



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

---

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

---

Estudio de propiedades ópticas en cuasicristales que  
contienen metamateriales.

Tesis presentada al

**Posgrado en Física Aplicada**

como requisito parcial para la obtención del grado de

**Maestra en Ciencias  
(Física Aplicada)**

por

María Isabel Paredes Pérez.

asesorada por

Dra. Martha A. Palomino Ovando.

Puebla Pue.  
Febrero 2016.





Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

---

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

---

Estudio de propiedades ópticas en cuasicristales que  
contienen metamateriales.

Tesis presentada al

**Posgrado en Física Aplicada**

como requisito parcial para la obtención del grado de

**Maestra en Ciencias  
(Física Aplicada)**

por

María Isabel Paredes Pérez.

asesorada por

Dra. Martha A. Palomino Ovando.

Puebla Pue.  
Febrero 2016.



**Título:** Estudio de propiedades ópticas en cuasicristales que contienen metamateriales.

**Estudiante:** MARÍA ISABEL PAREDES PÉREZ.

COMITÉ:

---

Dr. Rosendo L. Lozada Morales.  
Presidente.

---

Dr. Benito Flores Desirena.  
Secretario.

---

Dr. J. Fernando Rojas Rodríguez.  
Vocal.

---

Dra. Martha A. Palomino Ovando.  
Asesora.



# *Agradecimientos.*

*A mi querida familia, cuyo pilar es mi madre Inés quien a lo largo de mi vida académica ha estado a mi lado brindándome su confianza y sobre todo su amor. A mis profesores de quienes he aprendido que la perseverancia, esfuerzo y dedicación son la clave para alcanzar nuestras metas, agradezco especialmente a mi asesora de tesis la Dra. Martha por su ánimo y apoyo como ser humano durante el desarrollo de este trabajo. A Ricardo, mi compañero, quien ha sido colaborador en la presentación de este escrito y quien me impulsa a seguir adelante en cada momento. A los miembros del jurado que se tomaron un tiempo para revisar este trabajo con ayuda de los que, sin duda, éste pudo mejorar. A Dios ELOHIM por esto y por todas las cosas en mi vida.*

*Gálatas.4:26 Más la Jerusalén de arriba, la cual es madre de todos nosotros, es libre.  
Gracias.*



# Índice general

<b>Introducción.</b>	<b>XIII</b>
<b>1. Cristales fotónicos.</b>	<b>1</b>
1.1. Método de la Matriz de Transferencia. . . . .	3
1.2. Polarización Transversal Eléctrica. . . . .	4
1.3. Polarización Transversal Magnética. . . . .	8
1.4. Ondas de Bloch y estructura de bandas. . . . .	10
<b>2. Cuasicristales.</b>	<b>13</b>
2.1. Propiedades de los cuasicristales. . . . .	15
2.2. Cuasicristales fotónicos. . . . .	16
2.3. Sucesión de Fibonacci . . . . .	18
2.4. Sucesión de Cantor. . . . .	20
2.5. Sucesión de Thue-Morse. . . . .	22
2.6. Sucesión de Rudin-Shapiro. . . . .	23
<b>3. Metamateriales.</b>	<b>25</b>
3.1. Una breve reseña histórica. . . . .	25
3.2. Definición y diseño de metamateriales. . . . .	27
3.3. Propiedades de metamateriales con índice de refracción negativo. . . . .	30
<b>4. Resultados.</b>	<b>35</b>
4.1. Resultados para la estructura tipo Fibonacci. . . . .	37
4.2. Resultados para la estructura tipo Cantor. . . . .	41
4.3. Resultados para la estructura tipo Thue-Morse. . . . .	45
4.4. Resultados para la estructura tipo Rudin-Shapiro. . . . .	49
<b>5. Conclusiones.</b>	<b>53</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>55</b>



# Índice de figuras

1.1. Ejemplos de cristales fotónicos en 1,2 y 3 dimensiones. Los colores distintos representan constantes dieléctricas diferentes. . . . .	1
1.2. Bandas prohibidas fotónicas naturales ocurren en las alas de algunas mariposas (izquierda) y en ópalos (derecha). En ambos casos la banda prohibida es incompleta, ésta produce los colores iridiscentes. La figura del centro muestra la micrografía del ala fracturada de una mariposa verde iridiscente. (Fuente: Eli Yablonovitch, Photonic Crystals: semiconductors of light, Scientific American, Inc., 2001.) . . . .	2
1.3. Onda estacionaria. . . . .	3
1.4. Modos electromagnéticos TM y TE para una configuración de multicapas. . . . .	4
1.5. Polarización transversal eléctrica. . . . .	5
1.6. Polarización transversal magnética. . . . .	9
2.1. (a) Mosaico de Penrose, se forma mediante la unión de dos tipos de rombos; delgado y gordo. (b) Rombos delgado y gordo, los ángulos internos de los rombos son múltiplos de $360^\circ/10$ exhibiendo así de manera local la simetría rotacional de orden cinco en el mosaico de Penrose, observe las estrellas pentagonales en éste. . . . .	14
2.2. Patrón de difracción de electrones de una aleación de aluminio y manganeso obtenido por Shechtman et al. [56]. Los puntos brillantes muestran que la aleación no es amorfa, pero ordenada. La simetría pentagonal exhibida en este patrón de difracción no sucede para algún cristal periódico. Por lo tanto, la aleación debe ser a la vez aperiódica y ordenada. . . . .	15
2.3. <i>Izquierda.</i> Cristal fotónico semi-regular construido de un teselado de Arquímedes esta estructura presenta una simetría rotacional de orden 12. <i>Derecha.</i> Zona de Brillouin asociada a una red triangular con un total de 7 átomos en su celda primaria. Para la red triangular mostrada del lado izquierdo de la figura la celda primaria es representada con trazos cortos de una línea, mientras que los enlaces que conectan los “átomos” están representados con una línea sólida. . . . .	17
2.4. Cuasicristal en una dimensión. . . . .	18
2.5. La estructura matemática de Fibonacci se presenta de forma recurrente en la naturaleza. . . . .	19
2.6. Construcción de la celda unitaria para la estructura de Fibonacci. . . . .	20
2.7. Primeras iteraciones del conjunto de Cantor. . . . .	21
2.8. Construcción de la celda unitaria para la estructura de Cantor. . . . .	21
2.9. Construcción de la celda unitaria para la estructura de Thue-Morse. . . . .	23
2.10. Construcción de la celda unitaria para la estructura de Rudin-Shapiro. . . . .	23

3.1. Diagrama $(\mu - \epsilon)$ . Los dos ejes corresponden a las partes reales de la permeabilidad magnética y la permitividad eléctrica. . . . .	26
3.2. Limitación de una lente convencional y la idea de una lente basada en un bloque de material con refracción negativa. (a) Una lente convencional colecta sólo ondas propagantes. (b) Pérdida de ondas evanescentes en un sistema de imagen convencional. (c) La capacidad de enfoque en un bloque de NIM. (d) El aumento de la amplitud en las ondas evanescentes respectivas al bloque de NIM y la restauración tanto de las ondas propagantes como de las ondas evanescentes. (Fuente: W. Cai and V. Shalaev, <i>Optical Metamaterials: Fundamentals and Applications</i> , Springer, 2010.) . . . . .	27
3.3. Diferencia entre la dispersión de Bragg y el régimen de la longitud de onda. (a) Régimen de Bragg, $p \approx \lambda_g/2$ usualmente prevalece en cristales fotónicos. (b) Régimen de longitud de onda amplia, $p \ll \lambda_g$ , prevalece en MTMs. (Fuente: C. Caloz, T. Itoh, <i>Electromagnetic Metamaterials: Transmission Line Theory and Microwave Applications</i> , John Wiley and Sons, 2006.) . . . . .	28
3.4. Anillos resonadores con diferentes estructuras. . . . .	28
3.5. (a) Swiss roll. (b) Conical Swiss rolls. Para las dos unidades estructurales se muestran la vista lateral (a la izquierda) y la vista superior (a la derecha). . . . .	29
3.6. (a) Celda unitaria ideal para el arreglo de nano-tiras de plata acopladas, éstas se encuentran separadas por aluminio, $w$ es el ancho de las tiras de plata y del aluminio, $t$ es el espesor de ambas tiras y $d$ es el espesor del separador, las tiras son infinitas en $y$ y periódicas en $x$ con período $p$ . (b) Arreglo de alambres metálicos muy largos y delgados de radio $r$ y período de red $a$ . . . . .	30
3.7. Triada de vectores $(\vec{E}, \vec{H}, \vec{k})$ y vector de Poynting $\vec{S}$ para una onda electromagnética, $\vec{S}$ representa la dirección del flujo de energía. (a) En un medio convencional, donde $\epsilon > 0, \mu > 0$ . (b) En un medio izquierdo, donde $\epsilon < 0, \mu < 0$ . . . . .	30
3.8. Efecto Doppler: (a) en un medio convencional, (b) en un medio con refracción negativa. . . . .	31
3.9. Refracción de una onda electromagnética en la interfase de dos medios diferentes. (a) Los dos medios tienen refracción positiva. (b) El medio 1 tiene refracción positiva y el medio 2 tiene refracción negativa. . . . .	33
3.10. Una representación bidimensional de la transformación del espacio que corresponde a una capa esférica. (Fuente: Ben Wood, <i>Metamaterials and invisibility</i> , C. R. Physique 10, 379-390, 2009.) . . . . .	34
3.11. La relación de dispersión para este cristal fotónico compuesto por capas de aire y de NIM muestra que el gap de Bragg se desplaza hacia arriba en la frecuencia, sin embargo, el gap $\langle n \rangle = 0$ se mantiene sin cambios en 2.3 GHz. (Fuente: Jensen Li, Lei Zhou, C. T. Chan, and P. Sheng, <i>Phys. Rev. Lett.</i> , Vol. 90, 2003.) . . . . .	34
4.1. Cálculo de los parámetros efectivos $\epsilon$ y $\mu$ . . . . .	35
4.2. Modo TE. Relación de dispersión $\nu = \nu(k)$ a un ángulo de incidencia $\theta = 15^\circ$ . (a) Orden de generación 4 de Fibonacci, (c) orden de generación 6 de Fibonacci. . . . .	37
4.3. Diagrama de bandas proyectadas para un PQC-1D tipo Fibonacci. . . . .	38
4.4. Bandas proyectadas para polarización TE, estructura tipo Fibonacci, orden de generación 6. . . . .	39
4.5. Ambos diagramas fueron calculados para un ángulo de incidencia $\theta = 60^\circ$ . . . . .	40
4.6. Modo TE. Relación de dispersión $\nu = \nu(k)$ a un ángulo de incidencia $\theta = 15^\circ$ . (a) Orden de generación 2 de Cantor, (c) orden de generación 4 de Cantor. . . . .	41

4.7. Diagrama de bandas proyectadas para un PQC-1D tipo Cantor. . . . .	42
4.8. Bandas proyectadas para polarización TE, estructura tipo Cantor, número de generación 3. . . . .	43
4.9. Estructura de bandas para polarización TE en función del número de generación para Cantor a un ángulo de incidencia $\theta = 60^\circ$ . . . . .	44
4.10. Espectro de transmisión para polarización TE correspondiente a la estructura tipo Cantor, número de generación 4 a un ángulo de incidencia $\theta = 60^\circ$ . . . . .	44
4.11. Modo TE. Relación de dispersión $\nu = \nu(k)$ a un ángulo de incidencia $\theta = 60^\circ$ . (a) Orden de generación 4 de Thue-Morse, (c) orden de generación 6 de Thue-Morse. . . . .	45
4.12. Diagrama de bandas proyectadas para un PQC-1D tipo Thue-Morse. . . . .	46
4.13. Bandas proyectadas para polarización TE, estructura tipo Thue-Morse, número de generación 5. . . . .	47
4.14. Ambos diagramas fueron calculados para polarización TE. . . . .	48
4.15. Modo TE. Relación de dispersión $\nu = \nu(k)$ a un ángulo de incidencia $\theta = 60^\circ$ . (a) Orden de generación 3 de Rudin-Shapiro, (c) orden de generación 5 de Rudin-Shapiro. . . . .	49
4.16. Diagrama de bandas proyectadas para un PQC-1D tipo Rudin-Shapiro. . . . .	50
4.17. Bandas proyectadas para polarización TE, orden de generación 5 para una estructura tipo Rudin-Shapiro. . . . .	51
4.18. Estructura de bandas para polarización TE en función del número de generación para Rudin-Shapiro para un ángulo de incidencia $\theta = 60^\circ$ . . . . .	52
4.19. Espectro de transmisión para polarización TE correspondiente a la estructura tipo Rudin-Shapiro, número de generación 5 para un ángulo de incidencia $\theta = 60^\circ$ . . . . .	52



# Índice de tablas

2.1. Pares de conejos producidos durante un año. . . . .	19
4.1. Desdoblamiento de bandas proyectadas para un PQC-1D tipo Fibonacci (0.9487 GHz – 1.0000 GHz). . . . .	39
4.2. Desdoblamiento de bandas proyectadas para un PQC-1D tipo Thue-Morse (0.9487 GHz – 1.0000 GHz). . . . .	47



# Introducción.

Desde tiempos antiguos el estudio de la interacción de la luz con la materia ha despertado la curiosidad humana, teniendo en cuenta que dentro de la Grecia clásica, quizá, Euclides fue quien más avanzó en el estudio de la luz y la óptica [1]. Especialmente lo que llama nuestra atención es la aplicación que puedan tener para realizar exploraciones que no podríamos conseguir con los sentidos del cuerpo humano, desde asomarnos fuera de nuestro planeta hasta “mirar” la estructura interna de la materia de una manera distinta. Con el empleo de la radiación electromagnética para realizar distintos análisis en materiales se ha logrado una mayor comprensión acerca de sus propiedades tales como: absorción, transmisión o reflexión de la misma. Gran parte del avance en nuestra tecnología se ha derivado de tal entendimiento.

Refiriéndonos a las propiedades ópticas de los materiales, se ha abierto un desafío, el objetivo es controlarlas para diseñar materiales que respondan a más de un intervalo de frecuencias, que se propaguen sólo en algunas direcciones o confinar la radiación en cierto volumen, un buen candidato para esto es el llamado cristal fotónico. De aquí la motivación para realizar este trabajo.

Los cristales fotónicos son los análogos electromagnéticos de los cristales reales, están compuestos por medios macroscópicos de diferentes constantes dieléctricas ( $\epsilon$ ,  $\mu$ ). La periodicidad de la permitividad eléctrica ( $\epsilon$ ) o la permeabilidad magnética ( $\mu$ ) es posible en una, dos o tres dimensiones [2, 3]. En los cristales fotónicos existe un rango de frecuencias donde la propagación de las ondas electromagnéticas está prohibida, éstas se denominan bandas fotónicas prohibidas en analogía a las bandas de energía prohibidas para los electrones en los sólidos. Para la construcción de cristales fotónicos es posible utilizar dieléctricos, metales, materiales no lineales, materiales ferromagnéticos, entre otros [4, 5]. A su vez, los cristales fotónicos pueden ser descritos formalmente con la teoría electromagnética de Maxwell, debido a esto se convierten en sistemas de características escalables, es decir, que las propiedades electromagnéticas de un cristal microscópico cuyo trabajo sea en el rango espectral visible se mantiene si el cristal se escala a un tamaño microscópico en el rango de las microondas [9]. Es posible resolver las ecuaciones de Maxwell a través de una gran variedad de métodos, tanto analíticos como numéricos, en este trabajo utilizaremos el Método de la Matriz de Transferencia (MMT) que nos permite relacionar el campo eléctrico ( $\vec{E}$ ) y el campo magnético ( $\vec{B}$ ) a lo largo de toda la estructura para describir las propiedades ópticas del sistema.

Entre las aplicaciones para cristales fotónicos de hoy en día están los cables de fibra óptica que ya han revolucionado las telecomunicaciones. Otros ejemplos de aplicaciones futuras son las computadoras de alta rapidez, técnica láser y espectroscopía muestran la gran ventaja en el avance de los materiales. A pesar de un comienzo difícil a finales de 1980 y mucho escepticismo acerca de la creación de una estructura de cristal artificial capaz de manipular los haces de luz de la misma manera como lo hacen los semiconductores, por parte de la comunidad fotónica de investigación, el campo de los cristales fotónicos ha prosperado [6, 7, 8].

Por otro lado tenemos a los cuasicristales sólidos, estos sistemas develan un detalle importante que ha pasado desapercibido durante varios siglos por la humanidad: el orden no implica necesari-

riamente una repetición periódica, es decir, periodicidad y orden no son sinónimos [10]. La primera observación de un cuasicristal se realizó en abril de 1982, fue a través de los patrones de difracción que los investigadores pudieron descubrir diferencias entre cuasicristales y cristales [11].

El concepto de cuasicristal trae una nueva idea física en la estructura de la materia y la simetría. Los cuasicristales pueden definirse como un estado intermedio entre sistemas con propiedades periódicas y no periódicas ya que poseen cierta simetría, como es la simetría rotacional (por ejemplo simetría rotacional de orden 5), presentan orden de largo alcance, esto significa que las mismas unidades estructurales aparecen una y otra vez, aunque esto no conduce a la simetría de traslación que presentan las estructuras cristalinas comunes. A los cuasicristales se les asocia el tener orden de orientación perfecta sin periodicidad traslacional en su estructura [12, 13, 14]. Las propiedades inusuales de esta nueva estructura sólida ha llamado en gran manera la atención de los investigadores. A partir del descubrimiento de los cuasicristales se han planteado varias interrogantes, ¿Cómo crecen estos sistemas? ¿Cuál es su estructura atómica y cómo describirla? ¿Cuáles son sus propiedades físicas? Muchas de estas preguntas siguen sin tener una respuesta definitiva, en realidad se sabe muy poco. En esta tesis se hará enfoque sobre las propiedades ópticas de un tipo especial de cuasicristales: los cuasicristales fotónicos unidimensionales (PQC-1D), en este tipo de estructuras la variación de las constantes dieléctricas se presenta en una sola dirección llamada eje de periodicidad [15, 16]. En general, los cuasicristales fotónicos presentan algunas propiedades similares a las de los cuasicristales sólidos, hoy en día se continúa el estudio de su diseño y características. Muchos estudios en Física se han dedicado a comprender y analizar las propiedades de sistemas cuasiperiódicos en los últimos 15 años [17, 18]. El interés es debido a que estos sistemas manifiestan estados electrónicos singulares, exhiben espectros de energía con alta fragmentación y carácter fractal.

En las dos últimas décadas los metamateriales han atraído la atención de los investigadores, desde la propuesta inicial hecha por Veselago en 1968 [19] acerca de un tipo específico de metamateriales, los metamateriales con índice de refracción negativo ( $n < 0$ ), a esta clase de metamateriales también se les conoce como NIMs (negative-index metamaterials), LHM (left-handed materials) o NRI (negative refractive index) por sus siglas en inglés. Ha resultado ser un tema de gran controversia la existencia de materiales izquierdos pues en éstos la permeabilidad magnética ( $\mu$ ) y la permitividad eléctrica ( $\epsilon$ ) toman valores negativos simultáneamente en el mismo rango de frecuencias dando como resultado propiedades ópticas novedosas. La propiedad de la refracción negativa que poseen los NIMs hace posible que éstos puedan ser utilizados para la construcción de una superlente, consiguiendo así una imagen enfocada con suma perfección, la refracción negativa hace posible también que los NIMs exhiban la inversión del efecto Doppler y la inversión del efecto Cerenkov [20, 21, 22, 23]. Aunque la propuesta de estos materiales resultó de una curiosidad científica su construcción llegó a ser realizada en el año 2000 por el grupo de Pendry [24, 25, 26, 27]. Desde entonces cientos de investigaciones han aportado conocimientos importantes de los NIMs, abriendo así una nueva era a las aplicaciones ópticas.

Entre las aplicaciones de mayor interés que muestran los NIMs, esta la propiedad de reflexión omnidireccional, que se presenta cuando son usados en la construcción de cristales fotónicos, esto significa que la luz es reflejada para un rango de frecuencias a todos los ángulos y para las polarizaciones TE (transversal eléctrica) y TM (transversal magnética), esta condición se logra en los cristales tradicionales gracias a la dispersión de Bragg, sin embargo, con la presencia de los NIMs es posible lograrlo gracias a la condición de gap-cero, lo cual ocurre cuando para la celda unitaria que forma la estructura se cumple la condición  $\langle n \rangle = (n_1 d_1 + n_2 d_2) / (d_1 + d_2) = 0$ , donde  $n_1$  y  $n_2$  son los índices de refracción de cada uno de los materiales y  $d_1$ ,  $d_2$  son los anchos de cada una de las películas que forman la celda unitaria, estos gaps han sido propuestos y estudiados por varios

autores [28, 29, 30, 31].

En este proyecto se pretende hacer un estudio de bandas bajo la condición de gap-cero de diversas estructuras cuasiperiódicas, tipo cristal fotónico unidimensional donde se alternan capas de NIM con dieléctrico, también se estudiarán los gaps de Bragg. La existencia de los gaps de Bragg en estructuras cuasiperiódicas tiene sustento ya que se define una celda unitaria en términos de uno de los números de generación de la relación de recurrencia y ésta es la que se repite periódicamente, como se ha mencionado, la combinación *NIM-dieléctrico* permite lograr que se cumpla la condición  $\langle n \rangle = 0$ . La celda unitaria de estas estructuras cuasiperiódicas se modela a partir de cuatro diferentes sucesiones binarias: la sucesión de Fibonacci, la sucesión derivada del Conjunto de Cantor, la sucesión de Thue-Morse y la sucesión de Rudin-Shapiro [32, 33, 34, 35, 36]. A continuación se da un breve descripción de los capítulos desarrollados en esta tesis.

El capítulo 1 contiene teoría acerca de los cristales fotónicos, su propuesta, desarrollo, características y propiedades, en este capítulo además se muestran algunas aplicaciones recientes de los cristales fotónicos y se describe explícitamente el desarrollo algebraico del Método de la Matriz de Transferencia para resolver las ecuaciones de Maxwell en un sistema multicapas, seguido de esto se explica en qué consisten las polarizaciones transversal eléctrica (TE) y transversal magnética (TM), finalmente se muestra el cálculo para la estructura de bandas.

El capítulo 2 se centra en la teoría elemental de cuasicristales tanto sólidos como fotónicos, se describen sus propiedades, aplicaciones y posible diseño, aquí se detallan las relaciones de recurrencia de Fibonacci, Cantor, Thue-Morse y Rudin-Shapiro las cuales generan las celdas unitarias para las estructuras cuasiperiódicas de nuestro sistema multicapas, además en este capítulo se muestran algunas primeras iteraciones para la construcción de tales celdas.

En cuanto al capítulo 3 se plantea el concepto de metamaterial electromagnético, se estudian las propiedades de los NIMs, características y diseño, en esta sección se da una definición para los metamateriales y se aclara que los metamateriales no sólo son los NIMs, debido a que éstos tienen diferentes características, como los metamateriales muy variados abarcan un rango mayor que los NIMs.

En el capítulo 4 se muestran los resultados obtenidos de este trabajo, la relación de dispersión de las distintas estructuras, las bandas proyectadas, los gaps-cero omnidireccionales y los espectros de transmisión así como los modelos de las celdas unitarias para cada diagrama.

Finalmente en el capítulo 5 se presentan las conclusiones sobre los resultados de este trabajo.



# Capítulo 1

## Cristales fotónicos.

Los cristales fotónicos son una nueva clase de materiales ópticos que pueden ser construidos artificialmente, aunque también se encuentran de forma natural en ópalos y en los colores iridiscentes de algunas especies [8]. Para entender de un modo más claro qué es un cristal fotónico evoquemos algunas de las características que poseen los cristales reales. Refiriéndonos al potencial, las estructuras cristalinas reales presentan un potencial periódico debido a su regularidad en las redes atómicas, tanto los constituyentes del cristal real como su geometría dictan las propiedades de conducción del mismo, además cumpliendo ciertos criterios los electrones pueden viajar a través de un potencial periódico sin dispersión [2]. Es posible también que los electrones no se propaguen con ciertas energías en algunas direcciones, estas regiones son conocidas como bandas de energía prohibidas (gaps). Si el potencial en la red es muy fuerte resulta un gap completo, como sucede en los semiconductores, éstos poseen un gap completo que se encuentra entre las bandas de valencia y de conducción de energía.

Entendido lo anterior podemos decir que un cristal fotónico es el análogo electromagnético de un cristal real, en el cristal fotónico los átomos o moléculas se sustituyen por medios macroscópicos con diferentes constantes dieléctricas, la distribución espacial de la constante dieléctrica origina las bandas para los fotones y el potencial periódico se sustituye por una función dieléctrica periódica (o equivalentemente, un índice de refracción periódico). Esta variación periódica puede tener lugar en una, dos o tres direcciones y es lo que define la forma de un cristal fotónico. Tanto la periodicidad como las dimensiones físicas pertenecientes a las zonas en que varía la constante dieléctrica están relacionadas con la longitud de onda de los fotones que se propagan, exigiendo en estas zonas dimensiones nanométricas para fotones con energías dentro del espectro visible e infrarrojo, dichas regiones son las utilizadas en la técnica de telecomunicaciones, por lo que estos arreglos son de gran interés.

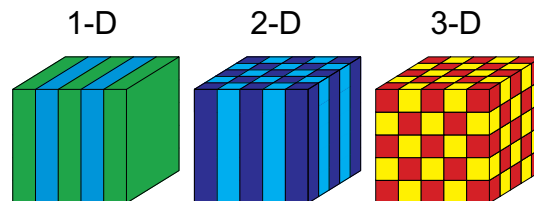


Figura 1.1: Ejemplos de cristales fotónicos en 1,2 y 3 dimensiones. Los colores distintos representan constantes dieléctricas diferentes.

## CAPÍTULO 1. CRISTALES FOTÓNICOS.

---

Si las constantes dieléctricas de los materiales en el cristal son suficientemente diferentes y si la absorción de la luz por los materiales es mínima, entonces las refracciones y reflexiones de la luz de todas las diversas interfaces pueden producir los mismos fenómenos para fotones que el potencial atómico produce para los electrones.

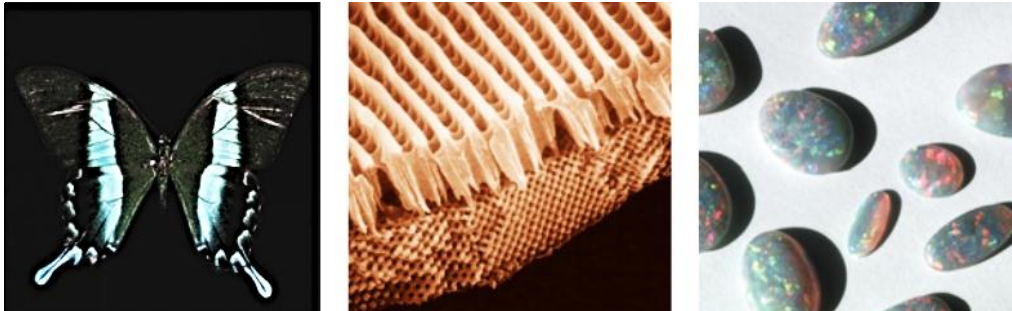


Figura 1.2: Bandas prohibidas fotónicas naturales ocurren en las alas de algunas mariposas (izquierda) y en ópalos (derecha). En ambos casos la banda prohibida es incompleta, ésta produce los colores iridiscentes. La figura del centro muestra la micrografía del ala fracturada de una mariposa verde iridiscente. (Fuente: Eli Yablonovitch, Photonic Crystals: semiconductors of light, Scientific American, Inc., 2001.)

Es posible diseñar y construir cristales fotónicos con bandas en donde se evite la propagación de la luz para ciertas direcciones con frecuencias específicas. El grupo de Yablonovitch hizo con éxito el primer cristal fotónico con banda prohibida en 1991 utilizando una variante de la estructura del diamante ahora llamado yablonovite. La existencia y propiedades de una banda electrónica dependen fundamentalmente del tipo de los átomos en el material y su estructura cristalina, materiales de banda fotónica prohibida implican estructuras similares pero a escalas más grandes. Un ejemplo típico sería un bloque de vidrio especial perforado (matriz) con orificios cilíndricos poco espaciados, cada uno con un diámetro de 400 nanómetros, estas aberturas son los análogos a los átomos en un semiconductor. En general, aunque no siempre, la separación de la matriz debe ser razonablemente cerca de la longitud de onda de la luz o las ondas electromagnéticas que se desee controlar. Los haces superpuestos se reforzarán o cancelarán el uno al otro de acuerdo a la longitud de onda de la luz, su dirección de desplazamiento a través del cristal, el índice de refracción del vidrio, el tamaño y la disposición de todos los agujeros [6].

Si para algún rango de frecuencias, un cristal fotónico prohíbe la propagación de ondas electromagnéticas de cualquier polarización sin importar en que dirección viaja ni la fuente de donde provenga, podemos decir que el cristal tiene una banda fotónica prohibida completa, éste será obviamente un reflector omnidireccional, pero lo contrario no es necesariamente cierto. El criterio para la reflexión omnidireccional es que exista una región de frecuencia en la cual las bandas proyectadas del cristal no tengan estados con  $w > ck_x$  [7]. La propiedad de omnidireccionalidad hace posible que los cristales fotónicos puedan ser aplicados como espejos dieléctricos, para construir un espejo como éste la longitud de onda incidente debe ser adecuada en las capas de material para que la onda de luz se refleje parcialmente en cada interfaz de la capa y, con la condición de que el espaciado es periódico, resultarán múltiples reflexiones de la onda incidente las cuales se interferirán destructivamente eliminando así la ola progresiva de propagación, reflejándose completamente. La ventaja de un espejo dieléctrico, comparado con los espejos metálicos, es que no presentan problemas de absorción y si además su geometría es como la de un cristal fotónico unidimensional será altamente unidireccional, ya que existe el ángulo de Brewster que los vuelve transparentes a cierto ángulo de incidencia [39].

Los cristales fotónicos pueden ser descritos formalmente con la teoría electromagnética de Maxwell, debido a esto se convierten en sistemas de características escalables y de fácil acceso experimental. El hecho de que el sistema sea escalable quiere decir que las propiedades electromagnéticas de un cristal microscópico cuyo trabajo sea en el rango espectral visible se mantienen si el cristal se escala a un tamaño microscópico en el rango de las microondas [9]. Para calcular las propiedades ópticas de los cristales fotónicos partimos de las ecuaciones de Maxwell y usamos el Método de la Matriz de Transferencia (MMT) como se muestra en la siguiente sección.

## 1.1. Método de la Matriz de Transferencia.

Usando el Método de la Matriz de Transferencia es posible calcular las amplitudes de transmisión o reflexión de una onda o partícula [37, 38]. Los modos de propagación en un medio homogéneo (una capa en nuestro caso) son ondas planas de la forma  $\exp(i\vec{k}\cdot\vec{r})$ , los modos en un medio periódico son conocidos como modos de Bloch. Un modo de Bloch es una onda plana con propagación constante  $\vec{k}$  modulada por una función periódica la cual tiene la propiedad de onda estacionaria [37].

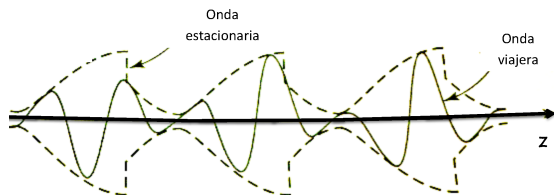


Figura 1.3: Onda estacionaria.

En lo que sigue nos restringiremos a cristales fotónicos unidimensionales, éstos son estructuras dieléctricas en donde las propiedades ópticas varían periódicamente en una dirección llamado eje de periodicidad, que en nuestro caso será el eje  $z$ . Para nuestro análisis asumimos que el medio es isótropo, homogéneo y lineal, es decir que cumple la relación:  $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$ . Al combinar las ecuaciones de Maxwell para un medio como este se obtiene la ecuación de onda para el campo eléctrico que se puede escribir como:

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0, \quad (1.1)$$

donde la velocidad de propagación  $v$  puede relacionarse con los parámetros  $c$ ,  $\epsilon$ ,  $\mu$ :

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}, \quad (1.2)$$

así para la ecuación de onda tenemos:

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (1.3)$$

Las soluciones a esta ecuación son de la forma:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}. \quad (1.4)$$

Sabemos también que para la velocidad de fase se cumple  $v = \omega/k$  igualando este resultado con la Ec. (1.2) podemos obtener una relación para  $k^2$ :

**CAPÍTULO 1. CRISTALES FOTÓNICOS.**  
**1.2. POLARIZACIÓN TRANSVERSAL ELÉCTRICA.**

---

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \mu . \quad (1.5)$$

Análogamente para el campo magnético se tiene la siguiente ecuación de onda:

$$\nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 , \quad (1.6)$$

con soluciones de la forma:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} . \quad (1.7)$$

Consideremos dos casos para la incidencia de la luz sobre la interfase en la estructura de estudio:

- Polarización transversal eléctrica (TE).
- Polarización transversal magnética (TM).

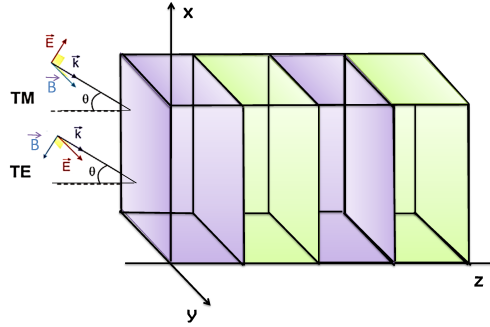


Figura 1.4: Modos electromagnéticos TM y TE para una configuración de multicapas.

Una onda electromagnética polarizada indica por convención que el campo eléctrico oscila en un plano determinado. La polarización es transversal eléctrica cuando el campo eléctrico es ortogonal al plano de incidencia, en cambio, si ocurre que el campo eléctrico es paralelo al plano referido entonces la polarización será transversal magnética puesto que el campo magnético es ortogonal al plano de incidencia. En la literatura también podemos hallar que se hace referencia al modo TE como polarización S debido a que en alemán *senkrecht* significa “perpendicular”, al modo TM también se le conoce como polarización P, que del mismo modo tiene sus orígenes en el idioma germánico, donde *parallel* es “paralelo” [37].

## 1.2. Polarización Transversal Eléctrica.

Sean los vectores  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  y  $\vec{k}$  para la polarización transversal eléctrica de la siguiente forma:

$$\vec{E} = (0, -E_y, 0) , \quad (1.8)$$

$$\vec{B} = (B_x, 0, -B_z) , \quad (1.9)$$

$$\vec{k} = (k_x, 0, k_z) . \quad (1.10)$$

Para ilustrar la orientación de los campos electromagnéticos dados se muestra la Fig. (1.5). Denotamos a  $k_x \equiv \beta$  y a  $k_z \equiv \Phi$ . De donde se puede escribir:

**CAPÍTULO 1. CRISTALES FOTÓNICOS.**  
**1.2. POLARIZACIÓN TRANSVERSAL ELÉCTRICA.**

---

$$k^2 = \beta^2 + \Phi^2 . \quad (1.11)$$

A partir de la Fig. (1.5) notamos que  $\beta = k \sin \theta$  elevando al cuadrado ambos miembros de esta ecuación y sustituyendo  $k^2$  de la Ec. (1.5) llegamos a la siguiente expresión para  $\beta$ :

$$\beta^2 = \epsilon\mu \frac{\omega^2}{c^2} \sin^2 \theta , \quad (1.12)$$

donde, por las condiciones de frontera, la componente  $\beta^2$  se conserva al atravesar la interfase.

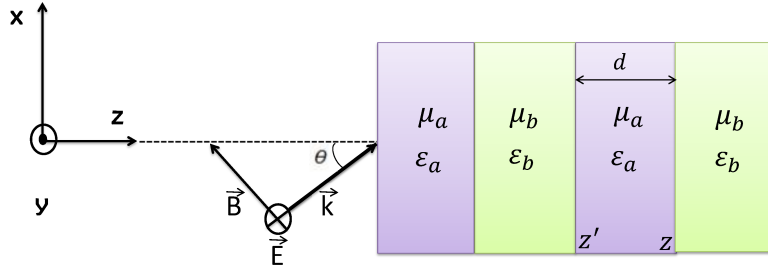


Figura 1.5: Polarización transversal eléctrica.

Ahora deduciremos una expresión que relacione la componente tangencial del campo magnético  $B_x$  con la componente normal del campo eléctrico  $E_y$ , esto nos será de gran utilidad para conectar los campos en la interfase de las capas que componen al arreglo. Considerando que los campos se propagan como *ondas monocromáticas* [40], ondas que tienen un perfil de onda sinusoidal, las Ecs. (1.8) y (1.9) quedan expresadas por:

$$\vec{E} = -E_y e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \hat{j} , \quad (1.13)$$

$$\vec{B} = B_x e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \hat{i} + B_z e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \hat{k} . \quad (1.14)$$

Para el caso en que no hay densidad de corriente, esto es  $\vec{J} = 0$ , dos de las ecuaciones de Maxwell toman el perfil [41]:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 , \quad (1.15)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{\epsilon\mu}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} , \quad (1.16)$$

de donde, aplicando la Ec. (1.15) a la Ec. (1.14) tenemos:

$$B_z = \frac{\beta}{\Phi} B_x . \quad (1.17)$$

Del mismo modo si aplicamos la Ec. (1.16) a la Ec. (1.14) tenemos, de un lado:

$$\nabla \times \vec{B} = i(\beta B_z e^{\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t} - \Phi B_x e^{\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t}) \hat{j} , \quad (1.18)$$

y por otro:

$$\frac{\epsilon\mu}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -i \frac{\epsilon\mu}{c} \omega E_y e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \hat{j} , \quad (1.19)$$

**CAPÍTULO 1. CRISTALES FOTÓNICOS.**  
**1.2. POLARIZACIÓN TRANSVERSAL ELÉCTRICA.**

---

igualando las Ecs. (1.18) con (1.19) podemos despejar  $B_z$ , al introducir este valor dentro de la Ec. (1.17) y despejando tenemos:

$$B_x = \frac{\omega\epsilon\mu}{c} \left( \frac{\Phi}{\Phi^2 + \beta^2} \right) E_y, \quad (1.20)$$

que se puede reescribir de las Ecs. (1.5) y (1.11):

$$B_x = \frac{c}{\omega} \Phi E_y, \quad (1.21)$$

o análogamente, si definimos  $Y \equiv c \Phi/\omega$ , como la impedancia del sistema, tenemos:

$$B_x = Y E_y, \quad (1.22)$$

Ahora bien, tanto el campo eléctrico como el campo magnético consisten en ondas viajeras que pueden expresarse como [40]:

$$-E_y = A_1 e^{i\Phi z} + A_2 e^{-i\Phi z}, \quad (1.23)$$

y

$$\begin{aligned} B_x &= Y(A_1 e^{i\Phi z} + A_2 e^{-i\Phi z}), \\ B_x &= Y(A_1 e^{i\Phi z} - A_2 e^{-i\Phi z}). \end{aligned} \quad (1.24)$$

Los signos de las amplitudes han sido colocados de acuerdo al sistema de coordenadas esquematizado en la Fig. (1.5). En representación matricial las Ecs. (1.23) y (1.24) pueden expresarse de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} E_y \\ B_x \end{pmatrix}_z = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ Y & -Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 e^{i\Phi z} \\ A_2 e^{-i\Phi z} \end{pmatrix}_z, \quad (1.25)$$

donde  $z$  indica la posición de la interfase en la estructura. La Ec. (1.25) también puede escribirse como:

$$\begin{pmatrix} E_y \\ B_x \end{pmatrix}_z = B \begin{pmatrix} e^{i\Phi(z-z')} & 0 \\ 0 & e^{-i\Phi(z-z')} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 e^{i\Phi z'} \\ A_2 e^{-i\Phi z'} \end{pmatrix}_z, \quad (1.26)$$

donde:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ Y & -Y \end{pmatrix}. \quad (1.27)$$

En la función exponencial se ha colocado  $z - z'$  para indicar que conectamos las ondas en los puntos  $z$  y  $z'$ . Si definimos  $d \equiv z - z'$ , la matriz de traslación  $T(d)$  queda expresada como sigue:

$$T(d) \equiv \begin{pmatrix} e^{i\Phi(d)} & 0 \\ 0 & e^{-i\Phi(d)} \end{pmatrix}, \quad (1.28)$$

donde  $T(d)$  es conocida como la matriz de traslación. La Ec. (1.26) también se cumple para  $z'$ , de esta manera:

**CAPÍTULO 1. CRISTALES FOTÓNICOS.**  
**1.2. POLARIZACIÓN TRANSVERSAL ELÉCTRICA.**

---

$$\begin{pmatrix} E_y \\ B_x \end{pmatrix}_{z'} = B \begin{pmatrix} A_1 e^{i\Phi z'} \\ A_2 e^{-i\Phi z'} \end{pmatrix}_{z'}, \quad (1.29)$$

multiplicando por  $B^{-1}$  a la izquierda en ambos lados de la Ec. (1.29):

$$B^{-1} \begin{pmatrix} E_y \\ B_x \end{pmatrix}_{z'} = \begin{pmatrix} A_1 e^{i\Phi z'} \\ A_2 e^{-i\Phi z'} \end{pmatrix}_{z'}. \quad (1.30)$$

Note que  $B^{-1}$  existe puesto que el  $\det(B) \neq 0$  y la impedancia  $Y = c \Phi / \omega$  nunca toma el valor de cero. Sustituyendo la Ec. (1.30) en la Ec. (1.26) tenemos:

$$\begin{pmatrix} E_y \\ B_x \end{pmatrix}_z = B T(d) B^{-1} \begin{pmatrix} E_y \\ B_x \end{pmatrix}_{z'}. \quad (1.31)$$

Donde  $B^{-1}$  tiene la siguiente forma:

$$B^{-1} = \frac{1}{2Y} \begin{pmatrix} -Y & 1 \\ -Y & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.32)$$

Realizando el producto de  $B T(D) B^{-1}$  en la Ec. (1.31) se tiene que:

$$\begin{pmatrix} E_y \\ B_x \end{pmatrix}_z = \begin{pmatrix} \cos(\Phi d) & -\frac{i}{Y} \sin(\Phi d) \\ -iY \sin(\Phi d) & \cos(\Phi d) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_y \\ B_x \end{pmatrix}_{z'}, \quad (1.33)$$

donde se puede definir la matriz:

$$m = \begin{pmatrix} \cos(\Phi d) & -\frac{i}{Y} \sin(\Phi d) \\ -iY \sin(\Phi d) & \cos(\Phi d) \end{pmatrix}, \quad (1.34)$$

siendo  $m$  la matriz de transferencia. Puesto que estamos interesados en estudiar una estructura periódica de multicapas, la matriz de transferencia  $m_j$  llega a ser:

$$m_j = \begin{pmatrix} \cos(\Phi_j d) & -\frac{i}{Y_j} \sin(\Phi_j d) \\ -iY_j \sin(\Phi_j d) & \cos(\Phi_j d) \end{pmatrix}, \quad (1.35)$$

donde el subíndice  $j$  indica a la matriz de transferencia para la  $j$ -ésima capa, así para conectar los campos a través de toda la estructura comenzando en  $z = 0$  hasta  $z = L$ , la longitud total del sistema:

$$\begin{pmatrix} E_y \\ B_x \end{pmatrix}_{z=L} = M \begin{pmatrix} E_y \\ B_x \end{pmatrix}_{z=0}, \quad (1.36)$$

donde la matriz de transferencia  $M$  para toda la estructura es:

$$M = \prod_{j=1}^n m_j. \quad (1.37)$$

Para obtener los coeficientes de transmisión y reflexión evaluamos las Ecs. (1.23) y (1.24) en  $z = 0$  y  $z = L$ , además consideramos que la amplitud del campo incidente esta normalizada. Para  $z = 0$ ,  $A_1 = 1$  y  $A_2 = R$ , la onda reflejada está dada por:

$$E_y(z = 0) = -1 - R, \quad (1.38)$$

$$B_x(z = 0) = Y_0(1 - R). \quad (1.39)$$

**CAPÍTULO 1. CRISTALES FOTÓNICOS.**  
**1.3. POLARIZACIÓN TRANSVERSAL MAGNÉTICA.**

---

Ahora para  $z = L$ ,  $A_1 = 0$  y  $A_2 = T$ , la onda transmitida está dada por:

$$E_y(z = L) = -T e^{i\Phi_{j+1}L}, \quad (1.40)$$

$$B_x(z = L) = Y_{j+1} T e^{i\Phi_{j+1}L}, \quad (1.41)$$

donde  $j + i$  indica que estamos fuera del cristal. Observe para la onda transmitida la componente  $B_x$  es siempre positiva por ello colocamos  $Y_{j+1}$  en lugar de  $-Y_{j+1}$ , el único cambio de signo ocurre cuando analizamos la onda reflejada, la función exponencial positiva o negativa indica que las ondas viajan a la derecha o a la izquierda del eje  $x$ , respectivamente. Sustituyendo las Ecs. (1.38) hasta (1.41) dentro de la Ec. (1.36) se obtiene la relación matricial:

$$\begin{pmatrix} -T e^{i\Phi_{j+1}L} \\ T Y_{j+1} e^{i\Phi_{j+1}L} \end{pmatrix}_{z=L} = M \begin{pmatrix} -1 - R \\ Y_0(1 - R) \end{pmatrix}_{z=0}, \quad (1.42)$$

la matriz  $M$  se puede expresar, de manera general como:

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}. \quad (1.43)$$

Finalmente resolviendo el sistema de ecuaciones para  $T$  y  $R$  obtenemos:

$$T = \frac{(M_{11} + M_{12}Y_0)(M_{22}Y_0 - M_{21}) - (M_{12}Y_0 - M_{11})(M_{21} + M_{22}Y_0)}{(M_{11} + M_{12}Y_0)Y_{j+1}e^{i\Phi_{j+1}L} + (M_{21} + M_{22}Y_0)e^{i\Phi_{j+1}L}}, \quad (1.44)$$

$$R = \frac{(M_{12}Y_0 - M_{11})Y_{j+1}e^{i\Phi_{j+1}L} + (M_{22}Y_0 - M_{21})e^{i\Phi_{j+1}L}}{(M_{11} + M_{12}Y_0)Y_{j+1}e^{i\Phi_{j+1}L} + (M_{21} + M_{22}Y_0)e^{i\Phi_{j+1}L}}, \quad (1.45)$$

donde  $T$  y  $R$  son los coeficientes de reflexión y transmisión respectivamente.

### 1.3. Polarización Transversal Magnética.

En la Fig. (1.6) se observa que para la polarización transversal magnética, los vectores  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  y  $\vec{k}$  se expresan como sigue:

$$\vec{E} = (E_x, 0, -E_z), \quad (1.46)$$

$$\vec{B} = (0, B_y, 0), \quad (1.47)$$

$$\vec{k} = (k_x, 0, k_z). \quad (1.48)$$

Del mismo modo que para la polarización S designaremos:  $k_x \equiv \beta$  y  $k_z \equiv \Phi$ , tanto  $\beta$  como  $\Phi$  cumplen las Ecs. (1.11) y (1.12). Las ondas propagantes, resultado de resolver las Ecs. (1.3) y (1.6), en el medio que corresponden al campo electromagnético están dadas por:

$$\vec{E} = (E_x \hat{i} - E_z \hat{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}, \quad (1.49)$$

$$\vec{B} = B_y e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \hat{j}. \quad (1.50)$$

Considerando que el medio es homogéneo, lineal y que no hay densidad de carga, dos de las ecuaciones de Maxwell tienen la expresión:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0, \quad (1.51)$$

**CAPÍTULO 1. CRISTALES FOTÓNICOS.**  
**1.3. POLARIZACIÓN TRANSVERSAL MAGNÉTICA.**

---

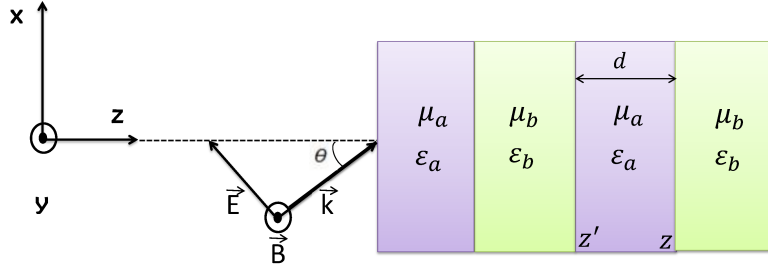


Figura 1.6: Polarización transversal magnética.

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} . \quad (1.52)$$

Análogamente al cálculo realizado para la polarización  $S$ , se puede obtener:

$$B_y = \frac{\epsilon \mu \omega E_x}{c \Phi} , \quad (1.53)$$

$$B_y = Y E_x , \quad (1.54)$$

donde se define a  $Y$  como la impedancia:

$$Y \equiv \frac{\epsilon \omega}{\Phi c} . \quad (1.55)$$

Tanto el campo eléctrico como el campo magnético que consisten en ondas viajeras pueden expresarse como [40]:

$$E_x = A_1 e^{i\Phi z} - A_2 e^{-i\Phi z} , \quad (1.56)$$

$$B_y = Y(A_1 e^{i\Phi z} + A_2 e^{-i\Phi z}) , \quad (1.57)$$

donde se ha colocado  $-A_2$  en la Ec. (1.56) porque la componente  $E_x$  es negativa para la onda reflejada. Al hacer el desarrollo matemático adecuado obtenemos la matriz de transferencia para la  $j$ -ésima capa:

$$m_j = \begin{pmatrix} \cos(\Phi_j d) & \frac{i}{Y_j} \sin(\Phi_j d) \\ iY_j \sin(\Phi_j d) & \cos(\Phi_j d) \end{pmatrix} . \quad (1.58)$$

Para conectar los campos a través de toda la estructura desde  $z = 0$  hasta  $z = L$ :

$$\begin{pmatrix} E_x \\ B_y \end{pmatrix}_{z=L} = M \begin{pmatrix} E_x \\ B_y \end{pmatrix}_{z=0} \quad (1.59)$$

donde la matriz de transferencia  $M$  es la correspondiente a la Ec. (1.37). Para obtener los coeficientes de transmisión y reflexión evaluamos las Ecs. (1.56) y (1.57) en  $z = 0$  y  $z = L$ , teniendo en cuenta que los signos en estas ecuaciones pueden cambiar en el análisis de la onda incidente, transmitida o reflejada. Para los siguientes resultados consideramos que la amplitud del campo incidente esta normalizada. Para  $z = 0$ ,  $A_1 = 1$  y  $A_2 = R$ , la onda reflejada está dada por:

$$E_x(z = 0) = 1 - R , \quad (1.60)$$

$$B_y(z = 0) = Y_0(1 + R) , \quad (1.61)$$

**CAPÍTULO 1. CRISTALES FOTÓNICOS.**  
1.4. ONDAS DE BLOCH Y ESTRUCTURA DE BANDAS.

---

ahora con  $z = L$ ,  $A_1 = 0$  y  $A_2 = T$ , la onda transmitida está dada por:

$$E_x(z = L) = T e^{i\Phi_{j+1}L}, \quad (1.62)$$

$$B_y(z = L) = Y_{j+1} T e^{i\Phi_{j+1}L}. \quad (1.63)$$

Sustituyendo las Ecs. (1.60) a la (1.63) en la Ec. (1.59) y resolviendo el sistema de ecuaciones resultante para  $T$  y  $R$  tenemos:

$$T = \frac{(M_{11} - M_{12}Y_0)(M_{21} + M_{22}Y_0) - (M_{11} + M_{12}Y_0)(M_{21} - M_{22}Y_0)}{(M_{11} - M_{12}Y_0)Y_{j+1}e^{i\Phi_{j+1}L} - (M_{21} - M_{22}Y_0)Y_{j+1}e^{i\Phi_{j+1}L}}, \quad (1.64)$$

$$R = \frac{(M_{11} + M_{12}Y_0)Y_{j+1}e^{i\Phi_{j+1}L} - (M_{21} + M_{22}Y_0)Y_{j+1}e^{i\Phi_{j+1}L}}{(M_{11} - M_{12}Y_0)Y_{j+1}e^{i\Phi_{j+1}L} - (M_{21} - M_{22}Y_0)Y_{j+1}e^{i\Phi_{j+1}L}}, \quad (1.65)$$

en estas relaciones  $T$  corresponde al coeficiente de transmisión y  $R$  al coeficiente de reflexión.

## 1.4. Ondas de Bloch y estructura de bandas.

La propagación de ondas en un medio periódico es muy similar al movimiento de electrones en un sólido cristalino. De hecho, la formulación del modelo de Kroning-Penney, utilizado en la teoría elemental de bandas en sólidos, es idéntica a la usada para la radiación electromagnética en un medio periódico de capas, así también conceptos como las ondas de Bloch y las bandas prohibidas [42]. Para un sistema periódico la onda de Bloch expresada como vector columna o matricial, es simplemente:

$$\begin{pmatrix} E_x \\ B_y \end{pmatrix}_{z+L} = I e^{iKL} \begin{pmatrix} E_x \\ Y B_y \end{pmatrix}_z, \quad (1.66)$$

donde  $I$  es la matriz identidad,  $L$  la longitud de la estructura y  $K$  el vector de onda de Bloch. Partiendo de la Ec. (1.36) definimos:

$$\begin{pmatrix} E_x \\ B_y \end{pmatrix}_{z+L} \equiv M \begin{pmatrix} E_x \\ Y B_y \end{pmatrix}_z, \quad (1.67)$$

igualando las Ec. (1.66) y (1.67) y factorizando, se tiene:

$$(M - I e^{iKL}) \begin{pmatrix} E_x \\ Y B_y \end{pmatrix}_z = 0. \quad (1.68)$$

Para que la solución del sistema en la Ec. (1.68) sea distinta de la trivial, es necesario que se cumpla  $\det(M - e^{iKL}) = 0$ , entonces:

$$\det \begin{pmatrix} M_{11} - e^{iKL} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} - e^{iKL} \end{pmatrix}_z = 0, \quad (1.69)$$

al desarrollar el determinante y utilizar la siguiente propiedad [43]:

$$\det(M) = \prod_{j=1}^n \det(m_j) = 1 \quad (1.70)$$

obtenemos la siguiente relación:

$$1 - (M_{11} + M_{22})e^{iKL} + e^{i2KL} = 0. \quad (1.71)$$

**CAPÍTULO 1. CRISTALES FOTÓNICOS.**  
**1.4. ONDAS DE BLOCH Y ESTRUCTURA DE BANDAS.**

---

Multiplicando ambos lados de la Ec. (1.71) por  $\exp(-iKL)$  y usando la fórmula de Euler para expresar el coseno en términos de exponenciales complejas, tenemos:

$$2\cos(KL) - (M_{11} + M_{22}) = 0 . \quad (1.72)$$

Como es conocido del álgebra lineal la traza de una matriz cuadrada  $M$  está definida como la suma de los elementos de la diagonal principal, así:

$$\cos(KL) = \frac{1}{2}tr(M) , \quad (1.73)$$

al desarrollar el lado derecho de la Ec. (1.73) para un sistema de dos capas se obtiene:

$$\cos(KL) = \cos(\phi_1 d_1) \cos(\phi_2 d_2) - \frac{1}{2} \left( \frac{Y_2}{Y_1} + \frac{Y_1}{Y_2} \right) \sin(\phi_1 d_1) \sin(\phi_2 d_2) . \quad (1.74)$$

El conjunto formado por todos los valores que puede tomar la función coseno está entre  $\pm 1$ , por ello la Ec. (1.73) debe ser tal que:

$$\left| \frac{1}{2}tr(M) \right| \leq 1 . \quad (1.75)$$

La estructura de bandas para un medio periódico típico es obtenida de esta ecuación. El régimen donde se cumple la Ec. (1.75) corresponde a la parte real de  $K$  y por tanto a las ondas de Bloch que se propagan en el medio, sin embargo, cuando no se cumple la condición anterior  $K$  tiene una parte imaginaria por lo que la onda de Bloch es evanescente. Éstas son las llamadas bandas prohibidas del sistema periódico.



## Capítulo 2

# Cuasicristales.

Tradicionalmente, los medios ópticos se clasifican de forma sencilla como periódicos o no periódicos, sin la necesidad de otras distinciones. Sin embargo, el término “no periódico” abarca una gama muy amplia de conceptos que describen estructuras complejas caracterizadas por diferentes grados de orden. Por lo tanto, la dicotomía rígida entre estructuras periódicas y no periódicas es inadecuada y necesita ser reformada. Es en este apartado que los cuasicristales hacen su aparición, de manera elemental podemos decir que los cuasicristales son caso intermedio entre los sistemas con propiedades periódicas y no periódicas, no obstante investigaremos una definición más detallada para los mismos. Con el fin de obtener una mejor comprensión acerca del término cuasicristal evoquemos a una definición para los cristales, para esto en *Tablas para cristalografía* uno puede encontrar lo siguiente [45]:

“Los cristales son objetos reales finitos en el espacio físico, los cuales pueden ser idealizados por estructuras periódicas tridimensionales infinitas en un punto del espacio. La periodicidad tridimensional significa que hay traslaciones entre las operaciones de simetría del objeto con los vectores de traslación que abarcan el espacio tridimensional.”

La descripción anterior es un modelo idealizado de un cristal real. Cuando un cristal se somete a rayos X, difracción de electrones o neutrones, se observa interferencia constructiva entre los rayos elásticamente dispersos a partir de átomos dispuestos en planos cristalográficos [13]. Basándonos en los patrones de difracción de rayos X, se sabe que un cristal se compone de partículas, es decir, colecciones de iones, átomos y moléculas, que están dispuestas regularmente en el espacio. Un cristal se dice que es periódico si y sólo si el número mínimo de vectores necesarios para generarlo es igual a la dimensionalidad del cristal. La periodicidad microscópica por lo tanto resulta ser suficiente, aunque no es una condición necesaria para la existencia de un estado cristalino [15].

A inicios de los setenta, cuando parecía que finalmente se tenía una visión completa del estado sólido, se pensaba que simetrías ante rotaciones por ángulos como  $72^\circ$ , llamadas de orden cinco porque corresponden a  $360^\circ/5$  (simetría pentagonal),  $360^\circ/7$ ,  $360^\circ/8$ , por mencionar algunas quedaban prohibidas debido a que resulta imposible llenar un plano con pentágonos, heptágonos, dado que siempre quedan huecos. La predicción de la cristalografía clásica es clara: no pueden existir cristales con simetrías como cinco, siete, ocho, nueve, etc., y mucho menos un patrón de difracción formado por puntos luminosos discretos con dichas simetrías, sin embargo, la realidad se mostró reacia a tal afirmación de imposibilidad [10].

La primera observación de un cuasicristal se realizó en abril de 1982 [11]. Mientras que D. Shechtman estaba trabajando en la Oficina de Normas de EE.UU. como académico invitado, se

observó una imagen de la microscopía electrónica para una aleación de aluminio y manganeso que había sido enfriada rápidamente, dicha imagen mostraba simetría de orden cinco y reflexiones de Bragg agudas, el resultado no pudo ser entendido dentro de los dos primeros años desde el descubrimiento, no obstante Shechtman recibió gran apoyo por parte de I. Blech uno de sus colegas en Israel, juntos redactaron un documento relativo a los resultados experimentales y lo enviaron a una revista, pero fue rechazado, después se presentaron a otra revista pero tampoco pudo ser publicado. El científico J.W. Cahn, quien dio alojamiento a Shechtman en la Oficina de Normas recomendó la racionalización de papel, dejando de lado los detalles del modelo y la limitación de únicamente los resultados experimentales [14]. Después de consultar con D. Gratias, un cristalógrafo matemático en el Centro Nacional de Investigación Científica de Francia, el grupo presentó un breve artículo a Physical Review Letters en octubre de 1984, más de dos años después de la primera experiencia de Shechtman, el 5 de noviembre del mismo año fue anunciado el descubrimiento de los cuasicristales por Shechtman, I. Blech, D. Gratias, and J.W. Cahn [56].

Una década antes del descubrimiento Penrose propuso un modelo matemático para los cuasicristales, él imaginó cómo teselar un plano de manera no periódica, usando las piezas más sencillas posibles, finalmente logró encontrar dos rombos como celdas básicas, llamados delgado y gordo esta configuración sirve para describir una simetría bidimensional con simetría pentagonal como se muestra en la Fig. (2.1) [10].

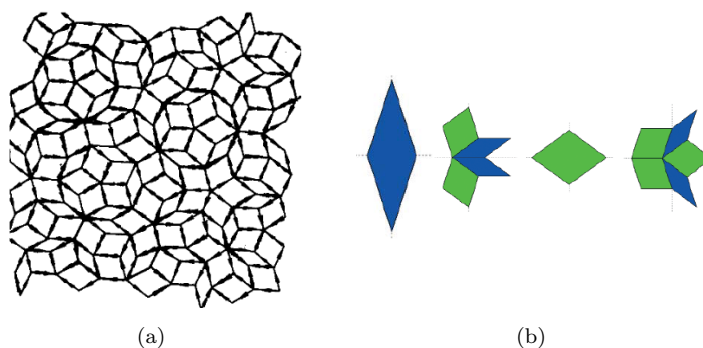


Figura 2.1: (a) Mosaico de Penrose, se forma mediante la unión de dos tipos de rombos; delgado y gordo. (b) Rombo delgado y gordo, los ángulos internos de los rombos son múltiplos de  $360^\circ/10$  exhibiendo así de manera local la simetría rotacional de orden cinco en el mosaico de Penrose, observe las estrellas pentagonales en éste.

Pues bien, ahora podemos dar una respuesta más detallada a la pregunta ¿qué es un cuasicristal? Como se mencionó, los cuasicristales son un caso intermedio entre los sistemas con propiedades periódicas y no periódicas ya que poseen cierta simetría, orden de largo alcance, sus patrones de difracción no muestran simetría cristalográfica pero muestran claramente simetría rotacional (la simetría pentagonal es un ejemplo). Los cuasicristales se asocian con tener orden de orientación perfecta sin periodicidad traslacional en su estructura.

En cuasicristales el *orden de largo alcance* significa que las mismas unidades estructurales aparecen una y otra vez, aunque esto no conduce a la simetría de traslación. Fue a través de los patrones de difracción que las personas descubrieron diferencias entre los cuasicristales y los cristales, al igual que otros cristales aperiódicos, la cuasiperiodicidad induce nuevos grados de libertad, lo cual puede explicarse de la siguiente manera [14]: A menudo los índices de Miller ( $hkl$ ) en cristalografía y física del estado sólido se utilizan para describir la estructura de los cristales, estos índices pueden explicar los espectros de difracción de todos los patrones de cristales, el

número  $N$  de vectores base para el cristal es idéntico al número de las dimensiones  $d$  del cristal, empero, debido a que los cuasicristales tienen simetría cuasiperiódica de traslación (o simetrías orientacionales no permitidos por la regla de la cristalografía), los índices de Miller no pueden ser utilizados y en su lugar tenemos que emplear un total de seis índices [13]. Esta característica implica la necesidad de introducir espacios de mayores dimensiones para caracterizar la simetría de los cuasicristales. Una estructura cuasiperiódica es periódica en un espacio de dimensionalidad superior a la que pertenece ésta.

Los cuasicristales también se pueden clasificar de acuerdo a su orientación atómica: cuasicristales unidimensionales son aquellos en los que la disposición atómica es cuasiperiódica en una dirección, y periódica en las otras dos direcciones. En los cuasicristales bidimensionales el orden atómico es cuasiperiódico en dos direcciones y periódico en el otro (simetrías de rotación pentagonal, octogonal, decagonal). Los cuasicristales tridimensionales se comportan de una manera tal que la disposición de los átomos presenta cuasiperiodicidad en las tres direcciones como se observa en los cuasicristales icosaédricos [14]. El método de la teoría de grupos es el más apropiado para describir la simetría de los cuasicristales, sin embargo, para nuestros fines éste análisis no es necesario.

## 2.1. Propiedades de los cuasicristales.

Es pertinente dar una breve discusión acerca del carácter estructural y las propiedades físicas de los cuasicristales. Desde que en 1984 se encontró que una aleación metálica de  $Al - Mn$  presentaba un patrón de difracción el cual mostraba orden de largo alcance con simetría pentagonal Fig. (2.2), se han encontrado muchos otros compuestos con simetrías exóticas. La mayor parte de ellos son de aluminio aleado con metales de transición, tales como  $Pd$ ,  $Cu$ ,  $Co$ , entre otros [10].



Figura 2.2: Patrón de difracción de electrones de una aleación de aluminio y manganeso obtenido por Shechtman et al. [56]. Los puntos brillantes muestran que la aleación no es amorfa, pero ordenada. La simetría pentagonal exhibida en este patrón de difracción no sucede para algún cristal periódico. Por lo tanto, la aleación debe ser a la vez aperiódica y ordenada.

El orden estructural cuasiperiódico parece ser mucho más complejo que el orden periódico, sin embargo, las observaciones experimentales indican que la formación y crecimiento de cuasicristales es más rápida que la de los cristales. Las fases cuasicristalinas pueden obtenerse fácilmente por solidificación rápida tales como *melt spinning* (técnica utilizada para el enfriamiento extremadamente rápido de líquidos) o *splat cooling* (forma rápida de solidificación), con velocidades de enfriamiento mayores a  $10^6 K/s$ . A más altas velocidades de enfriamiento se forman metales amorfos, en velocidades intermedias de enfriamiento se forman cuasicristales, mientras que para la formación de cristales se requiere de un tiempo mayor.

Algunos de los cuasicristales obtenidos por técnicas de solidificación rápida son estables, sin embargo, la mayoría de ellos son meta estables y se transforman en fases cristalinas durante el recocido térmico [16]. Para explicar la formación de un estado cuasicristalino se han planteado varias ideas, algunos investigadores sugieren, por ejemplo, que debido a las altas velocidades de enfriamiento los átomos de la muestra no tienen tiempo para reorganizarse de manera global formándose así el cuasicristal, el mismo Penrose dijo que se trataba de una manera nueva en la cual crecían los materiales, basado en un colapso súbito de una función de onda total cuántica de los átomos [60].

El primer hecho incontrovertible es que los cuasicristales no son buenos conductores; su conductividad es muy cercana a la de semiconductores amorfos. Esto no deja de ser sorprendente dado que al formar una aleación de metales, resulta que se obtiene un material cuya resistividad es varios órdenes de magnitud mayor a la de sus elementos constituyentes. Mas aún, en los metales, la resistividad aumenta con la temperatura, en los cuasicristales sucede exactamente lo contrario. Este comportamiento es totalmente anómalo si se compara con los metales ordinarios, aislantes y semiconductores [10].

En el caso cuasicristalino ocurre un fenómeno bien conocido en la física de cristales: las brechas energéticas se abren cuando un electrón que trata de propagarse se difracta, produciéndose una onda estacionaria, para que esta condición ocurra la longitud de onda del electrón debe corresponder con algún período característico del cristal, el cual a su vez corresponde a un punto de difracción en el espacio recíproco, en cambio se sabe que presentan estados extendidos, por lo cual aún existen ciertos desacuerdos con la teoría. Por otro lado, si tomamos cualquier cuasicristal, la relación de dispersión es densa en gaps, que en su mayoría son muy estrechos [16].

La alta simetría rotacional de los cuasicristales puede servir en el diseño de estructuras que requieran esta propiedad. Por ejemplo, últimamente se han buscado materiales con una brecha fotónica que permita transmitir luz en un rango pequeño de longitudes de onda sin grandes pérdidas, teniendo posibilidad de ser utilizados en la industria de las computadoras. Los materiales que mejor muestran esta propiedad son los que tienen una zona de Brillouin muy simétrica, derivadas de un grupo puntual con alta simetría. Las estructuras cuasiperiódicas presentan dicha característica, y por eso son candidatas ideales para este fin [59]. Además esta simetría favorece separaciones de banda omnidireccionales; el denso conjunto de reflexiones de Bragg hace que domine la dispersión múltiple; así en las estructuras cuasiperiódicas hay una mezcla de luz propagante y luz localizada (estados críticos). Este comportamiento es una reminiscencia de los estados críticos en la transición de aislante-metal en el modelo de Anderson, que no son ni ampliados ni localizados, pero sí similares y multifractales [61, 62]. En la literatura revisada hasta ahora la existencia de estados electrónicos localizados frente a estados electrónicos extendidos en los cuasicristales no se ha aclarado por completo [67].

A continuación examinaremos un tipo especial de cuasicristales, los cuasicristales fotónicos.

## 2.2. Cuasicristales fotónicos.

Los cuasicristales fotónicos (PQC-Photonic Quasicrystals) pueden considerarse como otra forma de desviación correspondiente al caso ideal de un cristal fotónico, presentan algunas propiedades similares a las de los cuasicristales sólidos descritos en la sección anterior. La investigación teórica de cuasicristales fotónicos comenzó a mediados de los noventa y actualmente se continúa el estudio de sus características y diseño. Teselados de Arquímedes son estructuras periódicas bidimensionales cuyas propiedades han resultado ser muy similares a los de PQC, un teselado de Arquímedes se construye a partir de un polígono regular convexo de uno o varios tipos, estos polígonos son los que

cubren al plano sin ningún solapamiento entre ellos, todos los vértices son estrictamente idénticos y en éstos se encuentran los “átomos” de la estructura.

Existen once teselados de Arquímedes diferentes, incluyendo la red tradicional de Bravais. Los teselados así definidos se denominan teselados semi-regulares o de Arquímedes, en la Fig. (2.3) se representa uno de los tres mosaicos más elementales de Arquímedes, debido a la periodicidad que presentan estas estructuras se puede definir en ellas una celda primaria y una zona de Brillouin [15].

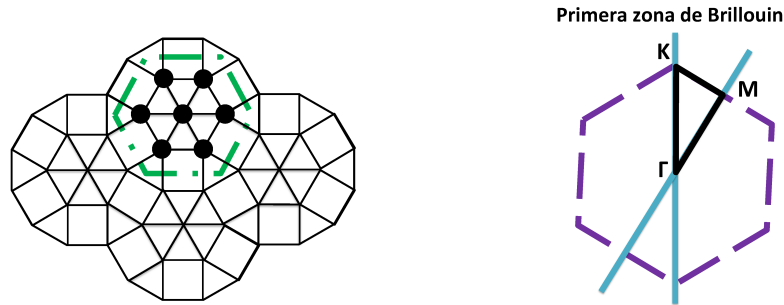


Figura 2.3: *Izquierda.* Cristal fotónico semi-regular construido de un teselado de Arquímedes esta estructura presenta una simetría rotacional de orden 12. *Derecha.* Zona de Brillouin asociada a una red triangular con un total de 7 átomos en su celda primaria. Para la red triangular mostrada del lado izquierdo de la figura la celda primaria es representada con trazos cortos de una línea, mientras que los enlaces que conectan los “átomos” están representados con una línea sólida.

Un método muy simple para la construcción de PQC se representa en la Fig. (2.4), esta es la idea del llamado *método de corte y proyección*. Se toma una red cristalina de dimensión mayor, y se escoge un subconjunto de puntos a proyectar mediante un criterio determinado. En general, el método requiere del uso de computadoras para saber precisamente qué puntos se proyectarán de la red con dimensión mayor [12].

La estructura considerada aquí es una rejilla  $G$  con simetría cuadrada. Un cuasicristal unidimensional puede ser derivado de la rejilla  $G$ , considerando todas las intersecciones de esta rejilla con una línea recta ( $\Delta$ ), la cual tiene una pendiente con valor irracional. Los puntos de intersección así generados son distribuidos de acuerdo a un patrón cuasiperiódico. En la práctica, un PQC pueden construirse alternativamente apilando capas dieléctricas con permitividades  $\epsilon_1$  y  $\epsilon_2$  respectivamente, de tal manera que el espesor de las capas variará con el distancia entre los puntos de intersección sucesivos representados en la Fig. (2.4). Cuasicristales como el ejemplo descrito son estructuras deterministas, perfectamente ordenadas que no presentan ninguna simetría traslacional.

Los PQC también pueden presentar simetría rotacional de orden  $N = 8, 10$  o  $12$  un orden alto comparado con el orden máximo  $N = 6$  para redes de Bravais. Estas expectativas llevaron a propuestas de cuasicristales fotónicos con una orden de simetría rotacional de hasta  $N = 18$  [15].

Desde un punto de vista metodológico, los PQC presentan las mismas dificultades que los cuasicristales sólidos. Por lo tanto, como consecuencia de la falta de periodicidad, métodos de cálculo disponibles en el espacio recíproco, como es la expansión del campo en un número limitado de ondas planas, no se puede aplicar directamente a cuasicristales. Un método posible para superar esta limitación consiste en utilizar un truncamiento finito del cuasicristal infinito y en repetir periódicamente este truncamiento. En una estructura periódica así construida se puede esperar que sus propiedades se aproximen a las propiedades del cuasicristal original. Sin embargo, en el caso de cuasicristales de estado sólido, se ha demostrado que las propiedades de aproximaciones

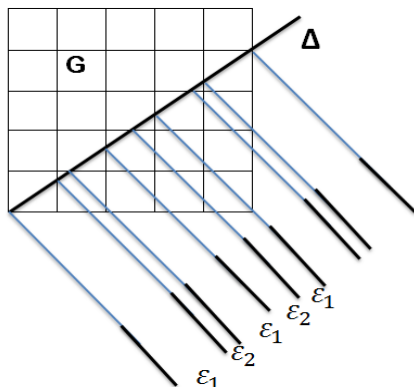


Figura 2.4: Cuasicristal en una dimensión.

no convergen sistemáticamente, incluso cuando el tamaño de las celdas unitarias de la estructura se incrementa. Note que la ausencia de una invariancia traslacional en estructuras cuasiperiódicas resulta en un mayor grado de complejidad para los cálculos. Además, puesto que cada sitio en un cristal de este tipo es diferente, las propiedades de las interfaces de los defectos tienden a ser dependientes de la ubicación exacta de los mismos. Cuando las partículas forman una estructura aleatoria densa, los efectos inducidos por las interferencias se vuelven extremadamente fuertes, y la propagación de la luz es casi imposible, como se ha mencionado, fuertes fenómenos de localización pueden ocurrir a veces sobre superficies rugosas al azar por ello la densidad de estados de los cuasicristales fotónicos aún sigue siendo un tema muy debatido. Existen diversas formas de generar cuasicristales y para ello son usadas relaciones de recurrencia que permiten crecer materiales con las características de un cuasicristal tal como se ha discutido en esta sección, a continuación se hará una descripción de algunas (por lo menos las más estudiadas) relaciones de recurrencia que generan las celdas unitarias cuasiperiódicas para modelar un cuasicristal fotónico unidimensional.

### 2.3. Sucesión de Fibonacci

La sucesión de Fibonacci es uno de los temas más sorprendentes de la Matemática, existen multitud de aplicaciones en las que aparece esta construcción matemática y debe su nombre a Leonardo Fibonacci de Pisa, a pesar de ser un matemático brillante, es conocido principalmente por tal sucesión de números enteros en la que cada término es igual a la suma de los dos anteriores.

$$F_0 = 0, F_1 = F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3, F_5 = 5, \dots \quad (2.1)$$

en general:

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}; \quad n > 0, F_0 = 0, F_1 = 1. \quad (2.2)$$

En su libro *Liber Abaci* (Libro del ábaco) publicado en 1202, plantea la siguiente pregunta: ¿Cuántos pares de conejos se producirán en un año, partiendo de un solo par, si en cada mes cada par lleva un nuevo par que es productivo a partir del segundo mes? Cada mes crecen algunos pares de conejos bebé y deben ser añadidos al número de pares adultos del mes anterior. Cada par de adultos del mes anterior produce un par bebé para que el número actual de parejas bebé sea el mismo que el número de pares adultos del mes anterior. Excepto por el punto de partida, en la tabla (2.1) puede comprobarse fácilmente que el número de parejas coincide con los números de Fibonacci [55].

Algunas propiedades y resultados que surgen a partir de esta sucesión son:

	MESES												
	Inicio	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Parejas adulto	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233
Parejas bebé	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144
No. de parejas	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377

Tabla 2.1: Pares de conejos producidos durante un año.

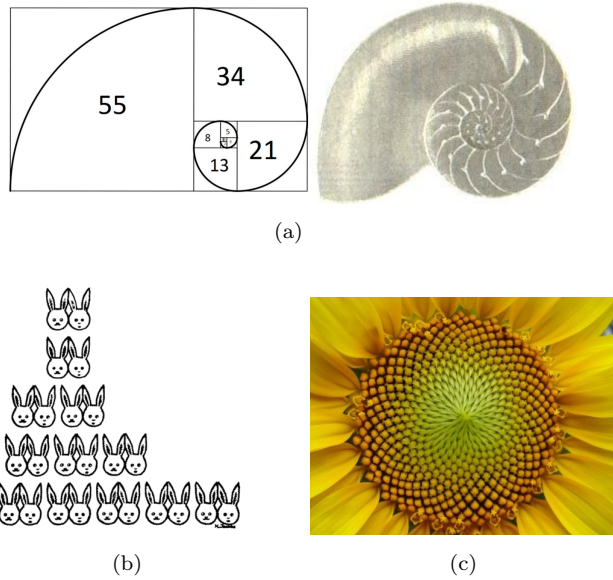


Figura 2.5: La estructura matemática de Fibonacci se presenta de forma recurrente en la naturaleza.

- Uniendo rectángulos de dimensiones igual a los términos correlativos de la sucesión de Fibonacci, formamos la llamada espiral de Fibonacci.
- La suma de diez elementos consecutivos cualesquiera de la sucesión de Fibonacci es igual a 11 veces el séptimo elemento de ese grupo, un ejemplo de esto se muestra en la Ec. (2.3). No es necesario comenzar por el primer término de la sucesión.

$$1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13 + 21 + 34 + 55 = 143 = 11 \times 13 . \quad (2.3)$$

- En el reino vegetal aparece en la implantación espiral de las semillas en ciertas variedades de girasol, las semillas se distribuyen en forma de espirales logarítmicas, unas en sentido horario y otras en sentido anti-horario, si contamos el número de espirales que hay en un sentido y las que hay en el otro aparecen términos de Fibonacci consecutivos. Igual sucede en las piñas de los pinos.
- La relación más sorprendente de todas, es su correlación con el número de oro  $\Phi$ . La razón entre dos números sucesivos de Fibonacci converge a éste número irracional pero no trascendental (como  $\pi$ , por ejemplo) conocido como la razón dorada:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \Phi = 1.61803 \dots \quad (2.4)$$

Para realizar el análisis de las propiedades ópticas en la estructura tipo Fibonacci se puede construir matemáticamente la celda unitaria de la siguiente forma:

$$S_m(A, B) = S_{m-1}(A, B)S_{m-2}(A, B) , \quad (2.5)$$

con  $m \geq 2$  y las condiciones iniciales:  $S_0(A, B) = B$ ,  $S_1(A, B) = A$ . Los arreglos iniciales para las celdas unitarias correspondientes a la estructura de Fibonacci descrita por la Ec. (2.5) se muestra en la Fig. (2.6).

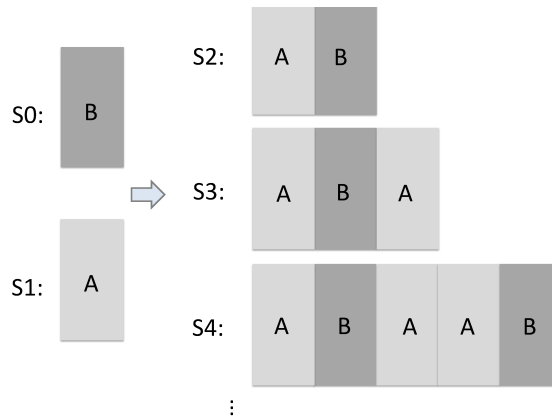


Figura 2.6: Construcción de la celda unitaria para la estructura de Fibonacci.

En la actualidad se han estudiado, principalmente, estructuras que se basan en la sucesión de Fibonacci [68]. La primera fabricación de semiconductores basados en esta sucesión fue realizada por Merlín y compañeros de trabajo [64]. Experimentalmente se han crecido multicapas siguiendo esta relación, de los estudios se ha encontrado que el espectro de energía es autosimilar y que las bandas de energía se dividen en tres sub-bandas sucesivamente, produciendo de este modo un espectro singular, que en el límite infinito se reduce al espectro de Cantor, con densas brechas de energía en todas partes [65, 66, 67]. Por otro lado, en un estudio más realista se dijo que el espectro de Fibonacci pudo ser observado, pero no claramente, sólo para algunos rangos de energía, también fue encontrada baja conducción y altas bandas de valencia para tal sistema, las cuales exhibieron una selectiva localización espacial en las capas más gruesas del material (*GaAs*) [33, 34]. Por otro lado, J. E. Zárate y V. R. Velasco reportaron que el espectro electrónico de heteroestructuras cuasiperiódicas finitas reales obtenidas a partir del compuesto *AlAs* – *GaAs* no mostraron la fragmentación característica vista en modelos simples unidimensionales [32], y es debido a esto aún no se tiene una conclusión concreta.

## 2.4. Sucesión de Cantor.

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918) nació en San Petesburgo (Rusia) e inició su estudio matemático en Alemania. Sus profesores matemáticos fueron Kummer, Kronecker y Weierstrass, como los dos primeros trabajaban en Aritmética, Cantor también se decantó por esta área de trabajo, fue allí donde aparecieron las primeras ideas sobre teoría de conjuntos. En

1874 surgió el primer trabajo revolucionario de Cantor sobre la teoría de conjuntos, en este artículo Cantor consideraba dos clases diferentes de infinitos, los infinitos numerables y los no numerables.

Entre las ideas de Cantor está la formulación del conjunto que lleva su nombre, el cual es de nuestro interés debido a que la relación de recurrencia descrita a continuación está basada en éste conjunto. En la literatura es conocido que el conjunto de Cantor reúne las características más aparentemente contradictorias e interesantes, para describirlo formalmente se necesita un tratamiento matemático riguroso y conocimiento básico en topología. Muchos matemáticos, e incluso Cantor mismo por un tiempo, dudaban de que un conjunto “loco” como este existiera, pero lo hace y su construcción geométrica es en realidad bastante sencilla.

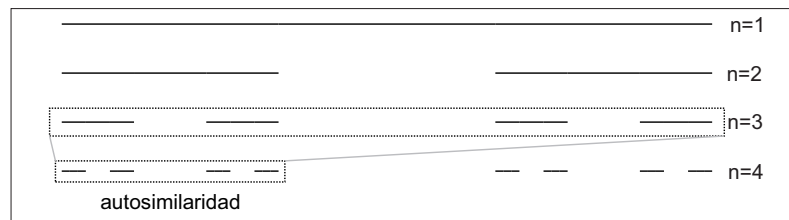


Figura 2.7: Primeras iteraciones del conjunto de Cantor.

Comenzamos con el intervalo unidad  $I = [0, 1]$  y hacemos un nuevo conjunto de acuerdo a las siguientes instrucciones: primero removemos el intervalo abierto  $(1/3, 2/3)$  que es el tercio intermedio de  $I$ , el conjunto de puntos que queda después de este primer paso será llamado  $C_1$ , éste conjunto es la unión  $[0, 1/3] \cup [2/3, 1]$ . En el segundo paso quitamos los tercios intermedios de los dos segmentos de  $C_1$ , esto es, eliminar  $[1/9, 2/9] \cup [7/9, 8/9]$  de esta forma el conjunto  $C_2 = [0, 1/9] \cup [2/9, 3/9] \cup [6/9, 7/9] \cup [8/9, 1]$  es lo que queda después de los dos primeros pasos. Eliminando el tercio intermedio de los cuatro segmentos que quedaron de  $C_2$  se obtiene  $C_3$ , y así sucesivamente, el conjunto límite  $C = C_\infty$  es acertadamente llamado *polvo de Cantor* por B. Mandelbrot. Los primeros cuatro pasos de la construcción geométrica del conjunto de Cantor se ilustran en la Fig. (2.7), note que no hay manera de dibujar el resultado final, los elementos del conjunto de Cantor forman un conjunto autosimilar, esta propiedad es característica de los objetos fractales [52, 53, 72].

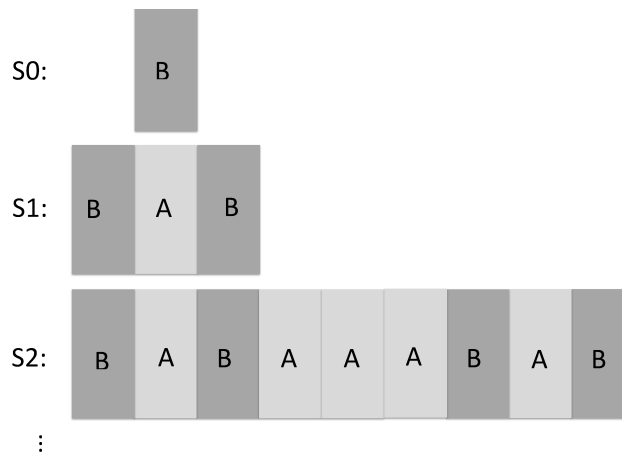


Figura 2.8: Construcción de la celda unitaria para la estructura de Cantor.

Se ha observado que en ausencia de absorción la cuasiperiodicidad conduce a espectros de frecuencia tipo Cantor, de hecho esto se relaciona con la pérdida de la coherencia espacial de largo alcance que presentan estos sistemas, también se ha encontrado autosimilaridad en el coeficiente de transmisión para los cuasicristales sólidos en una dimensión [71, 73].

Para interpretar la heteroestructura unidimensional formada de acuerdo al conjunto de Cantor asignamos al intervalo intermedio eliminado en la construcción geométrica el bloque A y lo restante, es decir, los intervalos de los extremos, se asocian cada uno con el bloque B. En la Fig. (2.8) se muestran los primeros órdenes de generación para la estructura Cantor.

## 2.5. Sucesión de Thue-Morse.

La secuencia de Thue-Morse es una secuencia binaria que debe su nombre a los matemáticos Axel Thue (1863-1922) y Harold Calvin Marston Morse (1892-1977), esta sucesión tiene muchas propiedades notables, es posible construirla de forma recursiva añadiendo para cada sub-secuencia la sub-secuencia anterior, como sigue:

- 0
- 01
- 0110
- 01101001

También puede ser derivada de los números de Fibonacci, por ejemplo, si en los conejos de Fibonacci de la Fig. (2.5) designamos a cada par de conejos jóvenes el símbolo 0 y a cada par maduro 1 se obtiene la sucesión de Thue-Morse [55].

En una dimensión esta secuencia imita la auto-organización de la materia, como el crecimiento de los cristales, sin embargo, cuando la secuencia se auto-genera lo hace de manera aperiódica, imitando por lo tanto no el crecimiento de un cristal periódico, pero sí un nuevo proceso de solidificación recientemente descubierto. Sorprendentemente, aunque la secuencia Thue-Morse es aperiódica, la autosimilitud de la secuencia induce correlaciones de largo alcance y tiene un espectro parecido a la de una secuencia periódica. Esto es cierto incluso para las secuencias aleatorias.

Refiriéndonos a cuasicristales sólidos en una dimensión se ha encontrado que el espectro de energías de una cadena determinada por la secuencia de Thue-Morse presenta un espectro de energía tipo Cantor [74]. En cuanto a cuasicristales fotónicos se han realizado estudios sobre plasmones polaritones en estructuras de este tipo [75].

Para el modelo de la celda unitaria en la estructura Thue-Morse tenemos que el  $m$ -ésimo orden de la red  $S_m$  puede ser generado por dos símbolo A y B de acuerdo a la regla de iteración:  $S_m = S_{m-1} \cup \widehat{S}_{m-1}$ , de esta manera se van construyendo generaciones sucesivas de la secuencia aperiódica. Donde  $\cup$  significa unión del conjunto  $S_{m-1}$  con  $\widehat{S}_{m-1}$ . Partiendo de la condición inicial  $S_0 = A$  y con el acuerdo de que  $\widehat{S}_0$  significa cambiar A por B tenemos la secuencia:

$$\begin{aligned} S_1 &= S_0 \cup \widehat{S}_0 = AB, \\ S_2 &= S_1 \cup \widehat{S}_1 = ABBA, \\ S_3 &= S_2 \cup \widehat{S}_2 = ABBABAAB, \dots \end{aligned} \tag{2.6}$$

Esquemáticamente en la Fig. (2.9) se muestran estas primeras iteraciones de la celda unitaria para construir el cuasicristal unidimensional basado en la secuencia de Thue-Morse.

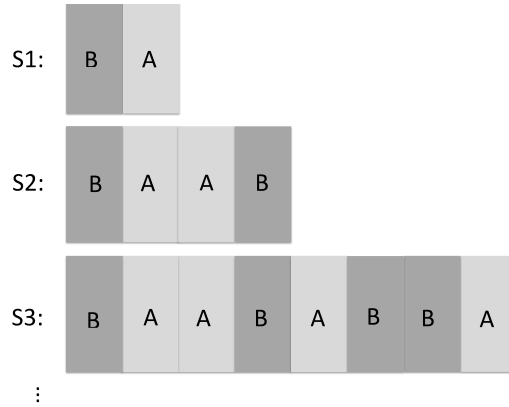


Figura 2.9: Construcción de la celda unitaria para la estructura de Thue-Morse.

## 2.6. Sucesión de Rudin-Shapiro.

La secuencia matemática de Rudin-Shapiro fue obtenida independientemente por H. S. Shapiro y W. Rudin. Walter Rudin (1921-2010) fue un matemático estadounidense, la mayor parte de su carrera fue profesor de matemáticas en la Universidad de Wisconsin-Madison. Harold Seymour Shapiro (nacido en 1928 en Brooklyn, Nueva York) es un profesor emérito de las matemáticas en el Royal Institute of Technology en Estocolmo, Suecia [76, 77, 78].

Al igual que la sucesión de Thue-Morse en una dimensión la sucesión de Rudin-Shapiro no es aleatoria e imita la auto-organización de la materia, por ejemplo el crecimiento de los cristales [55]. Con dos letras del alfabeto se puede obtener la secuencia de Rudin-Shapiro aplicando simplemente la regla de sustitución [79, 80]:

$$\begin{aligned} BB &\rightarrow BBBA, & BA &\rightarrow BBAB, \\ AB &\rightarrow AABA, & AA &\rightarrow AAAB. \end{aligned} \tag{2.7}$$

El  $k$ -ésimo orden de generación de esta secuencia contiene  $2^k$  elementos (A,B) y es hallado al aplicar la regla de sustitución (2.7)  $k - 1$  veces. En la Fig. (2.10) se han ilustrado los primeros órdenes para la secuencia de Rudin-Shapiro partiendo de  $BB$  como primer término de la secuencia.

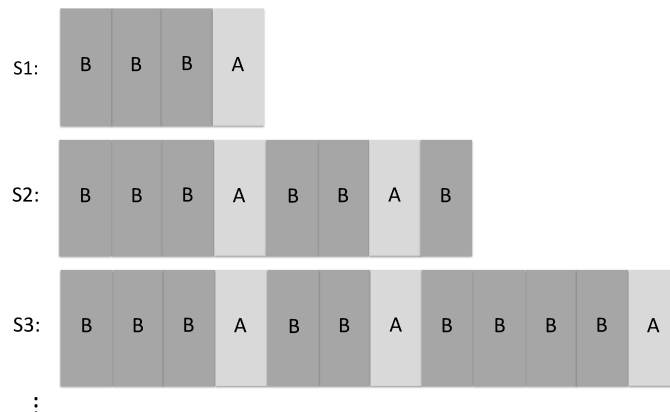


Figura 2.10: Construcción de la celda unitaria para la estructura de Rudin-Shapiro.

## CAPÍTULO 2. CUASICRISTALES.

### 2.6. SUCESIÓN DE RUDIN-SHAPIRO.

---

Algunos investigadores aseguran que estructuras tipo Rudin-Shapiro se caracterizan por tener gaps muy estrechos y manifestar naturaleza multifractal en su espectro, también esperan que las estructuras Rudin-Shapiro compartan la mayor parte de sus propiedades físicas con los sistemas desordenados al azar, incluyendo la presencia de estados ópticos localizados (como los estados de Anderson) [81], de hecho en 2008 L. Dal Negro, N.N. Feng y A. Gopinath hallaron que arreglos de este tipo presentan densidad de estados singular, similar a la comportamiento de los sistemas aleatorios [82]. Contrario a lo anterior otros investigadores sostienen que un potencial descrito por la sucesión de Rudin-Shapiro unidimensional no es suficiente para tener localización de estados y que el espectro no es exactamente autosimilar, además la abundancia de las correlaciones de corto alcance, cuyo efecto principal es reducir el grado de desorden y localización, favorece la existencia de estados extendidos y complica significativamente el análisis teórico pero desde un punto de vista experimental un cristal fotónico Rudin-Shapiro podría ser un modelo interesante para ralentizar la luz [83, 84, 85, 86].

## Capítulo 3

# Metamateriales.

En las últimas dos décadas se ha considerado una nueva clase de materiales isotrópicos llamados metamateriales (MTMs), estructuras totalmente artificiales que poseen características no observadas en la naturaleza, por lo que han suscitado gran interés tanto de la comunidad científica como de potenciales usuarios, ya que los metamateriales son generalmente estructuras periódicas. En cuanto a sus propiedades electromagnéticas los MTMs pueden exhibir permitividad eléctrica  $\epsilon$  y permeabilidad magnética  $\mu$  con signos arbitrarios, como se muestra en la Fig. (3.1), en particular, tanto  $\epsilon$  como  $\mu$  pueden ser simultáneamente negativos en el mismo rango de frecuencias, esta propiedad corresponde a un material transparente con índice de refracción negativo,  $n < 0$ , a estos materiales también se les conoce como NIMs (negative-index metamaterials), LHM (left-handed materials) o NRI (negative refractive index) por sus siglas en inglés.

Las propiedades inusuales de los MTMs están originadas en la respuesta resonante de las unidades que los componen y por este motivo, sus parámetros constitutivos efectivos dependen fuertemente de la frecuencia. Los fenómenos presentes en estos arreglos expanden el horizonte de aplicaciones, eliminando algunos límites establecidos tradicionalmente [87, 99].

### 3.1. Una breve reseña histórica.

Al hablar de MTMs es indispensable apreciar los trabajos que sentaron las bases para la investigación y desarrollo en estas estructuras modernas. Compartimos la opinión de W. Cai y V. Shalaev quienes citan tres artículos seminales en el área de MTMs [88]. En primer lugar está el papel de Veselago con su propuesta de materiales zurdos (LHM) [19]. En este artículo Veselago estudia los fenómenos presentes en una sustancia hipotética zurda, esto es, un medio en el cual los vectores de campo  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  y el vector de onda  $\vec{k}$  forman un sistema de mano izquierda. El documento también muestra de forma explícita los parámetros de los materiales necesarios para conseguir un material que posea al mismo tiempo valores negativos para la permitividad y la permeabilidad. En sus inicios esta propuesta no fue apreciada porque se sabía que naturalmente no existían materiales magnéticos con permeabilidad negativa,  $\mu < 0$ , en el rango óptico, contrario para materiales con permitividad negativa,  $\epsilon < 0$ , (como el oro, la plata, entre otros metales) [20, 89]. En segundo lugar está el artículo relacionado con la primera demostración experimental de un metamaterial por D. R. Smith, Willie J. Padilla, D. C. Vier, S. C. Nemat-Nasser y S. Schult, lo cual representa un gran salto desde una predicción teórica hasta la validación experimental [90]. En tercer lugar se encuentra el artículo de J. B. Pendry con la realización de una lente perfecta en el rango de las microondas [24].

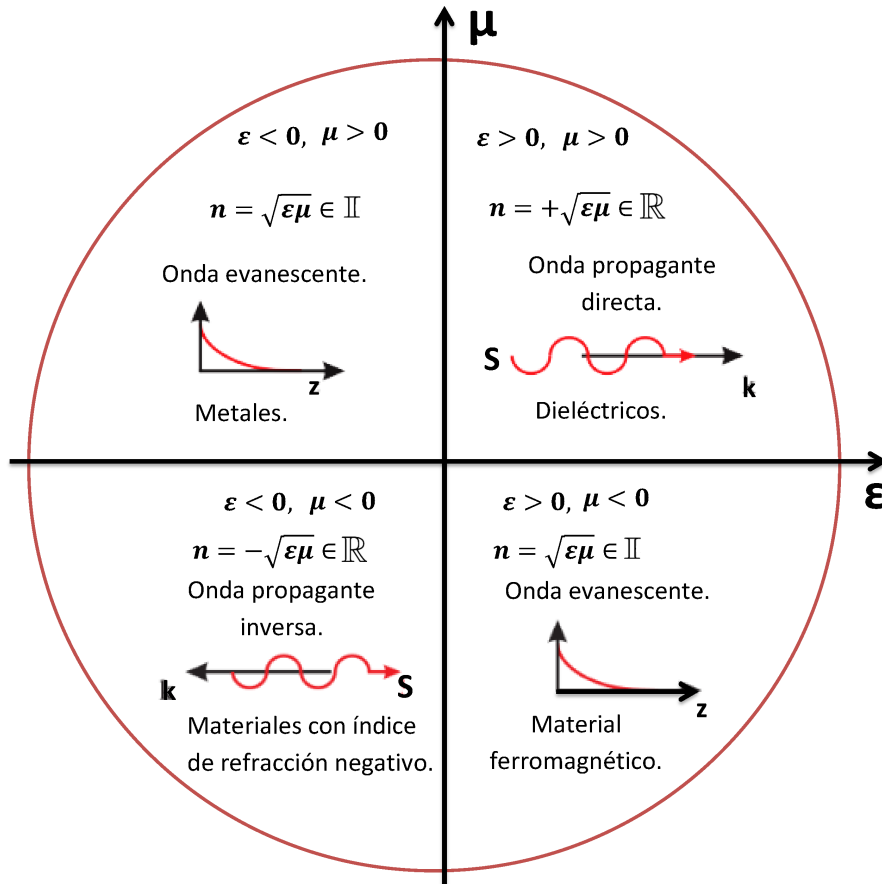


Figura 3.1: Diagrama  $(\mu - \epsilon)$ . Los dos ejes corresponden a las partes reales de la permeabilidad magnética y la permitividad eléctrica.

Casualmente, los tres artículos que inauguraron el campo de los metamateriales se centraron en MTMs con refracción negativa, este hecho es la principal razón por la que durante los primeros años de la oleada de interés en estas estructuras, la palabra metamaterial era casi sinónimo de material de zurdo. Hoy en día los MTMs son aquellos materiales diseñados artificialmente con propiedades electromagnéticas sin precedentes que no tienen origen natural, a éstos también se les conoce como MTMs ópticos debido a que son operados en las frecuencias de luz.

La actividad creciente en la investigación de los MTMs son el resultado de la combinación de una gran cantidad de técnicas de nano-fabricación con avances en las imágenes a nanoescala, diseño electromagnético computacional y simulaciones, no obstante, esta rama de trabajo se encuentra todavía en sus inicios. Los MTMs ópticos de hoy están lejos de ser perfectos dado que aún son altamente disipativos, dispersivos y anisotrópicos, sin embargo, éstos traen la promesa de crear completamente nuevas perspectivas para el control y la manipulación de los fotones y proporcionan beneficios potenciales en diversos campos, incluyendo detección óptica, antenas miniatura, nuevas guías de onda, imágenes sub-longitud de onda, la fotolitografía nano-escala y circuitos fotónicos [88].

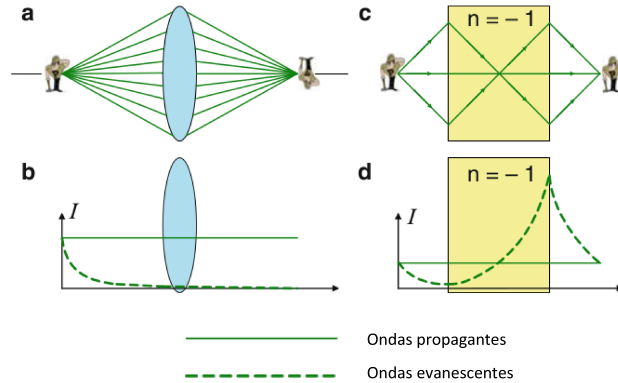


Figura 3.2: Limitación de una lente convencional y la idea de una lente basada en un bloque de material con refracción negativa. (a) Una lente convencional colecta sólo ondas propagantes. (b) Pérdida de ondas evanescentes en un sistema de imagen convencional. (c) La capacidad de enfoque en un bloque de NIM. (d) El aumento de la amplitud en las ondas evanescentes respectivas al bloque de NIM y la restauración tanto de las ondas propagantes como de las ondas evanescentes. (Fuente: W. Cai and V. Shalaev, *Optical Metamaterials: Fundamentals and Applications*, Springer, 2010.)

### 3.2. Definición y diseño de metamateriales.

Como se ha mencionado, es posible construir medios materiales de forma artificial con casi cualquier propiedad que deseemos y los llamamos metamateriales. El prefijo “meta” ( $\mu\epsilon\tau\alpha$  en griego) significa más allá y en este sentido el nombre “metamateriales” significa que éstos son sistemas que van más allá de los materiales convencionales, como esta rama de investigación se halla aún en desarrollo, no existe todavía una definición única establecida. Apoyando la propuesta de Vladimir Shalaev en cuanto a la definición de metamaterial, tenemos lo siguiente [88]:

“Un metamaterial es un material estructurado artificialmente que obtiene sus propiedades a partir de las unidades que lo componen en lugar de los materiales que lo constituyen. Un metamaterial tiene una escala de inhomogeneidad mucho menor que la longitud de onda de interés, y su respuesta electromagnética es expresada en términos de parámetros materiales homogeneizados.”

La idea fundamental detrás de los MTMs es entonces que sus propiedades quedan establecidas a partir de una unidad de estructura, la cual designaremos como *meta-átomo*, éste puede ser adaptado en forma y tamaño, al modificar las dimensiones de la celda unitaria así como la frecuencia de operación se tendrá un metamaterial con características diferentes. A pesar de que hablaremos únicamente de MTMs electromagnéticos, la idea de metamaterial puede ser extendida a cualquier fenómeno ondulatorio. De acuerdo a la definición anterior, para lograr una vista homogénea de las propiedades electromagnéticas del medio con una permitividad y permeabilidad efectivas, los *meta-átomos* deben ser mucho más pequeños que la longitud de onda de interés,  $a \ll \lambda$ , donde  $a$  es la constante de red [25].

Existe una condición de homogeneidad efectiva, la cual asegura que el fenómeno de refracción será dominante sobre el fenómeno de dispersión cuando una onda se propague dentro de un metamaterial, esta condición puede ser expresada como sigue [87]:

$$p < \frac{\lambda}{4}, \quad (3.1)$$

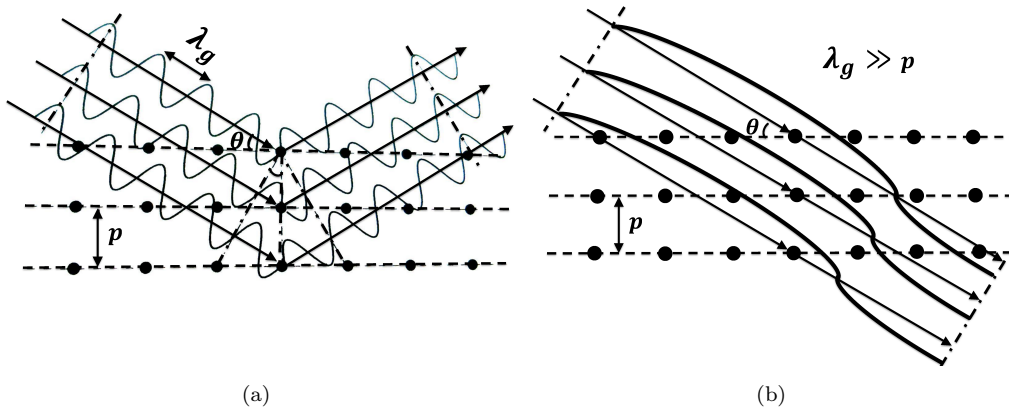


Figura 3.3: Diferencia entre la dispersión de Bragg y el régimen de la longitud de onda. (a) Régimen de Bragg,  $p \approx \lambda_g/2$  usualmente prevalece en cristales fotónicos. (b) Régimen de longitud de onda amplia,  $p \ll \lambda_g$ , prevalece en MTMs. (Fuente: C. Caloz, T. Itoh, *Electromagnetic Metamaterials: Transmission Line Theory and Microwave Applications*, John Wiley and Sons, 2006.)

donde  $p$  es la la distancia promedio entre los *meta-átomos*. Cabe mencionar que en algunos casos los cristales fotónicos también pueden ser descritos con propiedades homogeneizadas a pesar de que sus componentes tienen un tamaño comparable con la longitud de onda.

Enfocándonos a los NIMs, los cuales son sólo un tipo de MTMs, existen hoy en día una amplia gama de elementos estructurales entre los que podemos citar los mostrados en la siguiente lista:

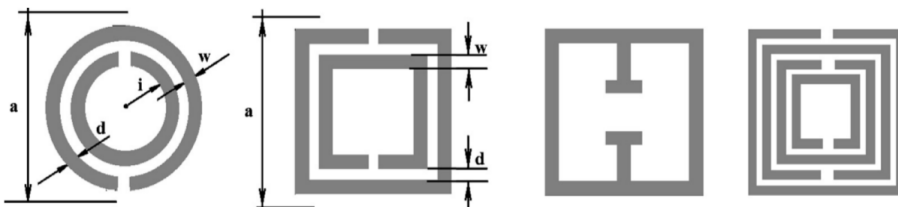


Figura 3.4: Anillos resonadores con diferentes estructuras.

- Resonador de anillo cortado o SRRs por sus siglas en inglés (Split-Ring Resonator).** Este tipo de material tiene la ventaja de ser plano, de tal manera puede ser elaborado mediante fotolitografía para dimensiones relativamente grandes y nanolitografía de dimensiones nanométricas, por esta razón se ha estudiado intensamente. Una multitud de variantes han surgido, algunos de ellos se presentan en la Fig. (3.4), propuestos por primera vez en 1999 por J. B. Pendry, A. J. Holden, D. J. Robbins, y W. J. Stewart, quienes sugirieron un anillo resonador como un *meta-átomo* para tener una permeabilidad distinta de uno, lo cual es necesario para obtener un índice de refracción negativo, tal estructura tuvo éxito en el rango de las microondas. Este anillo resonador es el *meta-átomo* más famoso y es un símbolo para los metamateriales en general [21, 25]. Los enfoques para trasladarse a longitudes de onda en el espectro visible se basaron inicialmente en este arreglo con tamaños reducidos de la celda unitaria, este enfoque funciona hasta 200 THz, sin embargo, esta escala se rompe para

**CAPÍTULO 3. METAMATERIALES.**  
**3.2. DEFINICIÓN Y DISEÑO DE METAMATERIALES.**

---

frecuencias más altas porque para longitudes de onda más cortas que el rango de 200 THz, el metal comienza a desviarse considerablemente de una conductividad ideal, lo que conduce a una ley de escala modificada donde la frecuencia se acerca a una constante y se independiza el tamaño del SRR [91]. Para crear un metamaterial en longitudes de onda ópticas, se debe tratar con periodicidades alrededor de 300 nm y tamaños de aproximadamente 30 nm [22]. Este límite de escala combinado con las dificultades de fabricación nos lleva al desarrollo de diseños alternativos más adecuados para THz y el régimen óptico.

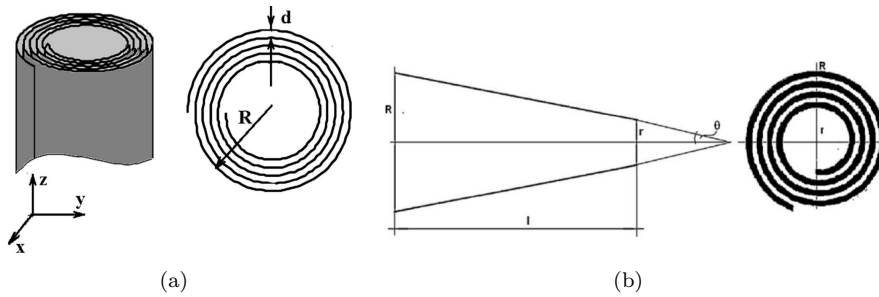


Figura 3.5: (a) Swiss roll. (b) Conical Swiss rolls. Para las dos unidades estructurales se muestran la vista lateral (a la izquierda) y la vista superior (a la derecha).

- **Swiss roll.** Un *swiss roll* (rollo suizo) se compone de un mandril cilíndrico central Fig. (3.5), sobre el cual se enrolla una espiral conductora con un respaldo aislante, de modo que no hay contacto eléctrico entre las capas. Cuando se aplica un campo magnético alterno a lo largo del eje del cilindro, se induce una corriente en la lámina conductora. Sin embargo, la corriente no puede fluir libremente, porque la hoja no es continua; sólo puede fluir en virtud de la auto-capacitancia de la estructura lo que permite que el circuito de corriente alterna se complete [92].
  
- **Conical Swiss rolls.** Se concede una atención especial para estas unidades estructurales (bolos suizos cónicos) mostrados en la Fig.(3.5), que exhiben tanto una alta y negativa permeabilidad y también concentran el flujo magnético en el dominio de la frecuencia de radio y microondas, sin ser perturbado por un continuo e intenso campo magnético [93, 94].
  
- **Malla de alambre.** Son estructuras metal-dieléctricas que han demostrado poseer bandas prohibidas a bajas frecuencias desde la frecuencia cero hasta la frecuencia de corte que se puede atribuir al movimiento de los electrones en los alambres de metal. Este elemento estructural consiste en un arreglo de alambres muy delgados a escala de sub-longitud de onda, como se presenta en la Fig. (3.6) [95].
  
- **Tiras metálicas.** Para alcanzar una respuesta magnética en el rango visible una variante del diseño de tiras metálicas combinadas Fig. (3.6) resultó exitoso, fue utilizado por el grupo de Purdue, este arreglo mostró la primera respuesta magnética en la parte roja del espectro y cruzó todo el rango visible [96, 97].

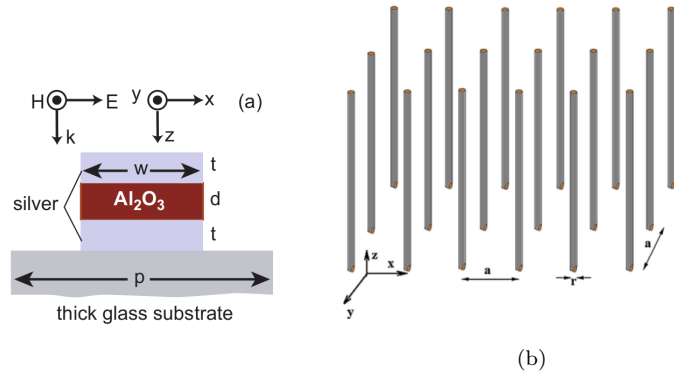


Figura 3.6: (a) Celda unitaria ideal para el arreglo de nano-tiras de plata acopladas, éstas se encuentran separadas por aluminio,  $w$  es el ancho de las tiras de plata y del aluminio,  $t$  es el espesor de ambas tiras y  $d$  es el espesor del separador, las tiras son infinitas en  $y$  y periódicas en  $x$  con período  $p$ . (b) Arreglo de alambres metálicos muy largos y delgados de radio  $r$  y período de red  $a$ .

### 3.3. Propiedades de metamateriales con índice de refracción negativo.

Los MTMs abarcan un rango mayor que los NIMs, sin embargo, los NIMs han sido más populares debido a sus propiedades excepcionales de refracción negativa.

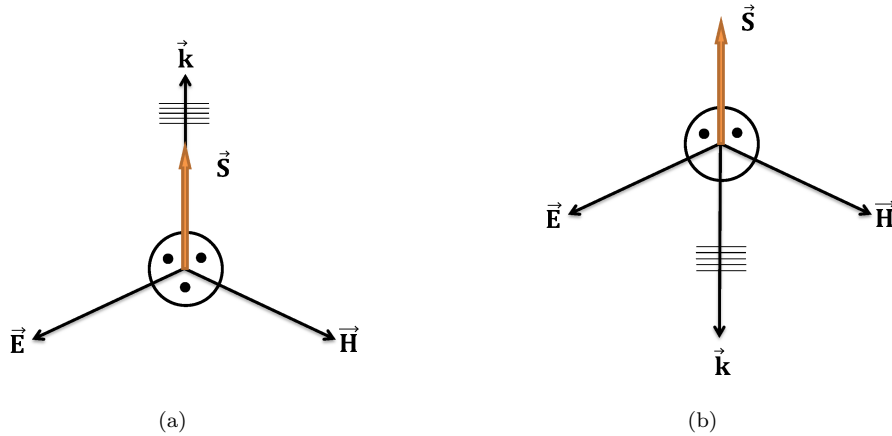


Figura 3.7: Triada de vectores  $(\vec{E}, \vec{H}, \vec{k})$  y vector de Poynting  $\vec{S}$  para una onda electromagnética,  $\vec{S}$  representa la dirección del flujo de energía. (a) En un medio convencional, donde  $\epsilon > 0, \mu > 0$ . (b) En un medio izquierdo, donde  $\epsilon < 0, \mu < 0$ .

Una de las propiedades fundamentales de los NIMs es la orientación antiparalela de la velocidad de fase (o vector de onda) y la velocidad de energía (o vector de Poynting). Esta propiedad se sigue directamente de las ecuaciones de Maxwell. Como se ha visto el campo eléctrico  $\vec{E}$  y el campo magnético  $\vec{H}$  pueden ser descritos por  $\vec{E} = \vec{E}_0 \exp [i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)]$  y  $\vec{H} = \vec{H}_0 \exp [i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)]$ , respectivamente, donde  $\vec{k}$  es el vector de onda. Sustituyendo los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  dentro de las ecuaciones Maxwell y tomando en cuenta las relaciones constitutivas:

$$\nabla \times \vec{E} = i\frac{\omega}{c}\mu\vec{H}, \quad (3.2)$$

$$\nabla \times \vec{H} = -i\frac{\omega}{c}\epsilon\vec{E}, \quad (3.3)$$

$$\vec{D} = \epsilon\vec{E}, \quad (3.4)$$

$$\vec{B} = \mu\vec{H}, \quad (3.5)$$

obtenemos:

$$\vec{k} \times \vec{E} = \frac{\omega}{c}\mu\vec{H}, \quad (3.6)$$

$$\vec{k} \times \vec{H} = -\frac{\omega}{c}\epsilon\vec{E}, \quad (3.7)$$

Las Ecs. (3.6) y (3.7) sugieren que si  $\epsilon$  y  $\mu$  tienen valores positivos en el mismo rango de frecuencias, los vectores  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  y  $\vec{k}$  forman un triplete de *mano derecha* como se muestra en la Fig. 3.7(a) y el índice de refracción es positivo. El vector de Poynting usualmente es definido como:

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\vec{E} \times \vec{H}, \quad (3.8)$$

el cual es paralelo a  $\vec{k}$ , sin embargo, si se cumple la condición  $\epsilon < 0$  y  $\mu < 0$  en el mismo rango de frecuencias, los vectores  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  y  $\vec{k}$  forman un triplete de *mano izquierda* como se muestra en la Fig. 3.7(b) y el signo del índice de refracción es negativo, así el vector de Poynting,  $\vec{S}$ , en los NIMs es antiparalelo al vector de onda  $\vec{k}$ , lo cual significa que la velocidad de fase definida como  $v = \omega/k$  y la velocidad de energía tienen direcciones opuestas una de la otra, es decir, cuando una onda se propaga, la fase avanza desde el detector hacia la fuente, mientras que la energía es obviamente transferida en dirección opuesta, a continuación se muestra el efecto de los NIMs sobre algunos fenómenos físicos.

- Inversión del efecto Doppler.** En un medio convencional las ondas sonoras exhiben el efecto Doppler cuando el observador de la onda, la fuente de la onda, o ambos, se desplazan respecto al medio de propagación. En el efecto Doppler, la frecuencia ondulatoria que se observa es mayor o menor que la frecuencia emitida por la fuente de la onda [98]. En cambio cuando las ondas se propagan a través de un NRI el vector de onda cambia su signo con respecto a la situación considerada normal, es decir, los vectores de onda y velocidad son antiparalelos cuando la fuente se aproxima al observador, alterando el resultado percibido por parte del observador. En la Fig. (3.8) se ilustra la diferencia que existe entre ambos casos.



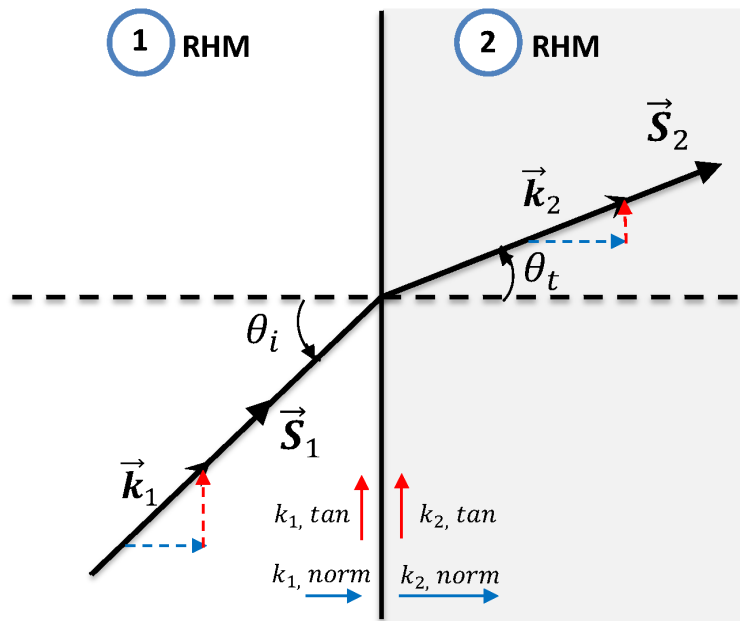
Figura 3.8: Efecto Doppler: (a) en un medio convencional, (b) en un medio con refracción negativa.

3.3. PROPIEDADES DE METAMATERIALES CON ÍNDICE DE REFRACCIÓN NEGATIVO.

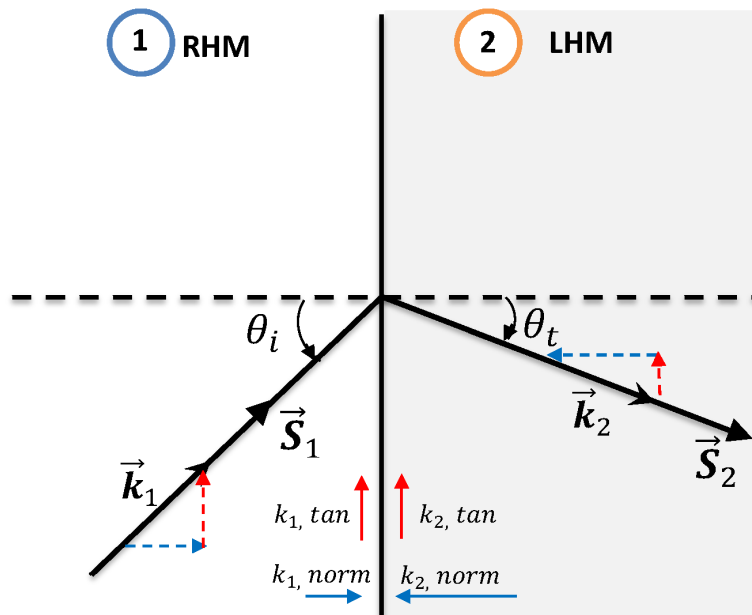
- **Inversión del efecto Cherenkov.** La radiación Cherenkov es el cono de radiación electromagnética producido cuando una partícula cargada pasa a través de un medio dieléctrico con una velocidad mayor que la velocidad de fase de la luz en ese medio. Las partículas cargadas polarizan las moléculas del medio y éstas giran rápidamente a su estado fundamental emitiendo radiación en el proceso. La radiación emitida dentro del cono tiene ángulos de salida originados en la partícula cargada, dado que el ángulo de salida depende del signo del índice de refracción, el uso de metamateriales puede invertir el resultado, tal verificación experimental ya ha sido reportada [23].
- **Ley de Snell inversa.** El cambio en el índice de refracción afecta de manera directa a la ley de Snell. El ángulo de refracción se invierte con respecto a la situación convencional cuando una onda electromagnética cruza la interfase entre dos medios que poseen signos opuestos en sus índices de refracción, Fig. 3.9(b).
- **Difracción sub-longitud de onda.** El límite de difracción de Abbe impone una restricción al mínimo tamaño de los objetos que puede resolver una lente convencional basada en materiales de índice positivo con superficies curvadas. La información contenida en los tamaños más pequeños, por debajo de la longitud de onda, se transporta mediante ondas evanescentes. Estas ondas no contribuyen a la formación de la imagen, ya que se ven fuertemente atenuadas con la distancia, quedando así confinadas a la vecindad del objeto. Un material de índice negativo con el suficiente espesor es capaz de amplificar las ondas evanescentes. En la Fig. (3.2) se muestra una comparación entre un sistema formado por una lente convencional y otro por una lente de índice negativo.
- **Capa de invisibilidad.** La propiedad de que en un metamaterial tanto  $\mu$  como  $\epsilon$  sean negativos también podría hacer a un objeto invisible, Fig. (3.10). La primera capa de invisibilidad fue diseñada y construida por Schuring, Smith y Pendry en 2006 para el rango de las microondas [26]. Actualmente las Fuerzas Armadas de distintos países dedican importantes esfuerzos de investigación y recursos económicos para conseguir reducir la detectabilidad de sus plataformas frente a los sensores utilizados por el oponente [99].
- **Gaps fotónicos.** Para determinadas frecuencias, la permitividad eléctrica  $\epsilon$  y la permeabilidad magnética  $\mu$  se anulan debido a que los metamateriales tienen una respuesta espectral altamente dispersiva. Para estas frecuencias el índice de refracción del metamaterial resulta nulo por lo que es esperable que las ondas electromagnéticas se reflejen completamente al encontrarse con un medio de dichas características.

Estructuras que contienen bloques de materiales con índice de refracción positivo y negativo presentan nuevos tipos de gaps fotónicos que no están basados en mecanismos de interferencia como los gaps de Bragg que son consecuencias intrínsecas de la periodicidad. Como primer ejemplo tenemos el gap que surge de manera natural cuando el volumen del índice de refracción efectivo promedio es igual a cero, a este tipo de bandas también se les conoce como “stop-bands”. Se ha demostrado que el gap-cero promedio es invariante ante el cambio de escala e insensible al desorden [103], tanto como se cumpla la condición  $\langle n \rangle = 0$ . Este gap también tiene la propiedad de omnidireccionalidad, Fig. (3.11).

En segundo lugar tenemos al gap que aparece como una consecuencia directa del comportamiento singular cerca de la resonancia de la permeabilidad magnética y la permitividad eléctrica efectiva de todos los metamateriales disponibles [104].



(a)



(b)

Figura 3.9: Refracción de una onda electromagnética en la interfase de dos medios diferentes. (a) Los dos medios tienen refracción positiva. (b) El medio 1 tiene refracción positiva y el medio 2 tiene refracción negativa.

CAPÍTULO 3. METAMATERIALES.

3.3. PROPIEDADES DE METAMATERIALES CON ÍNDICE DE REFRACCIÓN NEGATIVO.

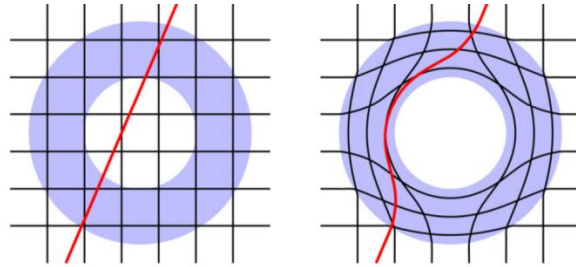


Figura 3.10: Una representación bidimensional de la transformación del espacio que corresponde a una capa esférica. (Fuente: Ben Wood, *Metamaterials and invisibility*, C. R. Physique 10, 379-390, 2009.)

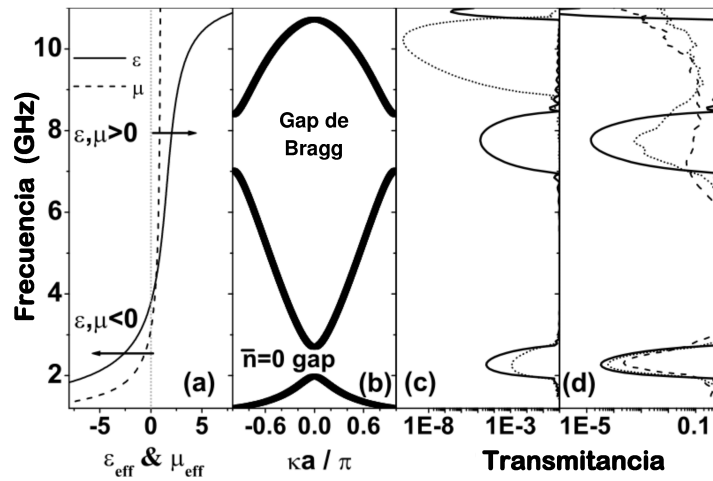


Figura 3.11: La relación de dispersión para este cristal fotónico compuesto por capas de aire y de NIM muestra que el gap de Bragg se desplaza hacia arriba en la frecuencia, sin embargo, el gap  $\langle n \rangle = 0$  se mantiene sin cambios en 2.3 GHz. (Fuente: Jensen Li, Lei Zhou, C. T. Chan, and P. Sheng, *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 90, 2003.)

## Capítulo 4

# Resultados.

Los resultados que se muestran a continuación fueron obtenidos utilizando el Método de la Matriz de Transferencia en donde las celdas se modelan a través de una combinación de capas indicadas por los símbolos (A,B), A indica a la capa modelada como dieléctrico (aire) y B representa a la capa de metamaterial con índice de refracción negativo (NIM), los anchos de las capas son iguales, éstas se alternan siguiendo diferentes relaciones de recurrencia, como son la de Fibonacci, Cantor, Thue-Morse y Rudin- Shapiro, para un número de generación dado, en cada caso se construye una celda unitaria que puede contener un número grande de capas, estas celdas se repiten periódicamente de tal forma que simula a un cuasicristal fotónico unidimensional (PQC-1D). En este proceso se hizo incidir luz en el plano de intersección aire-NIM para las distintas estructuras, se trabajó en la región de frecuencias donde se cumple que  $\mu < 0$  y  $\epsilon < 0$  simultáneamente, esta región se ha ilustrado en la Fig.(4.1) y corresponde al rango de 0 GHz – 1 GHz.

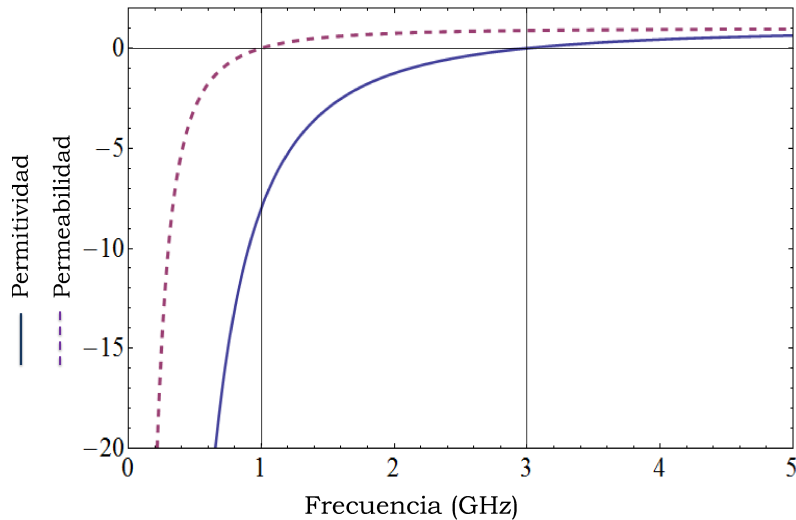


Figura 4.1: Cálculo de los parámetros efectivos  $\epsilon$  y  $\mu$ .

El índice de refracción del medio B puede ser descrito como:

$$n_B(\omega) = -\sqrt{\epsilon_B(\omega) \cdot \mu_B(\omega)} \quad (4.1)$$

donde la frecuencia angular  $\omega/2\pi$  se encuentra en unidades de GHz, el signo ‘-’ corresponde a un medio zurdo, este hecho hace posible que en el sistema de nuestro estudio se cumpla la condición de gap-cero o índice de refracción promedio cero  $\langle n \rangle = 0$  tal condición se puede expresar como [101]:

$$\frac{(n_A d_B + n_B d_A)}{(d_A + d_B)} = 0, \quad (4.2)$$

$d_A$  y  $d_B$  indican a los anchos de las películas del dieléctrico y del NIM, respectivamente,  $n_A$  y  $n_B$  a los índices de refracción en cada medio.

Como primer paso se hizo la reproducción de resultados del artículo de E. Reyes-Gómez, N. Raigoza, S. B. Cavalcanti, C. A. A. de Cervalho, L. E. Olivera [68], ésto con el fin de verificar nuestro algoritmo. Los parámetros efectivos del NIM están dados por:

$$\epsilon_B(\omega) = \epsilon_0 - \frac{\omega_e^2}{\omega^2}, \quad (4.3)$$

$$\mu_B(\omega) = \mu_0 - \frac{\omega_m^2}{\omega^2}, \quad (4.4)$$

las frecuencias de plasma toman los valores de:  $\omega_e/2\pi = 3$  GHz y  $\omega_m/2\pi = 1$  GHz, en cuanto a  $\epsilon_0$  y  $\mu_0$  les fue asignado el valor de 1.

El modelo de  $\epsilon_B(\omega)$  y  $\mu_B(\omega)$  son los propuestos por [68], un modelo más realista para estos parámetros efectivos es mostrado en [87] para dos arreglos metálicos, un alambre delgado y un resonador de anillo cortado, respectivamente.

Al sustituir en la Ec. (4.2) los parámetros propuestos por [68]  $n_B = -\sqrt{\epsilon_B(\omega)\mu_B(\omega)}$  para la cada capa de NIM y  $n_A = \sqrt{\epsilon_0\mu_0}$  para la capa de aire, tenemos:

$$\begin{aligned} \sqrt{\epsilon_0\mu_0}d_A - \sqrt{\left(\epsilon_0 - \frac{\omega_e^2}{\omega^2}\right)\left(\mu_0 - \frac{\omega_m^2}{\omega^2}\right)}d_A &= 0 \\ \sqrt{\left(\epsilon_0 - \frac{\omega_e^2}{\omega^2}\right)\left(\mu_0 - \frac{\omega_m^2}{\omega^2}\right)}d_2 &= \sqrt{\epsilon_0\mu_0}d_A \\ \left(\epsilon_0\mu_0 - \frac{\epsilon_0\omega_m^2}{\omega^2} - \frac{\mu_0\omega_e^2}{\omega^2} + \frac{\omega_e^2\omega_m^2}{\omega^4}\right)d_B^2 &= (\epsilon_0\mu_0)d_A^2 \\ \left(1 - \frac{d_A^2}{d_B^2}\right)(\epsilon_0\mu_0)\omega^4 - (\omega_m^2\epsilon_0 + \omega_e^2\mu_0)\omega^2 + \omega_e^2\omega_m^2 &= 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Reemplazando  $d_A = d_B = d$  y  $\epsilon_0 = 1, \mu_0 = 1$  en la Ec. (4.5) se obtiene:

$$(\omega_m^2 + \omega_e^2)\omega^2 - \omega_e^2\omega_m^2 = 0 \quad (4.6)$$

Al resolver esta ecuación cuadrática para  $\omega = 2\pi\nu$  y sustituir los valores  $\omega_e/2\pi = 3$  GHz y  $\omega_m/2\pi = 1$  GHz se llega al siguiente valor para  $\nu$ :

$$\nu = 0.94 \text{ GHz} . \quad (4.7)$$

El valor de  $\nu = 0.94$  GHz nos indica el rango de frecuencias del gap-cero en la estructura de bandas del sistema, como los arreglos de nuestro interés contienen NIMs es de esperarse esta dependencia inherente en la frecuencia, tal propiedad se origina del hecho de que los NIMs son estructuras resonantes, esto es,  $\mu < 0$  y  $\epsilon < 0$  ocurren en las proximidades de las resonancias eléctrica y magnética. Como resultado el índice de refracción es negativo solo en un rango de frecuencias limitado, de hecho, el mismo material puede actuar como un NIM en un rango de frecuencias y como un material convencional de refracción positiva en otras frecuencias Fig.(4.1).

### 4.1. Resultados para la estructura tipo Fibonacci.

En este apartado se realiza la reproducción de resultados de E. Reyes-Gómez, et al. [68], en la Fig. (4.2) se muestra la relación de dispersión para los órdenes 4 y 6 de Fibonacci. Las celdas unitarias correspondientes a estos órdenes son:

$$S_4 = ABAAB, \quad (4.8)$$

$$S_6 = ABAABABA ABAAB, \quad (4.9)$$

donde A indica a la capa modelada como aire y B a la capa modelada como NIM en la estructura.

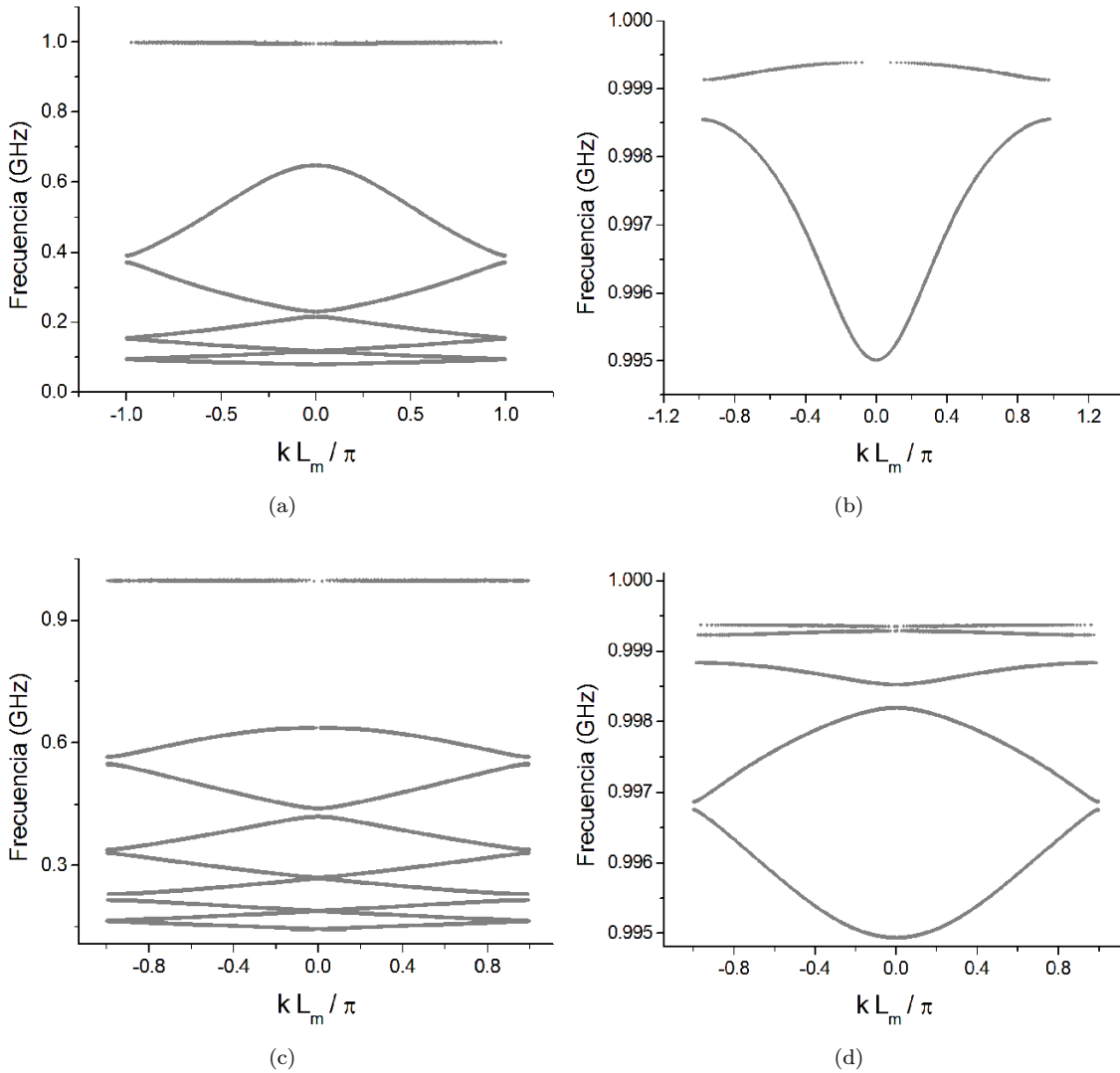


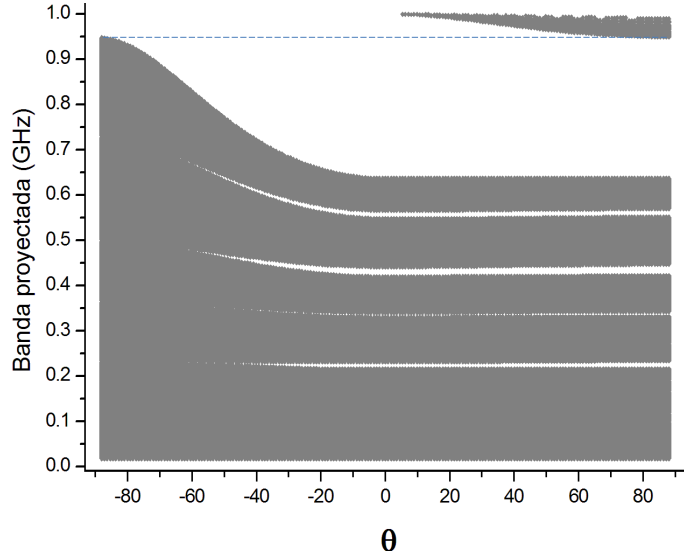
Figura 4.2: Modo TE. Relación de dispersión  $\nu = \nu(k)$  a un ángulo de incidencia  $\theta = 15^\circ$ . (a) Orden de generación 4 de Fibonacci, (c) orden de generación 6 de Fibonacci.

En las Figs.4.2(b) y 4.2(d) se muestra un reescalamiento en el rango de frecuencias 0.995 GHz – 1.000 GHz como resultado de esto se obtuvo el gráfico reportado por [68] para el modo TE. Al

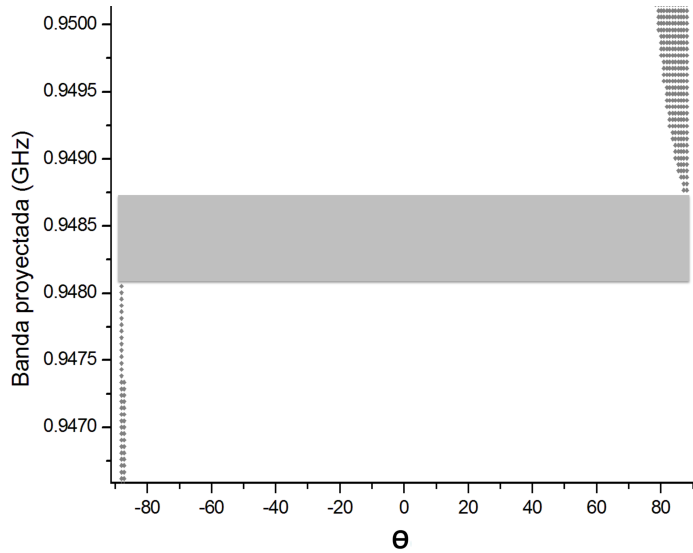
**CAPÍTULO 4. RESULTADOS.**

**4.1. RESULTADOS PARA LA ESTRUCTURA TIPO FIBONACCI.**

aumentar el orden de generación observamos que la relación de dispersión muestra desdoblamientos mayores como se observa al comparar las Figs.4.2(a) y 4.2(c), los gaps que presenta la relación de dispersión son muy estrechos como se ha reportado [16]. Los desdoblamientos de las bandas muestran autosimilaridad.



(a) Bandas proyectadas para polarización TE(derecha) y TM (izquierda), orden de generación 6.



(b) Reescalamiento,  $\langle n(w) \rangle = 0$ .

Figura 4.3: Diagrama de bandas proyectadas para un PQC-1D tipo Fibonacci.

La Fig.(4.3) presenta la evolución de las bandas permitidas en función de  $\theta$ , en este gráfico se muestra el gap-cero omnidireccional, el cual tiene un ancho  $\Delta = 6.65 \times 10^{-4}$  GHz, esta brecha se ubica alrededor de 0.94 GHz, que corresponde a la frecuencia donde se cumple la condición de gap-cero Ec. (4.2). La Fig.4.3(b) muestra una ampliación en esta zona de frecuencias, los ángulos negativos se utilizaron solamente para fines de graficado, el rango que indica a las bandas proyec-

tadas para polarización TM es de  $-90^\circ$  a  $0^\circ$  y el rango respectivo a las bandas proyectadas para polarización TE es de  $0^\circ$  a  $90^\circ$ .

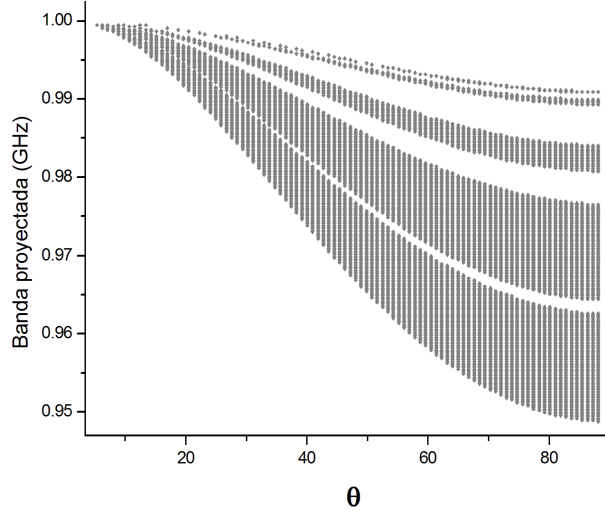


Figura 4.4: Bandas proyectadas para polarización TE, estructura tipo Fibonacci, orden de generación 6.

En la Fig. (4.4) se presenta un reescalamiento de las bandas proyectadas para la polarización TE, las cuales se hallan sobre el gap-cero omnidireccional mostrado en la Fig. (4.3) en el rango de frecuencias 0.9487 GHz – 1.0000 GHz.

La Fig.4.5(a) muestra como se abren las bandas generando pequeños gaps, esto es consecuencia de la ruptura de la periodicidad ocasionada por la relación de recurrencia, este diagrama se obtuvo en el rango de frecuencias 0.9487 GHz – 1.0000 GHz, el número de bandas permitidas que aparecen se muestra en la tabla (4.1), en ésta se observa que las bandas proyectadas de la Fig.4.5(a) se desdoblan de acuerdo a la relación de recurrencia de los números de Fibonacci.

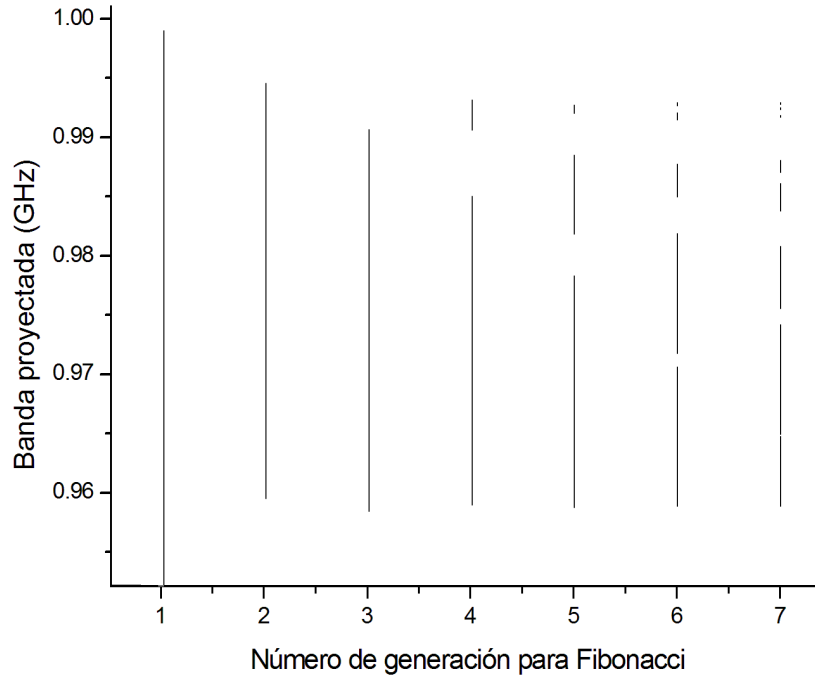
Orden de Fibonacci $S_m$	No. de bandas	No. capas
$S_2$	1	2
$S_3$	1	3
$S_4$	2	5
$S_5$	3	8
$S_6$	5	13
$S_7$	8	21

Tabla 4.1: Desdoblamiento de bandas proyectadas para un PQC-1D tipo Fibonacci (0.9487 GHz – 1.0000 GHz).

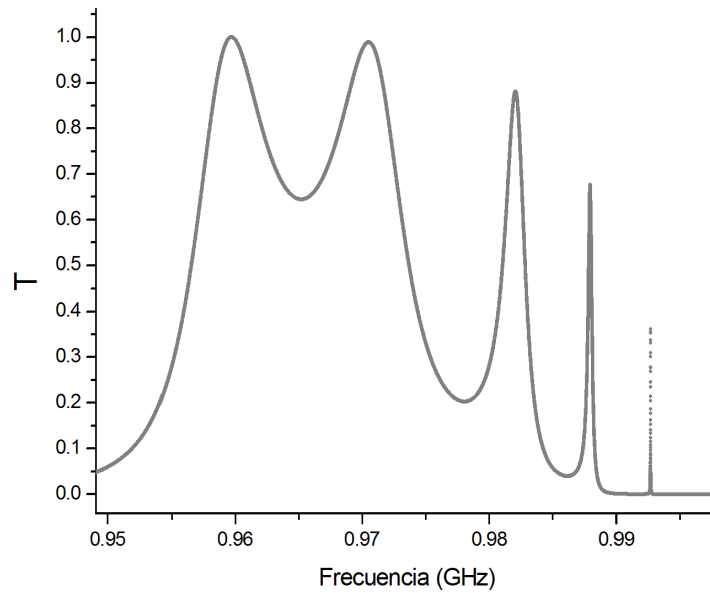
Finalmente se muestra en la Fig.4.5(b) el espectro de transmisión correspondiente a la a la Fig. (4.4), en este espectro no se toma en cuenta la absorción del material.

**CAPÍTULO 4. RESULTADOS.**  
**4.1. RESULTADOS PARA LA ESTRUCTURA TIPO FIBONACCI.**

---



(a) Estructura de bandas para polarización TE en función del número de generación para Fibonacci.



(b) Espectro de transmisión para polarización TE correspondiente a la estructura tipo Fibonacci, número de generación 6.

Figura 4.5: Ambos diagramas fueron calculados para un ángulo de incidencia  $\theta = 60^\circ$ .

## 4.2. Resultados para la estructura tipo Cantor.

Aunque el conjunto de Cantor en su construcción geométrica parece muy sencillo en realidad es un objeto fractal en sí mismo, esta propiedad fractal se muestra en los siguientes diagramas. En la Fig.(4.6) se observa como el desdoblamiento de las bandas tiene un patrón que se repite a menor escala, si se aumenta el orden de generación para la estructura de Cantor la relación de dispersión es densa en gaps estrechos y el carácter fractal es más notorio.

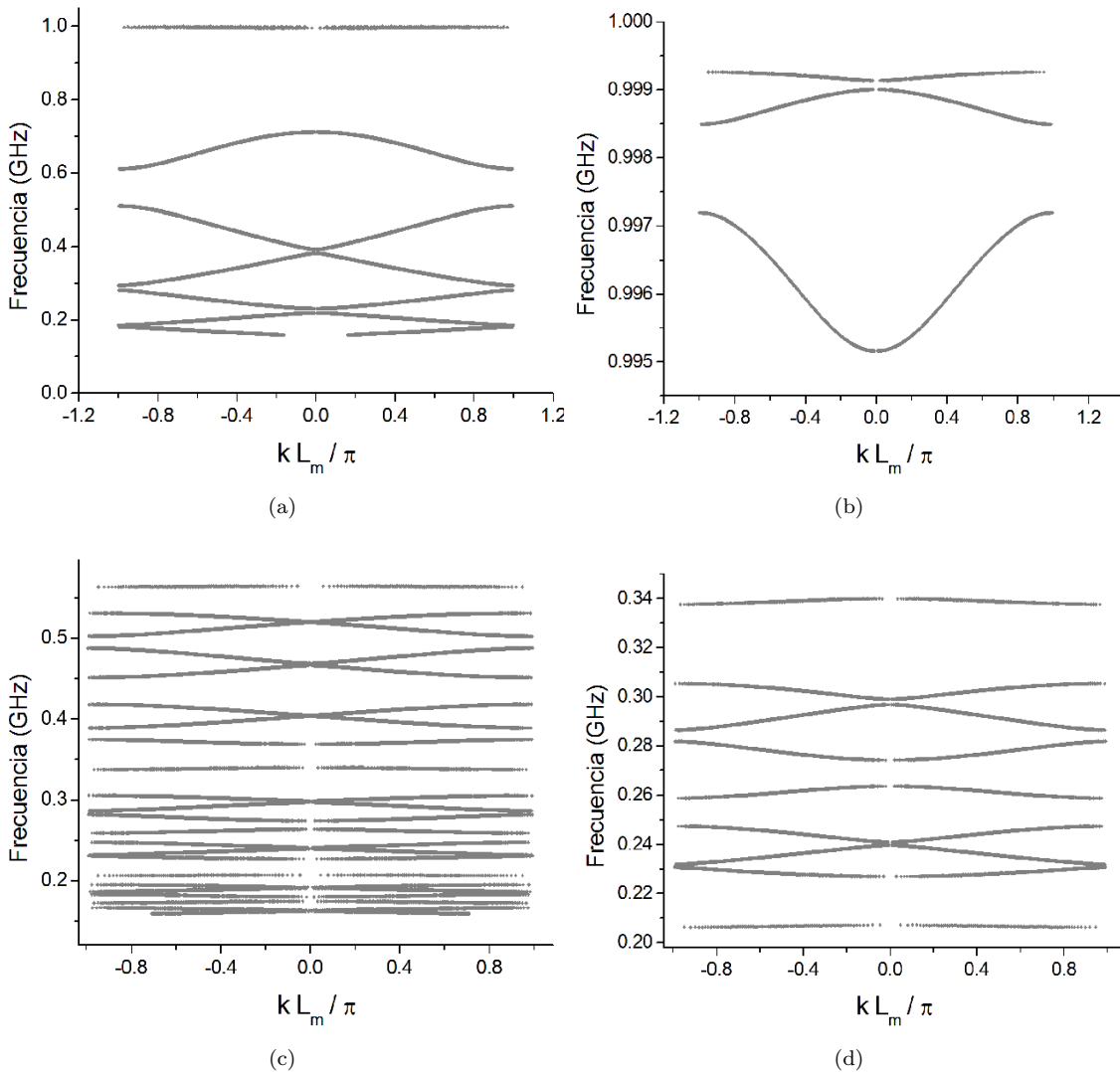


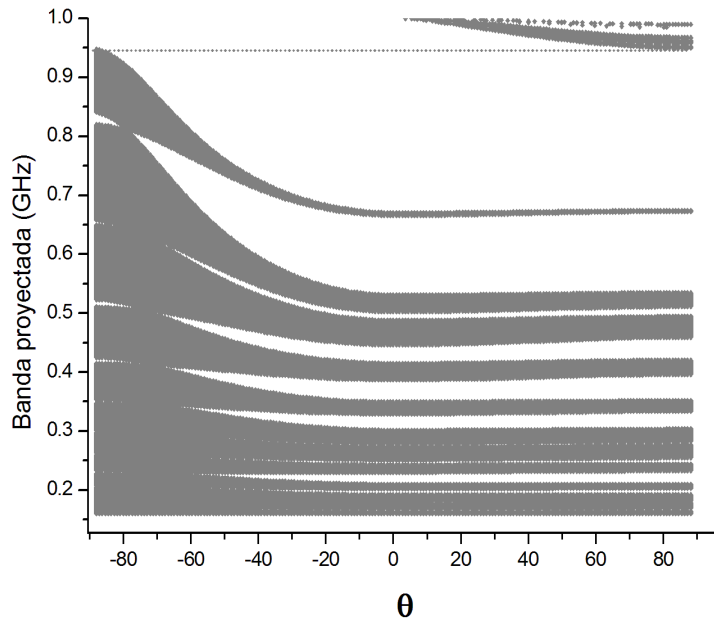
Figura 4.6: Modo TE. Relación de dispersión  $\nu = \nu(k)$  a un ángulo de incidencia  $\theta = 15^\circ$ . (a) Orden de generación 2 de Cantor, (c) orden de generación 4 de Cantor.

Las Figs.4.6(b) y 4.6(d) muestran ampliaciones en la zona de frecuencias 0.995 GHz–1.000 GHz y 0.20 GHz–0.34 GHz, respectivamente.

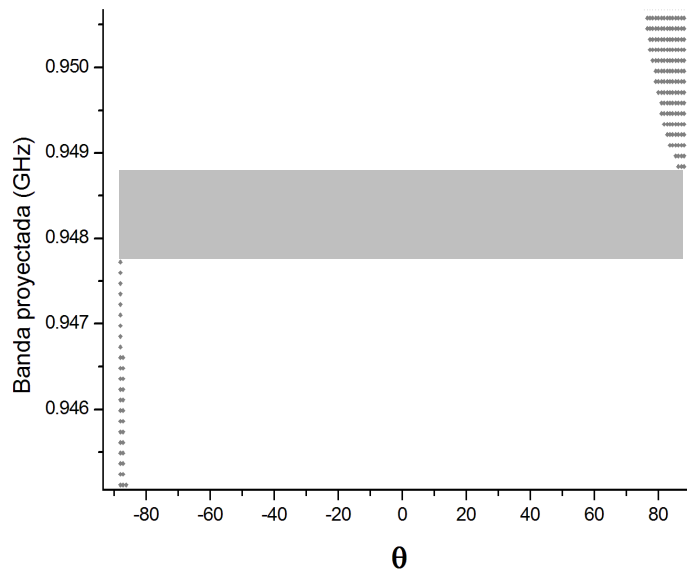
La Fig. (4.7) es generada para el orden 3 de Cantor, la celda unitaria que forma esta estructura

**CAPÍTULO 4. RESULTADOS.**  
**4.2. RESULTADOS PARA LA ESTRUCTURA TIPO CANTOR.**

---



(a) Bandas proyectadas para polarización TE (derecha) y TM (izquierda), orden de generación 3.



(b) Reescalamiento,  $\langle n(w) \rangle = 0$ .

Figura 4.7: Diagrama de bandas proyectadas para un PQC-1D tipo Cantor.

tiene un total de 27 capas y es de la forma:

$$S_3 : BABAAABAB AAAAAAAAA BABAAABAB . \quad (4.10)$$

Cada orden de generación en la estructura de Cantor crece como  $3^n$  donde  $n$  es el número de Cantor ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), el orden  $n = 0$  indica que hay una sola capa de material el cual es modelado como una capa de NIM representada por el símbolo B para los cálculos en esta sección. El diagrama de bandas Fig. (4.7) correspondiente a esta celda unitaria muestra la evolución de las bandas permitidas en función de  $\theta$ , en esta figura se expone el gap-cero omnidireccional, el cual posee un ancho de  $\Delta = 1.078 \times 10^{-3}$  GHz y se ubica alrededor de 0.94 GHz.

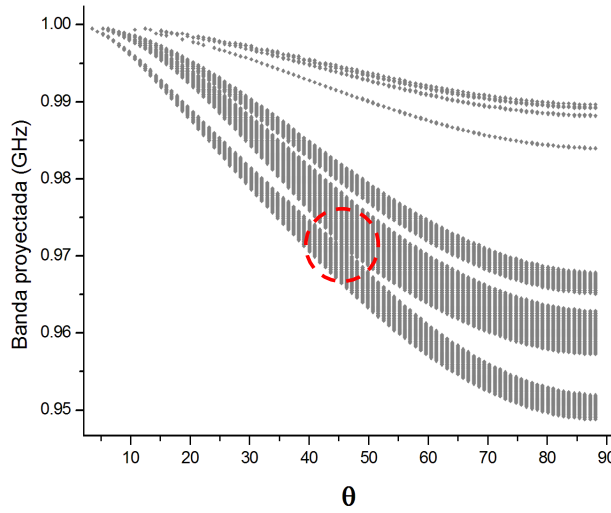


Figura 4.8: Bandas proyectadas para polarización TE, estructura tipo Cantor, número de generación 3.

En la Fig. (4.8) se presenta un reescalamiento de las bandas proyectadas correspondientes a la polarización TE que se hallan sobre el gap-cero omnidireccional mostrado en la Fig. (4.7), esta ampliación se realizó en el rango de frecuencias 0.9488 GHz – 1.000 GHz, observe que el ancho de la banda prohibida (resaltada con la circunferencia punteada) disminuye a medida que aumenta  $\theta$  hasta desaparecer por completo en las cercanías de  $\theta \approx 46^\circ$  donde los bordes se cruzan y la banda aumenta su ancho repentinamente, este cruce es debido a la condición de igualdad de impedancias  $\eta_1 = \eta_2$  [87]:

$$\eta_i = \sqrt{\frac{\mu_i}{\epsilon_i}}, \quad (4.11)$$

donde  $\eta_i$  es la impedancia intrínseca del medio  $i$  ( $i = 1, 2$ ). Este cruce que presenta la banda prohibida físicamente muestra que a pesar de haber capas de NIM en la estructura, la luz se transmite en ésta como si lo hiciera en un medio transparente para algunas regiones.

En la Fig. (4.9) se muestra la fragmentación del ancho de las bandas proyectadas en el rango de frecuencias 0.9488 GHz – 1.000 GHz, en función del número de generación para Cantor.

Finalmente en la Fig.(4.10) se presenta el espectro de transmisión, correspondiente a la Fig. (4.8) para un ángulo de incidencia dado sin considerar absorción del medio.

**CAPÍTULO 4. RESULTADOS.**  
**4.2. RESULTADOS PARA LA ESTRUCTURA TIPO CANTOR.**

---

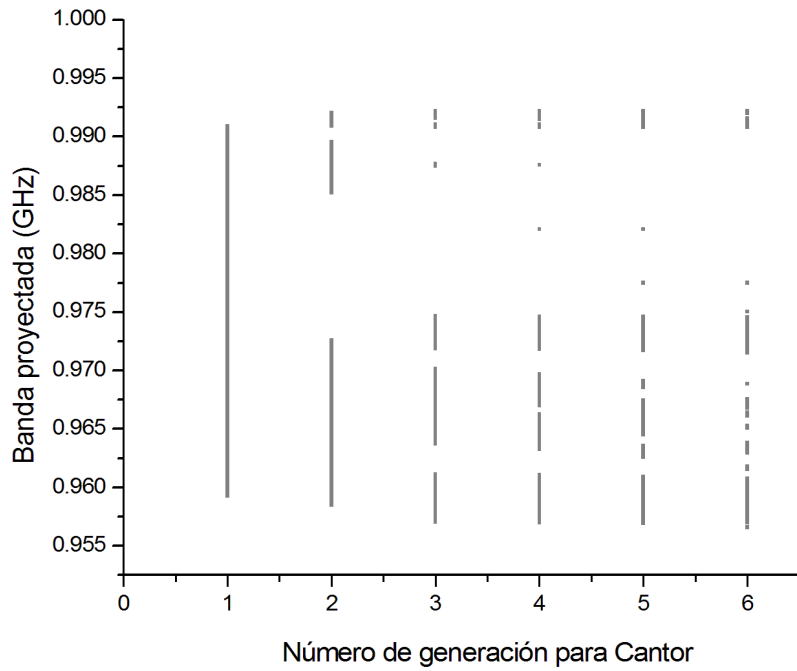


Figura 4.9: Estructura de bandas para polarización TE en función del número de generación para Cantor a un ángulo de incidencia  $\theta = 60^\circ$ .

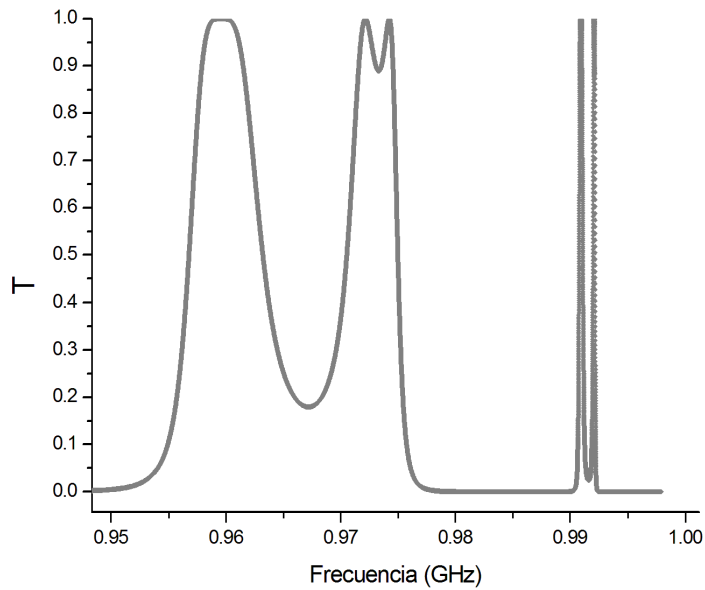


Figura 4.10: Espectro de transmisión para polarización TE correspondiente a la estructura tipo Cantor, número de generación 4 a un ángulo de incidencia  $\theta = 60^\circ$ .

### 4.3. Resultados para la estructura tipo Thue-Morse.

La secuencia binaria de Thue-Morse en una dimensión es autosimilar, esta propiedad también se observa en el desdoblamiento de las bandas mostradas en las Fig. (4.11) las cuales fueron obtenidas a partir de celdas unitarias basadas en esta secuencia.

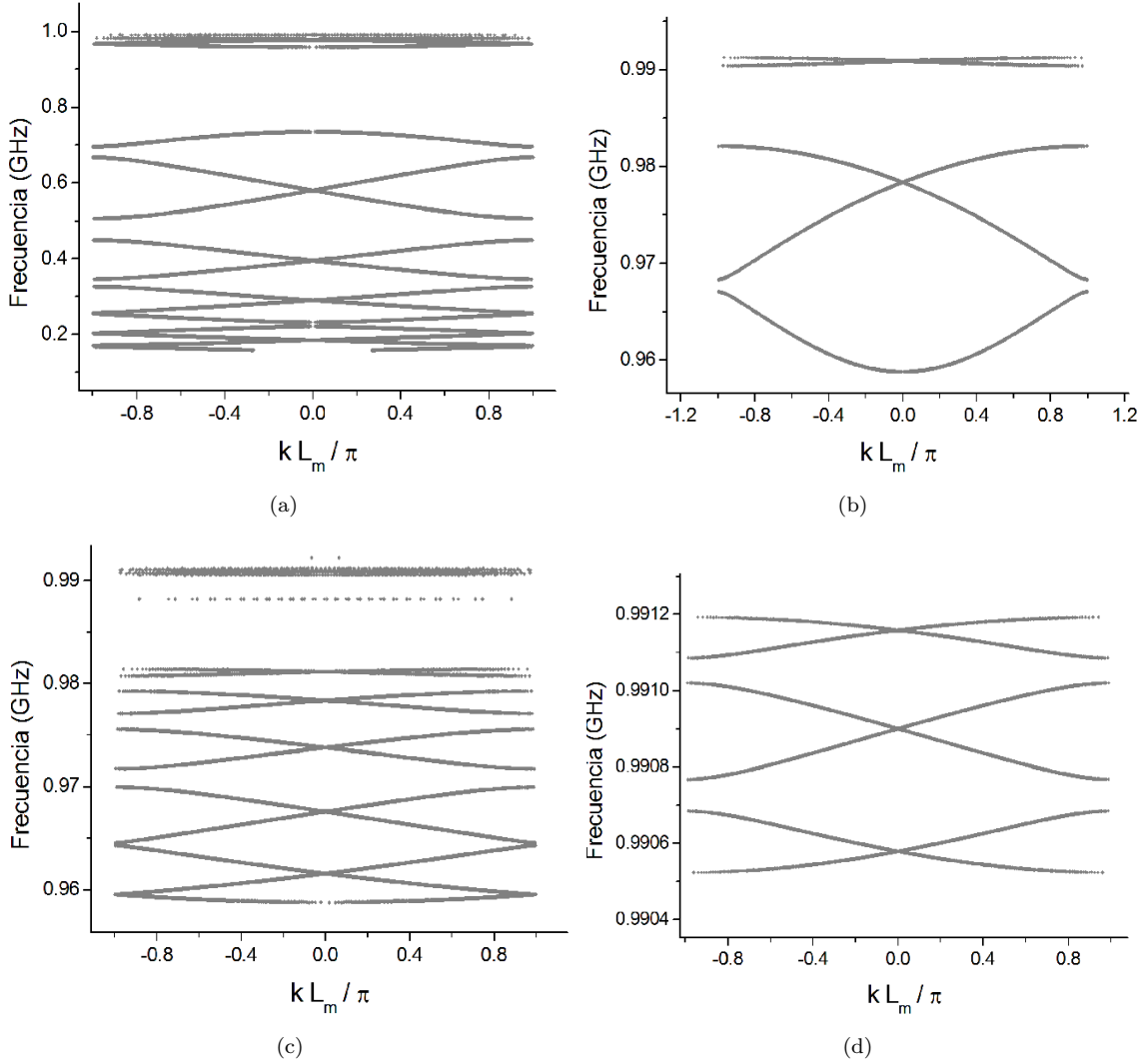
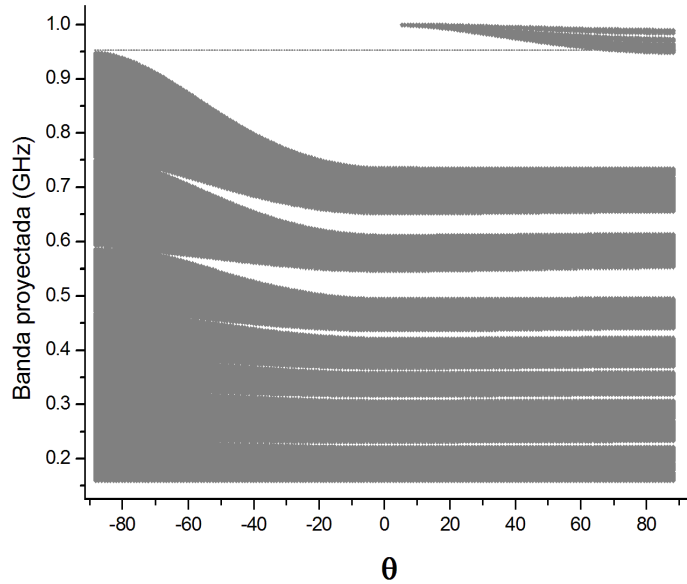


Figura 4.11: Modo TE. Relación de dispersión  $\nu = \nu(k)$  a un ángulo de incidencia  $\theta = 60^\circ$ . (a) Orden de generación 4 de Thue-Morse, (c) orden de generación 6 de Thue-Morse.

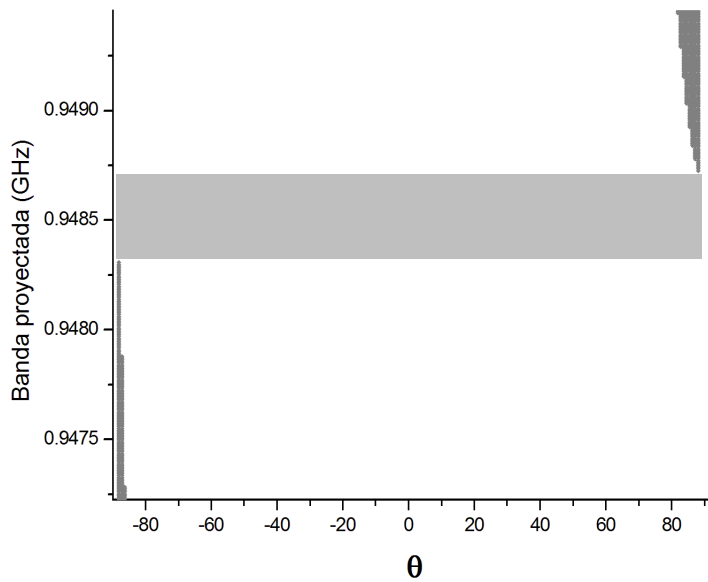
Al aumentar el número de generación de Thue-Morse el desdoblamiento de las bandas crece considerablemente, debido a esto en la Fig.4.11(c) se optó por graficar en un rango de frecuencias donde se apreciara de un modo más claro el desdoblamiento de las bandas para la estructura generada a partir del orden 6 de Thue-Morse, el rango de frecuencias elegido fue el mismo que el respectivo al reescalamiento en la Fig.4.11(b) de 0.960 GHz – 1.000 GHz, una vez obtenido este gráfico se realizó un reescalamiento en el rango de frecuencias 0.9906 GHz – 0.9912 GHz, el cual se muestra en la Fig.4.11(d), las bandas presentadas aquí mostraron un comportamiento fractal.

**CAPÍTULO 4. RESULTADOS.**  
**4.3. RESULTADOS PARA LA ESTRUCTURA TIPO THUE-MORSE.**

---



(a) Bandas proyectadas para polarización TE(derecha) y TM(izquierda), orden de generación 5.



(b) Reescalamiento,  $\langle n(w) \rangle = 0$ .

Figura 4.12: Diagrama de bandas proyectadas para un PQC-1D tipo Thue-Morse.

**CAPÍTULO 4. RESULTADOS.**  
**4.3. RESULTADOS PARA LA ESTRUCTURA TIPO THUE-MORSE.**

---

La celda unitaria para la Fig.4.12(a) contiene 32 capas y es generada para el orden 5 de Thue-Morse, esta celda se puede modelar como sigue:

$$S_5 = BAAB ABBA ABBA BAAB ABBA BAAB BAAB ABBA , \quad (4.12)$$

en este tipo de estructuras cada orden de generación crece como  $2^m$  donde  $m$  indica al número de Thue-Morse ( $m = 1, 2, 3, \dots$ ). En la Fig. (4.12) se muestra el gap-cero omnidireccional, indicado con la línea punteada, esta brecha tiene un ancho  $\Delta = 4.09 \times 10^{-4}$  GHz y se ubica alrededor de 0.94 GHz como puede observarse en la Fig.4.12(b).

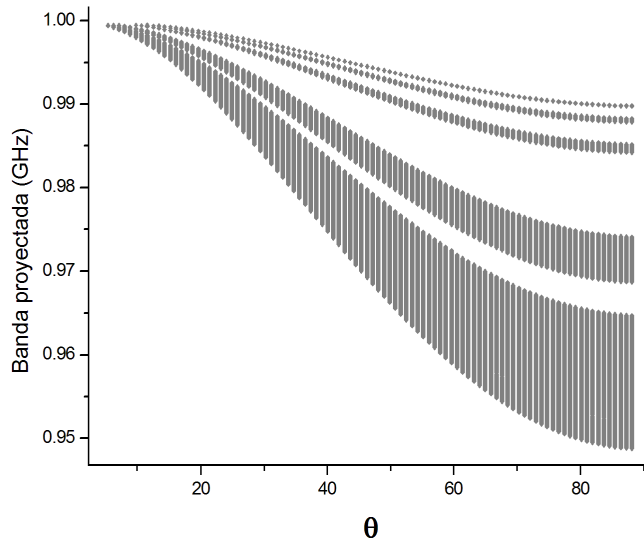


Figura 4.13: Bandas proyectadas para polarización TE, estructura tipo Thue-Morse, número de generación 5.

En la Fig. (4.13) se presenta un reescalamiento de las bandas correspondientes a la polarización TE las cuales se encuentran sobre el gap-cero omnidireccional en la Fig. (4.12) y han sido calculadas para el rango de frecuencias 0.95 GHz – 1.00 GHz.

No. de Thue-Morse $S_m$	No. de bandas	No. capas
$S_1$	1	2
$S_2$	1	4
$S_3$	2	8
$S_4$	3	16
$S_5$	5	32
$S_6$	8	64

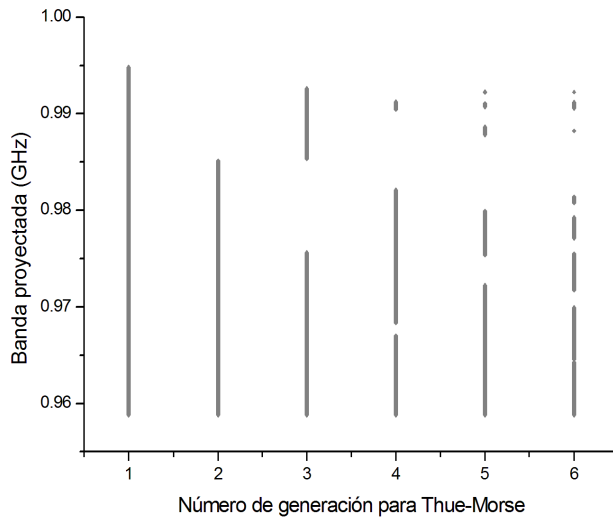
Tabla 4.2: Desdoblamiento de bandas proyectadas para un PQC-1D tipo Thue-Morse (0.9487 GHz – 1.0000 GHz).

La Fig.4.14(a) muestra el ancho de las bandas proyectadas para números consecutivos de Thue-Morse en el rango de frecuencias 0.95 GHz – 1.00 GHz, observe que los anchos de banda de las Figs. (4.13) y 4.14(a) son iguales a un ángulo de incidencia  $\theta = 60^\circ$  para el orden 5 de Thue-Morse.

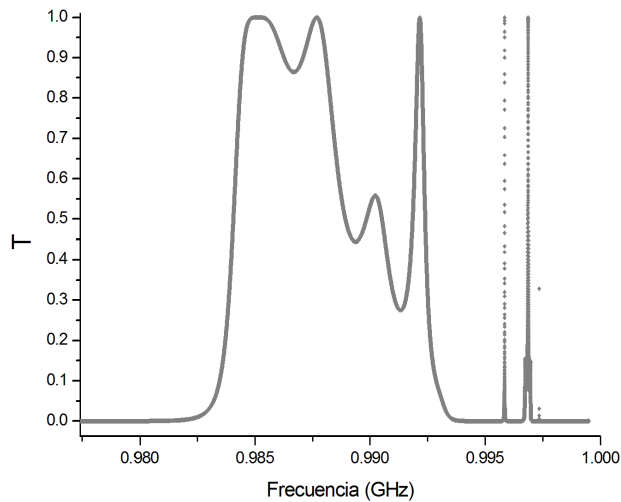
## CAPÍTULO 4. RESULTADOS.

### 4.3. RESULTADOS PARA LA ESTRUCTURA TIPO THUE-MORSE.

Finalmente la Fig.4.14(b) muestra el espectro de transmisión, sin considerar absorción del material, correspondiente a la Fig. (4.13), a un ángulo de incidencia fijo.



(a) Estructura de bandas en función del número de generación para Thue-Morse a un ángulo de incidencia  $\theta = 60^\circ$ .



(b) Espectro de transmisión para una estructura tipo Thue-Morse  $S_5$  a un ángulo de incidencia  $\theta = 30^\circ$ .

Figura 4.14: Ambos diagramas fueron calculados para polarización TE.

### 4.4. Resultados para la estructura tipo Rudin-Shapiro.

La sucesión de Rudin-Shapiro es considerada como una sucesión autosimilar en una dimensión, este comportamiento fractal también se observa en el desdoblamiento de las bandas mostrados en la Fig. (4.15) obtenidas a partir de una estructura cuya construcción esta basada en esta secuencia binaria.

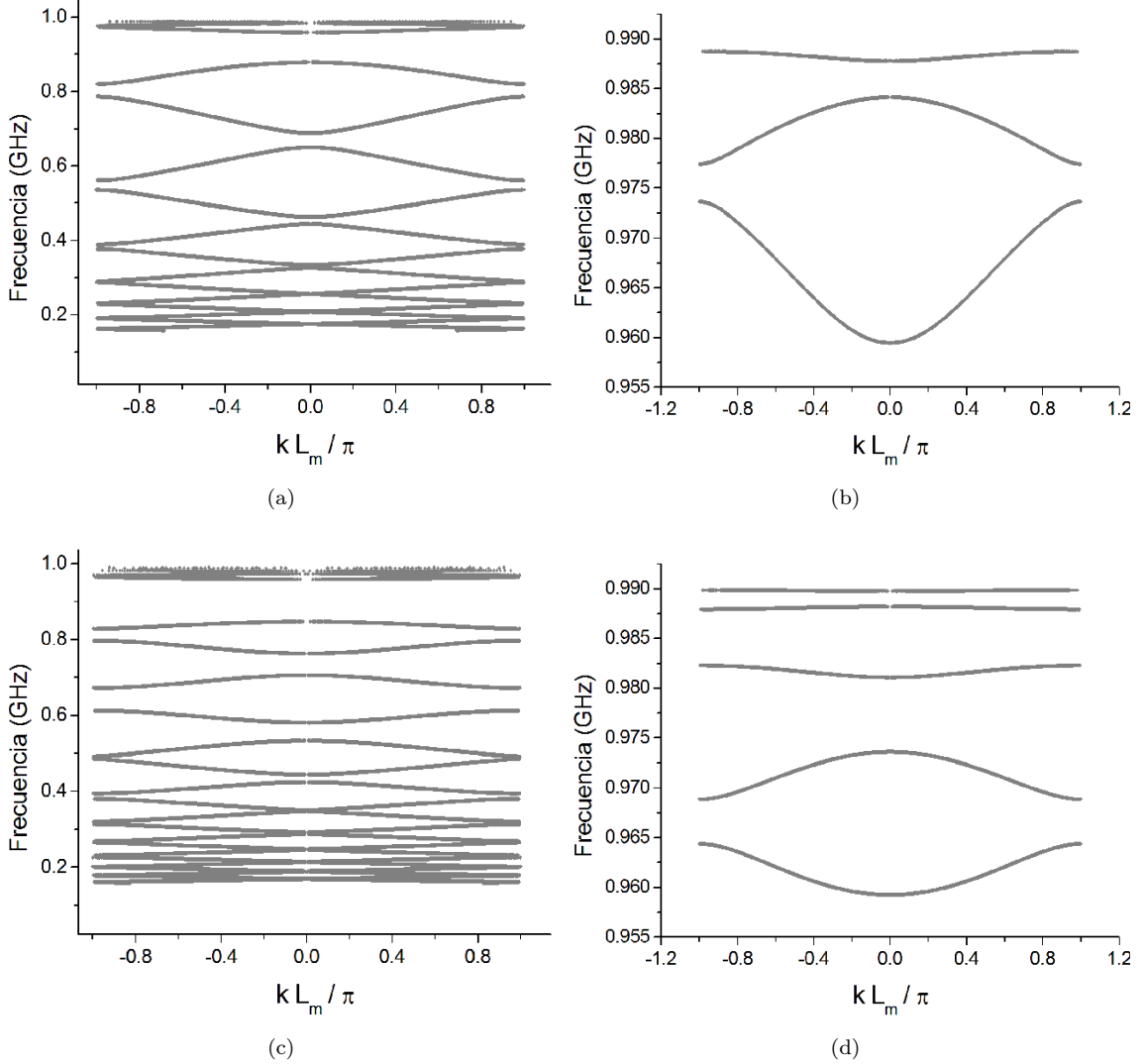
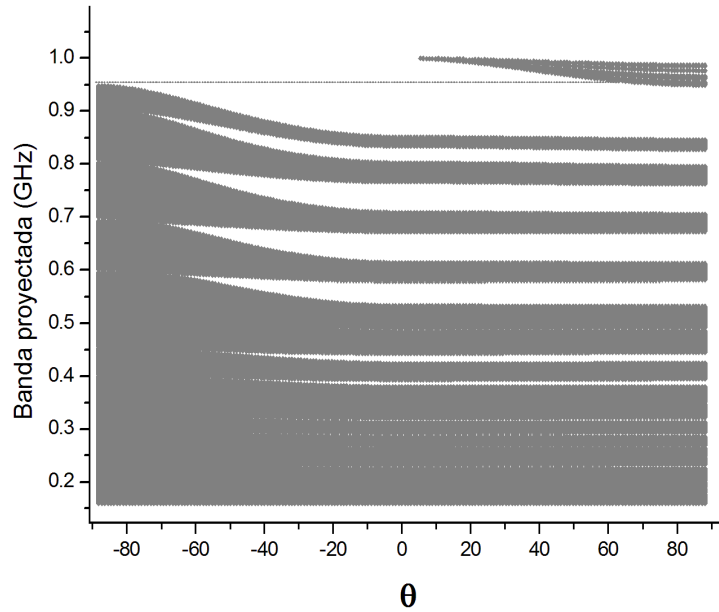


Figura 4.15: Modo TE. Relación de dispersión  $\nu = \nu(k)$  a un ángulo de incidencia  $\theta = 60^\circ$ . (a) Orden de generación 3 de Rudin-Shapiro, (c) orden de generación 5 de Rudin-Shapiro.

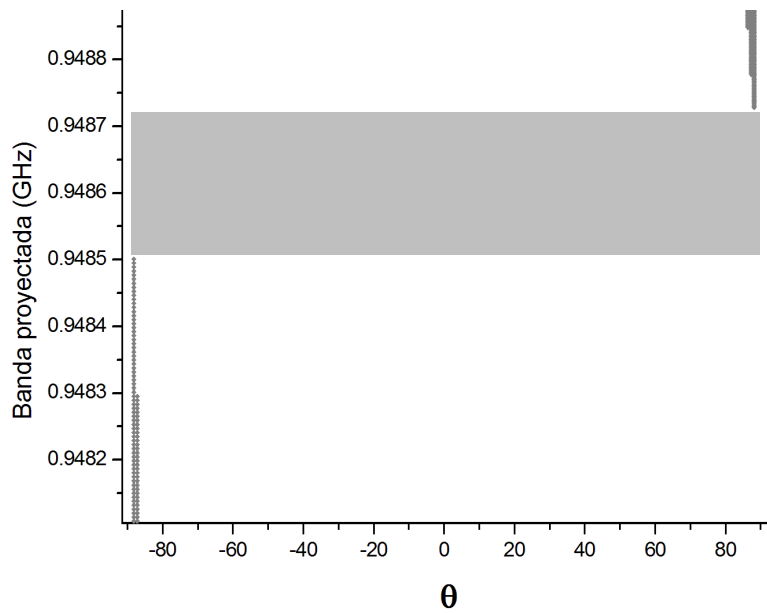
De las Figs.4.15(a) y 4.15(c) se observa como el desdoblamiento de bandas es mayor al aumentar el orden de generación para la estructura de Rudin-Shapiro, el modelo para las celdas unitarias en este diagrama de bandas es el siguiente:

$$S_3 = BBBA BBAB BBBA , \tag{4.13}$$

$$S_5 = BBBA BBAB BBBA AABA BBBA , \tag{4.14}$$



(a) Bandas proyectadas para polarización TE (derecha) y TM (izquierda), orden de generación 5.



(b) Reescalamiento,  $\langle n(w) \rangle = 0$ .

Figura 4.16: Diagrama de bandas proyectadas para un PQC-1D tipo Rudin-Shapiro.

donde A representa a la capa modelada como aire y B a la capa modelada como NIM. Las Figs.4.15(b) y 4.15(d) muestran una ampliación en el rango de frecuencias 0.955 GHz – 0.990GHz.

Cada orden de generación en este modelo crece como  $4^r$  donde  $r$  indica al número de Rudin-Shapiro ( $r = 1, 2, 3, \dots$ ), los ángulos con valores negativos son utilizados aquí únicamente para fines de graficado, esto es, el rango  $-90^\circ$  a  $0^\circ$  indica al caso de bandas proyectadas para polarización TM y el rango de  $0^\circ$  a  $90^\circ$  indica a las bandas proyectadas para en caso de la polarización TE. En la Fig. (4.16) se muestra el gap-cero omnidireccional, indicado con la línea punteada, el cual tiene un ancho  $\Delta = 2.57 \times 10^{-4}$  GHz y se ubica alrededor de 0.94 GHz, la Fig.4.16(b) muestra una ampliación en el rango de frecuencias 0.9482 GHz – 0.9488 GHz para este gap-cero omnidireccional.

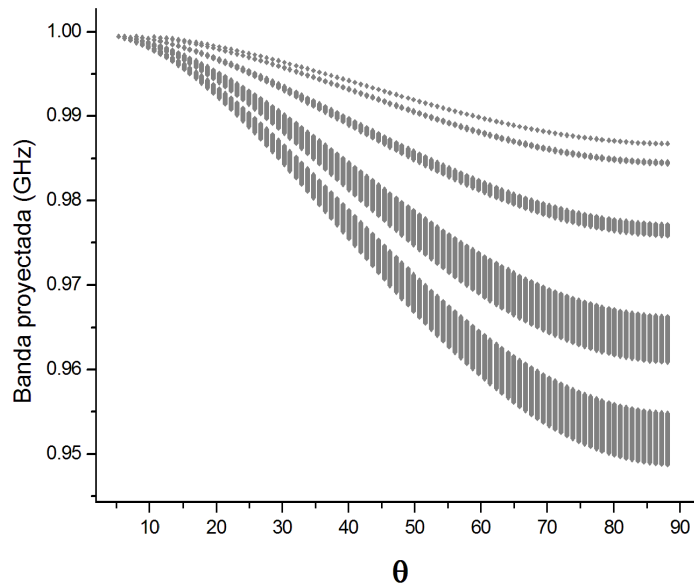


Figura 4.17: Bandas proyectadas para polarización TE, orden de generación 5 para una estructura tipo Rudin-Shapiro.

En la Fig. (4.17) se presenta un reescalamiento de las bandas correspondientes a la polarización transversal eléctrica (TE) calculadas para el rango de frecuencias 0.95 GHz – 1.00 GHz, estas bandas son las que se encuentran sobre el gap-cero omnidireccional ya mostrado en la Fig. (4.16).

En la Fig. (4.18) se muestra el ancho de las bandas proyectadas en el rango de frecuencias 0.96 GHz – 1.00 GHz esto se realizó para corroborar nuestros resultados y analizar la fragmentación del ancho de banda conforme crece el número de Rudin-Shapiro a un ángulo de incidencia dado. Observe que el ancho de banda en la Fig. (4.17) para un ángulo de incidencia  $\theta = 60^\circ$  y el ancho de banda mostrado en la Fig. (4.18) para un orden de generación 5 son iguales.

Finalmente la Fig. (4.19) muestra el espectro de transmisión correspondiente a la Fig. (4.17) observe como la transmisión de luz disminuye considerablemente en este rango de frecuencias si lo comparamos con las Figs.4.5(b), 4.10(b) y 4.14(b). Este espectro de transmisión fue calculado sin considerar absorción del material.

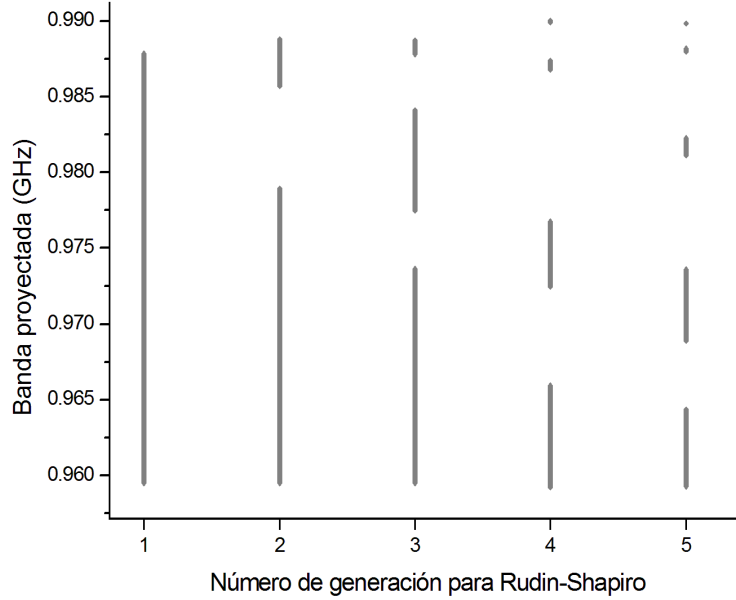


Figura 4.18: Estructura de bandas para polarización TE en función del número de generación para Rudin-Shapiro para un ángulo de incidencia  $\theta = 60^\circ$ .

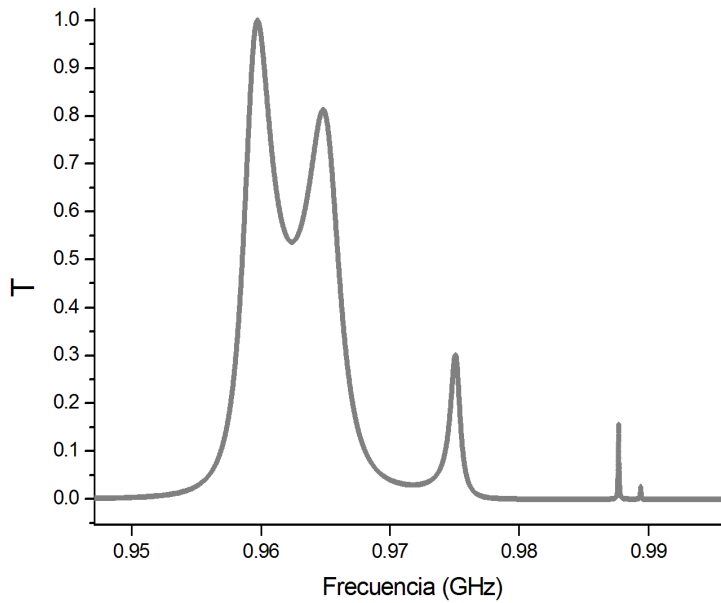


Figura 4.19: Espectro de transmisión para polarización TE correspondiente a la estructura tipo Rudin-Shapiro, número de generación 5 para un ángulo de incidencia  $\theta = 60^\circ$ .

# Capítulo 5

## Conclusiones.

En este trabajo se ha hecho una revisión y análisis de cuasicristales fotónicos para diversas relaciones de recurrencia, al menos las más discutidas en la literatura hasta ahora. Para ello se hizo una descripción de los métodos matemáticos usados en los cálculos, se definieron las diversas relaciones de recurrencia y se describió como se aplican éstas en la construcción de los cuasicristales. Las estructuras fueron construidas con capas alternadas de dieléctricos y metamateriales con índice de refracción negativo, estos últimos por su reciente creación fueron descritos en un capítulo. De lo anterior podemos establecer las siguientes conclusiones:

1.- Se observó un comportamiento fractal en las estructuras de bandas de todos los cuasicristales analizados aquí.

2.- Al aumentar el orden de generación para todas las estructuras el número de bandas que se desdobra es mayor y los gaps que aparecen en éstas son en su mayoría densos y estrechos, solo para la Fig. (4.15) el ancho de los gaps es mayor cuando se aumenta el orden de generación.

3.- Las bandas proyectadas para la polarización TE y TM para la estructura de Fibonacci tiene gaps muy estrechos en general, Fig. (4.3), contrario los gaps de Rudin-Shapiro Fig. (4.16) los cuales resultaron ser más anchos, éstos van aumentando su grosor conforme crece la frecuencia en el rango de 0.1 GHz – 0.85 GHz. Ambas estructuras fueron realizadas para el orden de generación 5, sólo que para Fibonacci este orden corresponde a una celda unitaria con 13 capas componentes, en cambio, para Rudin-Shapiro la celda unitaria contiene 20 capas, observe que a pesar de que esta última celda unitaria tiene más capas los gaps no son tan estrechos como los que aparecen en el diagrama de bandas proyectadas de Fibonacci.

4.- Las cuatro estructuras cuasiperiódicas exhibieron un gap-cero omnidireccional alrededor de 0.94 GHz. El hecho de que el gap-cero omnidireccional aparezca en la vecindad de 0.94 GHz es consecuencia de la Ec. (4.2).

5.- La estructura que presentó el gap-cero omnidireccional de un grosor mayor fue la estructura de Cantor, esto quiere decir que para un rango mayor de frecuencias la estructura de Cantor tiene un comportamiento de reflector omnidireccional. Este hecho consideramos obedece a que las condiciones de la estructura llevan a reducir el número de frecuencias permitidas para la propagación y por tanto el gap es mayor.

6.- Las estructuras también manifestaron gaps de Bragg los cuales cambian en tamaño y posición al variar el ángulo de incidencia, el tipo de polarización y el orden de generación para las diferentes estructuras.

7.- De la Fig.4.5(a) y la tabla (4.1) se observa que los anchos de las bandas se desdoblan de acuerdo al número total de capas  $S_{m-2}$ , note además que de la tabla (4.2) se deduce que los anchos

## CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES.

---

de banda de Thue-Morse se desdoblan de acuerdo a los números de Fibonacci, lo cual se deriva del hecho de que la sucesión de Thue-Morse se puede obtener a partir de la sucesión de Fibonacci.

8.- Los espectros de transmisión de Fibonacci y de Rudin-Shapiro Figs.4.5(b) y 4.19 comparten la propiedad de que conforme la frecuencia aumenta el coeficiente de transmisión disminuye.

# Bibliografía

- [1] George Sarton, *Ciencia antigua y civilización moderna*, México: Fondo de cultura económica, (1960).
- [2] John D. Joannopoulos, Robert D. Meade, Joshua N. Winn, *Photonic Crystals-Molding the Flow of Light*, Princeton University Press, Singapore (2008).
- [3] Kazuaki Sakoda, *Optical Properties of Photonic Crystals*, Srpinge-Verlag Berlin Heidelberg (2005).
- [4] S. Ya. Vetrova, I. V. Timofeevb, and N. V. Rudakova, *Physics of the Solid State*, Vol.53, (2011).
- [5] H. Kinto-Ramírez, M. A. Palomino-Ovando y F. Ramos-Mendieta, *PIER B*, Vol. 35, (2011).
- [6] Eli Yablonovitch, *Photonic Crystals: semiconductors of light.*, Scientific American, Inc., (2001).
- [7] Joshua N. Winn, Yoel Fink, Shanhui Fan, and J. D. Joannopoulos, *Opt. Lett.* Vol. 23, (1998).
- [8] Juan Corral Aguirre, *Revista de Divulgación Científica y Tecnológica de la Universidad Veracruzana*, Vol. 16. No. 1. (2003).
- [9] Juan P. Vasco, Herbert Vink-Posada, *Rev. Tecnológicas*, No. 24, julio (2010).
- [10] Gerard G. Naumis, *Temas de Física/ No mundo*, RUISF Agosto (2006).
- [11] M. Khaidar, C.H. Allibert, J. Driole, *Z. Metkd.* 73, 433–438, (1982).
- [12] R. D. Werkman, P. J. Schurer and F. van der Woude., *Quasicrystals*, Hyperfine Interactions 53, (1990).
- [13] Paolo M. Ossi, *Disordered Materials-An Introduction*, Second Edition, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2006).
- [14] Tianyou Fan, *Mathematical Theory of Elasticity of Quasicrystals and Its Applications*, Science Press Beijing and Springer-Verlag Berlin Heidelberg, (2011).
- [15] Jean-Michel Lourtioz, Henri Benisty, Vincent Berger, Jean-Michel Gerard, Daniel Mays-tre, Alexei Tchelnokov, *Photonic Crystals-Towards Nanoscale Photonic Devices*, Second Edition, Springer-Verlag (2008).
- [16] Walter Steurer, Sofia Deloudi, *Crystallography of Quasicrystals-Concepts, Methods and Structures*, Springer, (2009).

- [17] D. Levine and P. J. Steinhardt, *Phys. Rev. Lett.*, 57, 2057 (1986).
- [18] X. Zeng, G. Ungar, Y. Liu, V. Percec, A.E. Dulcey, J.K. Hobbs, *Nature*,(2004).
- [19] Veselago V. G., *Sov. Phys. Usp.*, Vol. 10, (1968).
- [20] C.M. Soukoulis, M. Kafesaki, E.N. Economou, *Adv. Mater.*, 18 (2006).
- [21] R.A. Shelby, D.R. Smith, S. Schultz, *Science* 292, 77, (2001).
- [22] Alexandra Boltasseva, Vladimir M. Shalaev, *Elsevier*, (2008).
- [23] Sheng Xi, Hongsheng Chen, Tao Jiang, Lixin Ran, Jiangtao Huangfu, Bae-Ian Wu, Jin Au Kong, Min Chen *Phys. Rev. Lett.*, PRL 103, (2009).
- [24] J. B. Pendry, *Sov. Phys. Rev. Lett.*, 85, (2000).
- [25] J. B. Pendry, A. J. Holden, D. J. Robbins, and W. J. Stewart, *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. 47, (1999).
- [26] D.R. Smith, D. Schuring, J.B. Pendry, J.J. Mock, S.A. Cummer, B.J. Justice, and A.F. Starr., *Science* 314, 977, (2006).
- [27] Pendry, J. B., D. R. Smith, *Physics Today*, Vol. 37, (2004).
- [28] Y. Xiang, X. Dai, S. Wen, D. Fan, *Phys. Rev.*, E 76, (2007).
- [29] I. S. Nefedov and S. A. Tretyakov, *Phys. Rev.*, E 66, (2002).
- [30] D. Brian, B. Djafari-Rouhani, A. Akjouj, L. Dobrynski, J. P. Vigneron, E. H. El Boudouti, A. Nougououi, *Phys. Rev.*, E 76, (2004).
- [31] F. Villa-Villa y J. A. Gaspar-Armenta, *J. Opt. Soc. Am.*, B 23, (2006).
- [32] J. E. Zárata and V. R. Velasco, *Phys. Rev.*, B, Vol. 65, (2001).
- [33] J. Arriaga and V. R. Velasco, *Phys. Condens. Matter.*, Vol.9, 8031 (1997).
- [34] K. Hirose, D. Y. K. Ho, and H. Kamimura, J., *Phys. Condens. Matter.*, 4, 5947 (1992).
- [35] J. E. Zarate, V. R. Velasco, *Phys. Rev.*, B 65, (2001).
- [36] Kenta Esaki, Nasatishi Sato, Mahito Kohmoto, *Phys. Rev.*, E 79, (2009).
- [37] B. E. A. Saleh, M. C. Teich, *Fundamentals of Photonics*, Wiley, Singapore,pp. 265-285,(2007).
- [38] Pochi Yeh, *Optical Waves in Layered Media*, New York: Wiley, (1988).
- [39] R. Archuleta-García, B. Manzanares-Martínez, J. Manzanares-Martínez, *Rev. Mex. Fís.*, Vol. 53, 371–375 (2007).
- [40] Eugene Hecht, *Optics*, Addison-Wesley, 4ta. Edición, (2002).
- [41] John R. Reitz, Frederick J. Milford, Robert W. Christy, *Fundamentos de la teoría electromagnética.*, Argentina, Addison-Wesley Iberoamericana, (1996).
- [42] Charles Kittel, *Introduction to solid state physics.*, Hoboken, NJ: John Wiley and Sons, 8va. Edición, (2005).

- [43] Stanley I. Grossman, *Elementary linear algebra.*, Belmont, CA.: Wadsworth Publishing, (1980).
- [44] T.W. Ebbesen, H.J. Lezec, H.F. Ghaemi, T. Thio, P.A. Wolff, *Nature* 391, 667–669, (1998).
- [45] H. Wondratschek:, *Basic Concepts. In: International Tables for Crystallography*, Vol. A, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht/Boston/London, pp. 720–740 (2002).
- [46] U. Fano, *T J. Opt. Soc. Am.* 31, 213–222 (1941).
- [47] G. Gay, O. Alloschery, B. Viaris de Lesegno, C. O’Dwyer, J. Weiner, and H.J. Lezec, *Nat. Phys.* 2, 262–267, (2006).
- [48] P. Lalanne, J.P. Hugonin, *Nat. Phys.*, 2, 551–556 (2006).
- [49] X. Huang, M.L. Brongersma, *Phys. Rev.*, B 84, (2011).
- [50] P. Lalanne, J.P. Hugonin, H.T. Liu, B. Wang, *A microscopic view of the electromagnetic properties of sub- $\lambda$  metallic surfaces.*, Surf. Sci. Rep. 64, 453–469 (2009).
- [51] G.Y. Li, F. Xiao, L. Cai, K. Alameh, A.S. Xu, *New J. Phys.* 13, (2011).
- [52] B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, Freeman, San Francisco (1983).
- [53] Jan C. A., Demetrius C. Levendis, *Number Theory and the Periodicity of Matter*, Springer, (2008).
- [54] Martha Macho Stadler, *Curiosidades sobre el conjunto de Cantor*, Un paseo por la Geometría, 97-116, (2000).
- [55] M. R. Schoroeder, *Number Theory in Science and Communication*, 4ta. Edición, Springer-Verlag, (2006).
- [56] D. Shechtman and I. Blech, D. Gratias, J. W. Cahn, *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 53, (1984).
- [57] M. Torres , J.P. Agradados and F.R. Montero de Espinosa, *Nature*, 398, 114 (1999).
- [58] B. Freeman, et. al., *Nature* 440, 1166 (2006).
- [59] C. H. Day, *Physics Today*, 59, No. 6 Junio, 17 (2006).
- [60] R. Penrose, *La nueva mente del emperador.*, Grijalbo Mondadori, Barcelona, Pág. 541 (1991).
- [61] Enrique Díez, Ángel Sanchez, Francisco Domínguez-Adame, *Conjetura que algo queda: el “teorema” de localización de Anderson.*, Revista Española de Física 13(4) (1999).
- [62] B. Rossner, D. Chrastina, G. Isella, H. von Kanel, *Applied Physics Letters.*, 84, (2004).
- [63] Enrique Maciá, *Phys. Rev. B*, Vol. 63, (2001).
- [64] R. Merlin, K. Bajema, R. Clarke, F. Y. Juang, and P. K. Bhattacharya, *Phys. Rev. Lett.*, 55, 1768 (1985).
- [65] Q. Niu and F. Nori, *Phys. Rev. Lett.*, 53, 2477 (1984).
- [66] A. I. Goldman and R. F. Kelton, *Rev. Mod. Phys.*, 65, 213 (1993).

- [67] E. Maciá and F. Domínguez-Adame, *Semicond. Sci. Technol.*, 11, 1041 (1996).
- [68] E. Reyes-Gómez, N. Raigoza, S. B. Cavalcanti, C. A. A. de Cervalho, L. E. Olivera, *Phys. Rev.*, B 81, 153101 (2010).
- [69] J. W. Dauben, *George Cantor: his Mathematics and Philosophy of the infinite.*, Princeton University Press, (1990).
- [70] I. Grattan-Guinness, *Towards a Bibliography of George Cantor.*, Ann. of Sci. 27, No. 4, 345-391, (1971).
- [71] Kenta Esaki, Nasatishi Sato, Mahito Kohmoto, *Phys. Rev.*, E 79, (2009).
- [72] Kathleen T. Alligood, Tim D. Sauer, James A. Yorke, *CHAOS an introduction to dynamical systems.*, Springer-Verlag (1996).
- [73] Gellermann W., Kohmoto M., Sutherland B. y Taylor P., *Phys. Rev. Lett.*, 72 633, (1994).
- [74] Axel and J. Peyrière, *J. Stat. Phys.*, Vol.57, (1989).
- [75] E. Reyes-Gómez, N. Raigoza, S. B. Cavalcanti, C. A. A. de Cervalho, L. E. Olivera, *J. Phys.: Condens Matter.*, 22, (2010).
- [76] H.S. Shapiro, *Extremal problems for polynomials and power series.*, M. Sc. Thesis, Massachusetts Institute of Technology, (1951).
- [77] W. Rudin, *Some theorems on Fourier coefficients.*, Proc. Amer. Math. Soc. 10 (1959).
- [78] Debora Ziff, *Wisconsin State Journal.*, UW-Madison, (2010).
- [79] M. Queffélec, *Substitution Dynamical Systems-Spectral Analysis.*, Springer Lecture Notes in Mathematics, Second Edition, Vol. 1294, (1982).
- [80] L. Kroon, E. Lennholm, R. Riklund, *Phys. Rev.*, B 66(9), (2002).
- [81] Tigran V. Shahbazyan, Mark I. Stockman, *Plasmonics: Theory and Applications.*, Springer Dordrecht Heidelberg New York London, (2013).
- [82] L. Dal Negro, N.N. Feng, A. Gopinath, *J. Opt. A*, (2008).
- [83] R. Betancourt Riera, W. Pardo Tamayo y R. Pérez-Álvarez, *Revista cubana de Física*, Vol. 20, No. 2, (2003).
- [84] L. Kroon, R. Riklund, *Phys. Rev.*, B 69 (9), (2004).
- [85] Tigran V. Shahbazyan, Mark I. Stockman, *Appl. Phys. Lett.*, 75, (1999).
- [86] T. Kalkbrenner, U. Hkanson, A. Schadle, S. Burger, C. Henkel, V. Sandoghdar, *Phys. Rev. Lett.*, 95, (2005).
- [87] C. Caloz, T. Itoh, *Electromagnetic Metamaterials: Transmission Line Theory and Microwave Applications*, John Wiley and Sons, Inc. (2006).
- [88] W. Cai and V. Shalaev, *Optical Metamaterials: Fundamentals and Applications*, Springer, (2010).

- [89] V.M. Shalaev, *Nat. Photon.* 1, 41, (2007).
- [90] D. R. Smith, Willie J. Padilla, D. C. Vier, S. C. Nemat-Nasser, and S. Schult, *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 84, (2000).
- [91] W.M. Klein, C. Enkrich, M. Wegener, C.M. Soukoulis, S. Linden, *Opt. Lett.*, 1259, (2006).
- [92] M.C.K. Wiltshire, J.B. Pendry, I.R. Young, D.J. Larkman, D.J. Gilderdale, J.V. Hajnal, *Science* 291, 849–851, (2001).
- [93] Raimond Grimberg, *Materials Science and Engineering*, B 178, 1285–1295, (2013).
- [94] R. Grimberg, A. Savin, R. Steigmann, B. Serghiac, A. Bruma, *INSIGHT* 53, 132–137, (2011).
- [95] L.D. Landau, E.M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*, Butterworth-Heinemann, (1975).
- [96] H.K. Yuan, U.K. Chettiar, W. Cai, A.V. Kildishev, A. Boltasseva, V.P. Drachev, V.M. Shalaev, *Opt. Express* 15, 1076, (2007).
- [97] W. Cai, U.K. Chettiar, H.K. Yuan, V.C. De Silva, A.V. Kildishev, V.P. Drachev, V.M. Shalaev, *Opt. Express* 15, 3341, (2007).
- [98] Raymond A. Serway, Jerry S. Faughn, *Fundamentos de Física*, México: Cengage Learning, (2013).
- [99] C.F. Ing. José María Riola Rodríguez, *SOPT*, 075-11-024-3 (2011).
- [100] Haitao Jiang, Hong Chen, Hongqiang Li, Yewen Zhang, and Shiyao Zhu, *AIP.*, Vol. 83, (2003).
- [101] Haitao Jiang, Hong Chen, Hongqiang Li, Yewen Zhang, and Shiyao Zhu, Liwei Zhang, Yewen Zhang, Li He, Zhiguo Wang, Hongqiang Li and Hong Chen, *J. Phys. D: Appl. Phys.*, Vol. 40, (2007).
- [102] Lei Zhou, Zhengyong Song, Xueqin Huang and C.T. Chan, *Nanophotonics* 1, (2012).
- [103] Jensen Li, Lei Zhou, C. T. Chan, and P. Sheng, *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 90, (2003).
- [104] J. A. Monsoriu, R. A. Depine, M. L. Martínez-Ricci, E. Silvestre, *Optics Express*, Vol. 14, (2006).
- [105] W. J. Hsueh, C. T. Chen, C. H. Chen, *Phys. Rev.*, A 78, (2008).