



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE
PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

CUANTIFICACIÓN DE COHERENCIA ÓPTICA
MEDIANTE FUNCIONES DE CORRELACIÓN

T E S I S

PRESENTADA PARA OBTENER EL TÍTULO DE

LICENCIADA EN FÍSICA

P R E S E N T A :

GUADALUPE FERNÁNDEZ FERMÍN

DIRECTOR DE TESIS

DR. MAXIMINO LUIS ARROYO CARRASCO



PUEBLA, PUE., NOVIEMBRE 2019

Título: Cuantificación de coherencia óptica mediante funciones de correlación.
Estudiante: Guadalupe Fernández Fermín

JURADO

Dra. Marcela Maribel Méndez Otero
Presidente

Dr. Miguel Ángel Olvera Santamaría
Secretario

Dra. María del Rosario Pastrana Sánchez
Vocal

Dr. Carlos Ignacio Robledo Sánchez
Suplente

Dr. Maximino Luis Arroyo Carrasco
Director de tesis

A mis padres y a mi hermano

Resumen

En el presente trabajo de tesis se hace un estudio de la teoría clásica de coherencia óptica por medio de las funciones de correlación necesarias para su descripción. Se analizan las fluctuaciones de fase de la onda en base a una función de correlación de primer orden y las fluctuaciones asociadas a su amplitud como una función de correlación de segundo orden. Se indica la relación entre el grado de coherencia temporal y el teorema de Wiener Khintchine, además de la relación entre la ganancia de coherencia de una fuente incoherente y la pérdida de coherente de una fuente por efectos de difracción, resultado conocido como el teorema de van Cittert-Zernike. Se muestran los resultados experimentales del estudio de coherencia temporal y el concepto de grado de coherencia. Se da una explicación de los resultados obtenidos con los interferómetros de intensidad mediante las fluctuaciones de correlación de segundo orden. Este trabajo se basa principalmente en las aportaciones realizadas en el experimento de Hanbury-Brown y Twiss.

Índice general

Resumen	III
Índice de figuras	VI
1. Introducción	1
2. Teoría	4
2.1. Ecuación de onda	4
2.2. Intensidad	5
2.2.1. Interferencia	6
2.3. Transformada de Fourier	7
2.3.1. Teoremas de la Transformada de Fourier	7
2.4. Coherencia y Correlación de Primer Orden	9
2.4.1. Coherencia Temporal	9
2.4.2. Coherencia Espacial	16
2.4.3. Teorema de van Cittert-Zernike	18
3. Medición experimental del grado de coherencia	21
4. Correlación a Segundo Orden	25
4.1. Experimento de Hanbury-Brown y Twiss	27
4.1.1. Experimentos independientes	29
4.1.2. Aclaración al dilema del experimento HBT	30
4.1.3. Generalización de Mandel	32

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	v
5. Conclusiones	35
Bibliografía	37

Índice de figuras

2.1. Dependencia de fase φ en la intensidad total I.	7
2.2. Interferómetro de Michelson	9
2.3. Distribución de la intensidad dependiendo del valor de $ \gamma(\tau) $	12
2.4. Ejemplos de la función de onda, el tiempo de coherencia y el grado complejo de coherencia temporal para a) tiempo de coherencia corto y b) tiempo de coherencia largo.	13
2.5. Experimento de doble rendija de Young	16
2.6. Esquema del teorema de van Cittert-Zernike.	18
2.7. (a) Teorema de van Cittert-Zernike (b) Difracción en una apertura A	20
3.1. Arreglo experimental en base al interferómetro de Twyman-Green.	22
3.2. Variación de la visibilidad del patrón de interferencia al aumentar o disminuir la diferencia de camino óptico.	23
3.3. Resultados experimentales del valor de visibilidad en función de la diferencia de camino óptico y valor de la longitud de coherencia.	24
4.1. Esquema del interferómetro de intensidad para radio ondas.	26
4.2. Diagrama del montaje del experimento de Hanbury-Brown y Twiss	27
4.3. Valores teóricos y experimentales del factor de correlación normalizado para diferentes valores de separación de los foto-cátodos.	28
4.4. Razón de coincidencia total contra retardo τ , posición cátodos superpuestos".	30

4.5. Razón de coincidencia total contra retardo τ , posición " cátodos no superpuestos"	30
4.6. Razón de coincidencia total contra posición.	31

Capítulo 1

Introducción

La óptica, es la rama de la física dedicada al estudio del comportamiento de la luz, sus características y sus interacciones dentro de un medio material. El inicio de su estudio en parte se debe a los antiguos griegos, los cuales concebían a la óptica como una teoría de la visión, donde la luz facilitaba el proceso por el cual la imagen de un objeto se transmitiera al ojo. Consecuentemente la percepción de la luz se resumía en flujos de partículas emergentes de los objetos o un medio entre el ojo y el objeto.

Conforme el paso del tiempo se desarrollaron teorías acerca de la propagación de la luz, predominando dos de estas: la corpuscular (apoyada por Newton) y la ondulatoria (iniciada por Huygens). Sin embargo, en 1801 Thomas Young dio a la teoría ondulatoria cierta preeminencia sobre la teoría corpuscular con el principio de interferencia: Cuando dos ondulaciones de diferentes orígenes coinciden perfectamente en dirección o casi coincidentes, su efecto conjunto es una combinación de los movimientos que pertenecen a cada uno [1].

Cuando Maxwell introdujo las ecuaciones que contemplaban los conocimientos empíricos que se tenían sobre la electricidad y el magnetismo se pudo comprobar, de manera teórica, que la perturbación electromagnética se podía propagar como una onda transversal en el éter luminífero. Además, dio solución a la ecuación de onda y halló que dependía de las propiedades eléctricas y magnéticas del medio. Utilizando los valores encontrados empíricamente de dichas cantidades y, al comparar con la velocidad medida de la luz concluyó que la luz era una perturbación electromagnética

en forma de ondas propagadas a través del éter[2]. De esta forma las ecuaciones de Maxwell describen el comportamiento de la luz mediante funciones deterministas. No obstante, la radiación que emiten las fuentes de luz que se encuentran en la naturaleza poseen fluctuaciones intrínsecas, por lo cual no son estrictamente deterministas. Al considerar tales situaciones realistas, las ecuaciones de Maxwell deben generalizarse para tomar en cuenta dichas fluctuaciones. Al dominio dedicado al estudio de las fluctuaciones de la luz se le conoce como teoría de coherencia óptica.[3]

Zernike fue uno de los primeros investigadores en la teoría de coherencia. En 1938 definió el grado de coherencia, el cual tiene relación directa con experimentos (como los que llevó a cabo Albert Michelson, que hasta entonces no se habían interpretado en términos de coherencia) y estableció un número de resultados valiosos relacionados a esta cantidad [4]. Entre las aportaciones realizadas por Zernike se encuentra el *teorema de van Cittert-Zernike*, este es un resultado básico de la teoría elemental de coherencia óptica y muestra que se puede generar coherencia en el proceso de propagación.

La teoría de coherencia destacó debido a sus aplicaciones, por ejemplo en astronomía, donde fue posible determinar los radios angulares de estrellas empleando el interferómetro estelar de Michelson, cuyo funcionamiento se basa en la medición de las fluctuaciones de fase a través de la visibilidad un patrón de franjas correspondiente a una correlación de primer orden [5]. Sin embargo, la necesidad de una precisión mecánica extrema y la dependencia de las mediciones en la visibilidad del patrón de franjas hicieron impráctico dicho modelo interferométrico.

En consecuencia, R. Hanbury Brown y R. Q. Twiss planteaban un nuevo tipo de interferómetro que solucionaba los problemas del interferómetro estelar de Michelson. En este proponían la medición de las fluctuaciones de amplitud correspondientes a correlaciones de segundo orden, obtenidas mediante un interferómetro de intensidad que obtuvo resultados satisfactorios [6]. No obstante, la parte opositora a los resultados de Hanbury Brown y Twiss llevó a cabo experimentos con características similares donde, efectivamente, no se obtuvo correlación alguna. La controversia generada por ambas partes quedó aclarada por E. M. Purcell, quien argumentó que la presencia tanto de contribuciones de partículas así como contribuciones ondulatorias en la detección fo-

toeléctrica de las fluctuaciones de luz pueden considerarse como una manifestación de la dualidad onda-partícula [7]. Más aún, la explicación semi-clásica de Purcell condujo a un desarrollo más profundo relacionado a la detección fotoeléctrica [8].

En este trabajo de tesis se realiza una revisión de la teoría de coherencia óptica, en particular, se estudia el comportamiento de las funciones de correlación de primero y segundo orden. Así mismo, se hace un análisis de los interferómetros de intensidad como resultado de correlaciones de segundo orden, especialmente del experimento de Hanbury Brown y Twiss. Para ello, en el capítulo 2 se parte desde el concepto de onda y algunos de los fenómenos que resultan de la propagación de dicha onda en algún medio material. Además, se introducen las ideas de coherencia temporal y coherencia espacial; abordados desde experimentos interferométricos que muestran la relación entre estas y las funciones de correlación de primer orden. En el capítulo 3 se muestran los resultados experimentales de la medición del módulo del grado complejo de coherencia y en consecuencia la longitud de coherencia a través de la visibilidad de los patrones de interferencia obtenidos en un interferómetro de Twyman-Green. En el capítulo 4 se aborda el tema de correlación de segundo orden aplicado al interferómetro de intensidad y su interpretación para longitudes de onda en el espectro visible mediante el experimento de Hanbury-Brown y Twiss. También se muestra su explicación semi-clásica para determinar la relación entre fluctuaciones de amplitud con fluctuaciones de conteo de fotones.

Capítulo 2

Teoría

En este capítulo se muestran los elementos necesarios para la comprensión y entendimiento de los capítulos siguientes. Se parte del concepto de onda electromagnética para después definir algunos fenómenos como consecuencia de su propagación tales como intensidad e interferencia ópticas. Además, se muestran los conceptos de transformada de Fourier que ayudan a establecer relaciones entre diferentes componentes de una onda. Y por ultimo, se muestra los elementos básicos de la teoría de coherencia.

2.1. Ecuación de onda

Una onda electromagnética monocromática es descrita por una función real $\psi(\vec{r}, t)$ que depende de la posición $\vec{r}(x, y, z)$ y del tiempo conocida como función de onda [9]

$$\psi(\vec{r}, t) = a(\vec{r}) \cos(2\pi\nu t + \varphi(\vec{r})) \quad (2.1)$$

compuesta por $a(\vec{r})$ la amplitud, $\varphi(\vec{r})$ la fase, t el tiempo y ν la frecuencia [Hz].

La función anterior satisface la ecuación de onda

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \quad (2.2)$$

donde $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ es conocido como operador Laplaciano. Una característica importante de (2.2) es ser una ecuación diferencial lineal, por lo cual el principio de

superposición se puede aplicar; establece que dadas ψ_1 y ψ_2 satisfacen la ecuación de onda entonces $(\psi_1 + \psi_2)$ también satisface la ecuación de onda.

Una forma más general de representar a (2.1) es a través de la función de onda compleja

$$\Psi(\vec{r}, t) = a(\vec{r})\exp[i\varphi(\vec{r})]\exp[i2\pi\nu t] \quad (2.3)$$

la cual también satisface la ecuación de onda (2.2). Por lo tanto

$$\psi(\vec{r}, t) = \text{Re}(\Psi(\vec{r}, t)) = \frac{1}{2}[\Psi(\vec{r}, t) + \Psi^*(\vec{r}, t)] \quad (2.4)$$

Ahora, se define

$$U(\vec{r}) = a(\vec{r})\exp[i\varphi(\vec{r})] \quad (2.5)$$

como la amplitud compleja y, utilizando (2.4), podemos escribir (2.3) como sigue:

$$\psi(\vec{r}, t) = \frac{1}{2}[U(\vec{r})\exp(i2\pi\nu t) + U^*(\vec{r})\exp(-i2\pi\nu t)] \quad (2.6)$$

Para una posición dada \vec{r} , $|U(\vec{r})| = a(\vec{r})$ es la amplitud de la onda y $\arg[U(\vec{r})] = \varphi(\vec{r})$ su fase.

2.2. Intensidad

Se define a la intensidad óptica como la potencia óptica por unidad de área, y es proporcional al cuadrado de la función de onda

$$\begin{aligned} I(\vec{r}) &= 2 \langle \psi^2(\vec{r}, t) \rangle \\ &= 2 \langle \psi^*(\vec{r}, t)\psi(\vec{r}, t) \rangle \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \psi^*(\vec{r}, t)\psi(\vec{r}, t) dt \end{aligned} \quad (2.7)$$

con $\langle . \rangle$ un promedio temporal, calculado durante un intervalo T.

Tomando como ejemplo una onda monocromática, ecuación (2.1), y sustituyendo

en (2.7) tenemos que;

$$\begin{aligned}
 \mathbf{I}(\vec{r}) &= a^2(\vec{r}) \langle 1 + \cos 2(2\pi\nu t + \varphi(\vec{r})) \rangle_T \\
 &= a^2(\vec{r}) \\
 &= |U(\vec{r})|^2
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

En la ecuación anterior el promedio temporal se aproximó a 1 debido a que la aportación del término $\cos 2(2\pi\nu t + \varphi(\vec{r}))$ es muy pequeña. Finalmente, (2.8) nos dice que la intensidad es proporcional al cuadrado de la amplitud del campo.

2.2.1. Interferencia

Como ya se mencionó anteriormente, el principio de superposición permite realizar la suma de dos o más ondas monocromáticas, no obstante, no garantiza que la intensidad de la suma sea la suma de las intensidades. La intensidad resultante se ve afectada por la interferencia entre las ondas.

Consideremos dos ondas monocromáticas con amplitudes complejas $U_1(\vec{r})$ y $U_2(\vec{r})$. La superposición de estas da como resultado una onda monocromática con la misma frecuencia, es decir,

$$U(\vec{r}) = U_1(\vec{r}) + U_2(\vec{r}) \tag{2.9}$$

De acuerdo con (2.8), la intensidad de la onda resultante es equivalente a:

$$I(\vec{r}) = |U|^2 = |U_1 + U_2|^2 = |U_1|^2 + |U_2|^2 + U_1U_2^* + U_1^*U_2 \tag{2.10}$$

Si tomamos en cuenta que las intensidades de U_1 y U_2 son $I_1 = |U_1|^2$ $I_2 = |U_2|^2$ respectivamente, entonces (2.10) se puede escribir como:

$$I(\vec{r}) = I_1 + I_2 + 2(I_1I_2)^{\frac{1}{2}} \cos(\varphi) \tag{2.11}$$

con $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ la diferencia entre las fases de U_2 y U_1 .

El último término del lado derecho en (2.11) se denomina término de interferencia el cual, dada su dependencia de fase φ , puede ser positivo o negativo (figura 2.1).

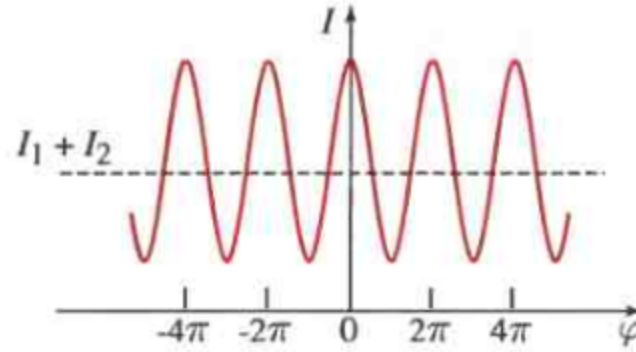


Figura 2.1: Dependencia de fase φ en la intensidad total I .

Se dice que hay interferencia constructiva cuando φ es un múltiplo entero de 2π , mientras que si φ es un múltiplo de π se obtiene interferencia destructiva, por último, si φ es múltiplo de $\frac{\pi}{2}$ el término de interferencia desaparece y entonces $I = I_1 + I_2$.

2.3. Transformada de Fourier

La transformada de Fourier en una variable se define [10]

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i2\pi\nu t} dt \quad (2.12)$$

esta es una función de ν . Similarmente la transformada de Fourier inversa

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu)e^{i2\pi\nu t} d\nu \quad (2.13)$$

2.3.1. Teoremas de la Transformada de Fourier

- *Teorema de adición*; Si $f(t)$ y $g(t)$ tienen transformadas de Fourier $F(\nu)$ y $G(\nu)$, respectivamente, entonces $f(t)+g(t)$ tiene transformada de Fourier $F(\nu)+G(\nu)$.
- *Teorema de semejanza*; Si $f(t)$ tiene transformada de Fourier $F(\nu)$, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(at)e^{-i2\pi\nu t} dt = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\nu}{a}\right) \quad (2.14)$$

- *Teorema de cambio*; Si $f(t)$ tiene transformada de Fourier $F(\nu)$ entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t-a)e^{-i2\pi\nu t} dt = e^{-i2\pi a\nu} F(\nu) \quad (2.15)$$

es decir, una traslación en el dominio temporal introduce un cambio de fase en el dominio de frecuencia.

- *Teorema de Rayleigh (Teorema de Parseval)*; Si $f(t)$ tiene transformada de Fourier $F(\nu)$ entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\nu)|^2 d\nu \quad (2.16)$$

nos dice que la integral del módulo al cuadrado de una función $f(t)$ es igual a la integral del módulo al cuadrado de su espectro.

- *Teorema de Convolución*; Si las transformadas de Fourier de $f_1(t)$ y $f_2(t)$ son $F_1(\nu)$ y $F_2(\nu)$, respectivamente, entonces la transformada inversa de

$$F(\nu) = F_1(\nu)F_2(\nu) \quad (2.17)$$

es

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau \quad (2.18)$$

es decir, la convolución en el dominio temporal (2.17) es equivalente a la multiplicación en el dominio de frecuencia (2.17).

- *Teorema de Autocorrelación*; Si $f(t)$ tiene transformada de Fourier $F(\nu)$, entonces su función de autocorrelación

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1^*(\tau)f_2(t+\tau)d\tau = |F(\nu)|^2 \quad (2.19)$$

2.4. Coherencia y Correlación de Primer Orden

La luz es considerada, desde un punto de vista clásico, como una onda electromagnética constituida por la superposición de un gran número de trenes de onda finitos con amplitudes y fases características. Debido al gran número de trenes de onda, la amplitud y fase de la onda se caracterizan por ser promedios estadísticos de las amplitudes y las fases de dichos trenes.

Se habla de la aleatoriedad de la luz cuando se generan fluctuaciones impredecibles en la fuente de luz o dentro del medio a través del cual se propaga. Se puede relacionar la aleatoriedad con los trenes de onda que constituyen a la onda electromagnética. Al estudio de la aleatoriedad de la luz se le conoce como Teoría de Coherencia [9].

2.4.1. Coherencia Temporal

Un interferómetro de Michelson es un dispositivo óptico que permite comparar la estabilidad de fase en una onda. Para ello, la luz emitida por una fuente (F) es dividida en dos mediante un divisor de haz (DH); uno de ellos es reflejado por un espejo (M_1) mientras que el otro es reflejado por otro espejo (M_2) que puede desplazarse de forma paralela al haz y luego hacerlos interferir en un detector O (figura 2.2).

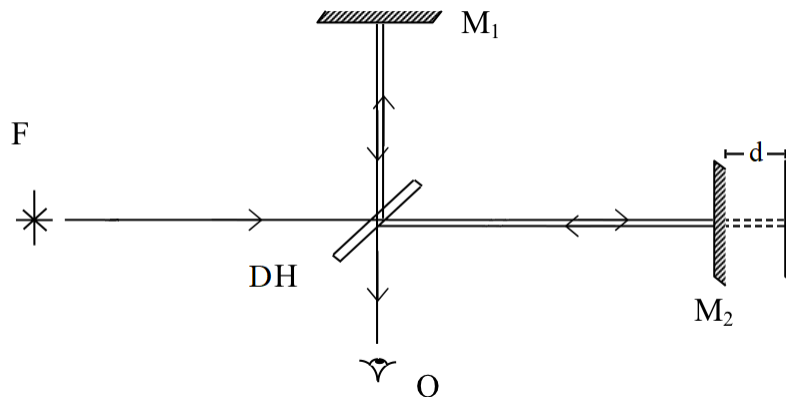


Figura 2.2: Interferómetro de Michelson

En el detector tenemos como resultado la superposición de dos ondas, U_1 y U_2 que corresponden a las ondas reflejadas por los espejos M_1 y M_2 , respectivamente. Ya que

estas ondas provienen de la división de la onda de la fuente de luz podemos escribir:

$$U_1(t) \quad (2.20)$$

$$U_2(t) = U_1(t + \tau) \quad (2.21)$$

donde τ depende del desplazamiento d del espejo M_2 de tal forma

$$\tau = \frac{2d}{c} \quad (2.22)$$

Por lo tanto, la onda resultante en el detector tiene la forma

$$U(t) = U_1(t) + U_2(t) = U_1(t) + U_1(t + \tau) \quad (2.23)$$

Sustituyendo la ecuación anterior en (2.7)

$$\begin{aligned} I(\vec{r}) &= \langle U^*U \rangle \\ &= \langle (U_1 + U_2)^*(U_1 + U_2) \rangle \\ &= \langle U_1^*U_1 \rangle + \langle U_2^*U_2 \rangle + \langle U_1^*U_2 \rangle + \langle U_1U_2^* \rangle \\ &= I_1 + I_2 + 2\text{Re}[\langle U_1^*U_2 \rangle] \end{aligned} \quad (2.24)$$

Si se cubre uno de los espejos, digamos M_2 , de tal forma que solo se detecte la intensidad del haz reflejado por el espejo M_1 obtenemos que $I(\vec{r}) = I_1$. De forma análoga, si se cubre M_1 tendremos $I(\vec{r}) = I_2$. Por lo anterior se puede considerar que $I_1 = I_2$ y así (2.24) se puede escribir como:

$$I(\vec{r}) = 2I_1 + 2\text{Re}[\langle U_1^*U_2 \rangle] \quad (2.25)$$

Con esto, (2.25) muestra que la intensidad captada por el detector es la suma de las intensidades provenientes de los haces reflejados por M_1 y M_2 más un tercer término, el término de interferencia.

Definamos la función de autocorrelación de $U(t)$ en función del tiempo de retardo τ

como:

$$\begin{aligned}
 \Gamma(\tau) &= \langle U_1^*(t)U_2(t) \rangle \\
 &= \langle U_1^*(t)U_1(t + \tau) \rangle \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T U_1^*(t)U_1(t + \tau)dt
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

Normalizando $\Gamma(\tau)$ se obtiene que

$$\gamma(\tau) = \frac{\Gamma(\tau)}{\Gamma(0)} = \frac{\Gamma(\tau)}{I_1} \tag{2.27}$$

La magnitud $\gamma(\tau)$ se conoce como el grado complejo de coherencia temporal. Como $\Gamma(0) = I_1$ siempre es una cantidad real y es el máximo valor que podemos esperar, entonces;

$$0 \leq |\gamma(\tau)| \leq 1$$

Sustituyendo (2.27) en (2.25) se tiene

$$\begin{aligned}
 I(\vec{r}) &= 2I_1 + 2I_1 \text{Re}[\gamma(\tau)] \\
 &= 2I_1(1 + \text{Re}[\gamma(\tau)]) \\
 &= 2I_1(1 + |\gamma(\tau)| \cos \delta)
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

donde $\delta = \text{arg}[\gamma(\tau)]$ es la fase de $\gamma(\tau)$.

Así (2.28) muestra que la interferencia de los haces se ve afectada por el grado de coherencia, que a su vez depende del tiempo de retardo τ . La medición del grado de coherencia no se puede realizar de manera directa con algún dispositivo óptico, para ello consideremos

$$V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} \tag{2.29}$$

que nos muestra la variación en la visibilidad de las franjas de interferencia. De (2.28) es fácil ver que I_{max} e I_{min} corresponden a los valores de la intensidad cuando $\cos(\delta)$ es $+1$, -1 , respectivamente. Sustituyendo dichas intensidades obtenemos que la visi-

bilidad del patrón de interferencia resulta:

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{(2I_1 + 2I_1|\gamma(\tau)|) - (2I_1 - 2I_1|\gamma(\tau)|)}{(2I_1 + 2I_1|\gamma(\tau)|) + (2I_1 - 2I_1|\gamma(\tau)|)} \\
 &= \frac{4I_1|\gamma(\tau)|}{4I_1} \\
 &= |\gamma(\tau)|
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

Esta relación de la visibilidad V con el módulo del grado de coherencia temporal nos permite establecer los siguientes casos.

$$\begin{aligned}
 |\gamma(\tau)| &= 1 && \text{completamente coherente,} \\
 0 \leq |\gamma(\tau)| &\leq 1 && \text{parcialmente coherente,} \\
 |\gamma(\tau)| &= 0 && \text{completamente incoherente}
 \end{aligned}$$

La figura 2.3 muestra la distribución de intensidad de un punto arbitrario en un patrón de interferencia formado por dos haces de luz casi monocromática, donde la correlación entre estos está caracterizada por el grado de coherencia γ .

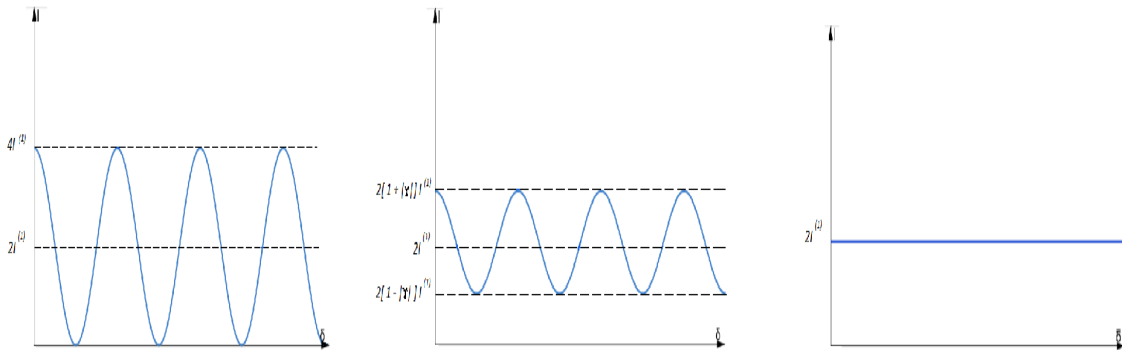


Figura 2.3: Distribución de la intensidad dependiendo del valor de $|\gamma(\tau)|$

Por lo general las fuentes de luz, naturales o artificiales, tienen un decaimiento monótono en el valor de la visibilidad. Para caracterizar tal decaimiento es necesario introducir el concepto de tiempo de coherencia τ_c , definido como el tiempo de cambio en el cual el valor de la visibilidad ha decaído a $\frac{1}{e}$ de su máximo [11]. En otras

palabras, τ_c representa el tiempo de memoria de las fluctuaciones. Por lo tanto, si $\tau < \tau_c$ se dice que las fluctuaciones están fuertemente correlacionadas, mientras que para $\tau_c < \tau$ se dice que están débilmente correlacionadas (Figura 2.4).

Ya que la definición del ancho de una función es arbitrario, podemos tomar el equivalente del ancho de potencia para definir el tiempo de coherencia como;

$$\tau_c = \int_{-\infty}^{+\infty} |\gamma(\tau)|^2 d\tau \quad (2.31)$$

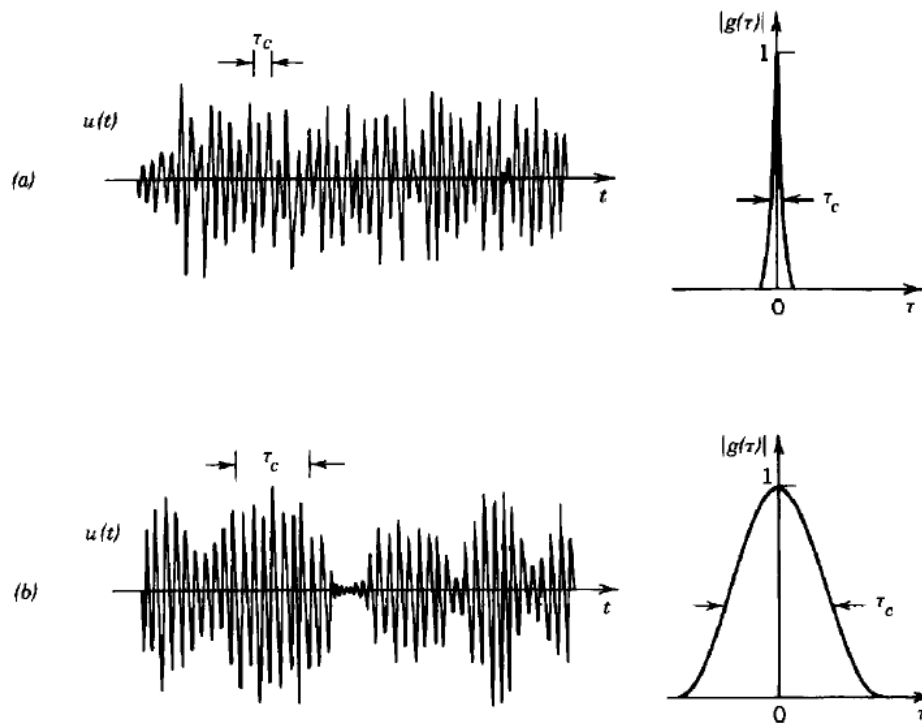


Figura 2.4: Ejemplos de la función de onda, el tiempo de coherencia y el grado complejo de coherencia temporal para a) tiempo de coherencia corto y b) tiempo de coherencia largo.

La longitud que se recorre en el tiempo de coherencia (2.31) resulta:

$$l_c = c\tau_c \quad (2.32)$$

denominada longitud de coherencia. Por lo tanto, si la diferencia de camino óptico entre los haces es menor que l_c se tendrá luz coherente, en cambio, si la diferencia de

camino óptico entre los haces es mayor que l_c se tendrá luz incoherente.

Un aspecto importante de la luz es que la función $U(t)$ que la describe puede descomponerse en una suma infinita de funciones armónicas. Así, la amplitud de una componente de frecuencia ν esta dada por la transformada de Fourier

$$V(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} U(t)e^{-i2\pi\nu t} dt \quad (2.33)$$

De aquí, se define la densidad espectral de energía $\langle |V(\nu)|^2 \rangle$, la cual especifica como la energía está distribuida por unidad de frecuencia.

Para una onda estacionaria $U(t)$ que porta energía infinita consideramos la densidad espectral de potencia. Para ello, se trabaja con la densidad espectral de energía sobre un intervalo de tiempo finito a través de la transformada de Fourier truncada

$$V_T(\nu) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} U(t)e^{-i2\pi\nu t} dt \quad (2.34)$$

Así, podemos definir la densidad espectral de potencia como

$$S(\nu) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \langle |V_T(\nu)|^2 \rangle \quad (2.35)$$

Como $U(t)$ esta definida de forma que $|U(t)|^2$ representa la potencia por unidad de area, es decir intensidad, entonces $S(\nu)d\nu$ representa la potencia promedio portada entre las frecuencias ν y $\nu + d\nu$, por lo que se puede decir que $S(\nu)$ en realidad simboliza la densidad espectral de intensidad.

Utilizando (2.34) y el hecho de que $|V_T(\nu)|^2 = V_T(\nu)^* V_T(\nu)$ se tiene

$$\frac{1}{2T} |V_T(\nu)|^2 = \frac{1}{2T} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} U^*(t) e^{i2\pi\nu t} dt \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} U(t') e^{-i2\pi\nu t'} dt' \quad (2.36)$$

Y al realizar el cambio de variable $t' = t + \tau$ obtenemos

$$\frac{1}{2T} |V_T(\nu)|^2 = \frac{1}{2T} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} U^*(t) U(t + \tau) e^{-i2\pi\nu(t'-t)} e^{-i2\pi\nu\tau} dt d\tau \quad (2.37)$$

luego, utilizando (2.26)

$$\frac{1}{2T}|V_T(\nu)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \Gamma(\tau) e^{-i2\pi\nu(t'-t)} e^{-i2\pi\nu\tau} dt d\tau \quad (2.38)$$

Finalmente, al cambiar los límites de integración y dejar que $T \rightarrow \infty$ encontramos que existe una relación entre el espectro de potencia y la función de autocorrelación, $\Gamma(\tau)$, establecida por el teorema de Wiener-Khintchine dada por,

$$S(\nu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\tau) e^{-i2\pi\nu t} d\tau \quad (2.39)$$

es decir, la transformada de Fourier de la función de autocorrelación es el espectro que describe la distribución espectral de la luz.

Más aún, existe una relación entre el ancho de la función $S(\nu)$, conocido como ancho espectral, y el tiempo de coherencia, esto es

$$\Delta\nu = \frac{1}{\tau_c} \quad (2.40)$$

esta nos dice que entre mas estrecho sea el ancho espectral $\Delta\nu$ el tiempo de coherencia aumenta. O en caso contrario, si el tiempo de coherencia es muy pequeño entonces el ancho espectral es muy grande, lo que equivale a decir que la fuente está compuesta de varias frecuencias ν que causan desplazamientos de fase.

En base a esto junto con el uso de un interferómetro de amplitud es como surge una técnica empleada para determinar la densidad espectral, dicha técnica es conocida como espectroscopia de transformada de Fourier.

De aquí se obtiene que con las funciones de correlación de primer orden no solo es posible obtener información sobre las fluctuaciones de fase de una onda de luz, sino que además, permite obtener otras características que la conforman como lo es su densidad espectral, misma que se puede obtener mediante otras técnicas de espectroscopia.

2.4.2. Coherencia Espacial

La noción de coherencia espacial se hace presente cuando un patrón de interferencia se ve afectado debido a la extensión espacial de la fuente que lo produce. El experimento de la doble rendija de Young (figura 2.5) sirve como auxiliar en la comprensión de coherencia espacial. Dicho experimento consiste en iluminar dos pinholes,

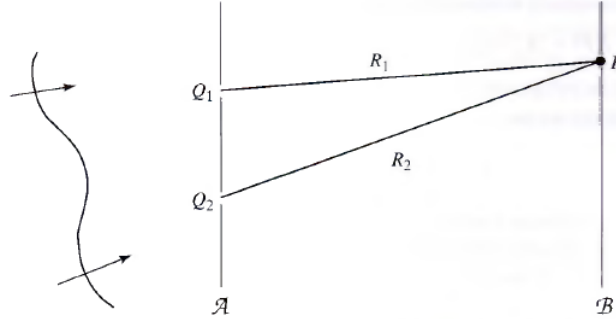


Figura 2.5: Experimento de doble rendija de Young

Q_1 y Q_2 , con luz parcialmente coherente, con lo cual se producen dos ondas

$$U(Q_1, t) \quad (2.41)$$

$$U(Q_2, t) \quad (2.42)$$

Al igual que en el caso de coherencia temporal, hay una superposición de las ondas en la pantalla de observación B así, en el punto P se tiene

$$U(P, t) = U(Q_1, t - t_1) + U(Q_2, t - t_2) \quad (2.43)$$

Nuevamente, sustituyendo en (2.7)

$$\begin{aligned} I(P) &= \langle U^* U \rangle \\ &= \langle (U^*(Q_1, t - t_1)U(Q_1, t - t_1)) \rangle + \langle (U^*(Q_2, t - t_2)U(Q_2, t - t_2)) \rangle \\ &\quad + 2\text{Re}[\langle U^*(Q_1, t - t_1)U(Q_2, t - t_2) \rangle] \\ &= I_1(P) + I_2(P) + 2\text{Re}[\Gamma(Q_1, Q_2, \tau)] \end{aligned} \quad (2.44)$$

donde se tomó $I_i(P)$, $i = 1, 2$ como la intensidad proveniente de un orificio sin la aportación del otro y $\tau = t_1 - t_2$. El término $\Gamma(Q_1, Q_2, \tau)$ en (2.44) se conoce como función de correlación cruzada de Q_1 y Q_2 , cuya forma es similar a la función de autocorrelación (2.26), por lo que;

$$\Gamma(Q_1, Q_2, \tau) = \langle U^*(Q_1, t)U(Q_2, t + \tau) \rangle \quad (2.45)$$

en este caso, el grado complejo de coherencia se define como

$$\gamma(Q_1, Q_2, \tau) = \frac{\Gamma(Q_1, Q_2, \tau)}{\sqrt{I_1(P)}\sqrt{I_2(P)}} \quad (2.46)$$

La coherencia espacial de la luz en dos puntos Q_1 y Q_2 está caracterizada por $\gamma(Q_1, Q_2, \tau_0)$ donde $\tau_0 = t_1 - t_2$ es una diferencia temporal fija, por lo general se toma $\tau_0 = 0$ en el experimento de Young.

De forma análoga al caso de coherencia temporal, es posible determinar experimentalmente el grado de coherencia espacial en un punto P sobre la pantalla a través de la visibilidad de las franjas en un patrón de interferencia. Por lo tanto el efecto de coherencia queda descrito por la función de correlación

$$J(Q_1, Q_2) = \Gamma(Q_1, Q_2, 0) = \langle U^*(Q_1, t)U(Q_2, t) \rangle \quad (2.47)$$

Usualmente $J(Q_1, Q_2)$ se le conoce como intensidad mutua y el grado de coherencia complejo resulta

$$\begin{aligned} j(Q_1, Q_2) &= \gamma(Q_1, Q_2, 0) = \frac{\Gamma(Q_1, Q_2, 0)}{\sqrt{\Gamma(Q_1, Q_1, 0)}\sqrt{\Gamma(Q_2, Q_2, 0)}} \\ &= \frac{J(Q_1, Q_2)}{\sqrt{J(Q_1, Q_1)}\sqrt{J(Q_2, Q_2)}} \\ &= \frac{J(Q_1, Q_2)}{\sqrt{I_1(P)}\sqrt{I_2(P)}} \end{aligned} \quad (2.48)$$

Es importante destacar que a través del experimento de Young se pueden obtener los efectos de coherencia temporal al considerar solo un punto Q y un tiempo de

retardo τ de tal forma que $\gamma = \gamma(Q, Q, \tau)$. Esto indica que los efectos de coherencia espacial y coherencia temporal se tratan de forma independiente solo en situaciones especiales.

2.4.3. Teorema de van Cittert-Zernike

Este teorema nos dice que, incluso una fuente espacialmente incoherente generará un campo el cual será espacialmente coherente sobre regiones lejanas del espacio. Consideremos dos puntos P_1 y P_2 en una pantalla A que está iluminada por una fuente extensa σ , la cual se encuentra a una distancia muy grande comparada con el tamaño de la fuente y la separación entre los puntos (figura 2.6). Consideremos que P_1 y P_2 se encuentran sobre el eje X en el plano A y que además son equidistantes a la fuente por lo que la diferencia de camino ($R_2 - R_1$), desde cualquier punto en la fuente, es pequeña comparada con la longitud de coherencia de la luz.

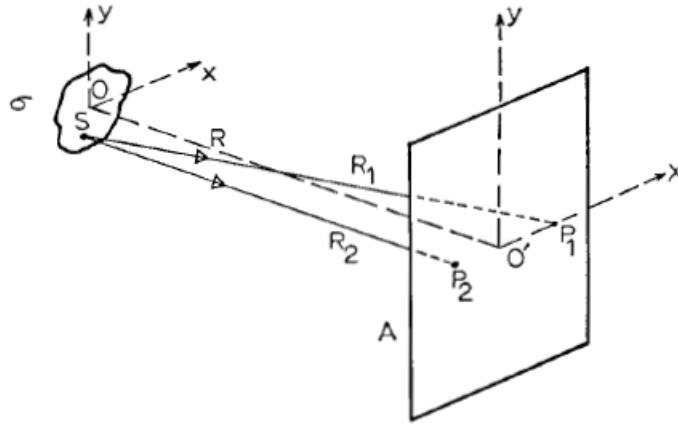


Figura 2.6: Esquema del teorema de van Cittert-Zernike.

Ahora supongamos que la superficie de la fuente está constituida por un gran número de elementos individuales $d\sigma_1, d\sigma_2, \dots$ cuyas dimensiones son pequeñas comparadas con la longitud de onda promedio λ_0 . Por consiguiente, las amplitudes en los puntos P_1 y P_2 debido a la fuente $d\sigma_m$ son $U_{m1}(t)$ y $U_{m2}(t)$, respectivamente. La

intensidad mutua, ecuación (2.47), para estas condiciones resulta

$$\begin{aligned} J(P_1, P_2) &= \langle U_1^*(t)U_2(t) \rangle \\ &= \sum_m \langle U_{m1}^*(t)U_{m2}(t) \rangle + \sum \sum_{m \neq n} \langle U_{m1}^*(t)U_{n2}(t) \rangle \end{aligned} \quad (2.49)$$

Las contribuciones de diferentes elementos de la fuente no están correlacionadas, por lo tanto la segunda suma de los promedios en la ecuación anterior es igual a cero. Así

$$J(P_1, P_2) = \sum_m \langle U_{m1}^*(t)U_{m2}(t) \rangle \quad (2.50)$$

Si $I(S)$ es la intensidad por unidad de área de la fuente y R_1, R_2 son las distancias desde un punto en S a P_1, P_2 , entonces

$$J(P_1, P_2) = \int_{\sigma} \frac{I(S)}{R_1 R_2} \exp[i\bar{k}(R_2 - R_1)] dS \quad (2.51)$$

donde $\bar{k} = \frac{\bar{\omega}}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$ el número de onda promedio de la luz. Mientras que, el grado de coherencia

$$j(P_1, P_2) = \frac{1}{(I_1 I_2)^{\frac{1}{2}}} \int_{\sigma} \frac{I(S)}{R_1 R_2} \exp[i\bar{k}(R_2 - R_1)] dS \quad (2.52)$$

donde

$$I_1 = \int_{\sigma} \frac{I(S)}{R_1^2} dS \quad I_2 = \int_{\sigma} \frac{I(S)}{R_2^2} dS$$

Existe una similitud entre (2.52) y el patrón de difracción en un punto P_2 producido por una onda esférica monocromática que converge a un punto P_1 y difractada por una abertura A en una pantalla opaca del mismo tamaño, forma y localización que la fuente incoherente σ , donde la distribución de intensidad es proporcional a la amplitud de la abertura.

$$U(P_2) = \int_A a(S) \frac{e^{-ikR_1}}{R_1} \frac{e^{ikR_2}}{R_2} \quad (2.53)$$

Esta similitud entre (2.52) y (2.53) se conoce como el teorema de van Cittert-Zernike [12]. Véase (figura 2.7). En otras palabras, nos muestra la semejanza matemática entre

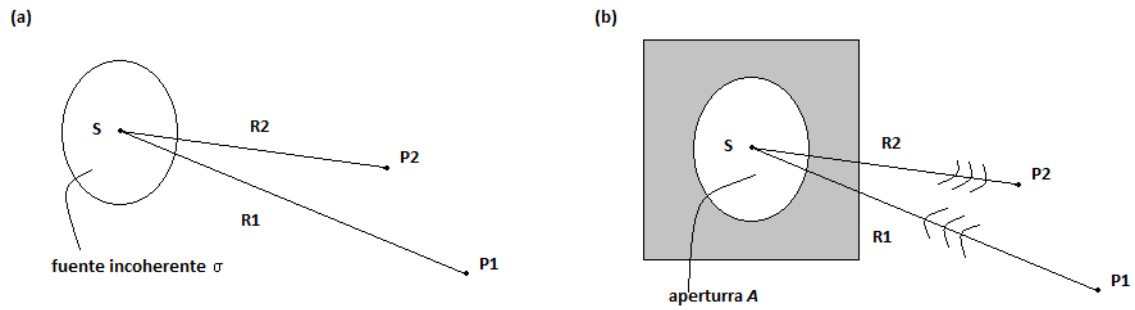


Figura 2.7: (a) Teorema de van Cittert-Zernike (b) Difracción en una apertura A

el grado de coherencia entre los puntos P_1 y P_2 , producto de la propagación de luz de una fuente incoherente, y la amplitud compleja de una onda coherente a través de de un sistema óptico.

Capítulo 3

Medición experimental del grado de coherencia

Anteriormente se mencionó que es posible medir experimentalmente el grado de coherencia (sección 2.4.1). Por ello, se llevó a cabo un experimento de laboratorio con el fin de obtener el grado de coherencia y además, en base a los resultados, poder determinar la longitud de coherencia de una fuente de luz casi monocromática.

Se hizo incidir un haz láser HeNe JDSU 1135P con potencia de 20mw y longitud de onda $\lambda = 633nm$ sobre un pinhole de $20\mu m$ de diámetro para expandir el haz y dirigirlo a una lente plano-convexa de distancia focal de 50 mm y así trabajar con el pico máximo de intensidad. Luego, mediante un cubo divisor de haz 50/50 se redirigió al haz en dos caminos; uno de estos podía variar su longitud de camino óptico mientras que el otro se mantuvo fijo. Finalmente los haces se combinaron nuevamente para luego detectarse con una cámara CCD PULNIX TMC-6700. El arreglo experimental utilizado se muestra en (figura 3.1).

El sistema de adquisición de imágenes empleado fue el National Instrument Measurement and Automation Explorer, version 15.3.0f0. Posteriormente, se llevo a cabo un procesamiento de imágenes con el programa ImageJ, donde se separaron los canales de color RGB para poder obtener mejor información sobre el láser. y así determinar el máximo y el mínimo de intensidad del patrón de interferencia.

Se mostró un cambio en la visibilidad del patrón de interferencia al variar la dife-

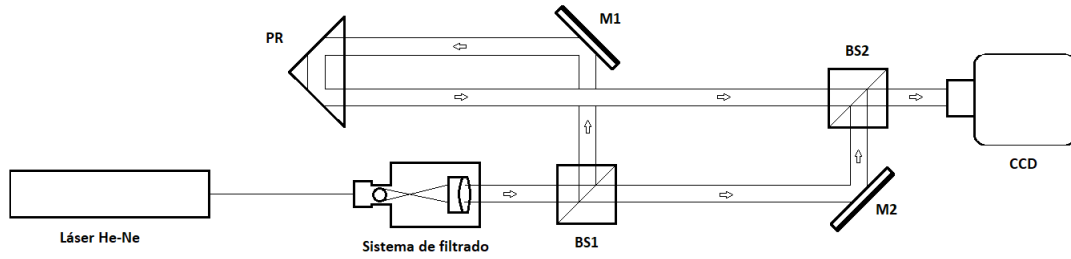


Figura 3.1: Arreglo experimental en base al interferómetro de Twyman-Green.

rencia de camino óptico obtenido (figura 3.2). Las franjas con diferencias de camino óptico negativo (disminución de la distancia entre el prisma PR y el espejo M1) incrementaron su grosor y perdieron definición, mientras que las franjas con diferencia de camino positivo disminuyeron su grosor debido a la diferencia de fase entre los haces.

Las condiciones de este experimento nos permitieron utilizar la ecuación (2.30) para determinar el módulo del grado de coherencia temporal en cada uno de los patrones de interferencia obtenidos. Consecuentemente se realizó la gráfica (figura 3.3) de los valores de la visibilidad y se determinó el valor para el cual su máximo decaía en $\frac{1}{e}$, donde se obtuvo que la longitud de coherencia es de aproximadamente 9.01cm . Los resultados obtenidos son cercanos a los registrados en la literatura para un láser con estas características [13]. La variación en los resultados se debe a la precisión en los aparatos de medición así como a condiciones en laboratorio que no se podían determinar.

Con este experimento se pudo comprobar que la visibilidad en un patrón de interferencia, y por lo tanto el grado de coherencia, se ve afectada a consecuencia de corrimientos de fase inducidos por la diferencia de camino óptico entre los brazos de un interferómetro.

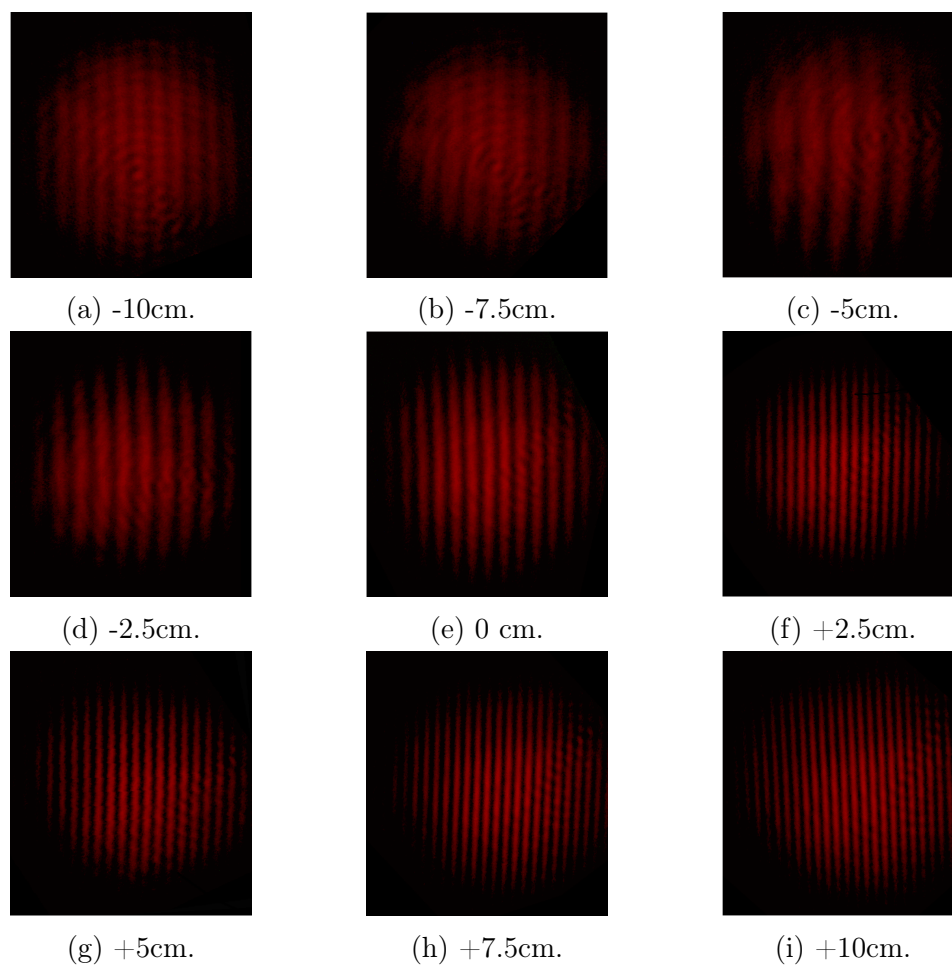


Figura 3.2: Variación de la visibilidad del patrón de interferencia al aumentar o disminuir la diferencia de camino óptico.

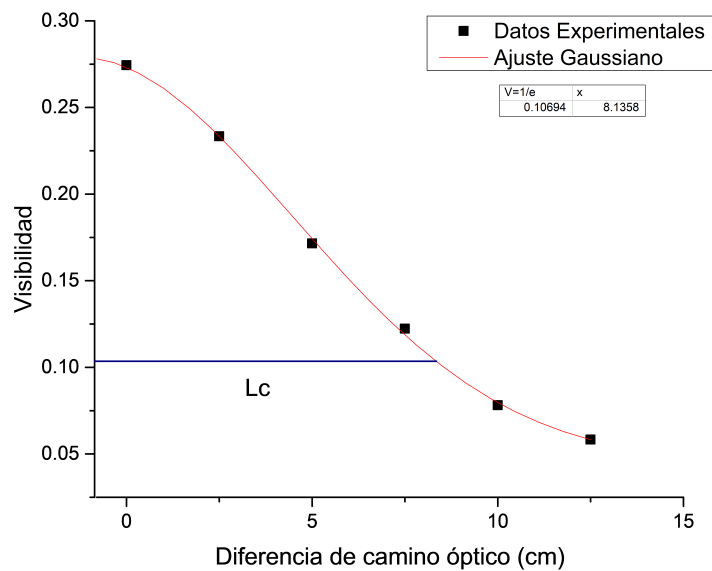


Figura 3.3: Resultados experimentales del valor de visibilidad en función de la diferencia de camino óptico y valor de la longitud de coherencia.

Capítulo 4

Correlación a Segundo Orden

Como se mencionó anteriormente, las funciones de correlación de primer orden son una herramienta en la descripción de las fluctuaciones de fase de una onda electromagnética. Por lo general, las fluctuaciones de fase se encuentran acompañadas por fluctuaciones de amplitud, las cuales son difíciles de detectar debido a las grandes frecuencias de oscilación. Sin embargo, se puede realizar la medición de la correlación de fluctuaciones de amplitud en dos puntos.

Con esta idea en mente Hanbury-Brown y Twiss construyeron un interferómetro de intensidad con el objetivo de detectar radio ondas emitidas por estrellas y así poder determinar su diámetro angular [14]. En dicho interferómetro (figura 4.1) la señal de dos antenas A_1 y A_2 se detecta de manera independiente y las señales a la salida de los detectores es registrada, finalmente se combinan nuevamente dentro de un correlador. Las intensidades en cada antena están descritas por

$$I(r_1, t) = U^*(r_1, t)U(r_1, t) \quad I(r_2, t) = U^*(r_2, t)U(r_2, t) \quad (4.1)$$

Las fluctuaciones en la detección de las intensidades

$$\Delta I_j(t) = I_j(t) - \langle I_j(t) \rangle \quad (j = 1, 2) \quad (4.2)$$

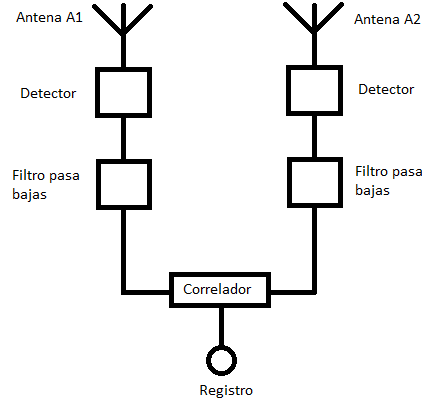


Figura 4.1: Esquema del interferómetro de intensidad para radio ondas.

por lo tanto, la correlación entre las fluctuaciones de intensidad resultan

$$\begin{aligned}
 \langle \Delta I(r_1, t) \Delta I(r_2, t + \tau) \rangle &= \left\langle [I(r_1, t) - \langle I(r_1, t) \rangle] [I(r_2, t + \tau) - \langle I(r_2, t + \tau) \rangle] \right\rangle \\
 &= \langle I(r_1, t) I(r_2, t + \tau) \rangle - \langle I(r_1, t) \rangle \langle I(r_2, t) \rangle
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

el primer término del lado derecho de (4.3) es la correlación entre las intensidades, también conocida como la función de correlación de segundo orden que se puede escribir como

$$\begin{aligned}
 \langle I(r_1, t) I(r_2, t + \tau) \rangle &= \langle U^*(r_1, t) U(r_1, t) U^*(r_2, t + \tau) U(r_2, t + \tau) \rangle \\
 &= \Gamma^{(2)}(r_1, r_2, \tau)
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

desarrollando llegamos a que

$$\begin{aligned}
 \Gamma^{(2)}(r_1, r_2, \tau) &= \langle U^*(r_1, t) U(r_1, t) \rangle \langle U^*(r_2, t + \tau) U(r_2, t + \tau) \rangle \\
 &\quad + \langle U^*(r_1, t) U(r_2, t + \tau) \rangle \langle U^*(r_2, t + \tau) U(r_1, t) \rangle \\
 &= \langle I(r_1, t) \rangle \langle I(r_2, t) \rangle + |\Gamma(r_1, r_2, \tau)|^2
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

La igualdad anterior se obtiene del análisis de la función de correlación de primer

orden, vista en la sección 2.4.1. Sustituyendo la ecuación (4.5) en (4.3) tenemos que

$$\langle \Delta I(r_1, t) \Delta I(r_2, t + \tau) \rangle = |\Gamma(r_1, r_2, \tau)|^2 = \Gamma^{(2)}(r_1, r_2, \tau) \quad (4.6)$$

y utilizando la ecuación (2.46)

$$\langle \Delta I(r_1, t) \Delta I(r_2, t + \tau) \rangle = \langle I(r_1, t) \rangle \langle I(r_2, t) \rangle |\gamma(r_1, r_2, \tau)|^2 \quad (4.7)$$

La ecuación (4.7) es la base de la descripción de los interferómetros de intensidad. Además, nos dice que si el campo en dos puntos separados es parcialmente coherente, entonces las fluctuaciones de intensidad en estos puntos está correlacionada y además es proporcional al cuadrado del grado de coherencia $|\gamma(r_1, r_2, \tau)|^2$ [15].

4.1. Experimento de Hanbury-Brown y Twiss

El propósito de este experimento era demostrar que el interferómetro de intensidad propuesto por Hanbury-Brown y Twiss funcionaba correctamente con longitudes de onda de luz como lo hacía con ondas de radio [6].

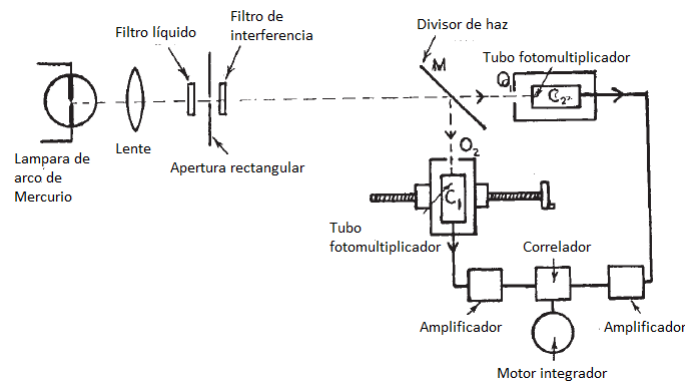


Figura 4.2: Diagrama del montaje del experimento de Hanbury-Brown y Twiss

El experimento consiste en dividir un haz de luz parcialmente coherente y redirigir cada uno de los haces resultantes a un cátodo foto-multiplicador, donde se obtienen corrientes proporcionales a la intensidad de la fuente. Luego, se introduce un retardo a uno de los haces en un tiempo t , en función de la diferencia de camino óptico

entre los haces. Finalmente, se amplifican las señales, luego mediante un correlador se comparan las intensidades donde se determina la similitud entre las fluctuaciones de amplitud.

Los resultados obtenidos por Hanbury-Brown y Twiss mostraban que la correlación entre las fluctuaciones de amplitud decrecía conforme la diferencia de camino óptico entre los haces aumentaba, es decir, se tenía una máxima correlación en la posición cátodos superpuestos (vistos desde la fuente) y una disminución cuando la separación era mucho mayor comparada con la longitud de onda (figura 4.3).

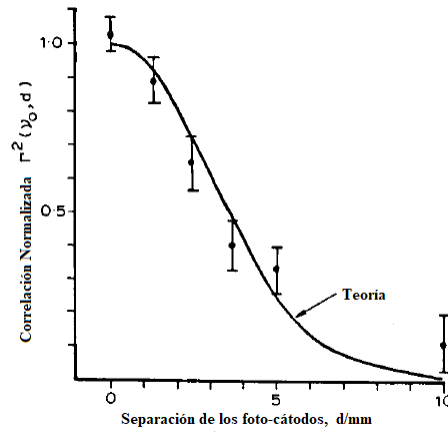


Figura 4.3: Valores teóricos y experimentales del factor de correlación normalizado para diferentes valores de separación de los foto-cátodos.

En términos semi-clásicos, la corriente generada a la salida del foto-detector es proporcional al promedio de $I(t)$ tomado en un tiempo corto T [16]. Es decir

$$i(t) = \frac{\alpha}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} I(t+t') dt' \quad (4.8)$$

donde α es una constante que representa la sensibilidad de los foto-cátodos y T es el tiempo sobre el cual la intensidad es promediada. De aquí podemos definir

$$\langle i_1 \rangle = \alpha_1 \langle I_1 \rangle \quad \langle i_2 \rangle = \alpha_2 \langle I_2 \rangle \quad (4.9)$$

Ahora, utilizando las ecuaciones (4.4), (4.5), (4.8) y (4.9) tenemos que la correlación

entre las fluctuaciones de $i(t)$ es

$$\langle \Delta i_1(t) \Delta i_2(t) \rangle = \frac{1}{2} \frac{\langle i_1 \rangle \langle i_2 \rangle}{T^2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |\gamma_{12}(t' - t'')|^2 dt' dt'' \quad (4.10)$$

Ya que el espectro de luz es idéntico en ambos detectores, podemos escribir el grado de coherencia como el producto del grado de coherencia espacial y el grado de coherencia temporal, es decir

$$\gamma_{12}(\tau) = \gamma_{12}(0) \gamma_{11}(\tau) \quad (4.11)$$

Por lo tanto, al sustituir (4.11) en (4.10)

$$\langle \Delta i_1(t) \Delta i_2(t) \rangle = \frac{1}{2} \langle i_1 \rangle \langle i_2 \rangle \left(\frac{\tau_0}{T} \right) |\gamma_{12}(0)|^2 \quad (4.12)$$

donde τ_0 es el tiempo de coherencia como se definió en (2.31). De aquí se tiene que la correlación entre las fluctuaciones de amplitud se puede determinar mediante la medición de las fluctuaciones de corriente entre los foto-detectores. Además, nos indica que al promediar sobre el tiempo de medición T la correlación se reduce en un factor $\frac{\tau_0}{T}$.

4.1.1. Experimentos independientes

En vista de los resultados obtenidos por Hanbury Brown y Twiss se realizaron experimentos para demostrar que no se observaba correlación entre las salidas de dos detectores foto-eléctricos iluminados con luz coherente. Entre sus argumentos estipulaban que debido al comportamiento cuántico de los detectores, los pulsos generados por estos debían ser independientes uno de otro [17].

Uno de éstos experimentos, desarrollado por Brannen y Ferguson, asemejaba el arreglo óptico de Hanbury-Brown y Twiss, a excepción del método de detección; su arreglo comparaba pulsos debido a la detección de fotones individuales por los fotomultiplicadores [18].

Se realizaron tres series de mediciones: 1) conteo de coincidencias como función de un tiempo de retardo, véase (figura 4.4), en la posición "detectores superpuestos";

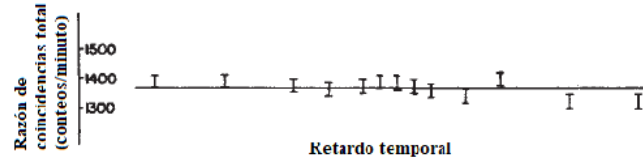


Figura 4.4: Razón de coincidencia total contra retardo τ , posición "cátodos superpuestos".

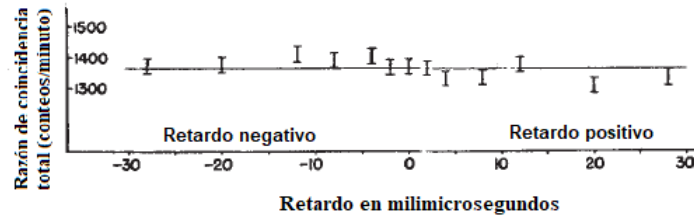


Figura 4.5: Razón de coincidencia total contra retardo τ , posición "cátodos no superpuestos".

2) conteo de coincidencias como función de un tiempo de retardo, véase (figura 4.5), en la posición "cátodos no superpuestos"; 3) conteo de coincidencias como función de la posición de uno de los detectores, véase (figura 4.6)

Con lo anterior mostraron que no hay un incremento en los conteos de coincidencias entre los foto-multiplicadores, sin importar que haya un tiempo de retardo grande o pequeño, o la posición de uno de los detectores variara la longitud de camino óptico entre los haces.

4.1.2. Aclaración al dilema del experimento HBT

El dilema entre los resultados experimentales de la medición de correlaciones en fluctuaciones de amplitud se vio resuelto por E. M. Purcell. En su trabajo explica el por qué de los resultados de ambos experimentos recalcando los logros de Hanbury-Brown y Twiss. [7]

Basándose en la aportación de Einstein sobre el efecto fotoeléctrico, Purcell mostró la razón por la cual las correlaciones en las fluctuaciones de amplitud de un campo óptico clásico pueden extraerse de las mediciones de conteo de fotones debido al exceso de fluctuaciones en conteos completamente aleatorios.

En su trabajo indica que no hay diferencia entre el cuadrado del módulo del

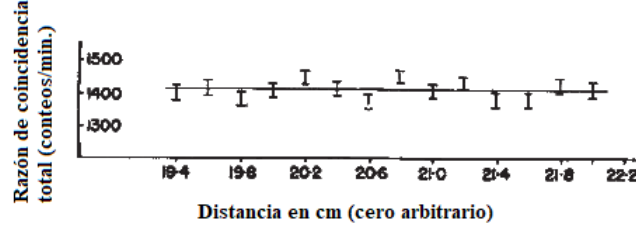


Figura 4.6: Razón de coincidencia total contra posición.

campo incidente ($|U|^2 = I$) y la densidad de probabilidad de un fotón. Por lo tanto, las fluctuaciones de amplitud se pueden escribir como (4.13); $\overline{n_T^2}$ representa el número de conteos dentro de un intervalo fijo T y $\overline{n_T^2}$ el número de fluctuaciones en una secuencia de dichos intervalos.

$$\overline{n_T^2} - \overline{n_T}^2 = \overline{n_T}(1 + \alpha \langle I \rangle \tau_0) \quad (4.13)$$

donde τ_0 es el tiempo de coherencia de la fuente y además se asume que $T \gg \tau_0$.

Analizando el experimento de Hanbury-Brown y Twiss en base a (4.13) tenemos que las fluctuaciones en el conteo de coincidencias dentro de un intervalo T en uno de los detectores es

$$\overline{\Delta n_1^2} = \overline{n_1^2} - \overline{n_1}^2 = \overline{n_1} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\overline{n_1} \tau_0}{T} \right) \quad (4.14)$$

aquí, $\frac{\overline{n_1}}{T}$ representa el número de coincidencias promedio en el intervalo T . De manera similar se tiene una expresión como (4.14) para el otro detector.

Si ahora se analiza la señal de salida del correlador, las fluctuaciones estarán descritas por

$$\overline{\Delta n^2} = \overline{n} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\overline{n} \tau_0}{T} \right) \quad (4.15)$$

pero, las fluctuaciones en la salida del correlador están conformadas por las fluctuaciones de cada uno de los detectores. Por lo tanto, podemos escribir (4.15) como

$$\begin{aligned} \overline{\Delta n^2} &= \overline{(\Delta n_1 + \Delta n_2)^2} \\ &= \overline{n_1} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\overline{n_1} \tau_0}{T} \right) + \overline{n_2} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\overline{n_2} \tau_0}{T} \right) + \overline{2\Delta n_1 \Delta n_2} \end{aligned} \quad (4.16)$$

(4.16) indica que las fluctuaciones en la señal de salida del correlador es igual a la suma de las fluctuaciones de cada uno de los detectores más un término extra, $\overline{\Delta n_1 \Delta n_2}$. Este término es la correlación entre las fluctuaciones obtenida por Hanbury-Brown y Twiss.

4.1.3. Generalización de Mandel

Mandel amplió las aportaciones de Purcell al desarrollar una teoría sobre la detección fotoeléctrica de fluctuaciones de luz [15]. Con esta no solo fue posible describir de una forma más precisa el experimento de Hanbury-Brown y Twiss, sino que además dio una generalización de la interacción de luz aleatoria con detectores fotoeléctricos.

Un foto-evento se define como la liberación de un electrón de la superficie de detección luego de haber absorbido un cuanto de energía. El número n de tales eventos en un intervalo de tiempo determinado se le conoce como el número de foto-conteos [19].

La probabilidad de que se emita un electrón en un detector dentro de un intervalo de tiempo es proporcional a la intensidad instantánea de la luz, es decir:

$$p(t)\Delta t = \alpha I(t)\Delta t \quad (4.17)$$

con α una constante de proporcionalidad que representa la eficiencia cuántica del foto-detector.

Mandel demostró que la probabilidad de que n electrones sean emitidos, en un solo detector, dentro de un intervalo está dado por la fórmula

$$p(n, t, T) = \frac{1}{n!} \left[\alpha W(t, T) \right]^n e^{-\alpha W(t, T)} \quad (4.18)$$

donde

$$W(t, T) = \int_t^{t+T} I(t') dt' \quad (4.19)$$

es la intensidad integrada de la luz incidente en el detector en el intervalo de tiempo [16].

Sin embargo, el promedio de las realizaciones de la medición nos brinda más información que (4.18) acerca de las fluctuaciones de amplitud

$$P(n, t, T) = \int_0^\infty \frac{[\alpha W(t, T)]^n}{n!} e^{-\alpha W(t, T)} p(W) dW \quad (4.20)$$

la ecuación anterior es conocida como *formula de Mandel para la estadística de fotoconeos*[15]. Cabe destacar que el cociente del lado derecho de (4.20)

$$\frac{[\alpha W(t, T)]^n}{n!} \quad (4.21)$$

es una distribución de Poisson por lo que, dadas sus propiedades [20], se tiene que los primeros dos momentos son

$$\bar{n} = \alpha \overline{W(t, T)} \quad (4.22)$$

$$\overline{n^2} = \alpha \overline{W(t, T)} + \alpha^2 \overline{[W(t, T)]^2} \quad (4.23)$$

Por lo tanto, la varianza el número de conteos en el intervalo de tiempo es

$$\overline{(\Delta n)^2} = \overline{(n - \bar{n})^2} = \overline{n^2} - \bar{n}^2 \quad (4.24)$$

Sustituyendo (4.22) en la ecuación anterior

$$\begin{aligned} \overline{(\Delta n)^2} &= \alpha \overline{W(t, T)} + \alpha^2 \overline{[W(t, T)]^2} - [\alpha \overline{W(t, T)}]^2 \\ &= \bar{n} + \alpha^2 \overline{[\Delta W(t, T)]^2} \end{aligned} \quad (4.25)$$

donde

$$\overline{[\Delta W(t, T)]^2} = \overline{[W(t, T)]^2} - \overline{W(t, T)}^2 \quad (4.26)$$

De (4.25) se puede concluir que las fluctuaciones en los conteos en un solo detector se debe a dos contribuciones: la primera, las fluctuaciones de las partículas en la distribución de Poisson y la segunda, por fluctuaciones de una onda clásica.

Para el caso del experimento de Hanbury-Brown y Twiss, la correlación de las fluctuaciones de los conteos en el correlador estarán descritas por

$$\overline{\Delta n_1 \Delta n_2} = \overline{(n_1 - \bar{n}_1)(n_2 - \bar{n}_2)} = \overline{n_1 n_2} - \bar{n}_1 \bar{n}_2 \quad (4.27)$$

Análogamente a (4.22) para cada detector se tiene

$$\bar{n}_i = \alpha_i \overline{W_i(t_i, T)} \quad (4.28)$$

$$\overline{n_i^2} = \alpha_i \overline{W_i(t_i, T)} + \alpha_i^2 \overline{[W_i(t_i, T)]^2} \quad i = 1, 2 \quad (4.29)$$

Al sustituir (4.28) y (4.29) en (4.27) encontramos que

$$\begin{aligned} \overline{\Delta n_1 \Delta n_2} &= \alpha_1 \alpha_2 \overline{[W_1(t_1, T) W_2(t_2, T)]} - \alpha_1 \alpha_2 \overline{W_1(t_1, T) W_2(t_2, T)} \\ &= \alpha_1 \alpha_2 \overline{\Delta W_1(t_1, T) \Delta W_2(t_2, T)} \end{aligned} \quad (4.30)$$

donde

$$\Delta W_i(t_i, T) = W_i(t_i, T) - \overline{W_i(t_i, T)} \quad (4.31)$$

(4.30) nos indica que la correlación entre las fluctuaciones de los conteos en el correlador es proporcional a la correlación entre las intensidades integradas del campo clásico incidente en los detectores.

Capítulo 5

Conclusiones

A lo largo de esta tesis se mostró el comportamiento estadístico de la luz en base a la teoría de coherencia óptica, a través de las funciones de correlación de primero y segundo orden.

Se señaló cómo las funciones de correlación de primer orden están asociadas al comportamiento de las fluctuaciones de fase en tiempo y espacio de una onda, que indican el tiempo en el cual estas fluctuaciones están correlacionadas.

Se mencionó cómo es que a través de la función de autocorrelación se obtiene la medición de la coherencia temporal de una fuente, es decir la medición de las fluctuaciones de fase en el tiempo, por lo cual está estrechamente relacionada al concepto de grado de coherencia temporal. Cuya interpretación física se da en la variación de la visibilidad de las franjas de un patrón de interferencia. Un caso del teorema de autocorrelación aplicado a la óptica se conoce como el teorema de Wiener-Khintchine y señala la conexión entre las funciones de autocorrelación y la densidad espectral; de donde se llega a la relación inversamente proporcional entre el tiempo de coherencia y el ancho espectral; y que sugiere una técnica, utilizada en espectroscopia, para determinar la distribución de energía contenida en una onda.

La función de correlación nos permite medir la estabilidad de fase en el espacio, dada su relación con el grado de coherencia espacial. Además, mediante el teorema de van Cittert-Zernike se mostró una cualidad importante del campo de radiación; la semejanza matemática entre el grado de coherencia en dos puntos producido por una

fuente incoherente y la amplitud compleja observada de una onda coherente en un patrón de difracción centrado en un punto P. Dicho de otra forma, el teorema de van Cittert-Zernike muestra la conexión entre la variación de la amplitud por difracción de una fuente de luz coherente y la adquisición de coherencia espacial con la propagación de la luz de una fuente incoherente .

De forma complementaria, la medición experimental del grado de coherencia permitió confirmar la variación de la visibilidad del patrón de interferencia y con esto la correlación entre los haces de un interferómetro de división de amplitud. Así fue posible determinar la longitud de coherencia de un láser He-Ne y compararlo con los resultados registrados en la literatura.

Por otra parte, la dificultad en la medición de fluctuaciones de amplitud debido a las frecuencias de oscilación del campo dio lugar a mediciones de fluctuaciones de intensidad, proporcional a la amplitud del campo al cuadrado, por consiguiente el uso de las funciones de correlación de segundo orden posibilitó la medición en las fluctuaciones de intensidad. Como consecuencia de esto, definir el diámetro angular de estrellas con longitud de onda en el espectro visible a través de un interferómetro de intensidad mejoraba la medición realizada por un interferómetro estelar de Michelson.

Por último, se tiene que a partir del experimento de Hanbury-Brown y Twiss fue posible realizar un estudio semi-clásico de la luz donde muestra una descripción del comportamiento cuántico de la luz a través de promedios de cantidades obtenidas mediante experimentos con características clásicas.

$$\overline{\Delta n_1 \Delta n_2} = \alpha_1 \alpha_2 \overline{\Delta W_1(t_1, T) \Delta W_2(t_2, T)} \quad (5.1)$$

Más aún, este experimento fue precursor en el estudio del comportamiento cuántico de la luz, efectos conocidos como bunching y antibunching de fotones [21].

Bibliografía

- [1] Darrigol Olivier. *A History of Optics From Greek Antiquity to the Nineteenth Century*. Oxford University Press, New York, United States of America, 2012.
- [2] Eugene Hecht. *Óptica, tercera edición*. Addison-Wesley Iberoamericana, Madrid, España, 2000.
- [3] Emil Wolf. *Selected works of Emil Wolf with commentary*. World Scientific Publishing, New Jersey, United States of America, 2001.
- [4] Max Born and Emil Wolf. *Principles of optics 6th ed.* A. Wheaton, Great Britain, 1999.
- [5] Robert D. Guenther. *Modern Optics*. John Wiley and Sons, United States of America, 1990.
- [6] R. Q. Twiss R. Hanbury Brown. Correlation Between Photons in Two Coherent Beams of Light. *Nature*, 177(4497):27–29, 1956.
- [7] E. M. Purcell. The Question of Correlation Between Photons in Coherent Light Rays. *Nature*, 178(4548):1449–1450, 1956.
- [8] E. C. G. Sundarshan L. Mandel and E. Wolf. Theory of photoelectric detection of light fluctuations . *Proceedings of the Physical Society*, 84(3):435–444, 1964.
- [9] B. E. A. Saleh and M. C. Teich. *Fundamentals of photonics*. John Wiley and Sons, United States of America, 1991.

- [10] Bracewell Ronald, N. *The Fourier Transform and Its Applications, third edition.* McGraw-Hill, United States of America, 2000.
- [11] Kurz T. Lauterborn, W. and M. Wiesenfeldt. *Coherent Optics Fundamentals and Applications.* Springer, Göttingen, Germany, 1993.
- [12] Leonard Mandel and Emil Wolf. *Optical coherence and quantum optics.* Cambridge University Press, United States of America, 1995.
- [13] William T. Silfvast. *Laser Fundamentals, second edition.* Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom, 2004.
- [14] R. Q. Twiss R. Hanbury-Brown. A New Type of Interferometer for Use in Radio Astronomy. *Philosophical Magazine Series 7*, 45(366):663–682, 1954.
- [15] Emil Wolf. *Introduction to the Theory of Coherence and Polarization of Light.* Cambridge University Press, New York, United States of America, 2007.
- [16] L. Mandel. Fluctuations of light beams. *Progress in Optics*, 2(V):181–248, 1963.
- [17] Hanbury Brown R. *The Intensity Interferometer its Application to Astronomy.* Taylor & Francis, London, 1974.
- [18] H. I. S. Ferguson E. Brannen. The Question of Correlation Between Photons in Coherent Light Rays. *Nature*, 178(4531):481–482, 1956.
- [19] Joseph W. Goodman. *Statistical Optics.* John Wiley and Sons, United States of America, 2000.
- [20] Athanasios Papoulis. *Probability, Random Variables and Stochastic Processes, third edition.* McGraw-Hill, United States of America, 1991.
- [21] R. Loudon. Photon Bunching and Antibunching. *Physics Bulletin*, 27(21):21–23, 1976.