$S^2 = \sum_{p=1}^{N_p} \epsilon_p^2 \quad (4.14)$$

donde N_p es el número de puntos experimentales.

De manera similar, para T_y representada por el polinomio bidimensional de grado $(k-1)$

$$\frac{1}{R} T_y(x, y) = \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^i D_{ij} x^j y^{i-j} \quad (4.15)$$

aquí tenemos franjas horizontales de interferencia y los valores experimentales de $T_y(x, y)$ son:

$$T_y(x_p, y_p) = \delta n_p \quad (4.16)$$

y obtenemos sus correspondientes estimadores \hat{D}_{ij} para los coeficientes D_{ij} de manera similar.

A su vez los errores η_p están definidos por :

$$\eta_p = \delta m_p + R \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^i D_{ij} x_p^j y_p^{i-j} \quad (4.17)$$

Ahora establecemos Cornejo R.A., Malacara D.(1976)[15] la relación entre los coeficientes, de la descripción monomial de \mathbf{W} y la descripción monomial de las aberraciones transversales T_x y T_y .

Igualando las ecuaciones (4.9) y (4.11)

$$\sum_{n=1}^k \sum_{m=1}^n m B_{nm} x^{m-1} y^{n-m} = \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^i C_{ij} x^j y^{i-j} \quad (4.18)$$

y las ecuaciones 4.10 y 4.15

$$\sum_{n=1}^k \sum_{m=0}^n (n-m) B_{nm} x^m y^{(n-m)-1} = \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^i D_{ij} x^j y^{i-j} \quad (4.19)$$

Si hacemos las sustituciones $i = n - 1$ y $j = m - 1$ en la ecuación (4.18) obtenemos

$$mB_{nm} = C_{n-1,m-1} \quad (4.20)$$

y similarmente, haciendo las sustituciones $i = n - 1$ y $j = m$ en la ecuación 4.19

$$(n - m)B_{nm} = D_{n-1,m} \quad (4.21)$$

Los coeficientes $C_{n,m}$ y $D_{n,m}$ son obtenidos de un ajuste de mínimos cuadrados para las mediciones de \mathbf{T} , los coeficientes B_{nm} de W pueden obtenerse de (4.20) y (4.21)

$$B_{nm} = \frac{C_{n-1,m-1}}{m} \quad (4.22)$$

$$B_{nm} = \frac{D_{n-1,m}}{n - m} \quad (4.23)$$

Nótese que la ecuación 4.23 no es válida para el término $m = 0$, por lo cual debe emplearse la ecuación 4.22, de igual manera la ecuación 4.22 no es válida para $n = m$ entonces usamos 4.23.

Ya que ambas ecuaciones dan los valores de $B_{n,m}$ cuando $m \neq 0$ y $m \neq n$, se sugiere que estos coeficientes se calculen con ayuda del promedio siguiente:

$$B_{nm} = \frac{1}{2} \left(\frac{C_{n-1,m-1}}{m} + \frac{D_{n-1,m}}{n - m} \right)$$

Con esta solución pasamos de los valores de los coeficientes de las expresiones polinómicas de las aberraciones transversales, T_x y T_y , a los valores de los coeficientes de la diferencia de caminos ópticos, W . Ya que utilizamos un ajuste de mínimos cuadrados para obtener los coeficientes de las expresiones polinómicas de las aberraciones transversales tenemos algunas desventajas como son:

- El sobreajuste.
- La elección incierta del grado de polinomio de ajuste.

En el siguiente capítulo revisaremos un método de Integración Numérica propuesto por Cordero-Dávila, A., E. Luna-Aguilar, et.al (1998) [12], para evitar la sobresuavización y la interpretación incorrecta de los bordes.

Capítulo 5

Integración Numérica, con la Regla del Trapecio

5.1 Introducción

Se expuso un método de integración numérica, en el capítulo anterior, que usamos para pasar de los valores de los coeficientes de las expresiones polinómicas de las aberraciones transversales, T_x y T_y , a los valores de los coeficientes de la diferencia de caminos ópticos, W .

A través del ajuste de mínimos cuadrados es posible conocer los coeficientes de las aberraciones transversales T_x y T_y ; las cuales se representaron con monomios. Con los coeficientes estimados se calculan los coeficientes de los monomios que representan a W . Entre las desventajas de los ajustes de mínimos cuadrados están :

- El sobreajuste.
- La elección **incierta** del grado de polinomio de ajuste.

Ahora seguiremos el método propuesto por Cordero-Dávila, A., E. Luna-Aguilar, S. Vázquez-Montiel, S. Zárate-Vázquez and M.E. Percino-Zacarias (1998) [12], para evitar la sobresuavización y la interpretación incorrecta en los bordes. Esta se basa en la **integración numérica** de igual forma como se aplica en la prueba de Hartmann, Ghozeil I (1992)[21].

Como vimos en el capítulo 2, la ecuación vectorial 2.6 que relaciona la diferencia de caminos ópticos W y la aberración transversal \mathbf{T} en el plano Imagen Gaussiano ($T_Z = 0$) está dada por

$$\mathbf{T} = -R\nabla W. \quad (5.1)$$

Ya que \mathbf{T} es un campo gradiente entonces

$$W_{\mathbf{B}} - W_{\mathbf{A}} = \frac{1}{R} \int_{\mathbf{A}}^{\mathbf{B}} \mathbf{T} \cdot d\mathbf{r} \quad (5.2)$$

donde el camino óptico en los puntos A y B está dado respectivamente por $W_{\mathbf{A}}$ y $W_{\mathbf{B}}$. Es posible demostrar que si W sólo depende de la posición, esto es $W = W(x, y)$, entonces la integral definida en 5.2 no depende de la trayectoria de integración, Mardsen Jerrold E.; Tromba, Anthony J (1988)[29], Fulks(1983)[20].

5.2 El Método del Trapecio

Para realizar la integración en forma aproximada es necesario recordar el método del trapecio que se ilustra en la Figura 5.1 para una dimensión (William H. (1986) [30], Burden Richard (1985) [2], Chapra (2010) [7]).

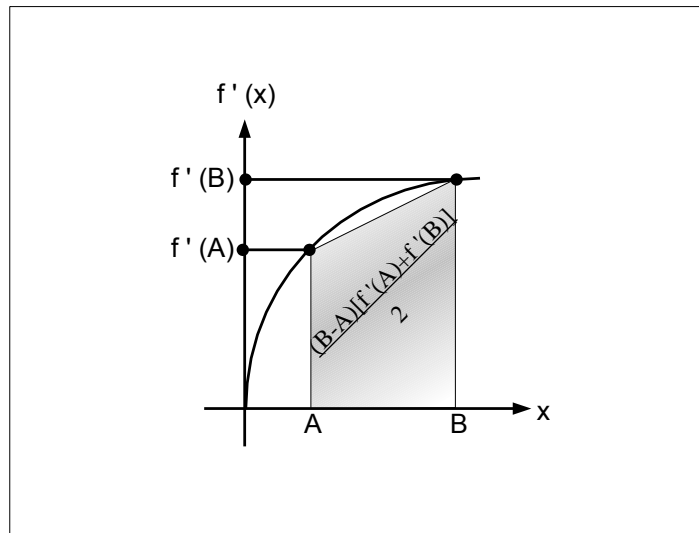


Figura 5.1: Área del Trapecio.

Si los puntos A y B son suficientemente cercanos entonces el área bajo la gráfica de la función $f'(x)$ puede **aproximarse** por el área del trapecio

$$f(B) - f(A) \approx \frac{1}{2}(B - A)[f'(A) + f'(B)] \quad (5.3)$$

donde

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} \quad (5.4)$$

representa la derivada de f respecto a x y por tanto hemos supuesto que el área bajo la gráfica de $f'(x)$ es la diferencia $f(B) - f(A)$.

Para la integral de línea necesitamos una trayectoria para ir del punto A con coordenadas (A_x, A_y) al punto B con coordenadas (B_x, B_y) lo hacemos con la siguiente parametrización, ver figura 5.2.

$$x(t) = A_x + (B_x - A_x)t \text{ para } t \in [0, 1] \quad (5.5)$$

$$y(t) = A_y + (B_y - A_y)t \text{ para } t \in [0, 1] \quad (5.6)$$

$$\sigma(t) = (x(t), y(t)); \text{ para } t \in [0, 1] \quad (5.7)$$

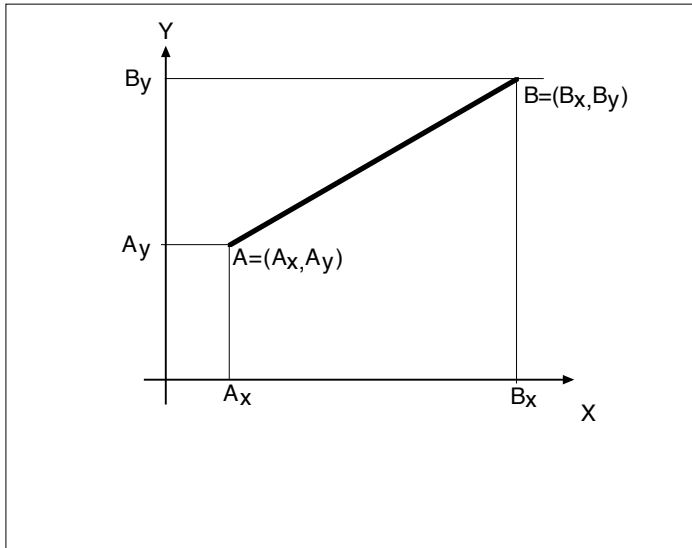


Figura 5.2: Parametrización $\sigma(t)$.

en la ecuación 5.2 necesitamos la derivada de $\sigma(t)$, que es:

$$x'(t) = (B_x - A_x) \text{ para } t \in [0, 1] \quad (5.8)$$

$$y'(t) = (B_y - A_y) \text{ para } t \in [0, 1] \quad (5.9)$$

de donde

$$\boldsymbol{\sigma}'(t) = (x'(t), y'(t)); \text{ para } t \in [0, 1] \quad (5.10)$$

y los componentes de \mathbf{T} :

$$\mathbf{T} = (T_x, T_y) \quad (5.11)$$

el integrando en la ecuación (5.2) con la parametrización quedaría :

$$\mathbf{T} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = (T_x(t), T_y(t)) \cdot ((B_x - A_x), (B_y - A_y))dt \quad (5.12)$$

$$\mathbf{T} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = ((B_x - A_x) \cdot T_x(t) + (B_y - A_y) \cdot T_y(t))dt \quad (5.13)$$

esta es una función de \Re en \Re y podemos aplicar el método del trapecio para hacer la integración, tenemos :

$$f'(t)dt = ((B_x - A_x) \cdot T_x(t) + (B_y - A_y) \cdot T_y(t))dt \quad (5.14)$$

para $t = 0$

$$f'(0) = ((B_x - A_x) \cdot T_x(\mathbf{A}) + (B_y - A_y) \cdot T_y(\mathbf{A})) \quad (5.15)$$

para $t = 1$

$$f'(1) = ((B_x - A_x) \cdot T_x(\mathbf{B}) + (B_y - A_y) \cdot T_y(\mathbf{B})) \quad (5.16)$$

aplicamos la regla del trapecio

$$\int_0^1 f'(t)dt \approx \frac{1}{2}(1-0)((f'(1) + f'(0))) \quad (5.17)$$

$$\frac{1}{2}[(B_x - A_x)T_x(\mathbf{B}) + (B_y - A_y)T_y(\mathbf{B}) + (B_x - A_x)T_x(\mathbf{A}) + (B_y - A_y)T_y(\mathbf{A})] \quad (5.18)$$

finalmente tenemos el resultado:

$$W_{\mathbf{B}} - W_{\mathbf{A}} \approx \frac{1}{2}[(B_x - A_x)(T_x(\mathbf{B}) + T_x(\mathbf{A})) + (B_y - A_y)(T_y(\mathbf{B}) + T_y(\mathbf{A}))] \quad (5.19)$$

En el apéndice C daremos otro punto de vista de la deducción de la ecuación 5.19 como el promedio de dos aproximaciones utilizando una expansión en serie de Taylor.

5.3 Obtención de los datos Experimentales

Por lo descrito en la sección (2.4), se requiere de dos ronchigramas para llevar a cabo la integral de línea correspondiente, los cuales se obtienen utilizando una rejilla cuadriculada.

Para cada punto perteneciente al Bi-Ronchigrama, ver figura 5.3, es posible calcular la aberración transversal, (T_x, T_y) , como la diferencia entre las coordenadas reales y las ideales del rayo cuando pasa por el plano de la rejilla. Los rayos reales, ver figura 5.3, pasan por el centroide de cada mancha del patrón, con coordenadas $(x, y, 0)$, y por el punto con coordenadas $(\delta M, \delta N, R-d)$ en el plano de la rejilla cuadriculada; donde R es el radio de curvatura paraxial del frente de onda bajo prueba, d es la distancia de la rejilla cuadriculada al centro de curvatura C , y δ es el período de la rejilla, Cordero-Dávila, A., E.Luna-Aguilar, et.al. [12].

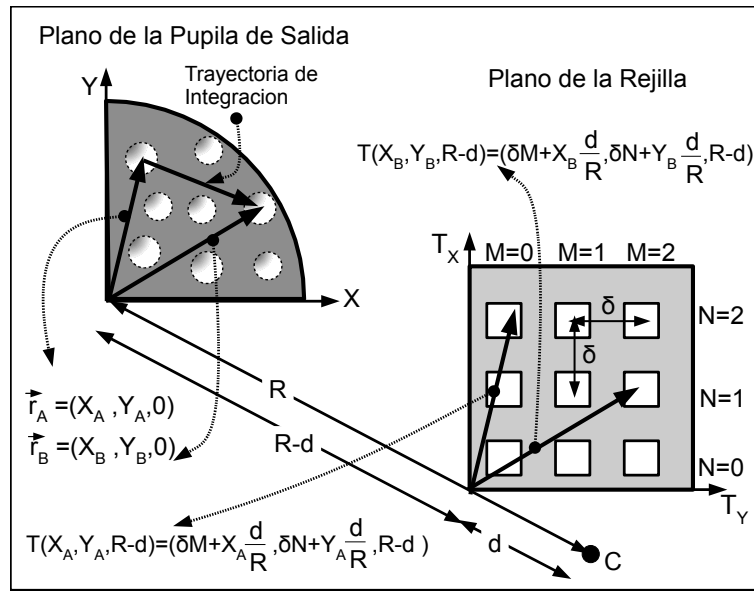


Figura 5.3: Obtención de los datos experimentales del Bironchigrama.

Por otro lado para un rayo ideal que saliera de $(x, y, 0)$, éste debería pasar por el punto imagen ideal, ver figura 5.4, con coordenadas:

$$\left(\frac{xd}{R}, \frac{yd}{R}, R-d \right). \quad (5.20)$$

Con las coordenadas reales e ideales podrá calcularse la aberración transversal, (T_x, T_y) , de cada rayo como:

$$T_x = \frac{xd}{R} + \delta M \quad (5.21)$$

$$T_y = \frac{yd}{R} + \delta N \quad (5.22)$$

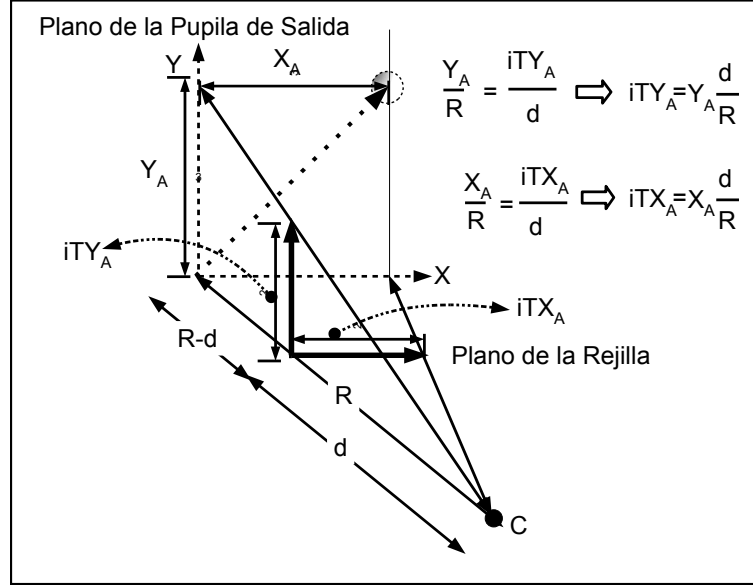


Figura 5.4: T_x y T_y Ideales.

por otro lado, la aberración transversal se puede representar por 5.1 por lo que la *diferencia* de W entre los puntos \mathbf{A} y \mathbf{B} , ecuación 5.2, pertenecientes al bironchigrama se puede obtener a través de una integral de línea, ver figura 5.3, que puede calcularse de manera **aproximada** por la fórmula siguiente definida por la aplicación de 5.23

$$W_{\mathbf{B}} - W_{\mathbf{A}} \approx \frac{-1}{2R} [(T_x(\mathbf{B}) + T_x(\mathbf{A}))(x_B - x_A) + (T_y(\mathbf{B}) + T_y(\mathbf{A}))(y_B - y_A)] \quad (5.23)$$

5.4 Descripción del algoritmo

Ya sabemos como calcular la aproximación a la diferencia $W_{\mathbf{B}} - W_{\mathbf{A}}$ entre los puntos \mathbf{A} y \mathbf{B} y conociendo los valores de las derivadas en dichos puntos. Pero tenemos un conjunto de estos y deseamos conocer cuanto vale W en cada uno de ellos además de considerar los detalles inherentes en la prueba con la rejilla bironchi, la pauta nos la da el algoritmo, Cordero-Dávila, A., E.Luna-Aguilar, et.al. (1998) [12], descrito a continuación:

1. Aplicar un primer ajuste de mínimos cuadrados con un polinomio que contenga exclusivamente a los términos de *desenfoque* y *giros* del frente de onda, los cuales dependen exclusivamente del origen de la esfera de referencia. El objetivo es compensar los errores de colocación del detector: tanto longitudinales (defoco) como transversales (giros).
2. Localizar uno o varios puntos de referencia a los cuales se les puede asignar $W = 0$, para luego efectuar las integraciones numéricas. En virtud de que el método de integración numérica que se usa tiende a acumular errores azarosos, Ghoizel (1992) [21] y/o numéricos por la integración , se tomó especial cuidado de recalcular varias veces W para cada punto, partiendo ahora desde todos sus vecinos cercanos y finalmente promediando todos los valores obtenidos. Este procedimiento tiende a reducir la acumulación sistemática y azarosa de los errores y/o numéricos por la integración.
3. Eliminar cualquier error debido a la determinación de los giros y defoco se realiza un segundo ajuste de mínimos cuadrados sobre W usando los polinomios de Zernike para los giros y el desenfoque.
4. Calcular, con los coeficientes obtenidos, los valores nuevos de W en cada punto (x, y) , garantizando que se elegirá el mejor foco.

Se ha mostrado el algoritmo para calcular W , utilizando el método del Trapecio de integración numérica para calcular el valor aproximado de la integral de línea 5.2.

En el siguiente capítulo revisaremos los algoritmos que se implementaron para cumplir con las indicaciones del algoritmo, "...se tomó especial cuidado de recalcular varias veces W para cada punto partiendo ahora desde todos sus vecinos cercanos y finalmente promediando todos los valores obtenidos...", Cordero-Dávila,A., E.Luna-Aguilar, et.al (1998) [12].

Capítulo 6

Algoritmos para recalcular varias veces W

6.1 Introducción

El paso dos del algoritmo para calcular W del capítulo 5 nos pide localizar uno o varios puntos de referencia a los cuales se les asigna $W=0$ y recalcular varias veces W para cada punto desde todos sus vecinos cercanos, y finalmente promediando todos los valores obtenidos, que nos dará el valor de W para cada punto. A continuación describimos dos algoritmos para recalcular varias veces W .

En una matriz $W(i, j)$, guardaremos los valores de W recalculados y promediados, solo escogeremos un punto de referencia inicial para asignarle el valor $W = 0$, característica que será igual para los dos algoritmos, la diferencia es la forma en como se hacen los recorridos para el recálculo. Un algoritmo genera patrones de línea recta, ver figura 6.2, recorriendo segmentos de columnas o filas de la matriz, el otro algoritmo genera patrones parecidos a círculos concéntricos, ver figura 6.5.

6.2 Recorrido con patrones de línea recta.

Comenzamos en el punto, A , de referencia inicial (i, j) en la matriz W , con $W(A) = 0$ y calculamos con la regla del trapecio a W , en los puntos $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, B_7, B_8$ desde A . Veamos el algoritmo:

1. Escogemos un punto A , que es el punto de referencia, que está en la posición (i, j) de la matriz W , ver figura 6.1.
2. Ahora escogemos un punto B_k (vecino cercano) y calculamos la diferencia $W_{B_k} - W_A$ mediante la regla del trapecio y le llamamos $DIF(W_{B_k} - W_A)$,

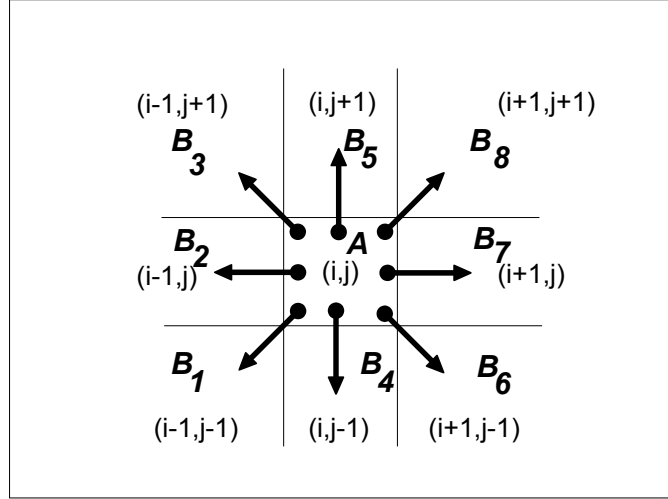


Figura 6.1: Cálculo de \mathbf{W} para cada B_k desde A .

$$DIF(W_{B_k} - W_A) = \mathbf{W}_{B_k} - \mathbf{W}_A \quad (6.1)$$

Si es la primera vez que se calcula W_{B_k} , lo guardamos en $\mathbf{W}_{B_k}^1$.

$$\mathbf{W}_{B_k}^1 = DIF(W_{B_k} - W_A) + \mathbf{W}_A \quad (6.2)$$

y definimos a \mathbf{W}_{B_k} como $\mathbf{W}_{B_k}^1$.

$$\mathbf{W}_{B_k} = \mathbf{W}_{B_k}^1 \quad (6.3)$$

Si es el n -ésimo valor de W_{B_k} .

$$\mathbf{W}_{B_k}^n = DIF(W_{B_k} - W_A) + \mathbf{W}_A \quad (6.4)$$

Entonces se definirá como el promedio de los $(n - 1)$ valores previos mas el recién calculado.

$$\mathbf{W}_{B_k} = \frac{1}{n} [(\mathbf{W}_{B_k}^1 + \dots + \mathbf{W}_{B_k}^{n-1}) + \mathbf{W}_{B_k}^n] \quad (6.5)$$

Para explicar como hacer el calculo de 6.5, recordemos que el promedio, \bar{X}_N , con N números x_1, x_2, \dots, x_N se define como :

$$\bar{X}_N = \frac{1}{N}[x_1 + x_2 + \dots + x_N] \quad (6.6)$$

$$\bar{X}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (6.7)$$

y el promedio, \bar{X}_{N+1} , con $N + 1$ números $x_1, x_2, \dots, x_N, x_{N+1}$

$$\bar{X}_{N+1} = \frac{1}{N+1}[x_1 + x_2 + \dots + x_N + x_{N+1}] \quad (6.8)$$

$$\bar{X}_{N+1} = \frac{1}{N+1} \sum_{i=1}^{N+1} x_i \quad (6.9)$$

Si al \bar{X}_N le sumamos x_{N+1}

$$\bar{X}_N + x_{(N+1)} = \frac{1}{N}[x_1 + x_2 + \dots + x_N] + x_{(N+1)} \quad (6.10)$$

necesitamos el valor guardado \bar{X}_N multiplicarlo por N para obtener :

$$N\bar{X}_N = \sum_{i=1}^N x_i \quad (6.11)$$

Ahora si sumar x_{N+1}

$$\frac{1}{N+1}[N\bar{X}_N + x_{N+1}] = \frac{1}{N+1} \left[\sum_{i=1}^N x_i + x_{N+1} \right] \quad (6.12)$$

$$= \bar{X}_{N+1} \quad (6.13)$$

pero para hacer esto se requiere !saber $N!$:(además de X_{N+1} .

Para resolver este problema necesitamos, en total 3 matrices:

- La matriz $N(i, j)$, guarda las N veces que se recálculo W para la entrada (i, j) .
- La matriz $S(i, j)$, guarda la sumatoria de los N recálculos de W , es decir:

$$\sum_{k=1}^N W_k = W_1 + W_2 + \dots + W_{N-1} + W_N \quad (6.14)$$

para la entrada (i, j)

- La matriz $W(i, j)$, guarda el promedio de los N recálculos de W ,

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N W_k = \frac{1}{N} [W_1 + W_2 + \dots + W_{N-1} + W_N] \quad (6.15)$$

para la entrada (i, j)

Los dos pasos (1. y 2.) anteriormente descritos se aplica para las B_k , para $k = 1, 2, \dots, 8$, que se encuentran en la matriz W en las posiciones mostradas abajo :

$$B_1 \text{ en } (i-1, j-1) \quad (6.16)$$

$$B_2 \text{ en } (i-1, j) \quad (6.17)$$

$$B_3 \text{ en } (i-1, j+1) \quad (6.18)$$

$$B_4 \text{ en } (i, j-1) \quad (6.19)$$

$$B_5 \text{ en } (i, j+1) \quad (6.20)$$

$$B_6 \text{ en } (i+1, j-1) \quad (6.21)$$

$$B_6 \text{ en } (i+1, j) \quad (6.22)$$

$$B_8 \text{ en } (i+1, j+1) \quad (6.23)$$

Ahora trasladamos el algoritmo que se aplicó para A que esta en la posición (i, j) y se ha calculado W para las $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, B_7, B_8$, de la figura 6.1, para el ejemplo de la figura 6.2, donde el A se transforma en A_0 y sus respectivas B_k^i en $A_{12}, A_8, A_9, A_{13}, A_1, A_{14}, A_4, A_5$.

Para calcular W en la figura 6.2, muestra como se recorre la matriz de 5 filas por 3 columnas por eso tenemos quince entradas, $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9, A_{10}, A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{14}$, el subíndice nos indica el orden de como se hace el recorrido además indica que esta entrada de la matriz contribuyó con el recálculo de W para su vecino B_k^i .

Definimos A_0 como el punto inicial y calculamos W en $A_{12}(B_1^0), A_8(B_2^0), A_9(B_3^0), A_{13}(B_4^0), A_1(B_5^0), A_{14}(B_6^0), A_4(B_7^0), A_5(B_8^0)$ desde A_0 , ponemos un A_0 en cada casilla, ver figura 6.2.

$W(A_{11})$ desde $(A_{10} + A_3 + A_2)/3$ A_{11}	$W(A_3)$ desde $(A_{10} + A_{11} + A_2 + A_6 + A_7)/5$ A_3	$W(A_7)$ desde $(A_2 + A_3 + A_6) / 3$ A_7
$W(A_{10})$ desde $(A_9 + A_{11} + A_1 + A_2 + A_3)/5$ A_{10}	$W(A_2)$ desde $(A_9 + A_{10} + A_{11} + A_1 + A_3 + A_5 + A_6 + A_7) / 8$ A_2	$W(A_6)$ desde $(A_1 + A_2 + A_3 + A_5 + A_7) / 5$ A_6
$W(A_9)$ desde $(A_8 + A_{10} + A_0 + A_1 + A_2) / 5$ A_9	$W(A_1)$ desde $(A_8 + A_9 + A_{10} + A_0 + A_2 + A_4 + A_5 + A_6) / 8$ A_1	$W(A_5)$ desde $(A_0 + A_1 + A_2 + A_4 + A_6) / 5$ A_5
$W(A_8)$ desde $(A_{12} + A_9 + A_{13} + A_0 + A_1) / 5$ A_8	$W(A_0)$ desde $(A_{12} + A_8 + A_9 + A_{13} + A_1 + A_{14} + A_4 + A_5) / 8$ A_0	$W(A_4)$ desde $(A_{13} + A_0 + A_1 + A_{14} + A_5) / 5$ A_4
$W(A_{12})$ desde $(A_8 + A_{13} + A_0) / 3$ A_{12}	$W(A_{13})$ desde $(A_{12} + A_8 + A_0 + A_{14} + A_4) / 5$ A_{13}	$W(A_{14})$ desde $(A_{13} + A_0 + A_4) / 3$ A_{14}

Figura 6.2: Recorrido para calcular W para cada uno de los puntos.

Ahora necesitamos calcular el resto de los puntos, y pasamos a usar A_1 como la nueva A y calculamos los nuevos valores de W en los puntos $A_8(B_1^1)$, $A_9(B_2^1)$, $A_{10}(B_3^1)$, $A_0(B_4^1)$, $A_2(B_5^1)$, $A_4(B_6^1)$, $A_5(B_7^1)$, $A_6(B_8^1)$ desde A_1 , ver figura 6.2, para anotar que lo hemos hecho así, pusimos A_1 ; notese que los B_k tienen un superíndice j , B_k^j para denotar que pertenecen a la j -ésima A , A_j .

En seguida redefinimos A_2 como la nueva A y calculamos los nuevos valores de W para las B_k^2 desde A_2 , así pusimos A_2 , para anotarlo, $A_9(B_1^2)$, $A_{10}(B_2^2)$, $A_{11}(B_3^2)$, $A_1(B_4^2)$, $A_3(B_5^2)$, $A_5(B_6^2)$, $A_6(B_7^2)$, $A_7(B_8^2)$ desde A_2 .

Hemos llegado a la última fila de la matriz, para este ejemplo, definimos a A_3 como la nueva A y calculamos W para las B_k^3 desde A_3 , así pusimos A_3 , para anotarlo, $A_{10}(B_1^3)$, $A_{11}(B_2^3)$, no hay otra fila arriba entonces el (B_3^3) no existe, $A_2(B_4^3)$, el (B_5^3) no existe, $A_6(B_6^3)$, $A_7(B_7^3)$ y finalmente el (B_8^3) no existe.

Ya terminamos de recorrer la primer columna, ahora vamos a recorrer la columna que esta a la derecha, definiendo a A_4 como la nueva A y repetimos todo el proceso descrito anteriormente, es decir, calculamos W para las B_k^4 o equivalentemente para las

$A_{13}, A_0, A_1, A_{14}, A_5$, (y como ya hay otra columna a la derecha no existen B_6^4, B_7^4 y B_8^4) desde A_4 y lo anotamos en la matriz con A_4 y así seguimos recorriendo esta columna y haciendo sus correspondientes cálculos de W de las B_k^5, B_k^6, B_k^7 (para $k = 1 \dots, 8$, si es que existen) desde sus correspondientes A_5, A_6 y A_7 anotándolos en la matriz.

Ya terminamos el primer cuadrante, para este ejemplo, ahora vamos a recorrer el segundo cuadrante que comienza en la columna que está a la izquierda de A_0 , y definimos a A_8 como la nueva A y calculamos W para B_k^8 desde A_8 y anotamos A_8 . Repetimos los mismos pasos aplicados para el primer cuadrante, solo que ahora nos desplazamos hacia la izquierda con respecto a A_0 .

Después de A_8 , seguimos con los cálculos de W de los $B_k^9, B_k^{10}, B_k^{11}$ (para $k = 1, \dots, 8$, si es que existen) desde sus correspondientes A_9, A_{10}, A_{11} y anotándolos en la matriz. Hasta aquí terminamos el segundo cuadrante.

El tercer y cuarto cuadrante lo vamos a recorrer en filas, comenzado en la primera columna y la primera fila que está abajo (si es que existe) de A_0 , es decir, en la posición $(1, j - 1)$ y terminando en la posición $(m, j - 1)$, suponiendo que la matriz tiene m columnas.

Para nuestro ejemplo calculamos W de las $B_k^{12}, B_k^{13}, B_k^{14}$ (para $k = 1, \dots, 8$, si es que existen) desde sus A_{12}, A_{13}, A_{14} correspondientes y anotando, como ya no hay filas abajo, finalmente terminamos de recorrer toda la matriz y tenemos el promedio de W para cada una de sus entradas. Con la aplicación del Algoritmo descrito arriba se garantiza el cálculo de W desde todos sus vecinos (si es que existen), como se muestra, en la figura 6.3. Para ilustrar un caso general del recorrido ver la Figura 6.4.

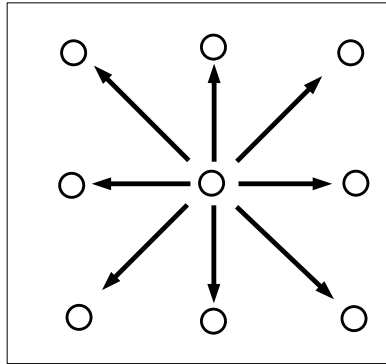


Figura 6.3: El cálculo de W desde todos sus vecinos.

Otro algoritmo para recorrer la matriz donde el punto de referencia inicial será el centro de círculos concéntricos, con esta idea, se tomó como base el algoritmo de Lee,

encia y aplicamos los dos puntos anteriores (1. y 2.).

Si no hay más elemento en la cola, ya hemos terminado de calcular las diferencias $WD(B_k)$, tomado como base la regla del trapecio. La secuencia de como se va redefiniendo A se muestran en la Figura 6.5 y ahora podemos proceder con el segundo paso.

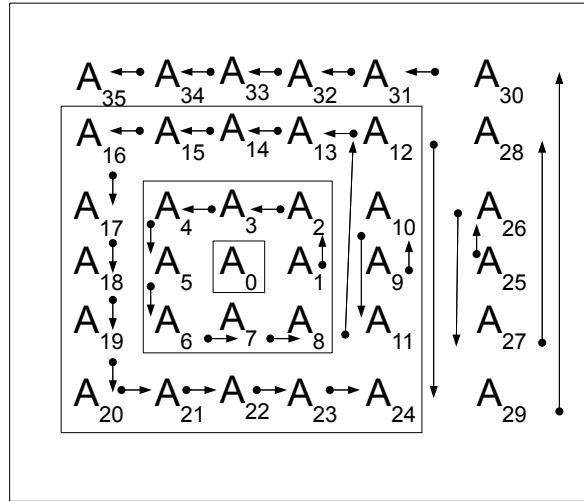


Figura 6.5: Patrón Circular.

En el segundo paso, hacemos un proceso similar, tenemos una matriz $\mathbf{W}(i, j)$ con valor inicial de cero, para todos los posibles valores de i y j , donde se guardarán los valores de \mathbf{W} y la matriz $WD(B_k)$ de diferencias calculadas en el primer paso. A nuestro primer punto A de referencia inicial le asignamos $W(A) = 0$.

1. Tomamos nuestro punto A de referencia inicial.
2. Se comienza a visitar sus vecinos cercanos B_k en algún orden, conforme se van vistando :
 - (a) Se calcula la \mathbf{W}_{B_k} a partir del valor \mathbf{W}_A conocido y la diferencia calculada $\mathbf{WD}(B_k)$.

$$\mathbf{W}_{B_k} = W_A + WD(B_k) \quad (6.24)$$

Si es la primera vez que se calcula sólo se guarda el valor, si no promediando el valor $\mathbf{W}(B_k)$ anterior con el recién calculado.

- (b) Se inserta su posición de B_k en una cola, si no está o no ha estado previamente.

Una vez que se acabaron de visitar todos los vecinos cercanos del punto de referencia A, extraemos el primer elemento de la cola y éste será nuestro nuevo punto de referencia y aplicamos los dos puntos anteriores.

Si ya no hay más elementos en la cola, ya hemos terminado de recalculer $\mathbf{W}(i, j)$ para cada uno de los puntos.

Para aplicar este algoritmo, consideraremos el cálculo de la diferencia $\mathbf{W}_{B_k} - \mathbf{W}_A$ y la relación con el número de vecinos que tiene el punto de referencia A.

6.3.1 Calcular la diferencia $\mathbf{W}_{B_k} - \mathbf{W}_A$, con una celda básica.

La cantidad de vecinos que vamos a considerar son ocho, que se dividirán en cuatro casos, cada uno de ellos teniendo 3 vecinos, para describir con detalle como queremos calcular la diferencia $\mathbf{W}_{B_k} - \mathbf{W}_A$ introducimos un cambio de nomenclatura. Hay dos puntos cualesquiera a, b pero a, b están relacionados con otros dos puntos d, c como se observa en la figura 6.6, ésta es ahora la diferencia que queremos calcular $\mathbf{W}_b - \mathbf{W}_a$, que será nuestra celda básica, que ocuparemos para resolver el caso de ocho vecinos.

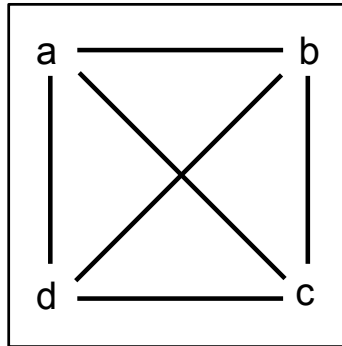


Figura 6.6: *Celda Basica*

La relación de a con b, c, d nos da otras formas de calcular la diferencia $\mathbf{W}_b - \mathbf{W}_a$ descomponiéndola como la suma de diferencias que va a depender de como hagamos el recorrido partiendo del punto a para llegar al punto b , las opciones que tenemos se muestran en la figura 6.7, las representaremos con secuencia de letras que representan los puntos y los números i, ii, iii, iv, v, vi indicaran las diferencias que unen estos puntos¹:

¹se parcen a los grafos dirigidos

- a,b . (i)

$$W_b - W_a = W_b - W_a \tag{6.25}$$

$$i = i \tag{6.26}$$

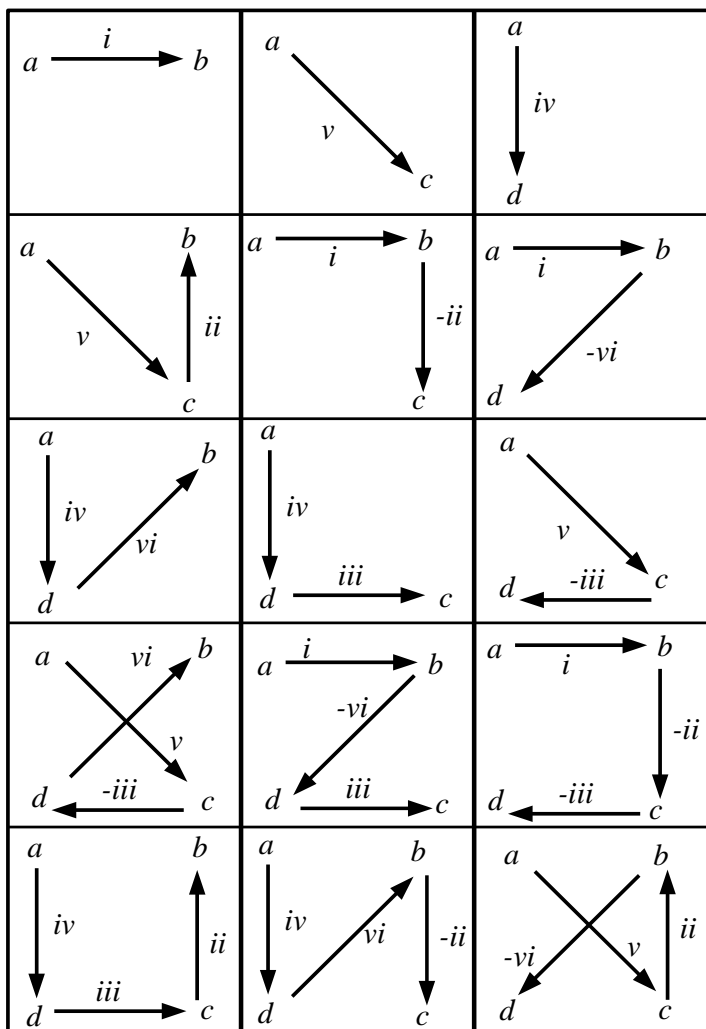


Figura 6.7: Diferentes recorridos comenzando en a y terminará en b, o en c, o en d.

- a,c,b. (v, ii)

$$W_b - W_a = (W_c - W_a) + (W_b - W_c) \tag{6.27}$$

$$i = v + ii \tag{6.28}$$

- a,d,b (iv, vi)

$$\mathbf{W}_b - \mathbf{W}_a = (\mathbf{W}_d - \mathbf{W}_a) + (\mathbf{W}_b - \mathbf{W}_d) \quad (6.29)$$

$$i = iv + vi \quad (6.30)$$

- a,d,c,b. (v, iii, vi)

$$\mathbf{W}_b - \mathbf{W}_a = (\mathbf{W}_d - \mathbf{W}_a) + (\mathbf{W}_c - \mathbf{W}_d) + (\mathbf{W}_b - \mathbf{W}_c) \quad (6.31)$$

$$i = v + iii + vi \quad (6.32)$$

- a,c,d,b. (iv, iii, ii)

$$\mathbf{W}_b - \mathbf{W}_a = (\mathbf{W}_c - \mathbf{W}_a) + (\mathbf{W}_d - \mathbf{W}_c) + (\mathbf{W}_b - \mathbf{W}_d) \quad (6.33)$$

$$i = iv - iii + ii \quad (6.34)$$

Con estas diferencias calculadas se promedian y obtenemos una sola.

$$i = \frac{i + (v + ii) + (iv + vi) + (v + iii + vi) + (iv + (-iii) + ii)}{5} \quad (6.35)$$

$$i = \frac{i + 2(ii + iv + v + vi)}{5} \quad (6.36)$$

Veamos la figura 6.7 donde se ilustran los tres casos y nos ayudaron a tener las expresiones desarrolladas para los puntos a, b y, podremos obtener expresiones similares para los puntos a, c y a, d , para calcular las diferencias :

- $\mathbf{W}_c - \mathbf{W}_a$ con las diferentes formas de recorrido comenzando en a y llegando a c .
Con estas diferencias calculadas se promedian y obtenemos una sola.

$$v = \frac{v + (i - ii) + (iv + iii) + (i - vi + iii) + (iv + vi - ii)}{5} \quad (6.37)$$

$$v = \frac{v + 2(i - ii + iii + iv)}{5} \quad (6.38)$$

- $\mathbf{W}_d - \mathbf{W}_a$ con las diferentes formas de recorrido comenzando en a y llegando a d .
Con estas diferencias calculadas se promedian y obtenemos una sola.

$$iv = \frac{iv + (i - vi) + (v - iii) + (i - ii - iii) + (v + ii - vi)}{5} \quad (6.39)$$

$$iv = \frac{iv + 2(i + (-iii) + v + (-vi))}{5} \quad (6.40)$$

Hasta aquí, se ha mostrado la celda básica cuando el punto de referencia a sólo tiene tres vecinos cercanos. Esta celda básica nos servirá ya que la podremos acomodar cuando tengamos ocho vecinos, como se muestra en la figura 6.8 donde se divide el espacio de vecinos de a en cuadrantes I, II, III, IV , en cada uno de ellos ponemos la celda básica. Además se introduce un cambio en la nomenclatura, el punto de referencia A que ahora lo identificamos con el número 1, sus vecinos cercanos B_k con los números 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y en ese orden serán visitados para recalculamos sus diferencias de $\mathbf{W}_k - \mathbf{W}_1$ y los valores de \mathbf{W}_k , para $k = 2, \dots, 9$.

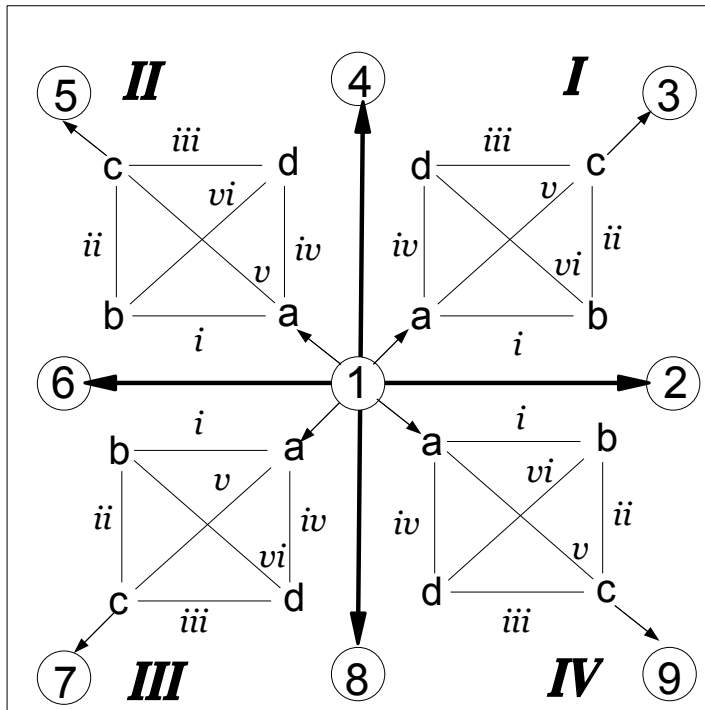


Figura 6.8: Ocho vecinos y la celda básica en los cuatro cuadrantes

Hay un pequeño detalle, cuando recalculamos las diferencias del punto 1, que es el de referencia con sus ocho vecinos 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, aplicamos el cálculo de la celda básica a cada uno de los cuadrantes entonces :

- El cuadrante I recalcula las diferencias $\mathbf{W}_2 - \mathbf{W}_1$, $\mathbf{W}_3 - \mathbf{W}_1$ y $\mathbf{W}_4 - \mathbf{W}_1$.
- El cuadrante II recalcula las diferencias $\mathbf{W}_4 - \mathbf{W}_1$, $\mathbf{W}_5 - \mathbf{W}_1$ y $\mathbf{W}_6 - \mathbf{W}_1$,

notemos que la diferencia $\mathbf{W}_4 - \mathbf{W}_1$ ha sido recalculada dos veces, y las otras sólo una. continuando con el recorrido, cuando calculamos:

- El cuadrante III las diferencias $\mathbf{W}_6 - \mathbf{W}_1$, $\mathbf{W}_7 - \mathbf{W}_1$ y $\mathbf{W}_8 - \mathbf{W}_1$.

- El cuadrante *IV* las diferencias $\mathbf{W}_8 - \mathbf{W}_1$, $\mathbf{W}_9 - \mathbf{W}_1$ y $\mathbf{W}_2 - \mathbf{W}_1$.

ahora las diferencias $\mathbf{W}_6 - \mathbf{W}_1$, $\mathbf{W}_8 - \mathbf{W}_1$, $\mathbf{W}_2 - \mathbf{W}_1$ han sido recalculadas dos veces.

Estas diferencias que se han recalculado una vez más, contienen información de sus celdas adyacentes.

Con el recorrido de patrones de línea recta para recalcular las diferencias $\mathbf{W}_{b_k} - \mathbf{W}_a$, para $k = 1 \dots 8$ para cada uno de los puntos, a lo más hay ocho recalculos diferentes de diferencias. Con la idea de la celda básica se puede incrementar hasta cuatro el número de recálculo diferentes para cada uno de estos ocho. Y se incrementa en un uno más para las diferencias que están en la horizontal o vertical como lo indica el parrafo anterior.

Entonces podemos formar algunas combinaciones, por ejemplo recorrido con patrones de línea recta y celda básica o recorrido con patrones circulares y sólo calcular las diferencias, sin la idea de la celda básica.

En los capítulos siguientes describiremos los programas para el procesamiento de la imagen digitalizada, la asignación de los ordenes de interferencia, el *Evaluador de BiRonchigramas* con *INtegracion* numérica, utilizando la Regla del *Trapecio* y los resultados obtenidos de la evaluación de bironchigramas experimentales.

Capítulo 7

Centroides y órdenes de interferencia.

7.1 Introducción

El objetivo es el desarrollo de un paquete interactivo para manipular la imagen digitalizada y la asignación de los órdenes de interferencia, para hacerlo contamos con dos herramientas :

- Una es una cámara ccd para capturar las imágenes digitalizadas.
- Un paquete para el procesamiento digital de la imagen y así obtener los datos requeridos.

7.2 CCDs

Las imágenes digitalizadas de los Bironchigramas se obtienen con una cámara CCD EDC 1000, la cual tiene un arreglo de CCD's rectangular de 192 columnas por 165 filas, en una área cuadrada. Cada CCD es un rectángulo, que puede registrar de 0 a 255 valores distintos, asociados con tonos de gris que van del negro para el valor cero, al blanco para el valor 255. Aunque la forma cada CCD es rectangular el arreglo de la matriz de estos es cuadrada, lo que introduce un cambio de escala en la imagen.

El software que viene integrado con la cámara para su operación, almacena las imágenes en dos formatos, uno en formato TIFF y otro propiedad de la compañía de la cámara que llamaremos buf, Electrim Corporation (1993)[19], que es un arreglo de bytes rectangular de 196 filas por 165 columnas, cada byte almacena el tono de gris registrado al tomar la fotografía, las cuatro primeras columnas no forman parte de la imagen.

En caso de tener otra cámara ccd tendríamos que conocer las características arriba descritas, como son el tamaño del ccd individual, el número de filas y columnas del ar-

reglo rectangular (o cuadrado), los distintos tonos de gris que puede grabar y el formato de archivo en el cual se graba la imagen.

Estamos suponiendo que la imagen digital solo registra tonos de gris, si algún CCD registra colores, con algunos de los modelos RGB, CMYK, etc. Se deberá tener un mapeo de colores a tonos de grises.

La cámara CCD (Camila) con que se tomaron las fotos de los telescopios del OAN de la UNAM en San Pedro Mártir, cada CCD es cuadrado, uno los formatos como almacena la imagen, el cual lo identificaremos como P75, que es un arreglo de números enteros rectangular de 384 columnas por 576 filas que almacena los tonos de gris, para el procesamiento digital de las imágenes en el OAN-UNAM el paquete que se utilizó es VICAR.

7.3 VICAR

VICAR son las siglas de **V**ideo **I**mage **C**ommunication **A**nd **R**etrieval, es un sistema (software) para el procesamiento de imágenes de propósito general, ha sido desarrollado desde 1966 para el procesamiento digital de datos de imágenes multidimensionales. **VICAR** fue desarrollado principalmente para el procesamiento de imágenes del laboratorio *Jet Propulsion*. Ahora es usado para una variedad de aplicaciones incluyendo, procesamiento de imágenes, biomédicas, cartográficas, recursos naturales, astronomía y exploración geológica, California Institute of Technology(2018)[4]

VICAR tiene su formato propio del archivo que contiene la información de la estructura y tipos de datos, así como la historia del procesamiento que se ha hecho a la imagen.

La versión del Sistema Vicar que se utilizó fue escrita por Jean Lorre and Joel Mosher ellos estan en el Jet Propulsion Lab. La primer liberación de "Open Source" fue en 1971 y la más reciente fue en 2015.

Utilizamos un subconjunto de rutinas del paquete VICAR para el procesamiento de la imagen digitalizada. Los programas que se utilizan son GEN2, VLABEL, CENTROID, los dos primeros reciben la imagen digitalizada en un archivo con los parámetros que la caracterizan, y generan el archivo con el formato adecuado para que pueda ser analizada por el programa centroid que es el que encuentra las coordenadas de los centroides, de las manchas que son los datos que nos interesa obtener, para esto es necesario estar variando el nivel del umbral, esto es debido a que las manchas tienen diferentes rangos de tonos de gris.

La función en fortran se llama starcat es el acrónimo de STAR CATalogue, catalogo de estrellas, que originalmente fue escrita para eso. Ya que los astrónomos toman la fotografía del cielo y los apoya en el proceso de encontrar las coordenadas de las estrellas

7.4 Asignación manual de los órdenes de interferencia

Para hacer la asignación de los órdenes de interferencia, el programa m1a lee un archivo "nombre del archivo".bir que contiene en la primer línea el número de líneas que consta el archivo, las subsiguientes contienen los valores de, $mx my x y$, el orden de interferencia en la dirección x y y y las coordenadas (x, y) del centroide. Después de haber leído los datos, se muestra en la pantalla las franjas de donas coloreadas, ver figura 7.2 lado izquierdo, paralelas al eje X .

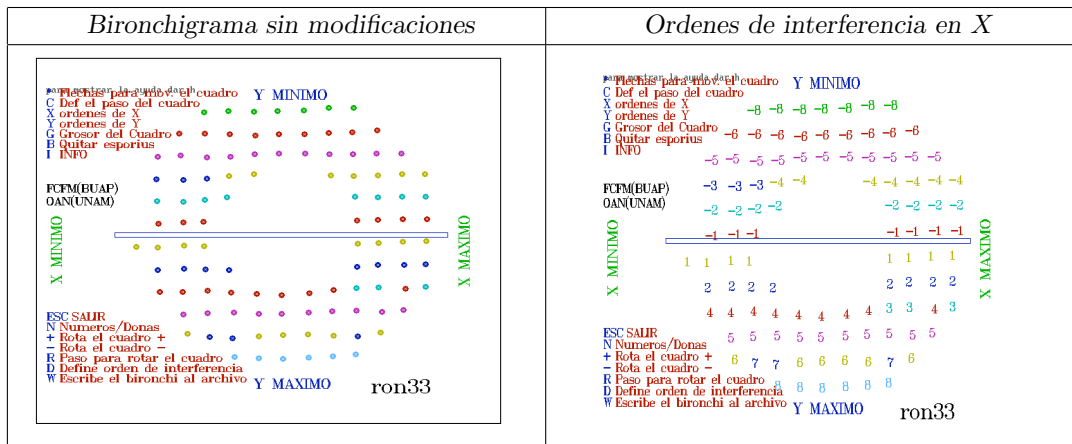


Figura 7.2: Edición del Bironchigrama

Las que comparten el mismo color pertenecen al mismo orden de interferencia, para saber cuál el número de orden interferencia presionamos la tecla N y en lugar de las donas aparecen números coloreados, ver figura 7.2, lado derecho. Además aparece un rectángulo, de ancho una unidad, que se puede modificar si presionamos la letra G y luego un número que será el múltiplo de la unidad, todos los números o donas que caigan dentro del rectángulo serán susceptibles de cambiar el orden de interferencia, cuando presionamos la tecla D y luego un número.

Para desplazar el rectángulo lo hacemos con las flechas abajo, arriba derecha, izquierda y lo podemos rotar con las teclas de $+$ en el sentido de las manecillas del reloj y con $-$ en sentido contrario, así como también podemos definir el paso de rotación con la tecla R .

Si quisieras marcar una dona para borrar presionamos la tecla B en este modo aparece un círculo rodeando una dona, cuando se presiona la tecla Del o Supr se marca como borrada, si posteriormente se quiere recuperar se presiona la tecla insert , para desplazarse por las donas se hace con las flechas y para salir de este modo con la tecla ESC , que también se utiliza para salir del programa, si queremos guardar las modificaciones presionamos la tecla W .

Por si olvidamos los comandos, presionamos la tecla H que muestra la lista de comandos y una breve descripción, algo parecido a la figura 7.3. Con este programa ya tenemos la asignación manual de los órdenes de interferencia, que es la que está integrada a Ebrint, pero se desarrolló una opción más, es la asignación automática de los ordenes de interferencia, que no siempre funciona correctamente entonces tendremos que terminar de procesarlos en la asignación manual.

<i>Comando</i>	<i>Acción</i>
<i>Flechas izq., der., abajo, arriba</i>	<i>Mover el cuadro</i>
<i>C</i>	<i>Define el paso del movimiento del cuadro</i>
<i>X</i>	Asigna ordenes de interferencia en X
<i>Y</i>	Asigna ordenes de interferencia en Y
<i>G</i>	Define el grosor del cuadro
<i>B</i>	Borra centroides
<i>h</i>	Ocultar o Mostrar los comandos
<i>I</i>	Acerca de
<i>D</i>	Define el Orden de interferencia
<i>N</i>	Mostrar Donas o Números de colores
<i>+</i>	Rotar el cuadro en sentido positivo
<i>-</i>	Rotar el cuadro en sentido negativo
<i>R</i>	Define el paso para rotar el cuadro
<i>W</i>	Escribe el bironchigrama al archivo
<i>ESC</i>	Salida del programa

Figura 7.3: Lista de comandos

7.5 Asignación automática de los órdenes de interferencia

Vamos a considerar el archivo "nombre del archivo".bir, para mostrar las diferentes etapas en la asignación automática de los órdenes de interferencia.

- Primero considerar una relación de vecindad entre las coordenadas de los centroides como se muestra de en la figura 7.4 lado izquierdo, las cuales se ocuparan para la segunda etapa, las líneas horizontales (o casi) se ocuparan para los órdenes de interferencia paralelos al eje X , y las líneas verticales para los ordenes de interferencia paralelos al eje Y .

Después de terminar esta etapa, queda como se muestra en la figura 7.4 lado derecho, las relaciones de las lineas en diagonal desaparecen, por que tienen preferencia

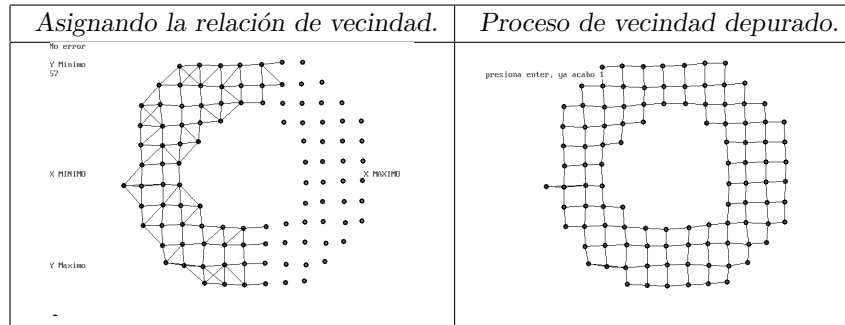


Figura 7.4: Proceso de vecindad entre los centroides del Bironchigrama

las horizontales y verticales.

- En la segunda etapa con las relaciones ya establecidas, se comienza la asignación de los órdenes de interferencia, como se muestra en la figura 7.5, las donas del mismo color tienen el mismo orden de interferencia y las aparacen en negro aún no se les asigna.

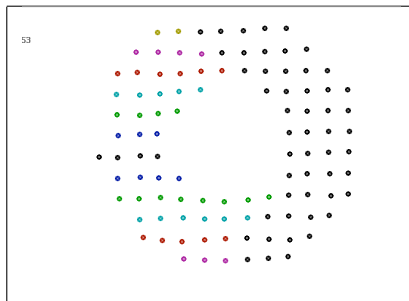


Figura 7.5: Proceso de asignación de los ordenes de interferencia.

Finalmente en la figura 7.6 ya se asignaron los órdenes de interferencia para Y que se muestran presionando la tecla y , en la figura 7.6 para X que se muestran presionando la tecla x , con la tecla n podemos cambiar para que muestre donas o números y con la tecla w guardamos en un archivo el trabajo.

En el capítulo siguiente mostraremos como se integra este paquete en el programa de evaluación de bironchigramas.

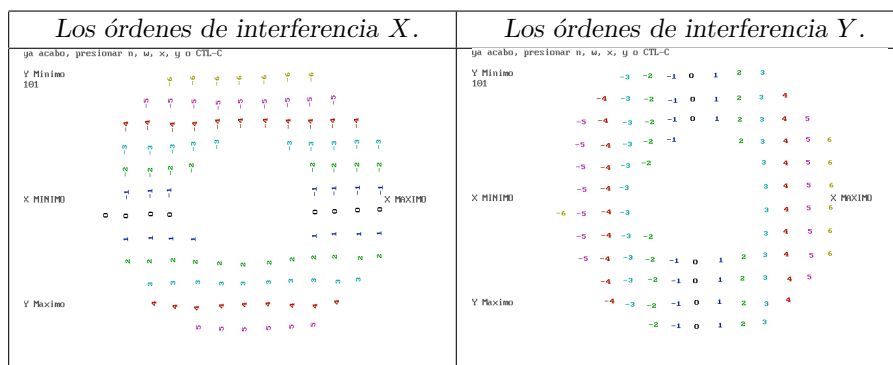


Figura 7.6: Órdenes de interferencia asignados.

Capítulo 8

Programa *EBRINT*

8.1 Introducción

Ahora describimos la integración de varios programas para computadora que surgen de trabajos de investigación en el taller Óptica de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la BUAP y en el Observatorio Astronómico Nacional de la UNAM en Ensenada :

- El programa *aju.bas* que recibe los centroides del bironchigrama, luego encuentra un conjunto de puntos correspondientes al borde del bironchigrama con los que calcula (Cordero-Davila, A., et.al.(1993)[9]) las coordenadas del centro y radio del círculo que mejor ajusta al patrón del borde.
- El programa *o91.c* asigna los ordenes de interferencia de manera automática, *m1a.c* para editar los órdenes de interferencia del bironchigrama.
- El programa *ebripu.bas*, Cordero-Dávila,A., E.Luna-Aguilar, et.al.(1998) [12] que implementa el algoritmo descrito en el capítulo 5.
- El programa *etae.c* que implementa el algoritmo descrito en el capítulo cuatro(1976)[15].
- El programas *mas3*, ver figura 8.1, interfaz con el usuario y administrador de los otros módulos.

El programa *srtl.c* que utiliza PLOT-90c J.P. Hernández Henríquez (1993) [22], Canto Gómez, A. B.; McIntosh , Harlod V.(1994) [5], Canto Gómez, A. B.(1993) [6] para graficar las curvas de nivel y superficie de W de los resultados obtenidos en el capítulo cuatro . El programa *tcp2.c* que genera la superficie construida con torres de los resultados del capítulo 5.

Los programas de VICAR[4] que procesan la imagen del bironchigrama para obtener los centroides de las manchas, *sr4.for*.

Todos estos programas forman a *EBRINT*, un evaluador de frente de onda con integración numérica con la regla del trapecio y un ajuste de mínimos cuadrados teniendo como base a los monomiales.

```

E B R I N T FCFM-BUAP OAN-UNAM
t:Telescopio Nuevo
c:CCD Nuevo
a:Archivo imagen a procesar
l:Lamda Nuevo
m:Metodo Integracion Ebrint o Procorn
n:NLP,No.lineas/pulgada de la rejilla
g:Grado del polinomio
e:Ejecuta Integracion
u:Uicar, proc. imagen
x:# franjas en X
y:# franjas en Y

I:Info
b:EBRINT
ESC:SALIDA

Espero orden :

P R U E B A
Sn.Pedro Martir 2.1m f/7.5
C C D:STAR
Archivo: roma01
Lamda: .00005
Integracion:Ebrint
NLP : 45.5
Grd.Pol.Ajus 4

No.franjas X: 17
No.franjas Y: 17

```

Figura 8.1: Menú principal de EBRINT.

8.2 Los bloques de Ebrint

Ahora describimos los bloques principales en los que se divide EBRINT, ver figura 8.2.

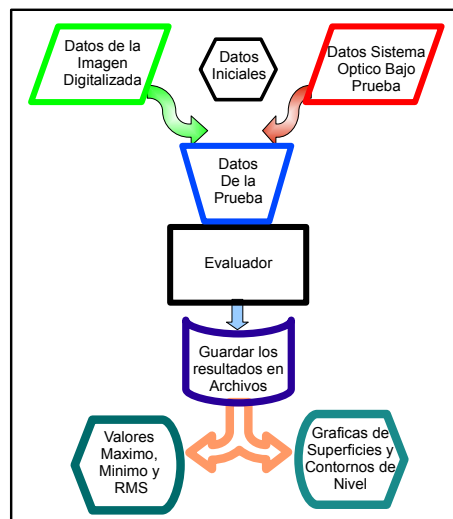


Figura 8.2: Bloques principales de EBRINT.

8.2.1 Datos del Sistema Óptico Bajo Prueba

- Datos del Sistema Óptico Bajo Prueba.

Tenemos que hacer la distinción del significado de los datos, ya que utilizaremos

la misma estructura para contener los datos del telescopio y la de una lente o un espejo, ver figura 8.3. Los datos estan contenidos en un archivo de texto llamado *teles.dat*, cada línea en el archivo representa :

- Nombre de la prueba
- Separación entre espejos,
- Separación entre vértice y plano imagen.
- Radio de curvatura del Secundario.
- Diámetro del Primario.
- Diámetro del hoyo central.
- Semidiámetro de la pupila de salida.
- Posición de la pupila de salida.

Este conjunto de líneas se vuelve a repetir, tantas veces como 10 opciones de telescopios o pruebas. Cuando en el nombre del telescopio incluya la palabra "prueba" sólo se considerarán los datos de semidiámetro de la pupila de salida que se tomara de "Separación entre vértice y plano imagen" y posición de la pupila de salida de "Separación entre espejos" que son los datos para un espejo o lente. En el menú de EBRINT corresponde a la opción "t", ver figura 8.3, que nos permite elegir entre 10 opciones diferentes las que podemos modificar editando el archivo *teles.dat* y volver a entrar a EBRINT.

```

E B R I N T FCFM-BUAP OAN-UNAM          P R U E B A
t:Telescopio Nuevo                      Sn.Pedro Martir 2.1m f/7.5
c:CCD Nuevo                              C C D   S T A R
a:Archivo imagen a procesar              Archivo:   roma22
l:Landa Nuevo                            Landa:    .00005
m:Metodo Integracion Ebrint o Procorn    Integracion:
n:NLP,No.lineas/pulgada de la rejilla    NLP :     45.5
g:Grado del polinomio                   Grd.Pol.Ajus 7
e:Ejecuta Integracion
u:Uicar, proc. imagen
x:# franjas en X

1          Sn.Pedro Martir 2.1m f/7.5
2          Sn.Pedro Martir 2.1m f/13.5
3          Sn.Pedro Martir 2.1m f/30
4          Sn.Pedro Martir 1.5m
5          Sn.Pedro Martir 1.0m
6          Sn.Pedro Martir .84m
7          Cananea 2.1m
8          Prueba clase opto
9          Prueba lente2
10         Prueba int16
PRESIONA CUALQUIER TECLA PARA CONTINUAR

No.franjas X:  17
No.franjas Y:  17

T E L E S C O P I O
Sn.Pedro Martir 2.1m f/7.5
S D P S   38.08673789605039
P P S    574.1533905088199

```

Figura 8.3: Datos del Sistema Óptico bajo prueba.

8.2.2 Datos de la Imagen Digitalizada.

- Datos de la Imagen Digitalizada.

Se considera que la imagen digitalizada está almacenada en un matriz, donde el tipo de datos de cada entrada es BYTE o HALF(dos bytes) sin signo, los cuales se interpretan como tonos de gris y opcionalmente cada fila puede contener unos bytes de cabecera que no forman parte de la imagen. En consecuencia cualquier imagen digitalizada se tendrá que llevar a este formato. Los parámetros de la matriz están contenidos en un archivo llamado *ccds.dat* donde cada línea representa :

- El nombre del CCD.
- El número de filas de la matriz.
- El número de Columnas matriz.
- El número de bytes de la cabecera en cada fila.
- El tipo de datos de la matriz, BYTE, HALF
- Tipo de archivo o formato de la imagen, TIFF, P75, FIT, BUF. Identifica la extension que debe tener archivo que contiene la imagen digitalizada, por ejemplo roma.p75

Podemos tener hasta tres diferentes parametrizaciones de la matriz, esta opción es la "c" del menú de EBRINT ver figura 8.4, Este formato es el requerido para procesarlo con VICAR.

```

E B R I N T FCFM-BUAP OAN-UNAM
t:Telescopio Nuevo
c:CCD Nuevo
a:Archivo imagen a procesar
l:Landa Nuevo
m:Metodo Integracion Ebrint o Procorn
n:NLP,No.lineas/pulgada de la rejilla
g:Grado del polinomio
e:Ejecuta Integracion
v:Uicar, proc. imagen
x:# franjas en X

P R U E B A
Sn.Pedro Martir 2.1m f/7.5
C C D STAR
Archivo: roma22
Landa: .00005
Integracion:
NLP : 45.5
Grd.Pol.Ajus 7

No.franjas X: 17
No.franjas Y: 17

C C D STAR
n_columnas 384
n_filas 576
n_skip s 0
tan. pixel HALF
fnto imag P75

PRESIONA CUALQUIER TECLA PARA CONTINUAR

```

Figura 8.4: Opción CCD.

8.2.3 Datos de la Prueba.

- Datos de la Prueba.

Ya sabemos los datos del sistema óptico y seleccionamos los parámetros de la matriz de la imagen digitalizada, hace falta conocer :

- El nombre del archivo que contiene la imagen. La extensión del archivo fue dada en los datos de la imagen digitalizada.
- Longitud de onda de la luz, λ , usada en la prueba.
- El método de integración numérica. La regla del Trapecio o Ajuste de Mínimos Cuadrados.
- Número de líneas por pulgada de la rejilla cuadrículada.
- El grado del polinomio del ajuste.

Estos datos los alimentaremos por medio de las opciones : "a", "l", "m", "n" y "g" del menú de programa EBRINT ver figura 8.1, respectivamente.

8.2.4 Evaluador.

- Evaluador.

Cuando llegamos al Evaluador, hay dos caminos uno es la opción "v" del menú de EBRINT en la que se hace:

- Procesamiento digital de la Imagen. Genera las coordenadas de los centroides,
- Edición del Bironchigrama, que incluye la asignación de los ordenes de interferencia de manera automática y si es necesario hacer las correcciones con la edición.
- Ejecuta la integración Numérica.

O bien la opción "e" en la que solo se ejecuta la Integración Numérica, suponiendo que ya existan los archivos del borde y del bironchigrama.

8.2.5 Guardar los resultados en archivos.

- Guardar los resultados en archivos.

El nombre del archivo que alimentamos en los "Datos de la Prueba", es utilizado como el nombre base de los archivos para guardar los resultados. Cuando se encuentran los centroides de las manchas del bironchigrama con VICAR se generan dos archivos:

- "Nombre del archivo".bir. Contiene las coordenadas de los centroides de las manchas del Bironchigrama.

- "Nombre del archivo".brd. Contiene las coordenadas de los centroides de las manchas del borde del Bironchigrama.

El archivo "Nombre del archivo".bir es modificado por el proceso de Edición del Bironchigrama, para tener en cada línea las coordenadas de los centroides y los ordenes de interferencia.

Cuando se hace la evaluación con el método de Integración Numérica con la regla del Trapecio se generan dos archivos:

- "Nombre del archivo".dco. Cada línea contiene tres números, las coordenadas (x, y) de los datos experimentales y su aproximación a W .
- "Nombre del archivo".ebr. Contiene el máximo, mínimo y RMS. El método de integración Numérica y el "Nombre del archivo".

Estos dos archivos seran requeridos por el programa que traza las gráficas.

Cuando se hace la evaluación con el método de Integración Numérica con Ajuste de Mínimos Cuadrados, se generan dos archivos:

- "Nombre del archivo" concatenado con el grado del ajuste ".rep", suponiendo que el nombre del archivo es roma01, el archivo se llamaria "roma0107.rep". Contiene los datos del Sistema Óptico, los Datos de la Prueba, los coeficientes del polinomio de Zernike del ajuste y el máximo, mínimo y RMS.
- "Nombre del archivo"+"el grado del ajuste".coe. Contiene los coeficientes de Zernike del ajuste, el máximo, mínimo y RMS. El método de integración Numérica y el "Nombre del archivo" será requerido por el programa que traza las gráficas.

8.2.6 Gráficas de Superficies y *Contornos de Nivel

- Gráficas de Superficies y *Contornos de Nivel

Es importante la gráfica de la superficie de W , ya que se identifica en que parte de la superficie están los errores y con los valores máximo, mínimo y RMS que tan graves son.

Las gráficas de la superficie de la aproximación de W se hicieron con la función *pltiv*, para graficar los contornos *pltkp* y para los contornos ortográficos *pltor*. Además de las librerías para soportarlas del paquete PLOT-90c desarrollado en el Departamento de Aplicación de Microcomputadoras de la UAP, J.P. Hernández Henríquez (1993)[22], Canto Gómez, A. B.; McIntosh, Harlod V.(1994) [5].

Para las dos opciones de integración Numérica hay dos gráficas diferentes :

- En la regla del trapecio, se gráfica la superficie con torres unicamente en los datos experimentales, ver figura 8.5 lado izquierdo.
- En el ajuste, se grafican las curvas de nivel y curvas ortográficas de la caracterización obtenida por los polinomios de Zernike. Los curvas de nivel más oscuras corresponden(que no están en el borde) a los valores entre $[-0.1,0.1]$, "cerca" del cero, ver figura 8.5 lado derecho.

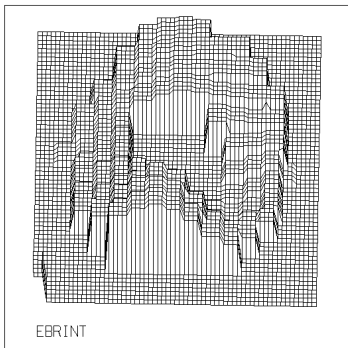
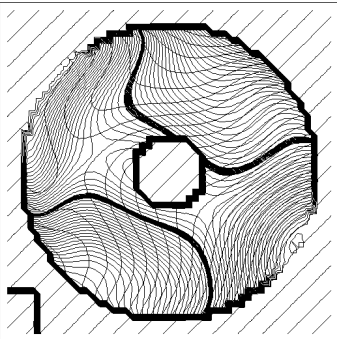
Métodos de Integración Numérica	
La Regla del Trapecio Superficie evaluada en los datos.	Ajuste de Mínimos Cuadrados Curvas nivel* con polinomio de grado 7.
<p>OPD aprox. c:/Integracion Numerica,Sn.Pedro Martin 2.lm f/7.5</p>  <p>EBRINT</p> <p>OPD(MIN -7.6821, MAX 9.5324) RMS 4.1281 lambda = 500.0 nm., NLP 45.4 Archivo:roma01 FCM-BUAP, OAN-Ensenada-UNAM, PLOT-90c Depto.Aplicacion Micros ICUAP</p>	<p>PLOT90c ICUAP-Depto.Aplic.Micros.</p>  <p>EBRINT</p> <p>OPD(MIN -8.3814, MAX 8.1155) GRD 7 RMS 2.8704 sn.pedro martin 2.lm f/7.5 PROCORN lambda = 500.0 nm., Imagen roma01</p>
<p>Mínimo = -7.6821 Máximo = 9.5324 RMS = 4.1281</p>	<p>Mínimo = -8.3814 Máximo = 8.1115 RMS =2.8704</p>

Figura 8.5: Gráficas de la integración numérica por los dos métodos.

8.2.7 Valores Máximo, Mínimo y RMS

- Valores Máximo, Mínimo y RMS

Los valores Máximo, Mínimo y RMS que se obtienen de los dos métodos de Integración Numérica para el mismo bironchigrama, se calculan de manera distinta, mientras que:

- Para La Regla del Trapecio son sobre los np puntos (x, y) y la aproximación a $W(x, y)$ de los datos del bironchigrama, ver figura 8.6 para Roma01.dco

x	y	Aprox $W(x, y)$
-0.7737	-0.0214	-6.6131
...
0.7051	0.3313	1.1972

Figura 8.6: Valores del archivo Roma01.dco.

- Para el Ajuste, se calcula sobre un partición de puntos (x, y) en un círculo en el origen con radio uno. La aproximación a W es con los coeficientes de Zernike ajustados, ver figura 8.7 para roma017.coe mostramos algunos coeficientes. Para obtener los valores de W se omiten tres terminos de los polinomios de Zernike que se identifican como desplazamiento(tilt) en x , desplazamiento(tilt) en Y y el defoco(Focus).

(r, θ)	Nombre	Valor
1	cte	0
$r \cos(\theta)$	XTilt	-62.8336134734491
$r \sin(\theta)$	YTilt	-17.3063538652766
$r^2 \cos(2\theta)$	90-degree Astigmatism	6.95115119961442
$2r^2 - 1$	Focus	-107.777683092386
$r^2 \sin(2\theta)$	45-degree Astigmatism	-4.29093154113739
$r^3 \cos(3\theta)$	XTrefoil	0.123610839189996
$(3r^3 - 2r) \cos(\theta)$	XComa	-0.543680635379674
$(3r^3 - 2r) \sin(\theta)$	YComa	-0.100654932433784
$r^3 \sin(3\theta)$	YTrefoil	0.170032842897011
...

Figura 8.7: Algunos coeficientes de Zernike para el ajuste de grado 7 de Roma017.coe.

8.3 Los bloques del Evaluador.

Ahora mostraremos a detalle los bloques que esta compuesto Evaluador, ver figura 8.8.

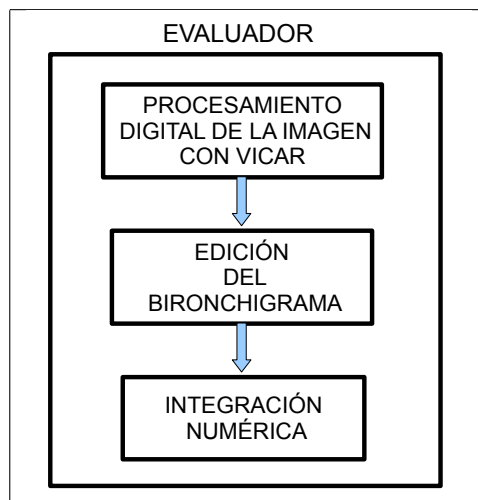


Figura 8.8: Los bloques de Evaluador.

8.3.1 Procesamiento digital de la imagen

Recibimos el archivo que contiene la foto del bironchigrama. Las características del archivo, número de filas y columnas y el tipo de dato, ver figura 8.9. Con los programas GEN2 Y VLABEL, que preparan la imagen para procesarla, llamado proceso de normalización y poder aplicar el programa STARCAT, obtiene las coordenadas de los centroides de las manchas que se guarda en un archivo y en otro solo el borde, ver figura 8.9. Se debe usar GEN2 y VLABEL para crear imágenes con las etiquetas (labels) de VICAR, de la manera siguiente :

- *gen2* * datos *nb=512*.
- *gen2* "nombre del archivo"."extension del archivo que contiene a la imagen" *nb="* número de columnas de la matriz", por ejemplo:
gen2 roma01.p75 nb=384.
- *vlabel* "nombre del archivo"."extension del archivo que contiene a la imagen" " nombre del archivo" *nb="* número de columnas de la matriz" *nl="* número de líneas de la matriz" "half" o "byte" según el tipo de datos de la matriz, continuando son el ejemplo:
vlabel roma01.p75 roma01 nb=384 nl=576 half .

Luego con el programa centroid podemos extraer las coordenadas de los centroides :

Solo falta extraer los centroides del bironchigrama y de eso se encarga una función del módulo principal(mas3), ver figura 8.9, solo tiene que ejecutar startcat con algún valor de umbral mostrar los resultados y el usuario decide si continuar o no con otro valor de umbral.

8.3.2 Edición del bironchigrama

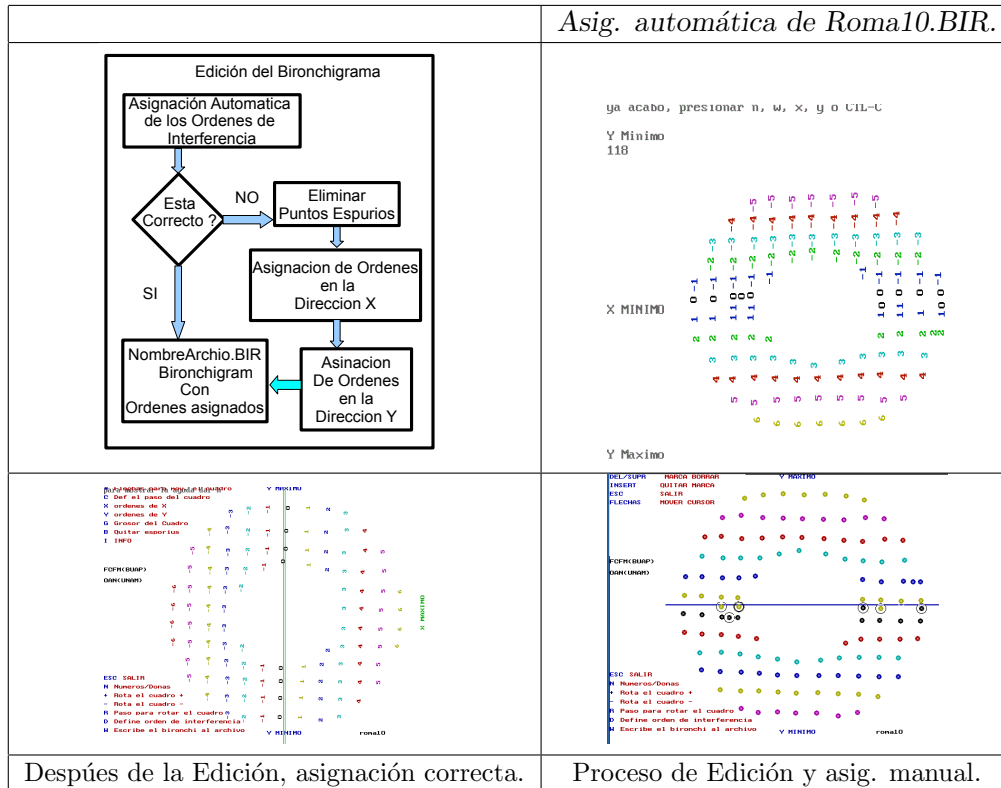


Figura 8.10: Edición y asignación de los ordenes de interferencia de roma01.bir.

Recibimos el archivo que contiene las coordenadas del bironchigrama :

- Asignación automática de los órdenes de interferencia en la dirección X y Y , ver figura 8.10.
- Revisión de la asignación, si están incorrectos:
 - Eliminar los puntos espurios , ver figura 8.10. Puede haber centroides que representen a la misma mancha y otros que no representen a alguna.
 - Asignación manual los ordenes de interferencia en las direcciones, X y Y con ayuda del editor.

- Estan correctamente asignados los ordenes de interferencia.

El módulo que hace el trabajo son dos programas:

- *o91* "nombre del archivo", tiene extension .bir, hace la asignación automática de los ordenes de interferencia, por ejemplo *o91 roma01*.
- *m1a* "nombre del archivo", tiene extension .bir, hace la edición por ejemplo *m1a roma01*.

Ambos dejan su resultado en "nombre del archivo".bir, la validación de que estan correctamente asignados la hace el usuario.

8.3.3 Integración Numérica

En este bloque de integración numérica se hace con la regla de trapecio o con el ajuste, con los datos del bironchigrama y su borde, ver figura 8.11.

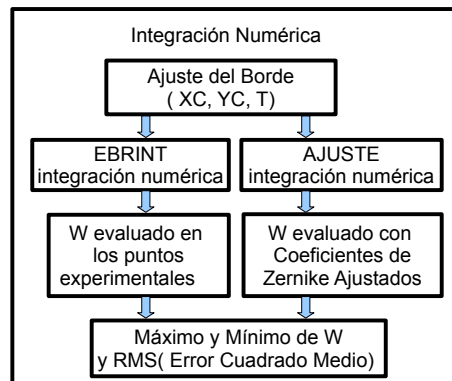


Figura 8.11: *Proceso de Integración numérica.*

Los pasos descritos abajo, los ejecuta el programa, con los argumentos en la línea de comando :

ebripu "nombre del archivo" "número de telescopio" "No.Líneas x Pulgada" "lambda"
 , un ejemplo del comando es: *ebripu roma01 1 45.5 0.00005*.

- Ajuste del borde $(xc, yc,)$ y t . Con los centroides del borde del bironchigrama, se encuentra las coordenadas del centro (xc, yc) y el radio t del círculo que mejor ajusta al patrón del borde.
- Ebrint integración numérica. Normalizar los datos del bironchigrama a un círculo unitario. Algoritmo de integración numérica, descrito en el capítulo cinco.

- Con los valores calculados de W en los puntos experimentales se obtiene el máximo, mínimo y el rms.

A partir de los archivos generados por ebrint el programa *tcp2* "nombre del archivo", traza la gráfica de la superficie con torres. Hay dos versiones de este programa, la diferencia entre ellos es la partición de la matriz cuadrada, una es mas fina, es de 60 filas y en el otro programa es de 40 filas, la gráfica de la superficie que traza la primera, son torres rectangulares que se elevan sobre una vecindad (de radio uno, fila o columna) alrededor de cada coordenada del (x_i, y_i) del bironchigrama, la altura la da la aproximación a W , siempre se van a elevar porque para los valores (x_i, y_i) que no se calculó W se asigna el valor mínimo encontrado de W . Para la partición de 40 filas es probable que las torres queden juntas y no hay huecos entre ellas, ejemplos se mostrarán en el capítulo nueve. Para la integración numérica con Ajuste:

etae "nombre del archivo" "numero de telescopio" "grado del polinomio" "No.Líneas x Pulgada" "lambda" "p", un ejemplo del comando es : *etae roma01 1 7 45.5 0.00005 p*

- Ajuste del borde (x_c, y_c) y t . Con los centroides del borde del bironchigrama, se encuentra las coordenadas del centro (x_c, y_c) y el radio t del círculo que mejor ajusta al patrón del borde.
- *etae* integración numérica. Normalizar los datos del bironchigrama a un círculo unitario. Algoritmo de integración numérica, descrito en el capítulo cuatro.
- Con los valores calculados de W teniendo como base los polinomios de Zernike ajustados se obtiene el máximo, mínimo y el rms.

A partir de los archivos generados por *etae* el programa *srtl* "nombre del archivo", traza la gráfica de la superficie o los contornos de nivel. Para obtener los valores de W se omiten tres términos de los polinomios de Zernike que se identifican como desplazamiento(tilt) en x , desplazamiento(tilt) en Y y el defoco.

En las gráficas de superficie hay una torre aislada en la esquina inferior izquierda esta es la marca del punto $(-1, -1)$, en su lado mas largo indica el eje y . La altura de la torre es cero, cuando se esta interactuando con los angulos de vista de la gráfica es el punto de referencia.

Hemos organizado un conjunto de programas independientes para obtener EBRINT un evaluador de bironchigramas con integración numérica utilizando la regla del trapecio y ajuste mínimos cuadrados. Para apoyar a los talleres de óptica en las pruebas de calidad de pulido de espejos o probar sistemas ópticos como telescopios.

Capítulo 9

Resultados

9.1 Introducción

El formalismo descrito en los 8 capítulos anteriores y su implementación computacional fué para evaluar el telescopio astronómico de 2.1m de diámetro del observatorio Astronómico Nacional de la UNAM ubicado en la Sierra de San Pedro Mártir, B.C.N., ver figura 9.1[32].



Figura 9.1: El OAN-UNAM en San Pedro Martir en Baja California México

El espejo primario estaba mal pulido por lo que decidieron sustentarlo en un conjunto de bolsas a diferentes presiones y aprovechar el peso del espejo para corregir su forma.

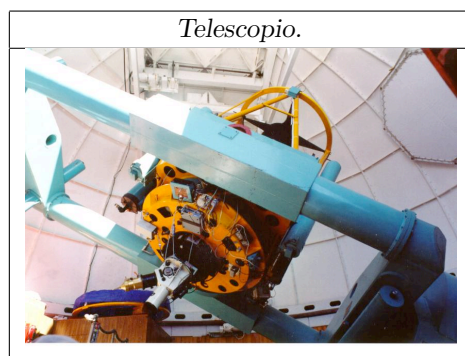


Figura 9.2: Telescopio de 2.1m del OAN-UNAM en San Pedro Martir.

9.2 Arreglo experimental y registro de patrones

En la figura 9.3 está el telescopio junto a un esquema de como fué colocada la rejilla cuadrículada. La camara fue enfocada sobre la pupila de salida del sistema localizado a 15.074890 cm. del punto F' y cuyo diametro es 38.086738 cm.(1995)[13].

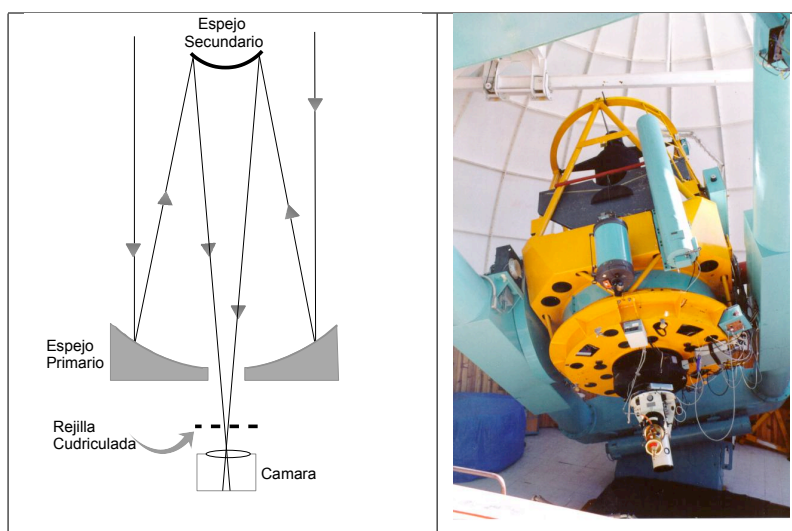


Figura 9.3: Esquema de la prueba de la rejilla cuadrículada en el telescopio de 2.1 m.

9.3 Resultados de la evaluación de los Bironchigramas.

Mostramos los resultados de 26 bironchigramas, los cuales corresponden a pruebas que se le hicieron al espejo de 2.1 metros con celdas de diferente presión en su base, se cambia

la presión en algunas de las celdas se toma la foto del bironchigrama y de acuerdo a la evaluación se recalibra la presión en las distintas celdas, este proceso continua hasta lograr la mejor evaluación.

En la figura 9.4 se resumen los valores mínimo, máximo, RMS que se obtuvieron para la integración numérica con la regla del trapecio(Ebrint) y el ajuste de mínimos cuadrados (Ajuste).

En la figura 9.5 esta la grafica de los valores tabulados de la figura 9.4, se observa como mejoran los valores de referencia conforme se avanza en las pruebas de los Bironchigramas, evaluadas con los dos métodos de integración.

Consideremos los grupos de bironchigramas Roma01, Roma02 y Roma03, por que son las primeras pruebas. Roma19, Roma21, Roma22, por que es donde los valores máximo, mínimo y RMS disminuyen, específicamente en Roma22. Luego Roma25 que tiene el RMS mínimo de los ajustes y Roma27 de la integración con la regla del trapecio. En las secciones siguientes se mostrarán las gráficas de la superficie de la aproximación a W para cada uno de estos grupos divididos por el método de integración.

9.3.1 Gráficas de la superficie de W por integración numérica con la regla del trapecio de los Bironchigramas evaluados.

La intención de ver, las gráficas de la superficie de la aproximación a W calculados por el método la integración numérica, utilizando el método del trapecio, es analizar, la superficie, observar en donde hay valles, montes (picos) y que tan drásticos son los cambios. Con los valores máximo y mínimo, el rango donde se dan estos cambios y con el RMS un indicador que que tan dispersos o juntos están los valores de W aproximados. En la gráfica de la superficie, los puntos que no forman parte del bironchigrama, se les asigna el valor mínimo calculado en la integración numérica, por eso se ven torres y no una superficie continua y se utilizo una malla regular "fina" en el dominio de 60 puntos por lado $[-1,1]$. El valor mínimo tambien se asocia para los puntos que están fuera del círculo unitario. Las gráficas de la evaluación de los bironchigramas, están organizados en tres figuras, en cada una de ellas hay tres campos gradientes correspondientes a los bironchigramas, que nos da una idea que tan bruscos son los cambios de un punto a otro y las superficie de la aproximación a W una con una partición de 40 puntos por lado y la otra con 60 puntos, ver la figura 9.6 para ROMA01, ROMA02, ROMA03. La figura 9.7 para ROMA19, ROMA21, ROMA22 y la figura 9.8 para ROMA25, ROMA26, ROMA27.

Bironchigrama	Mínimo		RMS		Máximo	
	Ebrint	Ajuste	Ebrint	Ajuste	Ajuste	Ebrint
ROMA01	-7.6821	-8.3814	4.1281	2.8704	8.1155	9.5324
ROMA02	-8.5472	-8.9599	4.6175	2.8817	6.1765	10.803
ROMA03	-8.424	-10.165	4.5022	3.4974	8.3643	9.9812
ROMA04	-7.3792	-9.1044	3.6463	2.5471	6.2369	8.0458
ROMA05	-7.4838	-8.4662	3.4771	2.4894	6.8274	7.2836
ROMA06	-7.399	-10.619	3.9306	3.0996	6.4075	10.079
ROMA07	-7.2855	-11.417	3.9012	3.5221	6.8148	9.7567
ROMA08	-7.4928	-7.1714	3.8188	2.4934	7.3329	6.69
ROMA09	-6.9703	-9.3615	3.845	2.922	6.368	7.6875
ROMA10	-6.2505	-9.8659	3.638	3.0848	6.0395	7.8156
ROMA11	-7.4657	-12.187	3.884	3.3803	8.7359	7.2974
ROMA12	-7.6904	-9.2609	4.1034	3.1171	8.8079	9.4389
ROMA13	-6.8411	-7.8438	3.8956	2.8376	7.4462	8.8946
ROMA14	-6.7426	-9.6751	4.0098	3.2227	7.4079	7.6002
ROMA15	-7.2637	-7.9331	3.7619	2.7318	7.1122	7.4154
ROMA16	-6.7465	-8.5706	3.9231	3.078	6.9867	7.6308
ROMA17	-7.058	-9.0809	4.2025	3.2288	8.61	8.5295
ROMA18	-7.1589	-9.6221	4.1747	3.1104	8.2585	7.5997
ROMA19	-6.4097	-9.9001	3.9813	3.2289	8.0924	8.0025
ROMA21	-6.2311	-8.1327	3.0051	2.8274	7.8219	6.2319
ROMA22	-1.7406	-5.4832	0.95146	2.5305	4.1356	2.467
ROMA23	-2.2085	-4.7935	1.2368	2.2199	2.9581	3.4954
ROMA24	-2.2696	-5.9109	1.5719	2.0313	3.1925	4.1327
ROMA25	-2.3081	-5.2639	1.4749	1.755	2.8476	3.4644
ROMA26	-2.1212	-8.8993	1.3511	3.7716	6.0008	3.6012
ROMA27	-1.775	-5.1329	0.943	2.0193	3.6021	2.0409

Figura 9.4: Resultados de la Evaluación con Integración Numérica.

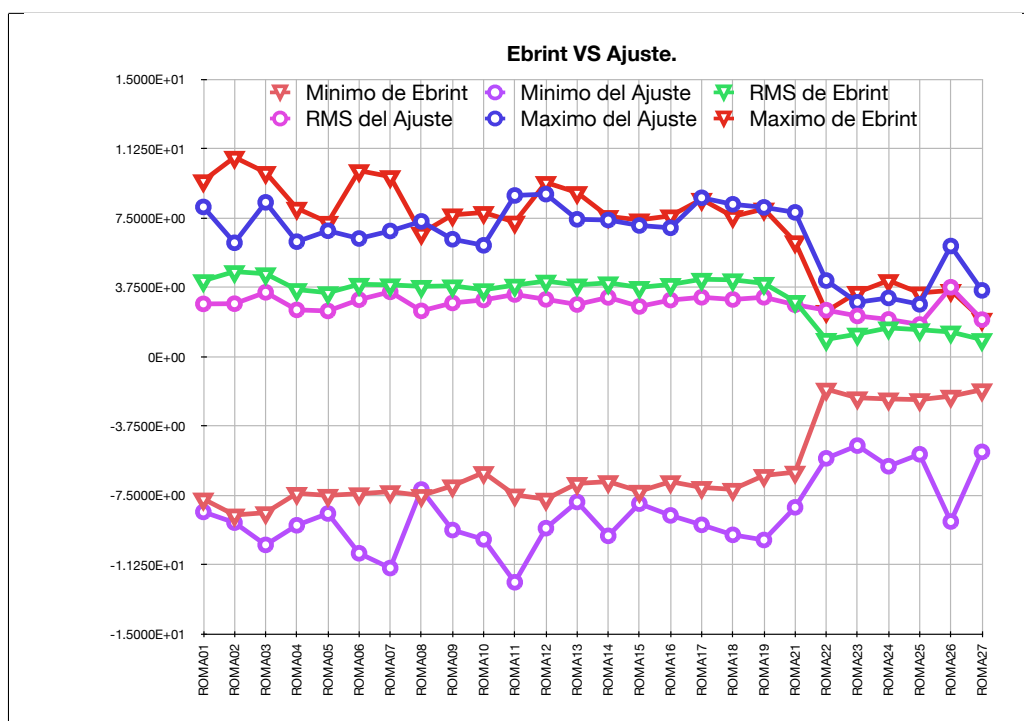


Figura 9.5: Gráfica del comportamiento los resultados de la evaluación.

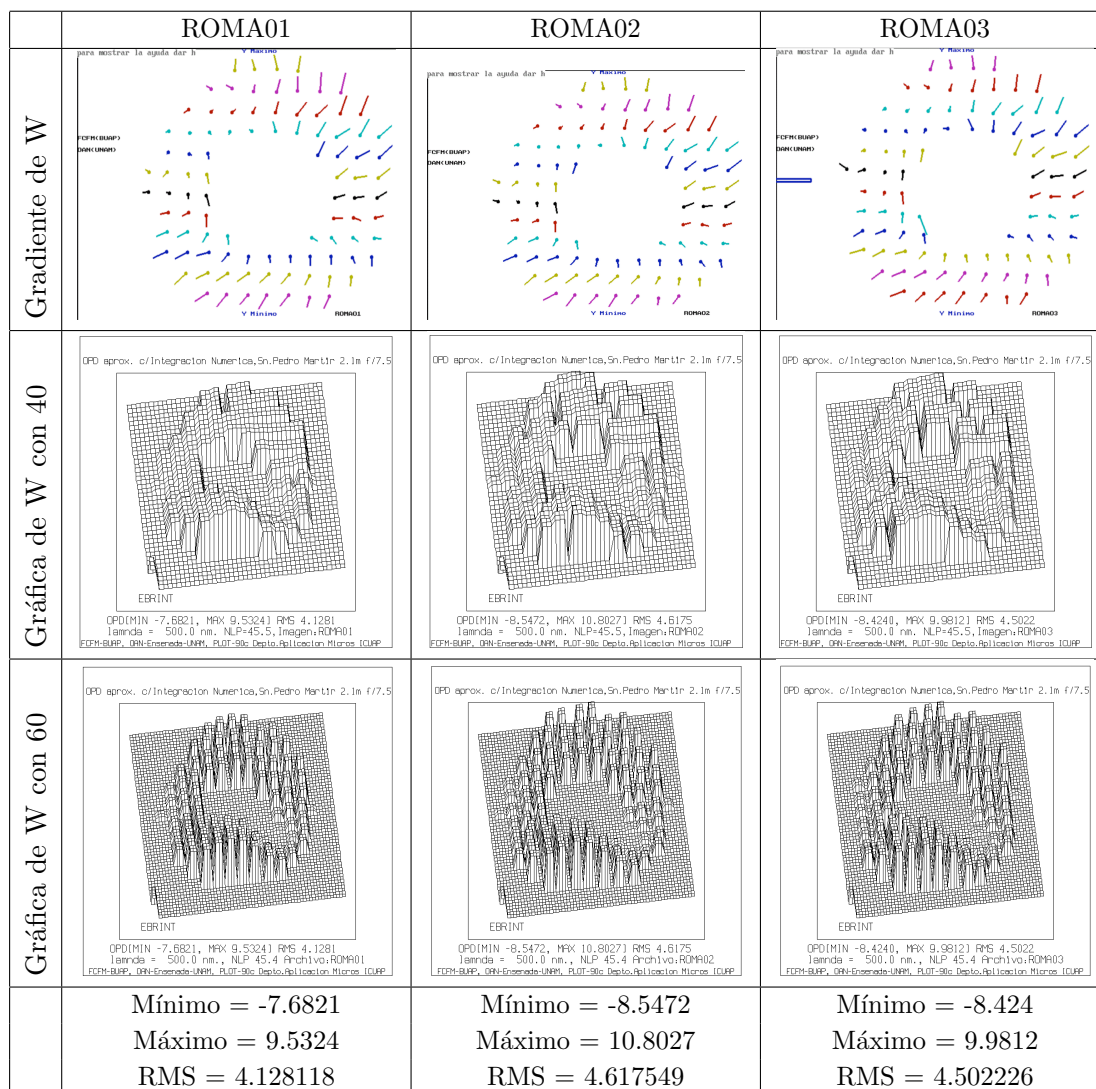


Figura 9.6: Roma01, Roma02, Roma03. El campo gradiente y Superficie de W.

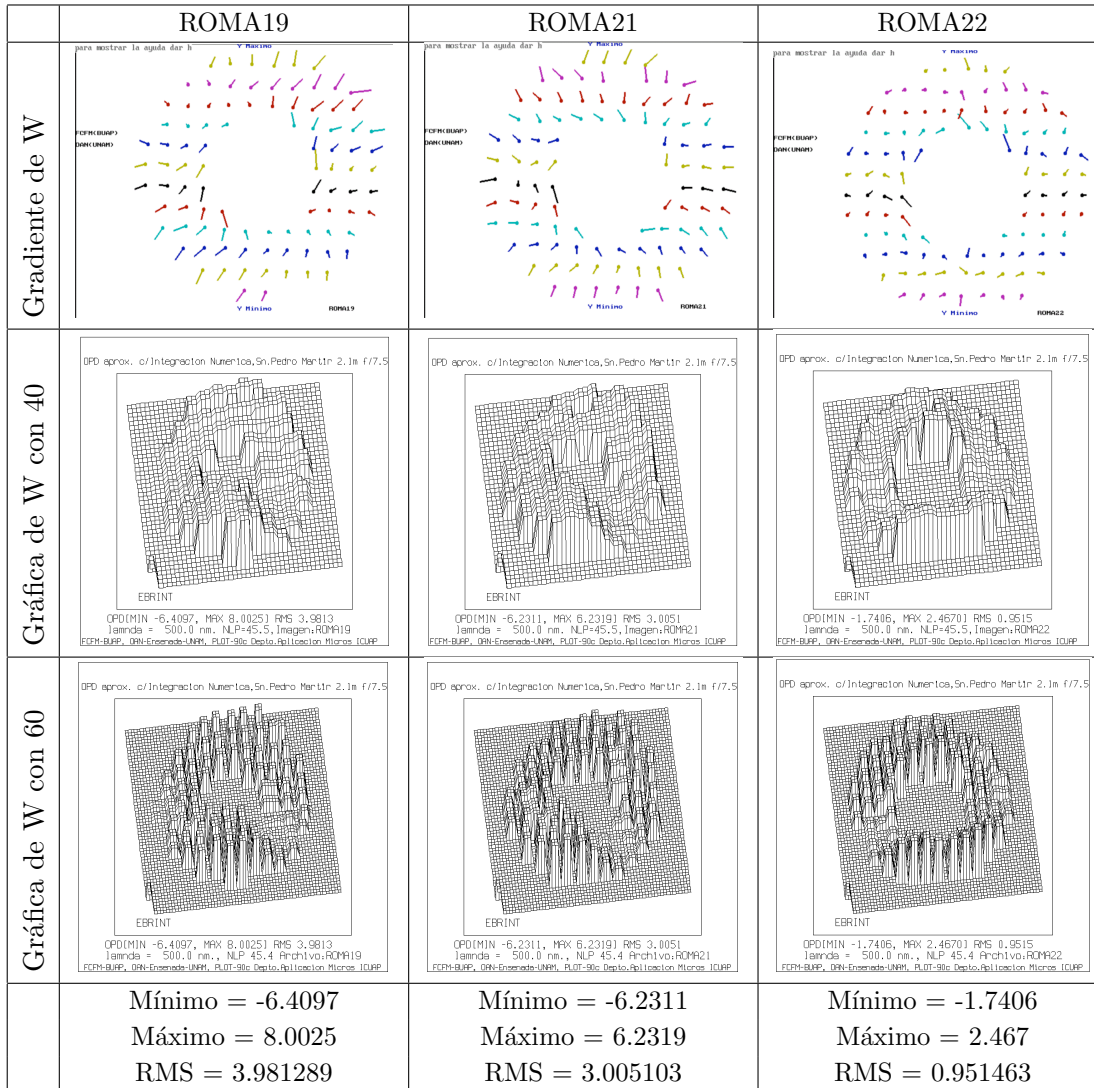


Figura 9.7: Roma19, Roma21, Roma22. El campo gradiente y Superficie de W.

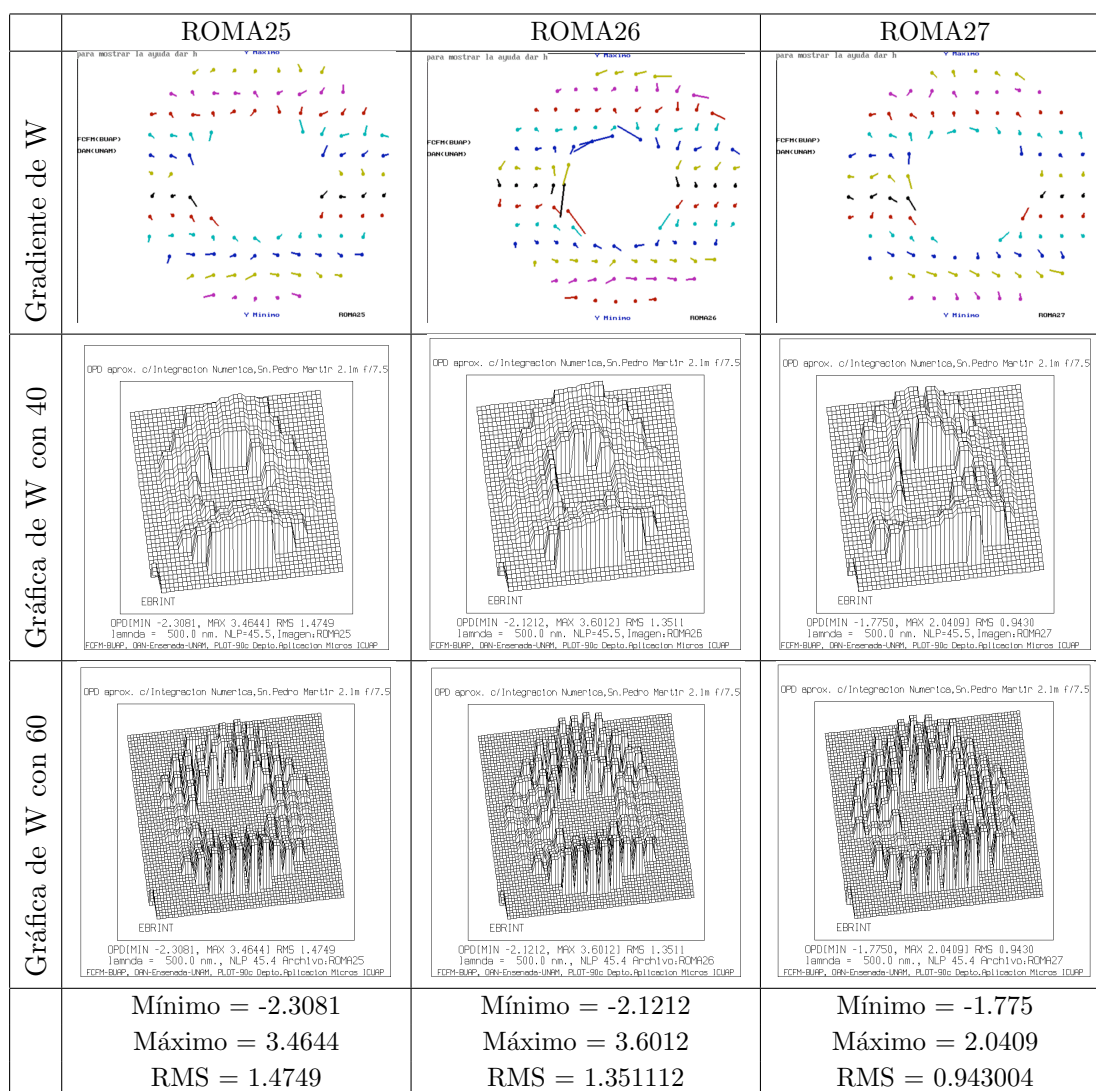


Figura 9.8: Roma25, Roma26, Roma27. El campo gradiente y Superficie de W.

9.3.2 Gráficas de la superficie de W por integración numérica con ajuste con un polinomio de grado 7 de los Bironchigramas evaluados.

Los coeficientes del polinomio de Zernike de grado 7 que se obtuvieron del ajuste de mínimos cuadrados a partir del método descrito en el capítulo 4 se muestran en la figura 9.9 para los bironchigramas ROMA01, ROMA02, ROMA03. La figura 9.12 para los bironchigramas ROMA18, ROMA19, ROMA21, ROMA22 y la figura 9.14 para los bironchigramas ROMA25, ROMA26, ROMA27. En la primer columna de la izquierda es la expresión de la función en terminos de r y θ .

Y las gráficas de las curvas de nivel y los contornos ortogonales de la superficie generadas por estas evaluaciones y sus valores del máximo, mínimo y RMS correspondientes estan, en la figura 9.10 para ROMA01, ROMA02, ROMA03, para ROMA19, ROMA21, ROMA22 en la figura 9.11 y para ROMA25, ROMA26, ROMA27 en la figura 9.13.

Las curvas de nivel que están a una altura entre $[-.1, .1]$ "cerca" del cero, son pintadas muy juntas, no considerar las que están el borde. Se considero graficar juntas las curvas de nivel y contornos ortogonales por que dan un efecto de profundidad.

Para contrastar los resultados obtenidos con ambos métodos de integración se muestra la gráfica de la superficie de W con integración numérica con la regla del trapecio, la malla del dominio tiene 65 puntos por lado $[-1,1]$ y con dos vecinos alrededor por eso las torres estan "cerca". Tambien se pinta el campo gradiente de los datos experimentales para tener una idea de como es el cambio y en que dirección.

(r, θ)	ROMA01	ROMA02	ROMA03	ROMA04
1	0	0	0	0
$r \text{sen}(\theta)$	-62.8336	-77.367	-83.2127	-40.5685
$r \text{cos}(\theta)$	-17.3064	-9.1539	54.5876	-31.8295
$r^2 \text{sen}(2\theta)$	6.9512	5.935	6.2968	6.3651
$2r^2 - 1$	-107.7777	-92.4965	-92.374	-102.1613
$r^2 \text{cos}(2\theta)$	-4.2909	-4.1961	-4.1249	-1.1637
$r^3 \text{sen}(3\theta)$	0.1236	0.9093	1.5356	-0.13
$(3r^3 - 2r) \text{sen}(\theta)$	-0.5437	0.0977	2.2893	-0.3947
$(3r^3 - 2r) \text{cos}(\theta)$	-0.1007	1.7852	3.3874	1.2027
$r^3 \text{cos}(3\theta)$	0.17	0.2175	-0.0393	0.2352
$r^4 \text{sen}(4\theta)$	-0.0653	-0.0478	-0.6867	0.0185
$(4r^4 - 3r^2) \text{sen}(2\theta)$	0.0083	0.1777	-0.1785	0.2454
$6r^4 - 6r^2 + 1$	-1.1177	-2.2809	-2.7234	-1.8368
$(4r^4 - 3r^2) \text{cos}(2\theta)$	0.4795	0.1433	0.5996	0.5817
$r^4 \text{cos}(4\theta)$	0.1071	-0.1287	0.0623	0.0131
$r^5 \text{sen}(5\theta)$	0.5785	0.3055	-0.8248	0.7137
$(5r^5 - 4r^3) \text{sen}(3\theta)$	-0.4284	-0.6825	-1.4018	-0.2929
$(10r^5 - 12r^3 + 3r) \text{sen}(\theta)$	0.5648	0.1729	-0.7015	0.6336
$(10r^5 - 12r^3 + 3r) \text{cos}(\theta)$	0.8757	-0.6354	-1.3533	0.4232
$(5r^5 - 4r^3) \text{cos}(3\theta)$	-0.543	0.0672	0.0956	-0.3455
$r^5 \text{cos}(5\theta)$	1.2328	0.4979	-0.3584	0.5896
$r^6 \text{sen}(6\theta)$	0.0432	-0.1687	0.1482	-0.1874
$(6r^6 - 5r^4) \text{sen}(4\theta)$	0.0219	0.0802	0.3508	0.1067
$(15r^6 - 20r^4 + 6r^2) \text{sen}(2\theta)$	0.0217	-0.135	0.0849	-0.1192
$20r^6 - 30r^4 + 12r^2 - 1$	0.7458	0.8194	1.0301	1.074
$(15r^6 - 20r^4 + 6r^2) \text{cos}(2\theta)$	0.1293	0.1218	-0.117	0.0975
$(6r^6 - 5r^4) \text{sen}(4\theta)$	0.0832	-0.017	-0.0023	0.0094
$r^6 \text{cos}(6\theta)$	-0.0519	0.0564	-0.0409	0.4667
$r^7 \text{sen}(7\theta)$	0.0612	0.1231	0.3365	0.1299
$(7r^7 - 6r^5) \text{sen}(5\theta)$	-0.1323	-0.0692	0.204	-0.2396
$(2r^7 - 30r^5 + 10r^3) \text{sen}(3\theta)$	0.0168	0.1039	0.3467	0.0703
$(35r^7 - 60r^5 + 30r^3 - 4r) \text{sen}(\theta)$	-0.0585	0.0006	0.2115	-0.1995
$(35r^7 - 60r^5 + 30r^3 - 4r) \text{cos}(\theta)$	-0.4737	0.225	0.5298	0.0403
$(2r^7 - 30r^5 + 10r^3) \text{cos}(3\theta)$	0.0795	-0.0662	-0.0305	0.2003
$(7r^7 - 6r^5) \text{cos}(5\theta)$	-0.5105	-0.193	0.0508	-0.1367
$r^7 \text{cos}(7\theta)$	0.2744	0.0255	0.0422	0.2795

Figura 9.9: Coeficientes de Zernike de grado 7 obtenidos con Ajuste para Roma01, Roma02, Roma03, Roma04.

	Roma01	Roma02	Roma03
Gradiente de W			
Integra.x.Trapezio de W			
Cont*.del Ajuste de W			
	Mínimo = -8.3814 Máximo = 8.1155 RMS = 2.8704	Mínimo = -8.9599 Máximo = 6.1765 RMS = 2.8817	Mínimo = -10.1647 Máximo = 8.3643 RMS = 3.4974

Figura 9.10: W por Regla del Trapecio vs W Ajustado con polinomio de grado 7 para Roma01, Roma02, Roma03.

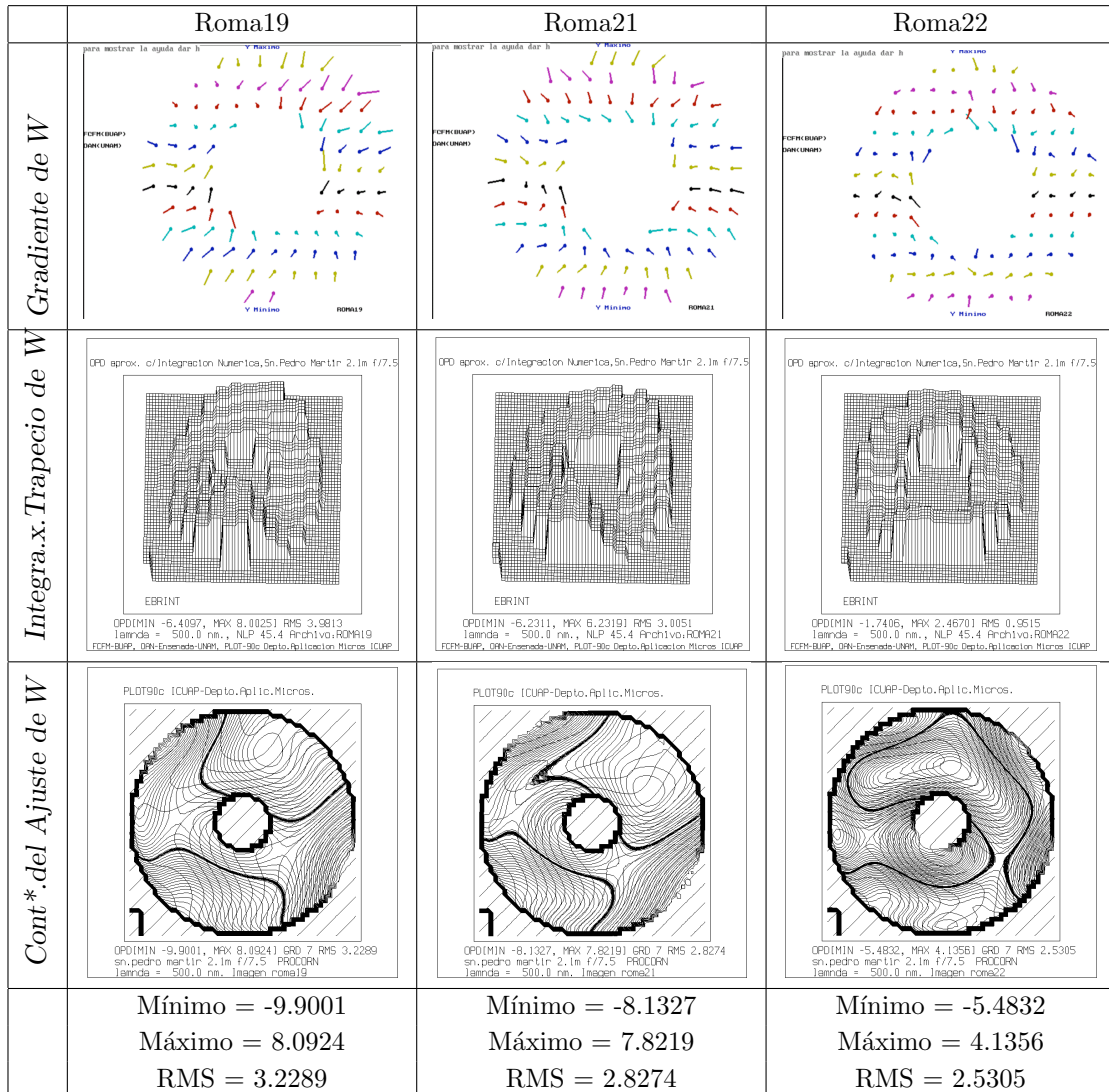


Figura 9.11: W por Regla del Trapecio vs W Ajustado con polinomio de grado 7 para Roma19, Roma21, Roma22.

(r, θ)	ROMA18	ROMA19	ROMA21	ROMA22
1	0	0	0	0
$r \text{sen}(\theta)$	-47.2612	-42.4387	-35.1128	8.2515
$r \text{cos}(\theta)$	-52.6938	-60.0223	-16.5152	-24.2241
$r^2 \text{sen}(2\theta)$	6.3983	6.4906	6.2172	0.2303
$2r^2 - 1$	-102.0259	-103.9581	-104.9664	-106.9506
$r^2 \text{cos}(2\theta)$	-4.3301	-4.8767	-0.2848	-1.8444
$r^3 \text{sen}(3\theta)$	0.8432	0.3814	1.0542	0.4093
$(3r^3 - 2r) \text{sen}(\theta)$	-2.6273	-2.3788	-1.4417	-3.7403
$(3r^3 - 2r) \text{cos}(\theta)$	0.949	-1.0123	-2.192	-1.6582
$r^3 \text{cos}(3\theta)$	-0.238	-0.4242	0.604	0.8025
$r^4 \text{sen}(4\theta)$	-0.3138	-0.1502	0.0742	-0.3906
$(4r^4 - 3r^2) \text{sen}(2\theta)$	0.1029	0.1015	0.4062	0.2663
$6r^4 - 6r^2 + 1$	-1.7924	-1.8306	-2.0586	-2.1663
$(4r^4 - 3r^2) \text{cos}(2\theta)$	0.6133	0.9627	0.4258	0.1154
$r^4 \text{cos}(4\theta)$	-0.4143	-0.2032	-0.3404	-0.3536
$r^5 \text{sen}(5\theta)$	1.4511	1.4766	0.8261	1.8941
$(5r^5 - 4r^3) \text{sen}(3\theta)$	-0.3145	-0.0647	-0.7042	-0.5423
$(10r^5 - 12r^3 + 3r) \text{sen}(\theta)$	1.3282	1.2986	0.8878	2.21
$(10r^5 - 12r^3 + 3r) \text{cos}(\theta)$	-0.5586	0.5969	1.7982	1.0925
$(5r^5 - 4r^3) \text{cos}(3\theta)$	-0.1195	-0.1833	-0.8793	-0.5874
$r^5 \text{cos}(5\theta)$	-0.4609	0.4744	1.2274	1.2531
$r^6 \text{sen}(6\theta)$	-0.1719	-0.1357	0.0369	0.3193
$(6r^6 - 5r^4) \text{sen}(4\theta)$	0.238	0.2101	-0.1303	0.5607
$(15r^6 - 20r^4 + 6r^2) \text{sen}(2\theta)$	-0.0573	-0.0361	-0.1261	0.0733
$20r^6 - 30r^4 + 12r^2 - 1$	1.0397	1.1123	0.8625	1.2349
$(15r^6 - 20r^4 + 6r^2) \text{cos}(2\theta)$	0.0897	-0.0082	-0.0631	-0.0391
$(6r^6 - 5r^4) \text{sen}(4\theta)$	0.1678	0.3396	0.0919	0.2398
$r^6 \text{cos}(6\theta)$	-0.1589	-0.0196	-0.2419	-0.0878
$r^7 \text{sen}(7\theta)$	0.0644	0.0117	0.3146	0.1633
$(7r^7 - 6r^5) \text{sen}(5\theta)$	-0.4625	-0.6928	-0.2266	-0.4681
$(2r^7 - 30r^5 + 10r^3) \text{sen}(3\theta)$	0.0999	0.0454	0.2328	0.2206
$(35r^7 - 60r^5 + 30r^3 - 4r) \text{sen}(\theta)$	-0.4548	-0.5186	-0.2968	-0.6863
$(35r^7 - 60r^5 + 30r^3 - 4r) \text{cos}(\theta)$	0.0809	-0.5379	-0.9645	-0.3935
$(2r^7 - 30r^5 + 10r^3) \text{cos}(3\theta)$	-0.0483	0.0285	0.2958	0.1556
$(7r^7 - 6r^5) \text{cos}(5\theta)$	0.0179	-0.2205	-0.3739	-0.5547
$r^7 \text{cos}(7\theta)$	0.0373	0.1858	0.1491	0.1021

Figura 9.12: Coeficientes de Zernike obtenidos con Ajuste para Roma18, Roma19, Roma21, Roma22.

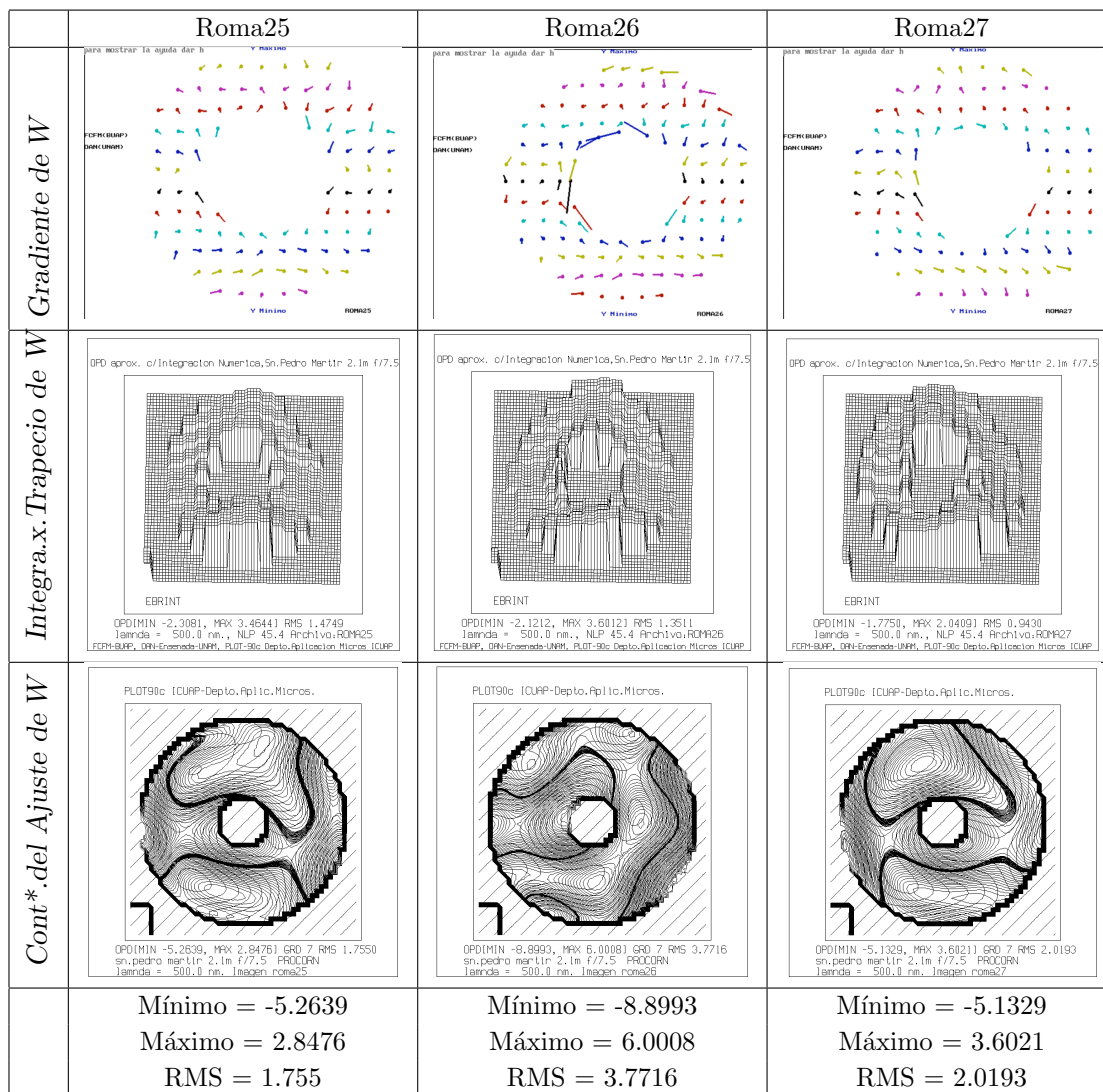


Figura 9.13: W por Regla del Trapecio vs W Ajustado con polinomio de grado 7 para Roma25, Roma26, Roma27.

(r, θ)	ROMA23	ROMA24	ROMA25	ROMA26	ROMA27
1	0	0	0	0	0
$r \text{sen}(\theta)$	-1.015	-9.0335	-15.0194	-19.1667	-42.3091
$r \text{cos}(\theta)$	-31.0423	7.2845	-66.1778	21.0113	-33.4474
$r^2 \text{sen}(2\theta)$	0.5856	0.6629	0.3602	0.3285	-1.5584
$2r^2 - 1$	-98.0761	-108.331	-109.6323	-108.299	-102.9965
$r^2 \text{cos}(2\theta)$	-1.3538	-3.4522	-3.2506	-2.8484	-2.6598
$r^3 \text{sen}(3\theta)$	0.5538	0.3831	0.426	1.1118	0.3142
$(3r^3 - 2r) \text{sen}(\theta)$	-0.4738	-1.7109	-1.0103	3.3911	-1.7048
$(3r^3 - 2r) \text{cos}(\theta)$	-1.4675	-0.2986	-0.4165	-5.586	0.8488
$r^3 \text{cos}(3\theta)$	1.2309	0.793	0.687	1.2931	0.9908
$r^4 \text{sen}(4\theta)$	-0.595	0.0901	-0.2882	0.0875	0.181
$(4r^4 - 3r^2) \text{sen}(2\theta)$	0.1118	-0.1113	0.0754	0.1788	-0.1978
$6r^4 - 6r^2 + 1$	-2.986	-1.9247	-1.5931	-2.8193	-2.1697
$(4r^4 - 3r^2) \text{cos}(2\theta)$	0.0387	0.3736	0.3171	0.0309	0.6427
$r^4 \text{cos}(4\theta)$	-0.6477	-0.5217	-0.2608	-0.258	-0.4697
$r^5 \text{sen}(5\theta)$	0.3088	0.9781	0.7231	-1.7038	1.2348
$(5r^5 - 4r^3) \text{sen}(3\theta)$	-0.2665	-0.375	-0.4889	-1.5258	-0.3981
$(10r^5 - 12r^3 + 3r) \text{sen}(\theta)$	0.3618	1.2695	0.8855	-1.1918	1.1915
$(10r^5 - 12r^3 + 3r) \text{cos}(\theta)$	1.3574	0.9434	0.7421	3.3178	0.1221
$(5r^5 - 4r^3) \text{cos}(3\theta)$	-0.4574	-0.3426	-0.3712	-1.4214	-0.3746
$r^5 \text{cos}(5\theta)$	1.255	1.0232	1.3678	3.7423	-0.0399
$r^6 \text{sen}(6\theta)$	-0.0031	-0.1292	-0.0521	-0.5409	0.0341
$(6r^6 - 5r^4) \text{sen}(4\theta)$	0.3632	0.0599	0.4066	0.2418	-0.0637
$(15r^6 - 20r^4 + 6r^2) \text{sen}(2\theta)$	-0.0078	-0.0273	-0.0416	-0.2564	0.158
$20r^6 - 30r^4 + 12r^2 - 1$	1.3538	0.9911	0.9329	1.3963	1.0668
$(15r^6 - 20r^4 + 6r^2) \text{cos}(2\theta)$	0.1768	-0.0623	0.073	-0.1842	-0.0518
$(6r^6 - 5r^4) \text{sen}(4\theta)$	0.3159	0.2106	0.2213	0.0188	-0.1008
$r^6 \text{cos}(6\theta)$	0.0977	0.1814	0.246	0.016	-0.1146
$r^7 \text{sen}(7\theta)$	-0.1903	0.2323	0.4294	0.9954	0.0773
$(7r^7 - 6r^5) \text{sen}(5\theta)$	-0.0437	-0.2697	-0.1661	0.3661	-0.3497
$(2r^7 - 30r^5 + 10r^3) \text{sen}(3\theta)$	-0.104	0.2333	0.3116	0.82	0.0938
$(35r^7 - 60r^5 + 30r^3 - 4r) \text{sen}(\theta)$	0.0201	-0.5526	-0.4039	0.1385	-0.3479
$(35r^7 - 60r^5 + 30r^3 - 4r) \text{cos}(\theta)$	-0.1518	-0.4893	-0.3816	-1.4149	-0.1755
$(2r^7 - 30r^5 + 10r^3) \text{cos}(3\theta)$	0.2306	0.2724	0.452	0.8446	0.1012
$(7r^7 - 6r^5) \text{cos}(5\theta)$	-0.3452	-0.2773	-0.498	-1.478	-0.1603
$r^7 \text{cos}(7\theta)$	0.1367	0.0824	0.3682	0.8748	-0.0504

Figura 9.14: Coeficientes de Zernike obtenidos con Ajuste para Roma23, Roma24, Roma25, Roma26, Roma27

9.3.3 Elección del grado de polinomio de ajuste.

EBRINT se uso en la evaluación de Bironchigramas de pruebas aplicadas en el Taller de Óptica de la FCFM de la BUAP y en en los Bironchigramas de pruebas aplicadas al telescopio de 2.1 m. del Observatorio Astronómico del Instuto de Astrónomia de la UNAM en San Pedro Mártir en Baja California México. Con la integración numérica de la regla del trapecio no tenemos una caracterización de la superfcie como ocurre con ajuste de Mínimos Cuadrados pero no dependemos de la elección en el grado del polinomio que se elija para la integración numérica.

- En el resultado de la integración numérica con el ajuste de polinomios de diferentes grados se debe seleccionar entre los mostrados en la figura 9.15 para los bironchigramas Roma19, Roma21, Roma22 con ajustes de grado 4, 5, 6 y 7.
- En el resultado de la integración numérica con el ajuste de polinomios de diferentes grados se debe seleccionar entre los mostrados en la figura 9.16 para los bironchigramas Roma25, Roma26, Roma27 con ajustes de grado 4, 5, 6 y 7.

Después de "analizar" las graficas, se eligió el ajuste de grado 7 para mostrarlos en la sección 9.3.2, porque es la gráfica que se "parece" con la integración de la regla del trapecio.

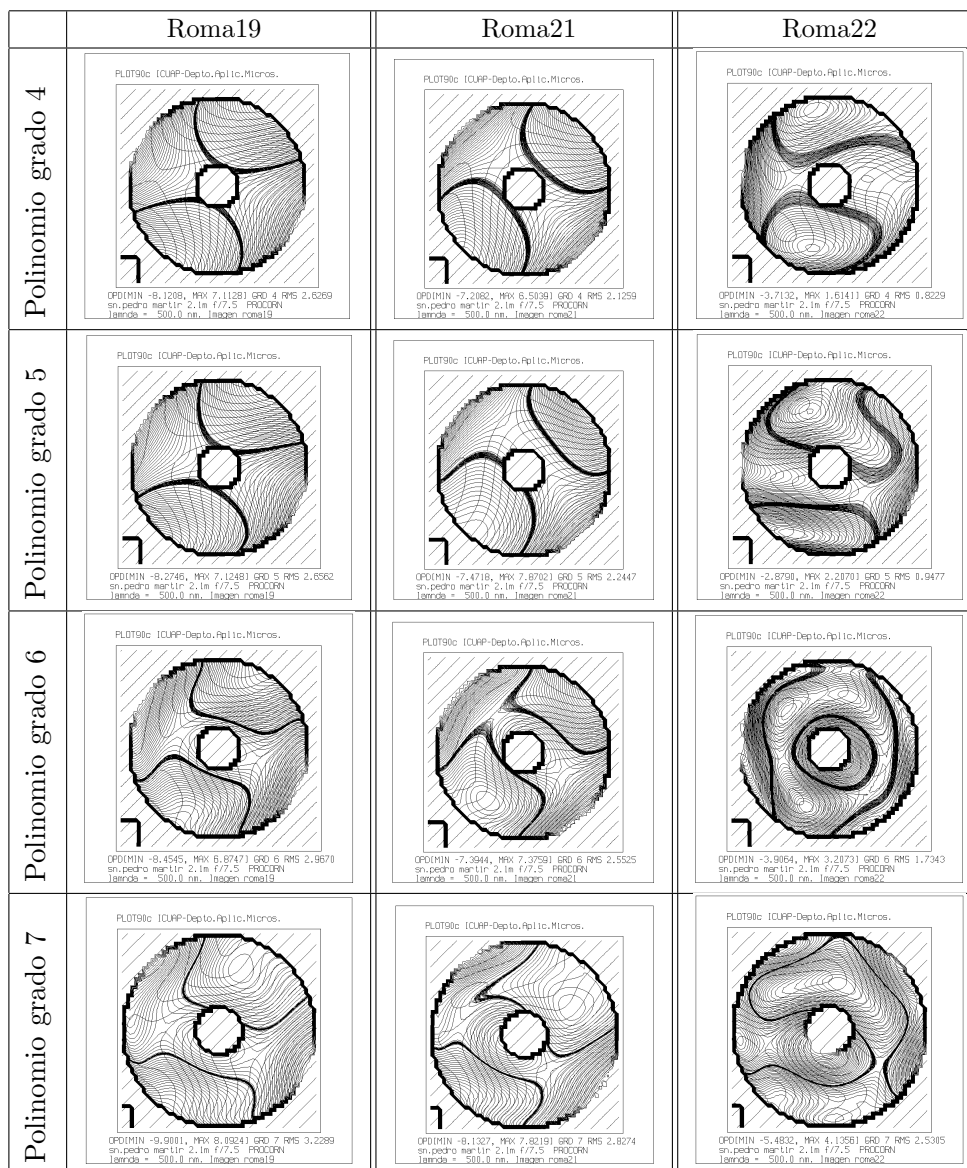


Figura 9.15: Graficas de curvas de nivel y contorno ortográfico, de W , correspondientes a los bironchigramas roma19 primer columna, roma21 segunda columna, roma22 tercer columna, obtenidas del ajuste Mínimos Cuadrados con polinomios de grado 4,5,6,7.

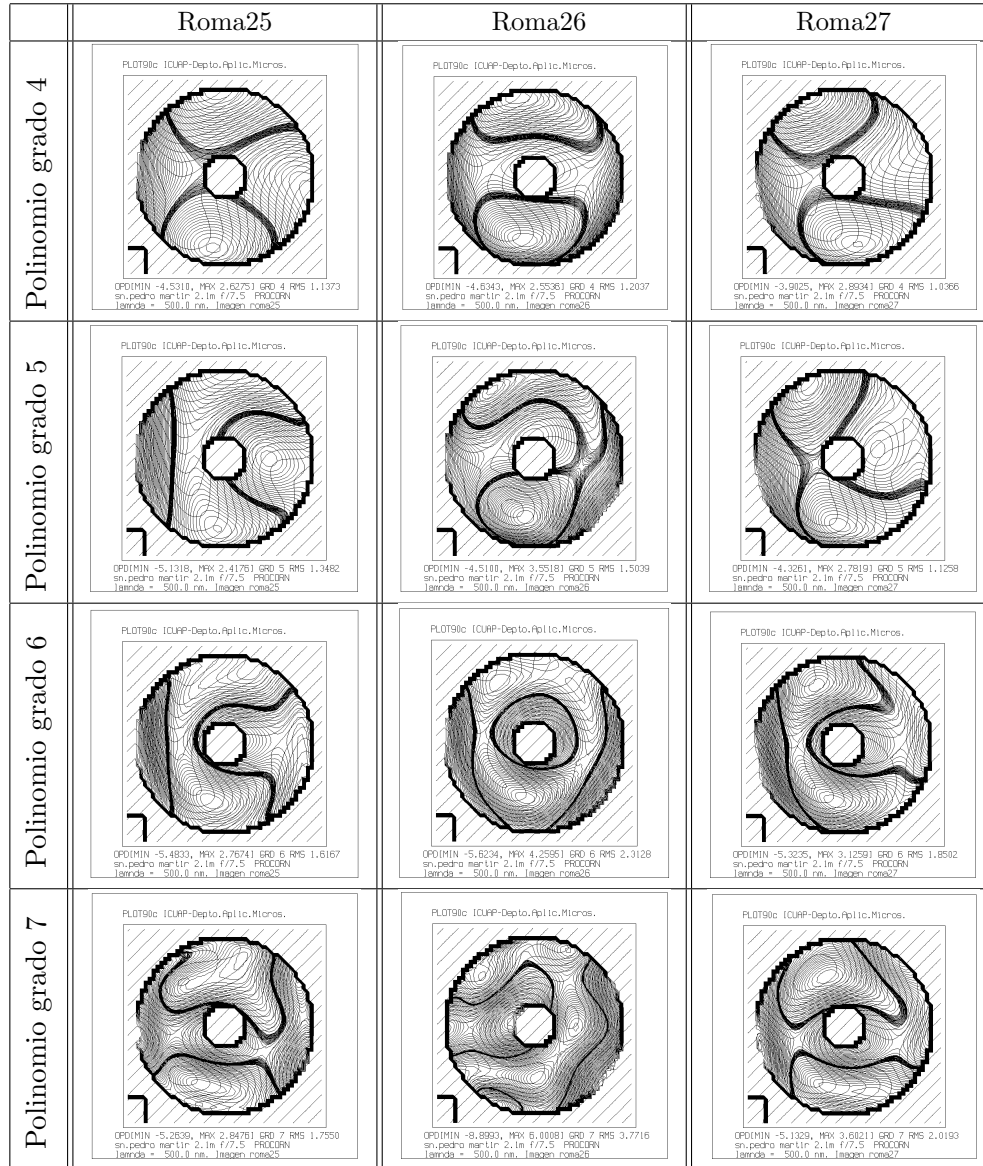


Figura 9.16: Graficas de contorno y contorno ortografico correspondientes a los bironchigramas roma25 primer columna, roma26 segunda columna, roma27 tercer columna, obtenidas del ajuste del polinomio de grado 4,5,6,7.

Capítulo 10

Conclusiones

Gracias al esfuerzo y dedicación de todos los involucrados en este trabajo, tenemos a EBRINT un programa para evaluar sistemas ópticos con la rejilla Bironchi, como el telescopio astronómico de 2.1m de diametro del Observatorio Astronómico Nacional de la UNAM ubicado en la Sierra de San Pedro Martir, B.C.N., para apoyar a los talleres de óptica en las pruebas de calidad de pulido de espejos o evaluación de sistemas ópticos.

La evaluación de Bironchigramas con dos perspectivas de integración numérica, una con ajuste de mínimos cuadrados teniendo como base, los polinomios monomiales.

La alternativa propuesta y desarrollada, usando la Regla del Trapecio, con dos algoritmos para el recalcu de W para cada uno de los puntos desde todos sus vecinos cercanos, que permite reducir el error, al incrementar el número de recalculos.

Con el recorrido de patrones de línea recta para recalcular las diferencias $\mathbf{W}_{b_k} - \mathbf{W}_a$, para $k = 1 \dots 8$ para cada uno de los puntos, a lo más hay ocho recalculos diferentes de diferencias. Con la idea de la celda básica se puede incrementar hasta cuatro el número de recálculos diferentes para cada uno de estos ocho. Y se incrementa en uno más para las diferencias que están en la horizontal o vertical. Entonces podemos formar algunas combinaciones, por ejemplo, recorrido con patrones de línea recta y celda básica o recorrido con patrones circulares y sólo calcular las diferencias, sin la idea de la celda básica.

Con la integración numérica de la regla del trapecio no tenemos una caracterización de la superficie como ocurre con ajuste de Mínimos Cuadrados pero no dependemos de la elección en el grado del polinomio que se elija para la integración numérica.

El error al usar a regla del trapecio se muestra en la representación gráfica del desarrollo para llegar a la aproximación de la diferencia de $W(B) - W(A)$ como el promedio de dos aproximaciones de la serie de Taylor de primer orden.

El como mostrar las gráficas de la superficie de W para el método del trapecio, genera diferentes perspectivas, para el caso de la malla de 60, las torres aparecen aisladas, con la malla de 40, da un efecto de superficie casi continua, la elección depende de que se desea analizar.

Con los valores máximo, mínimo y RMS obtenidos de las 26 evaluaciones de los Bironchigramas con ajuste de grado 7 y la integración numérica con la regla del trapecio, mostradas en la gráfica de la figura 9.5, tenemos las siguientes observaciones:

- Los valores mínimos calculados con la regla del trapecio no tienen una variación abrupta de bironchigrama en bironchigrama y se mantienen menores que los valores del ajuste de grado 7.
- Los valores máximos y RMS calculados con la regla del trapecio a partir de Roma21 se mantienen menores que el ajuste de grado 7.
- Las evaluaciones de los bironchigramas Roma21 al Roma22, se observa un cambio, disminuyen los valores mínimos, máximos y RMS, en los dos métodos de integración, lo que indica la corrección de los errores del espejo y se mantiene hasta el Roma27.

Las variaciones de los valores mínimos, máximos y RMS, se debe a la elección del grado alto en el ajuste, algo que ya se preveía.

10.1 Perspectivas.

Algunos de los trabajos a futuro son:

- Cambiar la base del método de integración, teniendo como base ahora la interpolación con Splines.
- Estudiar el comportamiento de las combinaciones de patrones rectilíneos y circulares y la celda básica en el recalcado de W , la integración del recorrido con patrones circulares y la celda básica a EBRINT.
- Migrar el código para ejecutarse sobre Linux, con el fin integrar las funcionalidades de EBRINT a FOSS, la página web "www.fcfm.buap.mx/cslab/fooss" del taller de Óptica de Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la BUAP en la que se ofrecen las herramientas para la evaluación ronchigramas y bironchigramas simulados y experimentales.
- En el proceso de evaluación de los bironchigramas, cuando son uno o dos, el registrar los datos de entrada, los parámetros aplicados durante el trabajo de evaluación y los resultados obtenidos para una consulta posterior, tal vez no sea complicado, pero seguro lo es, cuando se incrementa la cantidad a digamos 26 o tal vez menos. Entonces es recomendable construir un sistema que organice toda esta información, que sea automático su registro, fácil de consultar y recuperar.

Apéndice A

Polinomios de Zernike

Los polinomios circulares [24] de Zernike (Born y Wolf 1964) [1] se ha mostrado que son muy convenientes para expresar un frente de onda que sale de un sistema óptico bajo prueba (Rimmer y Wyant 1975[31], Rimmer et. al 1972) . Las dos razones principales son:

- La forma matemática del polinomio es preservado aún cuando una rotación, con el pivote en el centro del círculo, es aplicado al frente de onda.
- El polinomio encontrado es el mejor ajuste de mínimos cuadrados a los datos de los puntos. Por lo tanto ya que los polinomios son ortogonales, en el círculo unitario, cualquiera de los términos individuales, también representan el mejor ajuste de mínimos cuadrados a los datos. Así para encontrar el mejor foco o el tilt promedio del frente de onda solo necesitamos considerar los coeficientes apropiados.

La forma de representar el frente de onda por medio de una combinación lineal de polinomios de Zernike, y obtener la ventajas mencionadas arriba, es como sigue:

$$\mathbf{W}(\rho, \theta) = \sum_{n=0}^k \sum_{m=0}^n A_{nm} U_{nm}(\rho, \theta) \quad (\text{A.1})$$

donde ρ es la distancia radial normalizada y θ es el ángulo medido desde el eje Y positivo. Los polinomios de Zernike U_{nm} son representados por (Rimmer y Wyant 1975[31]):

$$U_{nm}(\rho, \theta) = R_n^{n-2m}(\rho) \begin{cases} \text{sen} \\ \text{cos} \end{cases} (n-2m)\theta \quad (\text{A.2})$$

donde la función seno es usada para $n-2m > 0$ y la función coseno para $n-2m \leq 0$ y la componente radial ha sido definida por (Born y Wolf 1964[1]):

$$R_n^{n-2m}(\rho) = \sum_{s=0}^m (-1)^s \frac{(n-s)!}{s!(m-s)!(n-m-s)!} \rho^{n-2s} \quad (\text{A.3})$$

El dominio de definición de los polinomios de Zernike en las expresiones anteriores, son las coordenadas polares (ρ, θ) , también existen las expresiones correspondientes sobre un dominio rectangular (x, y) , las cuales conservan sus propiedades siempre que $\sqrt{x^2 + y^2} \leq 1$. Esta última representación es útil porque algunas mediciones son hechas en coordenadas rectangulares. A continuación mostraremos [25] la forma explícita de los polinomios de Zernike para $k = 3$, donde la primera columna identifica al polinomio, la segunda es la representación en un dominio polar, la tercera en un dominio rectangular y la cuarta el nombre de la aberración que representa.

Polinomio	Polar	Cartesiana	Aberración
U_{00}	1	1	Piston o termino constante
U_{10}	$\rho \text{sen} \theta$	y	Tilt en el eje Y
U_{11}	$\rho \text{cos} \theta$	x	Tilt en el eje X
U_{20}	$\rho^2 \text{sen} 2\theta$	$y^2 - x^2$	Astigmatismo con el eje a $\pm 45^\circ$
U_{21}	$2\rho^2 - 1$	$2x^2 + 2y^2 - 1$	Foco desplazado
U_{22}	$\rho^2 \text{cos} 2\theta$	$2xy$	Astigmatismo con el eje a 0° o 90°
U_{30}	$\rho^3 \text{sen} 3\theta$	$3xy^2 - x^3$	Astigmatismo triangular con base en el eje X
U_{31}	$(3\rho^3 - 2\rho) \text{sen} \theta$	$3xy^2 + 3x^3 - 2x$	Coma de tercer orden en el eje X
U_{32}	$(3\rho^3 - 2\rho) \text{cos} \theta$	$3yx^2 + 3y^3 - 2y$	Coma de tercer orden en el eje Y
U_{33}	$\rho^3 \text{cos} 3\theta$	$-3yx^2 + y^3$	Astigmatismo triangular con base en el eje Y

Apéndice B

Monomios

Los polinomios monomiales estan definidos en un dominio de coordenadas rectangulares (x, y) , mostramos la forma de la funciones $g_k(x, y)$ para $k = 1, \dots, 10$, que es el número de terminos para un polinomio bidimensional de grado 3:

$$g_1(x, y) = g_{00}(x, y) = 1$$

$$g_2(x, y) = g_{10}(x, y) = x$$

$$g_3(x, y) = g_{11}(x, y) = y$$

$$g_4(x, y) = g_{20}(x, y) = x^2$$

$$g_5(x, y) = g_{21}(x, y) = xy$$

$$g_6(x, y) = g_{22}(x, y) = y^2$$

$$g_7(x, y) = g_{30}(x, y) = x^3$$

$$g_8(x, y) = g_{31}(x, y) = x^2y$$

$$g_9(x, y) = g_{32}(x, y) = xy^2$$

$$g_{10}(x, y) = g_{33}(x, y) = y^3$$

Una forma general de representar los polinomios monomiales es :

$$\begin{aligned} g_{i,j}(x, y) &= x \star g_{i-1,j}(x, y) && \text{con } i = 1, 2, \dots \quad ; j = 0, 1, \dots, i - 1 \\ g_{i,i}(x, y) &= y^i && \text{con } i = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Apéndice C

Promedio de dos aproximaciones de serie de Taylor

En el desarrollo siguiente daremos otro punto de vista de la ecuación 5.19, como el promedio de dos **aproximaciones** de la diferencia $W(\mathbf{b}) - W(\mathbf{a})$. Tenemos que una aproximación lineal a una función es la derivada de la función, ver pagina 200 Courant(1976) [17]. Primero ilustraremos el caso de una una funcion f de \mathbb{R} en \mathbb{R} que conocemos sus derivadas en $f'(A)$ y $f'(B)$ que son las pendientes de las rectas tangentes en los puntos $(A, f(A))$ y $(B, f(B))$, respectivamente, ver figura C.1.

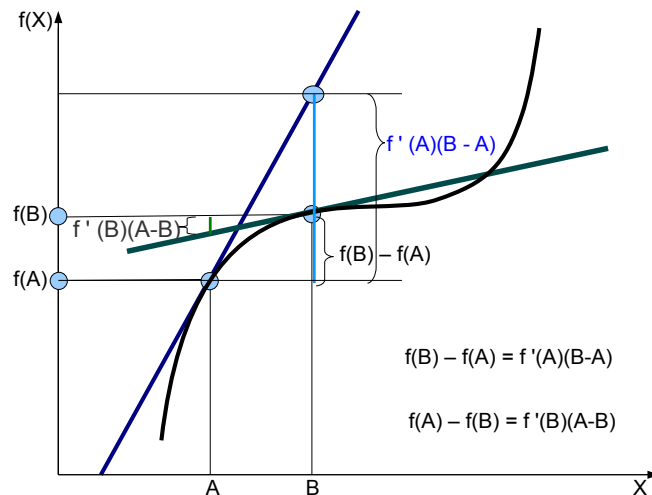


Figura C.1: Aproximaciones de Taylor.

Supogamos que deseamos conocer el valor de $f(B)$, dadas $f'(A)$ y $f(A)$, calculando con una serie de Taylor hasta la primer derivada es:

$$f(B) = f(A) + f'(A)(B - A) + \epsilon_B \quad (\text{C.1})$$

Usaremos la *aproximación* para $f(B)$:

$$f(B) \approx f(A) + f'(A)(B - A) \quad (\text{C.2})$$

$$(\text{C.3})$$

despejando tenemos una primera aproximación para la diferencia:

$$f(B) - f(A) \approx f'(A)(B - A) \quad (\text{C.4})$$

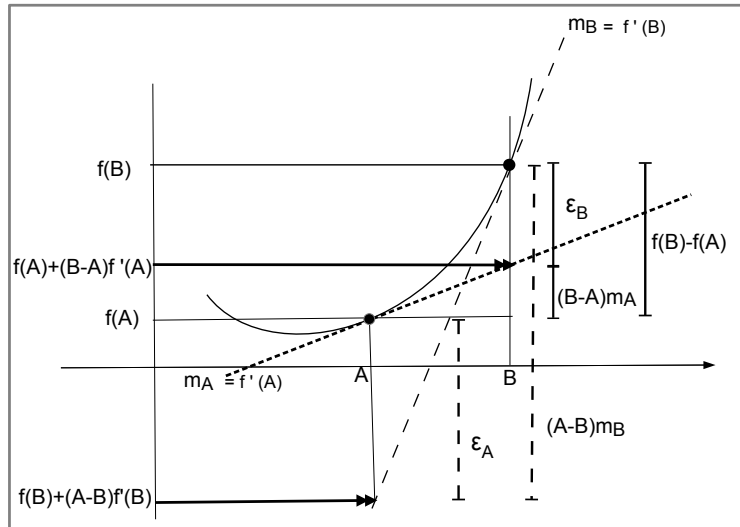


Figura C.2: Aproximaciones de Taylor y errores.

Ahora supogamos que deseamos conocer el valor de $f(A)$, dadas $f'(B)$ y $f(B)$, calculando con una serie de Taylor hasta la primer derivada es:

$$f(A) = f(B) + f'(B)(A - B) + \epsilon_A \quad (\text{C.5})$$

y la segunda *aproximación* para la diferencia es :

$$f(A) - f(B) \approx f'(B)(A - B) \quad (\text{C.6})$$

$$f(B) - f(A) \approx f'(B)(B - A) \quad (\text{C.7})$$

los errores ϵ_A y ϵ_B se ilustran en la figura C.2, finalmente calculamos la diferencia como el promedio de las dos *aproximaciones* anteriores, tenemos :

$$2(f(B) - f(A)) \approx f'(B)(B - A) + f'(A)(B - A) \quad (\text{C.8})$$

$$f(B) - f(A) \approx \frac{(B - A)(f'(B) + f'(A))}{2} \quad (\text{C.9})$$

Haremos un desarrollo similar de una función W de R^2 a R , como el promedio de dos *aproximaciones* para la diferencia $W(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - W(\mathbf{x})$, ver página 95 Courant(1976)[18], conociendo $\mathbf{D}W(\mathbf{x})$ y $\mathbf{D}W(\mathbf{x} + \mathbf{h})$, por medio de un polinomio de Taylor de primer orden tenemos :

$$W(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = W(\mathbf{x}) + \mathbf{D}W(\mathbf{x}) \cdot ((\mathbf{x} + \mathbf{h}) - \mathbf{x}) + \epsilon_{\mathbf{h}} \quad (\text{C.10})$$

No consideramos el error en $\epsilon_{\mathbf{h}}$ y tenemos la *aproximación*:

$$W(\mathbf{x} + \mathbf{h}) \approx W(\mathbf{x}) + \mathbf{D}W(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h} \quad (\text{C.11})$$

si $\mathbf{a} = (x_a, y_a)$, $\mathbf{b} = (x_b, y_b)$, t en $[0 \dots 1]$ y tenemos la parametrización:

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\sigma}(t), \text{ para } t = 0 \quad (\text{C.12})$$

$$\mathbf{b} = \boldsymbol{\sigma}(t), \text{ para } t = 1 \quad (\text{C.13})$$

sustituyendo

$$\mathbf{a} = \mathbf{x} \quad (\text{C.14})$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{x} + \mathbf{h} \quad (\text{C.15})$$

entonces

$$W(\mathbf{b}) \approx W(\mathbf{a}) + \mathbf{D}W(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \quad (\text{C.16})$$

$$\approx W(\mathbf{a}) + \frac{\partial W}{\partial x}(\mathbf{a})(x_b - x_a) + \frac{\partial W}{\partial y}(\mathbf{a})(y_b - y_a) \quad (\text{C.17})$$

Tenemos una primera aproximación a la diferencia,

$$W(\mathbf{b}) - W(\mathbf{a}) \approx W(\mathbf{a}) + \frac{\partial W}{\partial x}(\mathbf{a})(x_b - x_a) + \frac{\partial W}{\partial y}(\mathbf{a})(y_b - y_a) \quad (\text{C.18})$$

tomemos la aproxima ahora haciendo una reparametrización, tenemos

$$\mathbf{b} = \boldsymbol{\sigma}(t), \text{ para } t = 0 \quad (\text{C.19})$$

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\sigma}(t), \text{ para } t = 1 \quad (\text{C.20})$$

sustituyendo

$$\mathbf{b} = \mathbf{x} \quad (\text{C.21})$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{x} + \mathbf{h} \quad (\text{C.22})$$

entonces

$$W(\mathbf{a}) = W(\mathbf{b}) + \mathbf{D}W(\mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) + \epsilon_{\mathbf{a}} \quad (\text{C.23})$$

$$W(\mathbf{a}) \approx W(\mathbf{b}) + \frac{\partial W}{\partial x}(\mathbf{b})(x_a - x_b) + \frac{\partial W}{\partial y}(\mathbf{b})(y_a - y_b) \quad (\text{C.24})$$

por un lado tenemos que

$$W(\mathbf{a}) - W(\mathbf{b}) \approx \frac{\partial W}{\partial x}(\mathbf{b})(x_a - x_b) + \frac{\partial W}{\partial y}(\mathbf{b})(y_a - y_b) \quad (\text{C.25})$$

y

$$W(\mathbf{b}) - W(\mathbf{a}) \approx \frac{\partial W}{\partial x}(\mathbf{a})(x_b - x_a) + \frac{\partial W}{\partial y}(\mathbf{a})(y_b - y_a) \quad (\text{C.26})$$

pero

$$W(\mathbf{a}) - W(\mathbf{b}) = -(W(\mathbf{b}) - W(\mathbf{a})) \quad (\text{C.27})$$

luego

$$-(W(\mathbf{b}) - W(\mathbf{a})) \approx -\left(\frac{\partial W}{\partial x}(\mathbf{a})(x_b - x_a) + \frac{\partial W}{\partial y}(\mathbf{a})(y_b - y_a)\right) \quad (\text{C.28})$$

$$W(\mathbf{a}) - W(\mathbf{b}) \approx \frac{\partial W}{\partial x}(\mathbf{a})(x_a - x_b) + \frac{\partial W}{\partial y}(\mathbf{a})(y_a - y_b) \quad (\text{C.29})$$

sumando C.25 y C.29

$$W(\mathbf{a}) - W(\mathbf{b}) \approx \frac{\partial W}{\partial x}(\mathbf{b})(x_a - x_b) + \frac{\partial W}{\partial y}(\mathbf{b})(y_a - y_b) \quad (\text{C.30})$$

$$W(\mathbf{a}) - W(\mathbf{b}) \approx \frac{\partial W}{\partial x}(\mathbf{a})(x_a - x_b) + \frac{\partial W}{\partial y}(\mathbf{a})(y_a - y_b) \quad (\text{C.31})$$

obtenemos

$$\begin{aligned} W(\mathbf{a}) - W(\mathbf{b}) &\approx \frac{1}{2}(x_a - x_b) \left(\frac{\partial W}{\partial x}(\mathbf{b}) + \frac{\partial W}{\partial x}(\mathbf{a}) \right) \\ &\quad + \frac{1}{2}(y_a - y_b) \left(\frac{\partial W}{\partial y}(\mathbf{b}) + \frac{\partial W}{\partial y}(\mathbf{a}) \right) \end{aligned}$$

Este resultado es válido si $(x_b - x_a)$ y $(y_b - y_a)$ son pequeños porque se usó Taylor lineal.

Bibliografía

- [1] Born, M. and E. Wolf, "Principles of Optics", Pergamon Press, New York, (1964)
- [2] Burden Richard I., Faires J. Douglas, " *Análisis Numérico*", Tercera edición, Grupo Editorial Iberoamérica.(1985)
- [3] Bunch, Walter; Deen, Robert; " *VICAR Quick-Start Guide Version 2.0 2016-05-22* "Prepared by , Jet Propulsion Laboratory Institute of Technology Pasadena, California Copyright 2016, California Institute of Technology. (2016).
- [4] California Institute of Technology Sponsorship under Contract NAS7-1270. " *The VICAR Image Processing System*", <https://www.mipgl-jpl.nasa.gov/external/vicar.html>, [Consulta: 10 Agosto 2018]
- [5] Canto Gómez, A. B.; McIntosh , Harlod V.(1994) " *Paquete de Graficado < PLOT 90c > para PC Version 1.0*", Departamento de Aplicación de Microcomputadoras, Instituto de Ciencias , Universidad Autonoma de Puebla, Puebla, Mex., Mar (1994).
- [6] Canto Gómez, A. B.(1993); " *Descripción de Funciones PLOT 90c*", Departamento de Aplicación de Microcomputadoras, Instituto de Ciencias , Universidad Autonoma de Puebla, Puebla, Mex., Ago (1993).
- [7] Chapra, Steven C.; Canale, Raymond P. " *Métodos Numéricos para Ingenieros*", Sexta Edición, Mc Graw Hill / Interamericana. (2010).
- [8] Cordero Dávila A.(1991); " *Dificultades de la Aplicación de Mínimos Cuadrados en la Evaluación Tradicional de Interferogramas*", Tesis Doctoral, INAOE, Abril (1991).
- [9] Cordero-Davila, A., A.Cornejo-Rodriguez and O.Cardona-Nuñez (1993); " *Least squares estimators for the center an the radius of the circular patterns*", App.Op., **32**,5683-5685 (1993).
- [10] A. Cordero-Dávila, O. Cardona-Nuñez, and A. Cornejo-Rodriguez, " *Polynomial fitting of interferograms with Gaussian errors on fringe coordinates. I: Computer simulations*", Appl. Opt. **33**, 7339-7342 (1994).

- [11] A. Cordero-Dávila, O. Cardona-Nuñez, A. Cornejo-Rodríguez, and R. Diaz-Uribe, "Polynomial fitting of interferograms with Gaussian errors on fringe coordinates. II: Analytical study", *Appl. Opt.* **33**, 7343-7348 (1994).
- [12] Cordero-Dávila, A., E. Luna-Aguilar, S. Vázquez-Montiel, S. Zárate-Vázquez and M. E. Percino-Zacarias (1998); "Ronchi test with a square grid", *Appl. Opt.*, **37**, 4, 672-675, (1998).
- [13] Cordero-Dávila, A., E. Luna-Aguilar, S. Zárate-Vázquez and O. Harris, "Evaluación de la calidad de la imagen del telescopio de 2.1 m.", Reporte Técnico IAUNAM, RT-95-02 (1995)
- [14] Alejandro Cornejo-Rodríguez, Alberto Cordero-Dávila, and Fermín S. Granados Agustín "Wavefront Slope Measurements in Optical Testing" in *Advanced Optical Instruments and Techniques Optical Science and Engineering*, Daniel Malacara Hernández., CRC Press., 51-94, (2017).
- [15] Cornejo R.A., Malacara D. (1976); "Wavefront Determination Using Ronchi and Hartmann Tests", *Bolentin del Instituto de Tonanzintla*, Vol. 2, No. 2, pp 127-129, Diciembre (1976).
- [16] Cornejo-Rodríguez, A., "Ronchi test" in *Optical shop testing*, Malacara H. D., John Wiley & Sons, Inc. Wiley Interscience., 2da. Edición., 321-366 (1992).
- [17] Courant, R.; John, F.; "Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático, Vol. 1", Limusa, México D.F., (1976).
- [18] Courant, R.; John, F.; "Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático, Vol. 2", Limusa, México D.F., (1976).
- [19] Electrim Corporation; "EDC-1000/EDC-1000TE Computer Camera Technical Manual", Electrim Corporation, (1993).
- [20] Fulks, Watson; "Cálculo Avanzado", Limusa, México D.F., (1983).
- [21] Ghozeil I, "Hartmann and other screen test" in *Optical shop testing*, Malacara H. D., John Wiley & Sons, Inc. Wiley Interscience., 2da. Edición., 367-396 (1992).
- [22] J.P. Hernández Henríquez (1993); "Descripción breve de las subrutinas de graficación de PLOT 84", Departamento de Aplicación de Microcomputadoras, Instituto de Ciencias, Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, Mex., Ago (1993).
- [23] Lee, C.Y.; "An Algorithm for Path Connections and its Applications", *IRE Transactions on electronic Computers*, EC-10(2): 346-365, (1961).
- [24] Malacara Daniel, Alejandro Cornejo and Arquimides Morales, "Computation of Zernike Polynomials in Optical Testing", *Bolentin del Instituto de Tonanzintla*, Vol. 2, No. 2, Diciembre 1976., pp 121-126.

- [25] Malacara H. D. (1992), "*Optical Shop Testing*", Edit. John Wiley & Sons, Inc. Wiley Interscience., 2da. Edición., (1992).
- [26] Malacara H. D. (2007), "*Optical Shop Testing*", Edit. John Wiley & Sons, Inc. Wiley Interscience., 3da. Edición., (2007).
- [27] Malacara, D., "*Twyman-Green Interferometer*" in *Optical shop testing*, Malacara H. D., John Wiley & Sons, Inc. Wiley Interscience., 2da. Edición., 51-94, (1992).
- [28] Mantravadi, M.V., "*Newton, Fizeau, and Haidinger Interferometers*" in *Optical shop testing*, Malacara H. D., John Wiley & Sons, Inc. Wiley Interscience., 2da. Edición., 1-50, (1992).
- [29] Marsden Jerrold E.; Tromba, Anthony J.; "*Cálculo Vectorial*", Addison Wesley Iberoamericana, México D.F., (1988).
- [30] Press, William H. ; Flannery, Brian P. ; Teukolsky, Saul A. ; Vetterling, William T ; "*Numerical Recipes , The Art of Scientific Computing*", Cambridge University Press, (1986).
- [31] Rimmer, M.P., and J.C.Wyant, "*Evaluation of Large Aberrations Using a Lateral-Shear Interferometer Having Variable Shear*", *Appl. Opt.* 14, 142, (1975).
- [32] Universidad Nacional Autónoma de México "*Observatorio Astronómico Nacional, SPM. Instituto de Astronomía*", <https://www.astrossp.unam.mx/oanspm/> [Consulta: 10 Agosto 2018]
- [33] Romero Castillo, Adriana ; Zárate Vázquez, Saúl (1992); "*Editor de Video para ruteo automatico e interactivo para circuitos impresos. Dirigido por Hugo Garcia Monroy*", Departamento de Aplicación de Microcomputadoras, Instituto de Ciencias, Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, Mex., Dic. (1992).
- [34] Zárate Vázquez, S.; Cordero Dávila, A.; Luna Aguilar E. (1995); "*Programa ETAE*", Reporte Técnico No.1, Taller de Óptica FCFM-BUAP. (1995).
- [35] Zárate Vázquez S., Luz Adriana Cordero, Leonardo Téllez Arriaga, Captura Semi-manual de puntos de un interferograma, XLI Congreso Nacional de Física, U.A.S.L.P., 4MB14, Suplemento del Bol. Soc.Mex.Fís.12-3, pag.112, 1998.