BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

ALGUNOS IDEALES DE ÍNDICE FINITO EN EL ANILLO DE BURNSIDE $B_p(C_{p^4})$, UN PRIMER ACERCAMIENTO A LA FUNCIÓN ZETA $\zeta_{B_p(C_{p^4})}(s)$.

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

PRESENTA:

CRISTHIAN VÁZQUEZ ROSAS

DIRECTOR DE TESIS:

DR. DAVID VILLA HERNÁNDEZ

PUEBLA, JUNIO 2018.

A mis Padres:
Librado Vázquez Salas y Juana Rosas Acosta por estar conmigo siempre y por todo el apoyo incondicional que día a día me han brindado.

A mi novia:
Andrea Granciano Gallardo por estar conmigo a lo largo de todo este proceso, por nunca dejarme solo, por haberme enseñado el significado de lo que es el amor y apoyarme incondicionalmente.

Agradecimientos

Agradezco a Dios por darme la salud y las fuerzas necesarias para culminar una meta más en mi vida.

A mis padres por que sin ellos nada de esto hubiera sido posible, por educarme de la forma en la que ellos creyeron conveniente. Eternamente agradecido con ustedes por todo su amor, apoyo y comprensión.

A mi Bebé Hermosa por estar siempre a mi lado, por hacere el hombre más feliz y sobre todo por amarme tanto. ¡TE AMO!.

Agradezco al Dr. David Villa Hernández por darme la oportunidad de trabajar con él, por todos los conocimientos trasmitidos, por su paciencia, comentarios, sugerencias pero sobre todo por confiar en mí y regalarme todo el tiempo dedicado a lo largo de éste trabajo de tesis.

Al Dr. Carlos Alberto López Andrade, al Dr. Iván Fernando Vilchis Montalvo y al M.C. Juan Manuel Ramírez Contreras por todos sus comentarios, observaciones, sugerencias y atenciones que tuvieron para enriquecer éste trabajo de tesis.

A todos y cada uno de mis profesores que dedican tanto tiempo a esta hermosa profesion y que fueron parte de mi educación.

A mis compañeros que fueron complices de este larga pero divertida e interesante experiencia.

A todos Gracias.

Índice general

Introducción

A finales del siglo XIX, W. Burnside introdujo las ideas sobre lo que actualmente se conoce como el Anillo de Burnside, pero fue Solomon en 1967 en su artículo "The Burnside algebra of a finite group"quien le da la estructura algebraica de anillo.

En 2009, D. Villa Hernández obtiene la función Zeta del Anillo de Burnside para grupos cíclicos de orden un primo racional p y p^2.

En 2016, J.M Ramírez Contreras y D. Villa Hernández obtienen la función Zeta del Anillo de Burnside para grupos cíclicos de orden p^3 con p un numero primo.

La temática de éste trabajo de tesis, se inscribe en el desarrolllo de la teoría de las funciones zeta en el Anillo de Burnside. Se pretende continuar el trabajo realizado en [5], artículo en el cual se obtiene la función zeta $\zeta_{B_p(C_{p^3})}$ (s) del Anillo de Burnside $B_p(C_{p^3})$ para grupos cíclicos C_{p^3} de orden p^3 en los casos local y global.

En el primer y segundo capítulo daremos los preliminares para el Anillo de Burnside, tales como los G-conjuntos y una cantidad considerable de ejemplos para tener un mejor entendimiento al respecto, posteriormente nos sumergiremos un poco en la Marca y algunas de sus propiedades. Para el tercer capítulo definiremos el Anillo de Burnside y todas las propiedades que éste tiene.

En 1977, L Salomon introdujo una función Zeta para un orden la cual requiere del conocimiento de todos sus ideales de índice finito, y es por eso que en el cuarto capítulo mostramos un método utilizado por C.J.Bushnell e I. Reiner para obtener una caracterización de $B_p(C_{p^n})$ mediante el producto fibrado.

Al realizar éste trabajo de investigación determinaremos en el quinto capítulo de forma explícita los 120(conjetura) ideales de índice finito del Anillo de Burnside $B_p(C_{p^4})$, asociados a la familia de ideales de índice finito de $B_p(C_{p^3})$ isomorfos a la clase de $\mathbb{Z}_p^4$.

Finalmente, en el sexto capítulo enumeramos todos los ideales obtenidos a lo largo del quinto capítulo y algunas otras conclusiones que dicho trabajo nos permitió deducir. Cabe resaltar que los cálculos correspondientes a p^4, nunca se han realizado y se desconoce dicha función.

Capítulo 1

G- Conjuntos

Definición 1.1. Sea G un grupo y X un conjunto. Una acción de G en X es una función $* : G \times X \to X$ tal que $(g, x) \longmapsto g * x$ que satisface:

i) $e * x = x$ para todo $x \in X$, donde e es la identidad de G.

ii) $(gh) * x = g * (h * x)$ para todo $g, h \in$ G y $x \in$X.

Si hay una acción de G en X se dice que X es un G-conjunto.

Observación 1.1. Sea X un $G-$conjunto, entonces la siguiente es una relación de equivalencia en X:

$$x \sim y \text{ si y solo si existe } g \in \text{G tal que } y = g * x \text{ con } x, y \in \text{X}.$$

Demostración. •) $x \sim x$ ya que para $e \in$G se tiene que x=$e * x$ (Reflexiva).

•) Si $x \sim y$, tenemos que y= $g * x$ para algún $g \in G$, luego $g^{-1} * y = g^{-1} * (g * x) = (g^{-1} * g) * x = e * x = x$. Por tanto $y \sim x$ (Simétrica).

•) Si $x \sim y$ y $y \sim z$, entonces existen $g, g' \in G$ tal que $y = g * x$ y $z = g' * y$ para algunos $g, g' \in G$, luego $z = g' * (g * x) = (g' * g) * x$ por tanto $x \sim z$ (Transitiva). ■

Definición 1.2. De acuerdo a la relación $\sim$, denotaremos a la clase de equivalencia de $x \in X$ por $\mathcal{O}_G(x)$ y la llamaremos órbita de x en G. Notemos que $\mathcal{O}_G(x) = \{y : y = g*x$ para algún $g \in G\} \subseteq X$.

Corolario 1.1. *Las órbitas son ajenas y además*

$$X = \bigcup_{x \in G} \mathcal{O}_G(x)$$

Demostración. El resultado es directo de la Observacion 2.1. ■

Ejemplo 1.1. Sea G un grupo y X un conjunto no vacío, entonces G actúa en X con la acción trivial.

$$g * x = x \text{ para todo } x \in X \text{ y } g \in G.$$

Ejemplo 1.2. Sean G un grupo, $H \leq G$ y $\frac{G}{H} = \{aH : a \in G\}$. Entonces $\frac{G}{H}$ es un G-conjunto a través de:

$$* : G \times \tfrac{G}{H} \to \tfrac{G}{H} \text{ tal que } (g, aH) \longmapsto g * (aH) = (ga)H$$

Demostración. Veamos que $*$ está bien definida:
Dadas $aH, bH \in \frac{G}{H}$, tenemos que $aH = bH$ si y solo si $a = bh$ para algún $h \in H$. Luego, $gaH = g(bh)H = gbH$. Por lo tanto $*$ está bien definida.
Ahora veamos que $*$ satisface $i)$ e $ii)$ de la definición 2.1.

i) $e * aH = (e * a)H = aH$ para todo $a \in \frac{G}{H}$.

ii) $(g_1 g_2) * aH = ((g_1 g_2)a)H = (g_1(g_2 a))H = g_1 * (g_2 aH) = g_1 * (g_2 * aH)$.

Por lo tanto $*$ es una acción de G en $\frac{G}{H}$. ∎

Definición 1.3. Sean X e Y dos G-conjuntos, definimos la unión disjunta de X e Y como sigue:

$$X \sqcup Y := X' \cup Y' \text{ donde } X' = X \times \{1\},\ Y' = Y \times \{2\} \text{ donde } 1 \notin Y \text{ y } 2 \notin X.$$

Notemos que $X' \cap Y' = \emptyset$.

De manera similar se define la unión ajena de una familia de G- conjuntos.

Ejemplo 1.3. Si $\{X_i\}_{i \in I}$ es una familia de G-conjuntos, entonces $\bigsqcup_{i \in I} X_i$ es un G-conjunto mediante:

$$* : G \times \bigsqcup_{i \in I} X_i \to \bigsqcup_{i \in I} X_i$$

tal que

$$(g, (x, i)) \mapsto g * (x, i) = (g *_i x, i)$$

donde $*_i$ es la acción de G en X_i con $x \in X_i$ para algún $i \in I$.

Demostración. Sólo basta ver $i)$ e $ii)$ de la definición 2.1 ya que $*$ está bien definida.

i) $e * (x, i) = (e * x, i) = (x, i)$.

ii) $(g_1 g_2) * (x, i) = ((g_1 g_2) * x, i) = (g_1(g_2 * x, i)) = g_1 * (g_2 * x, i)$. ∎

Ejemplo 1.4. Si $\{X_i\}_{i \in I}$ es una familia de G-conjuntos, entonces el producto cartesiano de la familia $\{X_i\}_{i \in I}$ (denotado por $\prod_{i \in I} X_i$) es un G-conjunto mediante:

$$* : G \times \prod_{i \in I} X_i \to \prod_{i \in I} X_i$$

tal que

$$(g, (x_i)_{i\in I}) \mapsto g * (x_i)_{i\in I} = (g *_i x_i)_{i\in I}$$

donde $*_i$ es la acción de G en X_i para cada $i \in I$.

Demostración. Sólo resta probar i) e ii) de la definición 2.1 ya que $*$ está bien definida.

i) $e * (x_i)_{i\in I} = (e * x_i)_{i\in I} = (x_i)_{i\in I}$.

ii) $(g_1g_2) *_i (x_i)_{i\in I} = (g_1 *_i (g_2 *_i x_i)_{i\in I}) = g_1 * (g_2 *_i x_i)_{i\in I} = g_1 * (g_2 * (x_i)_{i\in I})$. ■

Nota: En lo sucesivo denotaremos $g * x = gx$ para todo $x \in X$ y $g \in G$ donde X es un G-conjunto.

Ejemplo 1.5. Sea $H \leq G$ un subgrupo y X un H-conjunto, entonces $G \times X$ es un H-conjunto con la siguiente acción:

$$h(g, x) = (gh^{-1}, hx) \text{ para todo } h \in H,\ g \in G \text{ y } x \in X.$$

Definición 1.4. Sean X e Y dos G-conjuntos. Un homomorfismo de G-conjuntos es una función $f : X \to Y$ tal que $f(gx) \mapsto g(f(x))$ para cada $g \in G$.
Si además f es biyección, entonces f es llamada isomorfismo de G-conjuntos y se dice que X e Y son isomorfos como G-conjuntos, lo cual se denotará como $X \cong Y$.

Ejemplo 1.6. Sea X un G-conjunto y $\varphi : H \to G$ un homomorfismo de grupos, entonces X es un H-conjunto. Sea $h \in H$ y $x \in X$ definimos la acción de H en X como sigue:

$$hx = \varphi(h)x \text{ para todo } h \in H \text{ y } x \in X.$$

Definición 1.5. Diremos que un G-conjunto X es transitivo si X tiene una y solo una órbita, es decir , todos los elementos están relacionados.

Ejemplo 1.7. Sean $H, K \leq G$, tales que $H \leq K$ subgrupos, entonces $\varphi : \frac{G}{H} \to \frac{G}{K}$ es un homomorfismo de G-conjuntos definido por la asignación:

$$aH \mapsto aK$$

.

Observación 1.2. Sean X, Y y Z G-conjuntos, $f_1 : X \to Y$ y $f_2 : Y \to Z$ homomorfismos de G-conjuntos, entonces $f_2 \circ f_1 : X \to Z$ es un homomorfismo de G-conjuntos.

Observación 1.3. Si $f : X \to Y$ es un isomorfismo de G-conjuntos, entonces $f^{-1} : Y \to X$ es un isomorfismo de G-conjuntos.

Definición 1.6. Sean G un grupo, X un G-conjunto y $x \in X$. Definimos y denotamos el estabilizador de x en G como sigue:

$$Stab_G(x) = \{g \in G : g * x = x\}$$

Proposición 1.1. *Sea X un G-conjunto, entonces:*

i) $Stab_G(gx) = g(Stab_G(x))g^{-1}$

ii) $\mathcal{O}(x) \cong \frac{G}{Stab_G(x)}$

iii) $\frac{G}{H}$ *es transitivo para todo* $H \leq G$

iv) *Si X es transitivo, entonces existe $H \leq G$ tal que $X \cong \frac{G}{H}$*

Demostración.

i) Dado $a \in G$, tenemos que

$$\begin{array}{rcl} a \in Stab_G(gx) & \Leftrightarrow & a(gx) = gx \\ & \Leftrightarrow & (g^{-1}ag)x = x \\ & \Leftrightarrow & g^{-1}ag \in Stab_G(x) \\ & \Leftrightarrow & a \in g(Stab_G(x))g^{-1}. \end{array}$$

Así $Stab_G(x) = g(Stab_G(x))g^{-1}$.

ii) Sea $H = Stab_G(x)$, definimos $\varphi : \mathcal{O}(x) \to \frac{G}{H}$ tal que $gx \mapsto gH$. Veamos que φ es un isomorfismo. Notemos lo siguiente:

$$g_1x = g_2x \Leftrightarrow (g_2^{-1}g_1)x = x \Leftrightarrow g_2^{-1}g_1 \in H \Leftrightarrow g_1H = g_2H$$

Así, hemos probado que φ está bien definida y además es inyectiva.
Es claro que φ es sobreyectiva. Por último:

$$\varphi(a(gx)) = \varphi(agx) = a(gH) = a\varphi(gx) \text{ para todo } a, g \in G, x \in X.$$

Así, φ es un isomorfismo de G-conjuntos entre $\mathcal{O}(x)$ y $\frac{G}{H}$.

iii) En particular tenemos que $eH \in \frac{G}{H}$. Si $gH \in \frac{G}{H}$, entonces $gH = g(eH) \in \mathcal{O}(eH) = \mathcal{O}(H)$.
Por tanto $\frac{G}{H} = \mathcal{O}(eH)$.

iv) Si X es transitivo, entonces $X = \mathcal{O}(x) \cong \frac{G}{H}$, donde $H = Stab_G(x)$.

∎

Definición 1.7. Sean $H \leq G$ un subgrupo y $g \in G$. Definimos el conjugado de H por g al subgrupo de G definido como sigue:

$$gHg^{-1} = \{ghg^{-1} : h \in H\}.$$

Observación 1.4. Sea $X = \{H \subseteq G : H \leq G$ es un subgrupo$\}$. Entonces X es un G-conjunto con la acción:

$$* : G \times X \to X \text{ tal que } (g, H) \mapsto g * H = gHg^{-1}.$$

Definición 1.8. Al conjunto de órbitas de $X = \{H \subseteq G : H \leq G\}$ bajo la acción de G lo denotaremos $\mathscr{C}(G)$ y lo llamaremos las clases de conjugación de subgrupos de G. Denotamos por $[H] \in \mathscr{C}(G)$ la órbita de $H \in X$ bajo la acción de la observación 2.4, es decir, $[H] = \{gHg^{-1} : g \in G\}$. Además, $[K] = [H]$ si y solo si $K = gHg^{-1}$ para algún $g \in G$, i.e, H y K son subgrupos conjugados.

Lema 1.1. *Sean $H, K \leq G$ subgrupos. Entonces $\frac{G}{H} \cong \frac{G}{K}$ como G-conjuntos si y solo si $[H] = [K]$.*

Demostración. $\Rightarrow]$
Sea $\varphi : \frac{G}{H} \to \frac{G}{K}$ un isomorfismo de G-conjuntos tal que $eH \mapsto gK$ para algún $g \in G$. Luego, para todo $h \in H$, $gK = \varphi(H) = \varphi(hH) = hgK$, así $gK = hgK$, entonces $g^{-1}hg \in K$, de aquí $g^{-1}Hg \subset K$.
Tomemos ahora $\varphi^{-1} : \frac{G}{H} \to \frac{G}{K}$, el cual por la observación 2.3 es un homomorfismo de G-conjuntos y note que para cada $k \in K, kg^{-1}H = k\varphi^{-1}(K) = \varphi^{-1}(kK) = \varphi^{-1}(K) = g^{-1}H$, así $gkg^{-1} \in H$ para todo $k \in K$, luego por tanto $gKg^{-1} \subset H$, en consecuencía $K \subset g^{-1}Hg$. Por tanto $K = g^{-1}Hg$.

$\Leftarrow]$
Si $H = g_0Kg_0^{-1}$. Mostremos que $\varphi : \frac{G}{H} \to \frac{G}{K}$ tal que $aH \mapsto ag_0K$ es un isomorfismo de G-conjuntos.

Veamos que φ está bien definida y que es inyectiva $aH = bH \Leftrightarrow a(g_0Kg_0^{-1}) = b(g_0Kg_0^{-1}) \Leftrightarrow ag_0K = bg_0K \Leftrightarrow \varphi(aH) = \varphi(bH)$. Por tanto φ está bien definida y es inyectiva.

Ahora $\varphi\frac{G}{H} \to \frac{G}{K}$ es sobre. En efecto, sea $xK \in \frac{G}{K}$, luego $\varphi(xg_0^{-1}H) = xK$. Por tanto φ es sobre y así φ es una biyección.

φ es un homomorfismo de G-conjuntos porque :

$\varphi(g(aH)) = \varphi(gaH) = (gag_0)K = g(ag_0K) = g\varphi(aH)$. Por tanto φ es homomorfismo de G-conjuntos. Así, φ es isomorfismo de G-conjuntos. ■

Observación 1.5. Sea $\varphi : X \to Y$ un homomorfismo de G-conjuntos. Entones φ manda órbitas en órbitas.

Proposición 1.2. *Todo G-conjunto es isoformo como G-conjuntos a la unión ajena de G-conjuntos de la forma $\frac{G}{H}$ donde $H \leq G$ es un subgrupo.*

Demostración. Si X es un G-conjunto, entonces $X = \dot{\bigcup\limits_{i \in I}} \mathcal{O}(x_i)$ con I un conjunto de índices. Además $\mathcal{O}(x_i) \cong \frac{G}{H_i}$ donde $H_i = Stab_G(x_i) \leq G$.

Sea $\varphi_i : \mathcal{O}(x_i) \to \frac{G}{H_i}$, definimos $\varphi : X \to \displaystyle\bigsqcup_{i\in I} \frac{G}{H_i}$ tal que $x \mapsto \varphi_i(x)$ siempre que $x \in \mathcal{O}(x_i)$. Notemos que φ es homomorfismo biyectivo de G-conjuntos, luego

$$X \cong \bigsqcup_{i\in I} \frac{G}{H_i}.$$

■

Definición 1.9. Sean $H, K \leq G$ subgrupos, H es subconjugado de K si existe $g \in G$ tal que $gHg^{-1} \leq K$ es subgrupo.

Notación: $Hom(X,Y) = \{\varphi : X \to Y : \varphi$ es homomorfismo de G-conjuntos $\}$.

Proposición 1.3. *$Hom(\frac{G}{H}, \frac{G}{K}) \neq \emptyset$ si y solo si H es subconjugado de K.*

Demostración. $\Rightarrow]$
Sea $\varphi : \frac{G}{H} \to \frac{G}{K}$, tal que $H \mapsto gK$, entonces $\varphi(eH) = gK$ para alguna $g \in G$. Para cada $h \in H$ tenemos que $hH = H$, luego $\varphi(hH) = \varphi(eH) = gK$, de lo anterior tenemos que $gK = \varphi(hH) = h\varphi(eH) = hgK$. Por lo tanto $g^{-1}hg \in K$. Así $(g^{-1})Hg \leq K$.

$\Leftarrow]$
Como H es subconjugado de K existe $g \in G$ tal que $gHg^{-1} \leq K$ entonces podemos definir

$$\psi : \frac{G}{gHg^{-1}} \to \frac{G}{K} \text{ tal que } a(gHg^{-1}) \mapsto aK$$

Además por el lema 2.1 $\frac{G}{H} \cong \frac{G}{gHg^{-1}}$, entonces existe $\sigma : \frac{G}{H} \to \frac{G}{gHg^{-1}}$ un isomorfismo de G-conjuntos.
Por tanto $\psi \circ \sigma : \frac{G}{H} \to \frac{G}{K} \in Hom(\frac{G}{H}, \frac{G}{K})$. ■

Observación 1.6. Si H es subconjugado de K, entonces todo conjugado de H es subconjugado de cualquier conjugado de K.

Observación 1.7. Sean $[H], [K] \in \mathscr{C}(G)$, definimos $[H] \leq [K]$ si y solo si H es subconjugado de K. Entonces " $\leq$ " es un orden parcial.

Capítulo 2

La Marca de H en X

Definición 2.1. Sean G un grupo, $H \leq G$ un subgrupo y X un G-conjunto finito. Definimos X^H como el conjunto de todos los puntos de X que quedan fijos bajo la acción de H, es decir ,

$$X^H := \{x \in X : h * x = x \text{ para todo } h \in H\}.$$

Definimos la Marca de H en X como el número de elementos de X^H y la denotamos por

$$\varphi_H(X) = |X^H|.$$

Teorema 2.1. *Sean X, Y G-conjuntos finitos, entonces:*

i) $\varphi_H(X \sqcup Y) = \varphi_H(X) + \varphi_H(Y)$.

ii) $\varphi_H(X \times Y) = \varphi_H(X)\varphi_H(Y)$.

Demostración.

i)

$$\begin{aligned}
(X \sqcup Y)^H &= \{z \in X \sqcup Y : h \cdot z = z \quad \forall h \in H, i = 1, 2\} \\
&= \{(z_i, i) \in (X \times \{1\}) \cup (Y \times \{2\}) : (h \cdot z_i, i) = (z_i, i) \quad \forall h \in H\} \\
&= \{(x, 1) \in X \times \{1\} : h \cdot x = x \quad \forall h \in H\} \cup \{(y, 2) \in Y \times \{2\} : h \cdot y = y \quad \forall h \in H\} \\
&= (X^H \times \{1\}) \cup (Y^H \times \{2\}) \\
&= X^H \sqcup Y^H.
\end{aligned}$$

Por tanto $|(X \sqcup Y)^H| = |X^H \times \{1\}| + |Y^H \times \{2\}| = |X^H| + |Y^H|$.
Así $\varphi_H(X \sqcup Y) = \varphi_H(X) + \varphi_H(Y)$.

ii)

$$\begin{aligned}
(X \times Y)^H &= \{(x, y) \in X \times Y : h(x, y) = (x, y) \quad \forall h \in H\} \\
&= \{(x, y) \in X \times Y : (hx, hy) = (x, y) \quad \forall h \in H\} \\
&= \{(x, y) \in X \times Y : hx = x \wedge hy = y \quad \forall h \in H\} \\
&= \{(x, y) \in X \times Y : x \in X^H \wedge y \in Y^H \quad \forall h \in H\} \\
&= X^H \times Y^H.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $|(X \times Y)^H| = |X^H \times Y^H| = |X^H||Y^H|$.
Así $\varphi_H(X^H \times Y^H) = \varphi_H(X) \cdot \varphi_H(Y)$.

■

Lema 2.1. *Si $[H] = [K]$ con $H, k \leq G$ subgrupos, entonces $\varphi_H(X) = \varphi_K(X)$ para todo G-conjunto X.*

Demostración. Como $[H] = [K]$, existe $a \in G$ tal que $K = aHa^{-1}$. Luego

$$\begin{aligned} X^K &= \{x \in X; k \cdot x = x \quad \forall k \in K\} \\ &= \{x \in X; aha^{-1}x = x \quad \forall h \in H\} \\ &= \{x \in X; h(a^{-1}x) = (a^{-1})x \quad \forall h \in H\} \\ &= \{x \in X; a^{-1}x \in X^H\} \\ &= \{x \in X; x \in aX^H\} \\ &= aX^H. \end{aligned}$$

Definimos $\gamma_a : X^H \to aX^H$ tal que $x \mapsto a \cdot x$ y además $\gamma_a^{-1} : aX^H \to X^H$ tal que $y \mapsto a^{-1}y$. Notemos que $\gamma_a \circ \gamma_a^{-1} = 1_{aX^H}$ y que $\gamma_a^{-1} \circ \gamma_a = 1_{X^H}$. Por tanto γ_a es una biyección, entonces $|X^H| = |aX^H| = |X^K|$. Así $\varphi_H(X) = \varphi_K(X)$ ■

Lema 2.2. *Sean $H, K \leq G$ subgrupos, entonces los siguientes conjuntos están en biyección.*

$$(\tfrac{G}{K})^H \longleftrightarrow Hom(\tfrac{G}{H}, \tfrac{G}{K})$$

Demostración.

$i)$ Sabemos que $Hom(\frac{G}{H}, \frac{G}{K}) \neq \emptyset$ si y solo si $[H] \leq [K]$. Supongamos que $[H] \nleq [K]$, entonces $Hom(\frac{G}{H}, \frac{G}{K}) = \emptyset$.
Por otro lado tenemos que:

$$\begin{aligned} (\tfrac{G}{K})^H &= \{gK \in \tfrac{G}{K} : h(gK) = gK \quad \forall h \in H\} \\ &= \{gK \in \tfrac{G}{K} : hgK = gK \quad \forall h \in H\} \\ &= \{gK \in \tfrac{G}{K} : g^{-1}hgK = K \quad \forall h \in H\} \\ &= \{gK \in \tfrac{G}{K} : g^{-1}hg \in K \quad \forall h \in H\} \\ &= \{gK \in \tfrac{G}{K} : g^{-1}Hg \subset K\} \\ &= \emptyset. \end{aligned}$$

$ii)$ Consideremos ahora el caso cuando $[H] \leq [K]$, definimos

$$\Gamma : (\tfrac{G}{K})^H \to Hom(\tfrac{G}{H}, \tfrac{G}{K}) \text{ tal que } gK \mapsto \Gamma_g$$

donde

$$\Gamma_g : \tfrac{G}{H} \to \tfrac{G}{K} \text{ tal que } aH \mapsto agK$$

Veamos que Γ_g está bien definida.
Para toda $aH, bH \in \frac{G}{H}$, tenemos que $aH = bH \Leftrightarrow b = ah$ para algún $h \in H$. Mostremos que $agK = bgK$.
$bgK = (ah)gK = a(hgK) = a(h(gK)) = a(gK)) = agK$, ya que $gK \in (\frac{G}{K})^H$.
Por tanto Γ_g está bien definida.

Observemos que $\Gamma_g \in Hom(\frac{G}{H}, \frac{G}{K})$. En efecto, sea $aH \in \frac{G}{H}$ y $f \in G$, luego

$$\begin{aligned}\Gamma_g(f \cdot aH) &= \Gamma_g(faH)\\ &= fagK\\ &= f(agK)\\ &= f(\Gamma_g(a)).\end{aligned}$$

Por tanto $\Gamma_g \in Hom(\frac{G}{H}, \frac{G}{K})$.

Notemos que Γ está bien definida. En efecto, para todo $gK, g'K \in \frac{G}{H}$, tenemos que $gK = g'K \Leftrightarrow g' = gk$ para algún $k \in K. Veamos que \Gamma_g = \Gamma_{g'}$.
$\Gamma_{g'}(aH) = ag'K = agkK = agK = \Gamma_g(aH) \quad \forall aH \in \frac{G}{H}$. Por tanto $\Gamma_g = \Gamma g'$. Así Γ está bien definida.

Ahora definamos $\Gamma' : Hom(\frac{G}{H}, \frac{G}{K}) \to (\frac{G}{K})^H$ tal que $\alpha \mapsto \alpha(H)$. $\vdash \alpha(H) \in (\frac{G}{K})^H$
Sea $h \in H, h\alpha(H) = \alpha(hH) = \alpha(H)$. Por tanto $\alpha(H) \in (\frac{G}{K})^H$.
Notemos que $\Gamma' \circ \Gamma = 1_{(\frac{G}{K})^H}$ ya que $(\Gamma' \circ \Gamma)(gK) = \Gamma'(\Gamma(gK)) = \Gamma'(\Gamma_g) = \Gamma_g(H) = gK$.
Por tanto $\Gamma' \circ \Gamma = 1_{(\frac{G}{K})^H}$.
Resta probar que $(\Gamma \circ \Gamma') = 1_{Hom(\frac{G}{H}, \frac{G}{K})}$. En efecto,

$$\begin{aligned}(\Gamma \circ \Gamma')(\alpha) &= \Gamma(\Gamma'(\alpha))\\ &= \Gamma(\alpha(H))\\ &= \Gamma(g_0K)\\ &= \Gamma_{g_0}\end{aligned}$$

donde $\alpha(H) = g_0K$. Veamos que $\Gamma_{g_0} = \alpha$. En efecto,

$$\begin{aligned}\Gamma_{g_0}(aH) &= a(g_0K)\\ &= a(\alpha(H))\\ &= \alpha(aH) \quad \forall aH \in \frac{G}{H}\end{aligned}$$

Por tanto $\Gamma_{g_0} = \alpha$. Así $(\Gamma \circ \Gamma') = 1_{Hom(\frac{G}{H}, \frac{G}{K})}$.
Por lo tanto Γ es biyección.

∎

Corolario 2.1. $\varphi_H(\frac{G}{K}) \neq 0$ *si y solo si* $[H] \leq [K]$.

Definición 2.2. Dados G un grupo y $H \leq G$ subgrupo. Definimos el normalizador de H en G como:

$$N_G(H) := \{g \in G : gHg^{-1} = H\}.$$

Observación 2.1. $H \trianglelefteq N_G(H) \leq G$.

Definición 2.3. Dados G un grupo y $H \leq G$ subgrupo. Definimos el grupo de Weyl de H en G como sigue:

$$W(H) := \frac{N_G(H)}{H}.$$

Lema 2.3. *Sea G un grupo y $H \leq G$ un subgrupo, entonces $(\frac{G}{H})^H \cong W(H)$ como $N_G(H)$-conjuntos.*

Demostración. Sea G un grupo y $H \leq G$, entonces $\frac{G}{H}$ es un G-conjunto. Un caso particular es cuando $G = N_G(H)$, i.e, cuando $\frac{N_G(H)}{H} = W(H)$ es un $N_G(H)$-conjunto. Veamos que $(\frac{G}{H})^H$ es un $N_G(H)$-conjunto. Sea $g \in N_G(H)$ y $aH \in (\frac{G}{H})^H. Ahora exhibiremos que g \cdot aH = gaH \in (\frac{G}{H})^H$. Ahora sea $h \in H$ y notemos que $gHg^{-1} = H \Leftrightarrow gH = Hg$, por tanto $gh' = hg$ para algún $h' \in H$. Luego $h(gaH) = gh'aH = gaH$. Por tanto $g \cdot aH = gaH \in (\frac{G}{H})^H$. Definamos

$$\tau : (\tfrac{G}{H})^H \to W(H) \text{ tal que } aH \mapsto aH.$$

Notemos que τ es de $N_G(H)$- conjuntos por ser la identidad. Observemos

$$\begin{aligned} aH \in (\tfrac{G}{H})^H &\Leftrightarrow haH = aH \quad \forall h \in H \\ &\Leftrightarrow a^{-1}haH = H \quad \forall h \in H \\ &\Leftrightarrow a^{-1}ha \in H \quad \forall h \in H \\ &\Leftrightarrow a^{-1}Ha \subset H \\ &\Leftrightarrow a^{-1}Ha = H \\ &\Leftrightarrow a \in N_G(H). \end{aligned}$$

Por tanto $aH \in (\frac{G}{H})^H \Leftrightarrow aH \in W(H) = \frac{N_G(H)}{H}$. En consecuencia $(\frac{G}{H})^H = W(H)$. Así $\tau = 1_{W(H)}$ es un isomorfismo. Por tanto $(\frac{G}{H})^H \cong W(H)$.

■

Lema 2.4. *(Cauchy-Frobenius-Burnside) Sea G un grupo finito, X un G-conjunto finito y N= el número de órbitas, entonces*

$$N = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} |Fix(g)|$$

donde $Fix(g) = \{x \in X : gx = x\}$

Demostración. Definimos $\mathcal{A} = \{(g,x) \in G \times X : gx = x\}$. Sea $g \in G$ arbitrario pero fijo. Entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_g &:= \{(g,x) \in G \times X : g \cdot x = x\} \\ &= \{(g,x) \in G \times X : x \in Fix(g)\} \\ &= \{g\} \times Fix(g) \end{aligned}$$

Por tanto $|\mathcal{A}_g| = |Fix(g)|$.

Observemos que $\mathcal{A} = \dot{\bigcup_{g\in G}} \mathcal{A}_g$, luego $|\mathcal{A}| = \sum_{g\in G} |\mathcal{A}_g| = \sum_{g\in G} |Fix(g)|$.

Definimos

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_x &= \{(g,x) \in G \times X : g \cdot x = x\} \\ &= \{(g,x) \in G \times X : g \in Stab_G(x)\} \\ &= (Stab_G(x)) \times \{x\} \end{aligned}$$

Entonces $|\mathcal{A}_x| = |Stab_G(x)|$ y observemos que $\mathcal{A} = \dot{\bigcup_{x\in X}} \mathcal{A}_x$, luego como $X = \bigcup_{i=1}^{N} \mathcal{O}(x_i)$ tenemos

$$|\mathcal{A}| = \sum_{x\in X} |Stab_G(x)| = \sum_{i=1}^{N} (\sum_{x\in \mathcal{O}(x_i)} |Stab_G(x)|) \qquad (\star)$$

Recordemos que $\mathcal{O}(x_i) \cong \frac{G}{Stab_G(x)}$, luego

$$|\mathcal{O}(x_i)| = \tfrac{|G|}{|Stab_G(x)|} \Leftrightarrow |Stab_G(x)| = \tfrac{|G|}{\mathcal{O}(x_i)}. \qquad (\star\star)$$

De $(\star)$ y $(\star\star)$ obtenemos

$$|\mathcal{A}| = \sum_{i=1}^{N} (\sum_{x\in \mathcal{O}(x_i)} \frac{|G|}{|\mathcal{O}(x_i)|}) = \sum_{i=1}^{N} (\frac{|\mathcal{O}(x_i)||G|}{|\mathcal{O}(x_i)|}) = \sum_{i=1}^{N} |G| = N|G|$$

Es decir, $|\mathcal{A}| = N|G|$. Así

$$N|G| = \sum_{g\in G} |Fix(g)| \Leftrightarrow N = \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} |Fix(g)|.$$

$\blacksquare$

Observación 2.2. Sean X, Y dos G-conjuntos finitos, entonces $Y \sim X \Leftrightarrow Y \cong X$ como G-conjunto.

Lema 2.5. *Sean $H, K \leq G$ subgrupos, entonces*

$$\varphi_H \left(\frac{G}{K} \right) = \left(\frac{|N_G(H)|}{|K|} \right) \alpha(H,K) = \left(\frac{|N_G(H)|}{|K|} \right) \beta(H,K)$$

donde

$$\alpha(H,K) = |\{E \leq G : [E] = [K] \quad y \quad H \subset E\}|$$

y

$$\beta(H,K) = |\{E \leq G : [E] = [H] \quad y \quad E \subset K\}|$$

Demostración. Sea $\mathcal{A} = \{E \leq G : [E] = [K] \quad y \quad H \subset E\}$. Luego sabemos que

$$\begin{aligned}
\left(\tfrac{G}{K}\right)^H &= \{aK : haK = aK \text{ para toda } h \in H\} \\
&= \{aK : a^{-1}ha \in K \text{ para toda } h \in H\} \\
&= \{aKa^{-1} : Ha \subset K\} \\
&= \{aK : H \subset aKa^{-1}\}.
\end{aligned}$$

Ahora, tomemos $f : \{aK : H \subset aKa^{-1}\} \to \mathcal{A}$ tal que $aK \mapsto aKa^{-1}$.

Veamos que f esta bien definida. Sean $aK = bK$, entonces existe $k \in K$ tal que $a = bk$, por tanto $aKa^{-1} = bkKk^{-1}b^{-1} = bKb^{-1}$. Por tanto f esta bien definida.

f es sobreyectiva. En efecto, sea $E \in \mathcal{A}$, así $[E] = [K]$ y $H \subseteq E$, i.e, existe $a \in G$ tal que $E = aKa^{-1}$, entonces $f(aK) = E$. Resta ver que $aK \in \left(\frac{G}{K}\right)^H$. Sea $h \in H \subseteq E$, entonces $h = ak'a^{-1}$ para algún $k' \in K$, por lo que $haK = ak'a^{-1}aK = aK$.

Por tanto, $\{aK : H \subseteq aKa^{-1}\} = \bigcup\limits_{E \in \mathcal{A}} f^{-1}(E)$, en donde $f^{-1}(E)$ es la imagen inversa de E bajo f.

Veamos que $f^{-1}(E) = \{abK : bK \in \frac{N_G(K)}{K}\}$.

($\subseteq$) Sea $gK \in \{aK : H \subseteq aKa^{-1}\}$ tal que $f(gK) = aKa^{-1}$, de aquí que $gKg^{-1} = aKa^{-1}$, así $a^{-1}gKg^{-1}a = K$, con lo cual $a^{-1}g \in N_G(K)$, de donde $a^{-1}g = b \in N_G(K)$, entonces $g = ab$ tal que $bK \in \frac{N_G(K)}{K}\}$.

($\supseteq$) Sea abK con $bK \in \frac{N_G(K)}{K}$, entonces $f(abK) = abKb^{-1}a^{-1} = aKa^{-1} = E$, entonces $abK \in f^{-1}(E)$.

Notemos que si $bK, b'K \in \frac{N_G}{K}$ entonces $bK = b'K$ si y solo si $abK = ab'K$ por lo que de la igualdad de conjuntos anterios obtenemos que $|f^{-1}(E)| = |\frac{N_G(K)}{K}|$. Por tanto

$$\varphi_H\left(\frac{G}{K}\right) = \frac{|N_G(K)|}{|K|}\alpha(H, K).$$

Ahora llamemos $A = \{a \in G : a^{-1}Ha \subseteq K\}$ y tomemos

$$f_1(aK) : A \to \{aK : a^{-1}Ha \subseteq K\}$$

tal que

$$a \mapsto aK$$

Notemos que por la manera en la que se definio f_1 está bien definida y es sobreyectiva.

Ahora, tenemos que la imagen inversa de aK bajo f_1 es:

$$\begin{array}{rcl}(f_1)^{-1}(aK) & = & \{g \in A : f_1(g) = aK\} \\ & = & \{g \in A : gK = aK\} \\ & = & \{g \in A : a^{-1}g \in K\} \\ & = & \{g \in A : g = ak \quad \text{para algún} \quad k \in K\} \\ & = & \{ak : k \in K\} \\ & = & aK.\end{array}$$

Así, $|(f_1)^{-1}(aK)| = |aK| = |K|$, de aquí que $|A| = |K|\varphi_H\left(\frac{G}{K}\right)$.
Ahora, sea $\mathcal{B} = \{E \leq G : [E] = [H] \text{ y } E \subseteq K\}$ y veamos que

$$|A| = |N_G(H)|\beta(H, K).$$

Para esto, sea $f_2 : A \to \mathcal{B}$ tal que $a \mapsto a^{-1}Ha$. Notemos que f_2 está bien definida. Luego, sea $E \in \mathcal{B}$, así $[E] = [H]$, por lo que existe $a \in G$ tal que $E = a^{-1}Ha \subseteq K$, de donde $a \in A$, y por tanto f_2 es sobreyectiva.

Por otra parte, la imagen inversa de E bajo f_2 es:

$$\begin{array}{rcl}(f_2)^{-1}(E) & = & \{g \in A : f_2(g) = a^{-1}Ha\} \\ & = & \{g \in A : g^{-1}Hg = a^{-1}Ha\} \\ & = & \{g \in A : ag^{-1}Hga^{-1} = H\} \\ & = & \{g \in A : ga^{-1} \in N_G(H)\} \\ & = & \{g \in A : ga^{-1} = x \text{ para algún } x \in N_G(H)\} \\ & = & \{xa : x \in N_G(H)\} \\ & = & (N_G(H))a\end{array}$$

De lo anterior, $|(f_2)^{-1}(E)| = |N_G(H)a| = |N_G(H)|$. Por tanto,

$$|A| = |N_G(H)|\beta(H, K).$$

Y así

$$\varphi_H\left(\frac{G}{H}\right) = \left(\frac{|N_G(H)|}{|K|}\right)\beta(H, K).$$

$\blacksquare$

Observación 2.3. En lo sucesivo consideraremos a G-finito y a X un G-conjunto finito.

Capítulo 3

El Anillo de Burnside

Definición 3.1. Dado G un grupo finito, definimos $\mathcal{A}$ como la familia de todos los G-conjuntos finitos, i.e,

$$\mathcal{A} = \{X : X \text{ es un G-conjunto finito}\}.$$

Observación 3.1. Notemos que en $\mathcal{A}$ existe una relación de equivalencia $\sim$, a saber, dados $X, Y \in \mathcal{A}$ se tiene que $X \sim Y$ si y solo si $X \cong Y$ como G-conjuntos.

Definición 3.2. Sea $X \in \mathcal{A}$. Denotaremos por $[X] = \{Y \in \mathcal{A} : X \cong Y\}$ a la clase de equivalencia de $X \in \mathcal{A}$ y la llamaremos la clase de isomorfismo del G-conjunto X.

Definición 3.3. Definimos $B^+(G) := \frac{\mathcal{A}}{\sim} = \{[X] : X \in \mathcal{A}\}$.

Proposición 3.1. *$B^+(G)$ es un semianillo conmutativo con unidad, con las siguientes operaciones:*

$$[X] + [Y] = [X \sqcup Y]$$

$$[X][Y] = [X \times Y]$$

Demostración. Veamos que la suma está bien definida:
Sean $[X], [X'], [Y], [Y'] \in B^+(G)$ tales que $[X] = [X']$ y $[Y] = [Y']$. Entonces existen $\varphi : X \to X'$ y $\psi : Y \to Y'$ isomorfismos de G-conjuntos a través de los cuales podemos inducir el siguiente isomorfismo de G-conjuntos:

$$\alpha : (X \times \{1\}) \cup (Y \times \{2\}) \to (X' \times \{3\}) \cup (Y' \times \{4\})$$

tal que

$$(z_i, i) \mapsto \begin{cases} (\varphi(z_i), 3) & si \quad i = 1 \\ (\psi(z_i), 4) & si \quad i = 2 \end{cases}$$

Por tanto, $X \sqcup Y \cong X' \sqcup Y'$ y así $[X] + [Y] = [X'] + [Y']$. De este modo concluimos que la suma no depende del representante elegido.

Por otro lado notemos que φ y ψ inducen el siguiente isomorfismo de G-conjuntos:

$$\eta : X \times Y \to X' \times Y'$$

tal que

$$(x, y) \mapsto (\varphi(x), \psi(y))$$

De este modo $[X \times Y] = [X' \times Y']$, por tanto el producto está bien definido. En lo sucesivo podemos considerar, sin perdida de generalidad, que para elementos $[X], [Y] \in B^+(G)$ tenemos que $X \cap Y = \emptyset$; esto por la manera en la que se definío $[X]$ y $[Y]$ y además por que la suma no depende de los representantes.
Ahora veamos que $B^+(G)$ es un semianillo conmutativo con unidad. Sean $[X], [Y], [Z] \in B^+$, donde X, Y, Z son G-conjuntos finitos disjuntos dos a dos.
Para la suma:
Conmutativa:

$$\begin{aligned} [X] + [Y] &= [X \cup Y] \\ &= [Y \cup X] \\ &= [Y] + [X]. \end{aligned}$$

Asociatividad:

$$\begin{aligned} ([X] + [Y]) + [Z] &= [X \cup Y] + [Z] \\ &= [(X \cup Y) \cup Z] \\ &= [X \cup (Y \cup Z)] \\ &= [X] + [Y \cup Z] \\ &= [X] + ([Y] + [Z]). \end{aligned}$$

Neutro:
Notemos que $[\emptyset] \in B^+(G)$ es el neutro aditivo ya que $[\emptyset] + [X] = [\emptyset \cup X] = [X]$.
Para el producto:
Conmutativa:
Sea $\varphi : X \times Y \to Y \times X$ tal que $(x, y) = (y, x)$ un isomorfismo de G-conjuntos. Por tanto $[X][Y] = [Y][X]$.
Asociativa:

$$\begin{aligned} ([X][Y])[Z] &= [X \times Y][Z] \\ &= [(X \times Y) \times Z] \\ &= [X \times (Y \times Z)] \\ &= [X][Y \times Z] \\ &= [X]([Y][Z]). \end{aligned}$$

Neutro:
Notemos que $[\frac{G}{G}] \in B^+(G)$. Luego $\varphi : X \times [\frac{G}{G}] \to X$ tal que $(x, eG) \mapsto x$ es un isomorfismo de G-conjuntos. Por tanto, $[\frac{G}{G}]$ es la unidad en $B^+(G)$.
Distributiva:

$$\begin{aligned} [Z]([X] + [Y]) &= [Z][X \cup Y] \\ &= [Z \times (X \cup Y)] \\ &= [(Z \times X) \cup (Z \times Y)] \\ &= [Z \times X] + [Z \times Y] \\ &= [Z][X] + [Z][Y]. \end{aligned}$$

Así, $B^+(G)$ es un semianillo conmutativo con unidad.

$\blacksquare$

Ejemplo 3.1. Sea $G = \{e\}$, entonces $B^+(\{e\}) = \{[X] : X$ es un e-conjunto finito$\}$. Por tanto si X es un conjunto finito, entonces X es un $\{e\}$-conjunto finito con la acción trivial.

Observación 3.2. Dados X, Y G-conjuntos con la acción trivial son isomorfos si y solo si existe una biyección entre ellos. De donde

$$\phi : B^+(\{e\}) \to \mathbb{N} \text{ tal que } [X] \mapsto |X|$$

es una biyección que manda al 1 en el 1, abre sumas y productos, por lo cual $\mathbb{N} \cong B^+(\{e\})$. En lo sucesivo tomaremos $0 \in \mathbb{N}$.

.

Observación 3.3. Sean X, Y dos $\{e\}$-conjuntos. Entonces $[X] = [Y] \Leftrightarrow |X| = |Y|$.

Demostración. Definimos $\alpha : B^{\{e\}} \to \mathbb{N}$ tal que $[X] \mapsto |X|$. Notemos que por la misma definición de α está bien definida y es inyectiva. Además $\{1, \ldots, n\} \mapsto n \in \mathbb{N}$, por lo que α es sobre. Así α es biyectiva.
Observemos que:

$$\begin{gathered} [\tfrac{\{e\}}{\{e\}}] \mapsto 1 \\ [X][Y] = [X \times Y] \mapsto |X||Y| \\ [X] + [Y] = [X \cup Y] \mapsto |X| + |Y| \end{gathered}$$

Por tanto α es un isomorfismo de semianillos. $\blacksquare$

Observación 3.4. Definimos una relación de equivalencia en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ como sigue:

$$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a + d = c + b$$

Definición 3.4. $\mathbb{Z} := \frac{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}{\sim} = \{[a, b] : (a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}$ es el Anillo de los Enteros con las siguientes operaciones.

$$\begin{gathered} [a_1, b_1] + [a_2, b_2] := [a_1 + a_2, b_1 + b_2] \\ [a_1, b_1] \cdot [a_2, b_2] := [a_1a_2 + b_1b_2, a_1b_2 + a_2b_1]. \end{gathered}$$

Observación 3.5. $\varphi : \mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{Z}$ es una función inyectiva tal que:

$$\begin{gathered} n \mapsto [n, 0] \\ 1 \mapsto [1, 0] \quad \text{(Neutro Multiplicativo)} \\ n + m \mapsto [n + m, 0] = [n, 0] + [m, 0] \\ nm \mapsto [nm, 0] = [n, 0][m, 0] \end{gathered}$$

Por tanto $\mathbb{N}$ se identifica con $N' = \{[n, 0] \in \mathbb{Z} : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{Z}$.

Lema 3.1. *Sean* $[X], [Y], [Z] \in B^+(G)$. *Si* $[X] + [Z] = [Y] + [Z]$ *entonces* $[X] = [Y]$, *es decir, existe cancelación en la suma en* $B^+(G)$.

Demostración. Sin perdida de generalidad sean X, Y, Z G-conjuntos finitos ajenos dos a dos, tales que $[X]+[Z] = [Y]+[Z]$. Sea $X = \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{O}(x_i), Y = \bigcup_{j=1}^{m} \mathcal{O}(y_j), Z = \bigcup_{k=1}^{l} \mathcal{O}(z_k)$.
Como $[X] + [Z] = [X \cup Z] = [Y \cup Z] = [Y] + [Z]$ existe $\varphi : X \cup Z \to Y \cup Z$ un isomorfismo de G-conjuntos, es decir, existe una correspondencia biyectiva entre las orbitas de $X \cup Z$ y las de $Y \cup Z$, esto implica que $n + l = m + l$ con lo que $n = m$. i.e, $X = \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{O}(x_i)$ y $\bigcup_{j=1}^{n} \mathcal{O}(y_j) = Y$.

Veamos que si $[X] + \bigcup_{k=1}^{l} \mathcal{O}(z_k) = [Y] + \bigcup_{k=1}^{l} \mathcal{O}(z_k)$ entonces $[X] + [Y]$.
Procedamos por inducción sobre $1 \leq l$.

i) Para $l = 1$, existe un isomorfismo de G-conjuntos

$$\varphi : X \cup \mathcal{O}(z_1) \to Y \cup \mathcal{O}(z_1)$$

Notemos que si $\varphi(\mathcal{O}(z_1)) = \mathcal{O}(z_1)$, entonces $\varphi|_X : X \to Y$ es un isomorfismo de G-conjuntos y por tanto $[X] = [Y]$. En caso contrario, sin perdida de generalidad, supongamos que $\varphi(\mathcal{O}(z_1)) = \mathcal{O}(y_n)$, entonces $[\mathcal{O}(z_1)] = [\mathcal{O}(y_n)]$, además sin perdida de generalidad supongamos que $\mathcal{O}(z_1) = \varphi(\mathcal{O}(x_n))$, entonces $[\mathcal{O}(z_1)] = [\mathcal{O}(x_n)]$. Sean

$$\psi_1 = \varphi|_{\mathcal{O}(z_1)} : \mathcal{O}(z_1) \to \mathcal{O}(y_n)$$

$$\psi_2 = \varphi|_{\mathcal{O}(x_n)} : \mathcal{O}(x_n) \to \mathcal{O}(z_1)$$

$$\psi_3 = \varphi|_p : \bigcup_{i=1}^{n-1} \mathcal{O}(x_i) \to \bigcup_{i=1}^{n-1} \mathcal{O}(y_i)$$

donde $p = \bigcup_{i=1}^{n-1} \mathcal{O}(x_i)$ son isomorfismos de G-conjuntos. Notemos que $\psi_4 = \psi_1 \circ \psi_2$ es un isomorfismo de G-conjuntos.
Definimos $\psi : \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{O}(x_i) \to \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{O}(y_i)$ un isomorfismo de G-conjuntos, tal que:

$$x \mapsto \begin{cases} \psi_3(x) & si \quad x \in \bigcup_{i=1}^{n-1} \mathcal{O}(x_i) \\ \psi_4(x) & si \quad x \in \mathcal{O}(x_n). \end{cases}$$

Por tanto $[X] = [Y]$.

ii) Para $1 < l$ tenemos que $[X] + [Z] = [Y] + [Z]$ entonces

$$[X] + [\bigcup_{k=1}^{l+1} \mathcal{O}(z_k)] = [Y] + [\bigcup_{k=1}^{l+1} \mathcal{O}(z_k)].$$

Por la base de inducción podemos cancelar una órbita, obteniendo

$$[X] + [\bigcup_{k=1}^{l} \mathcal{O}(z_k)] = [Y] + [\bigcup_{k=1}^{l} \mathcal{O}(z_k)]$$

y aplicando la hípotesis de inducción podríamos cancelar l-órbitas, y así

$$[X] = [Y]$$

. ■

Observación 3.6. Sean $([X], [Y]), ([Z], [T]) \in B^+(G) \times B^+(G)$, entonces

$$([X], [Y]) \sim ([Z], [T])) \Leftrightarrow [X] + [T] = [Z] + [Y]$$

es una relación de equivalencia. Denotaremos a la clase de equivalencia de $([X], [Y]) \in B^+(G) \times B^+(G)$ por $[X] - [Y]$.

Definición 3.5. Definimos el Anillo de Burnside B(G) de un grupo finito G como:

$$B(G) = \frac{B^+(G) \times B^+(G)}{\sim} = \{[X] - [Y] : ([X], [Y]) \in B^+(G) \times B^+(G)\}$$

Con las siguientes operaciones

$$([X_1] - [Y_1]) + ([X_2] - [Y_2]) := ([X_1] + [X_2]) - ([Y_1] + [Y_2])$$

$$([X_1] - [Y_1])([X_2] - [Y_2]) := ([X_1][X_2] + [Y_1][Y_2]) - ([X_1][Y_2] + [X_2][Y_1])$$

Observación 3.7. $(B(G), +, \cdot)$ es un anillo conmutativo con uno, donde:
El neutro aditivo es:

$$[\emptyset] - [\emptyset] = [X] - [X]$$

para todo

$$X \in B^+(G)$$

El inverso aditivo de $[X] - [Y] \in B(G)$ es:

$$[Y] - [X]$$

En el producto la unidad es:

$$\left[\frac{G}{G}\right] - [\emptyset]$$

Observación 3.8. Existe una inclusión $i : B^+(G) \to B(G)$ tal que $[X] \mapsto [X] - [\emptyset]$

Lema 3.2. *Sea R un anillo con unidad y $\varphi : B^+(G) \to R$ una función tal que*

$$\left[\frac{G}{G}\right] \mapsto 1$$
$$[X] + [Y] \mapsto \varphi([X]) + \varphi([Y])$$
$$[X] \cdot [Y] \mapsto \varphi([X]) \cdot \varphi([Y])$$

entonces φ se extiende de forma única a $\widetilde{\varphi} : B(G) \to R$ un homomorfismo de anillos, es decir , $\widetilde{\varphi}|_{B^+(G)} = \varphi$

Demostración. Definimos $\widetilde{\varphi} : B(G) \to R$ de la siguiente forma

$$[X] - [Y] \mapsto \varphi([X]) - \varphi([Y])$$

Observemos que:

$$[\emptyset] \mapsto \varphi([\emptyset]) = 0$$
$$\left[\frac{G}{G}\right] - [\emptyset] \mapsto \varphi([1]) - \varphi([\emptyset]) = \varphi([1]) = 1$$

Sean $([X_1] - [Y_1]), ([X_2] - [Y_2]) \in B(G)$. Veamos que $\widetilde{\varphi}$ abre sumas:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\varphi}(([X_1] - [Y_1]) + ([X_2] - [Y_2])) &= \widetilde{\varphi}([X_1 \cup X_2] - [Y_1 \cup Y_2]) \\
&= \varphi([X_1 \cup X_2]) - \varphi([Y_1 \cup Y_2]) \\
&= (\varphi([X_1]) + \varphi([X_2])) - (\varphi([Y_1]) + \varphi([Y_2])) \\
&= \varphi([X_1]) + \varphi([X_2]) - \varphi([Y_1]) - \varphi([Y_2]) \\
&= \widetilde{\varphi}([X_1] - [Y_1]) + \widetilde{\varphi}([X_2] - [Y_2])
\end{aligned}$$

Por tanto $\widetilde{\varphi}$ abre sumas.
Ahora veamos que $\widetilde{\varphi}$ abre productos:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\varphi}(([X_1] - [Y_1])([X_2] - [Y_2])) &= \widetilde{\varphi}(([X_1][X_2] + [Y_1][Y_2]) - ([X_1][Y_2] + [X_2][Y_1])) \\
&= \varphi([X_1][X_2] + [Y_1][Y_2]) - \varphi([X_1][Y_2] + ([X_2][Y_1]) \\
&= \varphi([X_1])\varphi([X_2]) + \varphi([Y_1])\varphi([Y_2]) - \varphi([X_1])\varphi([Y_2]) - \varphi([X_2])\varphi([Y_1]) \\
&= (\varphi([X_1]) - \varphi([Y_1]))(\varphi([X_2]) - \varphi([Y_2])) \\
&= \widetilde{\varphi}([X_1] - [Y_1])\widetilde{\varphi}([X_2] - [Y_2]).
\end{aligned}$$

Por tanto $\widetilde{\varphi}$ abre productos.
Notemos que $\widetilde{\varphi}([X] - [\emptyset]) = \varphi([X]) - \varphi([\emptyset]) = \varphi([X]) - 0 = \varphi([X])$.
Por tanto $\widetilde{\varphi}|_{B^+(G)} = \varphi$.

Veamos ahora la unicidad. Sea $\psi : B(G) \to R$ un homomorfismo de anillos que extiende a φ, es decir , $\psi|_{B^+(G)} = \varphi$. Luego

$$\begin{aligned}
\psi([X] - [Y]) &= \psi([X] - [\emptyset]) + \psi(-([Y] - [\emptyset])) \\
&= \psi([X] - [\emptyset]) - \psi([Y] - [\emptyset]) \\
&= \varphi([X]) - \varphi([Y]) \\
&= \widetilde{\varphi}([X] - [Y]).
\end{aligned}$$

Por tanto $[X]-[Y]\in B(G)$, luego $\psi=\widetilde{\varphi}$.

■

Teorema 3.1. *Sea G un grupo finito y $B(G)$ su anillo de Burnside, entonces*

$$B(G)=\bigoplus_{[H]\in\mathscr{C}(G)}\mathbb{Z}\left[\frac{G}{H}\right]$$

donde $\mathscr{C}(G)$ es un conjunto completo de representantes de las clases de conjugación de los subgrupos de G, es decir, $B(G)$ es libre como $\mathbb{Z}$-modulo con base $\left(\frac{G}{H}\right)$ con $H\in\mathscr{C}(G)$.

Demostración. Sea G un grupo finito y $B^+(G)=\{[X]:X \text{ es un } G \text{ conjunto finito }\}$, donde $[X]$ es la clase de isomorfismo de un G-conjunto. Sabemos

$$X=\bigcup_{i=1}^{n}\mathcal{O}(x_i).$$

Además $\mathcal{O}(x_i)\cong\frac{G}{H_i}$ donde $H_i=Stab_G(x_i)$, entonces $X\cong\bigsqcup_{i=1}^{n}\left(\frac{G}{H_i}\right)$, luego

$$\begin{aligned}[X] &= \left[\bigsqcup_{i=1}^{n}\left(\frac{G}{H_i}\right)\right]\in B^+(G)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{G}{H_i}\right]\\ &= \sum_{H\in\mathscr{C}(G)}a_H\left[\frac{G}{H}\right]\end{aligned}$$

donde $a_H\in\mathbb{N}$ es el número de veces que se repite $\left[\frac{G}{H}\right]$. Por tanto

$$B^+(G)=\sum_{H\in\mathscr{C}(G)}\mathbb{N}\left[\frac{G}{H}\right]$$

Sin perdida de generalidad consideramos

$$B(G)=\sum_{[H]\in\mathscr{C}(G)}\mathbb{Z}\left[\frac{G}{H}\right]$$

es decir , todo elemento de $B(G)$ es de la forma $\alpha=\sum_{H\in\mathscr{C}(G)}a_H\left[\frac{G}{H}\right]$ donde $a_H\in\mathbb{Z}$ para cada $[H]\in\mathscr{C}(G)$. Por demostrar $B(G)=\bigoplus_{[H]\in\mathscr{C}(G)}\mathbb{Z}\left[\frac{G}{H}\right]$, para lo cual es suficiente con mostrar que la expresión de α es única.

Sin perdida de generalidad supongamos que $\sum_{H \in \mathscr{C}(G)} a_H \left[\frac{G}{H}\right] = [\emptyset]$.
Mostremosque $a_H = 0$ para todo $[H] \in \mathscr{C}(G)$.
Supongamos que no todos los a_H son cero. Luego

$$\begin{aligned} [\emptyset] &= \sum_{H \in \mathscr{C}(G)} a_H \left[\frac{G}{H}\right] \\ &= \sum_{a_K \geqslant 0} a_K \left[\frac{G}{K}\right] + \sum_{a_L \leqslant 0} a_L \left[\frac{G}{L}\right] \end{aligned}$$

con $a_H \in \mathbb{Z}$ para todo $[H] \in \mathscr{C}(G)$. Observemos que

$$Y = \sum_{a_K \geqslant 0} a_K \left[\frac{G}{K}\right] = \sum_{-a_L \geq 0} (-a_L) \left[\frac{G}{L}\right] = Z$$

Por tanto $Y = Z$ en $B^+(G)$

Supongamos ahora que $a_{K_0} \neq 0$ y supongamos que $Z = [\emptyset]$, entonces una órbita de $\emptyset$ es el G-conjunto transitivo $\frac{G}{K_0}$, lo cual contradice la definición de $\emptyset$, luego existe L tal que $-a_{L_0} \geqslant 0$. Sin perdida de generalidad tenemos que la órbita de $Y, \frac{G}{K_0}$ se corresponde con la órbita $\frac{G}{L_0}$ de Z, entonces

$$\left[\frac{G}{K_0}\right] = \left[\frac{G}{L_0}\right] \Leftrightarrow [K_0] = [L_0]$$

lo cual es una contradicción. Por tanto $a_H = 0$ para todo $H \in \mathscr{C}(G)$. Luego la expresión es única. Así

$$B(G) = \bigoplus_{[H] \in \mathscr{C}(G)} \mathbb{Z} \left[\frac{G}{H}\right]$$

■

Proposición 3.2. *Sean $H, K \leq G$. Existen biyecciones entre los siguientes 3 conjuntos:*

i) El conjunto de las G-órbitas de $\frac{G}{H} \times \frac{G}{K}$.

ii) El conjunto de las H-órbitas de $\frac{G}{K}$.

iii) El conjunto de las clases laterales dobles de G en $H - K$, de la forma HaK con $a \in G$.

Demostración. Notemos que $\frac{G}{K}$ es un G-conjunto con la acción $g(aK) = gaK$, entonces podemos ver $\frac{G}{K}$ como H-conjunto con la acción $h \cdot (aK) = haK$.

Primero, sea $aK \in \frac{G}{K}$ tal que $\mathcal{O}_H(aK) = HaK$, notemos que $\mathcal{O}_H(aK) = \mathcal{O}_H(bK)$ si solo si $HaK = HbK$, luego la biyeccion entre $ii)$ y $iii)$ es la siguiente:

$$\mathcal{O}_H(aK) \longleftrightarrow HaK$$

Ahora recordemos que $\frac{G}{H}$ y $\frac{G}{K}$ son G-conjuntos con las siguientes acciones $g \cdot aH = gaH$ y $g * bK = gbK$ respectivamente. Luego $\frac{G}{H} \times \frac{G}{K}$ es un G-conjunto con la acción

$$g(aH, bK) = (gaH, gbK)$$

Tomemos como asignación a

$$\mathcal{O}_G(aH, bK) \mapsto \mathcal{O}_H(a^{-1}bK)$$

Veamos que está bien definida dicha asignación. Supongamos $\mathcal{O}_G(aH, bK) = \mathcal{O}_G(cH, dK)$, luego existe $g \in G$ tal que $(aH, bK) = g(cH, dK) = (gcH, gdH)$ si y solo si $aH = gcH$ y $bK = gdK$, entonces $a = gch$ para algún $h \in H$ y $b = gdk$ para algún $k \in K$.

Mostremos que $\mathcal{O}_H(a^{-1}bK) = \mathcal{O}_H(c^{-1}dK)$. Notemos que $a^{-1}bK = (h^{-1}c^{-1}g^{-1})(gdk)K = h^{-1}(c^{-1}dK)$, luego como $h^{-1} \in H$ tenemos que $\mathcal{O}_H(a^{-1}bK) = \mathcal{O}_H(c^{-1}dK)$. Por tanto la asignación está bien definida.
Observemos ahora que

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_G(aH, bK) &= \mathcal{O}_G(a(eH, a^{-1}bK)) \\ &= \mathcal{O}_G(eH, a^{-1}bK) \\ &= \mathcal{O}_G(eH, cK) \quad \text{con} \quad c \in G \end{aligned}$$

Notemos que $\mathcal{O}_G(eH, cK) \longmapsto \mathcal{O}_H(cK)$ es sobre. Por otro lado si

$$\mathcal{O}_G(H, cK) \to \mathcal{O}_H(cK) \quad \text{y} \quad \mathcal{O}_G(H, dK) \to \mathcal{O}_H(cK)$$

entonces existe $h \in H$ tal que $cK = hdK$, luego

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_G(H, cK) &= \mathcal{O}_G(H, hdK) \\ &= \mathcal{O}_G(h(h^{-1}H, dK)) \\ &= \mathcal{O}_G(h(H, dK)) \\ &= \mathcal{O}_G(H, dK) \end{aligned}$$

Por tanto la asignación es inyectiva. Así hemos probado que la asignacion es biyección entre $i)$ y $ii)$.

$\blacksquare$

Proposición 3.3. *Sean $H, K \leq G$ subgrupos. Entonces*

$$Stab_G(aH, bK) = (aHa^{-1}) \cap (bKb^{-1})$$

Demostración. Sabemos que $\frac{G}{H} \times \frac{G}{K}$ es un G-conjunto con la acción $g(aH, bK) = (gaH, gbK)$.

$$\begin{aligned} \text{Sea} \quad x \in Stab_G(aH, bK) &\Leftrightarrow x(aH, bK) = (aH, bK) \\ &\Leftrightarrow xaH = aH \quad \text{y} \quad xbK = bK \\ &\Leftrightarrow a^{-1}xa \in H \quad \text{y} \quad b^{-1}xb \in K \\ &\Leftrightarrow x \in aHa^{-1} \quad \text{y} \quad x \in bKb^{-1} \\ &\Leftrightarrow x \in aHa^{-1} \cap bKb^{-1} \end{aligned}$$

■

Corolario 3.1. *Sea $\mathcal{R}$ un conjunto de representantes de las clases laterales dobles de la forma HgK con $g \in G$, entonces*

$$\frac{G}{H} \times \frac{G}{K} \cong \bigsqcup_{g \in \mathcal{R}} \left(\frac{G}{H \cap gKg^{-1}} \right)$$

Demostración. Sabemos que $\frac{G}{H} \times \frac{G}{K} = \bigcup_{g \in \mathcal{R}} \mathcal{O}_G(H, gK)$ y recordemos que cualquier órbita

$$\mathcal{O}_G(H, gK) \cong \frac{G}{Stab_G(H, gK)} = \frac{G}{H \cap gKg^{-1}}$$

Por tanto

$$\frac{G}{H} \times \frac{G}{K} \cong \bigsqcup_{g \in \mathcal{R}} \frac{G}{H \cap gKg^{-1}}$$

■

Observación 3.9. Del corolario anterior tenemos que

$$\left[\frac{G}{H} \times \frac{G}{K} \right] = \left[\bigsqcup_{g \in \mathcal{R}} \left(\frac{G}{H \cap gKg^{-1}} \right) \right]$$

Observación 3.10. Si $K \trianglelefteq G$, entonces $gKg^{-1} = K$ para todo $g \in G$ y

$$\left[\frac{G}{H} \right] \left[\frac{G}{K} \right] = |\mathcal{R}| \left[\frac{G}{H \cap K} \right]$$

Lema 3.3. *Sea* $\varphi : B^+(G) \to \prod_{[H] \in \mathscr{C}(G)} \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^{|\mathscr{C}(G)|}$ *tal que*

$$[X] \mapsto (\varphi_H(X))_{[H] \in \mathscr{C}(G)}$$

entonces φ es una función que manda el uno en el uno, abre sumas y productos. De aquí que, φ se extiende de manera única a un homomorfismo de anillos:

$$\widetilde{\varphi} : B(G) \to \mathbb{Z}^{|\mathscr{C}(G)|}$$

el cual es inyectivo.

Demostración. Recordemos que

$$\varphi_H(X \sqcup Y) = \varphi_H(X) + \varphi_H(Y) \quad (\star)$$

$$\varphi_H(X \times Y) = \varphi_H(X)\varphi_H(Y) \quad (\star\star)$$

$$\text{Si } [H] = [K] \text{ entonces } \varphi_H(X) = \varphi_K(X) \text{ para todo } X \in B^+(G) \quad (\star\star\star)$$

$$\varphi_H\left(\frac{G}{K}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si y solo si } [H] \nleq [K] \\ \neq 0 & \text{si y solo si } [H] \leq [K] \end{cases} \quad (\star\star\star\star)$$

Notemos que $\prod_{[H]\in\mathscr{C}(G)} \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^{|\mathscr{C}(G)|}$ es un anillo conmutativo con suma y producto entrada a entrada. Notemos que $(\star\star\star)$ implica que φ no depende de los representantes de $\mathscr{C}(G)$. Veamos que φ está bien definida.

Supongamos que $[X] = [Y]$, entonces existe $f : X \to Y$ isomorfismo de G-conjuntos. Sea $x \in X^H$ luego $hx = x$ para todo $h \in H$, entonces $hf(x) = f(hx) = f(x)$ para todo $h \in H$, entonces $f(x) \in Y^H$. Por tanto $f(X^H) \subseteq Y^H$.

Como f es un isomorfismo, se sigue que f^{-1} tambien lo es, luego $f^{-1}(Y^H) \subseteq X^H$. Por tanto $f|_{X^H} : X^H \to Y^H$ es una biyección, entonces $|X^H| = |Y^H|$ si y solo si $\varphi_H(X) = \varphi_H(Y)$ con $[H] \in \mathscr{C}(G)$, luego $\varphi(X) = (\varphi_H(X))_{[H]\in\mathscr{C}(G)} = (\varphi_H(Y))_{[H]\in\mathscr{C}(G)} = \varphi(Y)$. Por tanto φ está bien definida.
Notemos que $(\star)$ y $(\star\star)$ implican que φ abre sumas y productos respectivamente. Por otro lado recordemos que

$$1_{B(G)} = \left[\frac{G}{G}\right] \quad \text{y} \quad 1_{\mathbb{Z}^{|\mathscr{C}(G)|}} = \underbrace{(1, ..., 1)}_{|\mathscr{C}(G)|-\text{veces}}$$

Ahora para cada $H \leq G$ subgrupo, tenemos que $[H] \preccurlyeq [G]$, así $\varphi_H(\frac{G}{G}) \neq 0$, de donde $\varphi_H(\frac{G}{G}) = 1$. Por tanto $\varphi\left(\left[\frac{G}{G}\right]\right) = \left(\varphi_H\left(\frac{G}{G}\right)\right)_{H\in\mathscr{C}(G)} = \underbrace{(1, ..., 1)}_{|\mathscr{C}(G)|-veces}$.

Por el lema 4.2 φ se extiende de forma única a un homomorfismo de anillos, a saber

$$\widetilde{\varphi} : B(G) \to \prod_{[H]\in\mathscr{C}(G)} \mathbb{Z}$$

tal que

$$[X] - [Y] \mapsto \varphi([X]) - \varphi([Y]).$$

Veamos que $\widetilde{\varphi}$ es inyectiva.
Recordemos que $\widetilde{\varphi}$ es inyectiva si y solo si para cada $0 \neq a \in B(G)$, se tiene que $\widetilde{\varphi}(a) \neq 0$.
Sea $a \in B(G)$ tal que $a \neq 0$, así $a = \sum_{[H]\in\mathscr{C}(G)} a_H \left[\frac{G}{H}\right] \in B(G)$ con $a_H \in \mathbb{Z}$, donde no todos los a_H son cero. Dado que G es finito, toda cadena estrictamente creciente

$[K_1] < [K_2] < \ldots < [K_r]$ se estaciona. Sea $[K']$ máximo con respecto a este orden tal que $a_{K'} \neq 0$. Luego, $\widetilde{\varphi}$ es un homomorfismo de anillos que extiende a φ, por lo que

$$\begin{aligned}
\widetilde{\varphi} &= \sum_{[H]\in\mathscr{C}(G)} a_H \widetilde{\varphi}\left[\frac{G}{H}\right] \\
&= \sum_{[H]\in\mathscr{C}(G)} a_H \varphi\left(\left[\frac{G}{H}\right]\right) \\
&= \sum_{[H]\in\mathscr{C}(G)} a_H \left(\varphi_K \left[\frac{G}{H}\right]\right)_{[K]\in\mathscr{C}(G)} \\
&= \left(\sum_{[H]\in\mathscr{C}(G)} a_H \varphi_K \left[\frac{G}{H}\right]\right)_{[K]\in\mathscr{C}(G)}
\end{aligned}$$

Es suficiente ver que una entrada de $\widetilde{\varphi}(a)$ es no cero. Ahora por $(\star\star\star\star)$ tenemos que $\varphi_{K'}\left(\left[\frac{G}{H}\right]\right) = 0$ siempre que $[K'] \nleq [H]$ y $\varphi_{K'}\left(\left[\frac{G}{H}\right]\right) \neq 0$ siempre que $[K'] \leq [H]$, entonces la entrada $[K']$-ésima de $\widetilde{\varphi}(a)$ es

$$\sum_{[H]\in\mathscr{C}(G)} a_H \varphi_{K'}\left[\frac{G}{H}\right] = a_K \varphi_{K'}\left(\left[\frac{G}{K'}\right]\right) \neq 0$$

Por lo tanto $\widetilde{\varphi}(a) \neq 0$. Así $\widetilde{\varphi}(a)$ es un homomorfismo inyectivo de anillos.

■

Corolario 3.2. *Sean* $[X], [Y] \in B(G)$, *entonces* $[X] = [Y]$ *si y solo si* $\varphi_H(X) = \varphi_H(Y)$ *para todo* $H \in \mathscr{C}(G)$

Demostración. La prueba de este resultado se sigue de la buena definición y la inyectividad de φ del lema anterior. ■

Definición 3.6. Sea p-primo, definimos:

$$B_p(G) = \bigoplus_{[H]\in\mathscr{C}(G)} \mathbb{Z}_p \left[\frac{G}{H}\right]$$

y

$$\widetilde{B}_p(G) = \prod_{[H]\in\mathscr{C}(G} \mathbb{Z}_p$$

donde $\mathbb{Z}_p$ son los enteros p-ádicos.[Ver apéndice A]

Observación 3.11. Sea $\varphi : B_p(G) \to \widetilde{B}_p(G)$ tal que

$$[X] \mapsto (\varphi_H(X))_{[H]\in\mathscr{C}(G)}$$

φ es un homomorfismo inyectivo de anillos.

Ejemplo 3.2. Sea $n \in \mathbb{N}$ y $B_p(C_{p^n})$ el anillo de Burnside de un grupo cíclico de orden p^n. Notemos que la familia de las clases de conjugación de los subgrupos de $C_{p^n} =< a >$ es:

$$\mathscr{C}(C_{p^n}) = \left\{ \{1\} = \left\langle a^{p^n} \right\rangle, \left\langle a^{p^{n-1}} \right\rangle, \ldots, \langle a^p \rangle, \langle a \rangle \right\}$$

donde una base para $B_p(C_{p^n})$ es:

$$\left\{ a_1 = \frac{C_{p^n}}{\langle a^{p^n} \rangle}, a_2 = \frac{C_{p^n}}{\langle a^{p^{n-1}} \rangle}, \ldots, a_n = \frac{C_{p^n}}{\langle a^p \rangle}, a_{n+1} = \frac{C_{p^n}}{\langle a \rangle} \right\}$$

luego,

$$B_p(C_{p^n}) = \bigoplus_{i=1}^{n+1} \mathbb{Z}_p a_i$$

Además, $\widetilde{B}_p(C_{p^n}) = \mathbb{Z}_p^{(n+1)}$.

Por otra parte, sabemos que:

$$\varphi_H \left\{ \frac{C_{p^n}}{K} \right\} = \begin{cases} \left| \frac{C_{p^n}}{K} \right| & \text{para } \ H \subseteq K \\ 0 \ \ \text{para} & H \nsubseteq K \end{cases}$$

entonces, tenemos que el homomorfismo φ induce la siguiente inclusión:

$$\varphi : B_p(C_{p^n}) \hookrightarrow \mathbb{Z}^{(n+1)}$$

tal que

$$X \mapsto (\varphi_H(X))_{[H] \in \mathscr{C}(C_{p^n})}$$

Por tanto

$$B_p(C_{p^4}) \to \mathbb{Z}_p^5$$

tal que

$$\begin{array}{rcl} a_1 & \mapsto & (1, 1, 1, 1, 1) \\ a_2 & \mapsto & (0, p, p, p, p) \\ a_3 & \mapsto & (0, 0, p^2, p^2, p^2) \\ a_4 & \mapsto & (0, 0, 0, p^3, p^3) \\ a_5 & \mapsto & (0, 0, 0, 0, p^4) \end{array}$$

Capítulo 4

Ideales de un Producto Fibrado

Definición 4.1. El siguiente es un diagrama de Producto Fibrado

$$\begin{tikzcd}
(a_1, a_2) \arrow[rrr, dashed] \arrow[ddd, dashed] & & & a_2 \arrow[ddd, dashed] \\
& A \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "f_1"'] & A_2 \arrow[d, "g_2"] & \\
& A_1 \arrow[r, "g_1"'] & \bar{A} & \\
a_1 \arrow[rrr, dashed] & & & g_1(a_1) = g_2(a_2)
\end{tikzcd}$$

donde $A, A_1, A_2, \bar{A}$ son anillos conmutativos con unidad y f_1, f_2, g_1, g_2 son homomorfismos sobreyectivos de anillos, es decir ,

$$A = \{(a_1, a_2) \in A_1 \times A_2 : g_1(a_1) = g_2(a_2)\}$$

Observación 4.1. Veamos como caracterizar $I \leq A$, en el caso de que A_2 es un D.I.P.
Sea $I \leq A$ un ideal e $I_j = f_j(I)$ para $j = 1, 2$
Veamos que $I_2 \leq A_2$. Observemos que $f_2(0_A) = 0_{A_2} \in I_2$. Por otro lado sean $x, y \in I_2$, entonces existen $a, b \in I$ tales que $f_2(a) = x$ y $f_2(b) = y$, luego $x + y = f_2(a) + f_2(b) = f_2(a + b) \in I_2$. Por tanto $x + y \in I_2$. Por último sean $x \in I_2, a \in I$ tal que $f_2(a) = x$ y sea $z \in A_2$. Como f_2 es sobre, existe $c \in A$ tal que $f_2(c) = z$, luego $zx = f_2(c)f_2(a) = f_2(ca) \in I_2$. Así, $I_2 \leq A_2$. Analogamente $I_1 \leq A_1$.
Ahora, como A_2 es un D.I.P, entonces existe $\beta \in A_2$ tal que $I_2 = \beta A_2$, luego como f_2 es sobre, existe $\alpha \in A_1$ tal que $(\alpha, \beta) \in I \leq A$ y $f_2(\alpha, \beta) = \beta$
Observemos que como es un producto fibrado tenemos

$$g_1(\alpha) = g_2(\beta)$$

Ahora sea $(x, y) \in I$, entonces $y = f_2(x, y) \in I_2$, entonces existe $b_2 \in A_2$ tal que $y = \beta b_2$, como f_2 es sobre existe $b_1 \in A_1$ tal que $f_2(b_1, b_2) = b_2$. Además $(\alpha, \beta)(b_1, b_2) = (\alpha b_1, \beta b_2) \in I$ y $(x, y) = (x, \beta b_2) \in I$, de donde $(x - \alpha b_1, 0) \in I$.
Definimos $J = \{\gamma \in A_1 : (\gamma, 0) \in I\} \leq A_1$. Veamos que J es un ideal. Notemos que $0_A = (0_{A_1}, 0_{A_2}) \in I$, entonces $0_{A_1} \in J$. Por otro lado sean $\gamma_1, \gamma_2 \in J$, luego $(\gamma_1, 0), (\gamma_2, 0) \in I$, pero I es un ideal, entonces $(\gamma_1, 0) + (\gamma_2, 0) = (\gamma_1 + \gamma_2, 0)$, así $\gamma_1 + \gamma_2 \in J$. Por último, sea $\gamma \in J$ y $w_1 \in A_1$, luego $(\gamma, 0) \in I$. Como f_1 es sobre tenemos que existe $(w_1, w_2) \in A$ y $f_1(w_1, w_2) = w_1$ con $w_2 \in A_2$. Ahora como I es un ideal tenemos que $(w_1, w_2)(\gamma, 0) = (w_1\gamma, 0) \in I$, así $w_1\gamma \in J$.

Por lo anterior tenemos que existe $\gamma \in J$ tal que $x - \alpha b_1 = \gamma$ entonces $x = \alpha b_1 + \gamma$ con $\gamma \in J$. Por tanto $(x, y) = (\alpha b_1 + \gamma, \beta b_2) = (\alpha, \beta)(b_1, b_2) + (\gamma, 0)$. Así $I \subseteq (\alpha, \beta)A + (J, 0) \subseteq I$, de donde es claro que se da la igualdad, $I = (\alpha, \beta)A + (J, 0)$

Proposición 4.1. *(Caracterización) Si A_2 es un D.I.P e $I \leq A$ es un ideal, entonces*

$$I = (\alpha, \beta)A + (J, 0)$$

donde:

i) *$J \leq A_1$ es un ideal tal que $g_1(J) = 0$*

ii) *$\beta \in A_2$ es el generador del ideal principal βA_2*

iii) *$\alpha \in A_1$ es tal que $g_1(\alpha) = g_2(\beta)$ y α es único (mód J)*

iv) *Si $D = \{(a_1, a_2) \in A : a_2\beta = 0\}$, entonces $a_1\alpha \in J$ para todo $(a_1, a_2) \in D$, esto es, $f_1(D)\alpha \subseteq J$.*

Demostración. (Unicidad de α) Sea $(\alpha, \beta) \in I$ y supongamos que $(\alpha', \beta) \in I$, entonces $(\alpha' - \alpha, 0) \in I$ luego $\alpha' - \alpha \in J$ si y solo si $\alpha' + J = \alpha + J$. Así α es único (mód J).
Para *iv)* observemos que si $(a_1, a_2) \in D \subseteq$ y $(\alpha, \beta) \in I$, entonces $(a_1, a_2)(\alpha, \beta) \in I$, i.e, $(a_1\alpha, a_2\beta) = (a_1\alpha, 0)$, entonces $a_1\alpha \in J$. Por tanto $f_1(D)\alpha \subseteq J$ ■

Ejemplo 4.1. (Caracterización de $B_p(C_{p^n}) \subseteq \mathbb{Z}_p^{n+1}$). Consideremos a $C_{p^n} =< a >$ donde a es de orden p^n, y

$$\mathscr{C}(C_{p^n}) = \{H_0 =< a >, H_1 =< a^p >, H_2 =< a^{p^2} >, \ldots, H_n =< a^{p^n} >\}$$

y sea $a_i = \frac{C_{p^n}}{H_i}$ para $i = 0, 1, \ldots, n$, entonces

$$B_p(C_{p^n}) = \bigoplus_{i=0}^{n} \mathbb{Z}_p a_i$$

luego, tenemos que el φ induce la siguiente inclusión:

$$B_p(C_{p^n}) \to \mathbb{Z}_p^{n+1}$$

tal que

$$X \mapsto (\varphi_{H_0}(X), \varphi_{H_1}(X), \dots, \varphi_{H_n}(X))$$

Recordar que C_{p^n} es abeliano entonces

$$\varphi_H\left(\frac{C_{p^n}}{K}\right) = \begin{cases} \left|\frac{C_{p^n}}{K}\right| & \text{para } \ H \subseteq K \\ 0 \ \ \text{para} & H \not\subseteq K \end{cases}$$

luego

$$a_0 = \frac{C_{p^n}}{H_0} \longmapsto (1, 1, \dots, 1)$$
$$a_1 = \frac{C_{p^n}}{H_1} \longmapsto (0, p, \dots, p)$$
$$a_2 = \frac{C_{p^n}}{H_2} \longmapsto (0, 0, p^2, \dots, p^2)$$
$$\vdots$$
$$a_n = \frac{C_{p^n}}{H_n} \longmapsto (0, 0, \dots, p^n)$$

Por lo que podemos considerar a $B_p(C_{p^n})$ en $\mathbb{Z}_p^{n+1}$ como sigue:

$$B_p(C_{p^n}) = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}_p^{n+1} : x_i - x_{i-1} \in p^i\mathbb{Z}_p \ \text{ con } \ i = 1, 2, \dots, n\}$$

O equivalentemente

$$B_p(C_{p^n}) = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}_p^{n+1} : x_n - x_{i-1} \in p^i\mathbb{Z}_p \ \text{ con } \ i = 1, 2, \dots, n\}$$

Denotemos por

$$B_n = B_p(C_{p^n}) = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}_p^{n+1} : x_i - x_{i-1} \in p^i\mathbb{Z}_p \ \text{ con } \ i = 1, 2, \dots, n\}$$

Luego su diagrama de producto fibrado sería:

$$\begin{tikzcd}
(x_0, \dots, x_n) \arrow[rrr, dashed] \arrow[ddd, dashed] & & & x_n \arrow[ddd, dashed] \\
& B_n \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "f_1"'] & \mathbb{Z}_p \arrow[d, "g_2"] & \\
& B_{n-1} \arrow[r, "g_1"'] & \frac{\mathbb{Z}_p}{p^n\mathbb{Z}_p} & \\
(x_0, \dots, x_{n-1}) \arrow[rrr, dashed] & & & \bar{x}_{n-1} = \bar{x}_n
\end{tikzcd}$$

donde $\bar{x} = x + p^n\mathbb{Z}_p \in \frac{\mathbb{Z}_p}{p^n\mathbb{Z}_p}$
Notemos que $\mathbb{Z}_p$ es un D.I.P, es decir , todos sus ideales son principales, de hecho son de la forma:

$$p^t\mathbb{Z}_p \text{ con } 0 \leq t \in \mathbb{Z}$$

Veamos ahora su caracterización:
Si $I \leq B_n$, entonces $I = (\alpha, p^t)B_n + (\mathcal{J}, 0)$ donde

i) $\mathcal{J} \leq B_{n-1}$ tal que $g_1(\mathcal{J}) = \bar{0}$

ii) $\alpha \in B_{n-1}$ tal que $g_1(\alpha) \equiv p^t mod(p^n\mathbb{Z}_p)$ donde $0 \leq t \in \mathbb{Z}$ y α es único $mod\mathcal{J}$.

iii) $D = p\mathbb{Z}_p \times p^2\mathbb{Z}_p \times \cdots \times p^n\mathbb{Z}_p \times \{0\}$.
ya que

$$D = \{(x_0, \ldots, x_n) \in B_n : x_n p^t = 0\} = \{(x_0, \ldots, x_n) \in B_n : x_n = 0\}$$

y de la caracterizacion

$$B_n = \{(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}_p^{n+1} : x_n - x_j \in p^{j+1}\mathbb{Z}_p \text{ con } j = 0, \ldots, n-1\}$$

obtenemos: $x_j \in p^{j+1}\mathbb{Z}_p$ para cada $j = 0, \ldots, n-1$

iv) Consideremos $(p\mathbb{Z}_p \times p^2\mathbb{Z}_p \times \ldots \times p^n\mathbb{Z}_p)\alpha \in \mathcal{J}$ de donde

$$\begin{array}{rcl} (p, 0, \ldots, 0)\alpha & \in & \mathcal{J} \\ (0, p^2, 0, \ldots, 0)\alpha & \in & \mathcal{J} \\ & \vdots & \\ (0, 0, \ldots, 0, p^n)\alpha & \in & \mathcal{J} \end{array}$$

Notemos que $D = \langle (p, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, \ldots, 0, p^n, 0) \rangle$ como $\mathbb{Z}_p$ módulo.

Capítulo 5

Algunos Ideales de Índice Finito en el Anillo de Burnside $B_p(C_{p^4})$

En este trabajo nos concentraremos en el estudio de

$$\mathcal{J} = M_{24} = (p^{m_1}, p^{m_2}, p^{m_3}, p^{m_4})\mathbb{Z}_p^4 \leq B_p(C_{p^3})$$

donde $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3, m_4 \geq 3$.

Sea

$$B_p(C_{p^4}) = \{(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_1 - x_0 \in p\mathbb{Z}_p, x_2 - x_1 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_3 - x_2 \in p^3\mathbb{Z}_p, x_4 - x_3 \in p^4\mathbb{Z}_p\}$$

donde su diagrama de producto fibrado es como sigue:

$$\begin{tikzcd}
(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) \arrow[rrr, dashed] \arrow[ddd, dashed] & & & x_4 \arrow[ddd, dashed] \\
& B_p(C_{p^4}) \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "f_1"'] & \mathbb{Z}_p \arrow[d, "g_2"] & \\
& B_p(C_{p^3}) \arrow[r, "g_1"'] & \frac{\mathbb{Z}_p}{p^4\mathbb{Z}_p} & \\
(x_0, x_1, x_2, x_3) \arrow[rrr, dashed] & & & \bar{x}_3 = \bar{x}_4
\end{tikzcd}$$

Notemos que del diagrama anterior los ideales de $B_p(C_{p^4})$ son de la forma

$$I = (\alpha, p^t)B_p(C_{p^4}) + (\mathcal{J}, 0) \text{ con } t \geq 0$$

donde

i) $g_1(\mathcal{J}) = 0$

ii) $\alpha \in B_p(C_{p^3})$ tal que
$(p, 0, 0, 0)\alpha \in \mathcal{J}$
$(0, p^2, 0, 0)\alpha \in \mathcal{J}$
$(0, 0, p^3, 0)\alpha \in \mathcal{J}$
$(0, 0, 0, p^4)\alpha \in \mathcal{J}$

iii) α es único modulo $\mathcal{J}$

iv) $g_1(\alpha) \equiv p^t(\text{mód} p^4\mathbb{Z}_p)$

v) $t = 0, 1, 2, 3$ y $t \geq 4$

De la condicion $g_1(\mathcal{J}) = 0$ se obtiene que $p^{m_4} = 0$ mód $p^4\mathbb{Z}_p$, luego $m_4 \geq 4$. Ahora sea $\alpha = (x_0, x_1, x_2, x_3) \in B_p(C_{p^3})$ tal que

$$(p, 0, 0, 0)\alpha = (px_0, 0, 0, 0) \in \mathcal{J}$$

$$(0, p^2, 0, 0)\alpha = (0, p^2x_1, 0, 0) \in \mathcal{J}$$

$$(0, 0, p^3, 0)\alpha = (0, 0, p^3x_2, 0) \in \mathcal{J}$$

$$(0, 0, 0, p^4)\alpha = (0, 0, 0, p^4x_3) \in \mathcal{J}$$

Esto implica

$$\begin{array}{lcl} px_0 \in p^{m_1}\mathbb{Z}_p & \Rightarrow & x_0 = p^{m_1-1}x_0' \\ p^2x_1 \in p^{m_2}\mathbb{Z}_p & \Rightarrow & x_1 = p^{m_2-2}x_1' \\ p^3x_2 \in p^{m_3}\mathbb{Z}_p & \Rightarrow & x_2 = p^{m_3-3}x_2' \\ p^4x_3 \in p^{m_4}\mathbb{Z}_p & \Rightarrow & x_3 = p^{m_4-4}x_3' \end{array}$$

con $x_i' \in \mathbb{Z}_p$ para $i = 0, 1, 2, 3$. Por tanto

$$\alpha = (p^{m_1-1}x_0', p^{m_2-2}x_1', p^{m_3-3}x_2', p^{m_4-4}x_3')$$

Además

$$\begin{array}{lcl} x_0' & = & s_0 + px_0'' \\ x_1' & = & s_1 + ps_2 + p^2x_1'' \\ x_2' & = & s_3 + ps_4 + p^2s_5 + p^3x_2'' \\ x_3' & = & s_6 + ps_7 + p^2s_8 + p^3s_9 + p^4x_3'' \end{array}$$

con $x_i'' \in \mathbb{Z}_p$ para $i = 0, 1, 2, 3$. Por tanto
$\alpha = (p^{m_1-1}s_0, p^{m_2-2}(s_1 + ps_2), p^{m_3-3}(s_3 + ps_4 + p^2s_5), p^{m_4-4}(s_6 + ps_7 + p^2s_8 + p^3s_9)) +$
$(p^{m_1}x_0'', p^{m_2}x_1'', p^{m_3}x_2'', p^{m_4}x_3'')$

Notemos que el elemento $(p^{m_1}x_0'', p^{m_2}x_1'', p^{m_3}x_2'', p^{m_4}x_3'') \in \mathcal{J}$ y dado que α es único módulo $\mathcal{J}$ sin perdida de generalidad consideremos

$$\alpha = (p^{m_1-1}s_0, p^{m_2-2}(s_1+ps_2), p^{m_3-3}(s_3+ps_4+p^2s_5), p^{m_4-4}(s_6+ps_7+p^2s_8+p^3s_9))$$

Solo falta estudiar $g_1(\alpha) \equiv p^t(\text{mód} p^4\mathbb{Z}_p)$ y $\alpha \in B_p(C_{p^3})$. Por tanto

$$I = (\alpha, p^t)B_p(C_{p^4}) + (p^{m_1}\mathbb{Z}_p \times p^{m_2}\mathbb{Z}_p \times p^{m_3}\mathbb{Z}_p \times p^{m_4}\mathbb{Z}_p \times \{0\})$$

Veamos el caso cuando $t = 0$.

$$p^{m_4-4}(s_6+ps_7+p^2s_8+p^3s_9) = 1 \text{ mód } p^4\mathbb{Z}_p$$

donde $m_4 \geq 4$ de aquí que $m_4 = 4$. Luego $s_7 = s_8 = s_9 = 0$ y $s_6 = 1$. Luego

$$p^{m_3-3}(s_3+ps_4+p^2s_5) = 1 \text{ mód } p^3\mathbb{Z}_p$$

de aquí que $m_3 = 3$ y $s_4 = s_5 = 0$, entonces $s_3 = 1$. Ahora

$$p^{m_2-2}(s_1+ps_2) = 1 \text{ mód } p^2\mathbb{Z}_p$$

de aquí que $m_2 = 2$ y $s_2 = 0$, entonces $s_1 = 1$. Para

$$p^{m_1-1}(s_0) = 1 \text{ mód } p\mathbb{Z}_p$$

de aquí que $m_1 = 1$ y $s_0 = 1$.
Por tanto si $t = 0$, entonces $\alpha = (1,1,1,1)$ lo cual implica que

$$\mathbf{I} = (1,1,1,1,1)B_p(C_{p^4}) + (p\mathbb{Z}_p \times p^2\mathbb{Z}_p \times p^3\mathbb{Z}_p \times p^4\mathbb{Z}_p \times \{0\}) = B_p(C_{p^4})$$

Veamos el caso donde $t = 1$

$$p^{m_4-4}(s_6+ps_7+p^2s_8+p^3s_9) = p \text{ mód } p^4\mathbb{Z}_p$$

esto implica que $m_4 = 4, 5$.

Caso I $m_4 = 4$

$$s_6+ps_7+p^2s_8+p^3s_9 = p \text{ mód } p^4\mathbb{Z}_p$$

de aquí que $s_6 = s_8 = s_9 = 0$ entonces $s_7 = 1$. Luego

$$p^{m_3-3}(s_3+ps_4+p^2s_5) = p \text{ mód } p^3\mathbb{Z}_p$$

de aquí que $m_3 = 3, 4$.

Caso I.1 $m_3 = 3$

$$s_3 + ps_4 + p^2 s_5 = p \text{ mód } p^3\mathbb{Z}_p$$

de aquí que $s_3 = s_5 = 0$ y $s_4 = 1$. Ahora

$$p^{m_2-2}(s_1 + ps_2) = p \text{ mód } p^2\mathbb{Z}_p$$

de aquí que $m_2 = 2, 3$

Caso I.1.1 $m_2 = 2$

$$s_1 + ps_2 = p \text{ mód } p^2\mathbb{Z}_p$$

de aquí que $s_1 = 0$ y $s_2 = 1$, luego

$$p^{m_1-1}s_0 = 0 \text{ mód } p\mathbb{Z}_p$$

de donde obtenemos los siguientes casos:

($\star$) si $s_0 = 0$ y $m_1 \geq 1$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathbf{I} &= (0,p,p,p,p)B_p(C_{p^4}) + (p^{m_1}\mathbb{Z}_p \times p^2\mathbb{Z}_p \times p^3\mathbb{Z}_p \times p^4\mathbb{Z}_p \times \{0\}) \\
&= (p^{m_1},p,p,p,p)[B_p(C_p^4) + (\mathbb{Z}_p \times p\mathbb{Z}_p \times p^2\mathbb{Z}_p \times p^3\mathbb{Z}_p \times \{0\}) \\
&= (p^{m_1},p,p,p,p)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5 - u_2 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5 - u_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}
\end{aligned}$$

ya que:

$$\begin{aligned}
u_1 &= x_0 + z_0 \\
u_2 &= x_0 + pz_1 \\
u_3 &= x_0 + px_1 + p^2 z_2 \\
u_4 &= x_0 + px_1 + p^2 x_2 + p^3 z_3 \\
u_5 &= x_0 + px_1 + p^2 x_2 + p^3 x_3 + p^4 x_4
\end{aligned}$$

($\star\star$) si $s_0 \in F_p^*$ y $m_2 \geq 2$, entonces

$$\mathbf{I} = (p^{m_1-1}s_0,p,p,p,p)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5 - u_1, u_5 - u_2 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5 - u_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$$

ya que:

$$\begin{aligned}
u_1 &= x_0 + pz_0 \\
u_2 &= x_0 + pz_1 \\
u_3 &= x_0 + px_1 + p^2 z_2 \\
u_4 &= x_0 + px_1 + p^2 x_2 + p^3 z_3 \\
u_5 &= x_0 + px_1 + p^2 x_2 + p^3 x_3 + p^4 x_4
\end{aligned}$$

Caso I.1.2 $m_2 = 3$

$$p(s_1 + ps_2) = p \text{ mód } p^2\mathbb{Z}_p$$

luego $s_1 = 1$ y $s_2 \in F_p = \{0, 1, \dots, p-1\}$, en consecuencia

$$p^{m_1-1}s_0 = (p + p^2 s_2) \text{ mód } p\mathbb{Z}_p$$

i.e

$$p^{m_1-1}s_0 = 0 \text{ mód } p\mathbb{Z}_p$$

de aquí que:

($\star$) si $s_0 = 0$, entonces $m_1 \geq 1$, luego $\alpha = (0, p(1+ps_2), p, p)$, así

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{I} & = & (p^{m_1}, p(1+ps_2), p, p, p)[(0,1,1,1,1)B_p(C_{p^4}) + (\mathbb{Z}_p \times p^2\mathbb{Z}_p \times p^2\mathbb{Z}_p \times p^3\mathbb{Z}_p \times \{0\})] \\ & = & (p^{m_1}, p(1+ps_2), p, p, p)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5 - u_2, u_5 - u_3 \in p^2\mathbb{Z}, u_5 - u_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\} \end{array}$$

ya que:

$$\begin{array}{rcl} u_1 & = & z_0 \\ u_2 & = & x_0 + px_1 + p^2 z_1 \\ u_3 & = & x_0 + px_1 + p^2 x_2 + p^2 z_2 \\ u_4 & = & x_0 + px_1 + p^2 x_2 + p^3 x_3 + p^3 z_3 \\ u_5 & = & x_0 + px_1 + p^2 x_2 + p^3 x_3 + p^4 x_4 \end{array}$$

($\star\star$) si $s_0 \in F_p^*$, entonces $m_1 \geq 2$, luego $\alpha = (p^{m_1-1}s_0, p(1+ps_2), p, p)$, así

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{I} & = & (p^{m_1-1}s_0, p(1+ps_2), p, p, p)[(1,1,1,1,1)B_p(C_{p^4}) + (p\mathbb{Z}_p \times p^2\mathbb{Z}_p \times p^2\mathbb{Z}_p \times p^3\mathbb{Z}_p \times \{0\})] \\ & = & (p^{m_1-1}s_0, p(1+ps_2), p, p, p)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5 - u_1 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_2, u_5 - u_3 \in p^2\mathbb{Z}, u_5 - u_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\} \end{array}$$

ya que:

$$\begin{array}{rcl} u_1 & = & x_0 + pz_0 \\ u_2 & = & x_0 + px_1 + p^2 z_1 \\ u_3 & = & x_0 + px_1 + p^2 x_2 + p^2 z_2 \\ u_4 & = & x_0 + px_1 + p^2 x_2 + p^3 x_3 + p^3 z_3 \\ u_5 & = & x_0 + px_1 + p^2 x_2 + p^3 x_3 + p^4 x_4 \end{array}$$

Caso I.2 $m_3 = 4$

$$p(s_3 + ps_4 + p^2 s_5) = p \text{ mód } p^3\mathbb{Z}_p$$

de aquí que $s_4 = 0, s_5 \in F_p$ y $s_3 = 1$

$$p^{m_2-2}(s_1 + ps_2) = p \text{ mód } p^2\mathbb{Z}_p$$

de aquí $m_2 = 2, 3$.

Caso I.2.1 $m_2 = 2$

$$s_1 + ps_2 = p \text{ mód } p^2\mathbb{Z}_p$$

de aquí $s_1 = 0$ y $s_2 = 1$

$$p^{m_1-1}s_0 = 0 \text{ mód } p\mathbb{Z}_p$$

entonces tendríamos los siguientes casos:

($\star$) si $s_0 = 0$, entonces $m_1 \geq 1$. Así

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{I} & = & (0, p, p(1+p^2s_5), p, p)B_p(C_{p^4}) + (p^{m_1}\mathbb{Z}_p \times p^2\mathbb{Z}_p \times p^4\mathbb{Z}_p \times p^4\mathbb{Z}_p \times \{0\}) \\ & = & (p^{m_1}, p, p(1+p^2s_5), p, p)[B_p(C_{p^4}) + (\mathbb{Z}_p \times p\mathbb{Z}_p \times p^3\mathbb{Z}_p \times p^3\mathbb{Z}_p \times \{0\})] \\ & = & (p^{m_1}, p, p(1+p^2s_5), p, p)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5 - u_2 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_3, u_5 - u_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\} \end{array}$$

con $s_5 \in F_p, m_1 \geq 1$

ya que:

$$\begin{array}{rcl} u_1 & = & z_0 \\ u_2 & = & x_0 + px_1 + pz_1 \\ u_3 & = & x_0 + px_1 + p^2x_2 + p^3z_2 \\ u_4 & = & x_0 + px_1 + p^2x_2 + p^3x_3 + p^3z_3 \\ u_5 & = & x_0 + px_1 + p^2x_2 + p^3x_3 + p^4x_4 \end{array}$$

($\star\star$) si $s_0 \in F_p^*, m_1 \geq 2$. Así

$$\mathbf{I} = (p^{m_1-1}s_0, p, p(1+p^2s_5), p, p)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5-u_1, u_5-u_2 \in p\mathbb{Z}_p, u_5-u_3, u_5-u_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$$

con $s_5 \in F_p$

ya que:

$$\begin{array}{rcl} u_1 & = & x_0 + pz_0 \\ u_2 & = & x_0 + px_1 + pz_1 \\ u_3 & = & x_0 + px_1 + p^2x_2 + p^3z_2 \\ u_4 & = & x_0 + px_1 + p^2x_2 + p^3x_3 + p^3z_3 \\ u_5 & = & x_0 + px_1 + p^2x_2 + p^3x_3 + p^4x_4 \end{array}$$

Caso I.2.2 $m_2 = 3$

$$p(s_1 + ps_2) = p \text{ mód } p^2\mathbb{Z}_p$$

de aquí $s_1 = 1, s_2 \in F_p$

$$p^{m_1-1}s_0 = 0 \text{ mód } p\mathbb{Z}_p$$

entonces tendríamos los siguientes casos:

($\star$) si $s_0 = 0$, entonces $m_1 \geq 1$. Así

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{I} & = & (0, p(1+ps_2), p(1+p^2s_5), p, p)B_p(C_{p^4}) + (p^{m_1}\mathbb{Z}_p \times p^3\mathbb{Z}_p \times p^4\mathbb{Z}_p \times p^4\mathbb{Z}_p \times \{0\}) \\ & = & (p^{m_1}, p(1+ps_2), p(1+p^2s_5), p, p)[B_p(C_{p^4}) + (\mathbb{Z}_p \times p^2\mathbb{Z}_p \times p^3\mathbb{Z}_p \times p^3\mathbb{Z}_p \times \{0\})] \\ & = & (p^{m_1}, p(1+ps_2), p(1+p^2s_5), p, p)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5 - u_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5 - u_3, u_5 - u_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\} \end{array}$$

con $s_2, s_5 \in F_p$

ya que:

$$\begin{array}{rcl} u_1 & = & z_0 \\ u_2 & = & x_0 + px_1 + p^2 z_1 \\ u_3 & = & x_0 + px_1 + p^2 x_2 + p^3 z_2 \\ u_4 & = & x_0 + px_1 + p^2 x_2 + p^3 x_3 + p^3 z_3 \\ u_5 & = & x_0 + px_1 + p^2 x_2 + p^3 x_3 + p^4 x_4 \end{array}$$

$(\star\star)$ si $s_0 \in F_p^*$ entonces $m_1 \geq 2$

$$\mathbf{I} = (p^{m_1-1}s_0, p(1+ps_2), p(1+p^2 s_5), p, p)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5 - u_1 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5 - u_3, u_5 - u_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$$

con $s_2, s_5 \in F_p$

ya que:

$$\begin{array}{rcl} u_1 & = & x_0 + pz_0 \\ u_2 & = & x_0 + px_1 + p^2 z_1 \\ u_3 & = & x_0 + px_1 + p^2 x_2 + p^3 z_2 \\ u_4 & = & x_0 + px_1 + p^2 x_2 + p^3 x_3 + p^3 z_3 \\ u_5 & = & x_0 + px_1 + p^2 x_2 + p^3 x_3 + p^4 x_4 \end{array}$$

Caso II $m_4 = 5$

$$p(s_6 + ps_7 + p^2 s_8 + p^3 s_9) = p \text{ mód } p^4\mathbb{Z}_p$$

de aquí $s_7 = s_8 = 0, s_9 \in F_p$ y $s_6 = 1$

$$p^{m_3-3}(s_3 + ps_4 + p^2 s_5) = p \text{ mód } p^3\mathbb{Z}_p$$

de aquí $m_3 = 3, 4$

Caso II.1 $m_3 = 3$

$$s_3 + ps_4 + p^2 s_5 = p \text{ mód } p^3\mathbb{Z}_p$$

de aquí $s_3 = s_5 = 0$ y $s_4 = 1$

$$p^{m_2-2}(s_1 + ps_2) = p \text{ mód } p^2\mathbb{Z}_p$$

de aquí $m_2 = 2, 3$

Caso II.1.1 $m_2 = 2$

$$s_1 + ps_2 = p \text{ mód } p^2\mathbb{Z}_p$$

de aquí $s_1 = 0$ y $s_2 = 1$

$$p^{m_1-1}s_0 = 0 \text{ mód } p\mathbb{Z}_p$$

entonces tendríamos los siguientes casos:

($\star$) si $s_0 = 0$, entonces $m_1 \geq 1$. Así

$$\begin{aligned}\mathbf{I} &= (0, p, p, p(1+p^3 s_9), p) B_p(C_{p^4}) + (p^{m_1}\mathbb{Z}_p \times p^2\mathbb{Z}_p \times p^3\mathbb{Z}_p \times p^5\mathbb{Z}_p \times \{0\}) \\ &= (p^{m_1}, p, p, p(1+p^3 s_9), p)[B_p(C_{p^4}) + (\mathbb{Z}_p \times p\mathbb{Z}_p \times p^2\mathbb{Z}_p \times p^4\mathbb{Z}_p \times \{0\})] \\ &= (p^{m_1}, p, p, p(1+p^3 s_9), p)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5 - u_2 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5 - u_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\}\end{aligned}$$

con $s_9 \in F_p, m_1 \geq 1$

ya que:

$$\begin{aligned} u_1 &= z_0 \\ u_2 &= x_0 + px_1 + pz_1 \\ u_3 &= x_0 + px_1 + p^2x_2 + p^2z_2 \\ u_4 &= x_0 + px_1 + p^2x_2 + p^3x_3 + p^4z_3 \\ u_5 &= x_0 + px_1 + p^2x_2 + p^3x_3 + p^4x_4 \end{aligned}$$

($\star\star$) si $s_0 \in F_p^*$, entonces $m_1 \geq 2$. Así

$$\mathbf{I} = (p^{m_1-1}s_0, p, p, p(1+p^3 s_9), p)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5 - u_1, u_5 - u_2 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5 - u_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\}$$

con $s_9 \in F_p$

ya que:

$$\begin{aligned} u_1 &= x_0 + pz_0 \\ u_2 &= x_0 + px_1 + pz_1 \\ u_3 &= x_0 + px_1 + p^2x_2 + p^2z_2 \\ u_4 &= x_0 + px_1 + p^2x_2 + p^3x_3 + p^4z_3 \\ u_5 &= x_0 + px_1 + p^2x_2 + p^3x_3 + p^4x_4 \end{aligned}$$

Caso II.1.2 $m_2 = 3$

$$p(s_1 + ps_2) = p \text{ mód } p^2\mathbb{Z}_p$$

de aquí $s_1 = 1$ y $s_2 \in F_p$

$$p^{m_1-1}s_0 = 0 \text{ mód} p\mathbb{Z}_p$$

entonces, tendríamos los siguientes casos:

($\star$) si $s_0 = 0$ entonces $m_1 \geq 1$. Así

$$\begin{aligned}\mathbf{I} &= (0, p(1+ps_2), p, p(1+p^3 s_9), p) B_p(C_{p^4}) + (p^{m_1}\mathbb{Z}_p \times p^3\mathbb{Z}_p \times p^3\mathbb{Z}_p \times p^5\mathbb{Z}_p \times \{0\}) \\ &= (p^{m_1}, p(1+ps_2), p, p(1+p^3 s_9), p)[B_p(C_{p^4}) + (\mathbb{Z}_p \times p^2\mathbb{Z}_p \times p^2\mathbb{Z}_p \times p^4\mathbb{Z}_p \times \{0\})] \\ &= (p^{m_1}, p(1+ps_2), p, p(1+p^3 s_9), p)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5 - u_2, u_5 - u_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5 - u_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\}\end{aligned}$$

con $s_2, s_9 \in F_p$

ya que:

$$\begin{aligned} u_1 &= z_0 \\ u_2 &= x_0 + px_1 + p^2z_1 \\ u_3 &= x_0 + px_1 + p^2x_2 + p^2z_2 \\ u_4 &= x_0 + px_1 + p^2x_2 + p^3x_3 + p^4z_3 \\ u_5 &= x_0 + px_1 + p^2x_2 + p^3x_3 + p^4x_4 \end{aligned}$$

($\star\star$) si $s_0 \in F_p^*$, entonces $m_1 \geq 2$. Así

$$\mathbf{I} = (p^{m_1-1}s_0, p(1+ps_2), p, p(1+p^3s_9), p)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5-u_1 \in p\mathbb{Z}_p, u_5-u_2, u_5-u_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5-u_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\}$$

ya que:

$$\begin{array}{rcl} u_1 & = & x_0 + pz_0 \\ u_2 & = & x_0 + px_1 + p^2z_1 \\ u_3 & = & x_0 + px_1 + p^2x_2 + p^2z_2 \\ u_4 & = & x_0 + px_1 + p^2x_2 + p^3x_3 + p^4z_3 \\ u_5 & = & x_0 + px_1 + p^2x_2 + p^3x_3 + p^4x_4 \end{array}$$

Caso II.2 $m_3 = 4$

$$p(s_3 + ps_4 + p^2s_5) = p \text{ mód } p^3\mathbb{Z}_p$$

de aquí $s_3 = 1, s_4 = 0$ y $s_5 \in F_p$

$$p^{m_2-2}(s_1 + ps_2) = p \text{ mód } p^2\mathbb{Z}_p$$

de aquí $m_2 = 2, 3$

Caso II.2.1 $m_2 = 2$

$$s_1 + ps_2 = p \text{ mód } p^2\mathbb{Z}_p$$

de aqui $s_1 = 0$ y $s_2 = 1$

$$p^{m_1-1}s_0 = 0 \text{ mód } p\mathbb{Z}_p$$

entonces tenemos los siguientes casos:

($\star$) si $s_0 = 0$ entonces $m_1 \geq 1$. Así

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{I} & = & (0, p, p(1+p^2s_5), p(1+p^3s_9), p)B_p(C_{p^4}) + (p^{m_1}\mathbb{Z}_p \times p^2\mathbb{Z}_p \times p^4\mathbb{Z}_p \times p^5\mathbb{Z}_p \times \{0\}) \\ & = & (p^{m_1}, p, p(1+p^2s_5), p(1+p^3s_9), p)[B_p(C_{p^4}) + (\mathbb{Z}_p \times p\mathbb{Z}_p \times p^3\mathbb{Z}_p \times p^4\mathbb{Z}_p \times \{0\})] \\ & = & (p^{m_1}, p, p(1+p^2s_5), p(1+p^3s_9), p)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5 - u_2 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_3 \in p^3\mathbb{Z}_p, u_5 - u_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\} \end{array}$$

con $s_5, s_9 \in F_p$

ya que:

$$\begin{array}{rcl} u_1 & = & z_0 \\ u_2 & = & x_0 + px_1 + pz_1 \\ u_3 & = & x_0 + px_1 + p^2x_2 + p^3z_2 \\ u_4 & = & x_0 + px_1 + p^2x_2 + p^3x_3 + p^4z_3 \\ u_5 & = & x_0 + px_1 + p^2x_2 + p^3x_3 + p^4x_4 \end{array}$$

($\star\star$) si $s_0 \in F_p^*$, entonces $m_1 \geq 2$. Así

$$\mathbf{I} = (p^{m_1-1}s_0, p, p(1+p^2s_5), p(1+p^3s_9), p)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5-u_1, u_5-u_2 \in p\mathbb{Z}_p, u_5-u_3 \in p^3\mathbb{Z}_p, u_5-u_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\}$$

con $s_5, s_9 \in F_p$

ya que:

$$\begin{array}{rcl} u_1 &=& x_0 + pz_0 \\ u_2 &=& x_0 + px_1 + pz_1 \\ u_3 &=& x_0 + px_1 + p^2x_2 + p^3z_2 \\ u_4 &=& x_0 + px_1 + p^2x_2 + p^3x_3 + p^4z_3 \\ u_5 &=& x_0 + px_1 + p^2x_2 + p^3x_3 + p^4x_4 \end{array}$$

Caso II.2.2 $m_2 = 3$

$$p(s_1 + ps_2) = p \text{ mód } p^2\mathbb{Z}_p$$

de aquí $s_1 = 1$ y $s_2 \in F_p$

$$p^{m_1-1}so = 0 \text{ mód } p\mathbb{Z}_p$$

de donde tenemos los siguientes casos:

($\star$) si $s_0 = 0$ entonces $m_1 \geq 1$. Así

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{I} &=& (0, p(1+ps_2), p(1+p^2s_5), p(1+p^3s_9), p)B_p(C_{p^4}) + (p^{m_1}\mathbb{Z}_p \times p^3\mathbb{Z}_p \times p^4\mathbb{Z}_p \times p^5\mathbb{Z}_p \times \{0\}) \\ &=& (p^{m_1}, p(1+ps_2), p(1+p^2s_5), p(1+p^3s_9), p)[B_p(C_{p^4}) + (\mathbb{Z}_p \times p^2\mathbb{Z}_p \times p^3\mathbb{Z}_p \times p^4\mathbb{Z}_p \times \{0\})] \\ &=& (p^{m_1}, p(1+ps_2), p(1+p^2s_5), p(1+p^3s_9), p)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5 - u_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5 - u_3 \in p^3\mathbb{Z}_p, u_5 - u_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\} \end{array}$$

con $s_2, s_5, s_9 \in F_p$

ya que:

$$\begin{array}{rcl} u_1 &=& z_0 \\ u_2 &=& x_0 + px_1 + p^2z_1 \\ u_3 &=& x_0 + px_1 + p^2x_2 + p^3z_2 \\ u_4 &=& x_0 + px_1 + p^2x_2 + p^3x_3 + p^4z_3 \\ u_5 &=& x_0 + px_1 + p^2x_2 + p^3x_3 + p^4x_4 \end{array}$$

($\star\star$) si $s_0 \in F_p^*$, entonces $m_1 \geq 2$. Así

$$\mathbf{I} = (p^{m_1-1}s_0, p(1+ps_2), p(1+p^2s_5), p(1+p^3s_9), p)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5 - u_1 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5 - u_3 \in p^3\mathbb{Z}_p, u_5 - u_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\}$$

con $s_5, s_9 \in F_p$

ya que:

$$\begin{array}{rcl} u_1 &=& x_0 + pz_0 \\ u_2 &=& x_0 + px_1 + p^2z_1 \\ u_3 &=& x_0 + px_1 + p^2x_2 + p^3z_2 \\ u_4 &=& x_0 + px_1 + p^2x_2 + p^3x_3 + p^4z_3 \\ u_5 &=& x_0 + px_1 + p^2x_2 + p^3x_3 + p^4x_4 \end{array}$$

Veamos el caso donde $t = 2$

$$p^{m_4-4}(s_6 + ps_7 + p^2s_8 + p^3s_9) = p^2 \text{ mód } p^4\mathbb{Z}_p$$

esto implica que $m_4 = 4, 5, 6$

Caso I $m_4 = 4$

$$s_6 + ps_7 + p^2s_8 + p^3s_9 = p^2 \text{ mód } p^4\mathbb{Z}_p$$

de aquí $s_6 = s_7 = s_9 = 0$ y $s_8 = 1$

$$p^{m_3-3}(s_3 + ps_4 + p^2s_5) = p^2 \text{ mód } p^3\mathbb{Z}_p$$

de aquí que $m_3 = 3, 4, 5$

Caso I.1 $m_3 = 3$

$$(s_3 + ps_4 + p^2s_5) = p^2 \text{ mód } p^3\mathbb{Z}_p$$

de aquí $s_3 = s_4 = 0$ y $s_5 = 1$

$$p^{m_2-2}(s_1 + ps_2) = 0 \text{ mód } p^2\mathbb{Z}_p$$

de donde tenemos los siguientes casos:

($\star$) si $s_1 = s_2 = 0$ y $m_2 \geq 2$

$$p^{m_1-1}s_0 = 0 \text{ mód } p\mathbb{Z}_p$$

- si $s_0 = 0, m_1 \geq 1$, entonces

$$\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2}, p^2, p^2, p^2)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5 - u_3 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$$

  con $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2$

- si $s_0 \in F_p^*$ y $m_1 \geq 2$, entonces

$$\mathbf{I} = (p^{m_1-1}s_0, p^{m_2}, p^2, p^2, p^2)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5 - u_1, u_5 - u_3 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$$

  con $m_1, m_2 \geq 2$ y $s_0 \in F_p^*$

($\star\star$) si $s_1 = 0, s_2 \in F_p^*$ y $m_2 \geq 3$

$$p^{m_1-1}s_0 = 0 \text{ mód } p\mathbb{Z}_p$$

- si $s_0 = 0, m_1 \geq 1$, entonces

$$\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2-1}s_2, p^2, p^2, p^2)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5 - u_2, u_5 - u_3 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$$

  con $m_1 \geq 1, m_2 \geq 3, s_2 \in F_p^*$

- si $s_0 \in F_p^*, m_1 \geq 2$, entonces

$$\mathbf{I} = (p^{m_1-1}s_0, p^{m_2-1}s_2, p^2, p^2, p^2)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5 - u_1, u_5 - u_2, u_5 - u_3 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$$

con $m_1 \geq 2, m_2 \geq 3, s_0, s_2 \in F_p^*$

$(\star\star\star)$ si $s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p$ y $m_2 \geq 4$

$$p^{m_1-1}s_0 = 0 \text{ mód } p\mathbb{Z}_p$$

- si $s_0 = 0, m_1 \geq 1$, entonces

$$\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2-2}(s_1 + ps_2), p^2, p^2, p^2)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5 - u_2, u_5 - u_4 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5 - u_3 \in p\mathbb{Z}_p\}$$

con $m_1 \geq 1, m_2 \geq 4, s_2 \in F_p, s_1 \in F_p^*$

- si $s_0 \in F_p^*$ y $m_1 \geq 2$, entonces

$$\mathbf{I} = (p^{m_1-1}s_0, p^{m_2-2}(s_1 + ps_2), p^2, p^2, p^2)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5 - u_2, u_5 - u_4 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5 - u_1, u_5 - u_3 \in p\mathbb{Z}_p\}$$

con $m_1 \geq 2, m_2 \geq 4, s_0, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p$

Caso I.2 $m_3 = 4$

$$p(s_3 + ps_4 + p^2s_5) = p^2 \text{ mód } p^3\mathbb{Z}_p$$

de aquí $s_3 = 0, s_4 = 1, s_5 \in F_p$

$$p^{m_2-2}(s_1 + ps_2) = 0 \text{ mód } p^2\mathbb{Z}_p$$

de donde tenemos los siguientes casos:

$(\star)$ si $s_1 = s_2 = 0$ y $m_2 \geq 2$

$$p^{m_1-1}s_0 = 0 \text{ mód } p\mathbb{Z}_p$$

- $s_0 = 0, m_1 \geq 1$, entonces

$$\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2}, p^2(1 + ps_5), p^2, p^2)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5 - u_3, u_5 - u_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$$

con $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, s_5 \in F_p$

- si $s_0 \in F_p^*, m_1 \geq 2$, entonces

$$\mathbf{I} = (p^{m_1-1}s_0, p^{m_2}, p^2(1 + ps_5), p^2, p^2)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5 - u_1 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_3, u_5 - u_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$$

con $m_1, m_2 \geq 2, s_5 \in F_p, s_0 \in F_p^*$

$(\star\star)$ si $s_1 = 0, s_2 \in F_p^*$ y $m_2 \geq 3$

$$p^{m_1-1}s_0 = 0 \text{ mód } p\mathbb{Z}_p$$

- si $s_0 = 0, m_1 \geq 1$, entonces

$$\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2-1}s_2, p^2(1+ps_5), p^2, p^2)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5-u_3, u_5-u_4 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5-u_2 \in p\mathbb{Z}_p\}$$

con $m_1 \geq 1, m_2 \geq 3, s_5 \in F_p, s_2 \in F_p^*$

- si $s_0 \in F_p^*, m_1 \geq 2$, entonces

$$\mathbf{I} = (p^{m_1-1}s_0, p^{m_2-1}s_2, p^2(1+ps_5), p^2, p^2)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5-u_3, u_5-u_4 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5-u_2, u_5-u_1 \in p\mathbb{Z}_p\}$$

con $m_1 \geq 2, m_2 \geq 3, s_5 \in F_p, s_0, s_2 \in F_p^*$

($\star\star\star$) si $s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p$ y $m_2 \geq 4$

$$p^{m_1-1}s_0 = 0 \text{ mód } p\mathbb{Z}_p$$

- si $s_0 = 0, m_1 \geq 1$, entonces

$$\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2-2}(s_1+ps_2), p^2(1+ps_5), p^2, p^2)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5-u_2, u_5-u_3, u_5-u_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$$

con $m_1 \geq 1, m_2 \geq 4, s_2, s_5 \in F_p, s_1 \in F_p^*$

- si $s_0 \in F_p^*, m_1 \geq 2$, entonces

$$\mathbf{I} = (p^{m_1-1}s_0, p^{m_2-2}(s_1+ps_2), p^2(1+ps_5), p^2, p^2)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5-u_1 \in p\mathbb{Z}_p, u_5-u_2, u_5-u_3, u_5-u_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$$

con $m_1 \geq 2, m_2 \geq 4, s_2, s_5 \in F_p, s_1, s_0 \in F_p^*$

Caso I.3 $m_3 = 5$

$$p^2(s_3 + ps_4 + p^2s_5) = p^2 \text{ mód } p^3\mathbb{Z}_p$$

de aquí $s_3 = 1, s_4, s_5 \in F_p$

$$p^{m_2-2}(s_1 + ps_2) = 0 \text{ mód } p^2\mathbb{Z}_p$$

de donde tenemos los siguientes casos:

($\star$) si $s_1 = s_2 = 0$ y $m_2 \geq 2$

$$p^{m_1-1}s_0 = 0 \text{ mód } p\mathbb{Z}_p$$

- $s_0 = 0, m_1 \geq 1$, entonces

$$\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2}, p^2(1+ps_4+p^2s_5), p^2, p^2)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5-u_3 \in p^3\mathbb{Z}_p, u_5-u_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$$

con $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, s_4, s_5 \in F_p$

- si $s_0 \in F_p^*, m_1 \geq 2$, entonces

$$\mathbf{I} = (p^{m_1-1}s_0, p^{m_2}, p^2(1+ps_4+p^2s_5), p^2, p^2)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5-u_1 \in p\mathbb{Z}_p, u_5-u_3 \in p^3\mathbb{Z}_p, u_5-u_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$$

con $s_0 \in F_p^*, s_4, s_5 \in F_p, m_1, m_2 \geq 2$

$(\star\star)$ si $s_1 = 0, s_2 \in F_p^*$ y $m_2 \geq 3$

$$p^{m_1-1}s_0 = 0 \text{ mód } p\mathbb{Z}_p$$

- si $s_0 = 0, m_1 \geq 1$, entonces

  $\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2-1}s_2, p^2(1+ps_4+p^2s_5), p^2, p^2)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5-u_2 \in p\mathbb{Z}_p, u_5-u_3 \in p^3\mathbb{Z}_p, u_5-u_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$

  con $s_2 \in F_p^*, s_4, s_5 \in F_p, m_1 \geq 1, m_2 \geq 3$

- si $s_0 \in F_p^*, m_1 \geq 2$, entonces

  $\mathbf{I} = (p^{m_1-1}s_0, p^{m_2-1}s_2, p^2(1+ps_4+p^2s_5), p^2, p^2)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5-u_1, u_5-u_2 \in p\mathbb{Z}_p, u_5-u_3 \in p^3\mathbb{Z}_p, u_5-u_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$

  con $s_0, s_2 \in F_p^*, s_4, s_5 \in F_p, m_1 \geq 2, m_2 \geq 3$

$(\star\star\star)$ si $s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p$ y $m_2 \geq 4$

$$p^{m_1-1}s_0 = 0 \text{ mód } p\mathbb{Z}_p$$

- si $s_0 = 0, m_1 \geq 1$, entonces

  $\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2-2}(s_1+ps_2), p^2(1+ps_4+p^2s_5), p^2, p^2)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5-u_2, u_5-u_4 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5-u_3 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$

  con $s_1 \in F_p^*, s_2, s_4, s_5 \in F_p, m_1 \geq 1, m_2 \geq 4$

- si $s_0 \in F_p^*, m_1 \geq 2$, entonces

  $\mathbf{I} = (p^{m_1-1}s_0, p^{m_2-2}(s_1+ps_2), p^2(1+ps_4+p^2s_5), p^2, p^2)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5-u_1 \in p\mathbb{Z}_p, u_5-u_2, u_5-u_4 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5-u_3 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$

  con $s_0, s_1 \in F_p^*, s_2, s_4, s_5 \in F_p, m_1 \geq 2, m_2 \geq 4$

Caso II $m_4 = 5$

$$p(s_6 + ps_7 + p^2s_8 + p^3s_9) = p^2 \text{ mód } p^4\mathbb{Z}_p$$

de aquí $s_6 = s_8 = 0, s_7 = 1$ y $s_9 \in F_p$

$$p^{m_3-3}(s_3 + ps_4 + p^2s_5) = p^2 \text{ mód } p^3\mathbb{Z}_p$$

de aquí $m_3 = 3, 4, 5$

Caso II.1 $m_3 = 3$

$$s_3 + ps_4 + p^2s_5 = p^2 \text{ mód } p^3\mathbb{Z}_p$$

de aquí $s_3 = s_4 = 0$ y $s_5 = 1$

$$p^{m_2-2}(s_1 + ps_2) = 0 \text{ mód } p^2\mathbb{Z}_p$$

de donde tenemos los siguientes casos:

($\star$) si $s_1 = s_2 = 0$ y $m_2 \geq 2$

$$p^{m_1-1}s_0 = 0 \text{ mód } p\mathbb{Z}_p$$

- si $s_0 = 0$ y $m_1 \geq 1$, entonces

$$\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2}, p^2, p^2(1+p^2s_9), p^2)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5 - u_3 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$$

  con $m_2 \geq 2, m_1 \geq 1$ y $s_9 \in F_p$

- si $s_0 \in F_p^*$ y $m_1 \geq 2$, entonces

$$\mathbf{I} = (p^{m_1-1}s_0, p^{m_2}, p^2, p^2(1+p^2s_9), p^2)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5 - u_1, u_5 - u_3 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$$

  con $m_1, m_2 \geq 2, s_9 \in F_p, s_0 \in F_p^*$

($\star\star$) si $s_1 = 0, s_2 \in F_p^*$ y $m_2 \geq 3$

$$p^{m_1-1}s_0 = 0 \text{ mód } p\mathbb{Z}_p$$

- si $s_0 = 0, m_1 \geq 1$, entonces

$$\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2-1}s_2, p^2, p^2(1+p^2s_9), p^2)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5 - u_2, u_5 - u_3 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$$

  con $m_1 \geq 1, m_2 \geq 3, s_2 \in F_p^*, s_9 \in F_p$

- si $s_0 \in F_p^*, m_1 \geq 2$, entonces

$$\mathbf{I} = (p^{m_1-1}s_0, p^{m_2-1}s_2, p^2, p^2(1+p^2s_9), p^2)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5-u_1, u_5-u_2, u_5-u_3 \in p\mathbb{Z}_p, u_5-u_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$$

  con $m_1 \geq 2, m_2 \geq 3, s_0, s_2 \in F_p^*, s_9 \in F_p$

($\star\star\star$) si $s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p$ y $m_2 \geq 4$

$$p^{m_1-1}s_0 = 0 \text{ mód } p\mathbb{Z}_p$$

- si $s_0 = 0, m_1 \geq 1$, entonces

$$\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2-2}(s_1+ps_2), p^2, p^2(1+p^2s_9), p^2)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5-u_3 \in p\mathbb{Z}_p, u_5-u_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5-u_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$$

  con $s_2, s_9 \in F_p, s_1 \in F_p^*, m_1 \geq 1, m_2 \geq 4$

- si $s_0 \in F_p^*, m_1 \geq 2$, entonces

$$\mathbf{I} = (p^{m_1-1}s_0, p^{m_2-2}(s_1+ps_2), p^2, p^2(1+p^2s_9), p^2)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5-u_1, u_5-u_3 \in p\mathbb{Z}_p, u_5-u_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5-u_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$$

  con $s_2, s_9 \in F_p, s_0, s_1 \in F_p^*, m_1 \geq 2, m_2 \geq 4$

Caso II.2 $m_3 = 4$

$$p(s_3 + ps_4 + p^2 s_5) = p^2 \text{ mód } p^3\mathbb{Z}_p$$

de aquí que $s_3 = 0, s_4 = 1, s_5 \in F_p$

$$p^{m_2-2}(s_1 + ps_2) = 0 \text{ mód } p^2\mathbb{Z}_p$$

de donde obtenemos los siguientes casos:

($\star$) si $s_1 = s_2 = 0$ y $m_2 \geq 2$

$$p^{m_1-1}s_0 = 0 \text{ mód } p\mathbb{Z}_p$$

- si $s_0 = 0$ y $m_1 \geq 1$, entonces

$$\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2}, p^2(1+ps_5), p^2(1+p^2s_9), p^2)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5 - u_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5 - u_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$$

con $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, s_5, s_9 \in F_p$

- si $s_0 \in F_p^*$ y $m_1 \geq 2$, entonces

$$\mathbf{I} = (p^{m_1-1}s_0, p^{m_2}, p^2(1+ps_5), p^2(1+p^2s_9), p^2)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5-u_1 \in p\mathbb{Z}_p, u_5-u_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5-u_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$$

con $m_1, m_2 \geq 2, s_5, s_9 \in F_p, s_0 \in F_p^*$

($\star\star$) si $s_1 = 0, s_2 \in F_p^*$ y $m_2 \geq 3$

$$p^{m_1-1}s_0 = 0 \text{ mód } p\mathbb{Z}_p$$

- si $s_0 = 0, m_1 \geq 1$, entonces

$$\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2-1}s_2, p^2(1+ps_5), p^2(1+p^2s_9), p^2)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5-u_2 \in p\mathbb{Z}_p, u_5-u_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5-u_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$$

con $s_5, s_9 \in F_p, s_2 \in F_p^*, m_1 \geq 1, m_2 \geq 3$

- si $s_0 \in F_p^*, m_1 \geq 2$, entonces

$$\mathbf{I} = (p^{m_1-1}s_0, p^{m_2-1}s_2, p^2(1+ps_5), p^2(1+p^2s_9), p^2)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5-u_1, u_5-u_2 \in p\mathbb{Z}_p, u_5-u_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5-u_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$$

con $s_5, s_9 \in F_p, s_0, s_2 \in F_p^*, m_1 \geq 2, m_2 \geq 3$

($\star\star\star$) si $s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p$ y $m_2 \geq 4$

$$p^{m_1-1}s_0 = 0 \text{ mód } p\mathbb{Z}_p$$

- si $s_0 = 0, m_1 \geq 1$, entonces

$$\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2-2}(s_1+ps_2), p^2(1+ps_5), p^2(1+p^2s_9), p^2)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5-u_2, u_5-u_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5-u_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$$

con $s_1 \in F_p^*, s_2, s_5, s_9 \in F_p, m_1 \geq 1, m_2 \geq 4$

- si $s_0 \in F_p^*, m_1 \geq 2$, entonces

$$\mathbf{I} = (p^{m_1-1}s_0, p^{m_2-2}(s_1+ps_2), p^2(1+ps_5), p^2(1+p^2s_9), p^2)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5-u_1 \in p\mathbb{Z}_p, u_5-u_2, u_5-u_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5-u_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$$

con $s_0, s_1 \in F_p^*, s_2, s_5, s_9 \in F_p, m_1 \geq 2, m_2 \geq 4$

Caso II.3 $m_3 = 5$

$$p^2(s_3 + ps_4 + p^2s_5) = p^2 \text{ mód } p^3\mathbb{Z}_p$$

de aquí $s_3 = 1, s_4, s_5 \in F_p$

$$p^{m_2-2}(s_1 + ps_2) = 0 \text{ mód } p^2\mathbb{Z}_p$$

de donde obtenemos los siguientes casos:

($\star$) si $s_1 = s_2 = 0$ y $m_2 \geq 2$

$$p^{m_1-1}s_0 = 0 \text{ mód } p\mathbb{Z}_p$$

- si $s_0 = 0$ y $m_1 \geq 1$, entonces

$$\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2}, p^2(1+ps_4+p^2s_5), p^2(1+p^2s_9), p^2)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5-u_3, u_5-u_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$$

con $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, s_4, s_5, s_9 \in F_p$

- si $s_0 \in F_p^*$ y $m_1 \geq 2$, entonces

$$\mathbf{I} = (p^{m_1-1}s_0, p^{m_2}, p^2(1+ps_4+p^2s_5), p^2(1+p^2s_9), p^2)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5-u_1 \in p\mathbb{Z}_p, u_5-u_3, u_5-u_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$$

con $m_1, m_2 \geq 2, s_4, s_5, s_9 \in F_p, s_0 \in F_p^*$

($\star\star$) si $s_1 = 0, s_2 \in F_p^*$ y $m_2 \geq 3$

$$p^{m_1-1}s_0 = 0 \text{ mód } p\mathbb{Z}_p$$

- si $s_0 = 0, m_1 \geq 1$, entonces

$$\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2-1}s_2, p^2(1+ps_4+p^2s_5), p^2(1+p^2s_9), p^2)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5-u_2 \in p\mathbb{Z}_p, u_5-u_3, u_5-u_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$$

con $m_1 \geq 1, m_2 \geq 3, s_4, s_5, s_9 \in F_p, s_2 \in F_p^*$

- si $s_0 \in F_p^*, m_1 \geq 2$, entonces

$$\mathbf{I} = (p^{m_1-1}s_0, p^{m_2-1}s_2, p^2(1+ps_4+p^2s_5), p^2(1+p^2s_9), p^2)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5-u_1, u_5-u_2 \in p\mathbb{Z}_p, u_5-u_3, u_5-u_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$$

con $m_1 \geq 2, m_2 \geq 3, s_4, s_5, s_9 \in F_p, s_0, s_2 \in F_p^*$

($\star\star\star$) si $s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p$ y $m_2 \geq 4$

$$p^{m_1-1}s_0 = 0 \text{ mód } p\mathbb{Z}_p$$

- si $s_0 = 0, m_1 \geq 1$, entonces

$\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2-2}(s_1+ps_2), p^2(1+ps_4+p^2s_5), p^2(1+p^2s_9), p^2)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5-u_3, u_5-u_4 \in p^3\mathbb{Z}_p, u_5-u_2 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$

con $m_1 \geq 1, m_2 \geq 4, s_2, s_4, s_5, s_9 \in F_p, s_1 \in F_p^*$

- si $s_0 \in F_p^*, m_1 \geq 2$, entonces

$\mathbf{I} = (p^{m_1-1}s_0, p^{m_2-2}(s_1+ps_2), p^2(1+ps_4+p^2s_5), p^2(1+p^2s_9), p^2)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5-u_1 \in p\mathbb{Z}_p, u_5-u_3, u_5-u_4 \in p^3\mathbb{Z}_p, u_5-u_2 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$

con $m_1 \geq 2, m_2 \geq 4, s_2, s_4, s_5, s_9 \in F_p, s_0, s_1 \in F_p^*$

Caso III $m_4 = 6$

$$p^2(s_6 + ps_7 + p^2s_8 + p^3s_9) = p^2 \text{ mód } p^4\mathbb{Z}_p$$

de aquí $s_6 = 1, s_7 = 0, s_8, s_9 \in F_p$

$$p^{m_3-3}(s_3 + ps_4 + p^2s_5) = p^2 \text{ mód } p^3\mathbb{Z}_p$$

de aquí $m_3 = 3, 4, 5$

Caso III.1 $m_3 = 3$

$$s_3 + ps_4 + p^2s_5 = p^2 \text{ mód } p^3\mathbb{Z}_p$$

de aquí $s_3 = s_4 = 0, s_5 = 1$

$$p^{m_2-2}(s_1 + ps_2) = 0 \text{ mód } p^2\mathbb{Z}_p$$

de donde obtenemos los siquientes casos:

($\star$) si $s_1, s_2 = 0, m_2 \geq 2$

$$p^{m_1-1}s_0 = 0 \text{ mód } p\mathbb{Z}_p$$

- si $s_0 =, m_1 \geq 1$, entonces

$\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2}, p^2, p^2(1 + p^2s_8 + p^3s_9), p^2)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5 - u_3 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\}$

con $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, s_8, s_9 \in F_p$

- si $s_0 \in F_p^*, m_1 \geq 2$, entonces

$\mathbf{I} = (p^{m_1-1}s_0, p^{m_2}, p^2, p^2(1 + p^2s_8 + p^3s_9), p^2)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5 - u_1, u_5 - u_3 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\}$

con $m_1, m_2 \geq 2, s_8, s_9 \in F_p, s_0 \in F_p^*$

($\star\star$) si $s_1 = 0, s_2 \in F_p^*, m_2 \geq 3$

$$p^{m_1-1}s_0 = 0 \text{ mód } p\mathbb{Z}_p$$

- si $s_0 = 0, m_1 \geq 1$, entonces

$\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2-1}s_2, p^2, p^2(1 + p^2s_8 + p^3s_9), p^2)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5 - u_2, u_5 - u_3 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\}$

con $s_2 \in F_p^*, s_8, s_9 \in F_p, m_1 \geq 1, m_2 \geq 3$

- si $s_0 \in F_p^*, m_1 \geq 2$, entonces

$\mathbf{I} = (p^{m_1-1}s_0, p^{m_2-1}s_2, p^2, p^2(1+p^2s_8+p^3s_9), p^2)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5-u_1, u_5-u_2, u_5-u_3 \in p\mathbb{Z}_p, u_5-u_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\}$

con $s_0, s_2 \in F_p^*, s_8, s_9 \in F_p, m_1 \geq 2, m_2 \geq 3$

$(\star\star\star)$ si $s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, m_2 \geq 4$

$$p^{m_1-1}s_0 = 0 \text{ mód } p\mathbb{Z}_p$$

- so $s_0 = 0, m_1 \geq 1$, entonces

$\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2-2}(s_1+ps_2), p^2, p^2(1+p^2s_8+p^3s_9), p^2)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5-u_3 \in p\mathbb{Z}_p, u_5-u_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5-u_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\}$

con $m_1 \geq 1, m_2 \geq 4, s_2, s_8, s_9 \in F_p, s_1 \in F_p^*$

- si $s_0 \in F_p^*, m_1 \geq 2$, entonces

$\mathbf{I} = (p^{m_1-1}s_0, p^{m_2-2}(s_1+ps_2), p^2, p^2(1+p^2s_8+p^3s_9), p^2)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5-u_1, u_5-u_3 \in p\mathbb{Z}_p, u_5-u_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5-u_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\}$

con $m_1 \geq 2, m_2 \geq 4, s_2, s_8, s_9 \in F_p, s_0, s_1 \in F_p^*$

Caso III.2 $m_3 = 4$

$$p(s_3 + ps_4 + p^2s_5) = p^2 \text{ mód } p^3\mathbb{Z}_p$$

de aquí $s_3 = 0, s_4 = 1, s_5 \in F_p$

$$p^{m_2-2}(s_1 + ps_2) = 0 \text{ mód } p^2\mathbb{Z}_p$$

de donde obtenemos los siquientes casos:

$(\star)$ si $s_1, s_2 = 0, m_2 \geq 2$

$$p^{m_1-1}s_0 = 0 \text{ mód } p\mathbb{Z}_p$$

- si $s_0 = 0, m_1 \geq 1$, entonces

$\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2}, p^2(1 + ps_5), p^2(1 + p^2s_8 + p^3s_9), p^2)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5 - u_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5 - u_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\}$

con $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, s_5, s_8, s_9 \in F_p$

- si $s_0 \in F_p^*, m_1 \geq 2$, entonces

$\mathbf{I} = (p^{m_1-1}s_0, p^{m_2}, p^2(1+ps_5), p^2(1+p^2s_8+p^3s_9), p^2)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5-u_1 \in p\mathbb{Z}_p, u_5-u_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5-u_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\}$

con $m_1, m_2 \geq 2, s_5, s_8, s_9 \in F_p, s_0 \in F_p^*$

$(\star\star)$ si $s_1 = 0, s_2 \in F_p^*, m_2 \geq 3$

$$p^{m_1-1}s_0 = 0 \text{ mód } p\mathbb{Z}_p$$

- si $s_0 = 0, m_1 \geq 1$, entonces

$\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2-1}s_2, p^2(1+ps_5), p^2(1+p^2s_8+p^3s_9), p^2)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5-u_2 \in p\mathbb{Z}_p, u_5-u_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5-u_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\}$

con $m_1 \geq 1, m_2 \geq 3, s_2 \in F_p^*, s_5, s_8, s_9 \in F_p$

- si $s_0 \in F_p^*, m_1 \geq 2$, entonces

$\mathbf{I} = (p^{m_1-1}s_0, p^{m_2-1}s_2, p^2(1+ps_5), p^2(1+p^2s_8+p^3s_9), p^2)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5-u_1, u_5-u_2 \in p\mathbb{Z}_p, u_5-u_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5-u_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\}$

con $m_1 \geq 2, m_2 \geq 3, s_0, s_2 \in F_p^*, s_5, s_8, s_9 \in F_p$

$(\star\star\star)$ si $s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, m_2 \geq 4$

$$p^{m_1-1}s_0 = 0 \text{ mód } p\mathbb{Z}_p$$

- so $s_0 = 0, m_1 \geq 1$, entonces

$\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2-2}(s_1+ps_2), p^2(1+ps_5), p^2(1+p^2s_8+p^3s_9), p^2)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5-u_2, u_5-u_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5-u_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\}$

con $m_1 \geq 1, m_2 \geq 4, s_1 \in F_p^*, s_2, s_5, s_8, s_9 \in F_p$

- si $s_0 \in F_p^*, m_1 \geq 2$, entonces

$\mathbf{I} = (p^{m_1-1}s_0, p^{m_2-2}(s_1+ps_2), p^2(1+ps_5), p^2(1+p^2s_8+p^3s_9), p^2)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5-u_1 \in p\mathbb{Z}_p, u_5-u_2, u_5-u_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5-u_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\}$

con $m_1 \geq 2, m_2 \geq 4, s_0, s_1 \in F_p^*, s_2, s_5, s_8, s_9 \in F_p$

Caso III.3 $m_3 = 5$

$$p^2(s_3 + ps_4 + p^2s_5) = p^2 \text{ mód } p^3\mathbb{Z}_p$$

de aquí $s_3 = 1, s_4, s_5 \in F_p$

$$p^{m_2-2}(s_1 + ps_2) = 0 \text{ mód } p^2\mathbb{Z}_p$$

de donde obtenemos los siguientes casos:

$(\star)$ si $s_1 = s_2 = 0, m_2 \geq 2$

$$p^{m_1-1}s_0 = 0 \text{ mód } p\mathbb{Z}_p$$

- si $s_0 = 0, m_1 \geq 1$, entonces

$\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2}, p^2(1 + ps_4 + p^2s_5), p^2(1 + p^2s_8 + p^3s_9), p^2)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5 - u_3 \in p^3\mathbb{Z}_p, u_5 - u_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\}$

con $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, s_4, s_5, s_8, s_9 \in F_p$

- si $s_0 \in F_p^*, m_1 \geq 2$, entonces

  $\mathbf{I} = (p^{m_1-1}s_0, p^{m_2}, p^2(1+ps_4+p^2s_5), p^2(1+p^2s_8+p^3s_9), p^2)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5-u_1 \in p\mathbb{Z}_p, u_5-u_3 \in p^3\mathbb{Z}_p, u_5-u_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\}$

  con $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, s_4, s_5, s_8, s_9 \in F_p, s_0 \in F_p^*$

($\star\star$) si $s_1 = 0, s_2 \in F_p^*, m_2 \geq 3$

$$p^{m_1-1}s_0 = 0 \text{ mód } p\mathbb{Z}_p$$

- si $s_0 = 0, m_1 \geq 1$, entonces

  $\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2-1}s_2, p^2(1+ps_4+p^2s_5), p^2(1+p^2s_8+p^3s_9), p^2)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5-u_2 \in p\mathbb{Z}_p, u_5-u_3 \in p^3\mathbb{Z}_p, u_5-u_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\}$

  con $m_1 \geq 1, m_2 \geq 3, s_2 \in F_p^*, s_4, s_5, s_8, s_9 \in F_p$

- si $s_0 \in F_p^*, m_1 \geq 2$, entonces

  $\mathbf{I} = (p^{m_1-1}s_0, p^{m_2-1}s_2, p^2(1+ps_4+p^2s_5), p^2(1+p^2s_8+p^3s_9), p^2)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5-u_1, u_5-u_2 \in p\mathbb{Z}_p, u_5-u_3 \in p^3\mathbb{Z}_p, u_5-u_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\}$

  con $m_1 \geq 2, m_2 \geq 3, s_0, s_2 \in F_p^*, s_4, s_5, s_8, s_9 \in F_p$

($\star\star\star$) si $s_1 \in F^*, s_2 \in F_p, m_2 \geq 4$

$$p^{m_1-1}s_0 = 0 \text{ mód } p\mathbb{Z}_p$$

- so $s_0 = 0, m_1 \geq 1$, entonces

  $\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2-2}(s_1+ps_2), p^2(1+ps_4+p^2s_5), p^2(1+p^2s_8, p^3s_9), p^2)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5-u_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5-u_3 \in p^3\mathbb{Z}_p, u_5-u_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\}$

  con $m_1 \geq 1, m_2 \geq 4, s_1 \in F_p^*, s_2, s_4, s_5, s_8, s_9 \in F_p$

- si $s_0 \in F_p^*, m_1 \geq 2$, entonces

  $\mathbf{I} = (p^{m_1-1}s_0, p^{m_2-2}(s_1+ps_2), p^2(1+ps_4+p^2s_5), p^2(1+p^2s_8, p^3s_9), p^2)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5-u_1 \in p\mathbb{Z}_p, u_5-u_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5-u_3 \in p^3\mathbb{Z}_p, u_5-u_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\}$

  con $m_1 \geq 2, m_2 \geq 4, s_0, s_1 \in F_p^*, s_2, s_4, s_5, s_8, s_9 \in F_p$

Veamos el caso cuando $t = 3$

$$p^{m_4-4}(s_6 + ps_7 + p^2s_8 + p^3s_9) = p^3 \text{ mód } p^4\mathbb{Z}_p$$

esto implica que $m_4 = 4, 5, 6, 7$

Caso I $m_4 = 4$

$$s_6 + ps_7 + p^2s_8 + p^3s_9 = p^3 \text{ mód } p^4\mathbb{Z}_p$$

de aquí $s_6 = s_7 = s_8 = 0, s_9 = 1$

$$p^{m_3-3}(s_3 + ps_4 + p^2s_5) = 0 \text{ mód} p^3\mathbb{Z}_p$$

de donde obtenemos los siguientes casos:

$i)$ Caso $s_3 = s_4 = s_5 = 0, m_3 \geq 3$

$(\star)$ si $s_1 = s_2 = 0, m_2 \geq 2$

$$p^{m_1-1}s_0 = 0 \text{ mód } p\mathbb{Z}_p$$

- si $s_0 = 0, m_1 \geq 1$, entonces

$$\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2}, p^{m_3}, p^3, p^3)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5 - u_4 \in p\mathbb{Z}_p\}$$

con $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3$

- si $s_0 \in F_p^*, m_1 \geq 2$, entonces

$$\mathbf{I} = (p^{m_1-1}s_0, p^{m_2}, p^{m_3}, p^3, p^3)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5 - u_1, u_5 - u_4 \in p\mathbb{Z}_p\}$$

con $m_1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_0 \in F_p^*$

$(\star\star)$ si $s_1 = 0, s_2 \in F_p^*, m_2 \geq 3$

- si $s_0 = 0, m_1 \geq 1$, entonces

$$\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2-1}s_2, p^{m_3}, p^3, p^3)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5 - u_2, u_5 - u_4 \in p\mathbb{Z}_p\}$$

con $m_1 \geq 1, m_2, m_3 \geq 3, s_2 \in F_p^*$

- si $s_0 \in F_p^*, m_1 \geq 2$, entonces

$$\mathbf{I} = (p^{m_1-1}s_0, p^{m_2-1}s_2, p^{m_3}, p^3, p^3)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5 - u_1, u_5 - u_2, u_5 - u_4 \in p\mathbb{Z}_p\}$$

con $m_1 \geq 2, m_2, m_3 \geq 3, s_0, s_2 \in F_p^*$

$(\star\star\star)$ si $s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, m_2 \geq 4$

- si $s_0 = 0, m_1 \geq 1$, entonces

$$\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2-2}(s_1 + ps_2), p^{m_3}, p^3, p^3)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5 - u_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5 - u_4 \in p\mathbb{Z}_p\}$$

con $m_1 \geq 1, m_2 \geq 4, m_3 \geq 3, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p$

- si $s_0 \in F_p^*, m_1 \geq 2$, entonces

$$\mathbf{I} = (p^{m_1-1}s_0, p^{m_2-2}(s_1 + ps_2), p^{m_3}, p^3, p^3)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5 - u_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5 - u_1, u_5 - u_4 \in p\mathbb{Z}_p\}$$

con $m_1 \geq 2, m_2 \geq 4, m_3 \geq 3, s_0, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p$

$ii)$ Caso $s_3 = s_4 = 0, s_5 \in F_p^*, m_3 \geq 4$

$(\star)$ si $s_1 = s_2 = 0, m_2 \geq 2$

$$p^{m_1-1}s_0 = 0 \text{ mód } p\mathbb{Z}_p$$

- si $s_0 = 0, m_1 \geq 1$, entonces

$$\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2}, p^{m_3-1}s_5, p^3, p^3)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5 - u_3, u_5 - u_4 \in p\mathbb{Z}_p\}$$

con $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 4, s_5 \in F_p^*$

- si $s_0 \in F_p^*, m_1 \geq 2$, entonces

$$\mathbf{I} = (p^{m_1-1}s_0, p^{m_2}, p^{m_3-1}s_5, p^3, p^3)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5 - u_1, u_5 - u_3, u_5 - u_4 \in p\mathbb{Z}_p\}$$

con $m_1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 4, s_0, s_5 \in F_p^*$

($\star\star$) si $s_1 = 0, s_2 \in F_p^*, m_2 \geq 3$

- si $s_0 = 0, m_1 \geq 1$, entonces

$$\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2-1}s_2, p^{m_3-1}s_5, p^3, p^3)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5 - u_2, u_5 - u_3, u_5 - u_4 \in p\mathbb{Z}_p\}$$

con $m_1 \geq 1, m_2 \geq 3, m_3 \geq 4, s_2, s_5 \in F_p^*$

- si $s_0 \in F_p^*, m_1 \geq 2$, entonces

$$\mathbf{I} = (p^{m_1-1}s_0, p^{m_2-1}s_2, p^{m_3-1}s_5, p^3, p^3)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5 - u_1, u_5 - u_2, u_5 - u_3, u_5 - u_4 \in p\mathbb{Z}_p\}$$

con $m_1 \geq 2, m_2 \geq 3, m_3 \geq 4, s_0, s_2, s_5 \in F_p^*$

($\star\star\star$) si $s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, m_2 \geq 4$

- si $s_0 = 0, m_1 \geq 1$, entonces

$$\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2-2}(s_1 + ps_2), p^{m_3-1}s_5, p^3, p^3)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5 - u_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5 - u_3 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_4 \in p\mathbb{Z}_p\}$$

con $m_1 \geq 1, m_2, m_3 \geq 4, s_1, s_5 \in F_p^*, s_2 \in F_p$

- si $s_0 \in F_p^*, m_1 \geq 2$, entonces

$$\mathbf{I} = (p^{m_1-1}s_0, p^{m_2-2}(s_1 + ps_2), p^{m_3-1}s_5, p^3, p^3)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5 - u_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5 - u_1, u_5 - u_3, u_5 - u_4 \in p\mathbb{Z}_p\}$$

con $m_1 \geq 2, m_2 \geq 4, m_3 \geq 4, s_0, s_1, s_5 \in F_p^*, s_2 \in F_p$

$iii)$ Caso $s_3 = 0, s_4 \in F_p^*, s_5 \in F_p, m_3 \geq 5$

($\star$) si $s_1 = s_2 = 0, m_2 \geq 2$

$$p^{m_1-1}s_0 = 0 \text{ mód } p\mathbb{Z}_p$$

- si $s_0 = 0, m_1 \geq 1$, entonces

$$\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2}, p^{m_3-2}(s_4 + ps_5), p^3, p^3)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5 - u_3 \in p^2\mathbb{Z}, u_5 - u_4 \in p\mathbb{Z}_p\}$$

con $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 5, s_4 \in F_p^*, s_5 \in F_p$

- si $s_0 \in F_p^*, m_1 \geq 2$, entonces

$$\mathbf{I} = (p^{m_1-1}s_0, p^{m_2}, p^{m_3-2}(s_4+ps_5), p^3, p^3)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5-u_1, u_5-u_4 \in p\mathbb{Z}_p, u_5-u_3 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$$

con $m_1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 5, s_0, s_4 \in F_p^*, s_5 \in F_p$

$(\star\star)$ si $s_1 = 0, s_2 \in F_p^*, m_2 \geq 3$

- si $s_0 = 0, m_1 \geq 1$, entonces

$$\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2-1}s_2, p^{m_3-2}(s_4+ps_5), p^3, p^3)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5-u_2, u_5-u_4 \in p\mathbb{Z}_p, u_5-u_3 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$$

con $m_1 \geq 1, m_2 \geq 3, m_3 \geq 5, s_2, s_4 \in F_p^*, s_5 \in F_p$

- si $s_0 \in F_p^*, m_1 \geq 2$, entonces

$$\mathbf{I} = (p^{m_1-1}s_0, p^{m_2-1}s_2, p^{m_3-2}(s_4+ps_5), p^3, p^3)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5-u_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5-u_1, u_5-u_2, u_5-u_4 \in p\mathbb{Z}_p\}$$

con $m_1 \geq 2, m_2 \geq 3, m_3 \geq 5, s_0, s_2, s_4 \in F_p^*, s_5 \in F_p$

$(\star\star\star)$ si $s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, m_2 \geq 4$

- si $s_0 = 0, m_1 \geq 1$, entonces

$$\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2-2}(s_1+ps_2), p^{m_3-2}(s_4+ps_5), p^3, p^3)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5-u_2, u_5-u_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5-u_4 \in p\mathbb{Z}_p\}$$

con $m_1 \geq 1, m_2 \geq 4, m_3 \geq 5, s_1, s_4 \in F_p^*, s_2, s_5 \in F_p$

- si $s_0 \in F_p^*, m_1 \geq 2$, entonces

$$\mathbf{I} = (p^{m_1-1}s_0, p^{m_2-2}(s_1+ps_2), p^{m_3-2}(s_4+ps_5), p^3, p^3)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5-u_2, u_5-u_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5-u_1, u_5-u_4 \in p\mathbb{Z}_p\}$$

con $m_1 \geq 2, m_2 \geq 4, m_3 \geq 5, s_0, s_1, s_4 \in F_p^*, s_2, s_5 \in F_p$

$iv)$ Caso $s_3 \in F_p^*, s_4, s_5 \in F_p, m_3 \geq 6$

$(\star)$ si $s_1 = s_2 = 0, m_2 \geq 2$

$$p^{m_1-1}s_0 = 0 \text{ mód } p\mathbb{Z}_p$$

- si $s_0 = 0, m_1 \geq 1$, entonces

$$\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2}, p^{m_3-3}(s_3+ps_4+p^2s_5), p^3, p^3)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5-u_3 \in p^3\mathbb{Z}, u_5-u_4 \in p\mathbb{Z}_p\}$$

con $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 6, s_3 \in F_p^*, s_4, s_5 \in F_p$

- si $s_0 \in F_p^*, m_1 \geq 2$, entonces

$$\mathbf{I} = (p^{m_1-1}s_0, p^{m_2}, p^{m_3-3}(s_3+ps_4+p^2s_5), p^3, p^3)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5-u_1, u_5-u_4 \in p\mathbb{Z}_p, u_5-u_3 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$$

con $m_1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 6, s_0, s_3 \in F_p^*, s_4, s_5 \in F_p$

$(\star\star)$ si $s_1 = 0, s_2 \in F_p^*, m_2 \geq 3$

- si $s_0 = 0, m_1 \geq 1$, entonces

  $\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2-1}s_2, p^{m_3-3}(s_3+ps_4+p^2s_5), p^3, p^3)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5-u_2, u_5-u_4 \in p\mathbb{Z}_p, u_5-u_3 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$

  con $m_1 \geq 1, m_2 \geq 3, m_3 \geq 6, s_2, s_3 \in F_p^*, s_4, s_5 \in F_p$

- si $s_0 \in F_p^*, m_1 \geq 2$, entonces

  $\mathbf{I} = (p^{m_1-1}s_0, p^{m_2-1}s_2, p^{m_3-3}(s_3+ps_4+p^2s_5), p^3, p^3)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5-u_3 \in p^3\mathbb{Z}_p, u_5-u_1, u_5-u_2, u_5-u_4 \in p\mathbb{Z}_p\}$

  con $m_1 \geq 2, m_2 \geq 3, m_3 \geq 6, s_0, s_2, s_3 \in F_p^*, s_4, s_5 \in F_p$

$(\star\star\star)$ si $s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, m_2 \geq 4$

- si $s_0 = 0, m_1 \geq 1$, entonces

  $\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2-2}(s_1+ps_2), p^{m_3-3}(s_3+ps_4+p^2s_5), p^3, p^3)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5-u_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, , u_5-u_3 \in p^3\mathbb{Z}_p, u_5-u_4 \in p\mathbb{Z}_p\}$

  con $m_1 \geq 1, m_2 \geq 4, m_3 \geq 6, s_1, s_3 \in F_p^*, s_2, s_4, s_5 \in F_p$

- si $s_0 \in F_p^*, m_1 \geq 2$, entonces

  $\mathbf{I} = (p^{m_1-1}s_0, p^{m_2-2}(s_1+ps_2), p^{m_3-3}(s_3+ps_4+p^2s_5), p^3, p^3)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5-u_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5-u_1, u_5-u_4 \in p\mathbb{Z}_p, u_5-u_3 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$

  con $m_1 \geq 2, m_2 \geq 4, m_3 \geq 6, s_0, s_1, s_3 \in F_p^*, s_2, s_4, s_5 \in F_p$

Caso $m_4 = 5$

$$p(s_6 + ps_7 + p^2s_8 + p^3s_9) = p^3 \text{ mód } p^4\mathbb{Z}_p$$

de aquí $s_6 = s_7 = 0, s_8 = 1, s_9 \in F_p$

Analogamente al caso anterior $m_4 = 4$ obtenemos 24 ideales que se obtienen de los 24 ideales anteriores al reemplazar la cuarta entrada p^3 por $p^3(1+ps_9)$ y la restricción $u_5 - u_4 \in p\mathbb{Z}_p$ por $u_5 - u_4 \in p^2\mathbb{Z}_p$ y $s_9 \in F_p$. Redenotando, obtenemos los siguientes ideales:

1') $\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2}, p^{m_3}, p^3(1+ps_7), p^3)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5-u_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$ con $s_0 = s_1 = s_3 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2 = s_4 = s_5 = s_8 = s_9 = 0, s_7 \in F_p$

2') $\mathbf{I} = (p^{m_1}s_0, p^{m_2}, p^{m_3}, p^3(1+ps_7), p^3)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5-u_1 \in p\mathbb{Z}_p, u_5-u_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$ con $s_1 = s_3 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2 = s_4 = s_5 = s_8 = s_9 = 0, s_7 \in F_p, s_0 \in F_p^*$

3') $\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2}s_1, p^{m_3}, p^3(1+ps_7), p^3)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5-u_2 \in p\mathbb{Z}_p, u_5-u_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$ con $s_0 = s_3 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2 = s_4 = s_5 = s_8 = s_9 = 0, s_1 \in F_p^*, s_7 \in F_p$

4') $\mathbf{I} = (p^{m_1}s_0, p^{m_2}s_1, p^{m_3}, p^3(1+ps_7), p^3)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5-u_1 \in p\mathbb{Z}_p, u_5-u_2 \in p\mathbb{Z}_p, u_5-u_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$ con $s_3 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2 = s_4 = s_5 = s_8 = s_9 = 0, s_7 \in F_p, s_0, s_1 \in F_p^*$

5') $\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2}(s_1+ps_2), p^{m_3}, p^3(1+ps_7), p^3)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5-u_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5-u_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$ con $s_0 = s_3 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_4 = s_5 = s_8 = s_9 = 0, s_2, s_7 \in F_p, s_1 \in F_p^*$

6') $\mathbf{I} = (p^{m_1}s_0, p^{m_2}(s_1+ps_2), p^{m_3}, p^3(1+ps_7), p^3)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5-u_1 \in p\mathbb{Z}_p, u_5-u_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5-u_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$ con $s_3 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_4 = s_5 = s_8 = s_9 = 0, s_2, s_7 \in F_p, s_0, s_1 \in F_p^*$

7') $\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2}, p^{m_3}s_3, p^3(1+ps_7), p^3)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5 - u_3 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$ con $s_0 = s_1 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2 = s_4 = s_5 = s_8 = s_9 = 0, s_7 \in F_p, s_3 \in F_p^*$

8') $\mathbf{I} = (p^{m_1}s_0, p^{m_2}, p^{m_3}s_3, p^3(1+ps_7), p^3)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5 - u_1 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_3 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$ con $s_1 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2 = s_4 = s_5 = s_8 = s_9 = 0, s_7 \in F_p, s_0, s_3 \in F_p^*$

9') $\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2}s_1, p^{m_3}s_3, p^3(1+ps_7), p^3)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5 - u_2 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_3 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$ con $s_0 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2 = s_4 = s_5 = s_8 = s_9 = 0, s_7 \in F_p, s_1, s_3 \in F_p^*$

10') $\mathbf{I} = (p^{m_1}s_0, p^{m_2}s_1, p^{m_3}s_3, p^3(1+ps_7), p^3)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5 - u_1 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_2 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_3 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$ con $s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2 = s_4 = s_5 = s_8 = s_9 = 0, s_7 \in F_p, s_0, s_1, s_3 \in F_p^*$

11') $\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2}(s_1+ps_2), p^{m_3}s_3, p^3(1+ps_7), p^3)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5 - u_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5 - u_3 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$ con $s_0 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, , m_3 \geq 3, s_4 = s_5 = s_8 = s_9 = 0, s_2, s_7 \in F_p, s_1, s_3 \in F_p^*$

12') $\mathbf{I} = (p^{m_1}s_0, p^{m_2}(s_1+ps_2), p^{m_3}s_3, p^3(1+ps_7), p^3)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5 - u_1 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5 - u_3 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$ con $s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, , m_3 \geq 3, s_4 = s_5 = s_8 = s_9 = 0, s_2, s_7 \in F_p, s_0, s_1, s_3 \in F_p^*$

13') $\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2}, p^{m_3}(s_3+ps_4), p^3(1+ps_7), p^3)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5 - u_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5 - u_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$ con $s_0 = s_1 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2 = s_5 = s_8 = s_9 = 0, s_4, s_7 \in F_p, s_3 \in F_p^*$

14') $\mathbf{I} = (p^{m_1}s_0, p^{m_2}, p^{m_3}(s_3+ps_4), p^3(1+ps_7), p^3)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5 - u_1 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5 - u_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$ con $s_1 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2 = s_5 = s_8 = s_9 = 0, s_4, s_7 \in F_p, s_0, s_3 \in F_p^*$

15') $\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2}s_1, p^{m_3}(s_3+ps_4), p^3(1+ps_7), p^3)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5 - u_2 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5 - u_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$ con $s_0 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2 = s_5 = s_8 = s_9 = 0, s_4, s_7 \in F_p, s_1, s_3 \in F_p^*$

16') $\mathbf{I} = (p^{m_1}s_0, p^{m_2}s_1, p^{m_3}(s_3+ps_4), p^3(1+ps_7), p^3)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5 - u_1 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_2 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5 - u_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$ con $s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2 = s_5 = s_8 = s_9 = 0, s_4, s_7 \in F_p, s_0, s_1, s_3 \in F_p^*$

17') $\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2}(s_1+ps_2), p^{m_3}(s_3+ps_4), p^3(1+ps_7), p^3)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5 - u_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5 - u_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5 - u_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$ con $s_0 = s_6 = 1, s_5 = s_8 = s_9 = 0, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2, s_4, s_7 \in F_p, s_1, s_3 \in F_p^*$

18') $\mathbf{I} = (p^{m_1}s_0, p^{m_2}(s_1+ps_2), p^{m_3}(s_3+ps_4), p^3(1+ps_7), p^3)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5 - u_1 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5 - u_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5 - u_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$ con $s_6 = 1, s_5 = s_8 = s_9 = 0, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2, s_4, s_7 \in F_p, s_0, s_1, s_3 \in F_p^*$

19') $\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2}, p^{m_3}(s_3+ps_4+p^2s_5), p^3(1+ps_7), p^3)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5 - u_3 \in p^3\mathbb{Z}, u_5 - u_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$ con $s_0 = s_1 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2 = s_8 = s_9 = 0, s_4, s_5, s_7 \in F_p, s_3 \in F_p^*$

20') $\mathbf{I} = (p^{m_1}s_0, p^{m_2}, p^{m_3}(s_3+ps_4+p^2s_5), p^3(1+ps_7), p^3)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5 - u_1 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_3 \in p^3\mathbb{Z}_p, u_5 - u_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$ con $s_1 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2 = s_8 = s_9 = 0, s_4, s_5, s_7 \in F_p, s_0, s_3 \in F_p^*$

21') $\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2}s_1, p^{m_3}(s_3+ps_4+p^2s_5), p^3(1+ps_7), p^3)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5 - u_2 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_3 \in p^3\mathbb{Z}_p, u_5 - u_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$ con $s_0 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2 = s_8 = s_9 = 0, s_4, s_5, s_7 \in F_p, s_1, s_3 \in F_p^*$

22') $\mathbf{I} = (p^{m_1}s_0, p^{m_2}s_1, p^{m_3}(s_3+ps_4+p^2s_5), p^3(1+ps_7), p^3)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5 - u_1 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_2 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_3 \in p^3\mathbb{Z}_p, u_5 - u_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$ con $s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2 = s_8 = s_9 = 0, s_4, s_5, s_7 \in F_p, s_0, s_1, s_3 \in F_p^*$

23') $\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2}(s_1+ps_2), p^{m_3}(s_3+ps_4+p^2s_5), p^3(1+ps_7), p^3)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5 - u_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5 - u_3 \in p^3\mathbb{Z}_p, u_5 - u_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$ con $s_0 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, s_8 = s_9 = 0, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2, s_4, s_5, s_7 \in F_p, s_1, s_3 \in F_p^*$

24') $\mathbf{I} = (p^{m_1}s_0, p^{m_2}(s_1+ps_2), p^{m_3}(s_3+ps_4+p^2s_5), p^3(1+ps_7), p^3)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5 - u_1 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5 - u_3 \in p^3\mathbb{Z}_p, u_5 - u_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$ con $s_6 = 1, m_4 = t = 3, s_8 = s_9 = 0, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2, s_4, s_5, s_7 \in F_p, s_0, s_1, s_3 \in F_p^*$

Caso $m_4 = 6$

$$p^2(s_6 + ps_7 + p^2 s_8 + p^3 s_9) = p^3 \text{ mód } p^4\mathbb{Z}_p$$

de aquí $s_6 = 0, s_7 = 1, s_8, s_9 \in F_p$

Analogamente al caso $m_4 = 4$ obtenemos 24 ideales que se obtienen reemplazando:

1. La cuarta entrada p^3 por $p^3(1 + ps_8 + p^2 s_9)$.

2. La restricción $u_5 - u_4 \in p\mathbb{Z}_p$ por $u_5 - u_4 \in p^3\mathbb{Z}_p$

Además agregamos $s_8, s_9 \in F_p$. Redenotando, obtenemos los siguientes ideales:

1") $\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2}, p^{m_3}, p^3(1 + ps_7 + p^2 s_8), p^3)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5 - u_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$ con $s_0 = s_1 = s_3 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2 = s_4 = s_5 = s_9 = 0, s_7, s_8 \in F_p$

2") $\mathbf{I} = (p^{m_1}s_0, p^{m_2}, p^{m_3}, p^3(1 + ps_7 + p^2 s_8), p^3)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5 - u_1 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$ con $s_1 = s_3 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2 = s_4 = s_5 = s_9 = 0, s_7, s_8 \in F_p, s_0 \in F_p^*$

3") $\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2}s_1, p^{m_3}, p^3(1 + ps_7 + p^2 s_8), p^3)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5 - u_2 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$ con $s_0 = s_3 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2 = s_4 = s_5 = s_9 = 0, s_1 \in F_p^*, s_7, s_8 \in F_p$

4") $\mathbf{I} = (p^{m_1}s_0, p^{m_2}s_1, p^{m_3}, p^3(1+ps_7+p^2 s_8), p^3)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5 - u_1 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_2 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$ con $s_3 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2 = s_4 = s_5 = s_9 = 0, s_7, s_8 \in F_p, s_0, s_1 \in F_p^*$

5") $\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2}(s_1 + ps_2), p^{m_3}, p^3(1 + ps_7 + p^2 s_8), p^3)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5 - u_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5 - u_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$ con $s_0 = s_3 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_4 = s_5 = s_9 = 0, s_2, s_7, s_8 \in F_p, s_1 \in F_p^*$

6") $\mathbf{I} = (p^{m_1}s_0, p^{m_2}(s_1 + ps_2), p^{m_3}, p^3(1+ps_7+p^2 s_8), p^3)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5 - u_1 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5 - u_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$ con $s_3 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_4 = s_5 = s_9 = 0, s_2, s_7, s_8 \in F_p, s_0, s_1 \in F_p^*$

7") $\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2}, p^{m_3}s_3, p^3(1 + ps_7 + p^2 s_8), p^3)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5 - u_3 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$ con $s_0 = s_1 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2 = s_4 = s_5 = s_9 = 0, s_7, s_8 \in F_p, s_3 \in F_p^*$

8") $\mathbf{I} = (p^{m_1}s_0, p^{m_2}, p^{m_3}s_3, p^3(1+ps_7+p^2 s_8), p^3)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5 - u_1 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_3 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$ con $s_1 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2 = s_4 = s_5 = s_9 = 0, s_7, s_8 \in F_p, s_0, s_3 \in F_p^*$

9") $\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2}s_1, p^{m_3}s_3, p^3(1+ps_7+p^2 s_8), p^3)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5 - u_2 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_3 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$ con $s_0 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2 = s_4 = s_5 = s_9 = 0, s_7, s_8 \in F_p, s_1, s_3 \in F_p^*$

10") $\mathbf{I} = (p^{m_1}s_0, p^{m_2}s_1, p^{m_3}s_3, p^3(1 + ps_7 + p^2 s_8), p^3)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5 - u_1 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_2 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_3 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$ con $s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2 = s_4 = s_5 = s_9 = 0, s_7, s_8 \in F_p, s_0, s_1, s_3 \in F_p^*$

11") $\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2}(s_1 + ps_2), p^{m_3}s_3, p^3(1+ps_7+p^2 s_8), p^3)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5 - u_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5 - u_3 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$ con $s_0 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, , m_3 \geq 3, s_4 = s_5 = s_9 = 0, s_2, s_7, s_8 \in F_p, s_1, s_3 \in F_p^*$

12") $\mathbf{I} = (p^{m_1}s_0, p^{m_2}(s_1+ps_2), p^{m_3}s_3, p^3(1+ps_7+p^2 s_8), p^3)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5 - u_1 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5 - u_3 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$ con $s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, , m_3 \geq 3, s_4 = s_5 = s_9 = 0, s_2, s_7, s_8 \in F_p, s_0, s_1, s_3 \in F_p^*$

13") $\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2}, p^{m_3}(s_3 + ps_4), p^3(1 + ps_7 + p^2 s_8), p^3)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5 - u_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5 - u_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$ con $s_0 = s_1 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2 = s_5 = s_9 = 0, s_4, s_7, s_8 \in F_p, s_3 \in F_p^*$

14") $\mathbf{I} = (p^{m_1}s_0, p^{m_2}, p^{m_3}(s_3 + ps_4), p^3(1 + ps_7 + p^2 s_8), p^3)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5 - u_1 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5 - u_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$ con $s_1 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2 = s_5 = s_9 = 0, s_4, s_7, s_8 \in F_p, s_0, s_3 \in F_p^*$

15") $\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2}s_1, p^{m_3}(s_3 + ps_4), p^3(1 + ps_7 + p^2 s_8), p^3)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5 - u_2 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5 - u_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$ con $s_0 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2 = s_5 = s_9 = 0, s_4, s_7, s_8 \in F_p, s_1, s_3 \in F_p^*$

16") $\mathbf{I} = (p^{m_1}s_0, p^{m_2}s_1, p^{m_3}(s_3+ps_4), p^3(1+ps_7+p^2s_8), p^3)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5-u_1 \in p\mathbb{Z}_p, u_5-u_2 \in p\mathbb{Z}_p, u_5-u_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5-u_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$ con $s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2 = s_5 = s_9 = 0, s_4, s_7, s_8 \in F_p, s_0, s_1, s_3 \in F_p^*$

17") $\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2}(s_1+ps_2), p^{m_3}(s_3+ps_4), p^3(1+ps_7+p^2s_8), p^3)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5-u_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5-u_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5-u_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$ con $s_0 = s_6 = 1, s_5 = s_9 = 0, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2, s_4, s_7, s_8 \in F_p, s_1, s_3 \in F_p^*$

18") $\mathbf{I} = (p^{m_1}s_0, p^{m_2}(s_1+ps_2), p^{m_3}(s_3+ps_4), p^3(1+ps_7+p^2s_8), p^3)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5-u_1 \in p\mathbb{Z}_p, u_5-u_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5-u_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5-u_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$ con $s_6 = 1, s_5 = s_9 = 0, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2, s_4, s_7, s_8 \in F_p, s_0, s_1, s_3 \in F_p^*$

19") $\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2}, p^{m_3}(s_3+ps_4+p^2s_5), p^3(1+ps_7+p^2s_8), p^3)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5-u_3 \in p^3\mathbb{Z}, u_5-u_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$ con $s_0 = s_1 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2 = s_9 = 0, s_4, s_5, s_7, s_8 \in F_p, s_3 \in F_p^*$

20") $\mathbf{I} = (p^{m_1}s_0, p^{m_2}, p^{m_3}(s_3+ps_4+p^2s_5), p^3(1+ps_7+p^2s_8), p^3)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5-u_1 \in p\mathbb{Z}_p, u_5-u_3 \in p^3\mathbb{Z}_p, u_5-u_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$ con $s_1 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2 = s_9 = 0, s_4, s_5, s_7, s_8 \in F_p, s_0, s_3 \in F_p^*$

21") $\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2}s_1, p^{m_3}(s_3+ps_4+p^2s_5), p^3(1+ps_7+p^2s_8), p^3)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5-u_2 \in p\mathbb{Z}_p, u_5-u_3 \in p^3\mathbb{Z}_p, u_5-u_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$ con $s_0 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2 = s_9 = 0, s_4, s_5, s_7, s_8 \in F_p, s_1, s_3 \in F_p^*$

22") $\mathbf{I} = (p^{m_1}s_0, p^{m_2}s_1, p^{m_3}(s_3+ps_4+p^2s_5), p^3(1+ps_7+p^2s_8), p^3)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5-u_1 \in p\mathbb{Z}_p, u_5-u_2 \in p\mathbb{Z}_p, u_5-u_3 \in p^3\mathbb{Z}_p, u_5-u_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$ con $s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2 = s_9 = 0, s_4, s_5, s_7, s_8 \in F_p, s_0, s_1, s_3 \in F_p^*$

23") $\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2}(s_1+ps_2), p^{m_3}(s_3+ps_4+p^2s_5), p^3(1+ps_7+p^2s_8), p^3)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5-u_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5-u_3 \in p^3\mathbb{Z}_p, u_5-u_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$ con $s_0 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, s_9 = 0, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2, s_4, s_5, s_7, s_8 \in F_p, s_1, s_3 \in F_p^*$

24") $\mathbf{I} = (p^{m_1}s_0, p^{m_2}(s_1+ps_2), p^{m_3}(s_3+ps_4+p^2s_5), p^3(1+ps_7+p^2s_8), p^3)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5-u_1 \in p\mathbb{Z}_p, u_5-u_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5-u_3 \in p^3\mathbb{Z}_p, u_5-u_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$ con $s_6 = 1, m_4 = t = 3, s_9 = 0, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2, s_4, s_5, s_7, s_8 \in F_p, s_0, s_1, s_3 \in F_p^*$

Caso $m_4 = 7$

$$p^3(s_6+ps_7+p^2s_8+p^3s_9) = p^3 \text{ mód } p^4\mathbb{Z}_p$$

de aquí $s_6 = 1, s_7, s_8, s_9 \in F_p$ Como en los casos anteriores reemplazamos

1. La cuarta entrada p^3 por $p^3(1+ps_7+p^2s_8+p^3s_9)$.
2. La restricción $u_5-u_4 \in p\mathbb{Z}_p$ por $u_5-u_4 \in p^4\mathbb{Z}_p$

Además agregamos $s_7, s_8, s_9 \in F_p$. Redenotando, obtenemos los siguientes ideales:

1"') $\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2}, p^{m_3}, p^3(1+ps_7+p^2s_8+p^3s_9), p^3)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5-u_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\}$ con $s_0 = s_1 = s_3 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2 = s_4 = s_5 = 0, s_7, s_8, s_9 \in F_p$

2"') $\mathbf{I} = (p^{m_1}s_0, p^{m_2}, p^{m_3}, p^3(1+ps_7+p^2s_8+p^3s_9), p^3)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5-u_1 \in p\mathbb{Z}_p, u_5-u_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\}$ con $s_1 = s_3 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2 = s_4 = s_5 = 0, s_7, s_8, s_9 \in F_p, s_0 \in F_p^*$

3"') $\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2}s_1, p^{m_3}, p^3(1+ps_7+p^2s_8+p^3s_9), p^3)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5-u_2 \in p\mathbb{Z}_p, u_5-u_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\}$ con $s_0 = s_3 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2 = s_4 = s_5 = 0, s_1 \in F_p^*, s_7, s_8, s_9 \in F_p$

4"') $\mathbf{I} = (p^{m_1}s_0, p^{m_2}s_1, p^{m_3}, p^3(1+ps_7+p^2s_8+p^3s_9), p^3)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5-u_1 \in p\mathbb{Z}_p, u_5-u_2 \in p\mathbb{Z}_p, u_5-u_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\}$ con $s_3 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2 = s_4 = s_5 = 0, s_7, s_8, s_9 \in F_p, s_0, s_1 \in F_p^*$

5"') $\mathbf{I}=(p^{m_1},p^{m_2}(s_1+ps_2),p^{m_3},p^3(1+ps_7+p^2s_8+p^3s_9),p^3)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5):u_5-u_2\in p^2\mathbb{Z}_p,u_5-u_4\in p^4\mathbb{Z}_p\}$ con $s_0=s_3=s_6=1,m_4=t=3,m_1\geq 1,m_2\geq 2,m_3\geq 3,s_4=s_5=0,s_2,s_7,s_8,s_9\in F_p,s_1\in F_p^*$

6"') $\mathbf{I}=(p^{m_1}s_0,p^{m_2}(s_1+ps_2),p^{m_3},p^3(1+ps_7+p^2s_8+p^3s_9),p^3)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5):u_5-u_1\in p\mathbb{Z}_p,u_5-u_2\in p^2\mathbb{Z}_p,u_5-u_4\in p^4\mathbb{Z}_p\}$ con $s_3=s_6=1,m_4=t=3,m_1\geq 1,m_2\geq 2,m_3\geq 3,s_4=s_5=0,s_2,s_7,s_8,s_9\in F_p,s_0,s_1\in F_p^*$

7"') $\mathbf{I}=(p^{m_1},p^{m_2},p^{m_3}s_3,p^3(1+ps_7+p^2s_8+p^3s_9),p^3)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5):u_5-u_3\in p\mathbb{Z}_p,u_5-u_4\in p^4\mathbb{Z}_p\}$ con $s_0=s_1=s_6=1,m_4=t=3,m_1\geq 1,m_2\geq 2,m_3\geq 3,s_2=s_4=s_5=0,s_7,s_8,s_9\in F_p,s_3\in F_p^*$

8"') $\mathbf{I}=(p^{m_1}s_0,p^{m_2},p^{m_3}s_3,p^3(1+ps_7+p^2s_8+p^3s_9),p^3)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5):u_5-u_1\in p\mathbb{Z}_p,u_5-u_3\in p\mathbb{Z}_p,u_5-u_4\in p^4\mathbb{Z}_p\}$ con $s_1=s_6=1,m_4=t=3,m_1\geq 1,m_2\geq 2,m_3\geq 3,s_2=s_4=s_5=0,s_7,s_8,s_9\in F_p,s_0,s_3\in F_p^*$

9"') $\mathbf{I}=(p^{m_1},p^{m_2}s_1,p^{m_3}s_3,p^3(1+ps_7+p^2s_8+p^3s_9),p^3)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5):u_5-u_2\in p\mathbb{Z}_p,u_5-u_3\in p\mathbb{Z}_p,u_5-u_4\in p^4\mathbb{Z}_p\}$ con $s_0=s_6=1,m_4=t=3,m_1\geq 1,m_2\geq 2,m_3\geq 3,s_2=s_4=s_5=0,s_7,s_8,s_9\in F_p,s_1,s_3\in F_p^*$

10"') $\mathbf{I}=(p^{m_1}s_0,p^{m_2}s_1,p^{m_3}s_3,p^3(1+ps_7+p^2s_8+p^3s_9),p^3)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5):u_5-u_1\in p\mathbb{Z}_p,u_5-u_2\in p\mathbb{Z}_p,u_5-u_3\in p\mathbb{Z}_p,u_5-u_4\in p^4\mathbb{Z}_p\}$ con $s_6=1,m_4=t=3,m_1\geq 1,m_2\geq 2,m_3\geq 3,s_2=s_4=s_5=0,s_7,s_8,s_9\in F_p,s_0,s_1,s_3\in F_p^*$

11"') $\mathbf{I}=(p^{m_1},p^{m_2}(s_1+ps_2),p^{m_3}s_3,p^3(1+ps_7+p^2s_8+p^3s_9),p^3)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5):u_5-u_2\in p^2\mathbb{Z}_p,u_5-u_3\in p\mathbb{Z}_p,u_5-u_4\in p^4\mathbb{Z}_p\}$ con $s_0=s_6=1,m_4=t=3,m_1\geq 1,m_2\geq 2,,m_3\geq 3,s_4=s_5=0,s_2,s_7,s_8,s_9\in F_p,s_1,s_3\in F_p^*$

12"') $\mathbf{I}=(p^{m_1}s_0,p^{m_2}(s_1+ps_2),p^{m_3}s_3,p^3(1+ps_7+p^2s_8+p^3s_9),p^3)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5):u_5-u_1\in p\mathbb{Z}_p,u_5-u_2\in p^2\mathbb{Z}_p,u_5-u_3\in p\mathbb{Z}_p,u_5-u_4\in p^4\mathbb{Z}_p\}$ con $s_6=1,m_4=t=3,m_1\geq 1,m_2\geq 2,,m_3\geq 3,s_4=s_5=0,s_2,s_7,s_8,s_9\in F_p,s_0,s_1,s_3\in F_p^*$

13"') $\mathbf{I}=(p^{m_1},p^{m_2},p^{m_3}(s_3+ps_4),p^3(1+ps_7+p^2s_8+p^3s_9),p^3)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5):u_5-u_3\in p^2\mathbb{Z}_p,u_5-u_4\in p^4\mathbb{Z}_p\}$ con $s_0=s_1=s_6=1,m_4=t=3,m_1\geq 1,m_2\geq 2,m_3\geq 3,s_2=s_5=0,s_4,s_7,s_8,s_9\in F_p,s_3\in F_p^*$

14"') $\mathbf{I}=(p^{m_1}s_0,p^{m_2},p^{m_3}(s_3+ps_4),p^3(1+ps_7+p^2s_8+p^3s_9),p^3)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5):u_5-u_1\in p\mathbb{Z}_p,u_5-u_3\in p^2\mathbb{Z}_p,u_5-u_4\in p^4\mathbb{Z}_p\}$ con $s_1=s_6=1,m_4=t=3,m_1\geq 1,m_2\geq 2,m_3\geq 3,s_2=s_5=0,s_4,s_7,s_8,s_9\in F_p,s_0,s_3\in F_p^*$

15"') $\mathbf{I}=(p^{m_1},p^{m_2}s_1,p^{m_3}(s_3+ps_4),p^3(1+ps_7+p^2s_8+p^3s_9),p^3)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5):u_5-u_2\in p\mathbb{Z}_p,u_5-u_3\in p^2\mathbb{Z}_p,u_5-u_4\in p^4\mathbb{Z}_p\}$ con $s_0=s_6=1,m_4=t=3,m_1\geq 1,m_2\geq 2,m_3\geq 3,s_2=s_5=0,s_4,s_7,s_8,s_9\in F_p,s_1,s_3\in F_p^*$

16"') $\mathbf{I}=(p^{m_1}s_0,p^{m_2}s_1,p^{m_3}(s_3+ps_4),p^3(1+ps_7+p^2s_8+p^3s_9),p^3)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5):u_5-u_1\in p\mathbb{Z}_p,u_5-u_2\in p\mathbb{Z}_p,u_5-u_3\in p^2\mathbb{Z}_p,u_5-u_4\in p^4\mathbb{Z}_p\}$ con $s_6=1,m_4=t=3,m_1\geq 1,m_2\geq 2,m_3\geq 3,s_2=s_5=0,s_4,s_7,s_8,s_9\in F_p,s_0,s_1,s_3\in F_p^*$

17"') $\mathbf{I}=(p^{m_1},p^{m_2}(s_1+ps_2),p^{m_3}(s_3+ps_4),p^3(1+ps_7+p^2s_8+p^3s_9),p^3)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5):u_5-u_2\in p^2\mathbb{Z}_p,u_5-u_3\in p^2\mathbb{Z}_p,u_5-u_4\in p^4\mathbb{Z}_p\}$ con $s_0=s_6=1,s_5=0,m_4=t=3,m_1\geq 1,m_2\geq 2,m_3\geq 3,s_2,s_4,s_7,s_8,s_9\in F_p,s_1,s_3\in F_p^*$

18"') $\mathbf{I}=(p^{m_1}s_0,p^{m_2}(s_1+ps_2),p^{m_3}(s_3+ps_4),p^3(1+ps_7+p^2s_8+p^3s_9),p^3)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5):u_5-u_1\in p\mathbb{Z}_p,u_5-u_2\in p^2\mathbb{Z}_p,u_5-u_3\in p^2\mathbb{Z}_p,u_5-u_4\in p^4\mathbb{Z}_p\}$ con $s_6=1,s_5=0,m_4=t=3,m_1\geq 1,m_2\geq 2,m_3\geq 3,s_2,s_4,s_7,s_8,s_9\in F_p,s_0,s_1,s_3\in F_p^*$

19"') $\mathbf{I}=(p^{m_1},p^{m_2},p^{m_3}(s_3+ps_4+p^2s_5),p^3(1+ps_7+p^2s_8+p^3s_9),p^3)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5):u_5-u_3\in p^3\mathbb{Z},u_5-u_4\in p^4\mathbb{Z}_p\}$ con $s_0=s_1=s_6=1,m_4=t=3,m_1\geq 1,m_2\geq 2,m_3\geq 3,s_2=0,s_4,s_5,s_7,s_8,s_9\in F_p,s_3\in F_p^*$

20"') $\mathbf{I}=(p^{m_1}s_0,p^{m_2},p^{m_3}(s_3+ps_4+p^2s_5),p^3(1+ps_7+p^2s_8+p^3s_9),p^3)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5):u_5-u_1\in p\mathbb{Z}_p,u_5-u_3\in p^3\mathbb{Z}_p,u_5-u_4\in p^4\mathbb{Z}_p\}$ con $s_1=s_6=1,m_4=t=3,m_1\geq 1,m_2\geq 2,m_3\geq 3,s_2=0,s_4,s_5,s_7,s_8,s_9\in F_p,s_0,s_3\in F_p^*$

21"') $\mathbf{I}=(p^{m_1},p^{m_2}s_1,p^{m_3}(s_3+ps_4+p^2s_5),p^3(1+ps_7+p^2s_8+p^3s_9),p^3)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5):u_5-u_2\in p\mathbb{Z}_p,u_5-u_3\in p^3\mathbb{Z}_p,u_5-u_4\in p^4\mathbb{Z}_p\}$ con $s_0=s_6=1,m_4=t=3,m_1\geq 1,m_2\geq 2,m_3\geq 3,s_2=0,s_4,s_5,s_7,s_8,s_9\in F_p,s_1,s_3\in F_p^*$

22"') $\mathbf{I} = (p^{m_1}s_0, p^{m_2}s_1, p^{m_3}(s_3+ps_4+p^2s_5), p^3(1+ps_7+p^2s_8+p^3s_9), p^3)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5-u_1 \in p\mathbb{Z}_p, u_5-u_2 \in p\mathbb{Z}_p, u_5-u_3 \in p^3\mathbb{Z}_p, u_5-u_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\}$ con $s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2 = 0, s_4, s_5, s_7, s_8, s_9 \in F_p, s_0, s_1, s_3 \in F_p^*$

23"') $\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2}(s_1+ps_2), p^{m_3}(s_3+ps_4+p^2s_5), p^3(1+ps_7+p^2s_8+p^3s_9), p^3)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5-u_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5-u_3 \in p^3\mathbb{Z}_p, u_5-u_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\}$ con $s_0 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2, s_4, s_5, s_7, s_8, s_9 \in F_p, s_1, s_3 \in F_p^*$

24"') $\mathbf{I} = (p^{m_1}s_0, p^{m_2}(s_1+ps_2), p^{m_3}(s_3+ps_4+p^2s_5), p^3(1+ps_7+p^2s_8+p^3s_9), p^3)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5-u_1 \in p\mathbb{Z}_p, u_5-u_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5-u_3 \in p^3\mathbb{Z}_p, u_5-u_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\}$ con $s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2, s_4, s_5, s_7, s_8, s_9 \in F_p, s_0, s_1, s_3 \in F_p^*$

Veamos el caso cuando $t \geq 4$

$$p^{m_4-4}(s_6+ps_7+p^2s_8+p^3s_9) = 0 \text{ mód } p^4\mathbb{Z}_p$$

esto implica los siguientes casos:

Caso 1 $s_6 = s_7 = s_8 = s_9 = 0$, entonces $m_4 \geq 4$.

$$p^{m_3-3}(s_3+ps_4+p^2s_5) = 0 \text{ mód } p^3\mathbb{Z}_p$$

de donde obtenemos los siguientes incisos:

i) Caso $s_3 = s_4 = s_5 = 0, m_3 \geq 3$

($\star$) si $s_1 = s_2 = 0, m_2 \geq 2$

$$p^{m_1-1}s_0 = 0 \text{ mód } p\mathbb{Z}_p$$

- si $s_0 = 0, m_1 \geq 1$, entonces

$$\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2}, p^{m_3}, p^{m_4}, p^t)\mathbb{Z}_p^5$$

con $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4$

- si $s_0 \in F_p^*, m_1 \geq 2$, entonces

$$\mathbf{I} = (p^{m_1-1}s_0, p^{m_2}, p^{m_3}, p^{m_4}, p^t)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5-u_1 \in p\mathbb{Z}_p\}$$

con $m_1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0 \in F_p^*$

($\star\star$) si $s_1 = 0, s_2 \in F_p^*, m_2 \geq 3$

- si $s_0 = 0, m_1 \geq 1$, entonces

$$\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2-1}s_2, p^{m_3}, p^{m_4}, p^t)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5-u_2 \in p\mathbb{Z}_p\}$$

con $m_1 \geq 1, m_2 \geq 3, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 \in F_p^*$

- si $s_0 \in F_p^*, m_1 \geq 2$, entonces

$$\mathbf{I} = (p^{m_1-1}s_0, p^{m_2-1}s_2, p^{m_3}, p^{m_4}, p^t)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5 - u_1, u_5 - u_2 \in p\mathbb{Z}_p\}$$

con $m_1 \geq 2, m_2 \geq 3, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0, s_2 \in F_p^*$

$(\star\star\star)$ si $s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, m_2 \geq 4$

- si $s_0 = 0, m_1 \geq 1$, entonces

$$\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2-2}(s_1 + ps_2), p^{m_3}, p^{m_4}, p^t)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5 - u_2 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$$

con $m_1 \geq 1, m_2 \geq 4, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p$

- si $s_0 \in F_p^*, m_1 \geq 2$, entonces

$$\mathbf{I} = (p^{m_1-1}s_0, p^{m_2-2}(s_1 + ps_2), p^{m_3}, p^{m_4}, p^t)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5 - u_1 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_2 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$$

con $m_1 \geq 2, m_2 \geq 4, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0, s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p$

$ii)$ Caso $s_3 = s_4 = 0, s_5 \in F_p^*, m_3 \geq 4$

$(\star)$ si $s_1 = s_2 = 0, m_2 \geq 2$

$$p^{m_1-1}s_0 = 0 \text{ mód } p\mathbb{Z}_p$$

- si $s_0 = 0, m_1 \geq 1$, entonces

$$\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2}, p^{m_3-1}s_5, p^{m_4}, p^t)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5 - u_3 \in p\mathbb{Z}_p\}$$

con $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 4, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_5 \in F_p^*$

- si $s_0 \in F_p^*, m_1 \geq 2$, entonces

$$\mathbf{I} = (p^{m_1-1}s_0, p^{m_2}, p^{m_3-1}s_5, p^{m_4}, p^t)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5 - u_1 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_3 \in p\mathbb{Z}_p\}$$

con $m_1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 4, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0, s_5 \in F_p^*$

$(\star\star)$ si $s_1 = 0, s_2 \in F_p^*, m_2 \geq 3$

- si $s_0 = 0, m_1 \geq 1$, entonces

$$\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2-1}s_2, p^{m_3-1}s_5, p^{m_4}, p^t)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5 - u_2 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_3 \in p\mathbb{Z}_p\}$$

con $m_1 \geq 1, m_2 \geq 3, m_3 \geq 4, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2, s_5 \in F_p^*$

- si $s_0 \in F_p^*, m_1 \geq 2$, entonces

$$\mathbf{I} = (p^{m_1-1}s_0, p^{m_2-1}s_2, p^{m_3-1}s_5, p^{m_4}, p^t)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5 - u_1 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_2 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_3 \in p\mathbb{Z}_p\}$$

con $m_1 \geq 2, m_2 \geq 3, m_3 \geq 4, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0, s_2, s_5 \in F_p^*$

$(\star\star\star)$ si $s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, m_2 \geq 4$

- si $s_0 = 0, m_1 \geq 1$, entonces

$$\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2-2}(s_1 + ps_2), p^{m_3-1}s_5, p^{m_4}, p^t)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5 - u_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5 - u_3 \in p\mathbb{Z}_p\}$$

con $m_1 \geq 1, m_2, m_3 \geq 4, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_1, s_5 \in F_p^*, s_2 \in F_p$

- si $s_0 \in F_p^*, m_1 \geq 2$, entonces

$$\mathbf{I} = (p^{m_1-1}s_0, p^{m_2-2}(s_1+ps_2), p^{m_3-1}s_5, p^{m_4}, p^t)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5-u_1 \in p\mathbb{Z}_p, u_5-u_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5-u_3 \in p\mathbb{Z}_p\}$$

con $m_1 \geq 2, m_2 \geq 4, m_3 \geq 4, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0, s_1, s_5 \in F_p^*, s_2 \in F_p$

iii) Caso $s_3 = 0, s_4 \in F_p^*, s_5 \in F_p, m_3 \geq 5$

($\star$) si $s_1 = s_2 = 0, m_2 \geq 2$

$$p^{m_1-1}s_0 = 0 \text{ mód } p\mathbb{Z}_p$$

- si $s_0 = 0, m_1 \geq 1$, entonces

$$\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2}, p^{m_3-2}(s_4 + ps_5), p^{m_4}, p^t)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5 - u_3 \in p^2\mathbb{Z}\}$$

con $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 5, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_4 \in F_p^*, s_5 \in F_p$

- si $s_0 \in F_p^*, m_1 \geq 2$, entonces

$$\mathbf{I} = (p^{m_1-1}s_0, p^{m_2}, p^{m_3-2}(s_4 + ps_5), p^{m_4}, p^t)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5 - u_1 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_3 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$$

con $m_1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 5, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0, s_4 \in F_p^*, s_5 \in F_p$

($\star\star$) si $s_1 = 0, s_2 \in F_p^*, m_2 \geq 3$

- si $s_0 = 0, m_1 \geq 1$, entonces

$$\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2-1}s_2, p^{m_3-2}(s_4 + ps_5), p^{m_4}, p^t)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5 - u_2 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_3 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$$

con $m_1 \geq 1, m_2 \geq 3, m_3 \geq 5, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2, s_4 \in F_p^*, s_5 \in F_p$

- si $s_0 \in F_p^*, m_1 \geq 2$, entonces

$$\mathbf{I} = (p^{m_1-1}s_0, p^{m_2-1}s_2, p^{m_3-2}(s_4+ps_5), p^{m_4}, p^t)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5-u_1 \in p\mathbb{Z}_p, u_5-u_2 \in p\mathbb{Z}_p, u_5-u_3 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$$

con $m_1 \geq 2, m_2 \geq 3, m_3 \geq 5, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0, s_2, s_4 \in F_p^*, s_5 \in F_p$

($\star\star\star$) si $s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, m_2 \geq 4$

- si $s_0 = 0, m_1 \geq 1$, entonces

$$\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2-2}(s_1 + ps_2), p^{m_3-2}(s_4 + ps_5), p^{m_4}, p^t)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5 - u_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5 - u_3 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$$

con $m_1 \geq 1, m_2 \geq 4, m_3 \geq 5, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_1, s_4 \in F_p^*, s_2, s_5 \in F_p$

- si $s_0 \in F_p^*, m_1 \geq 2$, entonces

$$\mathbf{I} = (p^{m_1-1}s_0, p^{m_2-2}(s_1+ps_2), p^{m_3-2}(s_4+ps_5), p^{m_4}, p^t)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5-u_1 \in p\mathbb{Z}_p u_5-u_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5-u_3 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$$

con $m_1 \geq 2, m_2 \geq 4, m_3 \geq 5, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0, s_1, s_4 \in F_p^*, s_2, s_5 \in F_p$

$iv)$ Caso $s_3 \in F_p^*, s_4, s_5 \in F_p, m_3 \geq 6$

$(\star)$ si $s_1 = s_2 = 0, m_2 \geq 2$

$$p^{m_1-1}s_0 = 0 \text{ mód } p\mathbb{Z}_p$$

- si $s_0 = 0, m_1 \geq 1$, entonces

$$\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2}, p^{m_3-3}(s_3+ps_4+p^2s_5), p^{m_4}, p^t)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5-u_3 \in p^3\mathbb{Z}\}$$

con $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 6, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_3 \in F_p^*, s_4, s_5 \in F_p$

- si $s_0 \in F_p^*, m_1 \geq 2$, entonces

$$\mathbf{I} = (p^{m_1-1}s_0, p^{m_2}, p^{m_3-3}(s_3+ps_4+p^2s_5), p^{m_4}, p^t)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5-u_1 \in p\mathbb{Z}_p, u_5-u_3 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$$

con $m_1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 6, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0, s_3 \in F_p^*, s_4, s_5 \in F_p$

$(\star\star)$ si $s_1 = 0, s_2 \in F_p^*, m_2 \geq 3$

- si $s_0 = 0, m_1 \geq 1$, entonces

$$\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2-1}s_2, p^{m_3-3}(s_3+ps_4+p^2s_5), p^{m_4}, p^t)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5-u_2 \in p\mathbb{Z}_p, u_5-u_3 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$$

con $m_1 \geq 1, m_2 \geq 3, m_3 \geq 6, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2, s_3 \in F_p^*, s_4, s_5 \in F_p$

- si $s_0 \in F_p^*, m_1 \geq 2$, entonces

$$\mathbf{I} = (p^{m_1-1}s_0, p^{m_2-1}s_2, p^{m_3-3}(s_3+ps_4+p^2s_5), p^{m_4}, p^t)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5-u_1 \in p\mathbb{Z}_p, u_5-u_2 \in p\mathbb{Z}_p, u_5-u_3 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$$

con $m_1 \geq 2, m_2 \geq 3, m_3 \geq 6, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0, s_2, s_3 \in F_p^*, s_4, s_5 \in F_p$

$(\star\star\star)$ si $s_1 \in F_p^*, s_2 \in F_p, m_2 \geq 4$

- si $s_0 = 0, m_1 \geq 1$, entonces

$$\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2-2}(s_1+ps_2), p^{m_3-3}(s_3+ps_4+p^2s_5), p^{m_4}, p^t)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5-u_2 \in p^2\mathbb{Z}_p,, u_5-u_3 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$$

con $m_1 \geq 1, m_2 \geq 4, m_3 \geq 6, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_1, s_3 \in F_p^*, s_2, s_4, s_5 \in F_p$

- si $s_0 \in F_p^*, m_1 \geq 2$, entonces

$$\mathbf{I} = (p^{m_1-1}s_0, p^{m_2-2}(s_1+ps_2), p^{m_3-3}(s_3+ps_4+p^2s_5), p^{m_4}, p^t)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5-u_1 \in p\mathbb{Z}_p, u_5-u_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5-u_3 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$$

con $m_1 \geq 2, m_2 \geq 4, m_3 \geq 6, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_0, s_1, s_3 \in F_p^*, s_2, s_4, s_5 \in F_p$

Caso 2 De la lista anterior, en el caso 1, reemplazamos p^{m_4} por $p^{m_4-1}s_9, s_9 = 0$ por $s_9 \in F_p^*$ y agregamos $u_5 - u_4 \in p\mathbb{Z}_p$. Redenotando obtenemos los siguientes ideales:

1') $\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2}, p^{m_3}, p^{m_4}s_6, p^t)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5 - u_4 \in p\mathbb{Z}_p\}$ con $s_0 = s_1 = s_3 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_4 = s_5 = s_7 = s_8 = s_9 = 0, s_6 \in F_p^*$

2') $\mathbf{I} = (p^{m_1}s_0, p^{m_2}, p^{m_3}, p^{m_4}s_6, p^t)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5 - u_1 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_4 \in p\mathbb{Z}_p\}$ con $s_1 = s_3 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_4 = s_5 = s_7 = s_8 = s_9 = 0, s_0, s_6 \in F_p^*$

3') $\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2}s_1, p^{m_3}, p^{m_4}s_6, p^t)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5 - u_2 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_4 \in p\mathbb{Z}_p\}$ con $s_0 = s_3 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_4 = s_5 = s_7 = s_8 = s_9 = 0, s_1, s_6 \in F_p^*$

4') $\mathbf{I} = (p^{m_1}s_0, p^{m_2}s_1, p^{m_3}, p^{m_4}s_6, p^t)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5 - u_1, u_5 - u_2 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_4 \in p\mathbb{Z}_p\}$ con $s_3 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_4 = s_5 = s_7 = s_8 = s_9 = 0, s_0, s_1, s_6 \in F_p^*$

5') $\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2}(s_1 + ps_2), p^{m_3}, p^{m_4}s_6, p^t)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5 - u_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5 - u_4 \in p\mathbb{Z}_p\}$ con $s_0 = s_3 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_4 = s_5 = s_7 = s_8 = s_9 = 0, s_2 \in F_p, s_1, s_6 \in F_p^*$

6') $\mathbf{I} = (p^{m_1}s_0, p^{m_2}(s_1 + ps_2), p^{m_3}, p^{m_4}s_6, p^t)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5 - u_1 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5 - u_4 \in p\mathbb{Z}_p\}$ con $s_3 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_4 = s_5 = s_7 = s_8 = s_9 = 0, s_2 \in F_p, s_0, s_1, s_6 \in F_p^*$

7') $\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2}, p^{m_3}s_3, p^{m_4}s_6, p^t)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5 - u_3 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_4 \in p\mathbb{Z}_p\}$ con $s_0 = s_1 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_4 = s_5 = s_7 = s_8 = s_9 = 0, s_3, s_6 \in F_p^*$

8') $\mathbf{I} = (p^{m_1}s_0, p^{m_2}, p^{m_3}s_3, p^{m_4}s_6, p^t)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5 - u_1, u_5 - u_3 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_4 \in p\mathbb{Z}_p\}$ con $s_1 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_4 = s_5 = s_7 = s_8 = s_9 = 0, s_0, s_3, s_6 \in F_p^*$

9') $\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2}s_1, p^{m_3}s_3, p^{m_4}s_6, p^t)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5 - u_2, u_5 - u_3 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_4 \in p\mathbb{Z}_p\}$ con $s_0 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_4 = s_5 = s_7 = s_8 = s_9 = 0, s_1, s_3, s_6 \in F_p^*$

10') $\mathbf{I} = (p^{m_1}s_0, p^{m_2}s_1, p^{m_3}s_3, p^{m_4}s_6, p^t)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5 - u_1, u_5 - u_2, u_5 - u_3 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_4 \in p\mathbb{Z}_p\}$ con $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_4 = s_5 = s_7 = s_8 = s_9 = 0, s_0, s_1, s_3, s_6 \in F_p^*$

11') $\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2}(s_1 + ps_2), p^{m_3}s_3, p^{m_4}s_6, p^t)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5 - u_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5 - u_3 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_4 \in p\mathbb{Z}_p\}$ con $s_0 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_4 = s_5 = s_7 = s_8 = s_9 = 0, s_2 \in F_p, s_1, s_3, s_6 \in F_p^*$

12') $\mathbf{I} = (p^{m_1}s_0, p^{m_2}(s_1 + ps_2), p^{m_3}s_3, p^{m_4}s_6, p^t)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5 - u_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5 - u_1, u_5 - u_3 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_4 \in p\mathbb{Z}_p\}$ con $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_4 = s_5 = s_7 = s_8 = s_9 = 0, s_2 \in F_p, s_0, s_1, s_3, s_6 \in F_p^*$

13') $\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2}, p^{m_3}(s_3 + ps_4), p^{m_4}s_6, p^t)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5 - u_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5 - u_4 \in p\mathbb{Z}_p\}$ con $s_0 = s_1 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_5 = s_7 = s_8 = s_9 = 0, s_4 \in F_p, s_3, s_6 \in F_p^*$

14') $\mathbf{I} = (p^{m_1}s_0, p^{m_2}, p^{m_3}(s_3 + ps_4), p^{m_4}s_6, p^t)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5 - u_1 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5 - u_4 \in p\mathbb{Z}_p\}$ con $s_1 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_5 = s_7 = s_8 = s_9 = 0, s_4 \in F_p, s_0, s_3, s_6 \in F_p^*$

15') $\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2}s_1, p^{m_3}(s_3 + ps_4), p^{m_4}s_6, p^t)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5 - u_2 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5 - u_4 \in p\mathbb{Z}_p\}$ con $s_0 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_5 = s_7 = s_8 = s_9 = 0, s_4 \in F_p, s_1, s_3, s_6 \in F_p^*$

16') $\mathbf{I} = (p^{m_1}s_0, p^{m_2}s_1, p^{m_3}(s_3 + ps_4), p^{m_4}s_6, p^t)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5 - u_1, u_5 - u_2 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5 - u_4 \in p\mathbb{Z}_p\}$ con $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_5 = s_7 = s_8 = s_9 = 0, s_4 \in F_p, s_0, s_1, s_3, s_6 \in F_p^*$

17') $\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2}(s_1 + ps_2), p^{m_3}(s_3 + ps_4), p^{m_4}s_6, p^t)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5 - u_2, u_5 - u_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5 - u_4 \in p\mathbb{Z}_p\}$ con $s_0 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_5 = s_7 = s_8 = s_9 = 0, s_2, s_4 \in F_p, s_1, s_3, s_6 \in F_p^*$

18') $\mathbf{I} = (p^{m_1}s_0, p^{m_2}(s_1 + ps_2), p^{m_3}(s_3 + ps_4), p^{m_4}s_6, p^t)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5 - u_1 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_2, u_5 - u_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5 - u_4 \in p\mathbb{Z}_p\}$ con $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_5 = s_7 = s_8 = s_9 = 0, s_2, s_4 \in F_p, s_0, s_1, s_3, s_6 \in F_p^*$

19') $\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2}, p^{m_3}(s_3 + ps_4 + p^2s_5), p^{m_4}s_6, p^t)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5 - u_3 \in p^3\mathbb{Z}, u_5 - u_4 \in p\mathbb{Z}_p\}$ con $s_0 = s_1 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_7 = s_8 = s_9 = 0, s_4, s_5, \in F_p, s_3, s_6 \in F_p^*$

20') $\mathbf{I} = (p^{m_1}s_0, p^{m_2}, p^{m_3}(s_3+ps_4+p^2s_5), p^{m_4}s_6, p^t)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5-u_1 \in p\mathbb{Z}_p, u_5-u_3 \in p^3\mathbb{Z}_p, u_5-u_4 \in p\mathbb{Z}_p\}$ con $s_1 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_7 = s_8 = s_9 = 0, s_4, s_5, \in F_p, s_0, s_3, s_6 \in F_p^*$

21') $\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2}s_1, p^{m_3}(s_3+ps_4+p^2s_5), p^{m_4}s_6, p^t)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5-u_2 \in p\mathbb{Z}_p, u_5-u_3 \in p^3\mathbb{Z}_p, u_5-u_4 \in p\mathbb{Z}_p\}$ con $s_0 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_7 = s_8 = s_9 = 0, s_4, s_5 \in F_p, s_1, s_3, s_6 \in F_p^*$

22') $\mathbf{I} = (p^{m_1}s_0, p^{m_2}s_1, p^{m_3}(s_3+ps_4+p^2s_5), p^{m_4}s_6, p^t)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5-u_1, u_5-u_2 \in p\mathbb{Z}_p, u_5-u_3 \in p^3\mathbb{Z}_p, u_5-u_4 \in p\mathbb{Z}_p\}$ con $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_7 = s_8 = s_9 = 0, s_4, s_5 \in F_p, s_0, s_1, s_3, s_6 \in F_p^*$

23') $\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2}(s_1+ps_2), p^{m_3}(s_3+ps_4+p^2s_5), p^{m_4}s_6, p^t)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5-u_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5-u_3 \in p^3\mathbb{Z}_p, u_5-u_4 \in p\mathbb{Z}_p\}$ con $s_0 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_7 = s_8 = s_9 = 0, s_2, s_4, s_5 \in F_p, s_1, s_3, s_6 \in F_p^*$

24') $\mathbf{I} = (p^{m_1}s_0, p^{m_2}(s_1+ps_2), p^{m_3}(s_3+ps_4+p^2s_5), p^{m_4}s_6, p^t)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5-u_1 \in p\mathbb{Z}_p, u_5-u_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5-u_3 \in p^3\mathbb{Z}_p, u_5-u_4 \in p\mathbb{Z}_p\}$ con $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_7 = s_8 = s_9 = 0, s_2, s_4, s_5 \in F_p, s_0, s_1, s_3, s_6 \in F_p^*$

Caso 3 De la lista del caso 1, reemplazamos p^{m_4} por $p^{m_4-2}(s_8+ps_9), s_8 = s_9 = 0$ por $s_8 \in F_p^*$ y $s_9 \in F_p$, y agregamos $u_5 - u_4 \in p^2\mathbb{Z}_p$. Redenotando obtenemos los siguientes ideales:

1") $\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2}, p^{m_3}, p^{m_4}(s_6+ps_7), p^t)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5-u_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$ con $s_0 = s_1 = s_3 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_4 = s_5 = s_8 = s_9 = 0, s_6 \in F_p^*, s_7 \in F_p$

2") $\mathbf{I} = (p^{m_1}s_0, p^{m_2}, p^{m_3}, p^{m_4}(s_6+ps_7), p^t)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5-u_1 \in p\mathbb{Z}_p, u_5-u_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$ con $s_1 = s_3 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_4 = s_5 = s_8 = s_9 = 0, s_0, s_6 \in F_p^*, s_7 \in F_p$

3") $\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2}s_1, p^{m_3}, p^{m_4}(s_6+ps_7), p^t)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5-u_2 \in p\mathbb{Z}_p, u_5-u_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$ con $s_0 = s_3 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_4 = s_5 = s_8 = s_9 = 0, s_1, s_6 \in F_p^*, s_7 \in F_p$

4") $\mathbf{I} = (p^{m_1}s_0, p^{m_2}s_1, p^{m_3}, p^{m_4}(s_6+ps_7), p^t)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5-u_1, u_5-u_2 \in p\mathbb{Z}_p, u_5-u_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$ con $s_3 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_4 = s_5 = s_8 = s_9 = 0, s_0, s_1, s_6 \in F_p^*, s_7 \in F_p$

5") $\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2}(s_1+ps_2), p^{m_3}, p^{m_4}(s_6+ps_7), p^t)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5-u_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5-u_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$ con $s_0 = s_3 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_4 = s_5 = s_8 = s_9 = 0, s_2, s_7 \in F_p, s_1, s_6 \in F_p^*$

6") $\mathbf{I} = (p^{m_1}s_0, p^{m_2}(s_1+ps_2), p^{m_3}, p^{m_4}(s_6+ps_7), p^t)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5-u_1 \in p\mathbb{Z}_p, u_5-u_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5-u_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$ con $s_3 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_4 = s_5 = s_8 = s_9 = 0, s_2, s_7 \in F_p, s_0, s_1, s_6 \in F_p^*$

7") $\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2}, p^{m_3}s_3, p^{m_4}(s_6+ps_7), p^t)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5-u_3 \in p\mathbb{Z}_p, u_5-u_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$ con $s_0 = s_1 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_4 = s_5 = s_8 = s_9 = 0, s_3, s_6 \in F_p^*, s_7 \in F_p$

8") $\mathbf{I} = (p^{m_1}s_0, p^{m_2}, p^{m_3}s_3, p^{m_4}(s_6+ps_7), p^t)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5-u_1, u_5-u_3 \in p\mathbb{Z}_p, u_5-u_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$ con $s_1 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_4 = s_5 = s_8 = s_9 = 0, s_0, s_3, s_6 \in F_p^*, s_7 \in F_p$

9") $\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2}s_1, p^{m_3}s_3, p^{m_4}(s_6+ps_7), p^t)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5-u_2, u_5-u_3 \in p\mathbb{Z}_p, u_5-u_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$ con $s_0 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_4 = s_5 = s_8 = s_9 = 0, s_1, s_3, s_6 \in F_p^*, s_7 \in F_p$

10") $\mathbf{I} = (p^{m_1}s_0, p^{m_2}s_1, p^{m_3}s_3, p^{m_4}(s_6+ps_7), p^t)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5-u_1, u_5-u_2, u_5-u_3 \in p\mathbb{Z}_p, u_5-u_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$ con $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_4 = s_5 = s_8 = s_9 = 0, s_0, s_1, s_3, s_6 \in F_p^*, s_7 \in F_p$

11") $\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2}(s_1+ps_2), p^{m_3}s_3, p^{m_4}(s_6+ps_7), p^t)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5-u_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5-u_3 \in p\mathbb{Z}_p, u_5-u_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$ con $s_0 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, , m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_4 = s_5 = s_8 = s_9 = 0, s_2, s_7 \in F_p, s_1, s_3, s_6 \in F_p^*$

12") $\mathbf{I} = (p^{m_1}s_0, p^{m_2}(s_1+ps_2), p^{m_3}s_3, p^{m_4}(s_6+ps_7), p^t)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5-u_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5-u_1, u_5-u_3 \in p\mathbb{Z}_p, u_5-u_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$ con $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, , m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_4 = s_5 = s_8 = s_9 = 0, s_2, s_7 \in F_p, s_0, s_1, s_3, s_6 \in F_p^*$

13") $\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2}, p^{m_3}(s_3 + ps_4), p^{m_4}(s_6 + ps_7), p^t)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5 - u_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5 - u_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$ con $s_0 = s_1 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_5 = s_8 = s_9 = 0, s_4, s_7 \in F_p, s_3, s_6 \in F_p^*$

14") $\mathbf{I} = (p^{m_1}s_0, p^{m_2}, p^{m_3}(s_3 + ps_4), p^{m_4}(s_6 + ps_7), p^t)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5 - u_1 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5 - u_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$ con $s_1 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_5 = s_8 = s_9 = 0, s_4, s_7, \in F_p, s_0, s_3, s_6 \in F_p^*$

15") $\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2}s_1, p^{m_3}(s_3 + ps_4), p^{m_4}(s_6 + ps_7), p^t)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5 - u_2 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5 - u_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$ con $s_0 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_5 = s_8 = s_9 = 0, s_4, s_7 \in F_p, s_1, s_3, s_6 \in F_p^*$

16") $\mathbf{I} = (p^{m_1}s_0, p^{m_2}s_1, p^{m_3}(s_3 + ps_4), p^{m_4}(s_6 + ps_7), p^t)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5 - u_1, u_5 - u_2 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5 - u_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$ con $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_5 = s_8 = s_9 = 0, s_4, s_7 \in F_p, s_0, s_1, s_3, s_6 \in F_p^*$

17") $\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2}(s_1 + ps_2), p^{m_3}(s_3 + ps_4), p^{m_4}(s_6 + ps_7), p^t)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5 - u_2, u_5 - u_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5 - u_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$ con $s_0 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_5 = s_8 = s_9 = 0, s_2, s_4, s_7 \in F_p, s_1, s_3, s_6 \in F_p^*$

18") $\mathbf{I} = (p^{m_1}s_0, p^{m_2}(s_1 + ps_2), p^{m_3}(s_3 + ps_4), p^{m_4}(s_6 + ps_7), p^t)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5 - u_1 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_2, u_5 - u_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5 - u_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$ con $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_5 = s_8 = s_9 = 0, s_2, s_4, s_7 \in F_p, s_0, s_1, s_3, s_6 \in F_p^*$

19") $\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2}, p^{m_3}(s_3 + ps_4 + p^2s_5), p^{m_4}(s_6 + ps_7), p^t)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5 - u_3 \in p^3\mathbb{Z}, u_5 - u_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$ con $s_0 = s_1 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_8 = s_9 = 0, s_4, s_5, s_7 \in F_p, s_3, s_6 \in F_p^*$

20") $\mathbf{I} = (p^{m_1}s_0, p^{m_2}, p^{m_3}(s_3 + ps_4 + p^2s_5), p^{m_4}(s_6 + ps_7), p^t)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5 - u_1 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_3 \in p^3\mathbb{Z}_p, u_5 - u_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$ con $s_1 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_8 = s_9 = 0, s_4, s_5, s_7 \in F_p, s_0, s_3, s_6 \in F_p^*$

21") $\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2}s_1, p^{m_3}(s_3 + ps_4 + p^2s_5), p^{m_4}(s_6 + ps_7), p^t)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5 - u_2 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_3 \in p^3\mathbb{Z}_p, u_5 - u_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$ con $s_0 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_8 = s_9 = 0, s_4, s_5, s_7 \in F_p, s_1, s_3, s_6 \in F_p^*$

22") $\mathbf{I} = (p^{m_1}s_0, p^{m_2}s_1, p^{m_3}(s_3 + ps_4 + p^2s_5), p^{m_4}(s_6 + ps_7), p^t)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5 - u_1, u_5 - u_2 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_3 \in p^3\mathbb{Z}_p, u_5 - u_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$ con $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_8 = s_9 = 0, s_4, s_5, s_7 \in F_p, s_0, s_1, s_3, s_6 \in F_p^*$

23") $\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2}(s_1 + ps_2), p^{m_3}(s_3 + ps_4 + p^2s_5), p^{m_4}(s_6 + ps_7), p^t)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5 - u_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5 - u_3 \in p^3\mathbb{Z}_p, u_5 - u_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$ con $s_0 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_8 = s_9 = 0, s_2, s_4, s_5, s_7 \in F_p, s_1, s_3, s_6 \in F_p^*$

24") $\mathbf{I} = (p^{m_1}s_0, p^{m_2}(s_1 + ps_2), p^{m_3}(s_3 + ps_4 + p^2s_5), p^{m_4}(s_6 + ps_7), p^t)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5 - u_1 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5 - u_3 \in p^3\mathbb{Z}_p, u_5 - u_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$ con $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_8 = s_9 = 0, s_2, s_4, s_5, s_7 \in F_p, s_0, s_1, s_3, s_6 \in F_p^*$

Caso 4 Análogamente al caso 2, de la lista del caso 1, reemplazamos p^{m_4} por $p^{m_4-3}(s_7 + ps_8 + p^2s_9), s_7 = s_8 = s_9 = 0$ por $s_7 \in F_p^*$ y $s_8, s_9 \in F_p$, y agregamos $u_5 - u_4 \in p^3\mathbb{Z}_p$. Redenotando obtenemos los siguientes ideales:

1"') $\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2}, p^{m_3}, p^{m_4}(s_6 + ps_7 + p^2s_8), p^t)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5 - u_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$ con $s_0 = s_1 = s_3 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_4 = s_5 = s_9 = 0, s_6 \in F_p^*, s_7, s_8 \in F_p$

2"') $\mathbf{I} = (p^{m_1}s_0, p^{m_2}, p^{m_3}, p^{m_4}(s_6 + ps_7 + p^2s_8), p^t)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5 - u_1 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$ con $s_1 = s_3 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_4 = s_5 = s_9 = 0, s_0, s_6 \in F_p^*, s_7, s_8 \in F_p$

3"') $\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2}s_1, p^{m_3}, p^{m_4}(s_6 + ps_7 + p^2s_8), p^t)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5 - u_2 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$ con $s_0 = s_3 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_4 = s_5 = s_9 = 0, s_1, s_6 \in F_p^*, s_7, s_8 \in F_p$

4"') $\mathbf{I} = (p^{m_1}s_0, p^{m_2}s_1, p^{m_3}, p^{m_4}(s_6 + ps_7 + p^2s_8), p^t)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5 - u_1, u_5 - u_2 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$ con $s_3 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_4 = s_5 = s_9 = 0, s_0, s_1, s_6 \in F_p^*, s_7, s_8 \in F_p$

5"') $\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2}(s_1 + ps_2), p^{m_3}, p^{m_4}(s_6 + ps_7 + p^2 s_8), p^t)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5 - u_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5 - u_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$ con $s_0 = s_3 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_4 = s_5 = s_9 = 0, s_2, s_7, s_8 \in F_p, s_1, s_6 \in F_p^*$

6"') $\mathbf{I} = (p^{m_1}s_0, p^{m_2}(s_1+ps_2), p^{m_3}, p^{m_4}(s_6+ps_7+p^2s_8), p^t)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5-u_1 \in p\mathbb{Z}_p, u_5-u_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5-u_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$ con $s_3 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_4 = s_5 = s_9 = 0, s_2, s_7, s_8 \in F_p, s_0, s_1, s_6 \in F_p^*$

7"') $\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2}, p^{m_3}s_3, p^{m_4}(s_6 + ps_7 + p^2s_8), p^t)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5 - u_3 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$ con $s_0 = s_1 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_4 = s_5 = s_9 = 0, s_3, s_6 \in F_p^*, s_7, s_8 \in F_p$

8"') $\mathbf{I} = (p^{m_1}s_0, p^{m_2}, p^{m_3}s_3, p^{m_4}(s_6 + ps_7 + p^2s_8), p^t)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5 - u_1, u_5 - u_3 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$ con $s_1 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_4 = s_5 = s_9 = 0, s_0, s_3, s_6 \in F_p^*, s_7, s_8 \in F_p$

9"') $\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2}s_1, p^{m_3}s_3, p^{m_4}(s_6 + ps_7 + p^2s_8), p^t)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5 - u_2, u_5 - u_3 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$ con $s_0 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_4 = s_5 = s_9 = 0, s_1, s_3, s_6 \in F_p^*, s_7, s_8 \in F_p$

10"') $\mathbf{I} = (p^{m_1}s_0, p^{m_2}s_1, p^{m_3}s_3, p^{m_4}(s_6+ps_7+p^2s_8), p^t)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5-u_1, u_5-u_2, u_5-u_3 \in p\mathbb{Z}_p, u_5-u_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$ con $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_4 = s_5 = s_9 = 0, s_0, s_1, s_3, s_6 \in F_p^*, s_7, s_8 \in F_p$

11"') $\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2}(s_1+ps_2), p^{m_3}s_3, p^{m_4}(s_6+ps_7+p^2s_8), p^t)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5-u_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5-u_3 \in p\mathbb{Z}_p, u_5-u_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$ con $s_0 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, , m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_4 = s_5 = s_9 = 0, s_2, s_7, s_8 \in F_p, s_1, s_3, s_6 \in F_p^*$

12"') $\mathbf{I} = (p^{m_1}s_0, p^{m_2}(s_1 + ps_2), p^{m_3}s_3, p^{m_4}(s_6 + ps_7 + p^2s_8), p^t)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5 - u_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5 - u_1, u_5 - u_3 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$ con $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, , m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_4 = s_5 = s_9 = 0, s_2, s_7, s_8 \in F_p, s_0, s_1, s_3, s_6 \in F_p^*$

13"') $\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2}, p^{m_3}(s_3 + ps_4), p^{m_4}(s_6 + ps_7 + p^2s_8), p^t)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5 - u_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5 - u_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$ con $s_0 = s_1 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_5 = s_9 = 0, s_4, s_7, s_8 \in F_p, s_3, s_6 \in F_p^*$

14"') $\mathbf{I} = (p^{m_1}s_0, p^{m_2}, p^{m_3}(s_3+ps_4), p^{m_4}(s_6+ps_7+p^2s_8), p^t)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5-u_1 \in p\mathbb{Z}_p, u_5-u_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5-u_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$ con $s_1 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_5 = s_9 = 0, s_4, s_7, s_8 \in F_p, s_0, s_3, s_6 \in F_p^*$

15"') $\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2}s_1, p^{m_3}(s_3+ps_4), p^{m_4}(s_6+ps_7+p^2s_8), p^t)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5-u_2 \in p\mathbb{Z}_p, u_5-u_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5-u_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$ con $s_0 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_5 = s_9 = 0, s_4, s_7, s_8 \in F_p, s_1, s_3, s_6 \in F_p^*$

16"') $\mathbf{I} = (p^{m_1}s_0, p^{m_2}s_1, p^{m_3}(s_3 + ps_4), p^{m_4}(s_6 + ps_7 + p^2s_8), p^t)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5 - u_1, u_5 - u_2 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5 - u_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$ con $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_5 = s_9 = 0, s_4, s_7, s_8 \in F_p, s_0, s_1, s_3, s_6 \in F_p^*$

17"') $\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2}(s_1+ps_2), p^{m_3}(s_3+ps_4), p^{m_4}(s_6+ps_7+p^2s_8), p^t)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5-u_2, u_5-u_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5-u_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$ con $s_0 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_5 = s_9 = 0, s_2, s_4, s_7, s_8 \in F_p, s_1, s_3, s_6 \in F_p^*$

18"') $\mathbf{I} = (p^{m_1}s_0, p^{m_2}(s_1 + ps_2), p^{m_3}(s_3 + ps_4), p^{m_4}(s_6 + ps_7 + p^2s_8), p^t)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5 - u_1 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_2, u_5 - u_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5 - u_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$ con $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_5 = s_9 = 0, s_2, s_4, s_7, s_8 \in F_p, s_0, s_1, s_3, s_6 \in F_p^*$

19"') $\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2}, p^{m_3}(s_3+ps_4+p^2s_5), p^{m_4}(s_6+ps_7+p^2s_8), p^t)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5-u_3 \in p^3\mathbb{Z}, u_5-u_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$ con $s_0 = s_1 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_9 = 0, s_4, s_5, s_7, s_8 \in F_p, s_3, s_6 \in F_p^*$

20"') $\mathbf{I} = (p^{m_1}s_0, p^{m_2}, p^{m_3}(s_3 + ps_4 + p^2s_5), p^{m_4}(s_6 + ps_7 + p^2s_8), p^t)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5 - u_1 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_3 \in p^3\mathbb{Z}_p, u_5 - u_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$ con $s_1 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_9 = 0, s_4, s_5, s_7, s_8 \in F_p, s_0, s_3, s_6 \in F_p^*$

21"') $\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2}s_1, p^{m_3}(s_3 + ps_4 + p^2s_5), p^{m_4}(s_6 + ps_7 + p^2s_8), p^t)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5 - u_2 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_3 \in p^3\mathbb{Z}_p, u_5 - u_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$ con $s_0 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_9 = 0, s_4, s_5, s_7, s_8 \in F_p, s_1, s_3, s_6 \in F_p^*$

22"') $\mathbf{I} = (p^{m_1}s_0, p^{m_2}s_1, p^{m_3}(s_3 + ps_4 + p^2s_5), p^{m_4}(s_6 + ps_7 + p^2s_8), p^t)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5 - u_1, u_5 - u_2 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_3 \in p^3\mathbb{Z}_p, u_5 - u_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$ con $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_9 = 0, s_4, s_5, s_7, s_8 \in F_p, s_0, s_1, s_3, s_6 \in F_p^*$

23"') $\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2}(s_1+ps_2), p^{m_3}(s_3+ps_4+p^2s_5), p^{m_4}(s_6+ps_7+p^2s_8), p^t)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5-u_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5-u_3 \in p^3\mathbb{Z}_p, u_5 - u_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$ con $s_0 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_9 = 0, s_2, s_4, s_5, s_7, s_8 \in F_p, s_1, s_3, s_6 \in F_p^*$

24"') $\mathbf{I} = (p^{m_1}s_0, p^{m_2}(s_1+ps_2), p^{m_3}(s_3+ps_4+p^2s_5), p^{m_4}(s_6+ps_7+p^2s_8), p^t)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5-u_1 \in p\mathbb{Z}_p, u_5-u_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5-u_3 \in p^3\mathbb{Z}_p, u_5-u_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$ con $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_9 = 0, s_2, s_4, s_5, s_7, s_8 \in F_p, s_0, s_1, s_3, s_6 \in F_p^*$

Caso 5 De manera similar a los casos 2 y 3, en la lista del caso 1, reemplazamos p^{m_4} por $p^{m_4-4}(s_6+ps_7+p^2s_8+p^3s_9)$, $s_6=s_7=s_8=s_9=0$ por $s_6 \in F_p^*$ y $s_7, s_8, s_9 \in F_p$, y agregamos $u_5-u_4 \in p^4\mathbb{Z}_p$. Redenotando obtenemos los siguientes ideales:

1"") $\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2}, p^{m_3}, p^{m_4}(s_6+ps_7+p^2s_8+p^3s_9), p^t)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5-u_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\}$ con $s_0=s_1=s_3=1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2=s_4=s_5=0, s_6 \in F_p^*, s_7, s_8, s_9 \in F_p$

2"") $\mathbf{I} = (p^{m_1}s_0, p^{m_2}, p^{m_3}, p^{m_4}(s_6+ps_7+p^2s_8+p^3s_9), p^t)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5-u_1 \in p\mathbb{Z}_p, u_5-u_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\}$ con $s_1=s_3=1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2=s_4=s_5=0, s_0, s_6 \in F_p^*, s_7, s_8, s_9 \in F_p$

3"") $\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2}s_1, p^{m_3}, p^{m_4}(s_6+ps_7+p^2s_8+p^3s_9), p^t)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5-u_2 \in p\mathbb{Z}_p, u_5-u_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\}$ con $s_0=s_3=1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2=s_4=s_5=0, s_1, s_6 \in F_p^*, s_7, s_8, s_9 \in F_p$

4"") $\mathbf{I} = (p^{m_1}s_0, p^{m_2}s_1, p^{m_3}, p^{m_4}(s_6+ps_7+p^2s_8+p^3s_9), p^t)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5-u_1, u_5-u_2 \in p\mathbb{Z}_p, u_5-u_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\}$ con $s_3=1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2=s_4=s_5=0, s_0, s_1, s_6 \in F_p^*, s_7, s_8, s_9 \in F_p$

5"") $\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2}(s_1+ps_2), p^{m_3}, p^{m_4}(s_6+ps_7+p^2s_8+p^3s_9), p^t)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5-u_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5-u_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\}$ con $s_0=s_3=1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_4=s_5=0, s_2, s_7, s_8, s_9 \in F_p, s_1, s_6 \in F_p^*$

6"") $\mathbf{I} = (p^{m_1}s_0, p^{m_2}(s_1+ps_2), p^{m_3}, p^{m_4}(s_6+ps_7+p^2s_8+p^3s_9), p^t)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5-u_1 \in p\mathbb{Z}_p, u_5-u_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5-u_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\}$ con $s_3=1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_4=s_5=0, s_2, s_7, s_8, s_9 \in F_p, s_0, s_1, s_6 \in F_p^*$

7"") $\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2}, p^{m_3}s_3, p^{m_4}(s_6+ps_7+p^2s_8+p^3s_9), p^t)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5-u_3 \in p\mathbb{Z}_p, u_5-u_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\}$ con $s_0=s_1=1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2=s_4=s_5=0, s_3, s_6 \in F_p^*, s_7, s_8, s_9 \in F_p$

8"") $\mathbf{I} = (p^{m_1}s_0, p^{m_2}, p^{m_3}s_3, p^{m_4}(s_6+ps_7+p^2s_8+p^3s_9), p^t)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5-u_1, u_5-u_3 \in p\mathbb{Z}_p, u_5-u_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\}$ con $s_1=1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2=s_4=s_5=0, s_0, s_3, s_6 \in F_p^*, s_7, s_8, s_9 \in F_p$

9"") $\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2}s_1, p^{m_3}s_3, p^{m_4}(s_6+ps_7+p^2s_8+p^3s_9), p^t)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5-u_2, u_5-u_3 \in p\mathbb{Z}_p, u_5-u_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\}$ con $s_0=1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2=s_4=s_5=0, s_1, s_3, s_6 \in F_p^*, s_7, s_8, s_9 \in F_p$

10"") $\mathbf{I} = (p^{m_1}s_0, p^{m_2}s_1, p^{m_3}s_3, p^{m_4}(s_6+ps_7+p^2s_8+p^3s_9), p^t)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5-u_1, u_5-u_2, u_5-u_3 \in p\mathbb{Z}_p, u_5-u_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\}$ con $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2=s_4=s_5=0, s_0, s_1, s_3, s_6 \in F_p^*, s_7, s_8, s_9 \in F_p$

11"") $\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2}(s_1+ps_2), p^{m_3}s_3, p^{m_4}(s_6+ps_7+p^2s_8+p^3s_9), p^t)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5-u_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5-u_3 \in p\mathbb{Z}_p, u_5-u_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\}$ con $s_0=1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2,, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_4=s_5=0, s_2, s_7, s_8, s_9 \in F_p, s_1, s_3, s_6 \in F_p^*$

12"") $\mathbf{I} = (p^{m_1}s_0, p^{m_2}(s_1+ps_2), p^{m_3}s_3, p^{m_4}(s_6+ps_7+p^2s_8+p^3s_9), p^t)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5-u_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5-u_1, u_5-u_3 \in p\mathbb{Z}_p, u_5-u_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\}$ con $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2,, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_4=s_5=0, s_2, s_7, s_8, s_9 \in F_p, s_0, s_1, s_3, s_6 \in F_p^*$

13"") $\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2}, p^{m_3}(s_3+ps_4), p^{m_4}(s_6+ps_7+p^2s_8+p^3s_9), p^t)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5-u_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5-u_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\}$ con $s_0=s_1=1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2=s_5=0, s_4, s_7, s_8, s_9 \in F_p, s_3, s_6 \in F_p^*$

14"") $\mathbf{I} = (p^{m_1}s_0, p^{m_2}, p^{m_3}(s_3+ps_4), p^{m_4}(s_6+ps_7+p^2s_8+p^3s_9), p^t)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5-u_1 \in p\mathbb{Z}_p, u_5-u_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5-u_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\}$ con $s_1=1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2=s_5=0, s_4, s_7, s_8, s_9 \in F_p, s_0, s_3, s_6 \in F_p^*$

15"") $\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2}s_1, p^{m_3}(s_3+ps_4), p^{m_4}(s_6+ps_7+p^2s_8+p^3s_9), p^t)\{(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) : u_5-u_2 \in p\mathbb{Z}_p, u_5-u_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5-u_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\}$ con $s_0=1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2=s_5=0, s_4, s_7, s_8, s_9 \in F_p, s_1, s_3, s_6 \in F_p^*$

16””) $\mathbf{I} = (p^{m_1}s_0, p^{m_2}s_1, p^{m_3}(s_3 + ps_4), p^{m_4}(s_6 + ps_7 + p^2s_8 + p^3s_9), p^t)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5 - u_1, u_5 - u_2 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5 - u_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\}$ con $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_5 = 0, s_4, s_7, s_8, s_9 \in F_p, s_0, s_1, s_3, s_6 \in F_p^*$

17””) $\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2}(s_1 + ps_2), p^{m_3}(s_3 + ps_4), p^{m_4}(s_6 + ps_7 + p^2s_8 + p^3s_9), p^t)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5 - u_2, u_5 - u_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5 - u_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\}$ con $s_0 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_5 = 0, s_2, s_4, s_7, s_8, s_9 \in F_p, s_1, s_3, s_6 \in F_p^*$

18””) $\mathbf{I} = (p^{m_1}s_0, p^{m_2}(s_1+ps_2), p^{m_3}(s_3+ps_4), p^{m_4}(s_6+ps_7+p^2s_8+p^3s_9), p^t)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5-u_1 \in p\mathbb{Z}_p, u_5-u_2, u_5 - u_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5 - u_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\}$ con $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_5 = 0, s_2, s_4, s_7, s_8, s_9 \in F_p, s_0, s_1, s_3, s_6 \in F_p^*$

19””) $\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2}, p^{m_3}(s_3+ps_4+p^2s_5), p^{m_4}(s_6+ps_7+p^2s_8+p^3s_9), p^t)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5-u_3 \in p^3\mathbb{Z}, u_5-u_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\}$ con $s_0 = s_1 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = 0, s_4, s_5, s_7, s_8, s_9 \in F_p, s_3, s_6 \in F_p^*$

20””) $\mathbf{I} = (p^{m_1}s_0, p^{m_2}, p^{m_3}(s_3+ps_4+p^2s_5), p^{m_4}(s_6+ps_7+p^2s_8+p^3s_9), p^t)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5 - u_1 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_3 \in p^3\mathbb{Z}_p, u_5 - u_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\}$ con $s_1 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = 0, s_4, s_5, s_7, s_8, s_9 \in F_p, s_0, s_3, s_6 \in F_p^*$

21””) $\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2}s_1, p^{m_3}(s_3+ps_4+p^2s_5), p^{m_4}(s_6+ps_7+p^2s_8+p^3s_9), p^t)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5 - u_2 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_3 \in p^3\mathbb{Z}_p, u_5 - u_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\}$ con $s_0 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = 0, s_4, s_5, s_7, s_8, s_9 \in F_p, s_1, s_3, s_6 \in F_p^*$

22””) $\mathbf{I} = (p^{m_1}s_0, p^{m_2}s_1, p^{m_3}(s_3+ps_4+p^2s_5), p^{m_4}(s_6+ps_7+p^2s_8+p^3s_9), p^t)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5-u_1, u_5-u_2 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_3 \in p^3\mathbb{Z}_p, u_5 - u_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\}$ con $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = 0, s_4, s_5, s_7, s_8, s_9 \in F_p, s_0, s_1, s_3, s_6 \in F_p^*$

23””) $\mathbf{I} = (p^{m_1}, p^{m_2}(s_1 + ps_2), p^{m_3}(s_3 + ps_4 + p^2s_5), p^{m_4}(s_6 + ps_7 + p^2s_8 + p^3s_9), p^t)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5 - u_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5 - u_3 \in p^3\mathbb{Z}_p, u_5 - u_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\}$ con $s_0 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2, s_4, s_5, s_7, s_8, s_9 \in F_p, s_1, s_3, s_6 \in F_p^*$

24””) $\mathbf{I} = (p^{m_1}s_0, p^{m_2}(s_1 + ps_2), p^{m_3}(s_3 + ps_4 + p^2s_5), p^{m_4}(s_6 + ps_7 + p^2s_8 + p^3s_9), p^t)\{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) : u_5 - u_1 \in p\mathbb{Z}_p, u_5 - u_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, u_5 - u_3 \in p^3\mathbb{Z}_p, u_5 - u_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\}$ con $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2, s_4, s_5, s_7, s_8, s_9 \in F_p, s_0, s_1, s_3, s_6 \in F_p^*$

Capítulo 6

Conclusiones

Los ideales que se obtienen del producto fibrado para

$$J = (p^{n_1}, p^{n_2}, p^{n_3}, p^{n_4})\mathbb{Z}_p^4 \leq B_p(C_{p^3})$$

donde $n_1 \geq 1, n_2 \geq 2, n_3, n_4 \geq 3$, son de la forma:

$$(p^{m_1}s_0, p^{m_2}(s_1 + ps_2), p^{m_3}(s_3 + ps_4 + p^2 s_5), p^{m_4}(s_6 + ps_7 + p^2 s_8 + p^3 s_9), p^t)M$$

donde M es:

$M_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p^3\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\}$

- $s_0 = s_1 = s_3 = s_6 = 1, m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = t = 0, s_2 = s_4 = s_5 = s_7 = s_8 = s_9 = 0$
- $s_1 = s_3 = s_6 = 1, m_2 = m_3 = m_4 = t = 1, m_1 \geq 1, s_4 = s_7 = s_8 = 0, s_2, s_5, s_9 \in F_p, s_0 \in F_p^*$
- $s_3 = s_6 = 1, m_3 = m_4 = t = 2, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, s_7 = 0, s_2, s_4, s_5, s_8, s_9 \in F_p, s_0, s_1 \in F_p^*$
- $s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2, s_4, s_5, s_7, s_8, s_9 \in F_p, s_0, s_1, s_3 \in F_p^*$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2, s_4, s_5, s_7, s_8, s_9 \in F_p, s_0, s_1, s_3, s_6 \in F_p^*$

$M_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p^3\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\}$

- $s_0 = s_1 = s_3 = s_6 = 1, m_2 = m_3 = m_4 = t = 1, m_1 \geq 1, s_4 = s_7 = s_8 = 0, s_2, s_5, s_9 \in F_p$
- $s_0 = s_3 = s_6 = 1, m_3 = m_4 = t = 2, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, s_7 = 0, s_2, s_4, s_5, s_8, s_9 \in F_p, s_1 \in F_p^*$
- $s_0 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2, s_4, s_5, s_7, s_8, s_9 \in F_p, s_1, s_3 \in F_p^*$
- $s_0 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2, s_4, s_5, s_7, s_8, s_9 \in F_p, s_1, s_3, s_6 \in F_p^*$

$M_3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_2 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p^3\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\}$

- $s_1 = s_3 = s_6 = 1, m_2 = m_3 = m_4 = t = 1, m_1 \geq 1, s_2 = s_4 = s_7 = s_8 = 0, s_5, s_9 \in F_p, s_0 \in F_p^*$
- $s_3 = s_6 = 1, m_3 = m_4 = t = 2, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, s_2 = s_7 = 0, s_4, s_5, s_8, s_9 \in F_p, s_0, s_1 \in F_p^*$
- $s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2 = 0, s_4, s_5, s_7, s_8, s_9 \in F_p, s_0, s_1, s_3 \in F_p^*$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = 0, s_4, s_5, s_7, s_8, s_9 \in F_p, s_0, s_1, s_3, s_6 \in F_p^*$

$M_4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_2 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p^3\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\}$

- $s_0 = s_1 = s_3 = s_6 = 1, m_2 = m_3 = m_4 = t = 1, m_1 \geq 1, s_2 = s_4 = s_7 = s_8 = 0, s_5, s_9 \in F_p$
- $s_0 = s_3 = s_6 = 1, m_3 = m_4 = t = 2, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, s_2 = s_7 = 0, s_4, s_5, s_8, s_9 \in F_p, s_1 \in F_p^*$
- $s_0 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2 = 0, s_4, s_5, s_7, s_8, s_9 \in F_p, s_1, s_3 \in F_p^*$
- $s_0 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = 0, s_4, s_5, s_7, s_8, s_9 \in F_p, s_1, s_3, s_6 \in F_p^*$

$M_5 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p^3\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\}$

- $s_1 = s_3 = s_6 = 1, m_3 = m_4 = t = 2, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, s_2 = s_7 = 0, s_4, s_5, s_8, s_9 \in F_p, s_0 \in F_p^*$
- $s_1 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2 = 0, s_4, s_5, s_7, s_8, s_9 \in F_p, s_0, s_3 \in F_p^*$
- $s_1 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = 0, s_4, s_5, s_7, s_8, s_9 \in F_p, s_0, s_3, s_6 \in F_p^*$

$M_6 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_3 \in p^3\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\}$

- $s_0 = s_1 = s_3 = s_6 = 1, m_3 = m_4 = t = 2, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, s_2 = s_7 = 0, s_4, s_5, s_8, s_9 \in F_p$
- $s_0 = s_1 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2 = 0, s_4, s_5, s_7, s_8, s_9 \in F_p, s_3 \in F_p^*$
- $s_0 = s_1 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = 0, s_4, s_5, s_7, s_8, s_9 \in F_p, s_3, s_6 \in F_p^*$

$M_7 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\}$

- $s_1 = s_3 = s_6 = 1, m_2 = m_3 = m_4 = t = 1, m_1 \geq 1, s_4 = s_5 = s_7 = s_8 = 0, s_2, s_9 \in F_p, s_0 \in F_p^*$
- $s_3 = s_6 = 1, m_3 = m_4 = t = 2, s_5 = s_7 = 0, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, s_2, s_4, s_8, s_9 \in F_p, s_0, s_1 \in F_p^*$
- $s_6 = 1, s_5 = 0, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2, s_4, s_7, s_8, s_9 \in F_p, s_0, s_1, s_3 \in F_p^*$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_5 = 0, s_2, s_4, s_7, s_8, s_9 \in F_p, s_0, s_1, s_3, s_6 \in F_p^*$

$M_8 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\}$

- $s_0 = s_1 = s_3 = s_6 = 1, m_2 = m_3 = m_4 = t = 1, m_1 \geq 1, s_4 = s_5 = s_7 = s_8 = 0, s_2, s_9 \in F_p$
- $s_0 = s_3 = s_6 = 1, m_3 = m_4 = t = 2, s_5 = s_7 = 0, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, s_2, s_4, s_8, s_9 \in F_p, s_1 \in F_p^*$
- $s_0 = s_6 = 1, s_5 = 0, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2, s_4, s_7, s_8, s_9 \in F_p, s_1, s_3 \in F_p^*$
- $s_0 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_5 = 0, s_2, s_4, s_7, s_8, s_9 \in F_p, s_1, s_3, s_6 \in F_p^*$

$M_9 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_2 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\}$

- $s_1 = s_3 = s_6 = 1, m_2 = m_3 = m_4 = t = 1, m_1 \geq 1, s_2 = s_4 = s_5 = s_7 = s_8 = 0, s_0 \in F_p^*,$ $s_9 \in F_p$
- $s_3 = s_6 = 1, m_3 = m_4 = t = 2, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, s_2 = s_5 = s_7 = 0, s_4, s_8, s_9 \in F_p, s_0, s_1 \in F_p^*$
- $s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2 = s_5 = 0, s_4, s_7, s_8, s_9 \in F_p, s_0, s_1, s_3 \in F_p^*$

- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_5 = 0, s_4, s_7, s_8, s_9 \in F_p, s_0, s_1, s_3, s_6 \in F_p^*$

$M_{10} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_2 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\}$

- $s_0 = s_1 = s_3 = s_6 = 1, m_2 = m_3 = m_4 = t = 1, m_1 \geq 1, s_2 = s_4 = s_5 = s_7 = s_8 = 0, s_9 \in F_p$
- $s_0 = s_3 = s_6 = 1, m_3 = m_4 = t = 2, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, s_2 = s_5 = s_7 = 0, s_4, s_8, s_9 \in F_p, s_1 \in F_p^*$
- $s_0 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2 = s_5 = 0, s_4, s_7, s_8, s_9 \in F_p, s_1, s_3 \in F_p^*$
- $s_0 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_5 = 0, s_4, s_7, s_8, s_9 \in F_p, s_1, s_3, s_6 \in F_p^*$

$M_{11} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\}$

- $s_1 = s_3 = s_6 = 1, m_3 = m_4 = t = 2, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, s_2 = s_5 = s_7 = 0, s_4, s_8, s_9 \in F_p, s_0 \in F_p^*$
- $s_1 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2 = s_5 = 0, s_4, s_7, s_8, s_9 \in F_p, s_0, s_3 \in F_p^*$
- $s_1 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_5 = 0, s_4, s_7, s_8, s_9 \in F_p, s_0, s_3, s_6 \in F_p^*$

$M_{12} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\}$

- $s_0 = s_1 = s_3 = s_6 = 1, m_3 = m_4 = t = 2, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, s_2 = s_5 = s_7 = 0, s_4, s_8, s_9 \in F_p$
- $s_0 = s_1 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2 = s_5 = 0, s_4, s_7, s_8, s_9 \in F_p, s_3 \in F_p^*$
- $s_0 = s_1 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_5 = 0, s_4, s_7, s_8, s_9 \in F_p, s_3, s_6 \in F_p^*$

$M_{13} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\}$

- $s_3 = s_6 = 1, m_3 = m_4 = t = 2, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, s_4 = s_5 = s_7 = 0, s_2, s_8, s_9 \in F_p, s_0, s_1 \in F_p^*$
- $s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, , m_3 \geq 3, s_4 = s_5 = 0, s_2, s_7, s_8, s_9 \in F_p, s_0, s_1, s_3 \in F_p^*$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, , m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_4 = s_5 = 0, s_2, s_7, s_8, s_9 \in F_p, s_0, s_1, s_3, s_6 \in F_p^*$

$M_{14} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\}$

- $s_0 = s_3 = s_6 = 1, m_3 = m_4 = t = 2, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, s_4 = s_5 = s_7 = 0, s_2, s_8, s_9 \in F_p, s_1 \in F_p^*$
- $s_0 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, , m_3 \geq 3, s_4 = s_5 = 0, s_2, s_7, s_8, s_9 \in F_p, s_1, s_3 \in F_p^*$
- $s_0 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, , m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_4 = s_5 = 0, s_2, s_7, s_8, s_9 \in F_p, s_1, s_3, s_6 \in F_p^*$

$M_{15} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_2 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\}$

- $s_3 = s_6 = 1, m_3 = m_4 = t = 2, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, s_2 = s_4 = s_5 = s_7 = 0, s_8, s_9 \in F_p, s_0, s_1 \in F_p^*$
- $s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2 = s_4 = s_5 = 0, s_7, s_8, s_9 \in F_p, s_0, s_1, s_3 \in F_p^*$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_4 = s_5 = 0, s_0, s_1, s_3, s_6 \in F_p^*, s_7, s_8, s_9 \in F_p$

$M_{16} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_2 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\}$

- $s_0 = s_3 = s_6 = 1, m_3 = m_4 = t = 2, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, s_2 = s_4 = s_5 = s_7 = 0, s_8, s_9 \in F_p$, $s_1 \in F_p^*$

- $s_0 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2 = s_4 = s_5 = 0, s_7, s_8, s_9 \in F_p, s_1, s_3 \in F_p^*$
- $s_0 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_4 = s_5 = 0, s_1, s_3, s_6 \in F_p^*, s_7, s_8, s_9 \in F_p$

$M_{17} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\}$

- $s_1 = s_3 = s_6 = 1, m_3 = m_4 = t = 2, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, s_2 = s_4 = s_5 = s_7 = 0, s_8, s_9 \in F_p,$ $s_0 \in F_p^*$
- $s_1 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2 = s_4 = s_5 = 0, s_7, s_8, s_9 \in F_p, s_0, s_3 \in F_p^*$
- $s_1 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_4 = s_5 = 0, s_0, s_3, s_6 \in F_p^*, s_7, s_8, s_9 \in F_p$

$M_{18} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_3 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\}$

- $s_0 = s_1 = s_3 = s_6 = 1, m_3 = m_4 = t = 2, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, s_2 = s_4 = s_5 = s_7 = 0, s_8, s_9 \in F_p$
- $s_0 = s_1 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2 = s_4 = s_5 = 0, s_7, s_8, s_9 \in F_p,$ $s_3 \in F_p^*$
- $s_0 = s_1 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_4 = s_5 = 0, s_3, s_6 \in F_p^*,$ $s_7, s_8, s_9 \in F_p$

$M_{19} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\}$

- $s_3 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_4 = s_5 = 0, s_2, s_7, s_8, s_9 \in F_p, s_0, s_1 \in F_p^*$
- $s_3 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_4 = s_5 = 0, s_2, s_7, s_8, s_9 \in F_p, s_0, s_1, s_6 \in F_p^*$

$M_{20} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\}$

- $s_0 = s_3 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_4 = s_5 = 0, s_2, s_7, s_8, s_9 \in F_p, s_1 \in F_p^*$
- $s_0 = s_3 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_4 = s_5 = 0, s_2, s_7, s_8, s_9 \in F_p, s_1, s_6 \in F_p^*$

$M_{21} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_2 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\}$

- $s_3 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2 = s_4 = s_5 = 0, s_7, s_8, s_9 \in F_p, s_0, s_1 \in F_p^*$
- $s_3 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_4 = s_5 = 0, s_0, s_1, s_6 \in F_p^*, s_7, s_8, s_9 \in F_p$

$M_{22} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_2 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\}$

- $s_0 = s_3 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2 = s_4 = s_5 = 0, s_1 \in F_p^*,$ $s_7, s_8, s_9 \in F_p$
- $s_0 = s_3 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_4 = s_5 = 0, s_1, s_6 \in F_p^*,$ $s_7, s_8, s_9 \in F_p$

$M_{23} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\}$

- $s_1 = s_3 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2 = s_4 = s_5 = 0, s_7, s_8, s_9 \in F_p,$ $s_0 \in F_p^*$
- $s_1 = s_3 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_4 = s_5 = 0, s_0, s_6 \in F_p^*,$ $s_7, s_8, s_9 \in F_p$

$M_{24} = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_4 \in p^4\mathbb{Z}_p\}$

- $s_0 = s_1 = s_3 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2 = s_4 = s_5 = 0, s_7, s_8, s_9 \in F_p$
- $s_0 = s_1 = s_3 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_4 = s_5 = 0, s_6 \in F_p^*$, $s_7, s_8, s_9 \in F_p$

$M_{25} = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p^3\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$

- $s_1 = s_3 = s_6 = 1, m_2 = m_3 = m_4 = t = 1, m_1 \geq 1, s_4 = s_7 = s_8 = s_9 = 0, s_0 \in F_p^*, s_2, s_5 \in F_p$
- $s_3 = s_6 = 1, m_3 = m_4 = t = 2, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, s_7 = s_9 = 0, s_2, s_4, s_5, s_8 \in F_p, s_0, s_1 \in F_p^*$
- $s_6 = 1, m_4 = t = 3, s_9 = 0, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2, s_4, s_5, s_7, s_8 \in F_p, s_0, s_1, s_3 \in F_p^*$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_9 = 0, s_2, s_4, s_5, s_7, s_8 \in F_p, s_0, s_1, s_3, s_6 \in F_p^*$

$M_{26} = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p^3\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$

- $s_0 = s_1 = s_3 = s_6 = 1, m_2 = m_3 = m_4 = t = 1, m_1 \geq 1, s_4 = s_7 = s_8 = s_9 = 0, s_2, s_5 \in F_p$
- $s_0 = s_3 = s_6 = 1, m_3 = m_4 = t = 2, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, s_7 = s_9 = 0, s_2, s_4, s_5, s_8 \in F_p, s_1 \in F_p^*$
- $s_0 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, s_9 = 0, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2, s_4, s_5, s_7, s_8 \in F_p, s_1, s_3 \in F_p^*$
- $s_0 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_9 = 0, s_2, s_4, s_5, s_7, s_8 \in F_p, s_1, s_3, s_6 \in F_p^*$

$M_{27} = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_2 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p^3\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$

- $s_1 = s_3 = s_6 = 1, m_2 = m_3 = m_4 = t = 1, m_1 \geq 1, s_2 = s_4 = s_7 = s_8 = s_9 = 0, s_0 \in F_p^*$, $s_5 \in F_p$
- $s_3 = s_6 = 1, m_3 = m_4 = t = 2, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, s_2 = s_7 = s_9 = 0, s_4, s_5, s_8 \in F_p, s_0, s_1 \in F_p^*$
- $s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2 = s_9 = 0, s_4, s_5, s_7, s_8 \in F_p, s_0, s_1, s_3 \in F_p^*$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_9 = 0, s_4, s_5, s_7, s_8 \in F_p, s_0, s_1, s_3, s_6 \in F_p^*$

$M_{28} = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_2 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p^3\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$

- $s_0 = s_1 = s_3 = s_6 = 1, m_2 = m_3 = m_4 = t = 1, m_1 \geq 1, s_2 = s_4 = s_7 = s_8 = s_9 = 0, s_5 \in F_p$
- $s_0 = s_3 = s_6 = 1, m_3 = m_4 = t = 2, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, s_2 = s_7 = s_9 = 0, s_4, s_5, s_8 \in F_p, s_1 \in F_p^*$
- $s_0 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2 = s_9 = 0, s_4, s_5, s_7, s_8 \in F_p, s_1, s_3 \in F_p^*$
- $s_0 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_9 = 0, s_4, s_5, s_7, s_8 \in F_p, s_1, s_3, s_6 \in F_p^*$

$M_{29} = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p^3\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$

- $s_1 = s_3 = s_6 = 1, m_3 = m_4 = t = 2, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, s_2 = s_7 = s_9 = 0, s_4, s_5, s_8 \in F_p, s_0 \in F_p^*$
- $s_1 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2 = s_9 = 0, s_4, s_5, s_7, s_8 \in F_p, s_0, s_3 \in F_p^*$
- $s_1 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_9 = 0, s_4, s_5, s_7, s_8 \in F_p, s_0, s_3, s_6 \in F_p^*$

$M_{30} = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_3 \in p^3\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$

- $s_0 = s_1 = s_3 = s_6 = 1, m_3 = m_4 = t = 2, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, s_2 = s_7 = s_9 = 0, s_4, s_5, s_8 \in F_p$
- $s_0 = s_1 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2 = s_9 = 0, s_4, s_5, s_7, s_8 \in F_p, s_3 \in F_p^*$
- $s_0 = s_1 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_9 = 0, s_4, s_5, s_7, s_8 \in F_p, s_3, s_6 \in F_p^*$

$M_{31} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$

- $s_1 = s_3 = s_6 = 1, m_2 = m_3 = m_4 = t = 1, m_1 \geq 1, s_4 = s_5 = s_7 = s_8 = s_9 = 0, s_0 \in F_p^*$, $s_2 \in F_p$
- $s_3 = s_6 = 1, m_3 = m_4 = t = 2, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, s_5 = s_7 = s_9 = 0, s_2, s_4, s_8 \in F_p, s_0, s_1 \in F_p^*$
- $s_6 = 1, s_5 = s_9 = 0, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2, s_4, s_7, s_8 \in F_p, s_0, s_1, s_3 \in F_p^*$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_5 = s_9 = 0, s_2, s_4, s_7, s_8 \in F_p, s_0, s_1, s_3, s_6 \in F_p^*$

$M_{32} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$

- $s_0 = s_1 = s_3 = s_6 = 1, m_2 = m_3 = m_4 = t = 1, m_1 \geq 1, s_4 = s_5 = s_7 = s_8 = s_9 = 0, s_2 \in F_p$
- $s_0 = s_3 = s_6 = 1, m_3 = m_4 = t = 2, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, s_5 = s_7 = s_9 = 0, s_2, s_4, s_8 \in F_p, s_1 \in F_p^*$
- $s_0 = s_6 = 1, s_5 = s_9 = 0, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2, s_4, s_7, s_8 \in F_p, s_1, s_3 \in F_p^*$
- $s_0 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_5 = s_9 = 0, s_2, s_4, s_7, s_8 \in F_p, s_1, s_3, s_6 \in F_p^*$

$M_{33} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_2 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$

- $s_1 = s_3 = s_6 = 1, m_2 = m_3 = m_4 = t = 1, m_1 \geq 1, s_2 = s_4 = s_5 = s_7 = s_8 = s_9 = 0, s_0 \in F_p^*$
- $s_3 = s_6 = 1, m_3 = m_4 = t = 2, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, s_2 = s_5 = s_7 = s_9 = 0, s_4, s_8 \in F_p, s_0, s_1 \in F_p^*$
- $s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2 = s_5 = s_9 = 0, s_4, s_7, s_8 \in F_p, s_0, s_1, s_3 \in F_p^*$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_5 = s_9 = 0, s_4, s_7, s_8 \in F_p, s_0, s_1, s_3, s_6 \in F_p^*$

$M_{34} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_2 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$

- $s_0 = s_1 = s_3 = s_6 = 1, m_2 = m_3 = m_4 = t = 1, m_1 \geq 1, s_2 = s_4 = s_5 = s_7 = s_8 = s_9 = 0$
- $s_0 = s_3 = s_6 = 1, m_3 = m_4 = t = 2, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, s_2 = s_5 = s_7 = s_9 = 0, s_4, s_8 \in F_p$, $s_1 \in F_p^*$
- $s_0 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2 = s_5 = s_9 = 0, s_4, s_7, s_8 \in F_p, s_1, s_3 \in F_p^*$
- $s_0 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_5 = s_9 = 0, s_4, s_7, s_8 \in F_p, s_1, s_3, s_6 \in F_p^*$

$M_{35} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$

- $s_1 = s_3 = s_6 = 1, m_3 = m_4 = t = 2, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, s_2 = s_5 = s_7 = s_9 = 0, s_4, s_8 \in F_p$, $s_0 \in F_p^*$
- $s_1 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2 = s_5 = s_9 = 0, s_4, s_7, s_8 \in F_p, s_0, s_3 \in F_p^*$
- $s_1 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_5 = s_9 = 0, s_4, s_7, s_8 \in F_p, s_0, s_3, s_6 \in F_p^*$

$M_{36} = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$

- $s_0 = s_1 = s_3 = s_6 = 1, m_3 = m_4 = t = 2, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, s_2 = s_5 = s_7 = s_9 = 0, s_4, s_8 \in F_p$
- $s_0 = s_1 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2 = s_5 = s_9 = 0, s_4, s_7, s_8 \in F_p,$ $s_3 \in F_p^*$
- $s_0 = s_1 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_5 = s_9 = 0, s_4, s_7, s_8 \in F_p,$ $s_3, s_6 \in F_p^*$

$M_{37} = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$

- $s_3 = s_6 = 1, m_3 = m_4 = t = 2, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, s_4 = s_5 = s_7 = s_9 = 0, s_2, s_8 \in F_p, s_0, s_1 \in F_p^*$
- $s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, , m_3 \geq 3, s_4 = s_5 = s_9 = 0, s_2, s_7, s_8 \in F_p, s_0, s_1, s_3 \in F_p^*$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, , m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_4 = s_5 = s_9 = 0, s_2, s_7, s_8 \in F_p, s_0, s_1, s_3, s_6 \in F_p^*$

$M_{38} = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$

- $s_0 = s_3 = s_6 = 1, m_3 = m_4 = t = 2, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, s_4 = s_5 = s_7 = s_9 = 0, s_2, s_8 \in F_p,$ $s_1 \in F_p^*$
- $s_0 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, , m_3 \geq 3, s_4 = s_5 = s_9 = 0, s_2, s_7, s_8 \in F_p, s_1, s_3 \in F_p^*$
- $s_0 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, , m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_4 = s_5 = s_9 = 0, s_2, s_7, s_8 \in F_p, s_1, s_3, s_6 \in F_p^*$

$M_{39} = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_2 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$

- $s_3 = s_6 = 1, m_3 = m_4 = t = 2, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, s_2 = s_4 = s_5 = s_7 = s_9 = 0, s_0, s_1 \in F_p^*,$ $s_8 \in F_p$
- $s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2 = s_4 = s_5 = s_9 = 0, s_7, s_8 \in F_p, s_0, s_1, s_3 \in F_p^*$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_4 = s_5 = s_9 = 0, s_0, s_1, s_3, s_6 \in F_p^*, s_7, s_8 \in F_p$

$M_{40} = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_2 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$

- $s_0 = s_3 = s_6 = 1, m_3 = m_4 = t = 2, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, s_2 = s_4 = s_5 = s_7 = s_9 = 0, s_1 \in F_p^*,$ $s_8 \in F_p$
- $s_0 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2 = s_4 = s_5 = s_9 = 0, s_7, s_8 \in F_p,$ $s_1, s_3 \in F_p^*$
- $s_0 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_4 = s_5 = s_9 = 0, s_1, s_3, s_6 \in F_p^*,$ $s_7, s_8 \in F_p$

$M_{41} = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$

- $s_1 = s_3 = s_6 = 1, m_3 = m_4 = t = 2, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, s_2 = s_4 = s_5 = s_7 = s_9 = 0, s_8 \in F_p,$ $s_0 \in F_p^*$
- $s_1 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2 = s_4 = s_5 = s_9 = 0, s_7, s_8 \in F_p,$ $s_0, s_3 \in F_p^*$

- $s_1 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_4 = s_5 = s_9 = 0, s_0, s_3, s_6 \in F_p^*$, $s_7, s_8 \in F_p$

$M_{42} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_3 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$

- $s_0 = s_1 = s_3 = s_6 = 1, m_3 = m_4 = t = 2, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, s_2 = s_4 = s_5 = s_7 = s_9 = 0, s_8 \in F_p$
- $s_0 = s_1 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2 = s_4 = s_5 = s_9 = 0, s_7, s_8 \in F_p$, $s_3 \in F_p^*$
- $s_0 = s_1 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_4 = s_5 = s_9 = 0, s_3, s_6 \in F_p^*$, $s_7, s_8 \in F_p$

$M_{43} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$

- $s_3 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_4 = s_5 = s_9 = 0, s_2, s_7, s_8 \in F_p, s_0, s_1 \in F_p^*$
- $s_3 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_4 = s_5 = s_9 = 0, s_2, s_7, s_8 \in F_p, s_0, s_1, s_6 \in F_p^*$

$M_{44} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$

- $s_0 = s_3 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_4 = s_5 = s_9 = 0, s_2, s_7, s_8 \in F_p$, $s_1 \in F_p^*$
- $s_0 = s_3 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_4 = s_5 = s_9 = 0, s_2, s_7, s_8 \in F_p$, $s_1, s_6 \in F_p^*$

$M_{45} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_2 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$

- $s_3 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2 = s_4 = s_5 = s_9 = 0, s_7, s_8 \in F_p$, $s_0, s_1 \in F_p^*$
- $s_3 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_4 = s_5 = s_9 = 0, s_0, s_1, s_6 \in F_p^*$, $s_7, s_8 \in F_p$

$M_{46} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_2 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$

- $s_0 = s_3 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2 = s_4 = s_5 = s_9 = 0, s_1 \in F_p^*$, $s_7, s_8 \in F_p$
- $s_0 = s_3 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_4 = s_5 = s_9 = 0, s_1, s_6 \in F_p^*$, $s_7, s_8 \in F_p$

$M_{47} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$

- $s_1 = s_3 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2 = s_4 = s_5 = s_9 = 0, s_7, s_8 \in F_p$, $s_0 \in F_p^*$
- $s_1 = s_3 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_4 = s_5 = s_9 = 0, s_0, s_6 \in F_p^*$, $s_7, s_8 \in F_p$

$M_{48} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_4 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$

- $s_0 = s_1 = s_3 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2 = s_4 = s_5 = s_9 = 0, s_7, s_8 \in F_p$

- $s_0 = s_1 = s_3 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_4 = s_5 = s_9 = 0, s_6 \in F_p^*$, $s_7, s_8 \in F_p$

$M_{49} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p^3\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$

- $s_3 = s_6 = 1, m_3 = m_4 = t = 2, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, s_7 = s_8 = s_9 = 0, s_2, s_4, s_5 \in F_p, s_0, s_1 \in F_p^*$
- $s_6 = 1, m_4 = t = 3, s_8 = s_9 = 0, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2, s_4, s_5, s_7 \in F_p, s_0, s_1, s_3 \in F_p^*$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_8 = s_9 = 0, s_2, s_4, s_5, s_7 \in F_p, s_0, s_1, s_3, s_6 \in F_p^*$

$M_{50} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p^3\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$

- $s_0 = s_3 = s_6 = 1, m_3 = m_4 = t = 2, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, s_7 = s_8 = s_9 = 0, s_2, s_4, s_5 \in F_p, s_1 \in F_p^*$
- $s_0 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, s_8 = s_9 = 0, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2, s_4, s_5, s_7 \in F_p, s_1, s_3 \in F_p^*$
- $s_0 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_8 = s_9 = 0, s_2, s_4, s_5, s_7 \in F_p, s_1, s_3, s_6 \in F_p^*$

$M_{51} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_2 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p^3\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$

- $s_3 = s_6 = 1, m_3 = m_4 = t = 2, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, s_2 = s_7 = s_8 = s_9 = 0, s_4, s_5 \in F_p, s_0, s_1 \in F_p^*$
- $s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2 = s_8 = s_9 = 0, s_4, s_5, s_7 \in F_p, s_0, s_1, s_3 \in F_p^*$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_8 = s_9 = 0, s_4, s_5, s_7 \in F_p, s_0, s_1, s_3, s_6 \in F_p^*$

$M_{52} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_2 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p^3\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$

- $s_0 = s_3 = s_6 = 1, m_3 = m_4 = t = 2, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, s_2 = s_7 = s_8 = s_9 = 0, s_4, s_5 \in F_p$, $s_1 \in F_p^*$
- $s_0 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2 = s_8 = s_9 = 0, s_4, s_5, s_7 \in F_p, s_1, s_3 \in F_p^*$
- $s_0 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_8 = s_9 = 0, s_4, s_5, s_7 \in F_p, s_1, s_3, s_6 \in F_p^*$

$M_{53} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p^3\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$

- $s_1 = s_3 = s_6 = 1, m_3 = m_4 = t = 2, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, s_2 = s_7 = s_8 = s_9 = 0, s_4, s_5 \in F_p$, $s_0 \in F_p^*$
- $s_1 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2 = s_8 = s_9 = 0, s_4, s_5, s_7 \in F_p, s_0, s_3 \in F_p^*$
- $s_1 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_8 = s_9 = 0, s_4, s_5, s_7 \in F_p, s_0, s_3, s_6 \in F_p^*$

$M_{54} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_3 \in p^3\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$

- $s_0 = s_1 = s_3 = s_6 = 1, m_3 = m_4 = t = 2, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, s_2 = s_7 = s_8 = s_9 = 0, s_4, s_5 \in F_p$
- $s_0 = s_1 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2 = s_8 = s_9 = 0, s_4, s_5, s_7 \in F_p$, $s_3 \in F_p^*$
- $s_0 = s_1 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_8 = s_9 = 0, s_4, s_5, s_7 \in F_p$, $s_3, s_6 \in F_p^*$

$M_{55} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$

- $s_3 = s_6 = 1, m_3 = m_4 = t = 2, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, s_5 = s_7 = s_8 = s_9 = 0, s_2, s_4 \in F_p, s_0, s_1 \in F_p^*$
- $s_6 = 1, s_5 = s_8 = s_9 = 0, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2, s_4, s_7 \in F_p, s_0, s_1, s_3 \in F_p^*$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_5 = s_8 = s_9 = 0, s_2, s_4, s_7 \in F_p, s_0, s_1, s_3, s_6 \in F_p^*$

$M_{56} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$

- $s_0 = s_3 = s_6 = 1, m_3 = m_4 = t = 2, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, s_5 = s_7 = s_8 = s_9 = 0, s_2, s_4 \in F_p,$ $s_1 \in F_p^*$
- $s_0 = s_6 = 1, s_5 = s_8 = s_9 = 0, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2, s_4, s_7 \in F_p, s_1, s_3 \in F_p^*$
- $s_0 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_5 = s_8 = s_9 = 0, s_2, s_4, s_7 \in F_p, s_1, s_3, s_6 \in F_p^*$

$M_{57} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_2 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$

- $s_3 = s_6 = 1, m_3 = m_4 = t = 2, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, s_2 = s_5 = s_7 = s_8 = s_9 = 0, s_0, s_1 \in F_p^*,$ $s_4 \in F_p$
- $s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2 = s_5 = s_8 = s_9 = 0, s_4, s_7 \in F_p, s_0, s_1, s_3 \in F_p^*$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_5 = s_8 = s_9 = 0, s_4, s_7 \in F_p, s_0, s_1, s_3, s_6 \in F_p^*$

$M_{58} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_2 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$

- $s_0 = s_3 = s_6 = 1, m_3 = m_4 = t = 2, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, s_2 = s_5 = s_7 = s_8 = s_9 = 0, s_1 \in F_p^*,$ $s_4 \in F_p$
- $s_0 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2 = s_5 = s_8 = s_9 = 0, s_4, s_7 \in F_p,$ $s_1, s_3 \in F_p^*$
- $s_0 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_5 = s_8 = s_9 = 0, s_4, s_7 \in F_p,$ $s_1, s_3, s_6 \in F_p^*$

$M_{59} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$

- $s_1 = s_3 = s_6 = 1, m_3 = m_4 = t = 2, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, s_2 = s_5 = s_7 = s_8 = s_9 = 0, s_0 \in F_p^*,$ $s_4 \in F_p$
- $s_1 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2 = s_5 = s_8 = s_9 = 0, s_4, s_7 \in F_p,$ $s_0, s_3 \in F_p^*$
- $s_1 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_5 = s_8 = s_9 = 0, s_4, s_7, \in F_p,$ $s_0, s_3, s_6 \in F_p^*$

$M_{60} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$

- $s_0 = s_1 = s_3 = s_6 = 1, m_3 = m_4 = t = 2, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, s_2 = s_5 = s_7 = s_8 = s_9 = 0, s_4 \in F_p$
- $s_0 = s_1 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2 = s_5 = s_8 = s_9 = 0, s_4, s_7 \in F_p,$ $s_3 \in F_p^*$
- $s_0 = s_1 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_5 = s_8 = s_9 = 0, s_4, s_7 \in F_p,$ $s_3, s_6 \in F_p^*$

$M_{61} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$

- $s_3 = s_6 = 1, m_3 = m_4 = t = 2, m_2 \geq 2, m_1 \geq 1, s_4 = s_5 = s_7 = s_8 = s_9 = 0, s_0, s_1 \in F_p^*,$ $s_2 \in F_p$
- $s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, , m_3 \geq 3, s_4 = s_5 = s_8 = s_9 = 0, s_2, s_7 \in F_p, s_0, s_1, s_3 \in F_p^*$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, , m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_4 = s_5 = s_8 = s_9 = 0, s_2, s_7 \in F_p, s_0, s_1, s_3, s_6 \in F_p^*$

$M_{62} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$

- $s_0 = s_3 = s_6 = 1, m_3 = m_4 = t = 2, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, s_4 = s_5 = s_7 = s_8 = s_9 = 0, s_1 \in F_p^*,$ $s_2 \in F_p$
- $s_0 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, , m_3 \geq 3, s_4 = s_5 = s_8 = s_9 = 0, s_2, s_7 \in F_p,$ $s_1, s_3 \in F_p^*$
- $s_0 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, , m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_4 = s_5 = s_8 = s_9 = 0, s_2, s_7 \in F_p,$ $s_1, s_3, s_6 \in F_p^*$

$M_{63} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_2 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$

- $s_3 = s_6 = 1, m_3 = m_4 = t = 2, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, s_2 = s_4 = s_5 = s_7 = s_8 = s_9 = 0, s_0, s_1 \in F_p^*$
- $s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2 = s_4 = s_5 = s_8 = s_9 = 0, s_7 \in F_p,$ $s_0, s_1, s_3 \in F_p^*$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_4 = s_5 = s_8 = s_9 = 0, s_0, s_1, s_3, s_6 \in F_p^*, s_7 \in F_p$

$M_{64} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_2 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$

- $s_0 = s_3 = s_6 = 1, m_3 = m_4 = t = 2, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, s_2 = s_4 = s_5 = s_7 = s_8 = s_9 = 0, s_1 \in F_p^*$
- $s_0 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2 = s_4 = s_5 = s_8 = s_9 = 0, s_7 \in F_p,$ $s_1, s_3 \in F_p^*$
- $s_0 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_4 = s_5 = s_8 = s_9 = 0, s_1, s_3, s_6 \in F_p^*,$ $s_7 \in F_p$

$M_{65} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$

- $s_1 = s_3 = s_6 = 1, m_3 = m_4 = t = 2, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, s_2 = s_4 = s_5 = s_7 = s_8 = s_9 = 0, s_0 \in F_p^*$
- $s_1 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2 = s_4 = s_5 = s_8 = s_9 = 0, s_7 \in F_p,$ $s_0, s_3 \in F_p^*$
- $s_1 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_4 = s_5 = s_8 = s_9 = 0, s_0, s_3, s_6 \in F_p^*,$ $s_7 \in F_p$

$M_{66} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_3 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$

- $s_0 = s_1 = s_3 = s_6 = 1, m_3 = m_4 = t = 2, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, s_2 = s_4 = s_5 = s_7 = s_8 = s_9 = 0$
- $s_0 = s_1 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2 = s_4 = s_5 = s_8 = s_9 = 0, s_7 \in F_p,$ $s_3 \in F_p^*$

- $s_0 = s_1 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_4 = s_5 = s_8 = s_9 = 0, s_3, s_6 \in F_p^*$, $s_7 \in F_p$

$M_{67} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$

- $s_3 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_4 = s_5 = s_8 = s_9 = 0, s_2, s_7 \in F_p$, $s_0, s_1 \in F_p^*$
- $s_3 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_4 = s_5 = s_8 = s_9 = 0, s_2, s_7 \in F_p$, $s_0, s_1, s_6 \in F_p^*$

$M_{68} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$

- $s_0 = s_3 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_4 = s_5 = s_8 = s_9 = 0, s_2, s_7 \in F_p$, $s_1 \in F_p^*$
- $s_0 = s_3 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_4 = s_5 = s_8 = s_9 = 0, s_2, s_7 \in F_p$, $s_1, s_6 \in F_p^*$

$M_{69} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_2 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$

- $s_3 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2 = s_4 = s_5 = s_8 = s_9 = 0, s_7 \in F_p$, $s_0, s_1 \in F_p^*$
- $s_3 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_4 = s_5 = s_8 = s_9 = 0, s_0, s_1, s_6 \in F_p^*$, $s_7 \in F_p$

$M_{70} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_2 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$

- $s_0 = s_3 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2 = s_4 = s_5 = s_8 = s_9 = 0, s_1 \in F_p^*$, $s_7 \in F_p$
- $s_0 = s_3 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_4 = s_5 = s_8 = s_9 = 0, s_1, s_6 \in F_p^*$, $s_7 \in F_p$

$M_{71} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$

- $s_1 = s_3 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2 = s_4 = s_5 = s_8 = s_9 = 0, s_7 \in F_p$, $s_0 \in F_p^*$
- $s_1 = s_3 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_4 = s_5 = s_8 = s_9 = 0, s_0, s_6 \in F_p^*$, $s_7 \in F_p$

$M_{72} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_4 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$

- $s_0 = s_1 = s_3 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2 = s_4 = s_5 = s_8 = s_9 = 0$, $s_7 \in F_p$
- $s_0 = s_1 = s_3 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_4 = s_5 = s_8 = s_9 = 0, s_6 \in F_p^*$, $s_7 \in F_p$

$M_{73} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p^3\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p\mathbb{Z}_p\}$

- $s_6 = 1, m_4 = t = 3, s_7 = s_8 = s_9 = 0, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2, s_4, s_5 \in F_p, s_0, s_1, s_3 \in F_p^*$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_7 = s_8 = s_9 = 0, s_2, s_4, s_5 \in F_p, s_0, s_1, s_3, s_6 \in F_p^*$

$M_{74} = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p^3\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p\mathbb{Z}_p\}$

- $s_0 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, s_7 = s_8 = s_9 = 0, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2, s_4, s_5 \in F_p, s_1, s_3 \in F_p^*$
- $s_0 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_7 = s_8 = s_9 = 0, s_2, s_4, s_5 \in F_p, s_1, s_3, s_6 \in F_p^*$

$M_{75} = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_2 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p^3\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p\mathbb{Z}_p\}$

- $s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2 = s_7 = s_8 = s_9 = 0, s_4, s_5 \in F_p, s_0, s_1, s_3 \in F_p^*$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_7 = s_8 = s_9 = 0, s_4, s_5 \in F_p, s_0, s_1, s_3, s_6 \in F_p^*$

$M_{76} = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_2 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p^3\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p\mathbb{Z}_p\}$

- $s_0 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2 = s_7 = s_8 = s_9 = 0, s_4, s_5 \in F_p,$ $s_1, s_3 \in F_p^*$
- $s_0 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_7 = s_8 = s_9 = 0, s_4, s_5 \in F_p,$ $s_1, s_3, s_6 \in F_p^*$

$M_{77} = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p^3\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p\mathbb{Z}_p\}$

- $s_1 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2 = s_7 = s_8 = s_9 = 0, s_4, s_5, \in F_p,$ $s_0, s_3 \in F_p^*$
- $s_1 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_7 = s_8 = s_9 = 0, s_4, s_5, \in F_p,$ $s_0, s_3, s_6 \in F_p^*$

$M_{78} = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_3 \in p^3\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p\mathbb{Z}_p\}$

- $s_0 = s_1 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2 = s_7 = s_8 = s_9 = 0, s_4, s_5, \in F_p,$ $s_3 \in F_p^*$
- $s_0 = s_1 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_7 = s_8 = s_9 = 0, s_4, s_5, \in F_p,$ $s_3, s_6 \in F_p^*$

$M_{79} = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p\mathbb{Z}_p\}$

- $s_6 = 1, s_5 = s_7 = s_8 = s_9 = 0, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 = t = 4, s_2, s_4 \in F_p, s_0, s_1, s_3 \in F_p^*$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_5 = s_7 = s_8 = s_9 = 0, s_2, s_4 \in F_p, s_0, s_1, s_3, s_6 \in F_p^*$

$M_{80} = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p\mathbb{Z}_p\}$

- $s_0 = s_6 = 1, s_5 = s_7 = s_8 = s_9 = 0, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 = t = 4, s_2, s_4 \in F_p,$ $s_1, s_3 \in F_p^*$
- $s_0 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_5 = s_7 = s_8 = s_9 = 0, s_2, s_4 \in F_p,$ $s_1, s_3, s_6 \in F_p^*$

$M_{81} = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_2 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p\mathbb{Z}_p\}$

- $s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2 = s_5 = s_7 = s_8 = s_9 = 0, s_4 \in F_p,$ $s_0, s_1, s_3 \in F_p^*$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_5 = s_7 = s_8 = s_9 = 0, s_4 \in F_p, s_0, s_1, s_3, s_6 \in F_p^*$

$M_{82} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_2 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p\mathbb{Z}_p\}$

- $s_0 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2 = s_5 = s_7 = s_8 = s_9 = 0, s_4 \in F_p,$ $s_1, s_3 \in F_p^*$
- $s_0 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_5 = s_7 = s_8 = s_9 = 0, s_4 \in F_p,$ $s_1, s_3, s_6 \in F_p^*$

$M_{83} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p\mathbb{Z}_p\}$

- $s_1 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2 = s_5 = s_7 = s_8 = s_9 = 0, s_4 \in F_p,$ $s_0, s_3 \in F_p^*$
- $s_1 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_5 = s_7 = s_8 = s_9 = 0, s_4 \in F_p,$ $s_0, s_3, s_6 \in F_p^*$

$M_{84} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_3 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p\mathbb{Z}_p\}$

- $s_0 = s_1 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2 = s_5 = s_7 = s_8 = s_9 = 0, s_4 \in F_p,$ $s_3 \in F_p^*$
- $s_0 = s_1 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_5 = s_7 = s_8 = s_9 = 0, s_4 \in F_p,$ $s_3, s_6 \in F_p^*$

$M_{85} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p\mathbb{Z}_p\}$

- $s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, , m_3 \geq 3, s_4 = s_5 = s_7 = s_8 = s_9 = 0, s_2 \in F_p,$ $s_0, s_1, s_3 \in F_p^*$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_4 = s_5 = s_7 = s_8 = s_9 = 0, s_2 \in F_p, s_0, s_1, s_3, s_6 \in F_p^*$

$M_{86} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p\mathbb{Z}_p\}$

- $s_0 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, , m_3 \geq 3, s_4 = s_5 = s_7 = s_8 = s_9 = 0, s_2 \in F_p,$ $s_1, s_3 \in F_p^*$
- $s_0 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_4 = s_5 = s_7 = s_8 = s_9 = 0, s_2 \in F_p,$ $s_1, s_3, s_6 \in F_p^*$

$M_{87} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_2 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p\mathbb{Z}_p\}$

- $s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2 = s_4 = s_5 = s_7 = s_8 = s_9 = 0, s_0, s_1, s_3 \in F_p^*$
- $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_4 = s_5 = s_7 = s_8 = s_9 = 0, s_0, s_1, s_3, s_6 \in F_p^*$

$M_{88} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_2 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p\mathbb{Z}_p\}$

- $s_0 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2 = s_4 = s_5 = s_7 = s_8 = s_9 = 0, s_1, s_3 \in F_p^*$
- $s_0 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_4 = s_5 = s_7 = s_8 = s_9 = 0, s_1, s_3, s_6 \in F_p^*$

$M_{89} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p\mathbb{Z}_p\}$

- $s_1 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2 = s_4 = s_5 = s_7 = s_8 = s_9 = 0, s_0, s_3 \in F_p^*$
- $s_1 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_4 = s_5 = s_7 = s_8 = s_9 = 0, s_0, s_3, s_6 \in F_p^*$

$M_{90} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_3 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p\mathbb{Z}_p\}$

- $s_0 = s_1 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2 = s_4 = s_5 = s_7 = s_8 = s_9 = 0,$ $s_3 \in F_p^*$
- $s_0 = s_1 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_4 = s_5 = s_7 = s_8 = s_9 = 0,$ $s_3, s_6 \in F_p^*$

$M_{91} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p\mathbb{Z}_p\}$

- $s_3 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_4 = s_5 = s_7 = s_8 = s_9 = 0, s_2 \in F_p,$ $s_0, s_1 \in F_p^*$
- $s_3 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_4 = s_5 = s_7 = s_8 = s_9 = 0, s_2 \in F_p,$ $s_0, s_1, s_6 \in F_p^*$

$M_{92} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p\mathbb{Z}_p\}$

- $s_0 = s_3 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_4 = s_5 = s_7 = s_8 = s_9 = 0, s_2 \in F_p,$ $s_1 \in F_p^*$
- $s_0 = s_3 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_4 = s_5 = s_7 = s_8 = s_9 = 0, s_2 \in F_p,$ $s_1, s_6 \in F_p^*$

$M_{93} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_2 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p\mathbb{Z}_p\}$

- $s_3 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2 = s_4 = s_5 = s_7 = s_8 = s_9 = 0, s_0, s_1 \in F_p^*$
- $s_3 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_4 = s_5 = s_7 = s_8 = s_9 = 0, s_0, s_1, s_6 \in F_p^*$

$M_{94} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_2 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p\mathbb{Z}_p\}$

- $s_0 = s_3 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2 = s_4 = s_5 = s_7 = s_8 = s_9 = 0,$ $s_1 \in F_p^*$
- $s_0 = s_3 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_4 = s_5 = s_7 = s_8 = s_9 = 0,$ $s_1, s_6 \in F_p^*$

$M_{95} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_4 \in p\mathbb{Z}_p\}$

- $s_1 = s_3 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2 = s_4 = s_5 = s_7 = s_8 = s_9 = 0,$ $s_0 \in F_p^*$
- $s_1 = s_3 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_4 = s_5 = s_7 = s_8 = s_9 = 0,$ $s_0, s_6 \in F_p^*$

$M_{96} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_4 \in p\mathbb{Z}_p\}$

- $s_0 = s_1 = s_3 = s_6 = 1, m_4 = t = 3, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, s_2 = s_4 = s_5 = s_7 = s_8 = s_9 = 0$
- $s_0 = s_1 = s_3 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_4 = s_5 = s_7 = s_8 = s_9 = 0,$ $s_6 \in F_p^*$

$M_{97} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$

- $s_6 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_7 = s_8 = s_9 = 0, s_2, s_4, s_5 \in F_p$, $s_0, s_1, s_3 \in F_p^*$

$$M_{98} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$$

- $s_0 = s_6 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_7 = s_8 = s_9 = 0, s_2, s_4, s_5 \in F_p$, $s_1, s_3 \in F_p^*$

$$M_{99} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_2 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$$

- $s_6 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_7 = s_8 = s_9 = 0, s_4, s_5 \in F_p$, $s_0, s_1, s_3 \in F_p^*$

$$M_{100} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_2 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$$

- $s_0 = s_6 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_7 = s_8 = s_9 = 0, s_4, s_5 \in F_p$, $s_1, s_3 \in F_p^*$

$$M_{101} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$$

- $s_1 = s_6 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_7 = s_8 = s_9 = 0, s_4, s_5, \in F_p$, $s_0, s_3 \in F_p^*$

$$M_{102} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_3 \in p^3\mathbb{Z}_p\}$$

- $s_0 = s_1 = s_6 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_7 = s_8 = s_9 = 0, s_4, s_5, \in F_p$, $s_3 \in F_p^*$

$$M_{103} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$$

- $s_6 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_5 = s_7 = s_8 = s_9 = 0, s_2, s_4 \in F_p$, $s_0, s_1, s_3 \in F_p^*$

$$M_{104} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$$

- $s_0 = s_6 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_5 = s_7 = s_8 = s_9 = 0, s_2, s_4 \in F_p$, $s_1, s_3 \in F_p^*$

$$M_{105} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_2 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$$

- $s_6 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_5 = s_7 = s_8 = s_9 = 0, s_4 \in F_p$, $s_0, s_1, s_3 \in F_p^*$

$$M_{106} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_2 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$$

- $s_0 = s_6 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_5 = s_7 = s_8 = s_9 = 0, s_4 \in F_p$, $s_1, s_3 \in F_p^*$

$$M_{107} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$$

- $s_1 = s_6 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_5 = s_7 = s_8 = s_9 = 0, s_4 \in F_p$, $s_0, s_3 \in F_p^*$

$$M_{108} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_3 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$$

- $s_0 = s_1 = s_6 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_5 = s_7 = s_8 = s_9 = 0, s_4 \in F_p$, $s_3 \in F_p^*$

$M_{109} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p\mathbb{Z}_p\}$

- $s_6 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_4 = s_5 = s_7 = s_8 = s_9 = 0, s_2 \in F_p$, $s_0, s_1, s_3 \in F_p^*$

$M_{110} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_2 \in p^2\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p\mathbb{Z}_p\}$

- $s_0 = s_6 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_4 = s_5 = s_7 = s_8 = s_9 = 0, s_2 \in F_p$, $s_1, s_3 \in F_p^*$

$M_{111} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_2 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p\mathbb{Z}_p\}$

- $s_6 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_4 = s_5 = s_7 = s_8 = s_9 = 0$, $s_0, s_1, s_3 \in F_p^*$

$M_{112} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_2 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p\mathbb{Z}_p\}$

- $s_0 = s_6 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_4 = s_5 = s_7 = s_8 = s_9 = 0$, $s_1, s_3 \in F_p^*$

$M_{113} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_3 \in p\mathbb{Z}_p\}$

- $s_1 = s_6 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_4 = s_5 = s_7 = s_8 = s_9 = 0$, $s_0, s_3 \in F_p^*$

$M_{114} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_3 \in p\mathbb{Z}_p\}$

- $s_0 = s_1 = s_6 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_4 = s_5 = s_7 = s_8 = s_9 = 0$, $s_3 \in F_p^*$

$M_{115} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_2 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$

- $s_3 = s_6 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_4 = s_5 = s_7 = s_8 = s_9 = 0, s_2 \in F_p$, $s_0, s_1 \in F_p^*$

$M_{116} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_2 \in p^2\mathbb{Z}_p\}$

- $s_0 = s_3 = s_6 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_4 = s_5 = s_7 = s_8 = s_9 = 0, s_2 \in F_p$, $s_1 \in F_p^*$

$M_{117} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p, x_5 - x_2 \in p\mathbb{Z}_p\}$

- $s_3 = s_6 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_4 = s_5 = s_7 = s_8 = s_9 = 0$, $s_0, s_1 \in F_p^*$

$M_{118} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_2 \in p\mathbb{Z}_p\}$

- $s_0 = s_3 = s_6 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_4 = s_5 = s_7 = s_8 = s_9 = 0$, $s_1 \in F_p^*$

$M_{119} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}_p^5 : x_5 - x_1 \in p\mathbb{Z}_p\}$

- $s_1 = s_3 = s_6 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_4 = s_5 = s_7 = s_8 = s_9 = 0,$
$s_0 \in F_p^*$

$M_{120} = \ \mathbb{Z}_p^5$

- $s_0 = s_1 = s_3 = s_6 = 1, m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 3, m_4 \geq 4, t \geq 4, s_2 = s_4 = s_5 = s_7 = s_8 = s_9 = 0$

El método aplicado por J.C Bushnell e I. Reiner si es valido para el caso $B_p(C_{p^4})$.

Se obtuvieron los 120 ideales de índice finito del Anillo de Burnside $B_p(C_{p^4})$, asociados a la familia de ideales de índice finito $B_p(C_{p^3})$ isomorfos a la clase de $\mathbb{Z}_p^4$.

Apéndice A

Enteros p-ádicos

Definición A.1. Sea $\mathbb{K}$ un campo y $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ el conjunto de los números reales no negativos. Un Valor Absoluto sobre $\mathbb{K}$ es una función

$$|\cdot| : \mathbb{K} \to \mathbb{R}^+$$

que satisface lo siguiente:

i) $|x| = 0$ si y solo si $x = 0$.

ii) $|xy| = |x||y|$ para todo $x, y \in \mathbb{K}$.

iii) $|x + y| \leq |x| + |y|$ para todo $x, y \in \mathbb{K}$.

Definición A.2. Un valor absoluto sobre un campo $\mathbb{K}$ es no arquimediano si además satisface

$$|x + y| \leq \text{máx}\{|x|, |y|\} \quad \text{para todo} \quad x, y \in \mathbb{K}$$

En cualquier otro caso diremos que el valor absoluto es arquimediano.

Definición A.3. Sea $\mathbb{K}$ un campo y sea $|\cdot|$ un valor absoluto sobre $\mathbb{K}$.

i) Una sucesión de elementos de $\mathbb{K}$, (x_i), es una sucesión de Cauchy si para cada $\epsilon > 0$ existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x_m| < \epsilon$ siempre que $n, m \geq M$.

ii) El campo $\mathbb{K}$ es completo con respecto a $|\cdot|$ si cada sucesión de Cauchy converge en $\mathbb{K}$

Ejemplo A.1. Sea $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, definimos el valor absoluto usual sobre $\mathbb{K}$ como:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Ejemplo A.2. Sea $\mathbb{K}$ un campo, definimos el valor absoluto trivial sobre $\mathbb{K}$ como:

$$|x| = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ 1 & \text{si} \quad x \neq 0 \end{cases}$$

Definición A.4. Sea $p \in \mathbb{Z}$ un número primo fijo. La Valuación p-ádica sobre $\mathbb{Z}$ es la función
$$v_p : \mathbb{Z} - \{0\} \to \mathbb{R}$$
definida como sigue: para cada entero $n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$, sea $v_p(n)$ el único entero no negativo que satisface
$$n = p^{v_p(n)}n', \text{donde} \quad p \not| n'$$
El dominion de la función v_p se extiende al campo de los números racionales de la sigueinte manera: si $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} - \{0\}$, entonces
$$v_p(x) = v_p(a) - v_p(b)$$
con la convención de que $v_p(0) = +\infty$

Definición A.5. Para cualquier $x \in \mathbb{Q}$, definimos el valor absoluto p-ádico de x como
$$|x|_p = \begin{cases} p^{-v_p(x)} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

Teorema A.1. *El campo de $\mathbb{Q}$ de números racionales no es completo con respecto a cualquiera de los valores absolutos no triviales.*

Definición A.6. Sea $|\cdot| = |\cdot|_p$ un valor absoluto no arquimediano sobre $\mathbb{Q}$. Denotaremos por $\mathcal{C} = \mathcal{C}_p(\mathbb{Q})$, el conjunto de todas las sucesiones de Cauchy en $\mathbb{Q}$ con respecto a $|\cdot|_p$, i.e,
$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_p(\mathbb{Q}) = \{(x_n) : (x_n) \text{ es una sucesión de Cauchy con respecto a } |\cdot|_p\}$$

Proposición A.1. *$\mathcal{C}$ es un anillo conmutativo con unidad con las siguientes operaciones:*
$$\begin{array}{lcl} (x_n) + (y_n) & = & (x_n + y_n) \\ (x_n) \cdot (y_n) & = & (x_n y_n) \\ 0 & = & (0) \\ 1 & = & (1) \end{array}$$

Lema A.1. *La funcion $f : \mathbb{Q} \to \mathcal{C}$ definida como $f(x) = (x)$ es una inclusión de $\mathbb{Q}$ en $\mathcal{C}$*

Definición A.7. Definimos $\mathcal{N} \subset \mathcal{C}$ como el conjunto de sucesiones que convergen a cero con respecto al valor absoluto $|\cdot|_p$, i.e,
$$\mathcal{N} := \{(x_n) : x_n \to 0\} = \{(x_n) : \lim_{x \to \infty} |x_n|_p = 0\}$$

Proposición A.2. *$\mathcal{N}$ es un ideal máximo en $\mathcal{C}$*

Definición A.8. Definimos el campo de los números p-ádicos como el campo

$$\mathbb{Q}_p = \frac{\mathcal{C}}{\mathcal{N}}$$

Observación A.1. La inclusión natural de los números racionales $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{Q}_p$, $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{Q}_p$, es la función que a cada $x \in \mathbb{Q}$ le asigna la clase de la sucesion constante (x), esto por que dos sucesiones constantes distintas nunca difieren por un elemento de $\mathcal{N}$.

Definición A.9. Si $\lambda \in \mathbb{Q}_p$ y (x_n) es cualquier sucesión de Cauchy representante de λ, definimos

$$|\lambda|_p = \lim_{n\to+\infty} |x_n|_p$$

Proposición A.3. *El límite de la definición anterior está bien definido.*

Proposición A.4. *La función $|\cdot|_p : \mathbb{Q}_p \to \mathbb{R}^+$, definida anteriormente es un valor absoluto no arquimediano.*

Teorema A.2. *Para cada primo $p \in \mathbb{Z}$ existe un campo $\mathbb{Q}_p$ con un valor absoluto no arquimediano $|\cdot|_p$ tal que:*

i) Existe una inclusión $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{Q}_p$ y el valor absoluto inducido por $|\cdot|_p$ sobre $\mathbb{Q}$ vía esta inclusión es un valor absoluto p-ádico.

ii) La imagen de $\mathbb{Q}$ bajo esta inclusión es densa en $\mathbb{Q}_p$ (con respecto al valor absoluto $|\cdot|_p$)

iii) $\mathbb{Q}_p$ es completo con respecto al valor absoluto $|\cdot|_p$

El campo $\mathbb{Q}_p$ que satisface $i), ii), iii)$ es único salvo isomorfismos que preservan valores absolutos.

Definición A.10. El anillo de enteros p-ádicos es el conjunto

$$\mathbb{Z}_p := \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p \leq 1\}$$

Observación A.2. Las unidades de $\mathbb{Z}_p$ son aquellos elementos $x \in \mathbb{Z}_p$ tales que $|x|_p = 1$

Proposición A.5. *El anillo $\mathbb{Z}_p$ de enteros p-ádicos es un anillo local cuyo ideal máximo es el ideal principal*

$$p\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p \leq \frac{1}{p}\}$$

Además, cada elemento del complemento $\mathbb{Z}_p - p\mathbb{Z}_p$ es unidad en $\mathbb{Z}_p$, siendo siendo estas las únicas unidaddes en $\mathbb{Z}_p$.

Proposición A.6. *La inclusión $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}_p$ tiene una imagen densa. En particular, dado $x \in \mathbb{Z}_p$ y $n \geq 1$, existe $\alpha \in \mathbb{Z}$ con $0 \leq \alpha \leq p^n - 1$, tal que $|x - \alpha|_p \leq p^{-n}$. El entero α con estas propiedades es único.*
Para cualquier $x \in \mathbb{Z}_p$ existe una sucesión de Cauchy α_n que convege a x con las siguientes caractieristicas:

i) $\alpha_n \in \mathbb{Z}$ *para todo* n *y* $0 \leq \alpha_n \leq p^n - 1$

ii) Para cada n *se tiene* $\alpha_n \equiv \alpha_{n-1} \pmod{p^{n-1}}$

La sucesión (α_n) *con estas propiedades es única.*

Corolario A.1. *Sea* $n \in \mathbb{N}$ *se tiene*

$$\frac{\mathbb{Z}_p}{p^n\mathbb{Z}_p} \cong \frac{\mathbb{Z}}{p^n\mathbb{Z}}$$

Proposición A.7. *Cada* $x \in \mathbb{Z}_p$ *puede escribirse de forma única como sigue*

$$x = b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \ldots + b_n p^n + \ldots$$

con $0 \leq b_i \leq p - 1$.

Corolario A.2. *Cada* $x \in \mathbb{Q}_p$ *puede ser escrito de forma única como sigue*

$$x = b_{-n_0}p^{-n_0} + b_{-n_0+1}p^{-n_0+1} + \ldots + b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \ldots + b_n p^n + \ldots = \sum_{n \geq -n_0} b_n p^n$$

con $0 \leq b_n \leq p - 1$ *y* $b_{-n_0} \neq 0$. *Además* $v_p(x) = -n_0$

Para mas detalles ver [8].

Referencias

[1] C. J. Bushnell and I. Reiner, Zeta functions of arithmetic orders and Solomon's conjectures, Math. Z. 173(1980) 135-161.

[2] D. Villa- Hernández, Zeta funtions of burnside rings of groups of order p and p^2, Comm in Algebra 37 (2009) 1758-1786.

[3] I. Reiner, Maximal Orders, Academy Press, London-New York,1975.

[4] I. Reiner, Zeta functions of integral representations, Comm in Algebra 8 (1980) 911-925.

[5] J. M. Ramírez-Contreras and D. Villa- Hernández, Solomon´s Zeta function of $B_p(C_{p^3})$. Int. Electron. J. Algebra 20 (2016) 1-27.

[6] L.. Solomon, Zeta Functions and Integral Representation Theory, Advances in Math. 26 (1977) 306-326.

[7] S. Bouc, Burnside rings, in: Handbook of algebra, Noth-Holland, Amsterdam, vol 2, 2000, pp. 739-804.

[8] V. A. Aguilar Arteaga, Tesis de Maestría "Funciones zeta locales de Igusa vía la fórmula de la fase estacionaria"FCFM, BUAP, julio 2014.