



# BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

Facultad de Ciencias  
Físico-Matemáticas

Caracterización dinámica de la  
transición metal-aislante de sistemas  
cuánticos unidimensionales  
cuasiperiódicos

Tesis presentada para obtener el título de:

**Licenciatura en Física Aplicada**

Presenta:

David Abraham Zarate Herrada

Director de Tesis:

Dr. Eduardo Jonathan Torres Herrera

Puebla, Puebla.

Julio 2018

# Caracterización dinámica de la transición metal-aislante de sistemas cuánticos unidimensionales cuasiperiódicos

Tesis

David Abraham Zarate Herrada  
Dr. Eduardo Jonathan Torres Herrera



**Título:** Caracterización dinámica de la transición metal-aislante de sistemas cuánticos unidimensionales cuasiperiódicos.

**Estudiante:** David Abraham Zarate Herrada

COMITÉ

---

Dr. Maximino Luis Arroyo Carrasco  
Presidente

---

Dr. Benito Flores Desirena  
Secretario

---

Dr. José Antonio Mendéz Bermúdez  
Vocal

---

Dr. Eduardo Jonathan Torres Herrera  
Asesor

## *Gracias a:*

Mi familia, a mis padres, a ti Diana, por todo el apoyo, el cariño y los consejos que me han dado, no lo hubiera logrado sin ustedes, a mis amigos y compañeros, por las risas y los buenos momentos que pasamos juntos, a mis profesores y a mi asesor, de ellos aprendí mucho y me motivaron a seguir adelante y a la facultad de Físico-Matemáticas de la BUAP, un espacio que jamás olvidare.

# Resumen

En el presente trabajo se emplearán herramientas y conceptos de la teoría de matrices aleatorias y caos cuántico para estudiar la transición de una fase delocalizada a una localizada en sistemas cuánticos unidimensionales representados por el modelo de Aubry-André sin y con interacciones. Se investigarán propiedades estáticas del sistema, tales como la estadística de niveles o estados propios y el reflejo de estas en la evolución temporal de la probabilidad de supervivencia. Esta última corresponde a la probabilidad de encontrar al sistema en su estado inicial en cierto tiempo. Mostramos que el comportamiento peculiar de ciertas cantidades estáticas y dinámicas no es exclusivo de transiciones metal-aislante inducidas por desorden.

**Palabras clave:** Localización de Anderson, sistemas de muchos cuerpos, localización de muchos cuerpos, potencial de Harper, evolución temporal.



# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>v</b>
<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Modelo de Aubry-André sin interacciones</b>	<b>5</b>
1.1. Modelo de Aubry-André . . . . .	5
1.2. Propiedades Estáticas . . . . .	10
1.2.1. Estadística de Niveles . . . . .	11
1.3. Medidas de localización . . . . .	15
1.4. Propiedades Dinámicas . . . . .	19
<b>2. Modelo con Interacciones</b>	<b>27</b>
2.1. Modelo de Aubry-André con Interacciones. . . . .	27
2.2. Propiedades Estáticas . . . . .	28
2.3. Medidas de Localización . . . . .	31
2.4. Propiedades Dinámicas . . . . .	34



# Introducción

La localización de partículas cuánticas por un potencial aleatorio estático, es uno de los fenómenos más intrigantes en la física. El ingrediente clave de la localización, la interferencia de onda, se introdujo en el documento seminal de P. W. Anderson, *Ausencia de difusión en ciertas redes aleatorias* [1]. Allí se demostró que los electrones pueden estar localizados por un potencial aleatorio, de modo que la difusión se suprime, incluso en una situación en la que las partículas clásicas se delocalizarían. La razón fundamental para el efecto localizador de un potencial aleatorio sobre partículas cuánticas u ondas clásicas es la interferencia múltiple de componentes de onda dispersos por centros de dispersión posicionados aleatoriamente.

Es interesante observar que la primera aplicación de la idea de localización se refería a la difusión de los electrones. Anderson consideró un modelo de electrones de enlace fuerte en una red cristalina, con niveles de energía en cada sitio elegidos de una distribución aleatoria. La visión tradicional había sido que la dispersión por el potencial aleatorio hace que las ondas de Bloch pierdan un momento bien definido en la escala de la longitud del camino libre medio. Sin embargo, se pensó que la función de onda permanecía extendida a lo largo de la muestra. Anderson señaló que si el desorden es suficientemente fuerte, las partículas están localizadas, ya que la envolvente de la función de onda  $\psi_n(r)$  centrada alrededor de alguna posición  $r_0$  con colas que decaen exponencialmente conforme la distancia a  $r_0$  aumenta,

$$|\psi_n| \sim \exp\left(-\frac{|r - r_0|}{L_{loc}}\right), \quad (1)$$

donde  $L_{loc}$  es la *longitud de localización*, una medida de la extensión espacial del

---

estado.

Se concluyó que los estados de un sistema tridimensional (3D) desordenado se encuentran localizados si la magnitud del desorden es suficientemente grande. A este fenómeno se le conoce como localización de Anderson [1]. En sistemas bidimensionales (2D) y unidimensionales (1D) de tamaño infinito los estados están localizados para cualquier magnitud del desorden por lo que no existe una transición metal-aislante como en el caso 3D [2, 3]. La localización de Anderson es uno de los fenómenos más impactantes en la física de los últimos 50 años [3]. Se ha verificado la presencia del fenómeno de localización de Anderson en diversos sistemas físicos, por ejemplo, se ha reportado evidencia experimental directa para la localización de Anderson de la luz en experimentos ópticos realizados sobre materiales finos semiconductores de dispersión muy fuerte [4].

Por otro lado se ha reportado que la ausencia de transporte se atribuye a la localización de Anderson de los modos normales de vibración en el estudio del transporte de la ecografía en dos dimensiones en la región sub-Mega Hertz en una placa de aluminio cuadrada no homogénea [5]. Además de que hay evidencia experimental de la observación de la localización exponencial de un condensado de Bose-Einstein (BEC) liberado en una guía de onda unidimensional en presencia de una perturbación controlada creada por láser speckle [6]. El fenómeno de localización de Anderson ocurre en un contexto en que no existen interacciones entre los distintos componentes del sistema. Entonces surgen ciertas cuestiones como ¿el fenómeno de localización de Anderson persiste aún en la presencia de interacciones? Esta pregunta está presente en el trabajo original de Anderson [1], sin embargo fue desatendida durante más de 50 años. Actualmente la respuesta es afirmativa, es decir, existe una transición entre una fase metálica (ergódica) y una localizada en sistemas cuánticos de muchas partículas [7, 8, 9]. A esta transición se le conoce como localización de muchos cuerpos (MBL, por sus siglas en inglés). El fenómeno de MBL ha sido observado en experimentos con átomos superfríos en redes ópticas unidimensionales [10, 11]. En contraste con la localización de Anderson, la transición a una fase MBL ocurre en sistemas 1D, entonces una comparación entre la transición de Anderson (3D) y la transición MBL (1D) no es del todo natural y transparente.

---

El desorden no es esencial para que la localización ocurra. Se sabe que existen sistemas unidimensionales cuasiperiódicos en los que la localización se puede presentar aún sin la presencia de desorden. En particular el modelo de Aubry-André (MAA) que contiene un potencial inconmensurable es una muestra de esto [12, 13].

Recientemente se ha extendido este modelo a uno que considera interacciones, el MAA con interacciones, y se ha mostrado que la transición persiste [14]. Se ha mostrado que en la transición metal-aislante de Anderson y recientemente en la transición MBL [15, 16] las propiedades estáticas tanto del espectro energético como de los estados propios del sistema se manifiestan en la evolución temporal de cantidades, tales como la probabilidad de supervivencia y la entropía de información de Shannon. Entonces es natural preguntarse, si ocurrirá algo similar en las transiciones que no son debidas al desorden.

Para este trabajo, las características de nuestro estudio son las siguientes:

Consideramos un modelo de enlace fuerte de fermiones sin espines con un potencial químico cuasiperiódico que después de aplicar una transformación de Jordan-Wigner, es equivalente a un modelo magnético de una cadena de espín  $1/2$  con un campo transversal cuasiperiódico en la dirección  $z$ .

Se estudian las propiedades estáticas usando herramientas estadísticas de teoría de matrices aleatorias (RMT por sus siglas en inglés) y la dinámica fuera equilibrio después de un cambio de la amplitud del campo transversal.

Para ello, hacemos uso de la información que nos proporcionen las energías o valores propios y los estados propios del hamiltoniano. A partir del análisis de los valores propios y estados propios del sistema es posible determinar la transición de una fase delocalizada a una localizada al variar la amplitud del campo transversal. Dado que nuestros estudios requieren todos los valores propios y estados propios, utilizamos la diagonalización exacta de la matriz hamiltoniana correspondiente a los modelos que son de interés en esta Tesis.

Esta Tesis está organizada en dos capítulos. El primero está dedicado a introducir el modelo de Aubry-André sin interacciones considerando todas las características relevantes para este trabajo, seguido, se comentará sobre la relevancia de la teoría de matrices aleatorias RMT (por sus siglas en inglés) para estudiar las propiedades estáticas y dinámicas del

---

MAA. La estadística de valores propios será el siguiente tema a discutir, complementado por algunas otras propiedades estáticas, para culminar con las propiedades dinámicas pues a lo largo del trabajo se notará su estrecha relación entre sí.

El segundo capítulo se centrará en el MAA con interacciones, y se mantendrá la estructura del primer capítulo, con la diferencia que las interacciones en el MAA proporcionará importantes resultados, que por supuesto serán contrastados con los resultados para el MAA sin interacciones. La interpretación y comparación de los resultados del MAA-sin interacciones y el MAA-con interacciones dará lugar a las conclusiones de este trabajo.

# Capítulo 1

## Modelo de Aubry-André sin interacciones

El fenómeno de localización también existe en sistemas no desordenados, como por ejemplo en sistemas cuasiperiódicos. Un ejemplo bien conocido es el modelo de Aubry-André [13], que es un modelo de una cadena unidimensional con un potencial cuasiperiódico específico conocido como el potencial de Harper [12]. Este modelo puede ser realizado experimentalmente mediante gases atómicos ultra-fríos en redes ópticas que tienen dos ondas ópticas periódicas con diferentes longitudes de onda inconmensurables [17]. Para un potencial cuasiperiódico débil, los estados propios se extienden, pero se localizan para un potencial suficientemente fuerte. Se ha predicho un escenario similar para las partículas que interactúan: un potencial cuasiperiódico suficientemente fuerte conduce a la localización de muchos cuerpos [14].

### 1.1. Modelo de Aubry-André

El modelo de Aubry-André (MAA) es un modelo de enlace fuerte de fermiones sin espín en un potencial cuasiperiódico que depende del  $i$ -ésimo sitio [18]:

$$h_i = h \cos(2\pi\beta i + \phi), \tag{1.1}$$

donde  $\beta$  es un número irracional. En esta Tesis consideramos  $\beta = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ , esto es, el inverso de la razón dorada.  $h$  es el parámetro de control que corresponde a la amplitud de un campo magnético y  $\phi$  una fase inicial cuyo valor está entre 0 y  $2\pi$ . El hamiltoniano del modelo de Aubry-André es:

$$H = \frac{J}{2} \sum_{i=1}^{L-1} \widehat{C}_i \widehat{C}_{i+1}^\dagger + \widehat{C}_i^\dagger \widehat{C}_{i+1} + J \sum_{i=1}^L h_i \widehat{C}_i^\dagger \widehat{C}_i. \quad (1.2)$$

En el hamiltoniano (1.2)  $\widehat{C}$ ,  $\widehat{C}^\dagger$  son los operadores fermionicos de aniquilación y creación,  $J$  es la constante de acoplamiento y  $L$  es el número de sitios. En esta Tesis se fija  $\hbar = 1$ . Usando la transformación de Jordan-Wigner [19] es posible escribir el hamiltoniano anterior en términos de las matrices de Pauli.

Introducimos los operadores de subida y de bajada como:

$$\widehat{a}_i^\dagger = \widehat{S}_i^x + \iota \widehat{S}_i^y \quad y \quad \widehat{a}_i = \widehat{S}_i^x - \iota \widehat{S}_i^y, \quad (1.3)$$

estos se encuentran en términos de los operadores de espín  $1/2$ ,  $\widehat{S}_i^{x,y,z} = \widehat{\sigma}_i^{x,y,z}/2$ , siendo  $\widehat{\sigma}_i^{x,y,z}$  las matrices de Pauli para  $x, y$  y  $z$  respectivamente, donde:

$$\widehat{\sigma}_i^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \widehat{\sigma}_i^y = \begin{pmatrix} 0 & -\iota \\ \iota & 0 \end{pmatrix}; \quad \widehat{\sigma}_i^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

Los operadores de espín se pueden escribir en términos de los operadores de subida y de bajada como:

$$\widehat{S}_i^x = (\widehat{a}_i^\dagger + \widehat{a}_i)/2; \quad \widehat{S}_i^y = (\widehat{a}_i^\dagger - \widehat{a}_i)/2\iota; \quad \widehat{S}_i^z = \widehat{a}_i^\dagger \widehat{a}_i - 1/2. \quad (1.5)$$

Es posible transformar las relaciones (1.3) en un nuevo conjunto de operadores que en realidad son los operadores de Fermi, dicha transformación es la siguiente:

$$\widehat{a}_i = \exp \left[ \pi \iota \sum_j^{i-1} \widehat{C}_j^\dagger \widehat{C}_j \right] \widehat{C}_i, \quad (1.6)$$

$$\widehat{a}_i^\dagger = \widehat{C}_i^\dagger \exp \left[ -\pi \iota \sum_j^{i-1} \widehat{C}_j^\dagger \widehat{C}_j \right], \quad (1.7)$$

Entonces:

$$\widehat{C}_i^\dagger \widehat{C}_i = \widehat{a}_i^\dagger \widehat{a}_i, \quad (1.8)$$

así la transformación inversa se obtiene simplemente como:

$$\widehat{C}_i = \exp \left[ \pi i \sum_j^{i-1} \widehat{a}_j^\dagger \widehat{a}_j \right] \widehat{a}_i, \quad (1.9)$$

$$\widehat{C}_i^\dagger = \widehat{a}_i^\dagger \exp \left[ -\pi i \sum_j^{i-1} \widehat{a}_j^\dagger \widehat{a}_j \right], \quad (1.10)$$

Los operadores fermionicos satisfacen las relaciones:

$$[\widehat{C}_i, \widehat{C}_j^\dagger] = \delta_{i,j}, \quad (1.11)$$

$$[\widehat{C}_i, \widehat{C}_j] = [\widehat{C}_i^\dagger, \widehat{C}_j^\dagger] = 0. \quad (1.12)$$

Por lo tanto, para  $i = 1, 2, 3, \dots, N - 1$ ,

$$\widehat{C}_i^\dagger \widehat{C}_{i+1} = \widehat{a}_i^\dagger \widehat{a}_{i+1}, \quad (1.13)$$

Entonces, haciendo uso de las expresiones (1.3), (1.5) y (1.13) podemos reescribir nuestro hamiltoniano (1.2) como:

$$H = \frac{J}{4} \sum_{i=1}^{L-1} [\sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y] + \frac{J}{2} \sum_{i=1}^L h_i \sigma_i^z. \quad (1.14)$$

Este hamiltoniano corresponde a un modelo  $XX$  de espín 1/2 expresado en términos de  $\sigma_i^{x,y,z}$ , que corresponden a las matrices de Pauli en  $x, y, z$  respectivamente para cada  $i$ -ésimo sitio con un campo transversal en la dirección  $z$  dependiente de la posición [20]. La transformación de Jordan-Wigner presentada en las expresiones (1.9) y (1.10) hace evidente la equivalencia entre ambos modelos. El MAA es un modelo paradigmático para estudiar las transiciones de localización-delocalización en sistemas unidimensionales, con la transición en  $h = h_c = 1$ : (i) para  $h < h_c$  el sistema se encuentra en una fase extendida o delocalizada en el espacio real (de configuración), (ii) para  $h > h_c$  el sistema está localizado; (iii) en el punto crítico  $h = h_c$  las funciones propias no están ni extendidas ni localizadas[21].

Las matrices de Pauli  $\sigma_i^{x,y,z}$  actúan solamente sobre un espín ubicado en el  $i$ -ésimo sitio. Los acoplamientos están limitados a espines vecinos cercanos. Una base natural para este sistema es un conjunto de  $2^L$  estados donde el espín en cada sitio esta apuntando hacia arriba o hacia abajo, es decir  $|\uparrow_1 \downarrow_2 \uparrow_3, \dots, \downarrow_L\rangle$ , esta base se conoce como base de sitios o base computacional.

Al término  $\sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y$  del hamiltoniano se le conoce como el termino flip-flop, pues este intercambia la posición de los espines de acuerdo a:

$$(\sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y) |\uparrow_i \downarrow_{i+1}\rangle = 2 |\downarrow_i \uparrow_{i+1}\rangle . \quad (1.15)$$

Por lo tanto, el término flip-flop intercambia estados que difieren sólo por la orientación de los espines en dos sitios adyacentes. En esta base el término flip-flop constituye los elementos fuera de la diagonal de la matriz hamiltoniana, este término juega un papel clave en la evolución del sistema al mover las perturbaciones a través de la cadena. El término  $\sigma_i^z$  contribuye a la parte diagonal de la matriz hamiltoniana escrita en la base de sitios. Este indica que la energía de un espín orientado hacia arriba es mayor que la energía de un espín orientado hacia abajo debido a

$$\sigma_i^z |\uparrow_i, \downarrow_{i+1}\rangle = |\uparrow_i, \downarrow_{i+1}\rangle , \quad (1.16)$$

mientras que

$$\sigma_{i+1}^z |\uparrow_i \downarrow_{i+1}\rangle = - |\uparrow_i \downarrow_{i+1}\rangle . \quad (1.17)$$

El hamiltoniano (1.14) conmuta con el operador de espín total en la dirección  $z$ ,  $\hat{S}^z = \sum_{i=1}^L \hat{S}_i^z$ , esto es,  $[H, \hat{S}^z] = 0$ . Esto significa que el sistema es invariable por una rotación alrededor del eje  $z$ , o de manera equivalente,  $\hat{S}^z$  se conserva.

En la figura 1.1 se muestra un ejemplo de una cadena de partículas con espín 1/2. Este sistema se puede pensar como un conjunto de partículas magnéticas con un estado de espín, un tipo de momento angular intrínseco en un nivel cuántico.

Como resultado de la conservación de  $\hat{S}^z$ , la matriz hamiltoniana de un sistema con

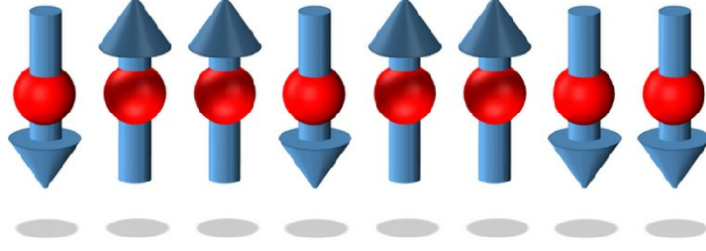


Figura 1.1: Cadena de partículas de espín  $1/2$  con  $L = 8$ . Esta cadena tiene la característica que el espín total en la dirección  $z$  es nulo, es decir  $\hat{S}^z = 0$  [35].

$L$  sitios está compuesta de  $L + 1$  subespacios independientes, cada uno con un número fijo  $N \in [0, L]$  de espines hacia arriba. Por lo tanto, aunque la dimensión total del espacio de Hilbert es de  $2^L$ , podemos diagonalizar sólo un subespacio a la vez, cuyas dimensiones están dadas por  $D = \binom{L}{N}$ , es decir, el coeficiente binomial de  $L$  respecto a  $N$ . Cuando  $L$  es par, el subespacio más grande tiene  $N = L/2$ . En este trabajo, el estudio se concentra en el subespacio más grande para el cual  $S^z = 0$ , cuya dimensión es igual a  $D = L!/(L/2)!^2$ . La localización en este sector de simetría garantiza la localización en sectores más pequeños. Por último, las energías  $E$  y los estados propios del hamiltoniano (1.14)  $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_D)$  son obtenidos numéricamente resolviendo un problema de eigenvalores, es decir,  $H|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle$ , para  $H$  la matriz hamiltoniana, dicha matriz se obtiene calculando  $\langle \uparrow_i \downarrow_{i+1} | H | \uparrow_i \downarrow_{i+1} \rangle$ . Por ejemplo, para  $L = 2$ , el subespacio más grande para el cual  $\hat{S}^z = 0$  es  $(|\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle)$ . Entonces la matriz hamiltoniana se obtiene como:

$$H = \begin{pmatrix} \langle \uparrow, \downarrow | H | \uparrow \downarrow \rangle & \langle \uparrow \downarrow | H | \downarrow \uparrow \rangle \\ \langle \downarrow \uparrow | H | \uparrow, \downarrow \rangle & \langle \downarrow \uparrow | H | \downarrow \uparrow \rangle \end{pmatrix}. \quad (1.18)$$

Por lo anterior, es posible hacer uso de las herramientas computacionales con el fin de construir la matriz hamiltoniana para diversos valores de  $L$  a partir de la elaboración de un código computacional. En concreto, se generó un código computacional que permite crear y obtener los valores propios y estados propios para matrices hamiltonianas correspondientes a sistemas con  $L = 10, 12, 14, 16$  sitios por medio de la técnica de la diagonalización exacta.

Para realizar la estadística de estados propios se recurrió a tomar promedios sobre un cierto número de estados iniciales y sobre realizaciones de desorden, desorden que proviene de la fase  $\phi$  introducida en el potencial cuasiperiódico (1.1) con la finalidad de

Tamaño del sistema L	Dimensión D del subespacio	Número de estados tomados respecto a la mitad del espectro	Número de realizaciones del desorden
10	252	26	3968
12	924	93	1082
14	3432	344	291
16	12870	1288	77

Cuadro 1.1: Datos acerca del número de estados iniciales considerados y sobre el número de realizaciones de desorden para cada tamaño de los sistemas.

extraer información acerca del sistema que representa el MAA. Esta Tesis se concentra en caracterizar la transición de fase que presenta este sistema al variar el parámetro  $h$ . Los números de estados iniciales y realizaciones del desorden se exponen detalladamente en la cuadro 1.1. La fase  $\phi$  es aleatoria, tomada de una distribución uniforme entre  $[0, 2\pi]$ . Los resultados obtenidos serán comparados con valores teóricos provenientes de RMT. En apartados siguientes se introducirá y justificará el uso de RMT así como su relevancia en la comparación y posterior interpretación de resultados obtenidos a partir de la información proporcionada por los valores propios y estados propios.

## 1.2. Propiedades Estáticas

La teoría de matrices aleatorias (RMT) se introdujo hace medio siglo para describir las propiedades estadísticas de los niveles de energía de los núcleos atómicos complejos [22]. Desde entonces, ha demostrado ser muy útil en una gran variedad de campos diferentes [23]. En el caos cuántico [24], RMT provee información acerca de las estadísticas espectrales de los sistemas cuya contrapartida clásica es caótica, mientras que para hamiltonianos cuánticos cuya contraparte clásica es integrable, la conjetura de Berry-Tabor [25] establece que su estadística de niveles energéticos siguen una ley de Poisson. Bohigas, Giannoni y Schmit conjeturaron [26] que el caso de hamiltonianos cuánticos con dinámica clásica caótica debe caer en uno de los tres conjuntos clásicos de RMT. Estos tres conjuntos corresponden a matrices aleatorias hermitianas cuyas entradas se distribuyen independientemente, respectivamente, como variables aleatorias reales, complejas o cuaterniónicas.

La teoría de matrices aleatorias supone que los detalles de la interacción de un sistema no son importantes para las propiedades de las fluctuaciones de su espectro energético y

que basta con conocer sus propiedades de simetría. Por este motivo se reemplaza el hamiltoniano por una matriz cuyos elementos se eligen aleatoriamente. Los elementos de matriz no se pueden fijar con completa libertad. Se debe obedecer la clase de universalidad del hamiltoniano que se quiere representar.

Los hamiltonianos que poseen simetría bajo inversión temporal y simetría bajo rotaciones se pueden representar por matrices reales invariantes bajo el grupo de transformaciones ortogonales cuyas entradas provengan de una distribución normal. Al ensamble formado por este tipo de matrices se le conoce como ensamble Gaussiano Ortogonal (GOE por sus siglas en inglés).

El hamiltoniano (1.14) tiene las mismas simetrías que una matriz proveniente de GOE [15] entonces se espera que las propiedades locales del espectro energético sean las mismas que las predichas por RMT, por esta razón, el estudio que se realiza a continuación es comparado con los resultados proporcionados por este ensamble. En esta sección se introducirá la estadística de niveles energéticos y algunas medidas de localización que hacen uso de la información proporcionada por los estados propios del hamiltoniano sin involucrar alguna evolución temporal.

### 1.2.1. Estadística de Niveles

La universalidad en el contexto de RMT significa que los ensambles de matrices aleatorias describen los niveles de energía de los sistemas caóticos reales a nivel estadístico, esto es, sin importar los detalles del sistema. Antes de realizar cualquier análisis de fluctuaciones espectrales para comparar resultados con el valor teórico correspondiente a la RMT es necesario realizar un tratamiento al espectro de energías, este tratamiento se le conoce como *reescalado* o bien *unfolding*. Una manera de analizar las correlaciones del espectro energético es por medio del cálculo de  $P(s)$ , denominada distribución del espaciamiento entre primeros vecinos. Esta distribución tiene como finalidad medir las correlaciones de corto alcance en el espectro. El espaciamiento entre primeros vecinos se define como  $s_n$ , siendo  $s_n = (\epsilon_{n+1} - \epsilon_n)/\delta$ , con  $\delta$  el espaciamiento medio entre niveles y  $\epsilon_n$  las energías

---

ordenadas de mayor a menor. Anteriormente se expuso que los sistemas integrables no presentan repulsión entre los niveles mientras que los sistemas no integrables sí. Para el primer caso, la  $P(s)$  tiene la forma de la distribución de Poisson, es decir:

$$P_P(s) = \exp(-s) \tag{1.19}$$

Una buena aproximación a la  $P(s)$  correspondiente al GOE es la distribución de Wigner:

$$P_W(s) = \frac{\pi s}{2} \exp\left(-\frac{\pi}{4}s^2\right). \tag{1.20}$$

Recientemente se ha propuesto una nueva cantidad equivalente a  $s_n$  [27] definida como sigue: Sea  $\epsilon_n$  un conjunto ordenado de niveles de energía y  $s_n = \epsilon_{n+1} - \epsilon_n$  el espaciamiento entre primeros vecinos, entonces la razón del espaciamiento de niveles consecutivos  $\tilde{r}_n$  esta dada por:

$$\tilde{r}_n = \frac{\min(s_n, s_{n-1})}{\max(s_n, s_{n-1})} = \min\left(r_n, \frac{1}{r_n}\right), \tag{1.21}$$

donde

$$r_n = \frac{s_n}{s_{n-1}}. \tag{1.22}$$

Esta cantidad tiene la ventaja de que no requiere el *unfolding* ya que las relaciones de espaciamientos entre niveles consecutivos son independientes del espaciamiento medio entre niveles. Tal cantidad permite una comparación más transparente con los experimentos que la distribución tradicional del espaciamiento entre niveles. Por esta razón, muchos artículos y proyectos de investigación recientes emplean esta cantidad en diferentes contextos de sistemas de muchos cuerpos, como ejemplo para investigar numéricamente la localización de muchos cuerpos [27, 30, 31].

La distribución de razones entre espaciamientos  $P(r)$  juega un papel importante en el análisis de los espectros energéticos en hamiltonianos cuánticos de muchos cuerpos, existen estimaciones analíticas de este, y están restringidos a los principales ensambles incluyendo el ensamble *GOE*. En este trabajo usamos la distribución de razones ya que la distribución  $P(s)$  y  $P(r)$  son equivalentes. Las funciones de distribución para el caso de Poisson y Wigner-Dyson son las siguientes [27]:

$$P_P(r) = \frac{1}{(1+r)^2}, \tag{1.23}$$

y

$$P_W(r) = \frac{r + r^2}{\left(\frac{8}{27}\right)(1 + r + r^2)^{5/2}}. \quad (1.24)$$

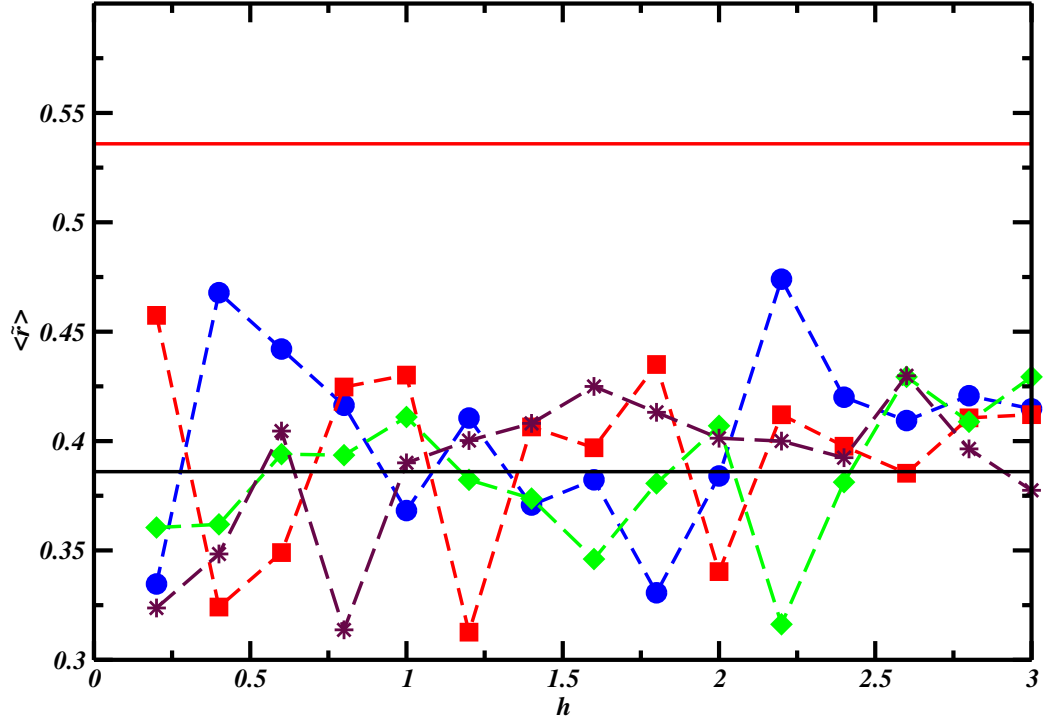


Figura 1.2: El promedio de la razón entre espaciamentos de niveles consecutivos  $\langle \tilde{r}_n \rangle$  para el modelo sin interacciones sobre un cierto número de realizaciones de acuerdo al cuadro 1.1 para  $L=10$  (círculo),  $L=12$  (cuadrado),  $L=14$  (rombo),  $L=16$  (estrella), el valor calculado para el caso Poisson  $\langle \tilde{r}_n \rangle_P = 2 \ln 2 - 1 \approx 0.38629$  (línea inferior) y el valor calculado para el ensamble GOE  $\langle \tilde{r}_n \rangle_{GOE} = 4 - 2\sqrt{3} \approx 0.53590$  (línea superior).

El valor de  $\langle \tilde{r}_n \rangle$  brinda información valiosa acerca de la distribución que seguirán los valores propios, esta nos permite visualizar el comportamiento del sistema sin necesidad de calcular las distribuciones  $P(r)$ , además se puede utilizar con fines prácticos como referencia para discriminar entre dinámicas caóticas y regulares (integrables)[27]. En la Fig. (1.2), se muestra el promedio de la razón del espaciamento de niveles consecutivos  $\langle \tilde{r}_n \rangle$ , los resultados se comparan con los casos teóricos del caso Poisson,  $\langle \tilde{r}_n \rangle_P = 2 \ln 2 - 1 \approx 0.38629$  (línea inferior) y el ensamble GOE  $\langle \tilde{r}_n \rangle_{GOE} = 4 - 2\sqrt{3} \approx 0.53590$  (línea superior). Para  $L=10$  (círculo),  $L=12$  (cuadrado),  $L=14$  (rombo) y  $L=16$  (estrella). Los valores de  $\langle \tilde{r}_n \rangle$  oscilan cerca del valor promedio estimado de  $\langle \tilde{r}_n \rangle_P$  para valores de  $0.2 \leq h \leq 3.0$ , lo que parece indicar que el sistema permanece en un régimen integrable. Por lo tanto, los resultados de la Fig. (1.2) no detectan la transición de fase independientemente de la

variación del parámetro  $h$ .

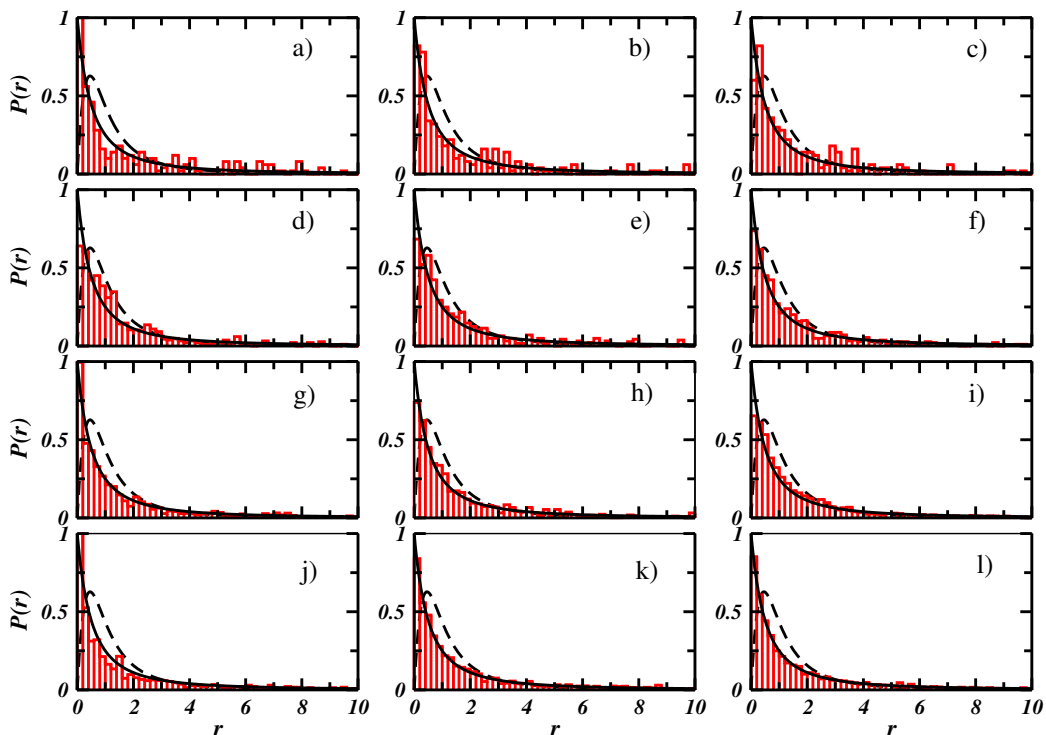


Figura 1.3: Distribución de razones  $P(r)$  correspondientes una sola realización del desorden. Para  $L=10$  en a), b) y c);  $L=12$  en d), e) y f);  $L=14$  en g), h) y i); y  $L=16$  en j), k) y l). Las magnitudes de  $h$  son:  $h=0.2$  para a), d), g) y j);  $h=1.0$  para b), e), h) y k);  $h=3.0$  para c), f), i) y l); Las líneas solidas corresponden a la distribución de Poisson [Ec. (1.23)] y la líneas negras discontinuas corresponden a la distribución de Wigner-Dyson [Ec. (1.24)].

En la Fig. (1.3) se aprecian las distribuciones de razones para distintos números de sitios y amplitudes de  $h$ . Se tiene conocimiento que para valores de  $h$  menores al valor del punto crítico  $h_c = 1.0$  el sistema se encuentra inmerso en una fase delocalizada [21], y para valores de  $h$  mayores a  $h_c$  el sistema ahora se encuentra dentro de una fase localizada, por lo tanto, se espera que exista un cambio en la distribución de razones que sigue las energías del sistema, en particular para  $h = 0.2, 3.0$  y sobre el punto crítico  $h_c = 1.0$ , pues que ocurra esto, es un indicio de que existe una transición de fase con respecto a la variación de  $h$ , no obstante la Fig. (1.3) no refleja ningún cambio en las distribuciones de razones para  $L = 10, 12, 14$  y  $16$ , pues la distribución que siguen las energías del sistema es del tipo Poisson independientemente del incremento del parámetro  $h$ , algo que se adelantaba de la Fig. (1.2). Sin embargo, estas afirmaciones no son del todo concluyentes, pues es posible realizar otro tipo de análisis al sistema que brinden información acerca de una transición

de fase, lo que se puede concluir es que la estadística de niveles, es decir, el valor de  $\langle \tilde{r}_n \rangle$  y la distribución de razones  $P(r)$  no son capaces de identificar una transición de fase del sistema representado por el modelo de Aubry-André sin interacciones.

### 1.3. Medidas de localización

Los estados propios proveen mucha información acerca del sistema. Una forma de estudiar la estructura de los estados propios en cierta base, es calculando la cantidad conocida como la razón inversa de participación (IPR) para el  $\alpha$ -ésimo estado definida como  $IPR^\alpha = \sum_n^D |C_n^\alpha|^4$ , con  $D$ , la dimensión de la matriz hamiltoniana. Esta cantidad contiene información acerca de la estructura de los estados propios  $|\Psi^\alpha\rangle = \sum_n^D C_n^\alpha |\Phi^n\rangle$  escritos en la base de vectores  $|\Phi^n\rangle$  de la base de sitios. Los coeficientes  $C_n^\alpha = \langle \Phi^n | \Psi^\alpha \rangle$  corresponden a la proyección de los vectores de la base de sitios sobre los estados propios  $\Psi^\alpha$  del hamiltoniano. El  $IPR^\alpha$  mide el nivel de delocalización de los estados propios en la base elegida. Al investigar la localización en el espacio real, el estado inicial generalmente corresponde a un vector de base del espacio de configuraciones. Se ha demostrado [15] que el  $IPR$  escala con respecto al tamaño del sistema como:

$$IPR^\alpha \sim D^\gamma \tag{1.25}$$

El valor de  $\gamma$  tiene un papel relevante [15], este ofrece información sobre la delocalización de los estados de acuerdo a:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \gamma \approx 0 & \text{estados localizados} \\ 0 < \gamma < 1 & \text{estados ni extendidos ni localizados} \\ \gamma \approx 1 & \text{estados extendidos o delocalizados} \end{array} \right. \tag{1.26}$$

Otra cantidad que es ampliamente usada para medir el nivel de delocalización de

estados cuánticos es la entropía de Información de Shannon:

$$S_{Sh}^{\alpha} = - \sum_{n=1}^D |C_n^{\alpha}|^2 \ln |C_n^{\alpha}|^2 . \quad (1.27)$$

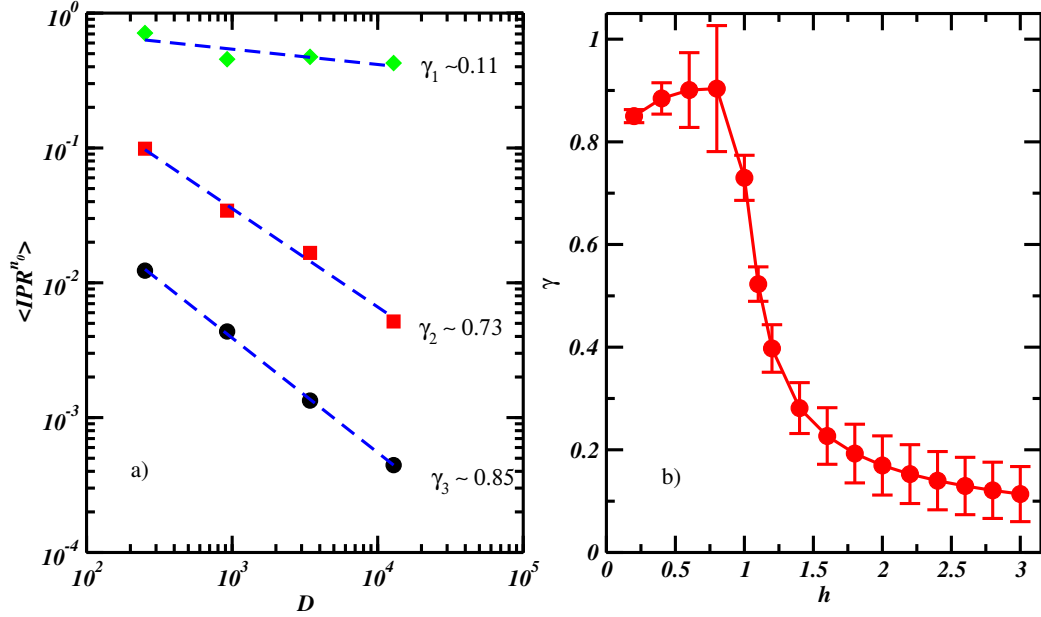


Figura 1.4: a) Comportamiento de la razón inversa de participación promediada sobre un cierto número de realizaciones del desorden y estados iniciales con respecto a la dimensión de los sistemas  $\langle IPR^{n_0} \rangle$  versus  $D$  [cuadro 1.1] para  $L = 10, 12, 14$  y  $16$  para  $h = 0.2$  (círculo),  $h = 1.0$  (cuadrado) y  $h = 3.0$  (rombo) en escala logarítmica. b) El comportamiento de  $\gamma$  para valores  $0.2 \leq h \leq 3.0$ . Las líneas discontinuas en a) corresponden a un ajuste lineal, en b) la línea discontinua sirve como guía para el lector.

En la Fig. (1.4) se muestra un análisis de escalamiento del  $\langle IPR^{n_0} \rangle$  sobre realizaciones del desorden con respecto a la dimensión de los sistemas Fig. (1.4) a). Tomando el logaritmo natural de la expresión [Ec. (1.25)] se obtiene  $\ln(\langle IPR^{n_0} \rangle) \sim \gamma \ln(D)$ , esta expresión muestra que el valor de  $\gamma$  corresponde al valor de la pendiente de una recta obtenida de un ajuste de potencias en una escala logarítmica. Para  $h = 0.2$  (círculo) la pendiente toma un valor  $\gamma_1 \approx 0.851$ , en  $h = 1.0$  (cuadrado),  $\gamma_2 \approx 0.73$  y  $h = 3.0$  (rombo),  $\gamma_3 \approx 0.11$ , estos valores ofrecen información acerca de una transición de fase, ya que  $\gamma_1 \approx 1$  implica para  $h = 0.2$  que el sistema se encuentra inmerso en una fase delocalizada, en  $h = 1.0$ ,  $0 < \gamma_2 < 1$  el sistema no se encuentra en una fase localizada ni delocalizada, y por último, para  $h = 3.0$   $\gamma_3 \approx 0.11$  el sistema está inmerso en una fase localizada. El valor de  $\gamma$  permite conocer para que valores de  $h$  se da una transición de fase, en la Fig. (1.4) b) se muestra

el comportamiento de  $\gamma$  para los valores  $0.2 \leq h \leq 3.0$ , para  $0.2 \leq h < 1.0$ ,  $\gamma$  se mantiene con valores cercanos a 1, por otra parte en  $1.0 < h \leq 3.0$ ,  $\gamma$  comienza a tomar valores cercanos a cero, sin embargo en  $h = h_c = 1.0$ ,  $\gamma$  su valor oscila entre 0 y 1.

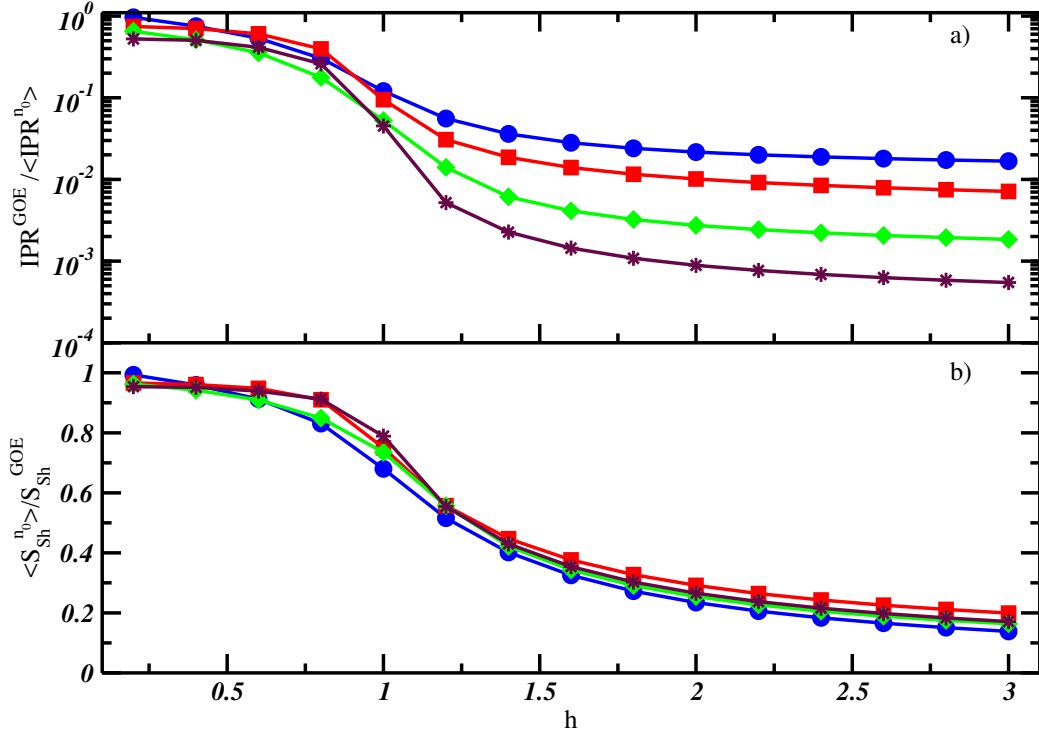


Figura 1.5: Comportamiento de las razones entre los resultados para GOE con la razón inversa de participación para el MAA sin interacciones a) y la entropía de información de Shannon b) promediados sobre un cierto número de realizaciones de desorden y estados iniciales de acuerdo al cuadro 1.1 con respecto a la magnitud del parámetro  $h$  para  $L=10$  (círculo),  $L=12$  (cuadrado),  $L=14$  (rombo),  $L=16$  (estrella).

En la Fig. (1.5) se muestra  $IPR^{GOE} / \langle IPR^{n_0} \rangle$  con  $IPR^{GOE} = 3D^{-1}$  que corresponde al valor calculado para GOE, para la cual todos los estados se encuentran delocalizados. En Fig. (1.5) a) se muestra el comportamiento de  $IPR^{GOE} / \langle IPR^{n_0} \rangle$  con respecto a  $h$  en escala semi-logarítmica. Para valores de  $0.2 \leq h < 1.0$ ,  $IPR^{GOE} / \langle IPR^{n_0} \rangle \approx 1$  esto implica que  $\langle IPR^{n_0} \rangle \approx 3D^{-1}$ , es decir, el sistema se encuentra en una fase delocalizada, mientras que para  $1.0 < h \leq 3.0$  se observa que  $IPR^{GOE} / \langle IPR^{n_0} \rangle < 1$ , o bien,  $IPR^{GOE} < \langle IPR^{n_0} \rangle$ , al ser el  $IPR$  una medida de la delocalización, esto último indica que los estados del sistema se encuentran mucho menos delocalizados. Para  $h = 1.0$  se puede apreciar un ligero cruce entre las curvas que representan los valores  $L=14$  (rombo) y  $L=16$  (estrella) alrededor del punto crítico  $h_c = 1.0$ , para  $L=10$  (círculo) y  $L=12$

(cuadrado) no se da este cruce con las demás curvas debido a, probablemente, efectos de tamaño finito.

En la Fig. (1.5) b) se compara el valor  $\langle S_{Sh}^{n_0} \rangle / S_{Sh}^{GOE}$  y su comportamiento con respecto a  $h$  para distintos valores de  $L$ . El valor de la entropía es máximo para GOE, en este caso el valor es  $S_{Sh}^{GOE} \approx \ln(0.48D)$ . Los resultados de la entropía para los cuatro valores de  $L$  vuelven a interceptarse en un punto, el cruce en este punto ha sido usado para detectar la transición a la localización. Nuevamente para la región  $0.2 \leq h < 1.0$  implica  $S_{Sh}^{GOE} \approx \langle S_{Sh}^{n_0} \rangle$  y para  $1.0 \leq h < 3.0$  implica  $\langle S_{Sh}^{n_0} \rangle < S_{Sh}^{GOE}$ , por último, el cruce de las curvas se encuentra en  $h = 1.0$  que corresponde al punto crítico. El análisis de la estructura del estado de la base de sitios será de utilidad para nuestro estudio, más adelante de las propiedades dinámicas.

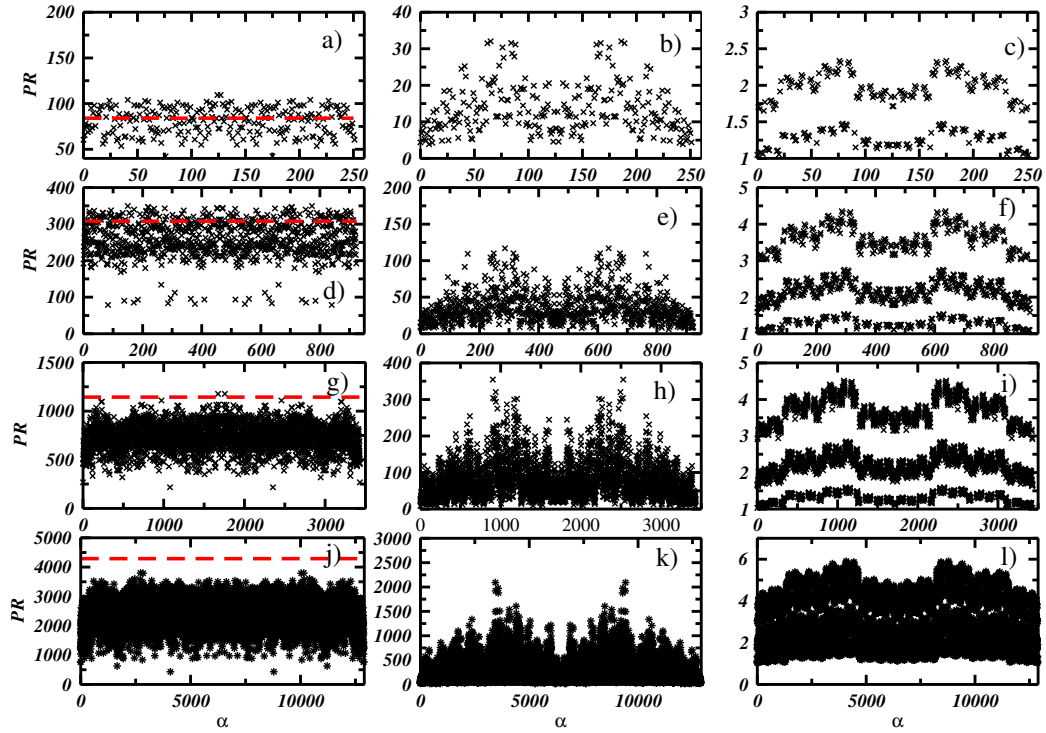


Figura 1.6: Se muestran los valores de  $PR = 1/IPR$  para los  $\alpha$ -ésimos estados para una sólo realización de desorden. Para  $L = 10$  en a), b) y c);  $L = 12$  en d), e) y f);  $L = 14$  en g), h) y i); y  $L = 16$  en j), k) y l). Las magnitudes de  $h$  son:  $h = 0.2$  para a), d), g) y j);  $h = 1.0$  para b), e), h) y k);  $h = 3.0$  para c), f), i) y l); Las líneas rojas corresponden al valor teórico  $PR = 1/IPR^{GOE} = D/3$ .

La estructura de los estados propios puede ser apreciada calculando el  $IPR^\alpha$  para todos los  $\alpha$ -ésimos estados. Para el caso de GOE, todos los estados se encuentran delocalizados, el valor en el que oscila es  $IPR^{GOE} = 3D^{-1}$ , entonces el  $IPR^\alpha$  también brinda

información sobre la fase en la que se encuentra el sistema. En la Fig. (1.6) se muestra la estructura de los estados propios para valores de  $h = 0.2, 1.0$  y  $3.0$ . En los paneles en la Fig. (1.6) en a), d), g) y j) el  $PR_\alpha$  se mantiene cerca del valor teórico correspondiente a GOE. Para  $L = 10, 12, 14, 16$  y corresponde a  $h = 0.2$  en los paneles c), f), i) y l) de la Fig. (1.6) los  $PR^\alpha$  se alejaron bastante al valor predicho para GOE, estos tienden a cero para  $h = 0.3$  en los paneles b), e), h) y k) de la Fig. (1.6) los valores de  $PR_\alpha$  se alejan del predicho, pero no suficiente como para argumentar que tienden a cero. Nuevamente, este análisis concuerda con lo argumentado anteriormente.

Tanto el  $IPR^\alpha$  como los análisis de escalamiento para obtener a  $\gamma$ , la entropía de Shannon  $S_{Sh}$  y los resultados del  $PR^\alpha$  para todos los  $\alpha$ -ésimos estados son cantidades que permiten medir la delocalización de los estados del sistema, en este caso del MAA sin interacciones, estas son propiedades estáticas que requieren el uso de la información que otorgan los estados propios, a diferencia de la estadística de niveles energéticos. El estudio de la estructura de los estados propios logró identificar la transición de fase del MAA sin interacciones al variar la amplitud del parámetro  $h$ , esto implica que para la región para la cual  $0.2 \leq h < 1.0$  el sistema se encuentra en una fase delocalizada y para la región  $1.0 \leq h < 3.0$  el sistema se encuentra en una fase localizada, siendo  $h = h_c = 1.0$  el punto crítico.

## 1.4. Propiedades Dinámicas

Para estudiar la dinámica, se considera como estado inicial a un estado de la base de sitios,  $|\Psi(0)\rangle = |\Phi^{n_0}\rangle = \sum_\alpha C_\alpha^{n_0} |\Phi_\alpha\rangle$ . Se investigará el comportamiento de la probabilidad de supervivencia definida como [15, 34]:

$$W_{n_0}(t) = \left| \sum_\alpha |C_\alpha^{n_0}|^2 \exp(-iE_\alpha t) \right|^2, \quad (1.28)$$

esta cantidad representa la probabilidad de encontrar al sistema en su estado inicial en el tiempo  $t$ .

La Ec. (1.28) puede ser escrita como una integral:

$$W_{n_0}(t) = \left| \int e^{-iEt} \rho_{n_0}(E) dE \right|^2, \quad (1.29)$$

donde:

$$\rho_{n_0}(E) = \sum_{\alpha} |C_{\alpha}^{n_0}|^2 \delta(E - E_{\alpha}), \quad (1.30)$$

que es la distribución de energías ponderado por las componentes  $|C_{\alpha}^{n_0}|^2$  del estado inicial, esta es llamada la *densidad local de estados* o bien LDOS por sus siglas en inglés. La varianza de LDOS es:

$$\sigma_{n_0}^2 = \sum_{\alpha} |C_{\alpha}^{n_0}|^2 (E_{\alpha} - E_{n_0})^2, \quad (1.31)$$

con  $E_{n_0} = \langle \Psi(0) | H | \Psi(0) \rangle$  la energía correspondiente al estado inicial.

Expandido la Ec. (1.28) para tiempos cortos,  $t \ll \sigma_{n_0}^{-1}$ , independientemente del modelo o del estado inicial, la probabilidad de supervivencia muestra un decaimiento cuadrático en t:

$$W_{n_0}(t) \approx 1 - \sigma_{n_0}^2 t^2. \quad (1.32)$$

Seguido del decaimiento cuadrático universal, inicialmente la evolución de la probabilidad de supervivencia es controlada por la forma de la envolvente de LDOS. Para el caso de GOE, la envolvente de LDOS es semicircular:

$$\rho_{n_0}(E) = \frac{1}{\pi \sigma_{n_0}} \sqrt{1 - \left( \frac{E}{2\sigma_{n_0}} \right)^2}. \quad (1.33)$$

Entonces, integrando la Ec. (1.28) se obtiene el decaimiento inicial de la probabilidad de supervivencia como:

$$W_{n_0}(t) = \frac{J_1^2(\sigma_{n_0} t)}{(\sigma_{n_0} t)^2}, \quad (1.34)$$

donde  $J_1^2(t)$  es una función de Bessel de primer tipo. Durante este decaimiento, la

envolvente de la oscilaciones de la función de Bessel decae como  $t^{-3}$ . Este comportamiento puede ser obtenido a través del estudio de la Ec. (1.34) considerando  $\sigma_{n_0}^{-1} \ll t$ . Entonces, el decaimiento de la envolvente para tiempos largos para la probabilidad de supervivencia esta dado por

$$W_{n_0}(t) \propto t^{-3}. \quad (1.35)$$

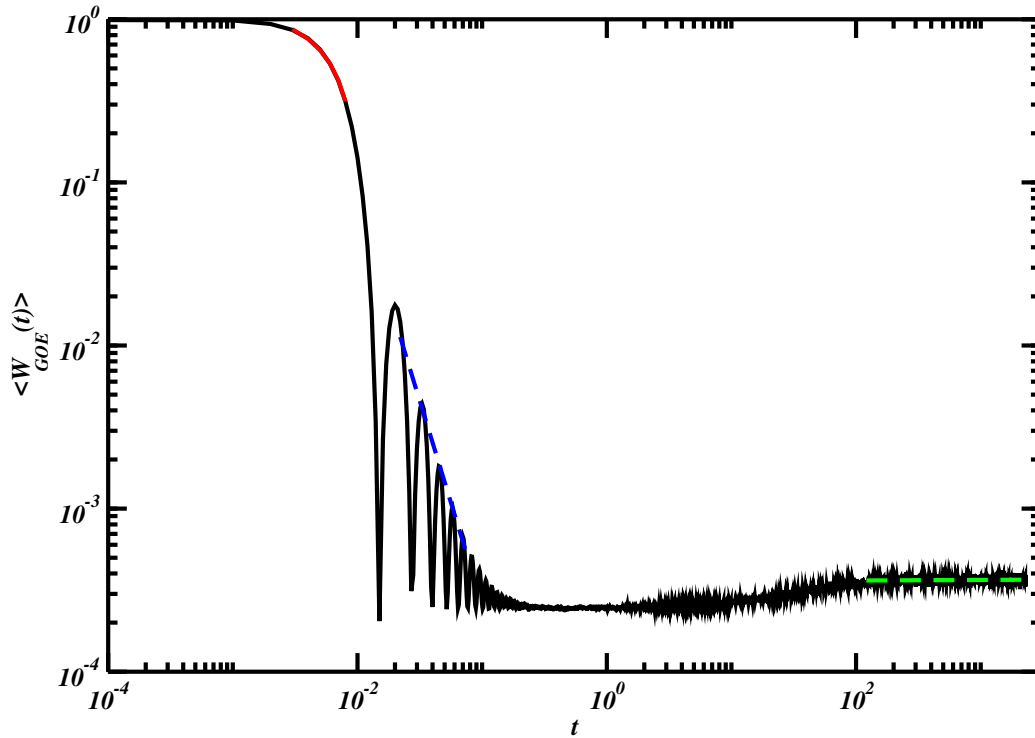


Figura 1.7: Evolución temporal de la probabilidad de supervivencia para el caso de GOE. La probabilidad es promediada sobre 300 matrices de dimensión  $D = 8192$  y 80 estados iniciales. Se observa el decaimiento cuadrático (rojo), el decaimiento como  $t^{-3}$  y la saturación de  $\langle W_{GOE}(t) \rangle$  que coincide con el  $IPR$  para tiempos suficientemente largos.

La razón inversa de participación del estado inicial  $IPR^{n_0}$  coincide con la probabilidad de supervivencia después de la saturación cuando el tiempo tiende a infinito,

$$\begin{aligned}
 \langle W_{n_0}(t) \rangle &= \langle \sum_{\alpha} |C_{\alpha}^{n_0}|^4 \rangle + \left\langle \sum_{\alpha \neq \beta} |C_{\alpha}^{n_0}|^2 |C_{\beta}^{n_0}|^2 \exp(i(E_{\beta} - E_{\alpha})t) \right\rangle \\
 &\sim \langle \sum_{\alpha} |C_{\alpha}^{n_0}|^4 \rangle = \langle IPR^{n_0} \rangle.
 \end{aligned}
 \tag{1.36}$$

En el caso de los sistemas caóticos, las correlaciones entre los valores propios se reflejan en la evolución de la probabilidad de supervivencia en forma de un descenso por debajo del punto de saturación, conocido como *hoyo de correlación*. En la Fig. (1.7) se muestra  $\langle W_{GOE}(t) \rangle$  para el caso de matrices provenientes de GOE, en esta figura se aprecia el decaimiento cuadrático universal (rojo), seguido de un decaimiento que se rige por la función de Bessel  $J(\sigma_{n_0}t)$  y como la envolvente de este comportamiento decae como  $t^{-3}$  (azul). Por último, se puede observar como  $\langle W_{GOE}(t) \rangle$  se satura tiempos largos (verde).

Comenzamos analizando cómo la estructura del estado inicial escrito en la base de vectores propios de energía depende de  $h$ . El análisis se ejecuta para un 10 % de vectores de la base de sitios  $|\Phi_n\rangle$  que tienen una energía  $E_{n_0}$  más cercana a centro del espectro. Los promedios se realizan en estos estados y en varias realizaciones de desorden de acuerdo a la cuadro 1.1.

En la Fig. (1.8) se muestra la evolución temporal de la probabilidad de supervivencia sobre un estado inicial con energía más cercana a cero comparadas con los valores del  $\langle IPR^{n_0} \rangle$  correspondiente a cada curva. En la Fig. (1.8) a) para  $h = 0.2$ , la probabilidad de supervivencia manifiesta fluctuaciones para tiempos largos y se mantienen cuando el tiempo es suficientemente largo, además el valor de  $\langle W_{n_0}(t) \rangle$  disminuye a lo largo del tiempo conforme aumenta el tamaño de  $L$ , con  $L=10$  (negra), 12 (naranja), 14 (verde) y 16 (azul), lo que se destaca de esta figura y en las siguientes, es que para tiempos suficientemente largos ( $10^3 - 10^5$ ) la probabilidad de supervivencia se satura y  $\langle W_{n_0}(t) \rangle$  oscila alrededor del  $\langle IPR^{n_0} \rangle$  calculado para el correspondiente número de  $L$  para cada  $h$  tal y como se mostró en la Ec. (1.29).

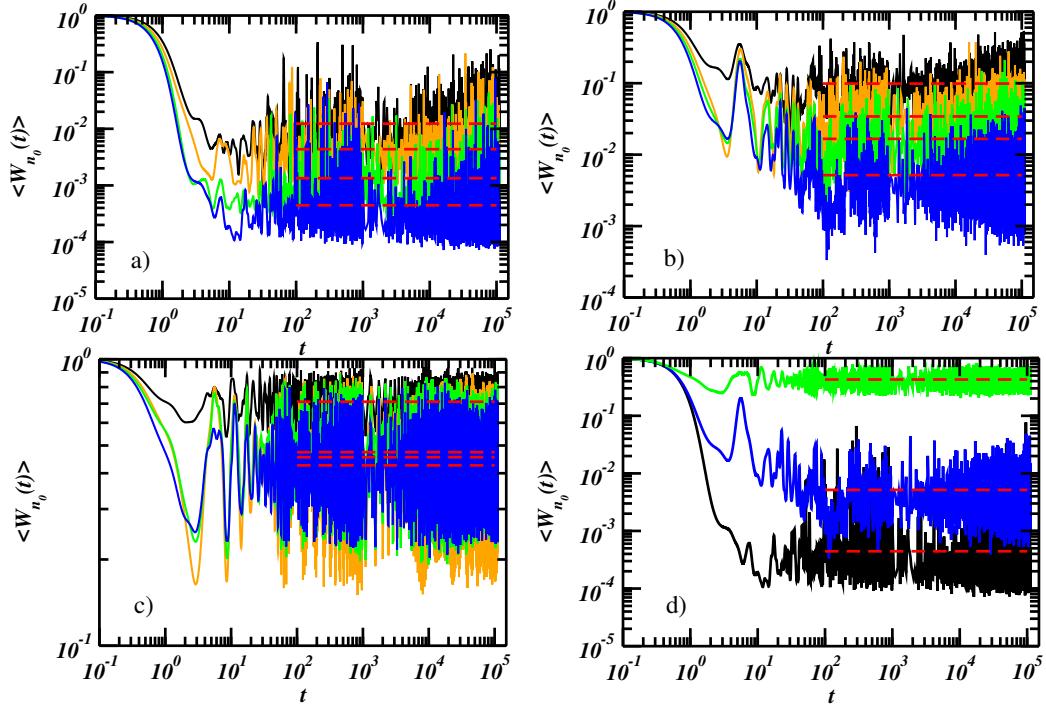


Figura 1.8: Evolución temporal de la probabilidad de supervivencia para un estado inicial promediado de acuerdo al cuadro 1.1 para  $L = 10$  (negra), 12 (naranja), 14 (verde) y 16 (azul), con  $h = 0.2$  (a),  $h = 1.0$  (b) y  $h = 3.0$  (c); Las líneas discontinuas representan el valor del  $\langle IPR^{n_0} \rangle$  correspondiente al estado inicial y para cada magnitud de  $h$  de la probabilidad de supervivencia sobre un estado inicial promediado sobre realizaciones del desorden para  $L = 16$  (d) con  $h = 0.2$  (negra),  $h = 1.0$  (azul) y  $h = 3.0$  (verde). Las líneas discontinuas corresponden al valor promedio del  $\langle IPR^{n_0} \rangle$  correspondiente a cada valor de  $h$ .

En la Fig. (1.8) b) para  $h = 1.0$  se muestra un dramático cambio en la evolución temporal de la probabilidad de supervivencia. Se puede observar que los valores de la probabilidad en la Fig. (1.8) b) se incrementan para cada curva en comparación con las curvas de la Fig. (1.8) a), además de esto, se puede observar que en tiempos largos ( $10^1 - 10^2$ ) la probabilidad experimenta un decaimiento como ley de potencias, un comportamiento bastante interesante en el contexto de la manifestación de las correlaciones del espectro energético y de las componentes del estado inicial, sin embargo este análisis se reservará para el siguiente capítulo debido a que el MAA con interacciones es más rico en este sentido, no obstante este decaimiento también se atribuye al hecho de que el sistema se encuentra sobre el punto crítico. Nuevamente en tiempos suficientemente largos, la probabilidad se satura y oscila alrededor del  $\langle IPR^{n_0} \rangle$  correspondiente para cada valor de  $L$ . Para la Fig. (1.6) c) también se notan cambios importantes en los valores de la proba-

bilidad de supervivencia, pues en este caso se incrementan bastante en comparación con las figuras anteriores, los valores de  $\langle IPR^{n_0} \rangle$  para cada curva coinciden para cuando las curvas  $\langle W_{n_0}(t) \rangle$  se saturan. Por último en la Fig. (1.8) d) se muestran tres curvas para  $L = 16$  y distintos valores de  $h$ .

Para  $h = 0.2$  (negra), la probabilidad de supervivencia toma valores pequeños y esta aumenta para  $h = 1.0$  (azul) y sigue aumentando para  $h = 3.0$  (verde). Para tiempos largos el  $\langle IPR^{n_0} \rangle$  correspondiente a cada curva se mantiene sobre los valores de saturación de  $\langle W_{n_0}(t) \rangle$ . Estas curvas son de gran importancia para este trabajo porque no sólo ofrecen información sobre la evolución temporal del estado inicial, sino que reflejan la manifestación de las propiedades estáticas como el  $IPR^{n_0}$  y no sólo eso, confirma lo analizado en la sección anterior. Como la probabilidad de supervivencia tiende al  $\langle IPR^{n_0} \rangle$  para tiempos suficientemente largos y  $\langle W_{n_0}(t) \rangle$  aumenta con respecto al valor de  $h$ , entonces el  $\langle IPR^{n_0} \rangle$  también aumenta. En  $h = 0.2$  el valor de  $\langle IPR^{n_0} \rangle$  correspondiente a cada curva son mucho menores en comparación con los valores de  $\langle IPR^{n_0} \rangle$  para el caso de  $h = 3.0$ . Para  $h = 1.0$  los valores del  $\langle IPR^{n_0} \rangle$  se encuentran en un valor intermedio, estas afirmaciones se visualizan mejor para el caso de la Fig. (1.8) d). Dado que el  $\langle IPR^{n_0} \rangle$  es utilizado como una medida de delocalización y contrastando con lo visto en la sección anterior para la Fig. (1.8) en el panel a) para  $h = 0.2$  el estado inicial se mantiene delocalizado, en el panel c) para  $h = 3.0$  el estado inicial se encuentra localizado y para el panel b) con  $h = 1.0$  el estado inicial no está ni delocalizado ni localizado.

En resumen, este capítulo tuvo como objetivo estudiar al modelo de Aubry-André sin interacciones por medio de la estadística del espectro de energías, la estructura de los estados propios y las propiedades dinámicas. A lo largo de las secciones se mostró la estrecha relación que existe entre estas propiedades, en particular, la manifestación de propiedades estáticas en las dinámicas. Se mostró que el promedio de la razón del espaciamiento de niveles consecutivos  $\langle \tilde{r}_n \rangle$  Fig. (1.2) no es capaz de identificar una transición de fase del MAA sin interacciones con respecto a la variación de la magnitud del parámetro  $h$  de 0.2 a 3.0 ya que los valores de  $\langle \tilde{r}_n \rangle$  oscilan alrededor del valor teórico para el caso Poisson, esto implica que la distribución de razones que sigue el espectro de energías es de una es-

tadística de tipo Poisson, este hecho queda expuesto en la Fig. (1.3). De acuerdo a estudios previos [21, 29] se conjetura que los resultados de estudiar al espectro energético dejan claro que no ofrecen información sobre una transición de fase del MAA sin interacciones.

Por otro lado, estudiar las propiedades estáticas a partir de la información que proveen los estados propios fue de gran utilidad para este trabajo. El  $IPR$  y la entropía de Shannon son dos cantidades que en principio miden la localización de los estados en cierta base, en particular, el cálculo del  $IPR$  y su relación con el tamaño del sistema ofrece un estudio de escalamiento que a su vez proporciona información acerca de una transición de fase, información que no provee el estudio del espectro de energías. De acuerdo a Fig. (1.4) donde se muestra el análisis de escalamiento por medio del valor de  $\gamma$  y el comportamiento de este con respecto a  $h$ . Si  $\gamma \approx 1$ , los estados están delocalizados, si  $\gamma \approx 0$  entonces los estados se encuentran localizados, para  $0 < \gamma < 1$  los estados se encuentran sobre la región crítica. Se mostró que para una magnitud de  $h$  [Fig. (1.5)],  $0.2 \leq h < 1.0$  los estados del sistema se encuentran delocalizados en la base de sitios mientras que en  $1.0 < h \leq 3.0$  los estados están localizados en dicha base y alrededor del punto  $h = 1.0$  los estados no se encuentran localizados ni delocalizados siendo este valor de  $h$  el punto crítico. La Fig. (1.6) refuerza las afirmaciones anteriores, en particular mostrando la estructura de los estados propios y su comportamiento respecto a la magnitud de  $h$ .

Por último, el cálculo de la probabilidad de supervivencia del estado inicial, muestra un comportamiento interesante cuando el tiempo es suficientemente grande, esta cantidad comienza a saturarse y se mantiene fluctuando alrededor del valor del  $\langle IPR^{n_0} \rangle$  [Fig. (1.8)], lo que demuestra que esta propiedad estática se manifiesta en la probabilidad de supervivencia y por tanto ofrece información sobre la localización del estado inicial del sistema.



## Capítulo 2

# Modelo con Interacciones

En este capítulo se considera el modelo de Aubry-André con interacciones el cual puede ser representado como un modelo magnético de una cadena de espín  $1/2$  con un campo transversal cuasiperiódico en la dirección  $z$  y con inclusión de interacciones del tipo Ising. Se aplicará el mismo análisis hecho en el capítulo anterior al modelo de Aubry-André con interacciones con la finalidad de comparar con nuestros resultados previos. Nuevamente, este apartado está orientado a estudiar la localización en el espacio real y la caracterización de una transición de fase. Para ello se hace uso de las herramientas de la teoría de matrices aleatorias (RMT) para estudiar las propiedades estáticas, medidas de localización y propiedades dinámicas anteriormente vistas resaltando la manifestación de las propiedades estáticas en las propiedades dinámicas.

### 2.1. Modelo de Aubry-André con Interacciones.

Se considera un modelo XXZ el cual es una cadena de espín  $1/2$  con interacciones del tipo Ising entre primeros vecinos, con un potencial cuasiperiódico en la dirección  $z$  que depende del  $i$ -ésimo sitio, es decir:

$$H = \frac{J}{4} \sum_{i=1}^{L-1} [\sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y + \Delta \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z] + \frac{J}{2} \sum_{i=1}^L h_i \sigma_{i+1}^z, \quad (2.1)$$

Este hamiltoniano está escrito en términos de  $\sigma_i^{x,y,z}$ , que corresponden a las matrices de Pauli en  $x, y, z$  respectivamente para cada  $i$ -ésimo sitio [20], donde  $J$  es la constante de acoplamiento,  $L$  el número de sitios del sistema cuántico,  $h_i$  el potencial de Harper [Ec. (1.1)] y  $\Delta = J_z/J$  el parámetro que modula que tan fuertes son las interacciones a lo largo de la cadena. El hamiltoniano [Ec. (2.1)] es el modelo de Aubry-André con interacciones. La diferencia del hamiltoniano [Ec. (1.14)] y el hamiltoniano [Ec. (2.1)] es el término de interacción de Ising  $\sigma_i^z \sigma_{i+1}^z$  que contribuye a la parte diagonal de la matriz Hamiltoniana escrita en la base sitios. Indica que un par de espines adyacentes paralelos tienen una energía diferente de un par de espines antiparalelos ya que:

$$\sigma_i^z \sigma_{i+1}^z |\uparrow_i \uparrow_{i+1}\rangle = |\uparrow_i \uparrow_{i+1}\rangle, \quad (2.2)$$

mientras que

$$\sigma_i^z \sigma_{i+1}^z |\uparrow_i \downarrow_{i+1}\rangle = -|\uparrow_i \downarrow_{i+1}\rangle. \quad (2.3)$$

Con estos cambios el hamiltoniano [Ec. (2.1)] mantiene las propiedades comentadas en la sección 1.1, es decir,  $\hat{S}^z$  se conserva. Nuevamente el análisis se enfoca en el subespacio más grande para el cual  $\hat{S}^z = 0$  cuya dimensión es  $D = L!/(L/2)!^2$ . A partir de un código computacional, se construyó la matriz Hamiltoniana correspondiente al caso con interacciones para  $L = 10, 12, 14, 16$ . En este trabajo se tomó  $J_z = J = 1$ , entonces  $\Delta = 1$ ; Por medio de la diagonalización exacta se obtuvieron los valores propios y vectores propios los cuales serán promediados de acuerdo a un cierto número de realizaciones de desorden  $y$ , en los casos aplicables, también en promedio sobre estados iniciales especificados de acuerdo al cuadro 1.1.

## 2.2. Propiedades Estáticas

Anteriormente se introdujo el estudio de la estadística de niveles y el promedio de la relación del espaciamiento de niveles consecutivos del modelo sin interacciones con la finalidad de estudiar las características del espectro y determinar el régimen en el que se encuentra el sistema de acuerdo a la magnitud de  $h$ . Retomando la teoría, se

expuso que la estadística de las energías de los sistemas que se encuentran en un régimen regular o integrable siguen una distribución del tipo Poisson, ya que sus energías no están correlacionadas y no está prohibido el cruce de energías. En contraste, para los sistemas cuyas energías están correlacionadas entre sí y existe repulsión entre niveles entonces la estadística que sigue el espectro es del tipo Wigner-Dyson y este es un indicador de un régimen caótico. Es necesario tener presente la importancia que tiene estudiar la estadística del espectro, pues el MAA con interacciones presenta características aún más interesantes que para el caso sin interacciones.

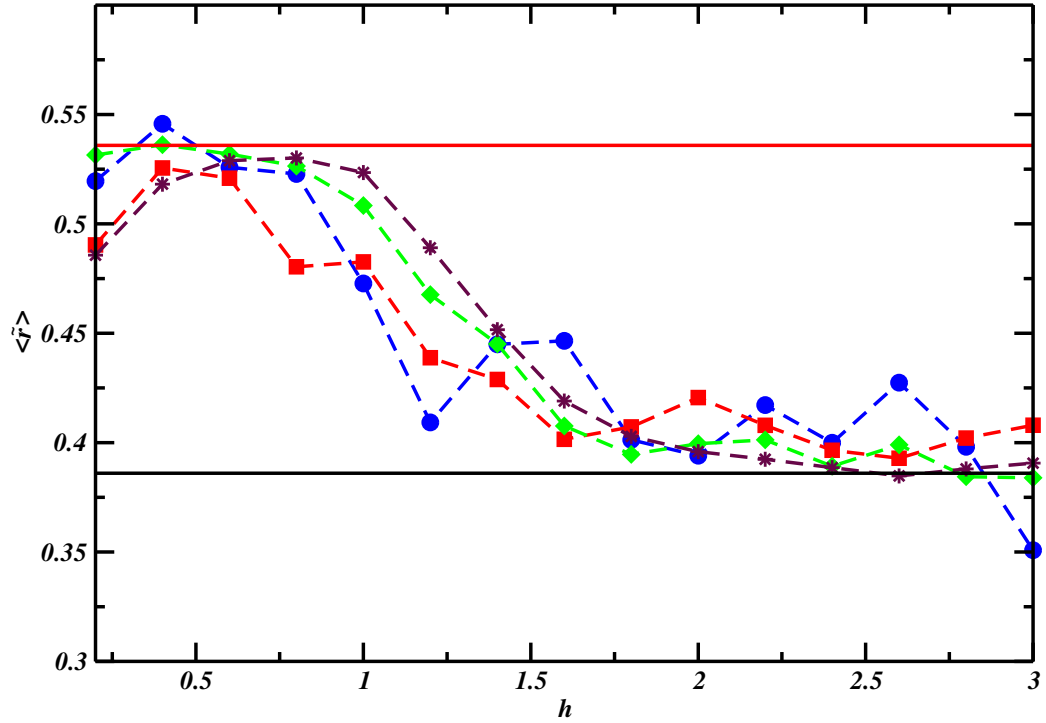


Figura 2.1: El promedio de la razón del espaciamiento de niveles consecutivos para el modelo con interacciones  $\langle \tilde{r}_n \rangle$  sobre un cierto número de realizaciones de desorden de acuerdo al cuadro 1.1 para  $L = 10$  (círculo),  $L = 12$  (cuadrado),  $L = 14$  (rombo),  $L = 16$  (estrella). El valor calculado para el ensamble Poisson  $\langle \tilde{r}_n \rangle_P = 2\ln 2 - 1 \approx 0.38629$  (línea negra) y el valor calculado para el ensamble GOE  $\langle \tilde{r}_n \rangle_{GOE} = 4 - 2\sqrt{3} \approx 0.53590$  (línea roja).

En la Fig. (2.1) se muestra el promedio de la razón del espaciamiento de niveles consecutivos  $\langle \tilde{r}_n \rangle$  correspondiente al modelo con interacciones, los resultados se comparan con los casos teóricos de Poisson,  $\langle \tilde{r}_n \rangle_P = 2\ln 2 - 1 \approx 0.38629$  (línea negra) y el ensamble GOE  $\langle \tilde{r}_n \rangle_{GOE} = 4 - 2\sqrt{3} \approx 0.53590$  (línea roja). Para  $0.2 < h < 0.8$  se observa que los valores de  $\langle \tilde{r}_n \rangle$  para  $L = 14$  (rombo) y  $L = 16$  (estrella) se encuentran por debajo de la

línea teórica del ensemble GOE  $\langle \tilde{r}_n \rangle_{GOE}$  pero cerca de esta, lo que nos indica que para esta región la estadística que siguen los valores propios es del tipo Wigner-Dyson lo que implica repulsión entre niveles y que las energías están correlacionadas, algo propio de los hamiltonianos cuya dinámica es caótica [27, 29], por otra parte para  $1.6 < h < 3.0$  los valores de  $\langle \tilde{r}_n \rangle$  para  $L=14$  (rombo) y  $L=16$  (estrella) se encuentran muy cercanos a la línea teórica del caso Poisson  $\langle \tilde{r}_n \rangle_P$ , para esta región los valores propios no están correlacionados y no presentan repulsión entre niveles energéticos, por ello se espera que sigan una distribución del tipo Poisson, típico de un régimen regular [27, 29]. En el intervalo  $0.8 < h < 1.6$  se aprecia que los valores de  $\langle \tilde{r}_n \rangle$  para  $L=14$  (rombo) y  $L=16$  (estrella) se alejan de la curva teórica para GOE para acercarse a la línea teórica para Poisson manteniéndose entre estas, es justo en este intervalo donde se aprecia una transición de un régimen caótico a uno regular y se espera que los valores propios no presenten una estadística de Poisson ni una de Wigner-Dyson. Los valores de  $\langle \tilde{r}_n \rangle$  para  $L=10$  (círculo) y  $L=12$  (cuadrado) presentan un comportamiento similar en los intervalos antes mencionados pero presentan fluctuaciones que pueden nublar la interpretación de los resultados, estas fluctuaciones pueden ser debidas a efectos de tamaño finito.

En la Fig. (2.2) se muestra la distribución de razones  $P(r)$  para  $L=16$  y tres valores de  $h$  los cuales fueron escogidos debido al análisis de la Fig. (2.1). En la Fig. (2.2) a) la distribución de razones sigue la distribución de Wigner-Dyson para  $h=0.2$ , lo que indica que para este valor de  $h$  los niveles energéticos estén correlacionados y que además el sistema muestra un régimen caótico, en contraste, para  $h=3.0$  Fig. (2.2) b) la distribución que siguen las energías es del tipo Poisson, aquí el sistema sigue un régimen integrable o regular puesto que las energías no se encuentran correlacionadas. Por último para  $h=1.4$  Fig. (2.2) c) la estadística que siguen las razones no es del tipo Poisson ni Wigner-Dyson lo que implica que el sistema no es ni caótico ni regular y que se encuentra cerca del punto de transición. Estas figuras confirman lo observado en la Fig. (2.1) y concluyen que el modelo Aubry-André con interacciones muestra un comportamiento en su dinámica de manera caótica para valores de la magnitud de  $h$  en  $0.2 \leq h \leq 0.8$ . Después el sistema se encuentra dentro de un régimen regular para  $1.6 \leq h \leq 3.0$  y alrededor de  $0.8 \leq h \leq 1.6$  el sistema se encuentra en una transición de un régimen caótico a un régimen regular.

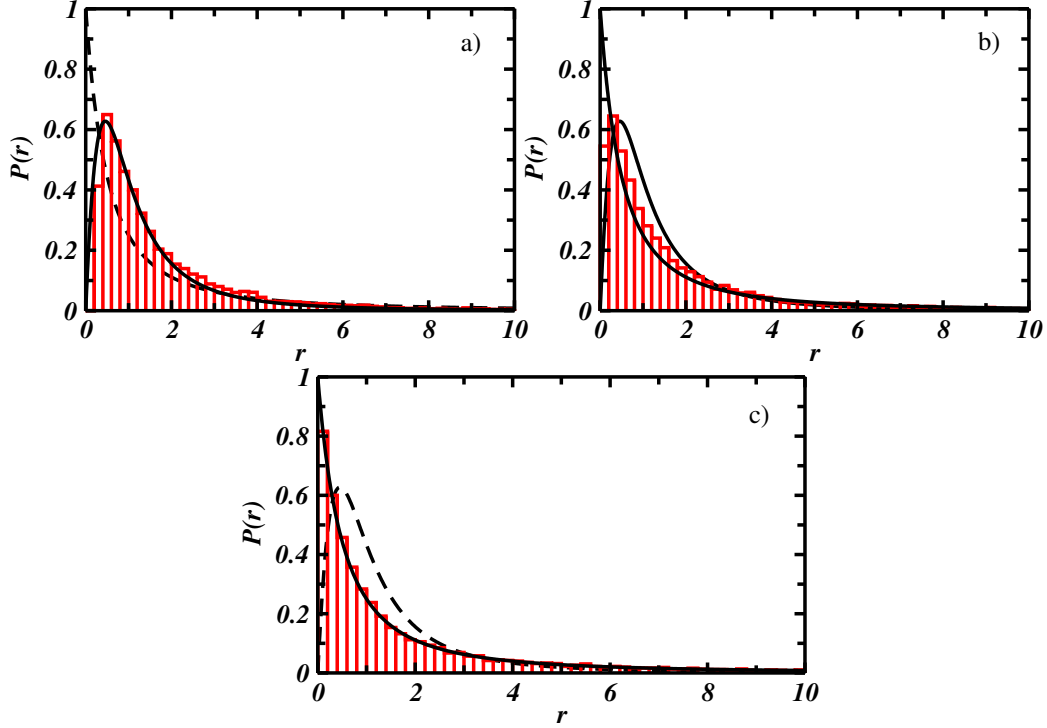


Figura 2.2: Distribución de razones  $P(r)$  para el modelo con interacciones para  $L = 16$  para una sólo realización del desorden. Las magnitudes de  $h$  son:  $h = 0.2$  para a);  $h = 1.4$  para b);  $h = 3.0$  para c); Las líneas negras corresponden a la distribución de Poisson (Ec. 1.23) y la distribución de Wigner-Dyson (Ec. 1.24).

## 2.3. Medidas de Localización

Esta sección tiene como objetivo estudiar la localización de los estados del modelo de Aubry-André con interacciones en la base de sitios, para ello se recurre a calcular ciertas cantidades ya definidas en el Capítulo 2.

El  $IPR$  es una cantidad que permite medir el grado de localización de los estados del sistema, en este caso el que representa el MAA con interacciones. Los estados propios de matrices aleatorias son vectores aleatorios y por lo tanto completamente delocalizados. Cuando estas matrices pertenecen a GOE, las componentes de sus estados propios son números aleatorios no correlacionados que provienen de una distribución Gaussiana satisfaciendo  $IPR^\alpha \simeq 3D^{-1}$ .

Calculando el  $\langle IPR^{n_0} \rangle$  promedio y de acuerdo a un análisis de escalamiento del  $\langle IPR^{n_0} \rangle$  con respecto del tamaño del sistema se puede determinar el valor de  $\gamma$ , el cual es otro parámetro que permite medir la localización del sistema (Ec. 1.25). En la Fig. (2.3) se

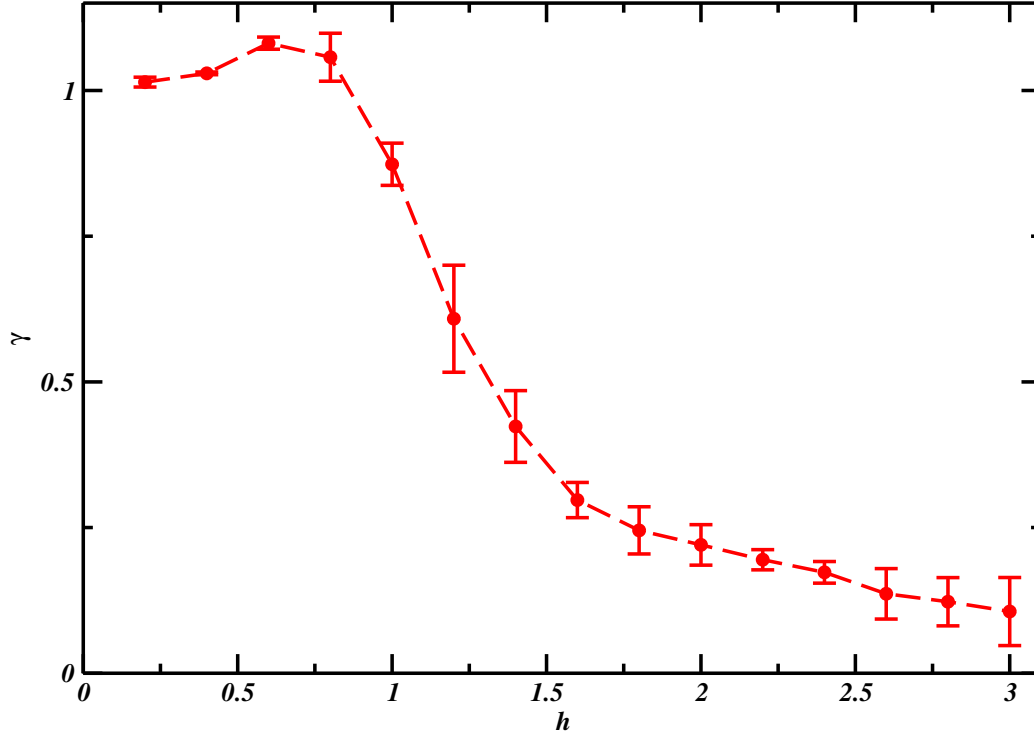


Figura 2.3: El comportamiento de  $\gamma$  correspondiente al modelo con interacciones para valores  $0.2 \leq h \leq 3.0$ ; El parámetro  $\gamma$  fue obtenido a partir del análisis de escalamiento [Eq. (1.24)] usando el  $\langle IPR^{n_0} \rangle$ .

muestra el comportamiento que tiene  $\gamma$  con respecto de  $h$  para el MAA con interacciones. De acuerdo a (Ec. 1.26) para  $0.2 \leq h \leq 0.8$ ,  $\gamma \approx 1$ , lo que indica que esta región los estados del sistema se encuentran delocalizados, en el intervalo  $1.6 \leq h \leq 3.0$ ,  $\gamma \approx 0$ , en esta región los estados del sistema se encuentran localizados en la base de sitios, sin embargo para  $0.8 < h < 1.6$  los estados del sistema no se encuentran ni localizados ni delocalizados, lo que corresponde típicamente al punto crítico en una transición de fase.

La Fig. (2.4) muestra el comportamiento con respecto de  $h$  de dos cantidades normalizadas que son importantes para medir la localización de los estados del MAA con interacciones en la base de sitios, la razón inversa de participación  $IPR$  y la entropía de Shannon  $S_{Sh}$ , ambas cantidades promediadas sobre un cierto número de realizaciones del desorden y estados iniciales de acuerdo al cuadro 1.1.

En la Fig. 2.4 a) se muestra el comportamiento de  $IPR^{GOE} / \langle IPR^{n_0} \rangle$  con respecto a  $h$  para  $L = 10, 12, 14$  y  $16$  con  $IPR^{GOE} = 3D^{-1}$  el valor calculado para el caso FRM, para el cual todos los estados se encuentran delocalizados. En el intervalo  $0.2 \leq h \leq$

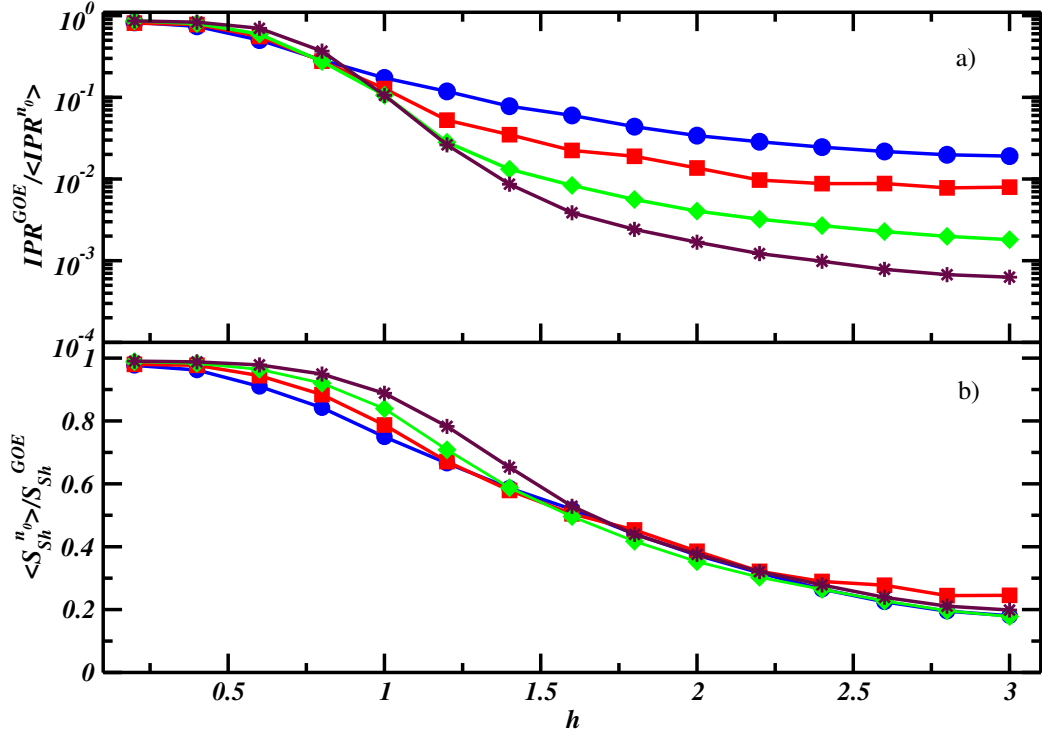


Figura 2.4: Comportamiento de las razones entre los resultados para GOE con la razón inversa de participación a) y la Entropía de información de Shannon b) promediados sobre un cierto número de realizaciones de desorden y estados iniciales de acuerdo al cuadro 1.1 con respecto a la magnitud del parámetro  $h$  para  $L = 10$  (círculo),  $L = 12$  (cuadrado),  $L = 14$  (rombo),  $L = 16$  (estrella).

0.8 la razón  $IPR^{GOE} / \langle IPR^{n_0} \rangle \approx 1$  lo que implica que  $IPR^{GOE}$  y  $\langle IPR^{n_0} \rangle$  son similares, es decir, que en este intervalo los estados del sistema se encuentran delocalizados, por otra parte para el intervalo  $1.6 \leq h \leq 3.0$  se observa que  $IPR^{GOE} / \langle IPR^{n_0} \rangle < 1$  o bien  $IPR^{GOE} < \langle IPR^{n_0} \rangle$ , esto indica que el sistema se encuentra inmerso en la fase localizada. En el intervalo  $0.8 \leq h \leq 1.6$  se observa que la cantidad  $IPR^{GOE} / \langle IPR^{n_0} \rangle$  disminuye lentamente durante este intervalo, esto puede atribuirse a una transición de fase.

En la Fig. (2.4) b) se muestra el comportamiento de  $\langle S_{Sh}^{n_0} \rangle / S_{Sh}^{GOE}$  con respecto a  $h$  para  $L = 10, 12, 14$  y  $16$ , con  $S_{Sh}^{GOE} \approx \ln(0.48 D)$  que es el valor teórico calculado para el caso GOE para el cual el valor de la entropía es máximo; En el intervalo  $0.2 \leq h \leq 0.8$  se aprecia que  $\langle S_{Sh}^{n_0} \rangle / S_{Sh}^{GOE} \approx 1$ , o bien  $\langle S_{Sh}^{n_0} \rangle \approx S_{Sh}^{GOE}$ , lo que nos indica que el valor  $\langle S_{Sh}^{n_0} \rangle$  calculado es similar al valor teórico para GOE, es decir, en este intervalo los estados del sistema se encuentran en una fase delocalizada; En el intervalo  $1.6 \leq h < 3.0$  se observa

que  $\langle S_{Sh}^{n_0} \rangle / S_{Sh}^{GOE} < 1$ , entonces  $\langle S_{Sh}^{n_0} \rangle < S_{Sh}^{GOE}$ , es decir la entropía decrece y es menor que para el caso GOE. Se puede observar que alrededor del valor para  $h = 1.6$  existe un cruce para  $L = 14$  y  $L = 16$ , este cruce esta relacionado con el punto crítico para el cual el sistema presenta una transición de fase.

## 2.4. Propiedades Dinámicas

En la Fig. (2.5) se muestra la probabilidad de supervivencia del estado inicial  $\langle W_{n_0}(t) \rangle$  para diferentes valores de  $h$ . El decaimiento inicial es muy rápido; para una magnitud pequeña de  $h$  la evolución inicial decae de forma Gaussiana,  $\langle W_{n_0}(t) \rangle = \exp(-\sigma_0^2 t^2)$ , en donde  $\sigma_0$  es la varianza del estado inicial en la base de estados propios del hamiltoniano.

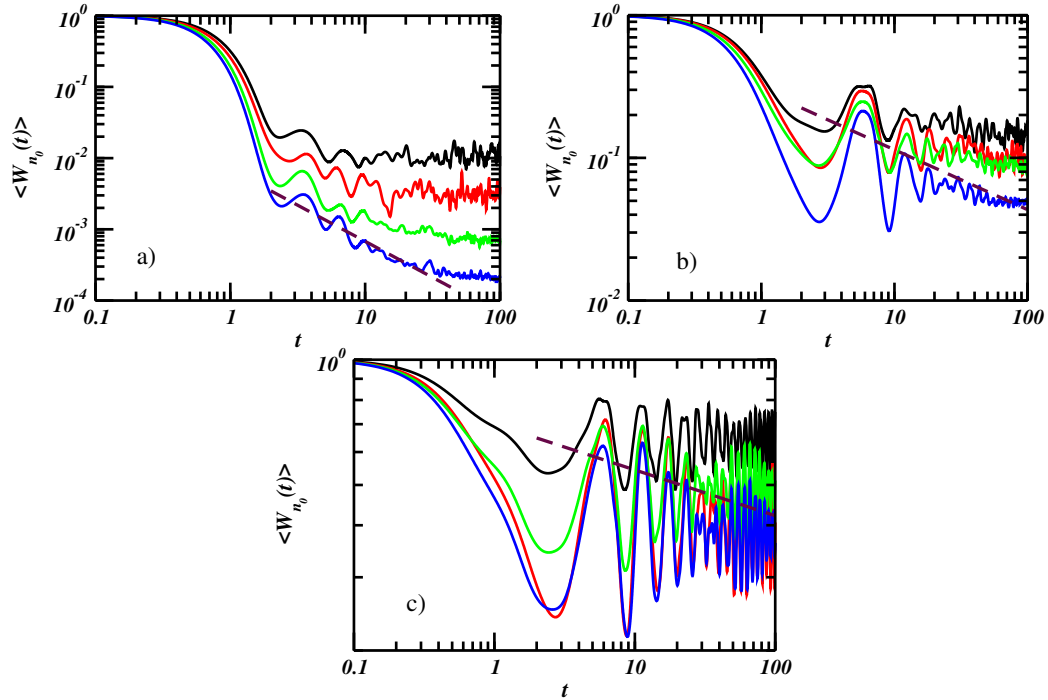


Figura 2.5: Evolución temporal del promedio sobre realizaciones de la probabilidad de supervivencia sobre un estado inicial promediado de acuerdo al cuadro 1.1 para  $h = 0.2$  (a),  $h = 1.0$  (b) y  $h = 3.0$  (c), y  $L = 10$  (negro),  $L = 12$  (rojo),  $L = 14$  (verde) y  $L = 16$  (azul); Las líneas discontinuas (violeta) representan las curvas  $\langle W_{n_0} \rangle \propto t^{-\gamma}$  correspondientes a cada magnitud de  $h$ ;  $\gamma \approx 1.014$  (a),  $0.42$  (b),  $0.11$  (c) .

A medida que  $h$  se incrementa este decaimiento se reduce dejando un decaimiento cuadrático. Independientemente de qué tan rápida pueda ser la evolución inicial, la probabilidad de supervivencia decae a largo plazo y necesariamente es más lenta hasta con-

vertirse en una ley de potencias [15, 29, 32],  $\langle W_{n_0}(t) \rangle \propto t^{-\gamma}$ .

El exponente del decaimiento de la ley de potencias de  $\langle W_{n_0}(t) \rangle$  contiene información importante acerca del sistema [15], pues este coincide con el parámetro  $\gamma$  obtenido del análisis de escalamiento el cual es indicador del nivel de localización del estado inicial y provee de información acerca de las correlaciones entre las componentes  $|C_{n_0}^\alpha|^2$ . Cuando los estados propios del sistema están extendidos, son similares a vectores aleatorios, algo típico de un régimen caótico, entonces las componentes  $|C_{n_0}^\alpha|^2$  son números aleatorios no correlacionados, conforme aumenta la magnitud de  $h$ , las componentes  $|C_{n_0}^\alpha|^2$  gradualmente aumentan sus correlaciones entre sí.

Para tiempos largos se puede apreciar que después de la rápida evolución inicial, las oscilaciones aparecen y a medida que la magnitud de  $h$  aumenta, las oscilaciones se incrementan. En la Fig. (2.5) a) para  $h = 0.2$ , el ajuste cuenta con un valor de  $\gamma \approx 1$ , esto de acuerdo con el análisis de escalamiento hecho previamente indica que para  $h$  pequeña el estado inicial se encuentra delocalizado, esto implica que las componentes del estado inicial no están correlacionados y el sistema se encuentran dentro de un régimen caótico, en contraste con esto en la Fig. (2.5) c) para  $h = 3.0$  el estado inicial se encuentra localizado, ya que  $\gamma \approx 0$ , es decir, las componentes de los estados del sistema incluido el estado inicial se encuentran correlacionadas y el sistema está dentro de un régimen regular; por último en la Fig. (2.5) b) el estado se encuentra en una transición de fase de un régimen caótico a uno regular ya que  $0 < \gamma < 1$ .

En resumen el estudio de la probabilidad de supervivencia y su decaimiento como ley de potencias para tiempos largos permitió caracterizar al sistema en ciertos regímenes, así como de ofrecer información acerca de la estructura de los estados del sistema.

Algo similar ocurre con la probabilidad de supervivencia para tiempos suficientemente largos. En la Fig. (2.6) se muestra el promedio sobre un cierto número de estados iniciales y realizaciones del desorden [ver cuadro 1.1] de la probabilidad de supervivencia  $\langle W_{n_0}(t) \rangle$ , para  $L = 10, 12, 14$  y  $16$  y diferentes valores de la magnitud de  $h$ .

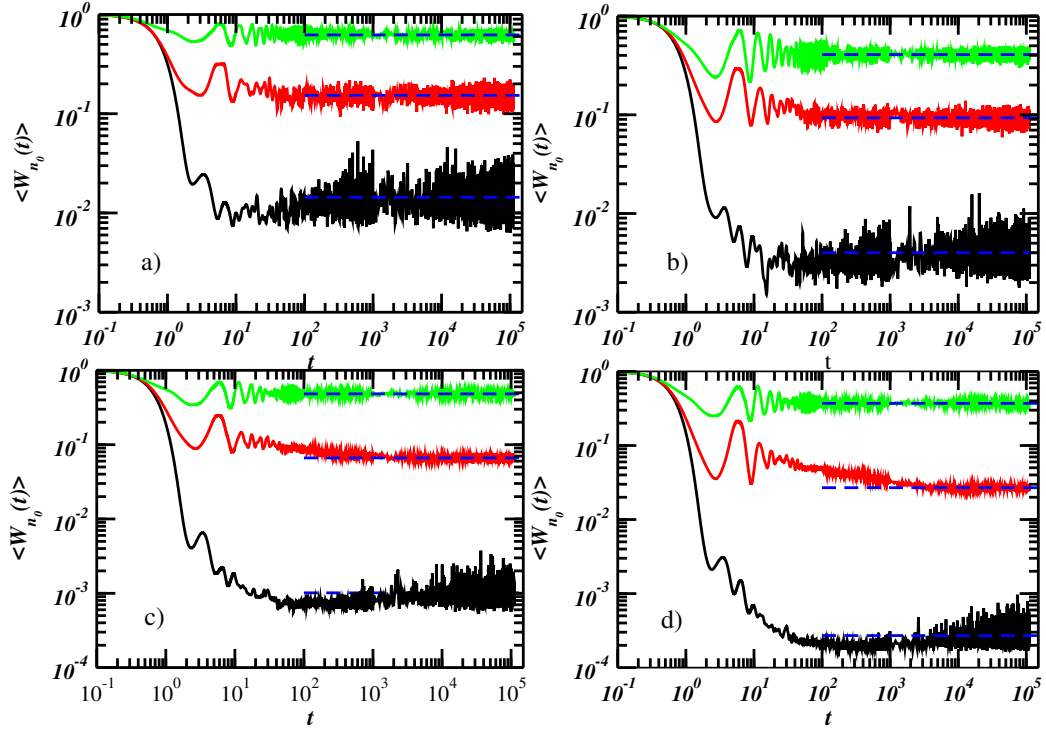


Figura 2.6: Evolución temporal del promedio sobre realizaciones y estados iniciales de la probabilidad de supervivencia de acuerdo a la cuadro 1.1 para  $L=10$  (a),  $L=12$  (b),  $L=14$  (c) y  $L=16$  (d), con  $h=0.2$  (negro),  $h=1.0$  (rojo) y  $h=3.0$  (verde); Las líneas discontinuas (azul) representan el valor del  $\langle IPR^{n_0} \rangle$  correspondiente a cada tamaño del sistema y magnitud de  $h$ .

En los cuatro paneles de la Fig. (2.6) se observa que cuando el tiempo es suficientemente grande,  $\langle W_{n_0}(t) \rangle$  comienza a saturarse manteniendo fluctuaciones a lo largo del tiempo y su valor coincide con su  $\langle IPR^{n_0} \rangle$  de acuerdo a Ec. (1.29). La relación que existe entre el  $IPR$ , el parámetro  $\gamma$  y la probabilidad de supervivencia ofrece información acerca de las correlaciones de los estados del sistema, que, a partir de esta información nos permite caracterizar la transición de fase del sistema y también de asociarlo a un comportamiento regular o caótico. Las cantidades  $\langle IPR^{n_0} \rangle$  y  $\gamma$  no son las únicas que se manifiestan en la evolución temporal de la probabilidad de supervivencia ya que el comportamiento del espectro energético tiene influencia sobre  $\langle W_{n_0}(t) \rangle$ . En la Fig. (2.6) d) se comparan las curvas de  $\langle W_{n_0}(t) \rangle$  para tres magnitudes de  $h$  correspondientes a  $L=16$ ; Para  $h=0.2$  (negro)  $\langle W_{n_0}(t) \rangle$  comienza a saturarse para valores del tiempo entre  $(10^3 < t < 10^5)$  y su valor fluctúa alrededor de  $\langle IPR^{n_0} \rangle$  respectivo. Para  $h=1.4$  (rojo) se muestra un cambio en la evolución de la probabilidad de supervivencia, pues los valores de la proba-

bilidad cuando esta se satura se incrementan ligeramente en comparación con el caso para  $h = 0.2$  (negro), nuevamente en tiempos largos  $\langle W_{n_0}(t) \rangle$  oscilan alrededor de el correspondiente  $\langle IPR^{n_0} \rangle$ . Para  $h = 3.0$  (verde) los valores de la probabilidad de supervivencia se incrementan aún más que los casos anteriores, nuevamente cuando  $\langle W_{n_0}(t) \rangle$  se satura, la probabilidad de supervivencia coincide con el  $\langle IPR^{n_0} \rangle$  correspondiente. Algo similar ocurre para  $L = 10$  [Fig. (2.6) a)],  $L = 12$  [Fig. (2.6) b)] y  $L = 14$  [Fig. (2.6) c)] pues los valores del  $\langle IPR^{n_0} \rangle$  correspondientes a cada caso de  $h$  coinciden cuando las curvas  $\langle W_{n_0}(t) \rangle$  se saturan.

En la probabilidad de supervivencia no solo se manifiesta la estructura de los estados propios del sistema [15], también las características del espectro energético generan la aparición de un pozo en  $\langle W_{n_0}(t) \rangle$  para tiempos largos, este pozo se le denomina *hoyo de correlaciones* [33] y es una manifestación directa de las correlaciones del espectro energético sobre una cantidad dinámica, que en este caso es la probabilidad de supervivencia. La profundidad de este pozo es grande para valores pequeños de  $h$  para los cuales las correlaciones de las energías del sistema son grandes y las correlaciones de las componentes del estado inicial son pequeñas, el hoyo de correlaciones comienza a desaparecer conforme  $h$  aumenta y por tanto las correlaciones del espectro energético disminuyen y las correlaciones de  $|C_{n_0}^\alpha|^2$  del estado inicial aumentan.

Lo que se aprecia en las Fig. (2.5) y Fig. (2.6) es la influencia que tienen tanto el espectro energético representado por el *hoyo de correlaciones* [16] y la estructura de estados propios caracterizado en la saturación de la probabilidad de supervivencia. Para  $h$  pequeña, el análisis de la distribución de razones indica que las energías del sistema están correlacionadas, estas correlaciones generan que el hoyo sea profundo, por otra parte el decaimiento como ley potencias para  $h$  pequeña es más pronunciado e implica que las componentes del estado inicial  $|C_{n_0}^\alpha|^2$  no se encuentran correlacionados, esto influye en la saturación de la probabilidad para tiempos muy largos ya que esta presenta muchas fluctuaciones y es mucho menor que para valores de  $h$  más grandes. En contraste para valores de  $h$  grandes, la distribución de razones muestra que el espectro de energías sigue una distribución de Poisson, es decir, las energías no están correlacionadas entre sí, eso

tiene efecto en el *hoyo de correlaciones* que comienza a disminuir su profundidad conforme aumenta el valor de  $h$  hasta desaparecer, no obstante el decaimiento de  $\langle W_{n_0}(t) \rangle$  es menos pronunciado e implica que las componentes del estado inicial estén correlacionadas y esto se observa en la saturación de la probabilidad de supervivencia ya que las fluctuaciones disminuyen y los valores de la saturación de  $\langle W_{n_0}(t) \rangle$  aumentan.

El análisis de las Figs. (2.5) y (2.6) refuerzan las conclusiones de la sección 2.3. Dado que la probabilidad de supervivencia tiende al  $\langle IPR^{n_0} \rangle$  para tiempos suficientemente largos y el valor de  $\langle W_{n_0}(t) \rangle$  aumenta con respecto al valor de  $h$  entonces el  $\langle IPR^{n_0} \rangle$  también aumenta.

Tomando en cuenta que el  $\langle IPR^{n_0} \rangle$  es utilizado como una medida de localización; Los paneles de la Fig. (2.6) a), b) c) y d) indican que el estado inicial del sistema para  $h = 0.2$  (negro) se encuentra delocalizado, para  $h = 3.0$  (verde) el estado se encuentra localizado y para  $h = 1.4$  el estado inicial no está localizado ni delocalizado. Por otra parte se aprecia que los valores del  $\langle IPR^{n_0} \rangle$  así como  $\langle W_{n_0}(t) \rangle$  disminuyen de acuerdo al aumento en el tamaño del sistema, este efecto se puede atribuir a los efectos de tamaño finito, pues estos efectos se han observado en las Figs. (2.1), (2.3) y (2.4) para  $L = 10$  y  $L = 12$ .

El estudio llevado a cabo en este capítulo no es distinto del anterior, sin embargo los resultados son más interesantes. El análisis de la relación del espaciamiento de niveles consecutivos  $\langle \tilde{r}_n \rangle$  correspondiente al modelo de Aubry-André con interacciones muestra una transición de los valores  $\langle \tilde{r}_n \rangle$ , estos se mantienen cerca del valor teórico correspondiente al GOE para posteriormente descender al valor del teórico para el caso Poisson respecto al incremento de la magnitud de  $h$  Fig. (2.1). Para  $0.2 \leq h < 0.8$  los valores de  $\langle \tilde{r}_n \rangle$  se mantienen cerca del valor predicho para GOE, esto indica que la energías se encuentran correlacionadas entre sí y que existe repulsión entre niveles energéticos, además las degeneraciones del espectro son menores y por lo tanto se espera que la distribución de razones que siga las energías del sistema del tipo Wigner-Dyson. Por otra parte para  $1.6 < h \leq 3.0$  los valores de  $\langle \tilde{r}_n \rangle$  se ubican cerca del valor predicho para el caso Poisson, ahora el espectro muestra muchas degeneraciones lo que implica que no exista repulsión entre niveles

energéticos y que las energías no estén correlacionadas, esto implica que la distribución de razones del espectro de energías siga una distribución de Poisson. La Fig. (2.2) confirma lo anterior, para  $h = 0.2$  la distribución de razones del espectro es del tipo Wigner-Dyson que además es típico de un régimen caótico, por otro lado, para  $h = 3.0$  la distribución de razones es del tipo Poisson, esto implica un régimen integrable, sin embargo para  $h = 1.4$  la distribución de razones es intermedia, lo que indica que existe una transición de un régimen a otro. En conclusión el sistema se encuentra dentro de un régimen caótico para valores de  $h$  entre 0.2 y 0.8, para  $h$  entre 1.6 y 3.0 el sistema se encuentra en un régimen regular y para  $h$  entre 0.8 y 1.6 se da la transición de un régimen caótico a uno regular.

El análisis de escalamiento [Fig. (2.3)] muestra el comportamiento de  $\gamma$  respecto al incremento en la magnitud de  $h$ , para  $h$  entre 0.2 y 0.8 los estados del sistema están delocalizados, además como  $\gamma \approx 1$  indica que estos estados son caóticos, en  $h$  entre 1.6 y 3.0 los estados se encuentran localizados, mientras que para  $h$  entre 0.8 y 1.6 se observa una transición de fase. Las medidas de localización ofrecen información similar [Fig. (2.4)].

Por último, la probabilidad de supervivencia del estado inicial presenta ciertas características que demuestran la manifestación de las propiedades estáticas en las propiedades dinámicas. Para tiempos largos, la probabilidad de supervivencia decae como una ley potencias, de la forma  $W_{n_0}(t) \propto t^{-\gamma}$  Fig. (2.5), siendo  $\gamma$  la pendiente resultante del análisis de escalamiento, este parámetro en conjunto con la probabilidad de supervivencia indica que el estado inicial del sistema se encuentra delocalizado para valores de  $h$  pequeños Figs. (2.3-2.5) y además se encuentra en un régimen caótico, para valores  $h$  grandes, el estado inicial se encuentra localizado e inmerso en un régimen regular y para  $h=1.4$  el sistema se encuentra en una transición de fase.

Se analizó la influencia de las correlaciones del espectro energético y de las componentes de los estados propios del sistema en la evolución temporal de la probabilidad de supervivencia, se encontró una relación entre estas dependiendo de la magnitud de  $h$ ; a medida que  $h$  es pequeña ( $0.2 < h < 0.8$ ) (Fig. 2.3) las correlaciones de las energías son grandes y se manifiestan en la aparición del *hoyo de correlaciones*, sin embargo las componentes de los estados propios del sistema no se encuentran correlacionados, esto se ve

reflejado en el decaimiento en ley de potencias el cual es más pronunciado para tiempos largos e implica que en la saturación de la probabilidad se observen grandes fluctuaciones. Por otra parte para valores de  $h$  grandes ( $1.6 < h < 3.0$ ), las correlaciones del espectro son mucho menores y el *hoyo de correlaciones* desaparece, no obstante las correlaciones de las componentes de los estados aumentan lo que provoca que el decaimiento en la ley de potencias sea menor y en la saturación de la probabilidad que además aumenta las fluctuaciones se reducen bastante. Para valores intermedios de  $h$  ( $0.8 < h < 1.6$ ) la influencia de las correlaciones del espectro energético y de las componentes de los estados también se reflejan en  $\langle W_{n_0}(t) \rangle$ , sin embargo sus efectos son intermedios entre los dos casos anteriores. Para tiempos suficientemente grandes, la probabilidad de supervivencia se satura y su valor fluctúa alrededor del valor del *IPR* [Fig. (2.6)]. En resumen, cuando la magnitud de  $h$  es pequeña, el sistema está en un régimen caótico, para valores de  $h$  más grandes, el sistema pasa a un régimen regular, y para magnitudes de  $h$  intermedias el sistema está en transición.

# Conclusiones

El objetivo de este trabajo fue caracterizar la transición de una fase delocalizada a una fase localizada de un sistema cuántico unidimensional cúasiperiódico representado por el modelo de Aubry-André. Los dos capítulos que conforman la estructura de la Tesis están destinados a estudiar ciertas propiedades estáticas y dinámicas del modelo de Aubry-André sin interacciones y del modelo con interacciones con la finalidad de comparar los resultados entre estos dos casos. Para ambos modelos fueron estudiadas la estadística del espectro energético, las medidas de localización y las propiedades dinámicas para cuatro tamaños del sistema,  $L = 10, 12, 14$  y  $16$  con la finalidad de caracterizar la transición metal-aislante con respecto a la variación de la magnitud de  $h$ .

El estudio de la estadística de energías, comenzando con la relación del espaciamiento de niveles consecutivos  $\langle \tilde{r}_n \rangle$  tuvo la tarea de brindar información sobre las correlaciones del espectro energético, con la finalidad de discriminar entre un régimen caótico o uno regular o integrable, pues la ventaja de esta cantidad radica en la posibilidad de identificar el tipo de distribución que siguen las energías sin la necesidad de calcular la distribución de razones  $P(r)$ . Para nuestro primer caso (MAA sin interacciones) la relación del espaciamiento de niveles consecutivos y en conjunto con la distribución de razones no identificó ninguna transición de fase ya que se obtuvo que para todos los valores de  $h$  entre  $0.2 < h < 3.0$  el espectro energético sigue una distribución de Poisson. En contraste, para nuestro segundo caso (MAA con interacciones) el análisis de  $\langle \tilde{r}_n \rangle$  y de la distribución de razones mostró un comportamiento más interesante, esto es, se identificó una transición de fase. Para magnitudes entre  $0.2 < h < 0.8$ , las energías siguen una distribución de Wigner-Dyson lo que para estos valores de  $h$  ubican al sistema dentro de un régimen

caótico o dentro de una fase delocalizada, para valores de  $h$  más grandes,  $1.6 < h < 3.0$  el espectro de energías se mantiene dentro de una fase localizada y mantiene un régimen integrable. Se observó que el sistema se encuentra en una fase intermedia para  $0.8 < h < 1.6$ .

Las medidas de localización fueron grandes herramientas usadas en ambos casos para caracterizar la transición de fase del sistema haciendo uso de la información proporcionada de los estados propios del sistema. Fueron calculadas la razón inversa de participación o  $IPR$  y la entropía de Shannon con la intención de estudiar la estructura de los estados propios y la localización sobre el espacio real representado por la base de sitios. El escalamiento del  $IPR$  con respecto a la dimensión del sistema nos permitió calcular la cantidad  $\gamma$  cuyo comportamiento con respecto de  $h$  brinda información valiosa sobre los estados del sistema. Para el MAA sin interacciones se observó que para  $0.2 \leq h < 1.0$  los estados del sistema se encuentran delocalizados en la base de sitios mientras que en  $1.0 < h \leq 3.0$  los estados están localizados en dicha base. Alrededor del punto  $h = 1.0$  los estados no están localizados ni delocalizados siendo este valor de  $h$  el punto crítico [21]. Para el MAA con interacciones se encontró que para  $h$  entre 0.2 y 0.8 los estados del sistema están delocalizados. En  $h$  entre 1.6 y 3.0 los estados se encuentran localizados. Para  $h$  entre 0.8 y 1.6 se observa una fase intermedia entre la localizada y la extendida.

El estudio de la probabilidad de supervivencia  $\langle W_{n_0}(t) \rangle$  tuvo resultados interesantes y es esta cantidad la que refleja la influencia de propiedades estáticas, esto es, la información proporcionada por el espectro energético y la estructura del estado inicial en la base formada por los estados propios del hamiltoniano que dicta la evolución del sistema. En el MAA sin interacciones, el comportamiento de la probabilidad de supervivencia para tiempos suficientemente largos mostró que en la saturación los valores de la probabilidad coinciden con el valor del  $\langle IPR^{n_0} \rangle$ , sin embargo las fluctuaciones son muy grandes y, a excepción del punto crítico, no hay un decaimiento como ley de potencias que sea evidente para los tamaños de sistema considerados.

En contraste, en el MAA con interacciones, las correlaciones del estado inicial del sistema se manifiestan en el decaimiento como ley de potencias sobre la probabilidad de supervivencia para tiempos largos, comenzado con oscilaciones que se van incrementando con el

aumento en la magnitud de  $h$ ; la potencia de este decaimiento tiende a 1 cuando la magnitud de  $h$  es pequeña entre 0.2 y 0.8. Cuando la magnitud de  $h$  es grande, entre 1.6 y 3.0, entonces las correlaciones de las componentes de los estados propios del sistema aumentan y el decaimiento en ley de potencias es menor pues la potencia de este decaimiento tiende a cero, esto está acompañado con un incremento significativo en las oscilaciones para tiempos largos, no obstante, cuando la probabilidad se satura, las fluctuaciones se reducen considerablemente y oscilan alrededor del valor del  $\langle IPR^{n_0} \rangle$  pues es debido a que el espectro de energías no tiene correlaciones entre niveles energéticos. Nuevamente para  $h$  entre 0.8 y 1.6 las correlaciones de las componentes de los estados propios y de las energías del sistema se ven reflejadas en la probabilidad de supervivencia pero no permiten identificar a que fase pertenecen, es decir, para estos valores de  $h$  el sistema se encuentra en transición.

La aparición del *hoyo de correlaciones* es un ejemplo importante de la influencia que tienen las características del espectro energético sobre la probabilidad de supervivencia, una cantidad dinámica. La profundidad de este es grande cuando  $h$  es pequeña y disminuye a medida que  $h$  aumenta. El estudio a detalle del *hoyo de correlaciones* brinda información acerca de la presencia de la repulsión entre niveles. En este trabajo el análisis del *hoyo de correlaciones* fue breve y es posible retomarlo en trabajos futuros.

Esta Tesis tiene como enfoque mostrar la utilidad de la probabilidad de supervivencia, una propiedad dinámica, para caracterizar a un sistema, esto puede ser de gran utilidad para experimentos que no tienen acceso al espectro energético, como aquellos con átomos superfríos en redes ópticas y iones atrapados [10, 11] .

Consideramos que es posible publicar los resultados de este trabajo en alguna revista especializada.



# Bibliografía

- [1] P. W. Anderson, *Phys. Rev.*109, 1492 (1958).
- [2] B. Kramer and A. MacKinnon, *Rep. Prog. Phys.* 56, 1469 (1993).
- [3] Abrahams E (ed) 2010 50 Years of Anderson Localization (Singapore: World Scientific).
- [4] R. L. Weaver, *Wave Motion* 12, 129 (1990).
- [5] D. S. Wiersma, P. Bartolini, A. Lagendijk, and R. Riguini, *Nature* 390, 671, (1997).
- [6] J. Billy, V. Josse, Z. Zuo, A. Bernard, B. Hambrecht, P. Lugan, D. Clément, L. Sanchez- Palencia, P. Bouyer and A. Aspect, *nature* 453, 891 (2008).
- [7] D. Basko, I. L. Aleiner, B. L. Altshuler, *Ann, Phys. (N. Y.)* 321, 1126 (2006).
- [8] I. V. Gornyi, A. D. Mirlin, and D. G. Polyakov, *Phys. Rev. Lett.* 95, 206603 (2005).
- [9] J. Z. Imbrie, *Phys. Rev. Lett.* 117, 027201 (2016).
- [10] M. Schreiber, S. S. Hodgman, P. Bordia, H. P. Louschen, M. H. Fischer, R. Vosk, E. Altman, U. Schneider, and I. Bloch, *Science* 349, 842-845 (2015).
- [11] M. Ovadia, D. Kalok, I. Tamir, S. Mitra, B. Sacepe, and D. Sharar, *Scientific Reports* 5, 13503 (2015).
- [12] P. G. Harper, *Proc. Phys. Soc. A* 68, 874 (1955).
- [13] S. Aubry and G. André, *Ann Israel Phys. Soc.* 3, 133 (1980).
- [14] S. Iyer, V. Oganessian, G. Rafael, D. A. Huse, Many-body localization in a quasiperiodic system. *Phys. Rev. B* 87, 134202 (2013).

- [15] E. J. Torres Herrera, L. F. Santos, *Phys. Rev. B* 92, 014208 (2015).
- [16] E. J. Torres Herrera, L. F. Santos, *Annalen Der Physik* 2017, 1600284.
- [17] G. Roati, C. D. Errico, L. Fallani, M. Fattori, C. Fort, M. Zaccanti, G. Modugno, M. Modugno, and M. Inguscio, *Nature (London)* 453, 895 (2008); M. Modugno, *New J. Phys.* 11, 033023 (2009); B. Deissler, E. Lucioni, M. Modugno, G. Roati, L. Tanzi, M. Zaccanti, M. Inguscio, and G. Modugno, *ibid.* 13, 023020 (2011).
- [18] Gergó Roósz, Uma Divakaran, Heiko Rieger, and Ferenc Iglói, *Physical Review B* 90, 184202 (2014).
- [19] E. Lieb, T. Schultz, and D. Mattis, *Ann. Phys. (NY)* 16, 407 (1961).
- [20] Kira Joel, Davida Kollmar, Lea F. Santos, *Am. J. Phys.* 81, 450 (2013).
- [21] Vipin Kerala Varma, Clélia de Mulatier, Marko Znidaric. *Phys. Rev. E* 96, 032130 .
- [22] C. E. Porter, *Statistical Theories of Spectra: Fluctuations* (Academic Press, New York, 1965).
- [23] M. L. Mehta, *Random Matrix Theory* (Springer, New York, 1990).
- [24] T. A. Brody, J. Flores, J. French, P. Mello, A. Pandey, and S. Wong, *Rev. Mod. Phys.* 53, 385 (1981); T. Guhr, A. Müller-Groeling, and H. A. Weidenmüller, *Phys. Rep.* 299, 189 (1998).
- [25] M. Berry and M. Tabor, *Proc. R. Soc. A* 356, 375 (1977).
- [26] O. Bohigas, M. J. Giannoni, and C. Schmit, *Phys. Rev. Lett.* 52, 1 (1984).
- [27] Y. Y. Atas, E. Bogomolny, O. Giraud, and G. Roux, *PRL* 110, 084101 (2013).
- [28] Shankar Iyer, Vadim Oganesyan, Gil Refael, and David A. Huse, *Physical Review B* 87, 134202 (2013).
- [29] E. J. Torres-Herrera, Jonathan Karp, Marco Távora and Lea F. Santos, *Entropy* 2016, 18(10), 359 .
- [30] F. Setiawan, Dong-Ling Deng, and J. H. Pixley, *Phys. Rev. B* 96, 104205 .

- [31] P. Roushan, C. Neill, J. Tangpanitanon, V. M. Bastidas, A. Megrant, R. Barends, Y. Chen, Z. Chen, B. Chiaro, A. Dunsworth, A. Fowler, B. Foxen, M. Giustina, E. Jeffrey, J. Kelly, E. Lucero, J. Mutus, M. Neeley, C. Quintana, D. Sank, A. Vainsencher, J. Wenner, T. White, H. Neven, D. G. Angelakis, J. Martinis, *Science* 01 Dec 2017: Vol. 358, Issue 6367, pp. 1175-1179 .
- [32] M. Távora, E. J. Torres-Herrera, and L. F. Santos, *Phys. Rev. A* 94, 041603R(2016) .
- [33] E. J. Torres-Herrera, Antonio M. García-García, and Lea F. Santos *Phys. Rev. B* 97, 060303(R) (2018) .
- [34] Lea F. Santos, E. J. Torres-Herrera, arXiv:1803.06012 .
- [35] <https://esc.fnwi.uva.nl/thesis/centraal/files/fi660852177.pdf> .