ESTIMACIONES DIRECTAS PARA OPERADORES LINEALES Y POSITIVOS SOBRE ESPACIOS CON PESOS POLINOMIALES

Indice

Introduccion

En la teor a de los operadores lineales positivos en espacios C(I) de funciones continuas sobre un intervalo I, hay dos partes que tienen diferencias esenciales: cuando I es compacto y cuando no lo es. Para I compacto, hay una teor a general bastante desarrollada (ver [4], [22] [45], [58] y [66]). Cuando I no es compacto, se han escrito muchos art culos, pero en la mayor parte de ellos solo se consideran sucesiones particulares de operadores.

>Por que esta diferencia? En general, no se tiene un analogo inmediato del teorema de Bohman-Korovkin para I no compacto. Esto obliga a considerar ciertas restricciones. En algunos casos, los autores se limitan a estudiar la convergencia sobre subconjuntos compactos. En otros, se obtienen resultados mas generales pero no sobre todo C(I).

Para explicar nuestro trabajo es necesario introducir algunas notaciones. Trabajaremos con I = [0; 1).

Como es usual, R^I denota la familia de todas las funciones reales de nidas sobre I y C(I) el subespacio de las fuciones continuas.

Fijemos F un subespacio lineal de $R^{[0;1)}$.

Presentemos algunos de los problemas de aproximacion pesada que que-remos estudiar.

Para un peso jo, consideramos el espacio pesado C (I), compuesto por las f 2 C(I) tales que

$$kfk = \sup_{x2I} j\ f(x)\ (x)\ j < 1:$$

y suponemos que C (I) F.

Dada una sucesion de L_n : F ! R^I operadores lineales positivos, podemos formular los problemas siguientes:

(i) Encontrar condiciones necesaria y/o su cientes para que fL_ng sea un proceso de aproximacion en C (I). Esto es, >cuando

$$\lim_{n!1} kL_n(f) \qquad f\,k = 0 \;;$$

para toda f 2 C (I)?

(ii) >Cuando fL_ng es un proceso de aproximacion en C $_{;1}$(I), donde estamos condiderando el subespacio de las funciones para las cuales el producto f tiene l mite en el in nito?

(iii) >Cuando fL_ng es un proceso de aproximacion en C $_{;0}$(I)? El problema es similar al anterior, pero consideramos que el l mite en el in nito es cero. Los dos problemas tienen grandes diferencias.

(iv) >Cuando fL_ng es un proceso de aproximacion en C_{uc} (I)? En este caso, consideramos funciones f tales que f es uniformemente continua.

(v) Si fL_ng no es un proceso de aproximacion en C $_{;1}$(I), caracterizar las funciones f 2 C (I) para las cuales

$$kL_n(f) \qquad f\,k \qquad !\,0:$$

(vi) Si fL_ng es un proceso de aproximacion en C (I), encontrar otras fun-ciones no acotadas f en F para las cuales $L_n(f)$! f (al menos puntualmente).

(vii) >Para cuales pesos se cumple que fL_n fg converge a f en los subcon-juntos compactos de I, para toda f 2 C (I)?.

Notese que hemos formulado problemas muy generales. Luego, no pode-mos aspirar a dar una respuesta completa a cada uno de ellos.

El objetivo de este trabajo es proporcionar una coleccion de ideas (algunos de ellas no totalmente nuevas) relacionadas con los problemas anterio-res. En cada caso se daran soluciones (al menos parciales).

Para simpli car, consideramos solo el caso del intervalo [0; 1). Pero las ideas que se presentaran aqu pueden ser utilizadas para estudiar problemas similares en los intervalos no compactos (1; 1) o (1; 1).

Todos los cap tulos contienen aportes originales. Cuando se incluye un resultado no nuestro, se agrega el nombre del autor y la referencia correspondiente. Esto le facilita al lector reconocer cuales son nuestros aportes.

Este trabajo esta estructurado en tres cap tulos.

Cap tulo 1

En el Cap tulo 1 presentamos algunas nociones basicas que seras uti-lizadas durante todo el trabajo. En particular, en la Seccion 1.1 se explican cuales son los propiedades principales que se necesitan sobre los pesos y como se construyen los espacios de Banach asociados. En particular, en el Teorema 1.3 se dan algunas condiciones su cientes para que una sucesion de operadores lineales y positivos est uniformemente acotada en un espacio pesado.

En la Seccion 1.2 se presentan varios modulos de continuidad: los tradi-cionales y los del tipo Ditzian-Totik y pesados. En esa seccion no se incluyen resultados nuevos, pero los conceptos que se introducen son necesarios para comprender algunos de los argumentos que se dan mas adelante.

En la Seccion 1.3 del Cap tulo 1 se presenta un isomor smo entre los espacios $C_{;1}[0; 1)$ y $C[0; 1]$. Observamos que, aunque las ideas (y las de-mostraciones) son simples, el isomor smo es esencial para el estudio de los operadores lineales y positivos en los espacios $C_{;1}[0; 1)$. En particular, hay un isomo smo isometrico entre el espacio de los operadores lineales y positivos en los espacios $C_{;1}[0; 1)$ y los operadores lineales y positivos en los espacios $C[0; 1]$. Luego, los resultados para $C[0; 1]$ pueden ser traslada-dos a los espacios $C_{;1}[0; 1)$ (cuando se trata de pesos continuos). Este hecho simple no ha sido explotado en los art culos dedicados a la approxi-macion mediante operadores lineales y positivos en intervalos o compactos. En Teorema 1.7 sintetiza el resultado principal de la seccion.

Para no incluir una larga lista de resultados que se pueden obtener bajo el isomor smo indicado en el parrafo anterior, en la Seccion 1.4 del Ca-p tulo 1, se da un breve resumen de algunos de los resultados principales que se conocen en el caso de la aproximacion mediante operadores lineales y positivos en los espacios $C[0; 1]$. Por otra parte, tal exposicion ayudar al lector a tener una idea de los resultados que uno desear a lograr, cuando se estudian problemas similares en los espacios pesados.

Cap tulo 2

En Cap tulo 2 se analizan problemas de tipos cualitativos. Como los resul-tados var an segun el tipo de espacio pesado que se estudie, hemos dedicado una seccion especial a cada uno de los espacios principales.

Recordemos que los resultados cualitativos son aquellos en los que se habla de la posibilidad de aproximar las funciones, sin estudiar la magnitud de los errores cometidos.

En la Seccion 2.1 se recuerda un teorema clasico de Korovkin. Este teo-rema ha sido el punto de partida para el estudio de la aproximacion mediante operadores lineales y positivos. En esencia se trata de lo siguiente: encontrar un conjunto minimal G tal que, de la a rmacion

$$\lim_{n\to\infty} L_n(g) = g; \qquad \text{para} \quad g \in G;$$

se in ere que

$$\lim_{n\to\infty} L_n(f) = f; \qquad \text{para} \quad f \in F;$$

donde F es el dominio comun donde se estudian los operadores y el l mite se considera en la norma. Esta claro que, si se cumple la ultima propiedad, entonces $\{L_n\}$ es un proceso de aproximacion y, por lo tanto, tenemos una respuesta a rmativa para las preguntas presentadas al inicio.

Los casos mas interesantes se tienen cuando la familia G es nita.

En la Seccion 2.2 analizamos las funciones de prueba de Kokovkin para los espacios C [0; 1). Recordemos que en estos espacios solo se pide la acotacion del producto (x)f(x). Esto complica el estudio. Nuestro aporte fundamental para estudiar el problema en estos espacios es el utilizar ar-gumentos de naturaleza topologica. En particular, hacemos uso de la com-pacti cacion de Stone-Cech del intervalo [0;). Con ello, modi cando los argumentos claves del Cap tulo anterior, relacionamos los operadores linea-les y positivos sobre C [0; 1), con los operadores lineales y positivos sobre C ([0; 1)), donde [0; 1) es compacti cacion de Stone-Čech del intervalo [0; 1). Esto no permite obtener un buen resultado: para los espacios C [0; 1) no existen sistemas nitos de Korovkin (Teorema 2.7). Este resultado nega-tivo no niega que para algunas sucesiones especiales se puedan tener sistemas nitos de Korovkin.

Otro problema interesante relacionado con los espacios C [0; 1) es re-conocer las funciones sobre las cuales puede hacer convergencia en norma. Se veri ca que, para algunas sucesiones de operadores lineales y positivos $\{L_n\}$ sobre C [0; 1), la convergencia en norma de $L_n(f)$ a f implica ciertas propiedades sobre la continuidad de f. Sobre este tema tambien se incluye un resultado en la Seccion 2.2. En particular, se encuentra una funcion G de forma que la composicion (f)(G) debe ser uniformemente continua (Teorema 2.11). El resultado es demasiado tecnico como para explicarlo aqu en detalle.

En la Seccion 2.3 analizamos las funciones de prueba de Kokovkin para los espacios C $_{;1}$[0; 1) (funciones f para las cuales f tiene l mite nito en el in nito). En este caso existen sistemas de prueba (de Korovkin) con tres funciones. Uno de ellos es presentado en el Teorema 2.15. Los sistemas de Korovkin con tres funciones son caracterizados en el Teorema 2.16. En los Teoremas 2.17 y 2.18 se considera el caso particular de los sistemas de funciones de prueba que incluyen a las funciones e_0(x) 1 y e_1(x) = x.
Estos ultimos sistemas son importantes cuando se estudian sucesiones de operadores lineales y positivos que reproducen a las funciones lineales.

Para obtener los resultados se hace amplio uso del isomor smo establecido en el Cap tulo 1.

En la Seccion 2.4 analizamos las funciones de prueba de Kokovkin para los espacios C_{uc} [0; 1) (el producto f es una funcion uniformemente con-tinua). En este caso la situacion es tambien bastante complicada. En parti-cular, en el Teorema 2.21 se demuestra que en los espacios C_{ucb}[0; 1) (= 1) no existen sistemas nitos de Korovkin. Como una alternativa, en el Teorema 2.23 se proporcionan algunos sistemas especiales de Korovkin para C_{ucb}[0; 1).

Para lograr una discusion lo mas completa posible, en la Seccion 2.5 consideramos problemas relacionados con la convergencia puntual y la con-vergencia uniforme sobre los subconjuntos compactos. En esa seccion el unico resultado nuevo se presenta en el Teorema 2.24.

Cap tulo 3

El Cap tulo 3 esta dedicado al estudio de problemas cuantitativos. En particular se estudia la velocidad de convergencia de procesos aproximativos. Esto es, lo que se suelen llamar teoremas directos.

En la Seccion 3.1 se presentan algunos resultados conocidos. La bi-bliograf a sobre el tema es extensa y no prentendemos presentar aqu un compendio de todos los trabajos. Hemos seleccionados algunos de ellos que se aproximan en forma y esp ritu a lo que deseamos. Esto ayudar al lec-tor a comprender la relacion de nuestros aportes con los estudios de otros investigadores.

En la Seccion 3.2 se incluyen nuestros aportes a la presentacion de teore-mas cuantitativos en espacios pesados. Debido a los resultados del Cap tulo 2, limitamos el estudio a los espacios C $_{;1}$[0; 1). La idea fundamental es considerar nuevamente el isomor smo lineal y positivo. Con esto solo necesitamos estudiar problemas similares en espacios de funciones continuas sobre un intervalo compacto. En este caso los resultados se obtienen de forma simple, pero tenemos un problema. Uno necesita interpertar, en terminos del espacio original, expresiones que aparecen formuladas en terminos de otros espacios. Es por eso que dedicamos un tiempo a encontrar expresiones equivalentes, para los modulos de continuidad, que se describan utilizando solamente los objetos del espacio original. El resultado sobre estimados de la velocidad de convergencia se presenta en el Teorema 3.6.

La Seccion 3.3 se incluye solo por completitud. En ella se presenta un resultado sobre estimados de velocidad convergencia sobre los subconjuntos compactos.

Cap tulo 4

En el Cap tulo se estudian con mas detalles resultados generales para el caso en que los pesos son de tipo polinomial.

En las Seccion 4.1, en particular, en el Teorema 4.1 se da un estimado directo en terminos de una K-funcional. En el Teorema 4.3 los resultados se traducen en terminos de modulos de continuidad, para la aproximacion en norma y la aproximacion puntual.

La Seccion 4.2 esta dedicada a presentar ejempos concretos de sucesiones de operadores lineales y positivos, para el estudio de las cuales podemos podemos utilizar la teor a general desarrollada. En particular, en el Teorema 4.4 se consideran los operadores de tipo Baskakov en espacios con pesos polinomiales. En el Teorema 4.5 se considera la misma situacion, pero para los operadores de Szasz-Mirakyan. Finalmente, en los Teoremas 4.6 y 4.7 estudiamos los operadores de Phillips y ciertos operadores introducidos por Abel e Ivan.

En el trabajo se incluyen algunos problemas para los cuales no pudimos encontrar solucion. los formulamos para dar una idea de algunas de las posibles investigaciones futuras.

Los aportes fundamentales se pueden resumir como sigue:

(i) El uso de homeomor smo positivos para reducir el analisis de ciertos problemas, en espacios pesados, al estudio de problemas similares en el espacio C[0; 1].

(ii) La elaboracion de un metodo para traducir modulos de suavidad de - nidos en C[0; 1] a modulos correspondientes a los espacios pesados.

(iii) La presentacion de funciones de pruebas naturales, que no hab an sido consideradas antes, para los espacios pesados C $_{;1}$[0; 1).

(iv) El reconocer que en los espacios C [0; 1) y C_{ucb}[0; 1) no existen sis-temas de Korovkin nitos.

(v) La presentacion de estimados directos y estimados inversos (fuertes) para operadores lineales y positivos generales en el caso de los espacios con pesos polinomiales.

Los resultados presentados en este trabajo (y otros que no incluimos para simpli car la exposicion) has sido publicados en tres art culos. Estos son

(i) J. Bustamante y L. Morales de la Cruz, Korovkin type theorems for weighted approximation, Int. Journal of Math. Analysis, Vol. 1,26 (2007), 1273-1283.

(ii) J. Bustamante y L. Morales de la Cruz, Positive linear operators and continuous functions on unbounded intervals, Jaen J. Approx., 1 (2) (2009), 145-173.

(iii) J. Bustamante J. M. Quesada y L. Morales de la Cruz, Direct estimate for positive linear operators in polynomial weighted spaces, J. Approx. Theory, 162 (8) (2010), 1495-1508.

El primer trabajo ha sido citado en [52], [53] y [60].
El segundo trabajo ha sido citado en [3], [52], [54] y [67].
El tercer trabajo [14] ha sido citado en [52] y [67].

1

Espacios Pesados y Modulos de Continuidad

En este trabajo se estudian problemas relacionados con la aproximacion mediante sucesiones de operadores lineales.

Recordemos si E y F son espacios lineales un operador : E ! F se dice lineal si, cualesquiera sean x; y 2 E y ; 2 R se cumple que

$$(x + y) = (x) + (y):$$

Ademas, si los espacios son normados, el operador es continuo si existe una constante K tal que, para todo x 2 E

$$k (x)k_F Kkxk_E:$$

En las aplicaciones que se veran los espacios E y F coinciden. En tal caso, como es usual, denotaremos la norma de los operadores por kL_nk. Esto es

$$kL_nk = \sup f\ kL_n(x)k_E : kxk_E \quad 1\ g :$$

Durante todo el trabajo utilizamos las notaciones siguientes:

Mediante C[a; b] se denota al espacio de todas las funciones reales y con-tinuas de nidas sobre el intervalo [a; b], con la norma del supremo. Esto es, si f 2 C[a; b], entonces

$$kfk_1 = \sup_{x2[a;b]} j\ f(x)\ j :$$

1.1 Pesos y espacios pesados

Para la presentacion de los modulos de continuidad pesados necesitamos de algunas funciones pesos.

En esta seccion : [0; 1) ! R denota una funcion continua ja tal que

(x) > 0; para toda x 2 [0; 1):

A las funciones de este tipo le llamaremos peso.

A cada funcion peso se le pueden asociar varios espacios funcionales distintos.

Se denotar por B [0; 1) al espacio de todas las funciones f : [0; 1) ! R para las cuales

kfk = sup f (x) j f(x) j : x 2 [0; 1) g < 1: (1.1)

Es facil veri car que B [0; 1), con la norma (1.1), es un espacio de Banach. Para las funciones continuas consideramos el espacio

C [0; 1) = B [0; 1) \ C[0; 1);

con la norma inducida por B [0; 1). Es claro que C [0; 1) tambien es un espacio de Banach.

De forma analoga, para los funciones uniformemente continuas se consi-dera el espacio

C_{uc} [0; 1) = C_{uc}[0; 1) \ B [0; 1):

En algunos problemas necesitamos considerar solamente funciones que tiene l mite en el in nito. Para estos casos se introducen los espacios siguien-tes:

$C_{;1}$[0; 1) = ff 2 C [0; 1) : f tiene l mite nito en 1g .

Ademas consideraremos el espacio

$C_{;0}$[0; 1) = ff 2 C [0; 1) : $\lim_{x!1}$ (f)(x) = 0g :

Por supuesto, los espacios

C [0; 1); $C_{;0}$[0; 1); $C_{;1}$[0; 1) y C_{uc} [0; 1) son considerados como subespacios normados de B [0; 1).

Para el caso de los operadores lineales y positivos, los espacios utilizados con mayor frecuencia estan asociados a los pesos

$$(x) = \;;\; (x) = \frac{x}{(1 + x)} \;;\; \text{para} \;\; > 0 \text{ y } \; 2\ (0; 1)\;; \qquad (1.2)$$

$$(x) = \;\; (x) = \frac{1}{1 + x}\;; \quad \text{para} \;\; > 0: \qquad (1.3)$$

y

$$(x) = \exp(\;\; x): \qquad (1.4)$$

>Cuando estudiamos de operadores lineales y positivos, que propiedades debe tener un peso? Empezamos presentado una modi cacion de algunas ideas dadas por Dogru en [29].

Dada f 2 C[0; 1), consideremos una funcion de tipo maximal de nida por

$$(f; x) = \sup f \; j\, f(t)\, j : t\ 2\ [0; x] g :$$

En [29] en lugar de la norma de (1.1) se consider la expresion siguiente:

$$kfk \;=\; \sup_{x \;\; 0} \;\; (x) \;\; (f; x): \qquad (1.5)$$

Sea

$$D\ [0; 1) = f\ f\ 2\ C[0; 1) : kfk < 1g:$$

Como

$$kfk \qquad kfk \qquad (f\ 2\ C[0; 1));$$

entonces

$$D\ [0; 1) \qquad C\ [0; 1):$$

Algunas ventajas de la norma (1.5) se dan en el Teorema 1.1.

Teorema 1.1 Sea un peso arbitrario.

(i) Existe un peso decreciente para el cual D [0; 1) = D [0; 1) y

$$kfk = kfk\;;$$

para f 2 D [0; 1).

(ii) Si existe una contante C tal que, para 0 y x < 1, (x) C (y), entonces C [0; 1) = D [0; 1) con normas equivalentes.

Demostracion. (i) De namos

$$(x) = \sup \left(\frac{(f; x)}{k \ k} \right) : f \ 2 \ D [0; 1); f \ 6= 0 \tag{1.6}$$

y

$$(x) = \frac{1}{(x)}:$$

Como

$$(x) \ (f; x) \qquad kfk$$

para f 2 D [0; 1), esta bien de nida y (x) (x) (para cualquier x 0, existe g 2 D [0; 1) de tal manera que (g; x) > 0). Por tanto

$$D [0; 1) \qquad D [0; 1) \qquad y \quad kgk \qquad kgk \ ;$$

para g 2 D [0; 1).

Veamos que es una funcion creciente . Si 0 x < y y " > 0 es arbitrario, entonces, existe g 2 D [0; 1) (g 6= 0) tal que

$$(x) < " + \frac{(g; x)}{kgk} :$$

Por lo tanto

$$(x) < " + \frac{(g; x)}{kgk} \quad " + \frac{(g; y)}{kgk} \ " + \ (y):$$

Por otra parte, si g 2 D [0; 1) (g 6= 0), entonces

$$(x) \ (g; x) \quad (x) \sup \left(\frac{(f; x)}{k \ k} \right) : f \ 2 \ D [0; 1); f \ 6= 0 \ kgk = kgk :$$

Se in ere de lo anterior que D [0; 1) D [0; 1) y kgk kgk , para g 2 D [0; 1).

Finalmente, ya que (f; x) es creciente, es creciente, as decrece.

(ii) Primero, asumamos que f 2 D [0; 1). Entonces, para cualquier x 2 [0; 1)

(x) j f(x) j (x) (f; x) kfk :

As f 2 C [0; 1) y kfk kfk .

Por otra parte, si g 2 C [0; 1) entonces,

(x) (g; x) = (x) sup (y) (y); 0 y x
g(y)

C

(x) sup (y) j g(y) j (x) ; 0 y xCkgk :

As g 2 D [0; 1).

Problema 1 >Para que pesos se tiene C [0; 1) = D [0; 1) con normas equivalentes?

No sabemos la respuesta general para el Problema 1, pero en casi todos los art culos dedicados a la aproximacion pesada, los pesos satisfacen la condicion asumida en la parte (ii) del Teorema 1.1.

No sabemos si la funcion de nida en (1.6) es continua. La seleccion de pesos continuos simpli can algunos problemas. Por ejemplo, el siguiente teorema es facil de demostrar .

Teorema 1.2 (Gadjiev, [41]) Sea un peso continuo y L : C [0; 1) ! C[0; 1) un operador lineal positivo. Entonces L : C [0; 1) ! C [0; 1) y L esta acotado si y solo si L(1=) 2 C [0; 1).

Problema 2 Sea F un subespacio lineal de $R^{[0;1)}$ y L_n : F ! C[0; 1) una sucesion de operadores lineales positivos. >Para que pesos y una sucesion de operadores lineales y positivos se tiene que

L_n : C [0; 1) \ F ! C [0; 1);

y la sucesion de las normas fk$L_n$kg esta uniformemente acotada?

En el resultado que sigue, se presenta una condicion su ciente para ob-tener una respuesta positiva al Problema 2. Luego veremos cuales pesos de los presentados en las ecuaciones (1.2) - (1.4) satisfacen las condiciones de la Proposicion 1.3. En el Teorema 1.4 se da una aplicacion concreta de los resultados.

Teorema 1.3 Sea un peso continuo tal que la funcion 1= es convexa. Sea F un subespacio lineal de $R^{[0;1)}$ y $fL_n g$, L_n : F ! R, una sucesion de operadores lineales y positivos con la propiedad siguiente: para cada funcion convexa f 2 F y toda x 2 [0; 1),

$$f(x) \quad L_{n+1}(f; x) \quad L_n(f; x) : \qquad (1.7)$$

Si

$$C [0; 1) \quad Fy \qquad L_1(1=) \; 2 \; C [0; 1); \qquad (1.8)$$

entonces

$$L_n : C [0; 1) \; ! \; C [0; 1)$$

y

$$\sup_{n2N} kL_n k \qquad < 1 :$$

Demostracion. Segun el Teorema 1.2, para la primera a rmacion basta veri car que, para cada n 2 N, $L_n(1=)$ 2 C [0; 1). Como 1= 2 F y esta funcion es convexa, se sigue de (1.7) que

$$1 = \; (x)^{(x)L}{}_{n+1} \quad (x); x \qquad \frac{(x)}{} \qquad \frac{1}{}$$

$$(x)L_1 \qquad ; x_{\frac{1}{}} \qquad L_1 \qquad {}_{\frac{1}{}} \qquad < 1 ;$$

donde la ultima a rmacion se sigue de la segunda condicion en (1.8).

Por otro lado, para cada f 2 C [0; 1) y n 2 N, considerando que L_n es un operador positivo, se obtiene que

$$(x) \; j \; L_n(f; x) \; j = \; (x) \; L_n \qquad {}_{\frac{1}{}} \qquad f; x$$

$$(x)L_n \quad \frac{1}{\ }; x \quad kfkL_1 \quad \frac{1}{\ } \quad k T k :$$

Esto prueba que

$$\sup_{n2N} kL_nk = kL_1k < 1 ;$$

ya que, segun el Teorema 1.2, $kL_1k < 1$.

Proposicion 1.1 Sea > 0.

(i) El peso

$$(x) = \frac{1}{1 + x} \; ; \quad x\ 2\ [0; 1);$$

es una funcion continua y la funcion 1= (x) es convexa si y solo si 1.

(ii) El peso

$$(x) = \exp(x); \quad x\ 2\ [0; 1);$$

es una funcion continua y la funcion 1= (x) es convexa si y solo si 1.

Demostracion. (i) La continuidad es evidente. Por otro lado, como

$$\frac{1}{(x)} = 1 + x \; ;$$

y

$$(1 + x)^{(2)} = (\quad 1)x \; ^{2}; \qquad x > 0;$$

se tiene que 1= (x) es una funcion convexa si y solo si1.

(ii) La continuidad es evidente. Por otro lado, como

$$\frac{1}{(x)} = \exp(x);$$

y, para $x > 0$,

$$(\exp(x))^{(2)} = \exp(x)\ x \; ^{2}(\quad 1 + x)$$

se tiene que 1= (x) es una funcion convexa si y solo si1.

Veamos un ejemplo.

Para f 2 $R^{[0;1)}$, los operadores de Szasz-Mirakyan ([72] y [63]) estan de nidos por

$$_{x}{}^{1}\ f \quad \frac{k}{}(\quad \frac{nx^{K}}{} \qquad (1.9)$$

siempre que la serie sea convergente.

Teorema 1.4 Sea1 y

$$(x) = \frac{1}{1+x}; x \in [0; \infty);$$

Si $\{S_n\}$ es la sucesion de los operadores de Szasz-Mirakyan de nidos en (1:9), entonces $S_n : C [0; \infty) \to C [0; \infty)$ y la sucesion $\{\|S_n\|_{C [0;\infty)}\}$ esta acotada si y solo si $S_1(1=) \in C [0; \infty)$.

Demostracion. Para los operadores de Szasz-Mirakyan, Cheney y Sharma [15] veri caron la condicion (1.7). Segun la Proposicion 1.1, se tiene que 1= es una funcion convexa. Luego el resultado se sigue directamente del Teorema 1.3, si veri camos las condiciones dadas en (1.8). Pero esto fue realizado por Becker en [8].

Segun Amanov [5], para los operadores de Szasz-Mirakyan $\{S_n\}$, la condicion

$$\sup_{x \geq 0} \frac{(x)}{(x+\sqrt{x})} < \infty \tag{1.10}$$

es necesaria y su ciente para la acotacion uniforme de las normas de los ope-radores $S_n : C [0; \infty) \to C [0; \infty)$. Si $(x) = \exp(x)$ ($>$ 0), la condicion (1.10) se cumple si y solo si 1=2. Si comparamos esta desigualdad con la Proposicion 1.1, concluimos que las suposiciones del Teorema 1.3 son su cientes, pero no necesarias, para la acotacion uniforme de los operadores.

En el ultimo cap tulo se consideran pesos polinomiales. El resultado que sigue muestra dos de las formas equivalentes de considerar estos pesos.

Proposicion 1.2 Supongamos que los pesos y $_1$ estan de nidos por

$$(x) = \frac{1}{(1+x)^m}; \qquad x \in [0; \infty) \tag{1.11}$$

y

$$_1(x) = \frac{1}{1+x^m}; \qquad x \in [0; \infty): \tag{1.12}$$

respectivamente, donde $m \in \mathbb{N}$. Entonces $C [0; \infty) = C_1 [0; \infty)$ y existen constantes positivas C_1 y C_2 tales que, cualquiera sea $f \in C [0; \infty)$

$$C_1 \|f\| \quad \|f\|_1 \quad C_2 \|f\| :$$

Demostracion. Es suficiente observar que, segun la formula del binomio de Newton,

$$1 + x^m \leq (1 + x)^m.$$

Por otro lado, para $x \geq 1$

$$(1 + x)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^k \leq x^m \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} = 2^m x^m \leq 2^m(1 + x^m)$$

y, para $0 \leq x \leq 1$,

$$(1 + x)^m \leq 2^m \leq 2^m(1 + x^m).$$

1.2 Modulos de continuidad

Si $f \in C[a; b]$ el (primer) modulo ω_1 de continuidad de f se define, para $t \in (0; b - a]$, como

$$\omega_1(f; t) = \sup_{x; y \in [a; b]; |x - y| \leq t} | f(x) - f(y) | . \tag{1.13}$$

Para $f : [a; b] \to \mathbb{R}$, $t > 0$ y $x \in [a; b]$ tal que $x \pm t \in [a; b]$, se define la diferencia simetrica de primer orden mediante la expresion:

$$\Delta_h f(x) = f(x + h) - f(x - h).$$

En cualquier otro caso se define $\Delta_h f(x) = 0$.

Con la ayuda de las diferencias simetricas el modulo de continuidad de primer orden se reescribe en los terminos siguientes:

$$\omega_1(f; t) = \sup_{0 < h \leq t/2} \ \sup_{x \pm h \in [a; b]} | \Delta_h f(x) | .$$

En las Proposiciones 1.3 y 1.4 recolectamos algunas propiedades conocidas de los modulos de continuidad. Para las demostraciones ver [22], [23] o [66].

Proposicion 1.3 Sea $f \in C[a; b]$ y $\omega_1(f; t)$ su modulo de continuidad de primer orden.

(i) Para $0 < s < t$, se tiene que $!_1(f; t)$ 0 y $!_1(f;$

$s) !_1(f; t):$

(ii) Si es un entero positivo, entonces

$$!_1(f; \ t) \quad !_1(f; t): \tag{1.14}$$

(iii) Si ; $t > 0$, entonces

$$!_1(f; \ t) \qquad (1 + \ )!_1(f; t):$$

(iv) $!_1(f; t)$ es una funcion continua de la variable t.

(v) $!_1(f; t) = 0$ para algun $t > 0$ si y solo si f es una funcion lineal.

Proposicion 1.4 Para cada $t > 0$ jo, la funcion $U : C[a; b] ! R$ de nida por $U(f) = !_1(f; t)$ es una seminorma en $C[a; b]$.

La de nicion siguiente nos ayudar a de nir los modulos de suavidad de diferentes ordenes, considerando a $I = [0; 1]$.

De nicion 1.1 Sea f 2 $C_b(I)$, para toda x 2 I, h 2 R, h 6= 0 y r 2 N la diferencia de orden r con paso h de f en x se de ne como

$$_h{}^r f(x) := \quad r \qquad k \ \ f(x + kh) \tag{1.15}$$

$$X$$

si x + kh 2 I. En caso contrario se de ne como cero.

Para abreviar, pongamos $_h f(x) := \ ^1{}_h f(x) = f(x + h) \ \ f(x)$.

Dado un intervalo abierto $I = (a; b)$, diremos que una funcion ' : I ! R^+ es un peso admisible si se cumplen las condiciones siguentes:

(i) Si $[c; d]$ es un intervalo compacto contenido en I, entonces existe una constante positiva $M = M(c; d)$ tal que, para x 2 $[c; d]$, $1=M$ '(x) M.

(ii) La funcion ' es medible y existen constantes M_0 y h_0 de forma que, para $0 < h$ h_0 y todo intervalo nito J I se cumple que

$$\text{meas}(fx : x \quad h'(x)\ 2\ Jg) \qquad M_0\text{meas}(J):$$

(iii) Si a = 0 y b = 1, existen dos numeros (0) 0 y (1) 1, de forma que

$$'(x) \quad \begin{cases} x^{(0)} & \text{cuando} \quad x\ !\ 0; \\ x^{(1)} & \text{cuando} \quad x\ !\ 1: \end{cases}$$

Si a = 0 y b = 1, existen dos numeros no negativos (0) y (1), tales que

$$'(x) \quad \begin{cases} x^{(0)} & \text{cuando} \quad x \ !\ 0; \\ (1 \quad x)^{(1)} & \text{cuando} \quad x \quad 1: \end{cases}$$

Si a = 1 y b = 1, existen dos numeros (1) 1 y (1) 1, de forma que

$$'(x) \quad \begin{cases} jxj^{(\ 1)} & \text{cuando} \quad x\ !\ \ 1; \\ x^{(+1)} & \text{cuando} \quad x\ !\ 1 \end{cases}$$

Se puede veri car que las funciones '(x) = p x(1 x), '(x) = p x y '(x) = p (1 x) son admisibles para los intervalos (0; 1), (0; + 1) y (0; 1) respectivamente.

De nicion 1.2. Dado un intervalo I, una funcion peso admisible ' y f 2 C_b(I) el modulo de suavidad pesado de orden r de f se de ne como

$$!_r^{'}(f;t) = \sup_{h2(0;t]} \sup_{x2I} j \ {}^r_{h'(x)} f(x)\ j; \tag{1.16}$$

donde denota la diferencia simetrica de orden r. Ademas, $!_r^{'}(f;0) = 0$.

Para '(x) = $\sqrt{x(1+ax)}$, con a 2 N [f0g, 2 [0; 1] y f 2 C (I), usaremos el modulo de suavidad de nido por

$$!^2_{'}(f;t) = \sup_{h2(0;t]} \sup_{x2I(' ;h)} j\ (x)\ {}^2_{h'(x)} f(x)j \tag{1.17}$$

donde

$$I(\varphi; h) = \{x > 0 : h\varphi(x) \quad x\}.$$

Se puede probar que $\lim_{t \to 0^+} \omega^2_{\varphi}(f; t) = 0$, cuando $f \quad C_{;1}[0; \quad 1)$.

Para $\quad 2 (0; 1]$ y $f \; 2 \; C (I)$, consideramos la K-funcional

$$K \; (f; t) = \inf \{ \|f \quad g\| + t\|\varphi^2 g''\| ; \qquad g' \; 2 \; A.C._{loc} \}. \tag{1.18}$$

Aqu (y en lo sucesivo) para las funciones $g' \; 2 \; A.C._{loc}$ la norma $\|\varphi^2 g''\|$ es considerada en $L_1(0; 1)$.

Recordemos algunas de niciones conocidas:

$$K^2(f; t^2) = \inf_{g' \, 2 AC_{loc}[0;1)} (\|f \quad g\| + t^2 \|\quad^2 g''\|); \tag{1.19}$$

$$! \quad f; t \quad \sup_{jhj \, t \;\; x \;\; (h=2) \; (x)2[0;1)} \sup \quad f \quad x \quad x \; \frac{h}{2} \quad f \quad x \quad x \; \frac{h}{2}$$

$$! \quad f; t \quad \sup_{jhj \, t \quad x;x+h \; (x)2[0;1)} |f\,x \quad x \quad h) \quad f\,x\;)| : \tag{1.20}$$

1.3 Un isomor smo lineal y positivo

Denotemos

$$(y) = \frac{y}{1 \quad y} ; \qquad y \; 2 \; [0; 1): \tag{1.21}$$

Es claro que la funcion establece un homeomor smo entre $[0; 1)$ y $[0; 1)$, con funcion inversa

$$^{1}(x) = \frac{x}{1 + x} ; \qquad x \; 2 \; [0; 1): \tag{1.22}$$

Dado un peso , para $f \; 2 \; C_{;1}[0; 1)$ de namos

$$(f; y) = \begin{cases} (\;(y))f(\quad(y)); & \text{si} \quad y \; 2 \; [0; 1); \\ \lim_{z \to 1} \; (z)f(z); & \text{si} \quad y = 1: \end{cases} \tag{1.23}$$

En esta seccion veremos algunas propiedades del operador M de nido en (1.23).

Proposicion 1.5 Sea : [0; 1) ! (0; 1) un peso continuo. Para toda f 2 C ;1[0; 1), se tiene que (f) 2 C[0; 1], donde el operador esta de nido en (1:23).

Demostracion. Fijemos f 2 C ;1[0; 1). Como es continua, la funcion g(x) = (x)f(x) es continua en [0; 1). Luego g es continua en [0; 1). Ademas

$$\lim_{y!1} g((y)) = \lim_{x!1} (x)f(x) = (f; 1):$$

Esto es (f) 2 C[0; 1].

Teorema 1.5 Sea : [0; 1) ! (0; 1) un peso continuo.

(i) El operador : C ;1[0; 1) ! C[0; 1], que asocia a cada f 2 C ;1 [0; 1) la funcion (f) de nida en (1:23), es lineal y tiene inverso.

(ii) Para g 2 C[0; 1] y x 2 [0; 1),

$$_1(g; x) = \frac{g(\,_1(x))}{(x)}:$$

(iii) Los operadores y ^{1} son positivos.

Demostracion. La prueba de la linealidad de es simple. Para obtener el inverso de namos N : C[0; 1] ! C[0; 1) mediante la regla

$$N(g; x) = \frac{g(^1(x))}{(x)}; \quad x 2 [0; 1); \; g 2 C[0; 1]:$$

Notese que, como ^{1} : [0; 1) ! [0; 1) es una funcion continua y > 0, se tiene que N(g) 2 C[0; 1).

Si g 2 C[0; 1],

$$\lim_{x!1} (x)N(g; x) = \lim_{x!1} g(^1(x))$$

$$= \lim_{x \to 1} \; g\left(\frac{1+x}{x}\right) = g(1).$$

De aqu se sigue que la funcion $N(g; x) \in C_{;1}[0; 1)$. Ademas, para $x \in [0; 1)$

$$(N(g); x) = ((x))N(g; (x))$$
$$= ((x)) \frac{g(_1((x))}{((x))} = g(x).$$

Para $x = 1$,

$$(N(g); 1) = \lim_{x \to 1} (x)N(g; x) = g(1).$$

Esto prueba que el operador $: C_{;1}[0; 1) \to C[0; 1]$ es suprayectivo y

$$(N(g)) = g.$$

Por otro lado, si $f \in C_{;1}$ y $x \in [0; 1)$, entonces

$$N((f); x) = \frac{(f; ^{1}(x))}{(x)}$$
$$= \frac{1}{} ((^{1}(x))f((^{1}(x)) (x))$$
$$= f(x).$$

Segun lo anterior, $N = ^{1}$.

Finalmente, como $(x) > 0$, se sigue que los operadores y ^{1} son positivos.

El teorema anterior se re ere solo a los aspectos lineales relacionados con los espacios $C_{;1}[0; 1)$ y $C[0; 1]$. A continuacion veamos propiedades asociadas a las normas.

Teorema 1.6 Para cualquier peso continuo $: [0; 1) \to (0; 1)$, el operador $: C_{;1}[0; 1) \to C[0; 1]$ de nido en el Teorema 1:5 es una isometr a.

Demostracion. Fijemos $f \in C_{( )}[0; 1)$. Segun (1.1)

$$\|f\| = \sup_{x \geq 0} (x) | f(x) |$$

$$= \sup_{y2[0;1)} ((y)) \, j \, f(\quad (y)) \, j$$
$$= \sup_{y2[0;1)} j \; (f; y) \, j$$
$$= \sup_{y2[0;1]} j \; (f; y) \, j$$
$$= k \; (f)k:$$

Teorema 1.7 Sea : [0; 1) ! (0; 1) un peso arbitrario y : C $_{;1}$[0; 1) ! C[0; 1] el operador de nido en el Teorema 1:5.

Un operador lineal L : C $_{;1}$[0; 1) ! C $_{;1}$[0; 1) es positivo si y solo si el operador L : C[0; 1] ! C[0; 1] dado por

$$L \; (g) = (\quad L \quad ^{1})(g); \quad g \; 2 \; C[0; 1]:$$

es positivo. Ademas, para f 2 C $_{;1}$[0; 1), se tiene que

$$kf \quad L(f)k = k \; f \quad L \; (\; f)k_1: \tag{1.24}$$

Para presentar teoremas directos necesitamos modulos de continuidad adecuados. Segun los resultados que se veran en la Seccion 1.3, la forma mas natural de de nir modulos de continuidad sobre C $_{;1}$[0; 1) es considerar los modulos usuales en C[0; 1].

De nicion 1.3 Para f 2 C $_{;1}$[0; 1), t 2 (0; 1] y s 2 (0; 1=2] el primer y segundo modulo de continuidad se de nen respectivamente como

$$!_1(f; t) = !_1(Mf; t) \tag{1.25}$$

y

$$!_2(f; s) = !_2(Mf; s); \tag{1.26}$$

donde M es el operador de nido segun (1:23).

Los modulos dados en la de nicion anterior son su cientes para estudiar los problemas mas simples de aproximacion mediante operadores lineales y positivos en los espacios C $_{;1}$[0; 1).

1.4 Algunas consideraciones historicas

Para $n \in \mathbb{N}$, $f \in C[0;1]$ y $x \in [0;1]$, el operador de Bernstein de orden n se define como

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}. \tag{1.27}$$

En [26] Ditzian demostr que, para $\lambda \in [0;1/2]$ y $\varphi(x) = (x(1-x))^{1/2}$, existe una constante C_λ, tal que, para $f \in C[0;1]$ y $x \in (0;1)$,

$$|f(x) - B_n(f;x)| \le C_\lambda\, \omega^2_{\varphi^\lambda}\left(f; \frac{\sqrt{x(1-x)}}{\sqrt{n}\,\varphi^\lambda(x)}\right) \tag{1.28}$$

donde $\omega^2_{\varphi^\lambda}(f;t)$ esta definido segun (1.16) con $I = [0;1]$.

(i) Cuando $\lambda = 0$, el modulo pesado (1.16) coincide con el modulo clasico de continuidad de segundo orden. En este caso, la desigualdad (1.28) adquiere la forma

$$|f(x) - B_n(f;x)| \le C\,\omega^2\left(f; \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\right).$$

Notese que la desigualdad anterior da un estimado sobre convergencia puntual para los polinomios de Bernstein en la forma presentada por Strukov y Timan en [71].

(ii) Cuando $\lambda = 1/2$, la expresion en la parte derecha de (1.28) se simplifica (no depende de x) y se obtiene un estimado en norma. Esto es

$$\|f - B_n f\| = \sup_{x \in [0;1]} |f(x) - B_n(f;x)| \le C\,\omega^2_\varphi\left(f; \frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Este resultado aparecio por vez primera en [28] (pag. 117).

Varios autores han logrado generalizaciones de (1.28) basadas en modificaciones de la idea original de Ditzian. Por ejemplo, Felten en [33], en lugar de la funcion $\varphi(x) = (x(1-x))^{1/2}$ utilizada por Ditzian, consider una clase general de pesos. En particular, si $\varphi : [0;1] \to \mathbb{R}$ es una funcion peso admisible para el modulo de Ditzian-Totik, tal que φ^2 es una funcion concava, entonces se cumple que

$$|f(x) - B_n(f;x)| \le C\,\omega^2_{\varphi}\left(f; \frac{\sqrt{x(1-x)}}{\sqrt{n}\,\varphi(x)}\right) \qquad (1.29)$$

Un problema interesante es analizar si los resultados de Ditzian y Felten, dados solo para los operadores de Bernstein, se pueden extender a una clase mas amplia.

Un avance en el estudio de este problema se encuentra en un trabajo de Finta [36]. En particular, dada una sucesion de operadores lineales positivos $L_n : C[0;1] \to C[0;1]$, el presento un conjunto de condiciones sobre $\{L_n\}$ para que sea valida una una desigualdad del tipo

$$|f(x) - L_n(f;x)| \le C\,\omega^2_{\varphi}\left(f; \frac{\sqrt{x(1-x)}}{\sqrt{n}\,\varphi(x)}\right); \quad f \in C[0;1] \ \text{y} \ x \in [0;1]:$$

¿Que se conoce en el caso de aproximacion de funciones continuas sobre intervalos no compactos?

En 1978 Becker [8] estudio los operadores de Baskakov y Szasz-Mirakyan en espacios pesados polinomiales. Despues de ello, han aparecido varios artículos dedicados al estudio de las propiedades aproximativas de sucesiones de operadores lineales y positivos en espacios pesados polinomiales.

En el Teorema 4.3 vamos a presentar algunas condiciones, sobre una sucesion de operadores lineales y positivos $\{L_n\}$, las cuales garantizan que el error

$$w(x)\,|f(x) - L_n(f;x)|$$

puede ser estimado en terminos de modulos de continuiudad pesados. En particular estamos buscando estimaciones similares a (1.29). Esto es, una desigualdad del tipo

$$w(x)\,|f(x) - L_n(f;x)| \le C\,\omega^2_{\varphi}\left(f; \sqrt{n}^{\,-1}\right)(x) : \qquad (1.30)$$

2

Teor a Cualitativa

2.1 El teorema clasico de Korovkin

Como indicamos antes, una de las motivaciones fundamentales para el estudio de los operadores lineales y positivos se deriva de un teorema de Korovkin.

Teorema 2.1 (Korovkin, [58]) Sea L_n : C[0; 1] ! C[0; 1] una sucesion de operadores lineales y positivos. Si $L_n(e_i)$! e_i (i = 0; 1; 2), donde $e_i(x) = x^i$, entonces $L_n(f)$! f, cualquiera sea f 2 C[0; 1]

Una version mas general de las ideas contenidas en teorema anterior, se obtiene cambiando el conjunto de funciones e_i (i = 0; 1; 2) por un sistema de Chebyshev.

De nicion 2.1 Un conjunto nito S = ff_0; f_1; ; f_ng (n > 0) de fun-ciones continuas reales de nidas sobre un espacio topologico de Hausdor X, es un sistema de Chebyshev, si X contiene al menos n + 2 puntos y todo elemento f 2 C(X) tiene un unico elemento de la mejor aproximacion en el subespacio generado por el conjunto S.

De nicion 2.2 Un conjunto H C [0; 1) se llama un sistema de Ko-rovkin (con respecto a los operadores lineales y positivos) si, para cualquier red equicontinua de operadores lineales y positivos $(L_i)_{i2I}$ de C [0; 1) en C [0; 1) que cumpla $\lim_{i2I} L_i(h)$ = h para toda h 2 H, se veri ca que $\lim_{i2I} L_i(f)$ = f para toda f 2 C [0; 1) (ver [4] para mas informacion).

Al estudiar la aproximacion mediante operadores lineales y positivos en intervalos no compactos nos encontramos, de manera natural, con la pre-gunta siguiente: >existen sistemas nitos de Korovkin?. Esto es, >se puede demostrar un resultado similar al Teorema 2.1, cambiando el conjunto de funciones e_i (i = 0; 1; 2) por algun sistema de Chebyshev?. En este cap tulo discutiremos este tipo de problemas. Como se vera, las respuestas a las preguntas anteriores dependen de los espacios pesados que se consideren.

2.2 Los espacios C (I)

Comencemos con un teorema de Gadjiev

Teorema 2.2 (Gadjiev, [41]) Sea : R ! R una funcion continua y estric-tamente creciente y consideremos el peso

$$(x) = \frac{1}{1 + {}^2(x)}:$$

Supongamos, ademas, que

$$\lim_{x!\ 1} \quad (x) = 0 \qquad y \qquad (0) = 0:$$

De namos una sucesion de operadores lineales y positivos

$$L_n : C\,[0; 1) \qquad !\ B\,[0; 1)$$

en la forma siguiente: Si f 2 C [0; 1), entonces

$$L_n(f; x) = f(x); \quad si \qquad x\ 2 = [0; n]$$

y, para 0 x n,

$$L_n(f; x) = f(x) + \frac{n}{4\ (x)} \quad \frac{{}^2\ x}{{}^2(x + 1)} f(x + 1) \quad 2f(x) \qquad \frac{{}^2\ \ x}{{}^2(x + 2)} \quad f(x + 2) \ ;$$

Se tiene que, para k = 0; 1; 2,

$$k\ {}^k \quad L_n(\ {}^k)k\ !\ 0:$$

y, si f(x) = ^{2}(x) cos(x), entonces

$$kf \quad L_n(f)k \qquad {}^2(n)=(1 + \ {}^2(n)):$$

Bajos las notaciones del teorema anterior se tiene que las funciones ^{k}, k = 0; 1; 2, forman un sistema de Chebyshev. Luego, un analogo inmediato del teorema Korovkin para operadores lineales y positivos de C (R) en B (R) no se cumple en la norma B (R) (para el caso de operadores de C (R) en C (R) ver [40]).

El teorema anterior esta relacionado solo con un sistema de Chebyshev en particular. Nosotros logramos obtener un resultado mas general que fue publicado en [12]. Para la presentacion necesitamos algunas notaciones.

La compacti cacion Stone-Čech X de un espacio de Tikhonov X, es el elemento mayor (en el sentido de la inclusion) en la familia C(X) de todas las compacti caciones de X. El resultado siguiente es conocido. Como lo necesitaremos varias veces lo presentamos en forma exacta.

Teorema 2.3 (ver [31], Corolario 3.6.3)) Sea X un espacio de Tikhonov X y Y una compacti cacion de X. Las a rmaciones siguientes son equivalentes:

(i) El espacio Y es (homeomorfo a) la compacti cacion de Stone-Čech X;

(ii) Toda funcion continua y acotada g : X ! R tiene una (unica) extension continua a Y .

Para f 2 C [0; 1) de namos

$$H(f; y) = ((y))f((y)); \qquad y 2 [0; 1); \qquad (2.1)$$

donde es la funcion de nida en (1.21).

Denotemos por C_b[0; 1) al espacio de las funciones reales, continuas y acotadas en el intervalo [0; 1). En este espacio consideramos la norma del supremo.

Teorema 2.4 Sea un peso continuo. Consideremos el operador

$$H : C [0; 1) ! C[0; 1);$$

que asocia a cada f 2 C [0; 1) la funcion H(f) de nida en (2:1).

(i) Se tiene la relacion H(C [0; 1)) C_b[0; 1).

(ii) H : C [0; 1) ! C_b[0; 1) es lineal y tiene inverso H^{1}.

(iii) Para g 2 C_b[0; 1) y x 2 [0; 1),

$$H^{\ 1}(g; x) = \frac{g(\ \ _1(x))}{(x)}:$$

(iv) Los operadores H y $H^{\ 1}$ son positivos.

Demostracion. (i) De la de nicion de clase C [0; 1) se in ere que, si f 2 C [0; 1), entonces H(f) es una funcion acotada.

(ii) La prueba de la linealidad de H es simple.

Si f_1; f_2 2 C [0; 1) y H(f_1) = H(f_2), entonces

$$(\ (y))f_1(\ (y)) = (\ (y))f_2(\ (y));$$

para todo y 2 [0; 1). Pero esto puede ocurrir si y solo si $f_1(x) = f_2(x)$, para todo x 2 [0; 1). Esto demuestra que el operador H es inyectivo.

Para veri car la sobreyectividad de namos

$$N\ : C[0; 1)\ !\ C[0; 1)$$

mediante la regla

$$N(g; x) = \frac{g(\ ^1(x))}{(x)}\ ; \quad x\ 2\ [0; 1);\ \ g\ 2\ C[0; 1):$$

Notese que, como ^{1} : [0; 1) ! [0; 1) es continua y > 0, se tiene que N(g) 2 C[0; 1) y

$$\sup_{x2[0;1)} (x)\ j\ N(g; x)\ j = \sup_{x2[0;1)} j\ g(\ ^1(x))\ j = \sup_{y2[0;1)} j\ g(y)\ j< 1:$$

Ademas, para x 2 [0; 1),

$$H(N(g); x) = (\ (x))N(g;\ (x))$$

$$= (\ (x))\frac{g(\ _1(\ (x))}{(\ (x))} = g(x):$$

Esto prueba que H : C [0; 1) ! C[0; 1) es suprayectiva y

$$H(N(g)) = g:$$

Por otro lado, si f 2 C [0; 1) y x 2 [0; 1), entonces

$$N(Hf; x) = \frac{H(f; \ ^{1}(x))}{(x)} = \frac{1}{(x))} ((\ ^{1}(x))f((\ ^{1}(x)) = f(x):$$

Segun lo anterior N = H ^{1}.

Finalmente, como (x) > 0, se sigue que los operadores H y H ^{1} son positivos. El teorema anterior se re ere solo a los aspectos lineales relacionados con los espacios C [0; 1) y C_b[0; 1). A continuacion veamos propiedades asocia-das a las normas.

Teorema 2.5 Sea un peso continuo. El operador H : C [0; 1) ! C_b[0; 1) de nido en el Teorema 2:4 es una isometr a.

Demostracion. Fijemos f 2 C [0; 1). Segun (1.1)

$$kfk = \sup_{x \ 0} (x) \ j \ f(x) \ j = \sup_{y2[0;1)} ((y)) \ j \ f(\quad (y)) \ j$$

$$= \sup_{y2[0;1)} j \ H(f; y) \ j = k \ H(f) \ k:$$

Sea Y un subespacio cerrado de C [0; 1). Un subconjunto H de Y es llamado un sistema de Korovkin, con respecto a operadores positivos si, para cada red equicontinua $(L_i)_{i2I}$ de operadores lineales positivos sobre Y , tales que

$$\lim_{2} L \ (h) = h; \quad \text{para toda } h \ 2 H;$$

entonces

$$\lim_{2} L \ (f) = f; \quad \text{para toda } f \ 2 Y:$$

(ver [4] para mas informacion sobre subconjuntos de Korovkin).

Recordemos un resultado conocido.

Teorema 2.6 (ver [4], p. 255) Sea X un espacio compacto de Hausdor y A C(X) un conjunto nito. Si A es un sistema de Korovkin para C(X), entonces X es metrizable.

El resultado siguiente lo publicamos en [12].

Teorema 2.7 Sea un peso continuo. Para el espacio C [0; 1) no existen sistemas nitos de Korovkin.

Demostracion. Sea H : C [0; 1) ! C_b[0; 1) la isometr a considerada en el Teorema 2.5. Como C_b[0; 1) es positivamente isometricamente isomorfo a C([0; 1)), existe un isomor smo isometrico positivo

$$: C [0; 1) ! C([0; 1)):$$

Luego, hay una correspondencia uno a uno entre los operadores lineales positivos en C [0; 1) y los operadores similares en C([0; 1)). Pero se conoce que la compacti cacion de Stone-Čech de [0; 1) no es metrizable. Luego, segun el Teorema 2.6, C([0; 1)) no tiene sistemas nitos de Korovkin.

Hay resultados negativos de otros autores. Por ejemplo, en [16] se dieron resultados de este negativos para operadores lineales y positivos que actuan entre dos espacios con pesos diferentes.

Como comprob Coskun ([17] y [18]), se pueden tener teoremas de tipo Korovkin, con un sistema nito de funciones, si se exigen condiciones adi-cionales a los pesos. Los resultados originales estan enunciados para funciones de nidas en la recta real. Para facilitar las comparaciones nosotros los pre-sentamos en el semirayo [0; 1). Las demostraciones originales funcionan, con peque~nos cambios, para el caso del semirayo. Por eso las omitimos .

Teorema 2.8 Sea $_1$ y $_2$ dos funciones continuas crecientes sobre [0; 1) tales que

$$\lim_{x!1} {}_1(x) = \lim_{x!1} {}_2(x) = 1:$$

Sean

$${}_i(x) = \frac{1}{1 + {}_i^2(x)}; \quad \text{para} \quad i = 1; 2 :$$

Si

$$\lim_{x!1} \frac{{}_1(x)}{{}_2(x)} = 0$$

y L_n : C $_1$ [0; 1) ! B $_2$ [0; 1) es una sucesion de operadores lineales positivos que cumple

$$\lim_{n!1} k \,{}_1^K \;\; L_n({}_1^K) k_{\,2} = 0; \qquad k = 0; 1; 2;$$

entonces

$$\lim_{n!1} k f \;\; L_n(f) k_{\,2} = 0; \qquad k = 0; 1; 2;$$

para todo f 2 C $_2$ [0; 1).

Relaciones similares se obtienen si $\lim_{n!1} kF_k \; L_n(F_k)k_2 = 0$, k = 0; 1; 2, donde

$$F_k(x) = \frac{x^k}{1 + x^2}\,{}_1(x):$$

Algunas de las estimaciones habituales para operadores lineales positivos (como las de Shisha y Mond en [70]) son bastante exactas, pero inadecuadas para el estudio de la aproximacion lineal en [0; 1). Si estamos buscando estimaciones globales, entonces es necesario considerar algunas restricciones.

Despues de los trabajos de Ditzian y Totik ([25], [26] [28], [73], [74] y [75]) se hizo popular suponer un comportamiento regular para los segundos mo-mentos de los operadores. Por ejemplo, una desigualdad como la presentada en (2.3), para una funcion ' ja. Como Totik mostr en [73], incluso en este caso, la convergencia uniforme implica propiedades especiales en la funcion que se aproxima.

Por ejemplo, si S_n es la sucesion de operadores de Szasz-Mirakyan de - nidos en (1.9), para una funcion acotada f 2 C[0; 1), se cumple que

$$\lim_{n!1} kS_n(f) \quad fk_1 = 0$$

si y solo si la funcion $f(x^2)$ es uniformemente continua. Notese que la funcion f(x) = sin x es continua y acotada en el semirayo, pero la funcion $g(x) = \sin(x^2)$ no es uniformemente continua.

No se cuenta con una regla concreta para determinar cuales funciones se pueden aproximar. En general, la situacion depende fuertemente de la sucesion de operadores lineales y positivos que se considere. Para ilustrar este detalle veamos otro resultado de Totik. Necesitamos una de nicion previa.

Para f : [0; 1) ! R, los operadores originales de Baskakov [7] se de nen como

$$V_n(f; x) = \sum^{1}_{X} f \; \frac{k}{} \quad n + k\,1 \quad \frac{x^K}{} \qquad (2.2)$$

siempre que las series sean covergente.

Totik [73] demostr que, para una funcion acotada f 2 C[0; 1), se cumple que $kV_n(f)\; fk_1$! 0 si y solo si la funcion $f(e^X)$ es uniformemente continua.

Notese que en los resultados anteriores, relacionados con los operadores de Baskakov y Szasz-Mirakyan, Totik no consider pesos. Las conclusiones se derivan del teorema siguiente. La funcion ' que aparecer satisface algunas condiciones tecnicas adicionales que aqu omitimos.

Teorema 2.9 (Totik, [73]) Supongamos que los operadores lineales y posi-tivos fL_ng satisfacen las condiciones siguientes:

(i)

$$L_n(1; x) = 1; \qquad L_n(t; x) = x;$$

(ii) Existe una funcion ' : [0; 1) ! R_+ y una constante positiva K tales que

$$L_n((t \;\; x)^2; x)K'^2(x) \;\; {}_n^2; \tag{2.3}$$

donde $_n > 0$ y

$$\lim_{n!1} \;\; {}_n = 0;$$

(iii) Para cada n y f 2 C_b[0; 1), L_n(f; x) es continuamente diferenciable y existe una constante K(f; n) tal que

$$j\, L_n^0(f; x)\, j \;\; \frac{K(f; n)}{'(x)} \qquad x \; 2 \; [0; 1): \tag{2.4}$$

Entonces, para cualquier f 2 C_b[0; 1) las a rmaciones siguientes son equivalentes:

(1)

$$\lim_{n\,!1} \;\; kL_n(f) \qquad fk_1 = 0;$$

(2)

$$\lim_{h\,!0} \; \sup_{x2[0;1)} \; j\, f(x + h'(x)) \qquad f(x)\, j = 0;$$

(3) La funcion f(g ^{1}(x)) es uniformemente continua en [0; 1), donde

$$g(x) = Z_{1=2}^{x} \frac{dt}{'(t)};$$

En [74] se demostró un resultado similar para los llamados operadores de tipo exponencial. Se conoce una generalizacion de estos resultados.

Sean I y J dos intervalos de la recta real. Sea

$$\mathcal{F} = \{F_{x;\,t} : x \in I;\ t > 0\}$$

una familia de funciones crecientes en I. Para cada $t > 0$, sea $\mathcal{L}_t$ la familia de todas las funciones $f : I \to \mathbb{R}$ tales que

$$\int_I |f(s)|\, dF_{x;\,t}(s) < \infty; \quad \text{para toda } x \in I$$

y pongamos $\mathcal{L} = \bigcap_{t>0} \mathcal{L}_t$. Para $f \in \mathcal{L}$, $t > 0$ y $x \in I$ defínase

$$L_t(f;x) = \int_I f(s)\, dF_{x;\,t}(s).$$

Es claro que L_t es un operador lineal y positivo.

Supongamos que $e_0; e_1 \in \mathcal{L}$ y

$$L_t(e_0;x) = 1; \quad \text{para toda } t > 0 \text{ y cada } x \in I.$$

Teorema 2.10 (de la Cal y Carcamo, [19]) Fijemos $f \in \mathcal{L}$, sea φ una funcion monotona y uno-a-uno de I sobre el intervalo J, y sea f_φ la funcion definida por $f_\varphi(x) = f \circ \varphi^{-1}$.

(i) Se tiene que, para toda $t > 0$ y $x \in I$,

$$|L_t(f;x) - f(x)| \le 2\omega\left(f_\varphi; \int_I |\varphi(x) - \varphi(s)|\, dF_{x;t}(s)\right);$$

donde $\omega(f;\cdot)$ denota al modulo de continuidad usual definido en (1.13).

(ii) Se tiene que

$$\lim_{t\to\infty} \|L_t(f) - f\|_\infty = 0;$$

(la norma uniforme se calcula sobre I), siempre que f_φ sea uniformemente continua y

$$\limsup_{t\to\infty} \sup_{x\in I} \int_I |\varphi(x) - \varphi(s)|\, dF_{x;t}(s) = 0\,.$$

Un problema interesante que no hemos resuelto en su totalidad es el siguiente:

Problema 3 Encontrar un analogo al resultado de Totik en [73] para el caso de la approximacion con peso.

Como en [73] se consideraron solo las funciones de prueba f1; x; x^2g, esto motiva otro problema:

Problema 4 >Se pueden extender las ideas de Totik en [73] para el caso de sistemas generales de Chebyshev?

Presentemos un peque~no aporte relacionado con el estudio del Problema 3 (espacios con peso).

Recordemos que, para un intervalo I de la recta real

$$\mathrm{Lip}_1(I) = ff : I \; ! \; R : j\, f(x) \qquad f(y)\, j \quad K_f \; j\, x \quad y\, j\, g:$$

Para $x_0 > 0$, $h_0 > 0$ y $C > 0$, sea $(x_0; h_0; C)$ la clase de todas las funciones no negativas G 2 $C^1[0; 1)$ tales que:

(i) $G^0(x) > 0$ para $x > 0$ y G^0 es creciente en (0; $\ 1$);

(ii)

$$G_0 \quad G^{\ 1} \; 2 \; \mathrm{Lip}_1[x_0; 1);$$

(iii) Para x x_0 y h 2 $(0; h_0)$,

$$G^0(x + h)C\, G^0(x): \tag{2.5}$$

Teorema 2.11 Fijemos $x_0 > 0$, $h_0 > 0$ y $C > 0$, G 2 $(x_0; h_0; C)$ y sea un peso arbitrario.

Sea $fL_n g$, L_n : C [0; 1) ! C [0; 1), una sucesion de operadores lineales y positivos tales que, para cada f 2 C [0; 1) y n 2 N,

$$G^0(G^{\ 1}) \quad L_n(f) \; 2 \; \mathrm{Lip}_1[x_0; 1): \tag{2.6}$$

Si para alguna f 2 C [0; 1) se tiene que

$$\lim_{n!1} kf \qquad L_n fk = 0 \; ;$$

entonces la funcion (f) G es uniformemente continua.

Demostracion. Denotemos $\varphi(x) = G'(G^{-1}(x))$ y sea L_G la constante de Lipschitz de φ correspondiente al intervalo $[x_0; \infty)$.

Fijemos $f \in C[0; \infty)$ tal que $\lim_{n\to\infty} \|f - L_n(f)\| = 0$. Sea

$$M = \sup\{1 + \|L_n(f)\| ; n \in \mathbb{N}\}:$$

Como la funcion $(\varphi f) \circ G$ es continua, es suficiente demostrar que $(\varphi f) \circ G$ es uniformemente continua en $[G^{-1}(x_0); \infty)$.

Dado $\varepsilon > 0$, fijemos n tal que $\|f - L_n(f)\| < \varepsilon/6$. Sea $K_n(f)$ la constante de Lipschitz de $\varphi L_n(f)$ y definamos

$$h_0 = \min\left\{\frac{\varepsilon}{3CK_n(f)}; \frac{\varepsilon}{3CML_G}\right\};$$

donde C es la constante dada en (2.5).

Podemos tomar un $\varepsilon > 0$ tal que $h_0 < h_1$. Vamos a demostrar que para $h \in (0; h_0)$ y $t \geq G^{-1}(x_0)$

$$|(\varphi f)(G(t + h)) - (\varphi f)(G(t))| < \varepsilon:$$

Fijemos $h \in (0; h_0)$ y para $t \geq x_0$, sea $x = G(t)$. Como $x \geq x_0$, de (2.5) se sigue que

$$0 \leq G(t + h) - G(t) = \int_t^{t+h} G'(s)ds \leq G'(t + h)h \leq CG'(t)h = C\varphi(x)h:$$

Así

$$G(t + h) = x + s\varphi(x);$$

con $s \in (0; Ch)$. Luego

$$\begin{aligned}
|(\varphi f)(G(t + h)) - (\varphi f)(G(t))| &= |(\varphi f)(x + s\varphi(x)) - (\varphi f)(x)| \\
&\leq 2\|f - L_n(f)\| + |(\varphi L_n(f))(x + s\varphi(x)) - (\varphi L_n(f))(x)| \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{1}{\varphi(x)}|(\varphi L_n(f))(x) - (\varphi L_n(f))(x + s\varphi(x))| \\
&\quad + |\varphi(x + s\varphi(x)) - \varphi(x)| \frac{\|L_n(f)\|}{\varphi(x)} \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + K_n(f)s + M L_G s \leq \frac{\varepsilon}{3} + CK_n(f)h + CM L_G h \leq \varepsilon:
\end{aligned}$$

Veamos como se relaciona el Teorema 2.11 con el Teorema 2.9 de Totik. La comparacion podemos hacerla solo en el caso en que (x) 1. Para simpli car, consideramos solo los operadores de Baskakov.

Notese que, al inicio de la demostracion del Teorema 2.11, hemos utilizado la notacion '(x) = $G^0(G^{1}(x))$. Esto no es casual. Para el caso de los operadores de Baskakov, la funcion ' en la condicion (2.3) del Teorema 2.9 es '(x) = $\sqrt{x(1+x)}$. Es claro que, si jamos $x_0 > 0$, para x x_0 la funcion $\sqrt{x(1+x)}$ se comporta como la identidad. Veamos que para las funciones ' de este tipo, una de las conclusiones del Teorema 2.9, se deriva del Teorema 2.11.

Teorema 2.12 Supongamos que los operadores lineales y positivos fL_ng sa-tisfacen las condiciones (i), (ii) y (iii) del Teorema 2.9, con

$$'(x) = \sqrt{x(1+x)}:$$

Si $G(x) = e^x$, entonces cualesquiera sean $x_0 > 0$ y $h_0 > 0$, se tiene G 2 (x_0; h_0; e^{h_0}) y la condicion (2:6) se cumple con (x) 1.

Demostracion. Veamos que, cualesquiera sean $x_0 > 0$ y $h_0 > 0$, G 2 (x_0; h_0; e^{h_0}). Para ello, por un lado, consideramos la desigualdad

$$G^0(x+h) = e^h e^x \quad e^{h_0} e^x = e^{h_0} G^0(x); \quad h \; 2 \; (0; h_0]$$

Por otro lado, como $G^{1}(x) = \log x$, $G^0(G^{1}(x)) = x$ y la funcion identidad cumple la condicion de Lipschitz en cualquier intervalo.

Finalmente, veamos que la condicion (2.6) se sigue de (2.4), con '(x) = $\sqrt{x(1+x)}$. En este caso particular ($G^0(G^{1}(x)) = x$ y (x) 1), necesita-mos veri car que la funcion $xV_n(f; x)$ satisface la condicion de Lipschitz en algun intervalo [x_0; 1), con $x_0 > 0$.

Como L_n es un operador positivo y se cumple la condicion (i) del Teorema 2.9, para cualquier funcion g continua y acotada g se tiene que (denotamos $e_0(x) = 1$)

$$j\, L_n(g; x)\, j \quad kgk_1\, j\, L_n(e_0; x)\, j \quad kgk_1:$$

Ahora, si f es una funcion continua y acotada y x_0 x < y, existe un punto 2 (x; y) de forma que (aqu utilizamos la condicion (iii) del Teorema 2.9)

$$j\, xL_n(f; x) \quad yL_n(f; y)\, j \quad j\, L_n(f; y)\, j\, j\, x \quad y\, j + x\, j\, L_n(f; x) \quad L_n(f; y)\, j$$

$$\|f\|_1 |x - y| + x |L_n'(f;\xi)| |x - y|$$

$$\le \|f\|_1 |x - y| + \frac{x}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})} K(f;n) |x - y|$$

$$\le \|f\|_1 |x - y| + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} K(f;n) |x - y|$$

$$\le (\|f\|_1 + K(f;n)) |x - y| :$$

Esto demuestra que la funcion

$$xL_n(f;x) = G'(G^{-1}(x))\, L_n(f;x);$$

cumple la condicion de Lipschitz.

Las ideas de la demostracion del teorema anterior se pueden utilizar para obtener un resultado mas general, relacionado con las propiedades aproximativas de los operadores lineales y positivos en espacios pesados. Necesitamos una modificacion de la condicion (iii) del Teorema 2.9. Como la demostracion del Teorema 2.13 es similar a la del teorema anterior, la omitimos.

Teorema 2.13 Supongamos que los operadores lineales y positivos $\{L_n\}$ satisfacen las condiciones (i) y (ii) del Teorema 2.9, con $\varphi(x) = \sqrt{x(1+x)}$. Sea $f \in C[0;\infty)$ tal que, para cada n, $L_n(f;x)$ esta definido, $L_n(f;x)$ es continuamente diferenciable y existe una constante $K(f;n)$ tal que

$$\psi(x)\, |L_n'(f;x)| \le \frac{K(f;n)}{\varphi(x)} \qquad x \in (0;\infty):$$

Si

$$\lim_{n\to\infty} \|f - L_n f\| = 0 ;$$

entonces la funcion $h(x) = \psi(e^x) f(e^x)$ es uniformemente continua.

Para los operadores de Baskakov verificaremos en el ultimo Capítulo que las condiciones del Teorema 2.13 se cumplen, en el caso de los operadores polinomiales.

Otras condiciones se pueden encontrar en [4] y [57].

2.3 Analisis en los espacios C ;1(I)

Segun un teorema de Boyanov y Yeselinov, [10] se conoce lo siguiente: si para una sucesion de operadores lineales y positivos sabemos que hay convergencia uniforme [0; 1) para las funciones 1, e^{x} y e^{2x}, entonces hay convergencia uniforme para todas las funciones en C[0; 1) que tengan l mite nito en el in nito. Pero, para algunas sucesiones espec cas de operadores, se requiere un calculo bastante tedioso para veri car la convergencia sobre estas funciones de prueba. En tales casos, uno debe buscar otras funciones de prueba (por ejemplo, vease [6]).

Comenzemos presentando una respuesta simple a la pregunta (ii) formu-lada en la introduccion. Veamos que, de hecho, el analisis se puede reducir al caso de los intervalos compactos. Para ello utilizaremos la funcion de nida en (1.21).

Gadjiev (ver [40], [41] y [42]) fue el primero en observar la importancia de los espacios C ;1(I) para obtener teoremas de tipo Korovkin.

Teorema 2.14 (Gadjiev,[41]) Sea : R ! R una funcion continua estrictamente creciente y sea (x) = (1+ ^{2}(x)) ^{1}. Supongamos que $\lim_{x!1}$ (x) = 0.

Si $fL_n g$ es una sucesion de operadores lineales y positivos,

$$L_n : C_{;1}(R) \, ! \, B (R)$$

y

$$k^{\,i} \quad L_n(^{\,i})k \, ! \, 0; \qquad i = 0; 1; 2;$$

entonces $fL_n g$ es un proceso de aproximacion en C ;1(R).

Este resultado se utilizo en [41] y [44] para estudiar los operadores de Bernstein-Chlodowsky en espacios pesados.

Sea $fb_n g$ una sucesion de numeros positivos, tal que

$$\lim_{n!1} b_n = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{n!1} \frac{b_n}{n} = 0 :$$

Para una funcion f : [0; 1) ! R los operadores de Bernstein-Chlodowsky se de nen como

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{b_n k}{n}\right)\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k}\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}; \; 0 \quad x \quad b_n$$

y

$$B_n(f; x) = f(x); \qquad x > b_n:$$

Se veri ca que, para 0   x   n,

$$B_n(1; x) = 1; \qquad B_n(t; x) = x$$

y

$$B_n(t^2; x) = x^2 \quad \frac{x^2}{n} + \frac{b_n \; x}{n}:$$

Si consideramos el peso

$$(x) = \frac{1}{1 + x^2};$$

se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ } \quad n \quad \frac{1}{\ } = 0.$$

Luego, en este caso, se tiene un proceso de aproximacion en $C_{;\infty}[0;\infty)$.

Presentemos algunos aportes relacionados con este caso. Estos se derivan de los estudios que realizamos anteriormente sobre el isomor smo entre in-tervalos compactos y no compactos.

Teorema 2.15 Sea un peso arbitrario. Una sucesion $\{L_n\}$ de operadores lineales y positivos, $L_n : C_{;\infty}[0;\infty) \to C_{;\infty}[0;\infty)$, es un proceso de aproximacion si y solo si

$$\lim_{n\to\infty} \|f_i \quad L_n(f_i)\| = 0; \quad \text{para} \quad i = 0; 1; 2; \tag{2.7}$$

donde

$$f_0(z) = \frac{1}{(z)}\ ; \quad f_1(z) = \frac{z}{(z)(1+z)} \ \text{y} \ f_2(z) = \frac{z^2}{(z)(1+z)^2}\ . \tag{2.8}$$

Demostracion. Notese que las funciones f_i $(i = 0; 1; 2)$ estan en el espacio $C_{;\infty}[0;\infty)$. Luego, es claro que si $\{L_n\}$ es un proceso de aproximacion, se cumple (2.8).

Para veri car el rec proco, denotemos por L_n al operador asociado a L_n segun el Teorema 1.7 . Es facil veri car que

$$(f_0) = e_0; \qquad (f_1) = e_1 \text{ y } \qquad (f_2) = e_2;$$

donde esta de nida por (1.23).

Se sigue de (2.7) que, para i = 0; 1; 2,

$$\lim_{n!1} ke_i \quad L_n(e_i)k = \lim_{n!1} k\,(f_i) \qquad L_n(\ f_i)k =$$

$$\lim_{n!1} kf_i \quad L_n(f_i)k = 0:$$

Luego, la conclusion se obtiene a partir del resultado clasico de Korovkin.

Teorema 2.16 Si (f_0; f_1; f_2) es un sistema de Chebyshev en [0; 1], entonces

$$(\ {}^1(f_0); \quad {}^1(f_1); \quad {}^1(f_2))$$

es un sistema de funciones de prueba para $C_{;1}$[0; 1).

Demostracion. Como (f_i; x) = x^i, la a rmacion se sigue del teorema de Korovkin y el Teorema 1.7. Para ello basta considerar la sucesion

$$L_n = \quad L_n \quad {}^1:$$

Algunos casos particulares del ultimo teorema fueron obtenidos por Gad-jiev en [40] y [41]. Tambien hay ciertas extensiones en [29].

En algunos casos importantes se necesita estudiar operadores lineales y positivos en los espacios $C_{;1}$, bajo la condicion adicional de que estos repro-ducen a las funciones lineales. En tal caso uno quisiera incluir las funciones e_0 y e_1 en la familia de funciones de prueba. Para estos problemas presentamos el resultado siguiente.

Teorema 2.17 Sea un peso que satisface las condiciones

$$\lim_{x!1} \ (x) = \lim_{x!1} \ (x)\, x = 0:$$

Para una funcion h 2 $C_{;1}$[0; 1) las a rmaciones siguientes son equiva-lentes:

(i) La familia fe_0; e_1; hg es un sistema de Korovkin para $C_{;1}$[0; 1).

(ii) La familia $\{e_0, e_1, h\}$ es un sistema de Chebyshev $[0, \infty)$ y

$$\lim_{x\to\infty} \ (x)h(x) \neq 0.$$

Demostracion. Supongamos que se cumple (i) y sean $g_i = (e_i)$ $(i = 0, 1)$ y $g_2 = (h)$. Demostraremos que $\{g_0, g_1, g_2\}$ es un sistema de Korovkin para $C[0, 1]$.

Fijemos una sucesion arbitraria $\{L_n\}$ de operadores lineales y positivos en $C[0, 1]$ y supongamos que $\| g_i \ \ L_n(g_i)\|_\infty \to 0$, para $i = 0, 1, 2$. Si de nimos

$$L_n = {}^{1} \quad L_n \quad ;$$

se obtiene una sucesion de operadores lineales y positivos en $C_{,\infty}[0, \infty)$ para la cual

$$\lim_{n\to\infty} \|e_i \quad L_n(e_i)\| = 0, \ (i = 0, 1) \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty} \|h \quad L_n(h)\| = 0.$$

As , $\{L_n\}$ es un proceso de aproximacion en $C_{,\infty}[0, \infty)$. Luego, para cada $f \in C[0, 1]$,

$$\| {}^{1}f \quad L_n \ {}^{1}(f)\| = \|f \quad L_n f\|_\infty \to 0.$$

La familia $\{g_0, g_1, g_2\}$ es un sistema de Chebyshev en $[0, 1]$. Ahora, si $0 \ \ x_1 < x_2 < x_3 < \infty$ y $y_i = {}^{1}(x_i)$ (ver 1.21), entonces

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ h(x_1) & h(x_2) & h(x_3) \end{vmatrix} = \frac{1}{(x_1)(x_2)(x_3)} \begin{vmatrix} g_1(y_1) & g_1(y_2) & g_1(y_3) \\ g_0(y_1) & g_0(y_2) & g_0(y_3) \\ g_2(y_1) & g_2(y_2) & g_2(y_3) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Luego, $\{e_0, e_1, h\}$ es un sistema de Chebyshev en $[0, \infty)$.

Por otro lado, si $0 \ \ y_1 < y_2 < 1$, entonces

$$0 \neq \begin{vmatrix} g_1(y_1) & g_1(y_2) & g_1(1) \\ g_0(y_1) & g_0(y_2) & g_0(1) \\ g_2(y_1) & g_2(y_2) & g_2(1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g_1(y_1) & g_1(y_2) & 0 \\ g_0(y_1) & g_0(y_2) & 0 \\ g_2(y_1) & g_2(y_2) & g_2(1) \end{vmatrix}.$$

De aqu que, $0 \neq g_2(1) = \lim_{x\to\infty} \ (x)h(x)$.

Supongamos ahora que se cumple (ii) y que el sistema $\{g_0, g_1, g_2\}$ se ha de nido como mas arriba. Para veri car (i) es su ciente demostrar que $\{g_0, g_1, g_2\}$ es un sistema de Chebyshev en $[0, 1]$. Si $0 \ \ y_1 < y_2 < y_3 < 1$, y

de nimos x_i = (y_i), se obtiene det$(g_i(y_j))$ 6= 0 como antes. Por otro lado, si 0 $y_1 < y_2 < 1$, y de nimos x_i = (y_i) $(i = 0; 1)$ obtenemos

$$\begin{matrix} g_1 & (y_1) & g_1 & (y_2) & g_1(1) = g_2(1) \\ g_2^0 & (y_1) & g_2^0(y_2) & & g_2^0(1) \end{matrix} \qquad \begin{matrix} (x\ )x \\ {}_{(x_1)}{}^{1}\ \ {}^{1} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} (x\ )x \\ {}_{(x_2)}{}^{2}\ \ {}^{2} \end{matrix}$$

$$= (x_1)\ (x_2)(x_2 \qquad x_1) \lim_{x!1} (x)h(x) = 0:$$

6

En el ultimo resultado de esta seccion consideramos el caso de los espacios donde el l mite es cero en el in nito.

Teorema 2.18 Sea un peso arbitrario. Sean $_i$ $(i = 0; 1; 2)$ tres funciones en C [0; 1) que forman un sistema de Chebyshev en cada intervalo nito y

$$\lim_{x!1} (x)\ _i(x) = 0 :$$

Una sucesion L_n : C $_{;0}$[0; 1) ! B [0; 1) es un proceso de aproximacion si y solo si

$$\lim_{n!1} k\ _i \qquad L_n(\ _i)k = 0; \qquad \text{para} \qquad i = 0; 1; 2:$$

El ultimo teorema se formul en [41] para operadores

$$L_n : C\ _{;1}[0; 1)\ !\ B\ [0; 1) :$$

Pero tal eleccion de espacios contradice el Teorema 2.17. De hecho, la demostracion dada en [41] funciona bien para funciones f 2 C $_{;0}$[0; 1). Ademas, es facil construir un contraejemplo.

Para el peso

$$(x) = \frac{1}{1 + x^3};$$

consideremos en C $_{;1}$[0; 1) la sucesion de operadores lineales y positivos

$$L_n(f; x) = \begin{matrix} (n)f(n)=(n\ (x)) & \text{if} & x > n; \\ f(x) & \text{if}\ \ x & 2\ [0; n]; \end{matrix}$$

Notese que, para x > n,

$$(x)\ j\ e_0(x) \quad L_n(e_0; x)\ j = (x)\ 1 \quad \frac{n\ (x)}{(n)}$$

$$= \frac{1+x^3}{1} \quad \frac{n(1+n^3)}{1} \quad \frac{1+n^3}{2} :$$

Luego

$$\lim_{n\to 1} \| e_0 \quad L_n(e_0) \| \qquad = 0 :$$

Para $x > n$,

$$(x) \, | \, e_1 \; (x) \quad L_n(e_1; x) \, | = \; (x) \, x \quad \frac{(x)}{(n)}$$

$$= \frac{x}{} \quad \frac{1}{} \quad \frac{2}{} \quad \frac{1}{} \quad \frac{3}{} :$$

Luego

$$\lim_{n\to 1} \| e_1 \quad L_n(e_1) \| \qquad = 0 :$$

Ademas Para $x > n$,

$$(x) \, | \, e_2(x) \quad L_n(e_2; x) \, | = \; (x) \, x^2 \quad \frac{n \; ((x))}{n}$$

$$= \frac{x^2}{} \quad \frac{n}{} \quad \frac{2}{} \quad \frac{2}{} \quad \frac{4}{}$$

Luego

$$\lim_{n\to 1} \| e_2 \quad L_n(e_2) \| = 0 :$$

Si las funciones $e_i(x) = x^i$, $i = 0; 1; 2$, fuesen un sistema de Korovkin para $C_{;1}[0; 1)$, como $1 = 2 \; C_{;1}[0; 1)$, se tendr a que

$$_{n\to 1} \frac{1}{} \quad L_n \quad \frac{1}{} \qquad = 0 :$$

Pero, si $x > n > 1$

$$(x) \quad \frac{(x)}{1} \; L_n \quad \frac{}{1} \quad ; x \; = 1 \quad n \; \frac{2}{1} \quad \frac{}{1}$$

lo cual es una contradiccion.

2.4 Funciones uniformemente continuas

Aqu utilizaremos ideas similares a las de la Seccion 2.2 para estudiar espacios $C_{ucb}[0; 1)$ (= C_{uc} $[0; 1)$ con 1).

Para simpli car denotamos $X = [0; 1)$.

Se conoce que, cada funcion f 2 $C_{ucb}(X)$, f admite una unica extension continua fb a X (ver Teorema 2.3). Este resultado nos permite introducir las notaciones siguientes. Sea

$$Cb_{ucb}(X) = f\ fb : f\ 2\ C_{ucb}(X)\ g\ ;$$

donde $\hat{f}$ es la extension considerada anteriormente.

Para demostrar el resultado principal de este seccion necesitamos algunos hechos conocidos, relacionados con las compacti caciones de los espacios de funciones uniformemente continuas.

Todo espacio metrico (X; d) admite una m nima compacti cacion uniforme $u_d(X)$ en el sentido siguiente: si (Y; r) es un espacio metrico y f : X ! Y es uniformemente continua, entonces hay una extension continua fb: $u_d(X)$! $u_r(Y)$. Este resultado y el siguiente fueron tomados de [48].

Teorema 2.19 (Grant Woods, [48]) Sea (X; d) un espacio metrico. Si (X; d) no es totalmente acotado, entonces $u_d(X)$ n X no es metrizable.

Teorema 2.20 El espacio $Cb_{ucb}(X)$ tiene las propiedades siguientes:

(i) $Cb_{ucb}(X)$ es una subalgebra cerrada C(X);

(ii) El mapeo

$$M\ : C_{ucb}(X)\ !\ Cb_{ucb}(X);$$

de nido por

$$M(f) = fb$$

es una isometr a lineal positiva entre $C_{ucb}(X)$ y $Cb_{ucb}(X)$.

Demostracion. (i) Basta ver que si f; g 2 $C_{ucb}(X)$, entonces fbgb 2 C(X). Como las extensiones a X, son unicas, se tiene que fcg = fbgb. Esto prueba el resultado.

(ii) Como X se considera como un subconjunto denso de X (por de ni cion de compacti cacion) se tiene que

$$kf \quad gk_1 = \sup_{x2X} j\, f(x) \quad g(x)\, j = \sup_{y2\ X} j\, fb(y) \quad gb(y)\, j$$

$$= \sup_{y2\ X} j\, M(f;\ y) \quad M(g;\ (y)\, j = kM(f) \quad M(g)k_1:$$

En X podemos considerar la relacion de equivalencia siguiente R: para

$$p;\ q\ 2 \ \ X; \qquad p \quad R\ \ q$$

si y solo si

$$fb(p) = fb(q) \quad \text{para toda} \quad f\ 2\ C_{ucb}(X):$$

Sea X = X=R el espacio cociente y

$$: \quad X \quad !\ X$$

el mapeo cociente.

Para cada f 2 C_{ucb}(X) existe una unica funcion N(f) 2 C(X) tal que N(f) = M(f). Si ponemos

$$(C_{ucb}(X)) = \quad N(f) : f\ 2\ C_{ucb}(X) \ \ y \ \ N(f) \ \ = M(f) \ ;$$

entonces (C_{ucb}(X)) es una subalgebra cerrada de C(X), que contiene las funciones constantes y separa puntos. Por lo tanto (C_{ucb}(X)) = C(X) y el operador

$$N : C_{ucb}(X)\ !\ C(X\ ) \tag{2.9}$$

es una isometr a lineal positiva.

Teorema 2.21 Para el espacio C_{ucb}[0; 1), no existen sistemas nitos de Korovkin

Demostracion. Usamos la notacion X y X presentada antes.

Sea F(C_{ucb}(X)) la familia de todos los operadores lineales positivos sobre C_{ucb}(X) y F(C(X)) la familia de todos los operadores lineales positivos en C(X).

En primer lugar, veri quemos que existe una biyeccion lineal entre las familias F(C_{ucb}(X)) y F(C(X)).

Si $L : C_{ucb}(X) \; ! \; C_{ucb}(X)$ es un operador lineal positivo, se obtiene otro operador lineal positivo $L : C(X\ ) \; ! \; C(X\ )$ mediante la regla

$$L\ (g) = N(L(N\ ^{1}(g)); \qquad g \; 2 \; C(X\ );$$

donde N es la isometr a lineal positiva de nida en (2.9).

Por otro lado, si $L : C(X\ ) \; ! \; C(X\ )$ es un operador lineal positivo, se obtiene otro operador lineal positivo $L : C_{ucb}(X) \; ! \; C_{ucb}(X)$ mediante la regla

$$L(f) = N\ ^{1}(L\ (N(f)); \quad f \; 2 \; C_{ucb}(X):$$

Esto prueba la existencia de la biyeccion lineal entre las dos familias de operadores lineales y positivos.

De los argumentos dados anteriormente sabemos, un conjunto

$$H \; C_{ucb}(X)$$

es un sistema de Korovkin para $C_{ucb}(X)$ si y solo si el conjunto N(H) es un sistema de Korovkin para $C(X\ )$. Pero, segun el Teorema 2.19, X no es metrizable. Por lo tanto, no existe un sistema nito de Korovkin para $C(X\ )$.

Problema 5 >Existen sistemas nitos de Korovkin para $C_{uc}\ [0; 1)$ cuando no es equivalente a una constante?

Hay varios art culos dedicados a estudiar los sistemas particulares de suce-siones de operadores lineales positivos en $C_{uc}\ [0; 1)$. En algunos casos, se consideran dos espacios pesados diferentes. Por ejemplo,

$$L_n\ : C_{uc}\ [0; 1) \quad ! \; C_{uc}\ [0; 1);$$

donde

$$\lim_{x!1} \ (x)= \ (x) = 0:$$

Es evidente que, en tal caso, podemos tener convergencia en norma solo para funciones de $C_{uc}\ [0; 1)$, pero $C_{uc}\ [0; 1) \; C\ _{;1}[0; 1)$. Por lo tanto, a veces, es mejor considerar las ideas de la Seccion 2.3.

Vamos a presentar, para $C_{ucb}[0; 1)$, algunos conjuntos particulares de Korovkin

El resultado siguiente es conocido.

Teorema 2.22 (ver [4], pag. 200) Sean Y un espacio compacto de Hausdorff y H un subespacio lineal de $C(Y)$ que contiene a las funciones constantes. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:

(i) H es un sistema de Korovkin para $C(Y)$

(ii) H separa puntos y, dados $y \in Y$, $K \subset Y$ compacto ($y \notin K$), y $\varepsilon > 0$, existe $h \in H$ tal que $h \geq 0$ y

$$1 \leq h(x), \qquad x \in K$$

y

$$h(y) < \varepsilon.$$

Como es usual, dados $A, B \subset [0, \infty)$, denotamos

$$d(A, B) = \inf\{|a - b| : a \in A, \; b \in B\}.$$

El hecho siguiente es conocido. Para facilidad del lector incluimos una prueba simple.

Proposicion 2.1 Sean $A, B \subset [0, \infty)$. Si $d(A, B) > 0$, existe $f \in C_{ucb}[0, \infty)$ tal que $0 \leq f \leq 1$, $f(A) = \{0\}$ y $f(B) = \{1\}$.

Demostracion. Basta tomar

$$f(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}.$$

Notese que

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{|d(x, A) - d(y, A)|}{d(x, A) + d(x, B)} + |d(y, A)| \left| \frac{1}{d(x, A) + d(x, B)} - \frac{1}{d(y, A) + d(y, B)} \right| \leq \frac{|x - y|}{d(A, B)} + \frac{2|x - y|}{(d(A, B))^2},$$

de donde se infiere que f es uniformemente continua. Segun la proposicion anterior podemos construir una familia de funciones como sigue:

Sea $\mathcal{U}$ la familia de todas las parejas $(A; B)$ de conjuntos cerrados no vacíos $A; B \subset [0; 1)$, tales que $d(A; B) > 0$.

Para cada pareja $(A; B) \in \mathcal{U}$ fijamos una función $f_{A;B} \in C_{ucb}[0; 1)$ tal que

$$f_{A;B}(A) = \{0\}; \quad f_{A;B}(B) = \{1\} \quad y \quad 0 \leq f_{A;B} \leq 1.$$

Sea

$$\mathcal{U}^* = \{ f_{A;B} : (A; B) \in \mathcal{U} \}.$$

Teorema 2.23 El subespacio H generado por las funciones constantes y $\mathcal{U}^*$ es un sistema de Korovkin para $C_{ucb}[0; 1)$.

Demostración. Usamos las notaciones dadas antes en el Teorema 2.21. Para simplificar, identificamos a X con un subespacio denso de X^*.

El subespacio H es un sistema de Korovkin para $C_{ucb}[0; 1)$ si y sólo si el conjunto $N(H)$ es un sistema de Korovkin para $C(X^*)$.

Fijemos un conjunto compacto no vacío $K \subset X^*$ y un punto $x \in X^* \setminus K$. Como X^* es un espacio compacto de Hausdorff, existe $f \in C(X^*)$ tal que $f(x) = 0$ y $f(K) = \{1\}$.

Pongamos

$$A = X \cap f^{-1}((-1; 1/4]) y \qquad B = X \cap f^{-1}([3/4; 1)):$$

A y B son subconjuntos cerrados de X y la clausura de A (B) en X^* es $f^{-1}(-1; 1/4]$ ($f^{-1}([3/4; 1))$).

Considerando la pareja de conjuntos $(A; B)$, para la función $f_{A;B}$ uno tiene $N(f_{A;B})(x) = 0$ y $N(f_{A;B})(K) = \{1\}$. Por lo tanto, según el Teorema 2.22, H es un sistema de Korovkin para $C_{ucb}[0; 1)$.

2.5 Convergencia sobre los compactos

Si $\{L_n\}$ es una sucesión de operadores lineales y positivos, y $C(I)$ está contenido en el dominio de todos los operadores, sólo podemos obtener la convergencia puntual o convergencia en un subconjunto compacto de I. Pero, como muestra el ejemplo siguiente, incluso en este último caso el problema no es simple.

Ejemplo 1 Siguiendo a Ditzian [25], sea (x) = e ^{x} y, para f 2 C $_{;1}$[0; 1), de namos

$$L_n(f; x) = B_n(f; x) + f(n) (n);$$

donde B_n es el operador de Bernstein, de nido en (1.27).

Es facil veri car que, funciones de prueba e_i (i = 0; 1; 2), se tiene la con-vergencia uniforme en [0; 1]. Pero $L_n(e^t; x)$! e^x +1 converge uniformemente en [0; 1].

Primero presentamos algunas ideas de Hermann, que proporcionan condi-ciones su cientes para la convergencia en algunas funciones no acotadas.

Proposicion 2.2 (Hermann, [51]) Sea I un intervalo (nito o no) y fL_ng una sucesion de operadores lineales positivos tal que, para toda funcion aco-tada g 2 C(I),

$$\lim_{n!1} L_n(g; x) = g(x); \qquad x \; 2 \; I:$$

Sea D un intervalo abierto, D I, y F 2 C(I) una funcion tal que F (x) > 0 (para x 2 I) y

$$\lim_{n!1} L_n(F; x) = F (x); \qquad x \; 2 \; D:$$

Si f 2 C(I) y j f(x) j C F (x), x 2 D, entonces

$$\lim_{n!1} L_n(f; x) = f(x); \qquad x \; 2 \; D:$$

Por lo general, para aplicar el teorema anterior, jamos una funcion F (llamada mayorante) y entonces consideramos la clasesC(F; D), de funciones continuas f, para las cuales existe una constante C_f tal que

$$j \; f(x) \; j \qquad C_f \, F (x); \qquad x \; 2 \; D:$$

A veces buscamos la convergencia uniforme sobre los subconjuntos com-pactos de [0; 1). El Teorema 2.24 muestra como esto se puede obtener de una manera general. Notese que en la ecuacion (2.10) el peso no aparece. As , podemos obtener la convergencia uniforme sobre conjuntos compactos para las funciones no acotadas.

Teorema 2.24 Sea fL_ng una sucesion de operadores lineales y positivos, L_n : C [0; 1) ! C [0; 1). Si fL_ng es un proceso de aproximacion en C $_{;1}$[0; 1), entonces para todo f 2 C [0; 1) y a > 0,

$$\lim_{n !1} kL_n(f) \ \ fk_{[0;a]} = 0; \qquad (2.10)$$

donde k k$_{[0;a]}$ denota la norma del supremo sobre el intervalo [0; a].

Demostracion. Fijemos a > 0 y de namos

$$h_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \ \ [0; a] \\ 1 + a \quad x & \text{if } x \ 2 \ (a; a+1) \\ 0 & \text{if } x \ 2 \ [a+1; \quad), \end{cases}$$

y

$$h_2(t) = 1 \quad h_1(t):$$

Como h_1; h_2= 2 C $_{;1}$[0; 1), se tiene que

$$kh_1 \quad L_n(h_1)k \ ! \ 0 \qquad y \quad kh_2 = \quad L_n(h_2 =)k \ ! \ 0:$$

Como muestra la ultima a rmacion, $L_n(h_2 =)$ converge uniformemente a h_2.

Si f 2 C [0; 1), entonces h_1f 2 C $_{;1}$[0; 1). As $L_n(h_1 f)$ converge uniformemente a h_1f y $h_1(x)f(x) = f(x)$ para x 2 [0; a].

Como (x) C(a) > 0 para x 2 [0; a], $L_n(h_1 f)$ converge uniformemente a f sobre [0; a]. Por otra parte,

$$j \ (x)L_n(h_2 f; x) \ j \quad kfk \ (x)L_n \ \frac{h_2}{} \ ; x \ :$$

El lado derecho converge de manera uniforme a kfk h_2. Ya que $h_2(x) = 0$ para x 2 [0; a],

$$\lim_{n !1} \sup_{x 2 [0;a]} j \ (x)L_n(h_2 f; x) \ j = 0:$$

Como f = h_1f + h_2f la a rmacion se ha demostrado.

Para un intervalo no acotado, es util considerar una clase presentado por M•uller [64], a n de dar una version local de los resultados de Bohman y Korovkin.

De nicion 2.3 Para $\in \mathbb{R}$ jo, sea $H(\ )$ la clase de todas las funciones f de nidas en $\mathbb{R}$ que satisfacen:

(i) f es continua en $\ ;$

(ii) f es acotada en todo intervalo nito;

(iii) $f(x) = O(x^2)$ cuando $x \to \infty$.

Sea $H(x;\ ;\ )$ el espacio de todas las funciones f de nidas en $\mathbb{R}$ tal que:

(i) f es continua en el intervalo nito $[\ ;\ ]$;

(ii) f es acotada en todo intervalo nito;

(iii) $f(x) = O(x^2)$ cuando $x \to \infty$.

Teorema 2.25 (Schurer, [69]) Para $n \in \mathbb{N}$, sea $L_n : H(\ ) \to C[c;d]$, $\in [c;d]$ una sucesion de operadores lineales positivos con

$$L_n(t^i; x) = x^i + \ _{n;i}(x); \qquad \text{para} \quad i \in \{0; 1; 2\}:$$

(i) (Version puntual) Si $\lim_{n\to\infty}\ _{n;i}(\ ) = 0$, $i \in \{0; 1; 2\}$, entonces, para $f \in H(\ )$,

$$\lim_{n\to\infty} L_n(f;\ ) = f(\ ):$$

(ii) (Convergencia en conjuntos compactos) Si $\lim_{n\to\infty} \|\ _{n;i}\|_{[c;d]} = 0$, para $i \in \{0; 1; 2\}$, entonces para cada $f \in H(x; c; d)$,

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(f) \quad f\|_{[c;d]} = 0 :$$

3

Resultados Cuantitativos

Al buscar estimaciones cuantitativas aparecen problemas diferentes. En algunos casos, las estimaciones re ejan la propiedad de interpolacion de los operadores. Por otra parte, si la funcion que se aproxima es uniformemente continua y se tiene a mano un modulo de continuidad, entonces podemos presentar estimados en norma y estimados puntuales. Cuando se trabaja en espacios pesados, se pueden considerar clases de funciones mas amplias. Pero, como Balazs y Szabados mostraron en [6], hay que pagar un precio: el orden de convergencia puede empeorar. La pregunta es: >Cuales son los estimados mejores posibles? Aqu la mejor estimacion posible signi ca que no existe otro estimado en el cual tanto el peso como el orden de convergencia se puedan mejorar.

Una cuestion importante es como la existencia del l mite en 1 se re eja en la velocidad de convergencia.

Balazs y Szabados [6] introdujeron la magnitud

$$(f; A) = \sup fj\ f(x) \quad f(y)\ j: xy \quad Ag$$

y, para algunos operadores racionales de tipo Bernstein, ellos presentaron estimaciones donde esta magnitud aparece como un termino extra. El uso de la funcion (f; A) se explica porque el modulo de continuidad usual (de una funcion en $C_1[0; 1)$), por s mismo, no determinan el orden de convergencia. Incluso, aun cuando la funcion f tenga muy buenas propiedades estructurales, la convergencia uniforme de $L_n(f)$ a f puede ser muy lenta, si lo es la convergencia de f a su l mite en el in nito.

Uno de los primeros trabajos sobre la aproximacion con peso (en el caso polinomial) se debe a Becker [8]. Becker estudio, en particular, los operadores de Baskakov y Szasz-Mirakyan. Para el estudio de los operadores de Szasz-Mirakyan en espacios con pesos exponenciales ver [20], [21] y [80]. Para otros resultados relacionados con los operadores de Baskakov remitimos a [32], [37], [50], [49] y [75]. Estos no son los unicos operadores que se han estudiado.

Para $x \in [0,\infty)$ y una funcion acotada $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, los operadores de Bleimann, Butzer y Hahn se definen como

$$L_n(f;x) = \frac{1}{(1+x)^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n+1-k}\right) x^k. \tag{3.1}$$

Estos operadores se introdujeron en [9]. Jayasri y Sitaraman obtuvieron estimados directos e inversos, para estos operadores, en espacios pesados polinomiales [56].

3.1 Algunos resultados conocidos

Las estimaciones cuantitativas de aproximacion en espacios con peso, por lo general, siguen el estado del arte para operadores de Bernstein. Para operatores de Bernstein , Felten [33] caracterizo (teoremas directos e inversos) el comportamiento de la velocidad de aproximacion usando el modulo de Ditzian-Totik con peso φ . Para ellos siguio las ideas de Ditzian en [26]. La motivacion principal era cerrar la brecha entre los teoremas de aproximacion local y global para los operadores de Bernstein. Despues Felten [34] observ que dichas ideas se podían utilizar para el analisis de otros operadores lineales positivos.

Presentamos un ejemplo típico de estos resultados, para que el lector tenga una idea del tipo de resultado que estamos buscando.

Teorema 3.1 Sean $\varphi, \omega : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ dos funciones. Supongamos que φ^2 es admisible para el modulo de Ditzian-Totik (ver Seccion (1.2)) y ω es concava.

Sea $L : C[0,\infty) \to C[0,\infty)$ un operador lineal y acotado que preserva a las funciones constantes.

(i) Para $x \in [0,\infty)$ y $f \in C[0,\infty)$, se tiene que

$$|f(x) - L(f;x)| \le \omega\left(f; \frac{|L(e_1 - x; x)|}{\varphi(x)}\right)$$

$$+4K^2\ f;\ \frac{L((e_1\ x)^2;\ x)}{^2(x)}\quad ;$$

donde $!$ ( ) y ( ) estan de nidas como en (1 20) y (1 19) respectivamente.

(ii) Si es una funcion peso admisible para el modulo de Ditzian-Totik, se tiene que para x 2 [0; 1) y f 2 C[0; 1), j

f(x) L(f; x) j

$$C\ !\ f;\ \frac{j\ (x)\ L(e_1\ x;\ x)\ j}{} + !^2\ f;\ \frac{p\ \overline{L((e_1\ x)^2;\ x)}}{}\ !!\ ;$$

donde la constante C solo depende de y .

(iii) Si L preserva las funciones lineales el termino relacionado con ! en la ultima ecuacion se puede eliminar.

Debemos interpretar este ultimo teorema con cierto cuidado. En primer lugar, los terminos de la derecha en las dos desigualdades anteriores pueder no ser nitos. Por otra parte, algunos de los operadores mas estudiados no estan de nidos para todas las funciones continuas. Por supuesto, siempre podemos considerar un subespacio de C[0; 1) donde los operadores estan bien de nidos, pero como se utilizan argumentos relacionados con las K-funcionales (1.18), los operadores deben estar de nidos para todas las fun-ciones suaves y algunas funciones suaves pueden no estar en el espacio.

Felten aplico el Teorema 3.1 a los operadores de Gauss-Weierstrass y de Szasz-Mirakyan. Feilong y Zongben extendieron los resultados al caso de operadores de Baskakov [32]. Recordemos que los operadores de Gauss-Weierstrass se de nen como

$$W(f;x) = r \frac{}{} \int_{1} \exp f\ (u\ x)^2 = 2 g f(u) du;\quad x \ 2\ R: \qquad (3.2)$$

Problema 6 Creemos que ser a interesante obtener resultados como los da-dos en el Teoremas 3.1 para el caso de aproximacion pesada.

Problema 7 >Que modulos de suavidad son los apropiados para dar esti-mados en el caso de la aproximacion pesada?

La continuidad uniforme de una funcion sobre un conjunto no acotado restringe su crecimiento. Por ejemplo, si un polinomio es uniformemente continuo en [0; 1), entonces su grado no puede ser mayor que uno. Luego, los modulos casicos de suavidad no son apropiados para obtener estimaciones de velocidad de convergencia en los espacios pesados.

Algunos autores han utilizado modulos de primer orden de la forma

$$! (f; t) = \sup_{0<h\ t} k\ {}_h fk :$$

Para los modulos de segundo orden consideran expresiones similares.

Estas de niciones parecen ser naturales. Sin embargo, estos modulos no satisfacen algunas de las propiedades de los modulos clasicos sobre conjuntos compactos. Por ejemplo, la propiedad (1.14) es importante para obtener buenos estimados y modulos como el anterior no la cumplen. Este hecho motiv a Lopez-Moreno [59] a de nir

$$(f; t) = \sup_{0<h\ t}\ \sup_{x\ 0}\ (h + x)\ jf(x + h)\ \ f(x)j; \tag{3.3}$$

para el caso cuando el peso es de la forma

$$(x) = \frac{1}{1 + x^m} ;m\ 2\ N:$$

Amanov presento una de nicion similar con modulos parecidos a los de Ditzian-Totik [5]. Para un peso continuo y no creciente, tal que 0 < (x) 1 y f 2 C [0; 1), Amanov de nio

$$!_1^{'}(f; t) = \sup_{0<h\ t}\ \sup_{x\ 0}\ (x + h'(x))\ jf(x + h'(x))\ \ f(x)j;$$

donde $'(x) = \overline{\sqrt{x}}$. Los modulos de orden superior se presentan con las variaciones usual.

Otro modulo fue introducido por Gadjiev y Aral en [43]. Supongamos que

$$2\ C^1[0; 1); \qquad (0) = 1\ \ y \qquad \inf f\ ^0(x) : x\ 2\ [0; 1\ g > 0 :$$

Para f 2 C [0; 1) y t 0 se de ne

$$(f; t) = \sup \frac{f(x)\ \ f(y)\ j}{[j\ (x^j\ \ )\ \ (y)\ j + 1]\ (x)} : x; y\ \ [0;\ \ );\ \ (x)\ \ \ (y)\ \ \ t\ :$$

(2 1 j j)

Como ellos demostraron, este modulo tiene algunas propiedades similares a la de los modulos clasicos de continuidad . Ellos lo utilizaron para presentar estimaciones para operadores lineales positivos. Un ejemplo t pico de sus resultados es el siguiente.

Teorema 3.2 (Gadjiev y Aral, [43]) Sea $\{L_n\}$ una sucesion de operadores lineales positivos. Denotemos

$$\| 1 \quad L_n(1)\| = \quad {}_n; \quad \| \quad L_n \quad \| = \quad {}_n$$

y

$$\| {}^2 \quad L_n \, {}^2 \|_{2} = \quad {}_n$$

y supongamos que

$$\lim_{n \to \infty} ({}_n + {}_n + {}_n) = 0 :$$

Entonces para cada $f \in C_{;1}[0; 1)$,

$$\| f \quad L_n f \|_4 \quad 16 \quad (f; \sqrt{{}_n + 2 {}_n + {}_n}) + \| f \| \quad {}_n:$$

Resultados como el anterior tienen algunas limitaciones. Notese que son varios los espacios pesados involucrados en el teorema. En particular, inter-vienen los espacios relacionados con los pesos , ^{2} y ^{4}.

En [35], Finta establecio estimaciones cuantitativas puntuales y globales para algunos operadores lineales y positivos en $C_b[0; 1)$ (funciones continuas acotadas) usando modulos del tipo Ditzian-Totik. Pero el uso un enfoque distinti en cada caso. En [37] se presentaron resultados m
as generales.

Dadas las funciones de peso '; : [0; 1) ! R y 0 < < 2, pongamos

$$\| f \|_0 = \sup_{x>0} \frac{(x)}{} \quad ; \quad \| f \|_2 = \sup_{x>0} \varphi^2(x) \frac{(x)}{} f''(x) \quad ;$$

$$C^0_{;}\ [0; 1) = \{f \in C_b[0; 1) : f(0) = 0; \|f\|_0 < \infty\};$$

$$C^2_{;}\ [0; 1) = \{f \in C_b^2[0; 1) : f(0) = 0; \|f\|_2 < \infty\}:$$

y

$$K_{;}\ (f;) = \inf\{\|f \quad g\|_0 + \|g\|_2 : g \in C^2_{;}\ g; > 0:$$

De nicion 3.1 Dada una sucesion f $_n$g, para la cual existe una constante positiva C tal que,

$$\frac{1}{Cn} \quad {}_n \quad \frac{C}{n}\ ; \tag{3.4}$$

decimos que una sucesion de operadores fL_ng, L_n : C_b[0; 1) ! C_b[0; 1), es de tipo f $_n$g si las condiciones siguientes se cumplen:

$$L_n(f;0) = f(0);\quad L_n(e_0;x) = 1;\quad L_n(e_1;x) = x; \tag{3.5}$$

$$L_n(e_2;x) = x^2 + C_1 \ {}_n{}'^2(x); \tag{3.6}$$

donde C_1 es una constante que no depende de n.

Teorema 3.3 (Finta, [37]) Sea fL_ng una sucesion de operadores lineales positivos tal que:

(i) $kL_nfk_0 \quad C_3kfk_0, \qquad f\ 2\ C^0_{;}\ [0;1);$

(ii) Para x 2 [1=n; 1), se tiene que

$$L_n \ Z_x(t\ u)_t \ \frac{{}' \ {}^3(u)}{} \ du \ ;x \quad C_4 n^{3=2} \ \frac{{}'(x)}{} \ :$$

(iii) Para x 2 (0; 1=n),

$$L_n \ Z_x(t\ u)_t \ \frac{{}' \ {}^2(u)}{} \ du \ ;x \quad C_5 n^2 \ \frac{{}'(x)}{} \ ;$$

(iv) $k \ L_n f \ k_2 \quad C_6 n k \ f \ {}'_0 \ {}_{\_} K \qquad f \ 2 \ C_0 \ {}_; \ [0; 1);$

(v) $k{}'^3 (L_ng)^{(3)}k_0 \quad C_7 p\, n kgk_2, \qquad g\ 2\ C^2\ {}_;\ [0;1);$

(vi) $k{}'^2 (L_ng)^{(3)}k_0 \quad C_8 nkgk_2, \qquad g\ 2\ C^2{}_; \ [0;1).$

Sea f $_n$g una sucesion para la cual se cumple la condicion (3:4).

Si fL_ng es una sucesion de operadores lineales y positivos del tipo f $_n$g, entonces existe una constante K > 1 tal que, para f 2 $C^0_;$ [0; 1), n 2 N y l Kn

$$K \ {}_; \ f; \frac{}{1}n \quad C\, n \,(kL_n(f) \ fk_0 \ \frac{}{l} \quad + kL_l(f) \ fk_0) \ : \tag{3.7}$$

Finta tambien presenta los teoremas de aproximacion directa para los operadores de tipo discreto en [38]. Los resultados pueden ser aplicados a los operadores de tipo Baskakov, operadores de Szasz-Mirakjan y a los operadores de Lupas. Recordemos que los operadores de Lupas [61] se de nen
como

$$L_n(f; x) = \frac{1}{\quad} \; 1 \; x \quad nx \quad k \; 1 \quad 2^1{}_k \, f \quad k : \tag{3.8}$$

En [55] Hong presento resultados directos e inversos para algunos operadores generales del tipo exponencial en los espacios pesados polinomiales.

Algunos de los criterios dados por Ditzian e Ivanov en [27] pueden ser usa-dos para obtener resultados inversos para la aproximacion pesada. Nosotros no analizamos aqu ese tipo de problema, ya que no hemos encontrado apli-caciones interesantes.

3.2 Estimados para los espacios C $_{;1}$[0; 1)

Segun hemos visto, se pueden de nir modulos en espacios pesados, a partir de otros conocidos para C[0; 1] (ver De nicion 1.3).

Si es un modulo de suavidad en C[0; 1], obtenemos un modulo en C $_{;1}$[0; 1) mediante la expresion

$$(f; t) = (\; f; t); \; h \; 2 \; (0; 1]; \; f \; 2 \; C_{;1}[0; 1); \tag{3.9}$$

donde el operador esta de nido segun el Teorema 1.5.

Varias relaciones de interes aparecen. Por ejemplo, si

$$'(y) = 1 \; y; \qquad y \; 2 \; [0; 1]);$$

y

$$(x) = 1 + x; \qquad x \; 2 \; [0; 1);$$

entonces

$$!^{'}(\; f; t) = ! \; (\; f; t);$$

y obtenemos un modulo de primer orden del tipo Ditzian-Totik. Aqu solo se presenta un ejemplo de como funcionan estas ideas.

Recordemos las notaciones

$$f_0(z) = \frac{1}{(z)} \; ; \; f_1(z) = \frac{z}{(z)(1+z)} \; \text{y} \; f_2(z) = \frac{z^2}{(z)(1+z)^2} : \tag{3.10}$$

Teorema 3.4 Sea $L : C_{;\infty}[0;\infty) \to C_{;\infty}[0;\infty)$ un operador lineal, acotado y positivo, con norma $\|L\|$.

Para toda $f \in C_{;\infty}[0;\infty)$, se tiene el estimado

$$\|f \quad L(f)\| \qquad \|f\| \, \|f_0 \quad L(f_0)\| + (\|L\| + 2\sqrt{\|L\|})\,\omega_1(\ f; \sqrt{\ });$$

donde

$$= \sup_{x \in [0;\infty)} (x)L((f_1 \quad xf_0)^2; x)$$

y $\omega_1(\ f; t)$ denota al primer modulo de continuidad.

Ademas, para $x \in [0;\infty)$ y $h \in (0; 1/2]$,

$$(x)\,|f(x) \quad L(f;x)| \; |(\ f)(x)|\,|(x)L(f_0;x) \quad 1| + (x)\left|L\left(f_1 \quad \frac{x}{1+x} f_0; x\right)\right| \frac{1}{h}\omega_1(\ f;h) + \left(1 + \frac{(x)L((f_1(\ x/(1+x)f_0)^2;x)}{2h^2}\right)\omega_2(\ f;h);$$

donde $\omega_2(\ f; t)$ denota al segundo modulo de continuidad clasico.

Demostracion. Se conoce que si $M : C[0;1] \to C[0;1]$ es un operador lineal y positivo y $g \in C[0;1]$, entonces

$$\|g \quad M(g)\|_\infty \qquad \|g\|_\infty \|e_0 \quad M(e_0)\|_\infty + (\|M\| + 2\sqrt{\|M\|})\,\omega_1(g; \sqrt{\ })$$

donde

$$= \sup_{y \in [0;1]} M((e_1 \quad ye_0)^2; y)$$

y ω_1 es el primer modulo de continuidad (vease [23], p. 278-279)

Por otro lado, tambien se conoce (ver [47]) que, para $h \in (0; 1/2]$ y $y \in [0;1]$, se tiene que

$$|g(x) \quad M(g;x)| \; |g(x)|\,|M(e_0;x) \quad 1| + |M(e_1 \quad ye_0; y)|\,\frac{1}{h}\omega_1(g;h) + \left(1 + \frac{M((e_1 \quad ye_0)^2; y)}{2h^2}\right)\omega_2(g;h);$$

donde $\omega_1(f;h)$ y $\omega_2(f;h)$ denotan al primer y segundo modulos de suavidad respectivamente.

El resultado se sigue de los argumentos dados anteriomente (con M = L , ver Teorema 1.5) y la de nicion de las funciones f_i (3.10). De hecho, si

$x \in [0; 1)$ y $(y) = x$, entonces

$$L(e_0; y) = ((y))L(^{1}e_0; (y)) = (x)L(f_0; x); \quad (3.11)$$

$$L(e_1 \quad ye_0; y) = (\quad (y))L(^{1}(e_1 \quad ye_0); \quad (y)) \quad (3.12)$$

$$= (x)L(f_1 \quad \frac{x}{1+x} f_0; x);$$

y

$$L((e_1 \quad ye_0)^2; y) = (\quad (y))L(^{1}(e_1 \quad ye_0)^2; \quad (y)) \quad (3.13)$$

$$= (x)L \ f_2 \quad \frac{2x}{1+x} f_1 + \frac{x^2}{(1+x)^2} f_0; x \ :$$

Otros estimados se pueden obtener, si consideramos modulos del tipo Ditzian-Totik. Para ello, necesitamos un resultado de [11]:

Teorema 3.5 (Bustamante, [11]) Si $M : C[0; 1] \to C[0; 1]$ es un operador lineal positivo tal que $M(e_0) = e_0$ y $M(e_1) = e_1$, entonces

$$|g(z) \ M(g; z)| \quad \frac{3}{2} + \frac{3}{2(h'(y))^2} \quad (M(e_2; z) \ z^2) \ \omega_2^{'}(g; h); \quad (3.14)$$

para $z \in (0; 1)$ y $g \in C[0; 1]$.

Teorema 3.6 Sea $' \in C[0; 1]$ estrictamente positiva sobre (0; 1) y supongamos que $'^2$ es concava.

Sean las funciones f_i de nidas como en (2:8), i = 0; 1; 2.

Sea

$$L : C_{;1}[0; 1) \to C_{;1}[0; 1)$$

es un operador lineal positivo tal que

$$L(f_0) = f_0 \quad y \quad L(f_1) = f_1 :$$

Si $f \in C_{;1}[0; 1)$, entonces

$$(x) \ |f(x) \ L(f; x)| \quad \frac{3}{2} + \frac{3 (x)}{2(h'(x=(1+x)))^2} (L(f_2; x) \ f_2(x)) \ \omega_2^{'}((f); h);$$

donde es el operador de nido en el Teorema 1:5 y ω_2 ((f); t) denota el

Demostracion. Con las notaciones del Teorema 1.7, para f 2 C $_{;1}$[0; 1) y g = (f), de nimos

$$M(g) = L(g) = (\quad L \quad ^{1})(g):$$

Se deduce de (1.24) que M reproduce las funciones lineales.
Ahora, si x 2 (0; 1) y

$$y = \frac{x}{1+x};$$

entonces de (3.14) obtenemos las desigualdades

$$(x)\,|\,f(x) \quad L(f;x)\,|=|\,g(y) \quad L(g;y)\,|$$

$$\frac{3}{2} + 2(h'(y))^2 \,(M(e_2; y) \;\; y^2) \;\; !_2'(g; h)$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{2(h'(x=(1+x)))^2}{3\,(x)} (L(\dagger_2; x) \;\; \dagger_2(x)) \quad !_2'(\;\; f; h):$$

El ultimo teorema se ha formulado en terminos de la funcion f_2. Esto es necesario porque el Teorema 3.5 fue obtenido para las funciones de prueba f1; x; x^2g en C[0; 1]. Estimaciones similares se dieron en [46] y [66].

Problema 8 Obtener estimaciones del error de aproximacion por medio de operadores lineales positivos en C[0; 1] para sucesiones que reproduzcan fun-ciones de prueba.

Si es un modulo de suavidad en C[0; 1], se obtiene un modulo en C $_{;1}$[0; 1) tomando

$$(f; h) = \qquad (\;\; f; h); \quad h \; 2 \; (0; 1]; \quad f \; 2 \; C_{;1}[0; 1):$$

Modulos como los de nidos en la ecuacion (3.9) son su cientes para pre-sentar estimados de la velocidad de convergencia en C $_{;1}$[0; 1), pero tienen algunos inconvenientes. Primero, si queremos calcular el modulo de una funcion concreta f, entonces debemos conocer el valor del l mite de la funcion (x)f(x) en el in nito. Segundo, como los modulos estan de nidos medi-ante composicion con la funcion , se hace dif cil la comparacion con otros modulos conocidos. En cualquier caso, queremos construir modulos equiv-alentes en C $_{;1}$[0; 1), que no hagan referencia a . En los resultados que siguen ilustramos como esto puede lograrse en dos casos particulares (pero importantes).

Teorema 3.7 Si f 2 C $_{;1}$[0; 1) y el operador esta de nido segun el Teorema 1:5, entonces para h 2 (0; 1]

$$!_1^{'}(\ f; h) = !\ (f; h)\ ; \qquad (3.15)$$

donde

$$!_1^{'}(\ f; h) = \sup_{0<t\ \ h=2\ y\ \ '(y)2[0;1]} \ \sup \ j_{\ t'(y)}\ (f)(y)\ j \qquad (3.16)$$

con '(y) = 1 y (y 2 [0; 1]) y

$$!\ (f; h) = \sup_{t2(0;h=2]} \ \sup_{(x)t\ \ x} \ j_{\ t\ (x)}(\ f)(x)\ j; \qquad (3.17)$$

para (x) = 1 + x, x 2 [0; 1).

Demostracion. Fijemos y 2 [0; 1] y h 2 (0; 1], t 2 (0; h=2] tal que y h(1 y) 2 (0; 1). Sean

$$x = \frac{y + (1\ \ y)t^2}{(1\ \ y)(1\ \ t^2)} \qquad y \qquad s = \frac{t}{(1\ \ y)(1\ \ t^2)}\ :$$

Notese que x s = (y (1 y)t), x + s = (y (1 y)t),

$$1 + x = \frac{1}{(1\ \ y)(1\ \ t^2)} \qquad y \qquad s = (1 + x)t:$$

Se sigue de lo anterior que

$$\begin{aligned} &j\ \ (f; y + (1\ \ y)t)\ \ \ \ (f; y\ \ (1\ \ y)t)\ j \\ &=j\ (x + s)f(x + s)\ \ \ (x\ \ s)f(x\ \ s)\ j \\ &\ \ \sup_{t2(0;h=2]} \ \sup_{(x)t\ \ x} \ j\ (\ f)(x +\ \ (x)t)\ \ (\ f)(x\ \ \ (x)t)\ j \\ &=\ !\ (f; h)\ : \end{aligned}$$

Esto prueba que $!_1^{'}(\ (f); h)\ \ \ \ !\ (f; h)$.

Para la desigualdad contraria, jemos s 2 (0; h=2] y x tal que '(x)s x. Pongamos ahora

$$z = \frac{x\ \ '(x)s^2}{(1 + x)(1\ \ s^2)} \qquad y \quad u = \frac{s}{(1 + x)(1\ \ s^2)}\ :$$

Tenemos las igualdades

$$^{1}(x \; '(x)s) = z \; u; \qquad ^{1}(x + '(x)s) = z + u$$

y

$$s(1 \; z) = u :$$

Por lo tanto

$$(x + '(x)s)f(x + '(x)s) \quad (x \; '(x)s)f(x \; '(x)s)$$
$$= (f; (z + (1 \; z)s) \quad (f; (z \; (1 \; z)s):$$

Esto es su ciente para probar que ! (f; h)$!_1^{'}$((f); h).

Teorema 3.8 Si f 2 C $_{;1}$[0; 1) y f esta de nida por (1:23), entonces para h 2 (0; 1=2]

$$!_1(f; h) \quad !_1^{'}(f; h)!_1(f; 2h) : \tag{3.18}$$

donde $!_1^{'}$(f; h) esta de nido por (3:16) con '(y) = (1 y)^2 y

$$!_1(f; h) = \sup_{t2(0;h=2]} \sup_{x \; t} j \; _t(f)(x) \; j : \tag{3.19}$$

Demostracion. Fijemos t 2 (0; h=2], x h y de namos

$$y = \frac{x + x^2 \; t^2}{(1 \; x)^2 \; t^2}$$

y

$$s = \frac{t}{(1 \; x)^2 \; t^2} = (1 \quad y)^2 \frac{(1 + x)^2 \; t^2}{(1 + x)^2} t = (1 \quad y)^2 u:$$

Se tiene que (y s) = x h. Por consiguiente

$$j \; _t(f)(x) \; j = j \; _{(1 \; y)^2 u} \; (f)(y) \; j \quad !_1^{'}(f; h):$$

Esto es su ciente para probar la primera desigualdad en (3.18).

Para la segunda, jemos t 2 (0; h=4] y y tal que y (1 y)^{2}h 2 [0; 1]. Sean

$$x = \frac{y + (1 \; y)^3 t^2}{(1 \, y)(1 \; (1 \; y)^2 t^2} \qquad y \qquad s = \frac{t}{1 \, (1 \; y)^2 t^2} :$$

Se sigue que (y (1 y)^{2}h) = x s. Como 2t^2 1, entonces s 2t h. Por lo tanto

$$j \quad '(y)t(\quad f)(y) = j \quad s(\quad f)(x) \; j \qquad !_1(f; 2h) :$$

Observacion 1 Los Teoremas 3.7 y 3.8 nos ayudan a comparar los modulos inducidos por C[0; 1] con algunos de los llamados modulos usuales dados en esta seccion. Por ejemplo, el modulo presentado en (3.3) usa la expresion

$$(x + t) \; j \; f(x + t) \quad f(x) \; j; \qquad (3.20)$$

mientras en (3.19) consideramos expresiones de la forma

$$j \; (x + t)f(x + t) \quad (x \;\; t)f(x \;\; t) \; j : \qquad (3.21)$$

Es claro que estudiar las magnitudes (3.20) es equivalente a considerar expresiones del tipo

$$(x + t{=}2) \; j \; f(x + t{=}2) \qquad f(x \qquad t{=}2) \; j$$

o

$$(x + t) \; j \; f(x + t) \qquad f(x \qquad t) \; j :$$

As la diferencia entre los modulos correspondientes a (3.20) y (3.21) esta dada por

$$\sup_{0<t \; h} \sup_{x \; t} \; 1 \; \frac{(x + t)}{(x \;\; t)} \; j \; (x + t)f(x + t) \qquad j$$

$$f \; \sup \sup \qquad 1 \; \frac{(x \;\; t)}{} \; :$$

Si existe una constante positiva C tal que

$$\sup_{0<t \; h} \sup_{x \; t} \; 1 \; \frac{(x + t)}{(x \;\; t)} \qquad Ct; \qquad (3.22)$$

con h 2 (0; 1=2], entonces ambos modulos tienen un comportamiento similar.

Para el caso de los pesos polinomiales (x) = (1 + x^m)^1 (m 2 N) y pesos exponenciales (x) = e^x (> 0), la condicion (3.22) se cumple.

En efecto, para el peso polinomial se tiene que, si $0 < t$ h $1=2$ y $t < x$, entonces existe $2 (x\ t; x + t)$ tal que

$$1 \quad \frac{(x\ \ t)}{(x+t)} \quad = 1 \quad \frac{1 + (x + t)^m}{1 + (x \qquad t)^m}$$

$$= \frac{(x + t)^{m} \qquad (x\ t)^m}{1 + (x \qquad t)^m} = \frac{2\, t\, m \quad ^{m\ 1}}{1 + (x \qquad t)^m} :$$

Si $t < x \qquad 3t$, entonces

$$\frac{2\, t\, m \ ^{m\ \ 1}}{1 + (x\ \ t)^m} \quad 2\, t\, m(x + t)^{m\ \ 1} \quad 2\, t\, m(4t)^{m\ \ 1} \quad m\, 2^m\, t:$$

Por otro lado, si $3t < x$, entonces

$$x + t < 2(x\ \ t):$$

Luego

$$\frac{2\, t\, m \ ^{m\ \ 1}}{1 + (x\ \ t)^m} \qquad \frac{2^m\, t\, m(x\ \ t)^{m\ \ 1}}{1 + (x\ \ t)^m} \qquad m2^m t:$$

Hemos veri cado que, para los pesos polinomiales, se cumple la condicion (3.22).

Para los pesos exponenciales, si $0 < t$ h $\quad 1=2$ y $t < x$, entonces existe $2\ (0; 2\ t)$ tal que

$$1 \quad \frac{(x\ \ t)}{(x+t)} \quad = 1 \quad \frac{e^{\ (x+t)}}{e} \quad = 1 \quad e^{2\, t}\, j$$

$$= 2\ \ t\, e2\ \ e\ \ t = C\, t :$$

Observacion 2 Si de nimos modulos de suavidad de segundo orden en $C_{;1}[0; 1)$ usando diferencias simetricas, entonces los argumentos usados en la demostracion del teorema anterior no nos sirven para obtener una caracterizacion como la dada en (3.15). Pero podemos usar la idea, menos comun, de de nir modulos en terminos de diferencias no-simetricas.

Veamos que las expresiones con diferencias simetricas, para funciones en $C[0; 1]$, conducen a no-simetricas cuando se aplica el homomor smo. Recuerdese que las diferencias simetricas de segundo orden tienen la forma

$$^2{}_u = g(z + u) \qquad 2g(z) + g(z \qquad u):$$

Para $t \in (0; 1/2]$, pongamos

$$A(t) = \{y \in [0; 1] : y \quad (1 \quad y)t \in [0; 1]\}$$

y

$$B(t) = \{x \in (0; 1) : \quad (1 + x)t \quad x\}:$$

Si $f \in C_{;1}[0; 1)$, $(f) \in C[0; 1]$ es la funcion imagen y $'(y) = 1$ y es la funcion peso (para el modulo de Ditzian-Totik), entonces

$$\sup_{y \in A(t)} | \ ^2_{(1 \quad y)t} \ (f; y) \ |$$

$$= \sup_{y \in A(t)} | \quad (f; y + (1 \quad y)t) \quad 2 \ (f; y) + \quad (f; y \quad (1 \quad y)t) \ |$$

$$= \sup_{x \in B(t)} | \ (\ f)(x + (1 + x)t) \qquad 2(\ f)(x \quad (1 + x)t^2)$$

$$+(\ f)(x \quad (1 + x)t) \ | :$$

Notese que el termino $2(\ f)(x \ (1+x)t^2)$ rompe la simetr a. Por supuesto, podemos regresar a diferencias simetricas, si consideramos un termino extra en la de nicion de los modulos. Para ello basta sumar y restar $2(\ f)(x)$. Veamos que en tal caso, el comportamiento de los modulos es similar. En efecto, solo necesitamos una buena expresion para estimar la diferencia

$$(\ f)(x \quad (1 + x)t^2) \quad (\ f)(x):$$

Veamos como hacerlo:

$$\sup_{0<t \ h} \ \sup_{x \in B(t)} | \ (\ f)(x) \quad (\ f)(x \quad (1 + x)t^2) \ | :$$

$$= \sup_{0<t \ h} \ \sup_{x \in B(t)} \quad f; \frac{x}{1 + x} \qquad f; \frac{x \ (1 + x)t^2}{(1 + x)(1 \qquad t^2)}$$

$$= \sup_{0<t \ h} \ \sup_{y \in A(t)} \quad f; y + \frac{(1 \quad y)t^{\ 2}}{t^2} \qquad f; y \quad \frac{(1 \quad y)t^{\ 2}}{t^2}$$

$$= !_1 \ (f); \ \frac{2h^{\ 2}}{2 \ h^2} \quad = ! \quad f; \ \frac{2h^2}{2 \ h^2} \ ;$$

para $h \ \sqrt{2/3}$, con $'(y) = 1 \ y$ y $(x) = 1 + x$.

3.3 Convergencia sobre los compactos

En cuanto a la convergencia en los intervalos compactos recordemos algunas ideas de Ditzian en [25].

Fijemos a; b 2 R (a < b), un conjunto cerrado T R y sea

$$S = [a; b] \setminus T \qquad (6= ;) :$$

De nicion 3.2 Dada una funcion ja 1, una sucesion $fL_n g$ de opera-dores lineales positivos es de tipo K(T; S;), si se cumplen las condiciones siguientes:

(i) El dominio de cada uno de los L_n contiene todas las funciones f tales que

$$jf(t)j \quad C(f)\ (1 + t^2)\ (t); \qquad (t\ 2\ T\ );$$

donde C(f) es una constante que depende de f.

(ii) Para k 2 f0; 1; 2g, se tiene que

$$\lim_{n\,!1} kL_n(t^k; x) \quad x^k k_{C(S)} = 0:$$

(iii) Existe una constante K tal que

$$kL_n((t \quad x)^2 \ (t); x)k_{C(S)} \quad KkL_n((t \quad x)^2; x)k_{C(S)};$$

y

$$\lim_{n\,!1} \quad {}_n = 0;$$

donde ${}_n = \sqrt{kL_n((t \quad x)^2; x)k_{C(S)}}$.

Teorema 3.9 (Ditzian, [25]) Sea $fL_n g$ una sucesion de operadores lineales positivos de tipo K(T; S;).

(i) Si S_1 es un conjunto cerrado y S_1 S, entonces para f 2 $C(S_1)$,

$$\lim_{n\,!1} kf \quad L_n(f)k_{C(S_1)} = 0:$$

(ii) Ademas, si $S_1 = [a; b]$, $S_2 = [a_2; b_2]$ S_1 y si, para algun > 0,

$$[a_2 \quad ; b_2 + \ ] \setminus T \setminus f(\ 1; 1)nS_1 g = ; ;$$

entonces

$$kL_n(f; x) \quad f(x)k_{C(S_2)} \quad kfkkL_n(1) \quad 1k$$
$$+kL_n(1) + 1k!(f; \ {}_n) + L_f \ {}^2_n:$$

Otros resultados se pueden encontrar en [30], [65], [76], [77], [78] y [79].

4

Teoremas directos en espacios con pesos polinomiales

En este cap tulo presentaremos algunos resultados directos (en terminos de K-funcionales). Nos limitamos a los pesos de tipo polinomial. En particular, para f 2 C [0; 1) y '(x) = $\sqrt{x(1 + ax)}$ (a es un entero no negativo), consideramos la K-funcional de nida por (1.18).

El resultado principal se presenta en el Teorema 4.1. En este se da un conjunto de condiciones su cientes para obtener la convergencia, en un es-pacio pesado, de una sucesion de operadores lineales y positivos. A primera vista puede parecer un resultado demasiado tecnico, pero las condiciones son t picas en esta teor a. Ademas, analizaremos casos en los que se cumplen todas las condiciones del Teorema 4.1.

En el Teorema 4.2 mostraremos que, si tenemos una buena representacion para los momentos $L_n(t^m; x)$, entonces las condiciones del Teorema 4.1 se cumplen. En particular, para operadores L_n que reproducen las funciones lineales, con momentos que cumple la ecuacion

$$L_n((t \quad x)^2; x) = \quad {}_n'^2(x);$$

podemos obtener una desigualdad de tipo (1.30)(presentada al inicio), cuan-do se conoce un desarrollo asintotico para la sucesion f$L_n(t^m; x)$g de los momentos.

En la Seccion 4.2 damos varias aplicaciones de los Teoremas 4.1 y 4.2.

4.1 Teoremas generales

Teorema 4.1 Fijemos un entero positivo m y pongamos

$$(x) = \frac{1}{(1+x)^m} :$$

Sea fL$_n$g,

$$L_n : C\,[0; 1) \; ! \; C[0; 1)$$

una sucesion de operadores lineales y positivos que cumplen las condiciones siguientes:

(i) Para i 2 f0; 1g, $L_n(t^i; x) = x^i$.

(ii) Existe una sucesion f $_n$g de numero reales y a 2 N_0 tal que

$$L_n((t \quad x)^2; x) = \quad {}_n\,'^2(x);$$

donde '(x) = $p\ \overline{x(1 + ax)}$.

(iii) Para cada entero positivo r, existe una constante $C_1 = C_1(r)$ tal que, para cada n 2 N y x 0,

$$L_n((1 + t)^r; x) \qquad C_1(1 + x)^r :$$

(iv) Existe una constante C_2 tal que, para cada n 2 N,

$$(x)\, L_n \; \frac{(t \;\; x)^2}{(t)}; x \qquad C_2 \; {}_n\,'^2(x); \qquad x \quad 0:$$

Entonces para 2 [0; 1], existe una constante $C_3 = C_3(m; \,)$ tal que para cualquier f 2 C [0; 1), x 2 [0; 1) y n 2 N, se tiene que

$$(x)\; jf(x) \;\; L_n(f; x)jC_3\, K_{'} \;\; (f; \; p \qquad \overline{}_n \; '^{2(1 \;\;)}(x)) \; ; \qquad x \quad 0: \quad (4.1)$$

donde $K_{'}$ (f; t) es la K-funcional de nida en (1:18).

Demostracion. Fijemos f 2 C [0; 1) y x 0. De la positividad de los operadores y de la condicion (iii) se obtiene

$$(x)\ j\ L_n(f; x)\ j(x)\ L_n(j\ f\ j; x) = (x)\ L_n \quad j\ f\ j \ ; x$$
$$1$$

$$kfk\ (x)\ L_n \quad ; x \ = kfk \qquad \frac{(1+x)_m \ L_n ((1+t)_m; x)}{1} \qquad C_1\ kfk :$$
$$1$$

Se sigue de la de nicion de la norma que

$$kL_n(f)k \quad C_1\ kfk \tag{4.2}$$

En particular, si denotamos por kL_nk a la norma del operador L_n, considerado de C [0; 1) en C [0; 1), entonces

$$\sup_{n2N} kL_nk \qquad C_1:$$

Es decir, la sucesion fL_ng esta uniformemente acotada en el espacio pesado.

Para logar un estimado en terminos de la K-funcional, necesitamos estudiar el comportamiento de los operadores sobre algunas funciones suaves.

Para f 2 C [0; 1) y g 2 C^2[0; 1) arbitraria, considerando el estimado (4.2), tenemos que,

$$(x)\ jf(x) \qquad L_n(f; x)j$$

$$= \ (x)\ jf(x)\ \ g(x) + g(x)\ \ L_n(g; x) + L_n(g; x)\ \ L_n(f; x)j$$

$$(x)\ (j\ f(x)\ g(x)\ j + j\ g(x)\ L_n(g; x)\ j + j\ L_n(g; x)\ L_n(f; x)\ j)\ kf\ gk + j$$

$$g(x)\ L_n(g; x)\ j + (x)\ j\ L_n(g\ f; x)\ j$$

$$kf \quad gk + j\ g(x)\ \ L_n(g; x)\ j + C_1\ kf \quad gk$$

$$= \ (1 + C_1)\ kf \quad gk + \ (x)\ jg(x)\ \ L_n(g; x)j : \tag{4.3}$$

Para estimar el ultimo termino, utilizando la formula de integracion por partes, no es dif cil veri car que

$$g(t) = g(x) + g^0(x)(t \quad x) + Q(g; t; x)$$

donde

$$Q(g; t; x) = \int_x^t g^{00}(u)(t \quad u)du:$$

Luego, considerando las condiciones (i) y (ii), obtenemos que

$$g(x) \quad L_n(g; x) = g(x) \quad L_n (g(x) + g^0(x)(t \quad x) + Q(g; t; x); x)$$

$$= g(x) \ g(x)L_n (1; x) \ g^0(x)L_n(t \ x; x) \ L_n (Q(g; t; x); x)$$

$$= L_n (Q(g; t; x); x) : \tag{4.4}$$

Veamos como estimar el ultimo termino:

$$jL_n (Q(g; t; x); x)j = L_n \int_t^x g^{00}(u)(t \ u)du; x$$

$$L_n \int_t^x g^{00}(u)(t \ u)du \ ; x$$

$$L_n \int^x j g^{00}(u)(t \quad u) j du \ ; x \ : \tag{4.5}$$

Notese que

$$\int_x^t j g^{00}(u)(t \quad u) j \quad du = \int_x^t (u)'^2 (u)g^{00} (u) \quad \frac{t \ u}{(u)'^2 (u)} \quad du$$

$$' \ {}^2_{g^{00}} \int_x \frac{t \quad u}{(u)'^2 (u)} du : \tag{4.6}$$

Ahora consideramos dos casos.

Caso 1 Supongamos que a > 0. Notese que, para t x (con el cambio de variables u = (x t) + t),

$$\int_t^x \frac{t \ uj}{'^2 (u) (u)} du = \int_t^x \frac{(u \ t)(1 + u)^m}{u (1 + au)} du$$

$$\int_t^x \frac{(u\ t)(1+u)^m}{u} du \quad \frac{(1+x)^m}{d} \int_t^x \frac{(u\ t)du}{u}$$

$$\frac{(x\ t)^2}{x} \quad (1+x)^m \int_0^1 d \quad \frac{C(x\ t)^2}{\varphi^2 (x)(x)} :$$

con C = a =(2).
Por otra parte, si x < t, entonces

$$\int_x^t \frac{t\ uj}{\varphi^2 (u)(u)} du = \int_x^t \frac{(t\ u)(1+u)^m}{u(1+au)} du$$

$$\frac{(1+t)^m}{x(1+ax)} \int_x^t (t\ u)du = \frac{(1+t)^m}{2x(1+ax)} (t\ x)^2$$

$$= \frac{1}{2} \frac{(t\ x)^2}{\varphi^2 (x)(t)} :$$

Caso 2 Supongamos que a = 0. Notese que, para t x (con el cambio de variables u = (x t) + t),

$$\int_t^x t\ uj\ du = \int_t^x (u\ t)(1+u)^m du$$

$$(1+x)^m \int_t^x \frac{(u\ t)}{} du$$

$$= (x\ t)^2 (1+x)^m \int \frac{1}{(x+(1\ )t)} d$$

$$\frac{(x\ t)^2}{x} (1+x)^m \int_0^1 1\ d = \frac{(x\ t)^2}{(2\ )\varphi^2 (x)(x)} :$$

Por otra parte, si x < t, entonces

$$\int_x^t t\ uj\ du = \int_x^t (t\ u)(1+u)^m du$$

$$\frac{(1+t)^m}{} \int^t \quad \frac{(1+t)^m}{} \quad 2$$

x 2x

$$= \frac{1}{2} \frac{(t \ x)^2}{'^2(x)\ (t)} :$$

Con los estimados anteriores, se sigue de (4.6) que, existe una constante C tal que

$$\int_x^t g''(u)(t \quad u) \ du \quad C \ '^2 g'' \quad \frac{(t \ x)^2}{'^2(x)} \quad \frac{1}{(x)} + \frac{1}{(t)} :$$

Regresando a (4.5) y utilizando (ii) y (iv) obtenemos

$$|L_n(Q(g; t; x); x)| \quad L_n \quad \int_x^t g''(u)(t \ u)du \quad ; x$$

$$C \ '^2 g'' \quad \frac{k \ '^2(x)}{k} \quad L \ \frac{n}{(t \ x)^2} \ ; x \ + L \ \frac{n}{(t \ x)^2} \ ; x$$

$$C_3 \ k'^2 g'' k \quad \frac{n}{'^2(x)} \ \frac{'^2(x)}{(x)} :$$

Luego, de (4.4) obtenemos

$$(x) \ |g(x) \quad L_n(g; x)| \quad C_3 \ k'^2 g'' k \quad n'^{2(1 \ )}(x) :$$

Finalmente, de (4.3) se tiene el estimado

$$(x) \ |(f(x) \quad L_n(f; x))|$$
$$C_4 \ kf \quad gk \ + \ n'^{2(1 \ )}(x) \ k'^2 g'' k :$$

Como $g \in C^2[0; 1)$ es arbitraria, se tiene

$$(x) \ |(f(x) \quad L_n(f; x))| \quad C_3 \ K_{'} \ f; \ n'^{2(1 \ )}(x) :$$

Observacion 3 Si $n \to 0$ (segun $n \to 1$) y $f \in C_{;1}[0; 1)$, el Teorema 4.1 proporciona un estimado de la velocidad de convergencia.

En muchos trabajos, conocer una formula del tipo (4.7) para una sucesion de operadores se le llama el desarrollo asintotico.

Observacion 4 Desde el punto de vista de las aplicaciones, resulta intere-sante conocer cuando algunas de las condiciones asumidas en el Teorema 4.1, se in eren de otras propiedades de los operadores.

En algunos casos las condiciones (iii) y (iv) en el Teorema 4.1 se pueden deducir de algunas identidades asociadas a los operadores. Aqu presentamos solo un resultado para el caso donde $'(x) = \sqrt{x}$ (a = 0).

Teorema 4.2 Fijemos un entero positivo m y un numero 2 [0; 1]. Sera

$$(x) = \frac{1}{(1+x)^m}:$$

Sea L_n : C (I) ! C(I) una sucesion de operadores lineales y positivos, para la cual las condiciones (i) y (ii) en Teorema 4:1 se cumplen, con

$$'(x) = \sqrt{x}:$$

Sea c 2 R un numero o negativo.

Supongamos que, para toda k 2 N, existen numeros reales $fa_{k;j}g_{j=1}^{k}$, con $a_{k;k} = 1$ tales que, para cada n 2 N, se tiene que

$$L_n(t^k; x) = \sum_{j=1}^{k} a_{k;j} \frac{x^j}{(n+c)^{k-j}}; \quad x \quad 0: \tag{4.7}$$

Entonces, para f 2 C [0; 1), x 2 [0; 1) y n 2 N, se cumple la desigualdad (4:1).

Demostracion. Vamos a veri car que las condiciones (iii) y (iv) del Teo-rema 4.1 se cumplen.

Denotemos

$$C_r = \max f ja_{k;j}j : 1 < j < k < rg :$$

Primero veri caremos la condicion (iii). Fijemos un entero positivo r. De la representacion (4.7), utilizando la formula de binomio de Newton, obtenemos

r

X

$$= \sum_{k=0}^{r} m \qquad = 1 + \sum_{k=1}^{r} \sum_{j=1}^{k} \frac{x^j}{\quad}$$

$$= 1 + \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=j}^{r} \frac{k\ (n+c)^{k}\ j^{1+}}{\quad} \qquad \sum \sum \frac{\quad}{+c)^{k\ j}}$$

$$C_r \quad 1 + \sum^{r} \sum^{r} x^j \quad \frac{k\ n^{k\ 1\ j}!}{\quad}$$

$$C_r \quad 1 + \sum^{r} \sum^{r} x^j \quad k \quad !$$

$$2^r C_r \quad 1 + \sum_{j=1}^{r} x^j\ !\ 2^r C_r \quad 1 + \sum_{j=1}^{r} j\ x^j\ !$$

$$= 2^r C_r (1+x)^r:$$

Veamos ahora la condicion (iv). Debemos veri car que

$$(x)\, L_n \left(\frac{(t\ \ x)^2}{(t)}; x \right) \quad C_2 \frac{'^2(x)}{n}; \qquad x \quad 0;$$

con $(x) = (1+x)^m$.

Sea

$$C_{m+2} = \max f\, ja_{i;j} j : 1 \quad j \quad i \quad m+2\, g :$$

Considerando (4.7), para $1 \quad k \quad m$, tenemos

$$L_n((t\ \ x)^2 t^k; x) = L_n(t^{k+2}; x)\ \ 2xL_n(t^{k+1}; x) + x^2 L_n(t^k; x)$$

$$= \frac{a_{k+2;0}}{(n+c)^{k+2}} + \frac{a_{k+2;1}\ \ 2a_{k+1;0}}{(n+c)^{k+1}} x + \sum_{j=2}^{k+2} \frac{a_{k+2;j}\ \ 2a_{k+1;j\ 1} + a_{k;j\ 2}}{(n+c)^{k+2\ j}} x^j$$

$$= \frac{a_{k+2;0}}{(n+c)^{k+2}} + \frac{a_{k+2;1}\ \ 2a_{k+1;0}}{(n+c)^{k+1}} x + \sum_{j=2}^{k+1} \frac{a_{k+2;j}\ \ 2a_{k+1;j\ 1} + a_{k;j\ 2}}{(n+c)^{k+2\ j}} x^j:$$

En el caso k = 0 el ultimo termino debe eliminarse.

Repitiendo los argumentos utilizados anteriormente, obtenemos

$$L_n((t-x)^2(1+t)^m; x) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} L_n((t-x)^2 t^k; x)$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} L_n((t-x)^2 t^k; x)$$

$$\leq 2^{m+2} C_{m+2} \frac{x}{n+c} (1+x)^m :$$

Usualmente, cuando se trata de obtener un estimado como en (1.30), es necesario tener a mano una caracterizacion del modulo de continuidad en terminos de una K-funcional apropiada. Esto signi ca tener un sistema de desigualdades de la forma

$$C_1 \omega_\varphi^2 (f; t) \leq K_\varphi (f; t^2) \leq C_2 \omega_\varphi^2 (f; t) : \tag{4.8}$$

Para los modulos pesados de suavidad, el texto fundamental para ver carac-terizaciones como la indicada mas arriba, es la monograf a de Ditzian y Totik [28].

Por supuesto, en esta tesis solo necesitamos la segunda desigualdad. Existe un problema. En [28] todas las desigualdades del tipo (4.8) son probadas para $t \in (0; t_0]$, donde el numero $t_0 < 1$ depende del peso φ. Por otro lado, para un intervalo no acotado y las funciones $\varphi(x) = \sqrt{x}$ y $\varphi(x) = \sqrt{x(1+x)}$, el argumento de los modulos de suavidad en (1.30) no esta $\neq 1$). Observemos que algunos autores usan los resultados de Ditzian y Totik para todos los valores de t, pero nosotros no hemos podido encontrar una prueba para tal caracterizacion. En los casos mas importantes (= 0, estimado puntual del tipo Becker) y = 1 (estimado en norma), podemos utilizar los Teoremas 4.1 y 4.2 para obtener estimados en terminos de modulos de suavidad.

Teorema 4.3 Supongamos que las condiciones del Teorema 4:1 o las del Teorema 4:2 se cumplen.

(i) Existe una constante C tal que, para cualquier $f \in C[0; \infty)$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que $\gamma_n \leq 1/(4(2+a))$, se tiene

$$\| f - L_n(f) \| \leq C \omega_\varphi^2 (f; \sqrt{\gamma_n}) ; \tag{4.9}$$

donde $\omega_\varphi(f; t)$ es el modulo de nido en (1:17), con = 1.

(ii) Existe una constante C tal que, para cualquier f 2 C [0; 1) y n 2 N tal que $_n$ 1=(1 + a), se tiene

$$(x)\ jf \quad L_n(f; x)jC\ !^2(f; \qquad p_n \quad '(x))\ ; \ \ x \quad 0\ ; \qquad (4.10)$$

donde $!^2(f; t)$ es el modulo de nido en (1:17), con = 0.

Demostracion. Solo necesitamos veri car que en la tesis de los Teorema 4:1 y Teorema 4:2, podemos cambiar la K-funcional por el modulo de con-tinuidad correspondiente. Esto es, solo necesitamos condiciones bajo las cuales se tenga la segunda desigualdad en (4.8). Para ello nos apoyamos en las ideas desarrrolladas por Ditzian y Totik.

(i) De los resultados de [28], sabemos que se cumple (4.8) para t 2 (0; t_0], donde t_0 se elige como sigue (ver [28]), pag. 16-17).

Fijemos un numero A tal que '(x) A^{p}x, para 0 x 1=2 y para cualquier t > 0, pongamos t = $(2At)^2$. Entonces t_0 se elige de tal forma que, para 0 < h t < t_0 y x > t

$$\frac{x}{2} \quad x\ \ h'(x)\ : \qquad (4.11)$$

As nosotros podemos tomar

$$A = p\overline{\quad 1 + a=2} \quad y \quad t = 2(2 + a)t^2:$$

Como la desigualdad (4.11) es equivalente a la desigualdad

$$\frac{4h^2}{1 \quad 4ah^2}\ x;$$

(asumiendo que $4ah^2 < 1$), se necesita

$$\frac{4t^2}{1\ \ 4t^2}\ x; \qquad para \qquad t < x\ :$$

Pero la desigualdad

$$\frac{4h^2}{1 \quad 4ah^2}\ t$$

es justamente equivalente a esta otra:

$$t\ \frac{1}{4(2 + a)}\ :$$

As nosotros podemos elegir

$$t_0 = 1=4(2 + a):$$

Con esta eleccion se cumple la segunda desigualdad en (4.8) y, por lo tanto, hemos demostrado (i).

(ii) En este caso, la prueba es mas simple. Segun la ecuacion (21) en [28]), se sabe que, para cualquier h > 0,

$$K_{'_0}(f; h^2) \quad 10\ !_{'_0}^{2}(f; h) :$$

Hemos escrito $'^0$ para indicar que se trata de los modulos de continuidad usuales.

4.2 Aplicaciones

Como un primer ejemplo, consideremos una sucesion de operadores de tipo Baskakov.

4.2.1 Operadores de Baskakov

Recordemos que en la ecuacion (2.2) presentamos los los operadores originales de Baskakov

$$\sum_{x}^{1} f \quad \frac{k}{} \quad n \quad k\ 1 \quad \frac{x^k}{}$$

Algunos autores han considerados generalizaciones de estos operadores. En particular, para c 2 N jo sea

$$_{n;c}(x) = \frac{1}{(1 + cx)^{n=c}}$$

y consideremos el peso

$$(x) = \frac{1}{(1 + x)^m};$$

donde m es un entero positivo jo.

Sea $L_{n;c}$, la sucesion de operadores lineales y positivos,

$$L_{n;c} : C[0; 1) \ ! C[0; 1);$$

de nidas por

$$L_{n;c}(f;x) = \quad x \quad 1 \quad \frac{k}{} \qquad \frac{^{(k)}(x)\, x^k}{}; \qquad x \quad 0: \qquad (4.12)$$

Notese que cuando a = 1, $L_{n;a}(f;x) = V_n(f;x)$.

Para simpli car, consideramos la base de Baskakov

$$v_{n;k;c}(x) = (\ 1)^k \frac{_{n;c}^{(k)}(x)x^k}{k!} :$$

Veremos que podemos aplicar los resultados anteriores considerando la funcion

$$'(x) = \overline{\ x(1 + cx)}:$$

Utilizaremos en convenio siguiente: $\prod_{j=1}^{k} a_k = 1$, si k < j.

Los resultados de las tres

Proposicion 4.1 Para cada n 2 N y k 0,

$$^{(k)}_{n;c}(x) = \frac{(\ 1)^k}{(1 + cx)^{k+n=c}} \prod_{j=1}^{k} (n + (j\ \ 1)c);$$

$$v_{n;k;c}(x) = \frac{n(1 + cx)}{n + ck} v_{n+c;k;c}(x)$$

$$= \frac{nx}{k} v_{n+c;k\ \ 1;c}(x) = \frac{x(n + (k\ \ 1)c)}{k(1 + cx)} v_{n;k\ \ 1;c}(x)$$

y

$$\frac{n}{n} \quad x \quad \frac{}{k} v_{n;k;c}(x) \qquad (4.13)$$

$$= n(v_{n+c;k\ \ 1;c}(x)\ v_{n+c;k;c}(x)):$$

Demostracion. La primera igualdad se obtiene por un calculo directo.

Para la segunda, se tiene

$$v_{n;k;c}(x) = (\ 1)^k \frac{_{n;c}^{(k)}(x)x^k}{k!} = (\ 1)^k \frac{n(1 + cx)\ _{n+c;c}^{(k)}(x)x^k}{(n + kc)k!}$$

$$= \frac{n(1+cx)v_{n+c;k;c}(x)}{n+ck} = (\ \ 1)^{k\ \ 1}\,\frac{n\ {}_{n+c;c}^{(k\ \ 1)}(x)x^k}{k(k\ \ 1)!}$$

$$= \frac{nx}{k}\,v_{n+c;k\ \ 1;c}(x) = (\ \ 1)^{k\ \ 1}\,\frac{(n+(k\ \ 1)c)\ {}_{n;c}^{(k\ \ 1)}(x)x^k}{k(1+cx)(k\ \ 1)!}\,:$$

Por otro lado

$$v^0_{n;k;c}(x) = \frac{(\ \ 1)^k}{k!}\left(kx^{k\ \ 1}\ {}^{(k)}_{n;c}(x) + {}^{(k+1)}_{n;c}(x)x^k\right)$$

$$= \frac{(\ \ 1)^k}{k!}\ \ \frac{k}{x}\ \ \frac{1}{1+cx}\ {}_{n;c}^{(k)}(x)x^k$$

$$= \frac{k(1+cx)\ \ (n+kc)x\ \ nv_{n;k;c}(x)}{nx(1+cx)}$$

$$= n\ \ \frac{x}{k}\ \ \frac{x}{n}\ \ \frac{1+cx}{v_{n;k;c}(x)}$$

$$= \frac{nv_{n;k;c}(x)}{x(1+cx)}\ \frac{k(1+cx)\ \ (n+kc)x}{n}$$

$$= \frac{n}{x(1+cx)}\left(x(1+cx)v_{n+c;k\ \ 1;c}(x)\ \ x(1+cx)v_{n+c;k;c}(x)\right)\,:$$

Proposicion 4.2 Para cada n 2 N, x 2 $[0; 1)$ y f 2 $C[0; 1)$

$$L_{n;c}(f;0) = f(0); \qquad L_{n;c}(e_0) = e_0; \tag{4.14}$$

$$L_{n;c}(\ (e_1\ \ x)\ f(e_1); x) = \frac{x(1+cx)}{n}\ \frac{d}{dx}\ L_{n;c}(f;x); \tag{4.15}$$

y

$$L_{n;c}^{0}(f;x) = \ \ n\ V_{n+c;c}(f\ \ g_n\ \ \ f\ \ h_n; x)$$

donde

$$g_n(x) = \frac{(n+1)x\ \ \ 1}{n} + \frac{}{n} \quad y \quad h_n(x) = \frac{(n+1)x}{n}\ \ :$$

Demostracion. Segun la de nicion, esta claro que $L_{n;c}(f;0) = f(0)$ y

$$L_{n;c}(e_0;x) = \sum_{=0}^{1} \frac{{}_{n;c}^{(k)}(x)}{k!}(0\ \ x)^k = {}_{n;c}(0) = 1;$$

donde hemos considerado el desarrollo de Taylor de la funcion $\varphi_{n;c}$ en el punto cero.

La igualdad dada en la ecuacion (4.15) se sigue de (4.13). Considerando la Proposicion 4.1, obtenemos

$$\sum_{k=1}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) v'_{n;k;c}(x) = n\sum_{k=1}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right)\left(v_{n+c;k-1;c}(x) - v_{n+c;k;c}(x)\right)$$

$$= n\left(\sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k+1}{n}\right) v_{n+c;k;c}(x) - \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) v_{n+c;k;c}(x)\right)$$

$$= nL_{n+c;c}(f \circ g_n - f \circ h_n; x):$$

Necesitamos estudiar los momentos de estos operadores. Estos se pueden obtener mediante una formula de recurrencia.

Proposicion 4.3 Para $p = 0; 1; 2; \ldots$, pongamos

$$M_{n;p}(x) = L_{n;c}((e_1 - x)^p; x): \tag{4.16}$$

Entonces $M_{n;0} = 1$, $M_{n;1} = 0$ y para $p \geq 1$

$$M_{n;p+1}(x) = \frac{\varphi^2(x)}{n}\left(M'_{n;p}(x) + p\, M_{n;p-1}(x)\right):$$

Demostracion. Como $L_{n;c}(e_0; x) = 1$, se sigue de (4.15) con $f(t) = 1$ que $L_{n;c}(e_1; x) = x$.

Hemos verificado que $M_{n;0} = 1$ y $M_{n;1} = 0$.

Para $p \geq 1$, tomando en (4.15) $f_y(t) = (t - y)^p$, se obtiene

$$M_{n;p+1}(x) = \frac{\varphi^2(x)}{n} \lim_{y \to x} \frac{d}{dx} L_{n;c}(f_y; x)$$

$$= \frac{\varphi^2(x)}{n}\left(L'_{n;c}((e_1 - x)^p; x) + pL_n((t - x)^{p-1}; x)\right):$$

Ahora, utilizando la Proposicion 4.3, es facil obtener el resultado siguiente.

Proposicion 4.4 Bajo las notaciones anteriores

(i) Para toda $n \in \mathbb{N}$ y $x \geq 0$,

$$L_{n;c}(e_1; x) = x; \qquad L_{n;c}(e_2; x) = x^2 + \frac{\varphi^2(x)}{n}; \tag{4.17}$$

y

$$L_{n;c}(\varphi^2; x) = \varphi^2(x)(1 + c\,\delta_n)$$

con $\varphi(x) = \sqrt{x(1 + cx)}$ y $\delta_n = 1/n$.

(ii) Si

$$M_{n;p}(x) = L_{n;c}((e_1 - x)^p; x); \qquad p = 0; 1; 2; \cdots;$$

entonces

$$M_{n;0} = 1; M_{n;1} = 0$$

y para $p \geq 1$

$$M_{n;p+1}(x) = \delta_n \varphi^2(x)(M_{n;p}{}^0(x) + p\, M_{n;p}(x)): \tag{4.18}$$

Teorema 4.4 Existe una constante C tal que, para cualquier $f \in C\,[0; \infty)$, $x \in [0; \infty)$ y $n \in \mathbb{N}$ ($n \geq 4(2 + c)$), se cumple

$$\varphi(x)\,|f(x) - L_{n;c}(f; x)| \leq C\,\omega^2_{\varphi}\left(f; \sqrt{\frac{\ }{x(1 + ax)}}\right)!;$$

donde $\omega^2(f; t)$ es el modulo definido en (1:17) con $= 0$. Ademas para $n \geq 4(2 + c)$, se cumple

$$\|f - L_{n;a}(f)\| \leq C\,\omega^2_{\varphi}\left(f; 1/\sqrt{n}\right)$$

donde $\varphi(x) = \sqrt{x(1 + cx)}$.

Demostracion. Debemos verificar todas las condiciones del Teorema 4.1 y luego aplicar el Teorema 4.3. Algunas de ellas son resultados conocidos pero, para conveniencia del lector, incluimos las demostraciones. Las verificaremos en el mismo orden en que aparecen en dicho teorema.

(i) El hecho de que los operadores reproducen las funciones lineales se verifico en (4.14) y (4.17) respectivamente.

(ii) Segun (4.17),

$$L_{n;c}((t-x)^2;x) = L_{n;c}(t^2;x) - 2x\,L_{n;c}(t;x) + x^2 L_{n;c}(e_0;x)$$

$$= L_{n;c}(t^2;x) - x^2 = \frac{\varphi^2(x)}{n}.$$

Lo cual dice que la condicion (ii) se cumple con

$$\lambda_n = \frac{1}{n} \quad \text{y} \quad \varphi(x) = \sqrt{x(1+cx)}.$$

(iii) Se puede repetir la demostracion del Lema 5 de [8], para verificar que se cumple la condicion (iii). Tambien se pueden utilizar la demostracion dada por Lopez-Moreno en el Lema 2 de [59].

(iv) Para la condicion (iv) ver la demostracion de la desigualdad analoga en la pagina 134 de [8].

Hemos verificado que los operadores $L_{n;c}$ satisfacen las condiciones (i)-(iv) del Teorema 4.1 con $\lambda_n(x) = 1/n$ y $\varphi(x) = \sqrt{x(1+x)}$.

La primera desigualdad se sigue de (4.10), considerando que

$$\lambda_n = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{4(2+c)};$$

si

$$n \geq 4(2+c);$$

ya que en este caso $a = c$.

La segunda estimacion se deriva de (4.9).

4.2.2 Operadores del tipo de Szasz-Mirakyan

Como un segundo ejemplo consideramos las sucesiones de operadores del tipo de Szasz-Mirakyan siguientes.

Fijemos $c \in \mathbb{R}$ ($c \geq 0$) y sea

$$X^{1} \quad \frac{\quad}{} \quad {}_k x_k \; f \quad \frac{k}{\quad} \quad ; \qquad x \geq 0: \tag{4.19}$$

Como antes, dado un entero positivo m, consideramos el peso polinomial

$$(x) = \frac{1}{(1 + x)^m}:$$

Teorema 4.5 Fijemos $c \in \mathbb{R}$ ($c \geq 0$) y un entero positivo m. Supongamos que el peso esta dado como mas arriba y los operadores $S_{n;c}$ estan de nidos por (4:19).

(i) Se tiene que

$$S_{n;c} : C [0; 1) \quad ! \; C [0; 1):$$

Para n, $S_{n;c}$ es un operador lineal y positivo y la sucesion $fS_{n;c}g$ esta uniformemente acotada en estos espacios.

(ii) Existe una constante C tal que, para cualquier $f \in C [0; 1)$, $x \in [0; 1)$ y $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$(x)|f(x) \quad S_{n;c}(f; x)| \quad C\, !^2 \; f; \quad \overline{x=(n + c)}$$

donde $!^2$ $(f; t)$ es el modulo de nido por (1:17) (con $= 0$).

(iii) Existe una constante C tal que, para $n \geq 8$ y $f \in C [0; 1)$ se cumple

$$\|f \quad S_{n;c}(f)\| \quad C\, !^2_{'} \; f; 1= \sqrt{n + c}$$

donde $'(x) = \sqrt{x}$ y $!^2_{'}$ $(f; t)$ es el modulo de nido por (1:17) (con $= 1$).

Demostracion. En este caso obtendremos el resultado como consecuencia del Teorema 4.2. Para ello, debemos veri car primero las condiciones (i) y (ii) del Teorema 4.1.

Del desarrollo en series de potencias de la funcion $g(x) = e^x$, se sigue inmediatamente que $S_{n;c}(1; x) = 1$. Por otro lado, si $f(x) = x$, de la de nicion de los operadores se tiene que

$$X^{1} \quad \frac{\quad}{} \quad {}_k x_k \; f \quad \frac{k}{\quad}$$

$$= e^{(n+c)x} \sum_{k=0}^{1} \frac{(n+c)^k x^k}{k!} \frac{k}{n+c}$$

$$= e^{(n+c)x} \sum_{k=1}^{1} \frac{(n+c)^{k\ 1} x^k}{(k\ 1)!}$$

$$= x\, e^{(n+c)x} \sum_{k=0}^{1} \frac{(n+c)^k x^k}{k!} = x:$$

Esto es

$$S_{n;c}(t; x) \quad = \quad x: \tag{4.20}$$

Con esto hemos veri cado la condicion (i) en el Teorema 4.1.

Veamos que

$$\frac{x}{n+c} \frac{d}{dx} S_{n;c}(f; x) = S_{n;c}((e_1 \quad x)f; x): \tag{4.21}$$

Para ello denotemos

$$s_{n;k}(x) = e^{(n+c)x} \frac{(n+c)_k x_k}{k!}:$$

Un calculo directo prueba que

$$s_{n;k}{}^{0}(x) = \frac{x}{n+c} \quad n+c \quad \frac{x}{k} \qquad s_{n;k}(x) = (n+c)(s_{n;k\ 1}(x) \quad s_{n;k}(x)):$$

Utilizando la primera igualdad obtenemos

$$\frac{x}{} \qquad \frac{x}{} \quad {}_{x}^{1} \quad \frac{k}{}$$

$$= \quad \frac{x}{}\ {}_{x} \quad 1 \quad \frac{k}{} \quad \frac{n+c}{} \quad \frac{k}{} \qquad s_{n;k}(x)$$

$$ {}_{x}^{1} \quad \frac{k}{} \quad \frac{k}{}\ x \qquad s_{n;k}(x)$$

$$= \quad S_{n;c}((e_1 \quad x)f; x):$$

Aplicando la ecuacion (4.21) a la funcion f(t) = t x, obtenemos

$$S_{n;c}((e_1 \quad x)^2; x) = \frac{x}{n+c} (S_{n;c}(t \quad x; x))^0$$

$$= \frac{x}{n+c} \lim_{y \to x} \frac{d}{dx} S_{n;c}(t \quad y; x)$$

$$= \frac{x}{n+c} \lim_{y \to x} \frac{d}{dx} (x \quad 1) = \frac{x}{n+c}:$$

De aqu se in ere que

$$S_{n;c}((t \quad x)^2; x) = \quad n\,'^2(x);$$

donde

$$'(x) = \quad p\,\overline{x} \qquad y_n = \qquad \frac{1}{n+c}:$$

Con ello, hemos veri cado la condicion (ii) en el Teorema 4.1. En partic-ular se tiene que

$$S_{n;c}(t; x) = x^2 + \frac{x}{n+c} \; : \tag{4.22}$$

Para nalizar, debemos veri car que se cumple la condicion (4.7) en el Teorema 4.2.

Para m 2 N y 1 j m de namos los numeros $a_{j;m}$ segun la ecuacion

$$t^m = \sum_{j=1}^{m} a_{jm} t(t \quad 1) \quad (t \quad j+1):$$

se puede demostrar que $a_{j;m} > 0$ y $a_{m;m}$ =

Si ponemos $e_m(t)$ = t m, 1. se tiene que

$$x \; \frac{1}{} \; \frac{k}{} \quad m \; \frac{((n+c)x)^k}{}$$

$$= \frac{e^{\,(n+c)x}}{(n+c)^m} \sum_{=1}^{1} k^m \frac{((n+c)x)^k}{k!}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{e^{-(n+c)x}}{(n+c)^m} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{m} a_{j,m}\, k(k-1)\cdots(k-j+1) \frac{((n+c)x)^k}{k!} \\
&= \frac{e^{-(n+c)x}}{(n+c)^m} \sum_{j=1}^{m} a_{j,m}\, x^j \sum_{k=j}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-j+1) \frac{x^{k-j}(n+c)^k}{k!} \\
&= \frac{e^{-(n+c)x}}{(n+c)^m} \sum_{j=1}^{m} a_{j,m}\, x^j \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k (n+c)^k}{k!} \right)^{(j)} \\
&= \frac{e^{-(n+c)x}}{(n+c)^m} \sum_{j=1}^{m} a_{j,m}\, x^j \left(e^{(n+c)x}\right)^{(j)} = \sum_{j=1}^{m} \frac{a_{j,m}\, x^j}{(n+c)^{m-j}}.
\end{aligned}
$$

Observacion 5 Para cada $n \in \mathbb{N}$, el operador $S_{n,0}$ $(c = 0)$ es justo lo que lla-mamos operator de Szasz-Mirakyan en (1.9). Para estos operadores, Becker en [8] prob la desigualdad

$$
(x)\,|f(x) - S_{n,0}(f;x)| \le C\,\omega_m^2\left(f; \varphi(x)/\sqrt{n}\right)
$$

donde

$$
\omega_m^2(f;t) = \sup_{h \in (0,t]} \| \Delta_h^2 f \|
$$

y $\Delta_h^2 f(x) = f(x) - 2f(x+h) + f(x+2h)$. Mostraremos que podemos recuperar este resultado utilizando el Teorema 4.5. De hecho podemos tomar $= 0$ en (1.17), entonces

$$
\begin{aligned}
\omega^2(f;t) &= \sup_{h \in (0,t]} \sup_{y \ge h} |(y)\, \Delta_h^2 f(y-h)| = \sup_{h \in (0,t]} \sup_{x \ge 0} |(x+h)\, \Delta_h^2 f(x)| \\
&\le \sup_{h \in (0,t]} \sup_{x \ge 0} |x\, \Delta_h^2 f(x)| = \omega_m^2(f;t).
\end{aligned}
$$

Becker obtuvo una estimacion similar para los operadores de Baskakov. Esta tambien se puede obtener a partir del Teorema 4.4 presentado mas arriba.

4.2.3 Operadores de Phillips

Como un tercer ejemplo, consideraremos los operadores de Phillips. Estos operadores se de nen mediante la regla

$$1 \; s_{n;k}(x) \, Z_0 \; 1 \, s_{n;k} \;\; 1(t)f(t)dt; \qquad (4.23)$$

donde

$$s_{n;k}(x) = e^{n x} \sum \frac{(nx)_k}{k!};$$

siempre que la serie sea convergente.

Estos operadores fueron introducidos por Phillips en [68]. El estudio la convergencia sobre los conjuntos compactos. Finta y Gupta presentaron en [39] algunos resultados directos e inversos, en terminos de modulos de suavidad segundo orden del tipo Ditzian-Totik, para los operadores de Phillips. Otras propiedades de estos operadores se han dado en[24], [37] y [62].

Teorema 4.6 Fijemos un entero positivo m y supongamos que el peso poli-nomial esta dado como mas arriba y los operadores P_n estan de nidos por (4:23).

(i) Se tiene que

$$P_n \; : C\,[0; 1) \; ! \; C\,[0; 1):$$

Para cada n, P_n es un operador lineal y positivo y la sucesion fP_ng esta uniformemente acotada en estos espacios.

(ii) Existe una constante C tal que, para cualquier f 2 C [0; 1), x 2 [0; 1) y n 2 N se tiene

$$(x)jf(x) \;\; P_n(f; x)jC \,!^2 \;\; f; \qquad r \;\; \frac{2_n}{x}\,!$$

donde $!^2$ (f; t) es el modulo de nido por (1:17) (con = 0).

(iii) Existe una constante C tal que, para n 6 y f 2 C [0; 1) se cumple

$$kf \;\; P_n(f)k \qquad C\,!^2 \;\; f; \qquad r \;\; \frac{n}{1}\,!$$

donde $\varphi(x) = \sqrt{x}$ y $\omega_{\varphi}^{2}(f; t)$ es el modulo de nido por (1:17) (con $= 1$).

Demostracion. Veri camos todas las condiciones en el Teorema 4.2.

Denotemos

$$I_{n;k} = \int_0^\infty e^{-nt} t^k \, dt:$$

Notese que

$$I_{n;0} = \lim_{m \to \infty} \int_0^m e^{-nt} \, dt = \frac{-1}{n} \lim_{m \to \infty} (e^{-mt} - 1) = \frac{1}{n}:$$

Por otro lado, para $k \geq 1$, una aplicacion de la formula de integracion por parte nos da

$$I_{n;k} = \frac{k}{n} \int_0^\infty e^{-nt} t^{k-1} \, dt:$$

Luego, utilizando induccion matematica, obtenemos la formula

$$I_{n;k} = \frac{k!}{n^k} I_{n;0} = \frac{k!}{n^{k+1}}:$$

Utilizando la formula anterior, obtenemos

$$n \int_0^\infty s_{n;k-1}(t) dt = \frac{n^k}{(k-1)!} I_{n;k-1}(t) = 1:$$

Luego

$$P_n(1; x) = e^{-nx} + n \sum_{k=1}^{\infty} s_{n;k}(x) \int_0^\infty s_{n;k-1}(t) dt = e^{-nx} + \sum_{k=1}^{\infty} s_{n;k}(x)$$

$$= e^{-nx} + e^{-nx} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} = e^{-nx} + e^{-nx}(e^{nx} - 1) = 1:$$

Esto es

$$P_n(1; x) = 1: \tag{4.24}$$

Para calcular $P_n(t;x)$, nótese que

$$n\int_0^\infty s_{n,k-1}(t)\,t\,dt = \frac{n^k}{(k-1)!}\int_0^\infty e^{-nt}t^k\,dt = \frac{n^k}{(k-1)!}I_{n,k} = \frac{n^k}{(k-1)!}\,\frac{k!}{n^{k+1}} = \frac{k}{n}.$$

De aquí que

$$\sum_{k=1}^\infty s_{n,k}(x)\,n\int_0^\infty s_{n,k-1}(t)\,t\,dt = \sum_{k=1}^\infty \frac{k}{n}s_{n,k}(x) = S_{n,0}(t;x) = x,$$

donde $S_{n,c}$ es el operador de Szasz-Mirakyan estudiado anteriormente. Con esto hemos demostrado que

$$P_n(t;x) = x. \tag{4.25}$$

Para calcular $P_n(t^2;x)$, nótese que

$$n\int_0^\infty s_{n,k-1}(t)\,t^2\,dt = \frac{n^k}{(k-1)!}\int_0^\infty e^{-nt}t^{k+1}\,dt = \frac{n^k}{(k-1)!}I_{n,k+1} = \frac{n^k}{(k-1)!}\,\frac{(k+1)!}{n^{k+2}} = \frac{k(k+1)}{n^2}.$$

De aquí que

$$\sum_{k=1}^\infty s_{n,k}(x)\,n\int_0^\infty s_{n,k-1}(t)\,t^2\,dt = \sum_{k=1}^\infty \frac{k(k+1)}{n^2}s_{n,k}(x) = S_{n,0}(t^2;x) + \frac{1}{n}S_{n,0}(t;x);$$

donde $S_{n,c}$ es el operador de Szasz-Mirakyan estudiado anteriormente. Con-siderando (4.20) y (4.22) se tiene que

$$P_n(t^2;x) = x^2 + \frac{2x}{n} \tag{4.26}$$

y

$$P_n((t-x)^2;x) = \frac{2x}{n}. \tag{4.27}$$

Segun (4.24), (4.25) y (4.27), hemos veri cado las condiciones (i) y (ii) del Teorema 4.1 con

$$'(x) = p \; \frac{}{x} \qquad y_n = \frac{2}{n}:$$

Para nalizar, debemos veri car que se cumple la condicion (4.7) en el Teorema 4.2.

Para r jos, de namos los numeros $fa_{r;j}g_{j2Z}$ como sigue:

$$a_{r;j} = 0; \quad \text{si} \quad j > r \quad \text{o} \quad j \quad 0;$$

$$a_{1;1} = 1; \quad a_{2;1} = 2; \quad a_{2;2} = 1$$

y

$$a_{r+1;j} = (r + j)\, a_{r;j} + a_{r;j\ 1}; \quad \text{para} \quad 1 \quad j \quad r + 1:$$

Probaremos por induccion sobre r que, para n; r 2 N se cumple

$$P_n(t^r; x) = \sum_{j=1}^{r} \frac{}{} x^j$$

Es claro que la a rmacion se cumple para r = 1, pues $P_n(t; x) = x$.

Como

$$x\, s'_{n;k}(x) = (k \quad nx) s_{n;k}(x); \qquad \text{para} \quad r \quad 1;$$

se tiene que

$$1 \quad (x) \; \angle \; 0 \; 1\, s_{n;k\ 1}(t) t^r dt$$

$$= n \sum_{k=1}^{\infty} (k \quad nx) s_{n;k}(x) \int_0^1 s_{n;k\ 1}(t) t^r dt$$

$$= n \sum_{k=1}^{\infty} s_{n;k}(x) \int_0^1 (k \quad 1 \quad nt + n(t \quad x) + 1) s_{n;k\ 1}(t) t^r dt$$

$$= n \sum_{k=1}^{\infty} s_{n;k}(x) \int_0^1 s'_{n;k\ 1}(t) t^{r+1} dt$$

$$+ n^2 \sum_{k=1}^{\infty} s_{n;k}(x) \int_0^1 s_{n;k\ 1}(t) t^{r+1} dt$$

$$1 \qquad \int_0^{\infty} s_{n;k-1}(t)t^r dt$$

$$= n(r+1)\sum^{\infty} s_{n;k}(x)\int_0^{\infty} s_{n;k-1}(t)t^r dt$$

$$\sum \qquad +nP_n(t^{r+1};x) + (1-nx)P_n(t^r;x):$$

Por lo tanto

$$P_n(t^{r+1};x) = \frac{x}{n}P_n'(t^r;x) + \frac{r+nx}{n}P_n(t^r;x): \qquad (4.28)$$

Ahora, supongamos que la afirmacion es cierta para algun $r \geq 1$, entonces de (4.28) obtenemos

$$P_n(t^{r+1};x) = \frac{x}{n}\sum_{j=1}^{r} a_{r;j}\frac{jx^{j-1}}{n^{r-j}} + \frac{r+nx}{n}\sum_{j=1}^{r} a_{r;j}\frac{x^j}{n^{r-j}}$$

$$= \sum_{j=1}^{r+1}(j+r)a_{r;j}\frac{x^j}{n^{r+1-j}} + \sum_{j=1}^{r+1} a_{r;j-1}\frac{x^j}{n^{r+1-j}} \quad (a_{r;r+1}=a_{r;0}=0)$$

$$= \sum_{j=1}^{r+1} a_{r+1;j}\frac{x^j}{n^{r+1-j}}:$$

4.2.4 Operadores de Abel e Ivan (y Lupas)

Como otro ejemplo, consideramos algunos operadores estudiados por Abel e Ivan en [1].

Sea E la clase de todas las funciones de tipo exponencial sobre $[0;\infty)$. Esto es, $f \in E$ si existen constantes K y A tal que,

$$|f(x)| \leq Ke^{Ax}; \qquad x \geq 0:$$

Para $d > 0$, sea

$$A_{n;d}(f;x) = \sum^{\infty} p_{n;k;d}(x) f\left(\frac{k}{n}\right); \qquad (4.29)$$

donde

$$p_{n;k;d}(x) = \frac{d}{1+d} \quad ndx \quad ndx + k \quad 1 \quad k \quad (1 + d)\ k;$$

y

$$ndx\,0 \;\; 1 \; = 1$$

$$\begin{array}{c} k \\ ndx + k \quad 1 \end{array} = \frac{(ndx)(ndx+1) \quad k\,! \quad (ndx + k \quad 1)}{}$$

Note que, si jf(x)j Ke^{Ax} y n > A= log(1 + d), entonces la serie dada en (4.29) converge. Luego, para n > 1= log(1 + d), el operador (4.29) esta bien de nido para toda funcion f con crecimiento de tipo polinomial.

En el caso especial d = 1 obtenemos los operadores de Lupas (3.8).

In [2], Agratini investigo la convergencia de los operadores de Lupas, pero solo para subconjuntos compactos de [0; 1). Observemos que Abel e Ivan [1] tambien dieron estimados para la velocidad de convergencia (en terminos del primer modulo usual de continuidad), pero solo cuando los operadores $A_{n;d}$ se consideran sobre el espacio de las funciones acotadas.

Teorema 4.7 Fijemos un entero positivo m y supongamos que el peso poli-nomial esta dado como mas arriba y los operadores $A_{n;d}$ estan de nidos por (4:29).

(i) Para n > 1= log(1 + d),

$$A_{n;d} : C\,[0; 1) \quad ! \; C\,[0; 1):$$

Para cada n 2 N (n > 1= log(1 + d)), $A_{n;d}$ es un operador lineal y posi-tivo y la sucesion f$A_{n;d}$g esta uniformemente acotada en estos espacios.

(ii) Existe una constante C tal que, para cualquier f 2 C [0; 1), x 2 [0; 1) y n 2 N se tiene

$$(x)jf(x) \;\; A_{n;d}(f; x)j \;\; C!^2 \;\; f; \qquad r \; \frac{}{x \quad + d)} \; ! \; ;$$

donde !^{2} (f; t) es el modulo de nido por (1:17) (con = 0).

(iii) Existe una constante C tal que, para n maxf8; 1= log(1 + d) y f 2 C [0; 1), se tiene el estimado

$$kf \quad S_{n;d}(f)k \quad C!_{'}^{2} \quad f; \qquad r \quad \frac{\quad !}{1 + d};$$

donde $'(x) = \sqrt{x}$ y $!_{'}^{2}(f; t)$ es el modulo de nido en (1:17) con = 1.

Demostracion. Veamos que las a rmaciones se in eren del Teorema 4.2. En [1] se demostr que

$$S_{n;d}(1; x) = 1; \qquad S_{n;d}(t; x) = x$$

y

$$S_{n;d}(t^2; x) = x^2 + \frac{1 + d}{nd} x:$$

Luego, las condiciones (i) y (ii) en el Teorema 4.2 se cumplen con

$$_n = \frac{1 + d}{nd} \qquad y \qquad '(x) = \sqrt{x}:$$

Para nalizar la prueba solo necesitamos veri car que se tiene una repre-sentacion como la ecuacion (4.7) en el Teorem 4.2.

Para una funcion g, 2q-veces diferenciable en x, sea

$$a_q(g; d; x) = \sum_{2q} \frac{g^{(s)}(x)}{s!} x^{s \ q} \sum_{q} (\ d)^{j \ q} T (s; q; j) \ ! \ ;$$

donde los numeros T (s; q; j) estan de nidos por la identidad

$$s \qquad r \quad S_r^{r} \ _j^{q} \ r^{r \ j} \qquad (0 \quad j \quad q \quad s);$$

$$X$$

y las cantidades S_j^i y $_j^i$ denotan los numero de Stirling de primera y segunda clase, respectivamente. Esto es S_j^i y $_j^i$ estan de nidas por las ecuaciones

$$x^{\underline{j}} = \sum_{=0}^{j} S_j^i x^i; \qquad y \quad x^j = \sum_{i=0}^{j} {}_j^i x^{\underline{i}} \qquad (j = 0; 1; 2; \ )$$

donde $x^{\underline{0}} = 1$ y

$$x^{\underline{i}} = x(x-1)\cdots(x-i+1)\,.$$

Del Remark 3.1 in [1] sabemos que

$$A_{n;d}(t^r;x) = x^r + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t^r;d;x)n^{-k}.$$

Como $(x^r)^{(k)} = 0$, para $k > r$, obtenemos (consideramos la funcion $g(t) = t^r$),

$$\begin{aligned}
A_{n;d}(t^r;x) &= x^r + \sum_{k=1}^{r} a_k(t^r;d;x)\frac{1}{n^k} \\
&= x^r + \sum_{k=1}^{r} n^{-k} \sum_{s=k}^{2k} \frac{g^{(s)}(x)}{s!} x^{s-k} \sum_{j=0}^{k} (-d)^{j-k} T(s;k;j) \\
&= x^r + \sum_{k=1}^{r} x^{r-k} n^{-k} \sum_{s=k}^{2k} \sum_{j=0}^{k} (-d)^{j-k} T(s;k;j) \\
&= x^r + \sum_{k=0}^{r-1} \frac{x^k}{n^{r-k}} \sum_{s=r-k}^{2(r-k)} \sum_{j=0}^{r-k} (-d)^{j+k-r} T(s;r-k;j).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, se ha demostrado la igualdad (4.7), para los operadores $A_{n;d}$.

Conclusiones

En el trabajo se han logrado resolver algunas cuestiones relacionadas con las estimaciones de operadores lineales y positivos en espacios de pesados de funciones continuas. Los aportes fundamentales se pueden resumir como sigue:

(i) El uso de un isomor smo positivo, denotado por que permite reducir el analisis de los operadores lineales y positivos, en los espacios que tienen l mite en el in nito, al caso de los espacios C[0; 1].

(ii) La elaboracion de un metodo para traducir modulos de suavidad de - nidos en C[0; 1] a modulos correspondientes a los espacios pesados, de funciones que tiene l mite en el in nito (cuando se multiplican por el peso).

(iii) Se veri co que en los espacios $C_b[0; 1)$ y $C_{ucb}[0; 1)$ no existen sistemas nitos de Korovkin.

(iv) Se identi co un sistema de Korovkin para el espacio $C_b[0; 1)$.

(v) La presentacion de funciones de pruebas natural para los espacios pe-sados C [0; 1) .

(vi) Se elabor un esquema general que permite, para algunas sucesiones de operadores lineales y positivos, obtener teoremas directos en el caso de la aproximacion con pesos polinomiales.

(vii) Se logr aplicar el esquema general a algunas sucesiones particulares. Esto permitio obtener algunos resultados que no eran conocidos.

Los resultados fundamentales presentados aqu se publicaron en los tra-bajos [12], [13] y [14].

Por supuesto, quedan muchas preguntas por responder. Algunas de ella se indicaron en el cuerpo del trabajo.

Bibliograf a

[1] U. Abel y M. Ivan, On a generalization of an approximation operator de ned by A. Lupas , General Mathematics, 15 (2007), 21-34.

[2] O. Agratini, On a sequence of linear and positive operators, Facta Uni-versitatis (Nis) Ser. Math. Inform. 14 (1999), 41-48.

[3] O. Agratini y G. Nowak, On a generalization of Bleimann, Butzer and Hahn operators based on q-integers, Mathematical and Computer Mo-delling Volume 53, Issues 5-6, March 2011, Pages 699-706 .

[4] F. Altomare y M. Campiti, Korovkin-Type Approximation Theory and its Applications, De Gruyter Series Studies in Mathematics, Vol. 17, Walter de Gruyter & Co., Berlin, New York, 1994.

[5] N. T. Amanov, On the uniform weighted approximation by Szasz{ Mirakjan operators, Anal. Mat., 18 (1992), 167-184.

[6] C. Balazs y J. Szabados, Approximation by Bernstein type rational func-tions, II, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 40 (3-4) (1982), 331-337.

[7] V. A. Baskakov, An example of a sequence of linear positive operators in the space of continuous functions, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 113 (1957), 249-251.

[8] M. Becker, Global approximation theorems for Szasz-Mirakjan and Baskakov operators in polynomial weight spaces, Indiana Math. J, 27 (1978), 127-142.

[9] G. Bleimann, P. L. Butzer y L. Hahn, A Bernstein-type operator ap-proximating continuous functions on semiaxis, Indaga. Math., 42 (1980), 255-262.

[10] B. D. Boyanov y V. M. Yeselinov, A note on the approximation of func-tions in an in nite interval by linear positive operators, Bull. Soc. Math. Roumanie, 14 (62) (1970), 9-13.

[11] J. Bustamante, Estimates of positive linear operators in terms of second order moduli, to appear in J. Math. Anal. Appl.

[12] J. Bustamante y L. Morales de la Cruz, Korovkin type theorems for weighted approximation, Int. Journal of Math. Analysis, Vol. 1,26 (2007), 1273-1283.

[13] J. Bustamante y L. Morales de la Cruz, Positive linear operators and continuous functions on unbounded intervals, Jaen J. Approx., 1 (2) (2009), 145-173.

[14] J. Bustamante J. M. Quesada y L. Morales de la Cruz, Direct estimate for positive linear operators in polynomial weighted spaces, J. Approx. Theory, 162 (8) (2010), 1495-1508.

[15] E. W. Cheney y A. Sharma, Bernstein power series, Canadian Journal of Mathematics 16 (2) (1964), 241-252.

[16] T. Coskun, Some properties of linear positive operators on the spaces of weight functions, Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Series. A1 47 (1998) 175-181.

[17] T. Coskun, Weighted approximation of continuous functions by se-quences of linear positive operators, Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.), 110 (4) (2000), 357-362.

[18] T. Coskun, Weighted approximation of unbounded continuous functions by sequences of linear positive operators, Indian J. Pure Appl. Math., 34 (3) (2003), 477-485.

[19] J. de la Cal y J. Carcamo, On uniform approximation by some classical Bernstein-type operators, J. Math. Anal. Appl., 279 (2003), 625-638.

[20] B. Della Vecchia, G. Mastroianni y J. Szabados, Weighted approximation of functions by Szasz-Mirakyan-type operators, Acta Math. Hungar., 111 (2006), 325-345.

[21] B. Della Vecchia, G. Mastroianni y J. Szabados, A converse result for approximation by weighted Szasz-Mirakyan operator, Acta Math. Hun-gar, 118 (4) (2008), 319-336.

[22] R. DeVore, Approximation of Continuous Functions by Positive Linear Operators, Springer Lec. Notes in Math. 293, Spinger-Verlag, 1972.

[23] R. A. DeVore y G. G. Lorentz, Constructive Approximation, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, (1993).

[24] Z. Ditzian, Exponential formulae for semigroup of operators in terms of the resolvent, Israel J. Math. 9 (1971), 541-553.

[25] Z. Ditzian, Convergente of sequences of linear positive operators: re-marks and applications, J. Approx. Theory , 14 (1975), 296-301.

[26] Z. Ditzian, Direct estimate for Bernstein polynomials, J. Approx. Theo-ry, 79 (1994), 165-166.

[27] Z. Ditzian y K. G. Ivanov, Strong converse inequalities, J. Anal. Math., 61 (1993), 61-111.

[28] Z. Ditzian y V. Totik, Moduli of smoothness, Springer, New York (1987).

[29] O. Dogru, On weighted approximation of continuous functions by linear positive operators on in nite intervals, Math. Cluj, 41(64) No. 1 (1999), 39-46.

[30] S. Eisenberg y B. Wood, On the order of approximation of unbounded functions by positive linear operators, SIAM J. Numer. Anal. 9 (1972), 266-276.

[31] R. Engelking, General Topology, Berlin, Heldermann, 1989.

[32] C. Feilong y X. Zongben, Local and global approximation theorems for Baskakov operators, Indian J. Pure appl. Math., 34(3) (2003), 385-395.

[33] M. Felten, Direct and inverse estimates for Bernstein polynomials, Cons-tr. Approx. 14 (1998), 459-468.

[34] M. Felten, Local and global approximation theorems for positive linear operators, J. Approx. Theory, 94 (1998), 396-419.

[35] Z. Finta, Quantitative estimates for some linear positive operators, Stu-dia Univ. Babes - Bolyai, 47 (3) (2002), 71-84.

[36] Z. Finta, Direct local and global approximation theorems for Bernstein type operators, FILOMAT(Nis),18, (2004),27-32.

[37] Z. Finta, On converse approximation theorems, J. Math. Anal. Appl. 312 (2005) 159-180.

[38] Z. Finta, Direct approximation theorems for discrete type operators, J. Ineq. Pure Appl. Math., 7(5) (2006), 1-10.

[39] Z. Finta y V. Gupta, Direct and inverse estimates for Phillips type ope-rators, J. Math. Anal. Appl., 303 (2005), 627-642.

[40] A. D. Gadjiev, The convergence problem for a sequence of positive linear operators on unbounded sets, and theorems analogous to that of P. P. Korovkin, Soviet Math. Dokl., 15 (5) (1974), 1433-1436.

[41] A. D. Gadjiev, Theorems of Korovkin type, Math. Notes 20, No. 5-6, (1976), 995-998.

[42] A. D. Gadjiev, Positive linear operators in weighted spaces of functions of several variables, Izv. Akad. Nauk Azerbaidzhan. SSR Ser. Fiz-Tekh. Mat. Nauk 1 (1980), 32-37.

[43] A. D. Gadjiev y A. Aral, The estimates of approximation by using a new type of weighted modulus of continuity, Comp. Math. Appl. 54 (2007), 127-135.

[44] E. A. Gadjieva y E. Ibikli, Weighted approximation by Bernstein - Chlodowsky polynomials, Indian J. Pure Appl. Math. 30 (1999), 83-87.

[45] I. Gavrea, Aproximarea functiilor prin operatori liniari, Ed Mediamira Cluj-Napoca, 2001.

[46] I. Gavrea, H. Gonska, R. Paltanea y G. Tachev, General estimates for the Ditzian-Totik modulus, East J. Approx., 9 (2) (2003), 175-194.

[47] H. H. Gonska, Quantitative Korovkin-type theorems on simultaneous approximation, Math. Z. 186 (1984), 419-433.

[48] R. Grant Woods, The minimum uniform compacti cation of a metric space, Fund. Math. 147 (1995), 39-59.

[49] S. Guo y Q. Qi, Strong converse inequalities for Baskakov operators, J. Approx. Theory 124 (2003) 219-231.

[50] S. Guo, H. Tong y G. Zhang, Stechkin-Marchaud-type inequalities for Baskakov polynomials, J. Approx. Theory 114 (2002) 33-47.

[51] T. Hermann, Approximation of unbounded functions on unbounded in-terval, Acta Math. Hung., 29 (3-4) (1977), 393-398.

[52] A. Holhos, The rate of approximation of functions in and in nite interval by positive linear operators, Studia Univ. Babes-Bolyai, LV (2) (2010), 133-142.

[53] A. Holhos, Contributions to the approximation of functions, Ph. Thesis, Cluj Napoca, Romania, 2010.

[54] A. Holhos, Uniform approximation in weighted spaces using some posi-tive linear operators, Stud. Univ. Babes-Bolyai Math. 56(2011), No. 2, 413-422

[55] L. Hong, Global approximation for a class of generalized mixed exponen-tial type integral operators in polynomial weight spaces, J. Math. Study, 27 (1) (1994), 92-96.

[56] C. Jayasri y Y. Sitamaran, Direct and inverse theorems for certain Bernstein-type operators, Indian J. Pure Appl. Math., 16 (1985), 1495-1511.

[57] M. A. Jimenez Pozo y M. Baile Badet, Estimate of the order of convergence of a sequence of linear operators in weighted function spaces, Cienc. Math., 2 (1981), 16-28.

[58] P. P. Korovkin, Linear Operators and Approximation Theory, Hindustan Publishing Corp., India, 1960.

[59] A.J. Lopez-Moreno, Weigthed simultaneous approximation with Baskakov type operators, Acta. Math. Hungar., 104 (1-2) (2004), 143-151.

[60] A.-J. Lopez-Moreno y J. Latorre-Palacios, Localization results for gene-ralized Baskakov/Mastroianni and composite operators, Journal of Ma-thematical Analysis and Applications Volume 380, Issue 2, 15 August 2011, Pages 425-439

[61] A. Lupas, The approximation by some positive linear operators, In Ap-proximation Theory (Proc. Int. Dortmound Meeting on Approximatin Theory), ed M. W. Muller et al, Berlin: Akademie Verlag, 1991, 201-229.

[62] C. P. May, On Phillips operators, J. Approx. Theory 20 (1977), 315-322.

[63] G. M. Mirakyian, Approximation of continuous functions with the aid of polynomials, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 31 (1941), 201-205.

[64] M. W. M•uller, Die Folge der Gammaoperatoren, Thesis, Stuttgart, 1967.

[65] M. W. M•uller y H. Walk, Konvergenz - und G•uteaussagen f•ur die Ap-proximation durch Folgen linearer positiver Operatoren, Proceedings of the International Conference on Constructive Function Theory, Varna, May 1970, 221-233 (1972).

[66] R. Paltanea, Approximation Theory Using Positive Linear Operators, Birkh•auser, Boston, 2004.

[67] R. Paltanea, Estimates for general positive linear operators on non-compact interval using weighted moduli of continuity, Stud. Univ. Babe s-Bolyai Math. 56(2011), No. 2, 497-504.

[68] R. S. Phillips, An inversion formula for semi groups of linear operators, Ann. Math., 59 (1954), 352-356.

[69] F. Schurer, On linear positive operators in approximation theory, Diss, Delft, 1965.

[70] O. Shisha y B. Mond, The degree of convergence of linear positive ope-rators, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 60 (1968), 1196-1200.

[71] L. I. Strukov y A. F. Timan, Mathematical expectation of continuous functions of random variable, smoothness and variance, Siberian Math. J., 18 (1977), 469-474.

[72] O. Szasz, Generalization of S. Bernstein's polynomials to the in nite interval, J. Res. Nat, Bur. Standards, Sect. B, 45 (1950), 239-245.

[73] V. Totik, Uniform approximation by positive operators on in nite intervals, Analysis Mathematica, 10 (1984), 163-182.

[74] V. Totik, Uniform approximation by exponential-type operators, J Math. Anal. Appl., 132 (1988), 238-246.

[75] V. Totik, Strong converse inequalities, J. Approx. Theory 76 (1994), 369-375.

[76] H. Walk, Approximation durch Folgen linearer positiver Operatoren, Arch. Math (Basel) (1969), 398-404.

[77] H. Walk, Lokale Approximation unbeschr•ankter Funktionen und ihrer Ableitungen durch eine Klasse von Folgen linearer positiver Operatoren. Mathematica 15 (38), (1973), 129-142.

[78] H. Walk, •Uber die Approximation unbeschr•ankter Funktionen durch lineare positive Operatoren, J. reine angew. Math. 276, (1975), 83-94.

[79] H. Walk, Approximation von ableitungen b•ankter funktionen durch linea-re operatoren, Rev. Ana. Numer. Theorie Approx., 6 (1) (1977), 99-105.

[80] D-X. Zhou, Weighted approximation by Szasz-Mirakyan operators, J. Approx. Theory, 76 (1994), 393-402