



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

INSTITUTO DE FÍSICA “LUIS RIVERA TERRAZAS”

**“FORMULACIÓN DE FADDEEV-JACKIW PARA UNA
TEORÍA BF CUATRIDIMENSIONAL Y RELATIVIDAD
GENERAL EN TRES DIMENSIONES”**

TESIS

**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
DOCTOR EN CIENCIAS
(FÍSICA)**

**PRESENTA:
M.C. PRIHEL CAVILDO SÁNCHEZ**

**ASESOR(ES):
DR. ALBERTO ESCALANTE HERNÁNDEZ**

No. de CVU: 558824

JUNIO 2019

©2019 - M.C. Prihel Cavildo Sánchez

Derechos Reservados

Agradecimientos

Deseo agradecer al Dr. Alberto Escalante Hernández, quien supo orientarme a lo largo de todo este trabajo. A CONACYT por el apoyo económico otorgado a lo largo del Doctorado y a todos los mexicanos que pagan sus impuestos. Adicionalmente, agradezco todo el apoyo que me brindó el personal del IFUAP, también a todos y cada uno de aquellos que contribuyeron en mi formación académica, a los profesores que me dedicaron un poco de su tiempo.

Dedico esta tesis a mi familia. También a mis amigos.

Resumen

El objetivo de esta tesis es estudiar dos tipos de teorías: una teoría BF en cuatro dimensiones y una acción tipo Holst en tres dimensiones. Estas teorías son ejemplos de teorías singulares y para analizarlas se aplicaron dos métodos: el algoritmo de Dirac y el formalismo de Faddeev-Jackiw [FJ]. El método de Dirac se enfoca en estudiar las simetrías presentes en la teoría desde un punto de vista Hamiltoniano, mientras que el formalismo de Faddeev-Jackiw, se enfoca en construir un tensor simpléctico mediante el cual se obtienen las simetrías del sistema y los paréntesis generalizados de FJ, que bajo una elección apropiada de la norma, son equivalentes a los de Dirac. Respecto al método de Dirac se reporta el número de grados de libertad, el conjunto completo de constricciones y su clasificación, las transformaciones de norma y los paréntesis de Dirac. Por otra parte, con el formalismo de FJ también se obtuvo el conjunto completo de constricciones de FJ, las transformaciones de norma, conteo de grados de libertad y los paréntesis generalizados de FJ. Finalmente, es importante mencionar que se comprobó la equivalencia entre los resultados obtenidos con ambos métodos, en particular, se destaca la igualdad de los paréntesis de Dirac y FJ.

Faddeev-Jackiw Formulation for a Fourdimensional BF Theory and General Relativity in Three Dimensions

Abstract

In this work two theories are studied: a four dimensional BF theory and a three dimensional Holst-like action. These theories are examples of singular systems and we perform our analysis by using two approaches: the Dirac algorithm and the FJ formalism. The Dirac method is based on the identification of the constraints for studying the symmetries of the theory. On the other hand, the FJ approach is based on the construction of a symplectic tensor where the relevant symmetries of the theory can be identified from it.

With respect to the Dirac method, the complete set of constraints, the gauge transformations and the Dirac brackets are reported. Furthermore, with respect to the FJ formalism, the complete set of FJ constraints, the gauge transformations and the generalized brackets are identified. We show that the generalized FJ and the Dirac brackets coincide to each other.

Publicaciones

- Alberto Escalante, Prihel Cavildo Sánchez, “Faddeev-Jackiw quantization of four dimensional BF theory”, *Annals of Physics*, Volume 374, 375-394, November 2016.
- Alberto Escalante and Prihel Cavildo-Sánchez, “Symplectic Approach of Three-Dimensional Palatini Theory Plus a Chern-Simons Term,” *Advances in Mathematical Physics*, vol. 2018, Article ID 3474760, 7 pages, 2018.

Contenido

1	Introducción	1
2	Algoritmo Dirac-Bergmann	6
2.1	Sistemas singulares clásicos	6
2.2	Constricciones primarias	8
2.3	Ecuaciones débiles y fuertes	10
2.4	Hamiltoniano canónico	11
2.5	Condición de consistencia y constricciones secundarias	13
2.6	Constricciones de primera y segunda clase	15
2.7	Transformaciones de norma	17
2.8	Condiciones de norma	19
2.9	Paréntesis de Dirac	20
3	Formalismo de Faddeev - Jackiw para sistemas singulares	22
3.1	Lagrangiano lineal en las velocidades	23
3.2	Formalismo de Faddeev-Jackiw	24
4	Análisis Hamiltoniano y simpléctico a una Teoría BF en 3+1 dimensiones con variables tipo Ashtekar	32
4.1	Teorías BF	33
4.2	Teoría BF en 3 dimensiones	34
4.3	Relatividad General obtenida de una teoría tipo BF	35
4.4	Partícula libre escrita como una acción tipo BF	36
4.5	Análisis simpléctico a una teoría BF 3+1 dimensional	39
4.6	Análisis Canónico de una teoría BF en 3+1 dimensiones.	49
4.7	Conclusión	63
5	Análisis Hamiltoniano y Simpléctico a una acción tipo Holst en tres dimensiones	65
5.1	Relación entre Relatividad General y la acción de Chern-Simons	71
5.2	Análisis simpléctico a la acción de Palatini en 2+1 dimensiones acoplada al término de Chern-Simons	72
5.3	Análisis Hamiltoniano	79
5.4	Conclusiones	81

A	83
A.1 Principios de la Relatividad General	83
A.2 Término de Chern-Simons	85
A.3 Acción de Palatini	86
A.4 La acción de Holst	89
A.5 Formulación Hamiltoniana de la acción de Holst	90
Bibliografía	97

Capítulo 1

Introducción

El siglo pasado vio el nacimiento de dos teorías importantes que la humanidad ha descubierto, aun cuando en sus inicios ambas teorías tuvieron importantes detractores, hoy en día son dos pilares fundamentales de la física, del desarrollo técnico y la investigación de frontera [1]. Estamos hablando de la Mecánica Cuántica y la Relatividad General. La Mecánica Cuántica se ocupa del estudio de la materia y las interacciones a escala microscópica ($\approx 10^{-9}$ m). Por otro lado, la Relatividad General es una descripción de la gravedad como una consecuencia de la geometría del espacio-tiempo la cual adquiere una curvatura debido a la presencia de materia y energía en el Universo. Dicha teoría fue propuesta por A. Einstein en 1915.

En particular, la aplicación y desarrollo de la Mecánica Cuántica ha permitido el estudio de las interacciones fundamentales (el electromagnetismo, las fuerzas nucleares fuerte y débil) derivando en importantes descubrimientos sobre el comportamiento de la naturaleza a escala microscópica e incluso nuevos estados de la materia (e.g. el efecto Ahanorov-Bohm, efecto Compton, efecto Zeeman, condensado de Bose-Einstein, etc. [2]).

Actualmente existe una necesidad a nivel teórico por un esquema que combine consistentemente la Mecánica Cuántica y la Relatividad General. Por dar unos ejemplos sobre situaciones en los que se necesita una formulación cuántica de la gravedad se puede mencionar a la cosmología y el estudio de agujeros negros, ya que no se tiene un entendimiento fundamental del Universo temprano (en particular las condiciones iniciales del Universo en los momentos inmediatos al Big Bang) y de los estados finales de la evolución de un agujero negro [3], así como una comprensión de los procesos que ocurren en su interior y en su cercanía. Una motivación adicional es el *problema del tiempo* que tiene su origen en

el papel que juega el tiempo en la Mecánica Cuántica y la Relatividad General [3] ya que en cada teoría el concepto de tiempo es concebido de una forma totalmente diferente y de hecho incompatible; ya que en la Mecánica Cuántica el tiempo es un elemento externo que no es descrito en términos de operador alguno y únicamente juega el papel de parámetro de evolución en las ecuaciones. En contraste, en la teoría de la Relatividad General el tiempo (en concreto el espacio-tiempo) es un ente cuya dinámica está determinada por las ecuaciones de Einstein y las condiciones de materia y energía presente en el Universo. Por lo tanto, se necesita una modificación en la concepción del tiempo para hacerlo compatible con ambas teorías. Se piensa que una teoría cuántica de la gravedad conciliaría ambas concepciones del tiempo [3].

Sin embargo, el estudio de la gravedad a escala microscópica (los efectos de una gravedad cuántica serían importantes a escala de Planck $l_p \approx 1.616 \times 10^{-35}\text{m}$ [4]) ha implicado un reto enorme para la física teórica, un reto que no ha sido superado, aun cuando ha habido importantes adelantos. Entre las dificultades que se encuentran para lograr la unificación entre ambas teorías se tiene la incompatibilidad conceptual y matemática con las que han sido formuladas, por lo que las pasadas décadas han sido de intenso trabajo teórico, en particular, mucho del trabajo desarrollado se ha enfocado en estudiar las simetrías que están presentes en una teoría singular a nivel clásico y cuántico. Una teoría singular es aquella en la que se tienen más variables dinámicas de las que físicamente son necesarias para describir la teoría. Ejemplos de teorías singulares son el modelo estándar de la física de partículas, la teoría electromagnética y en particular la teoría de la Relatividad General. En muchos casos este tipo de teorías presentan un tipo especial de simetría llamada de norma la cual relaciona estados físicamente equivalentes. Es importante mencionar que no todas las teorías singulares son de norma más todas las teorías de norma son singulares. Para estudiar este tipo de teorías se tienen dos formalismos conocidos: el de Dirac y de Faddeev-Jackiw [FJ].

El formalismo de Dirac es una generalización del formalismo Hamiltoniano usual mediante el cual se estudian las simetrías del sistema cuando existen constricciones. Por otro lado, el formalismo de FJ trata a las teorías singulares desde un punto de vista simpléctico, este método tiene la ventaja de ser menos tedioso en comparación con el método de Dirac, ya que no es necesario realizar la clasificación de las constricciones y los resultados encontrados son equivalentes con los obtenidos en el formalismo de Dirac.

En esta tesis se estudiaron dos teorías cuya importancia reside en su relación con Relativi-

dad General. La primera de ellas es una teoría BF en cuatro dimensiones con grupo de simetría $SO(3,1)$, la cual es un ejemplo de teoría topológica, i. e., sin grados de libertad físicos, definida en términos de una variable auxiliar B y la curvatura de la conexión denotada por F . Esta teoría es interesante ya que comparte características importantes con Relatividad General por ejemplo que pueda definirse sin la introducción de una estructura métrica preestablecida y ser invariante ante difeomorfismos. Es importante mencionar que en [5] se realizó un análisis a esta teoría mediante el formalismo de Dirac estricto, sin embargo, en dicho trabajo no se reportan los paréntesis de Dirac debido a la naturaleza no compacta del grupo $SO(3,1)$. En esta tesis, se procedió a romper el grupo de simetría interno pasando de $SO(3,1)$ a $SO(3)$ con lo cual se trabajó con un grupo compacto lo que simplificó los cálculos permitiendo calcular los paréntesis de Dirac de forma más sencilla. Para realizar dicho análisis, se utilizaron variables tipo Ashtekar. Los resultados obtenidos no habían sido reportados en la literatura anteriormente y pueden consultarse en el artículo publicado [6].

La segunda parte del trabajo se basó en una formulación tipo Holst de Relatividad General en tres dimensiones. La formulación de Holst consiste en una modificación a la acción de Hilbert-Palatini (S_{HP}) para Relatividad General en cuatro dimensiones [7]. Esta modificación consiste en una combinación lineal de la acción de Hilbert-Palatini S_{HP} más el término topológico de Holst S_H (el cual solo está definido en cuatro dimensiones). En concreto, la acción de Holst es definida por $S_{Holst} \equiv S_{HP} + \gamma^{-1} S_H$. Para cada valor de $\gamma \neq 0$ la acción de Holst genera una familia de acciones clásicamente equivalentes a Relatividad General en el sentido de que todas tienen como ecuaciones de movimiento a las ecuaciones de Einstein, esto se debe a que el término de Holst no tiene contribución a nivel de las ecuaciones de movimiento. Sin embargo, la acción de Holst tiene la propiedad de que a partir de ella se pueden obtener dos de las formulaciones Hamiltonianas de Relatividad General más importantes propuestas con el objetivo de lograr una cuantización de la misma, estas son la formulación de Ashtekar y la formulación de Barbero, que se obtienen al considerar los casos particulares $\gamma = i$ y $\gamma = 1$ respectivamente [7] [8]. Sin embargo, en principio cualquier otro valor del parámetro γ es válido, así pues ¿qué significado físico tiene el parámetro γ ? y ¿cuál es el valor real de γ ? Estas preguntas carecen de respuesta hasta el momento, siendo lo anterior preguntas aún abiertas en la física [9].

Con esto como contexto, en esta tesis investigamos una acción tipo Holst en tres dimen-

siones con el propósito de ver cómo el parámetro γ modifica el álgebra de constricciones y los paréntesis de Dirac, con el objetivo de sentar las bases a un análisis posterior que permita dar una interpretación física a este parámetro. El sistema que se analizó fue la acción de Hilbert-Palatini en 3 dimensiones acoplada al término de Chern-Simons S_{CS} : $S \equiv S_H + \gamma^{-1} S_{CS}$ [10]. Como ya se mencionó, el término de Holst solo está definido en cuatro dimensiones por lo que una propuesta para estudiar una acción similar a la acción de Holst en tres dimensiones es acoplar a la acción de Palatini el término de Chern-Simons. La acción así propuesta comparte una propiedad importante con la acción de Holst, esta es que la inclusión del término de Chern-Simons no modifica las ecuaciones de movimiento clásicas obtenidas de la acción de Palatini, sin embargo, como veremos el parámetro γ tendrá una contribución en los paréntesis de Dirac y de FJ. En esta tesis se realizó el análisis de Dirac y de FJ comparando luego los resultados obtenidos por ambos métodos y comprobando la correspondencia que existe entre ellos. Finalmente, es importante mencionar que estos resultados no habían sido reportados en la literatura y fueron publicados en [11] siendo un aporte original.

El trabajo está dividido de la siguiente forma: el primer y segundo capítulo están dedicados a desarrollar los formalismos de Dirac y de FJ, mostrando la relación entre ambos formalismos. En el capítulo tres se estudió una acción BF en cuatro dimensiones haciendo uso de un cambio de variables tipo Ashtekar. Esta teoría se analizó mediante el formalismo de Dirac en el esquema estricto obteniendo el número de grados de libertad, las constricciones del sistema y su clasificación, identificando los generadores de las transformaciones de norma y los paréntesis de Dirac. Por otro lado, se realizó el análisis de FJ identificando el conjunto de constricciones de FJ, las transformaciones de norma que se obtienen a partir de los vectores nulos del tensor simpléctico, el conteo de grados de libertad y los paréntesis generalizado de FJ los cuales coinciden con los paréntesis de Dirac.

La última parte de la tesis, está dedicada al análisis de una teoría tipo Holst en tres dimensiones, definida por la acción de Hilbert-Palatini en el formalismo a primer orden acoplada al término de Chern-Simons mediante un parámetro tipo Barbero-Immirzi. Como en el caso anterior, esta teoría se analizó mediante los formalismos de Dirac y de FJ, ambos en el esquema estricto. En el caso del formalismo de Dirac se obtuvo la estructura completa de las constricciones, el número de grados de libertad, la clasificación de las constricciones, las transformaciones de norma y los paréntesis de Dirac, hallando que dependen del parámetro de Barbero-Immirzi. Esta teoría también fue analizada mediante el formalismo de FJ, cal-

culando las constricciones de FJ, el número de grados de libertad, las transformaciones de norma y los paréntesis generalizados de FJ.

Capítulo 2

Algoritmo Dirac-Bergmann

Las teorías que describen las interacciones fundamentales de la física, tal como la teoría electrodébil, la relatividad general, la teoría electromagnética o el modelo estándar son teorías con un tipo especial de simetría llamada simetría de norma. En este tipo de sistemas el número de variables dinámicas utilizadas para describir el sistema es mayor que el número de variables requeridas físicamente, por lo tanto, la teoría está formulada en términos de algunas variables sin relevancia física. La presencia de variables no físicas está relacionada a la existencia de simetrías de norma, que están definidas por transformaciones de las variables dinámicas que no afectan el estado físico del sistema. Sistemas físicos de este tipo son llamados singulares y su análisis demanda una generalización del método Hamiltoniano usual ya que están caracterizados por la presencia de constricciones entre las variables dinámicas.

2.1 Sistemas singulares clásicos

En esta sección se explicará lo que es un sistema singular y el método desarrollado por Dirac y Bergmann para su análisis [12] [13]. Como punto de partida se considerará un sistema clásico con un número finito de grados de libertad descrito por las coordenadas generalizadas q_i ($i = 1, \dots, N$) y la función Lagrangiana

$$L = L(q_i(t), \dot{q}_i(t)), \quad (2.1)$$

donde $\frac{dq_i}{dt} \equiv \dot{q}_i$ representa el conjunto de velocidades generalizadas. En este capítulo se explicará el método de Dirac *estricto* el cual consiste en considerar a todas las variables

que definen al sistema como variables dinámicas asociándoles un momento canónico conjugado, en contraste con el llamado esquema *reducido* en el cual se considera únicamente como variables dinámicas a aquellas cuya derivada temporal aparezca explícitamente en el Lagrangiano. Ya que en el esquema estricto se considera a la totalidad de las variables dinámicas los cálculos pueden complicarse en comparación con el esquema reducido, sin embargo se tiene la ventaja de trabajar con el espacio fase completo permitiendo conocer la estructura simpléctica completa así como la forma correcta de las constricciones y simetrías del sistema. Por otro lado en el esquema reducido se trabaja con un espacio fase reducido lo que puede simplificar algunos cálculos, pero es probable que se pierda información importante en el proceso y por lo tanto no se obtengan las simetrías correctas del sistema. En este capítulo se desarrollará el método de Dirac estricto.

El caso más general es considerar que el Lagrangiano L dependa explícitamente del parámetro de evolución t , sin embargo se sabe que los Lagrangianos que describen las interacciones fundamentales de la física no dependen explícitamente de t , de modo que en lo que sigue solo se considerará este tipo de Lagrangianos.

La dinámica del sistema está determinada por el *principio de mínima acción* o *principio de Hamilton* el cual establece que

El movimiento de un sistema partiendo de la configuración 1 a una configuración 2 es tal que la acción del sistema [12] [14]

$$S \equiv \int_{t_1}^{t_2} dt L(q(t), \dot{q}(t)), \quad (2.2)$$

tiene un valor estacionario para la trayectoria real del sistema,

donde se ha supuesto que los puntos inicial y final son fijos durante la evolución, $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$. El principio de Hamilton se puede reexpresar diciendo que el movimiento del sistema es tal que la variación de la acción S para tiempos fijos t_1 y t_2 es cero

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}) dt = 0. \quad (2.3)$$

Las condiciones bajo las cuales la acción es estacionaria están dadas por las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.4)$$

las cuales pueden ser reescritas como [12] [13]

$$\ddot{q}_j \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} - \dot{q}_j \frac{\partial^2 L}{\partial q_j \partial \dot{q}_i}, \quad (2.5)$$

entendiendo que en la expresión anterior (y en todo el trabajo) se está utilizando la notación de Einstein, es decir, suma implícita sobre índices repetidos. De esta manera, es claro que las aceleraciones $\ddot{q}$ pueden ser determinadas unívocamente en términos de coordenadas y velocidades generalizadas si y solo si la matriz

$$H_{ij} \equiv \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_i} \quad (2.6)$$

es invertible, si este es el caso se dirá que el sistema es regular y se podrá determinar la evolución del sistema de manera única dadas las condiciones iniciales. Por otra parte, si el determinante es cero, no todas las aceleraciones podrán ser determinadas unívocamente en términos de coordenadas y velocidades generalizadas, por lo que la solución a las ecuaciones de movimiento contendrá funciones arbitrarias del tiempo. El caso de interés para sistemas con simetría de norma es aquel donde la matriz H es singular. Es importante mencionar que no todas las teorías singulares son de norma pero todas las teorías de norma son singulares.

2.2 Constricciones primarias

Estamos interesados en obtener una formulación Hamiltoniana para sistemas singulares y como es usual el primer paso es realizar la transformada de Legendre respecto a las velocidades. Para esto se define el momento canónico como

$$p^i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (i = 1, \dots, N), \quad (2.7)$$

se puede pensar en la definición anterior como un conjunto de transformaciones entre momentos p y velocidades $\dot{q}$ de modo que en un sistema *regular* estas relaciones son invertibles por lo que es posible escribir el conjunto de velocidades generalizadas $\dot{q}$ como función de q y p . La condición bajo la cual esto es posible la da el *teorema de la función inversa*, el cual establece que el conjunto de transformaciones $p = p(q, \dot{q})$ será invertible si y solo si el determinante de la matriz Jacobiana es diferente de cero

$$\left| \frac{\partial p^i}{\partial \dot{q}_j} \right| \neq 0, \quad (2.8)$$

o en términos de la definición de momento (2.7)

$$\left| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \right| \neq 0, \quad (2.9)$$

es decir, la misma condición que se estableció para la matriz H en (2.6). En el caso regular el Hamiltoniano del sistema se define mediante la transformada de Legendre $H(q, p) \equiv p^i \dot{q}_i - L$ [12] [14], que es una función de las coordenadas q y momentos p gracias a la eliminación de todas las velocidades $\dot{q}$ utilizando las transformaciones inversas a (2.7). Al espacio definido por el conjunto de pares q y p se le llama espacio fase Γ . La dinámica del sistema estará determinada por las ecuaciones de Hamilton:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p^i}, \quad (2.10)$$

$$\dot{p}^i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (2.11)$$

las cuales se pueden deducir del principio de Hamilton escribiendo la acción del sistema como

$$S = \int dt [p^i \dot{q}_i - H]. \quad (2.12)$$

Sin embargo, las teorías físicas que describen las interacciones fundamentales de la naturaleza (en particular Relatividad General) son descritas por Lagrangianos singulares, este tipo de sistemas se caracterizan por la existencia de constricciones en el sistema, esto es, relaciones entre las variables del espacio fase Γ .

Un sistema es *singular* si el determinante de la matriz H definida en (2.6) es cero y se supondrá que su rango es M' [13]. Por construcción dicha matriz es de tamaño $N \times N$, siendo N el número de coordenadas generalizadas, por lo tanto, si H es singular el rango de la matriz será $M' < N$. En este caso el conjunto de relaciones (2.7) no serán independientes entre sí y no será posible determinar todas las velocidades generalizadas como funciones de q y p , es decir, existirá un conjunto de relaciones de la forma

$$\phi^m(q, p) = 0, \quad m = 1, \dots, M, \quad (2.13)$$

que se obtienen directamente de la definición de los momentos (2.13) y en general $M' \leq M$. Relaciones de la forma (2.13) son llamadas *constricciones primarias* [13] ya que se derivan directamente de la definición de momentos.

Ya que el rango de la matriz H es igual a M' , habrá M' ecuaciones independientes en (2.13),

las cuales definirán el subespacio de constricciones $\Gamma_1 \subseteq \Gamma$ de dimensión $2N - M'$ sobre el cual el sistema evolucionará en el tiempo.

Se debe imponer cierta condición sobre la forma de las constricciones primarias para garantizar la independencia entre las constricciones primarias. Se supondrá que las constricciones primarias ϕ^m satisface la *condición de regularidad* [12] [13]:

Todas las constricciones primarias ϕ son independientes, i. e., el Jacobiano $\frac{\partial \phi^m}{\partial (q,p)}$ es de rango M' en Γ_1 .

2.3 Ecuaciones débiles y fuertes

La existencia de constricciones en el sistema motiva a reconsiderar el concepto de igualdad cuando se aplica a relaciones que involucran funciones del espacio fase. Para ejemplificar este punto consideremos, por simplicidad, que se tiene una restricción de la forma

$$x = 0, \quad (2.14)$$

es claro que el paréntesis de Poisson entre el momento canónico p_x con el lado izquierdo de esta ecuación es diferente al paréntesis de Poisson con el lado derecho ($\{x, p_x\} = 1 \neq 0$). Este simple ejemplo muestra que si se sustituye a x por 0 en alguna expresión antes de calcular el paréntesis de Poisson de interés, en este caso con p_x , conducirá a resultados incorrectos. Por lo tanto ecuaciones de la forma $x = 0$ deben usarse con cuidado y tienen un nombre y una notación especial, llamada *igualdad débil* [13] [15]. Por esto al hablar de igualdades entre funciones del espacio fase será necesario especificar el subespacio de constricciones en el cual la igualdad es válida y en lo sucesivo el símbolo $\approx$ se usará para indicar una igualdad que es únicamente válida en el subespacio en que las constricciones se anulan. En general si una función del espacio fase $F(q, p)$ únicamente se anula en el subespacio Γ_1 se dirá que es *débilmente* igual a cero:

$$F(q, p) \approx 0 \Leftrightarrow F(q, p) |_{\Gamma_1} = 0. \quad (2.15)$$

Por otra parte se dirá que una función es *fuertemente* igual a cero si

$$F = 0 \Leftrightarrow F |_{\Gamma_1} = 0 \quad \text{y} \quad \left(\frac{\partial F}{\partial q_i}, \frac{\partial F}{\partial p^i} \right) \Big|_{\Gamma_1} = 0. \quad (2.16)$$

Una función que es débilmente cero puede ser escrita como una combinación lineal de constricciones: $G \approx 0 \Rightarrow G = g_i \phi_i$ [13], donde g_i son funciones arbitrarias del espacio fase.

2.4 Hamiltoniano canónico

El siguiente paso en el análisis es introducir el Hamiltoniano canónico H_0 [13], lo cual se obtiene mediante la transformada de Legendre usual

$$H_0(q(t), p(t)) \equiv \dot{q}_i p^i - L(q, \dot{q}). \quad (2.17)$$

Es importante mencionar que $\dot{q}$ se introducen en H_0 solo mediante la combinación $p(q, \dot{q})$ definida por (2.13), por lo cual H_0 es solo función de q y p . Para verificar esto se calcula el cambio δH_0 inducido por la variación arbitraria de las variables

$$\begin{aligned} \delta H_0 &= \dot{q}_i \delta p^i + \delta \dot{q}_i p^i - \delta \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \delta q_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \\ &= \dot{q}_i \delta p^i - \delta q_i \frac{\partial L}{\partial q_i}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

donde se ha utilizado la definición de los momentos. Esto demuestra que efectivamente H_0 es una función únicamente de p y q .

Para determinar el efecto que produce la existencia de constricciones en la dinámica del sistema se calcularán las ecuaciones de movimiento, para esto se escribe la acción S en términos del Hamiltoniano

$$S = \int (\dot{q}_i p^i - H_0) dt, \quad (2.19)$$

y cuya variación es

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta \int (\dot{q}_i p^i - H_0) dt \\ &= \int \left[\delta q_i \left(-\dot{p}^i - \frac{\partial H_0}{\partial q_i} \right) + \delta p^i \left(\dot{q}_i - \frac{\partial H_0}{\partial p^i} \right) \right] dt = 0, \end{aligned} \quad (2.20)$$

en esta expresión δq y δp no son independientes entre sí ya que deben ser consistentes con las constricciones primarias halladas

$$\delta \phi^m(q, p) = \delta q_i \frac{\partial \phi^m}{\partial q_i} + \delta p^i \frac{\partial \phi^m}{\partial p^i} = 0, \quad (2.21)$$

de modo que se tienen las siguientes condiciones (2.20) y (2.21):

$$\delta q_i \left(-\dot{p}^i - \frac{\partial H_0}{\partial q_i} \right) + \delta p^i \left(\dot{q}_i - \frac{\partial H_0}{\partial p^i} \right) = 0, \quad (2.22)$$

$$\delta q_i \frac{\partial \phi^m}{\partial q_i} + \delta p^i \frac{\partial \phi^m}{\partial p^i} = 0, \quad (2.23)$$

dichas condiciones deben cumplirse para sistemas singulares. Comparándolas se obtienen las siguientes ecuaciones de movimiento que también son consistentes con las constricciones del sistema

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &\approx \frac{\partial H_0}{\partial p^i} + \lambda_m \frac{\partial \phi^m}{\partial p^i} \\ &\approx \frac{\partial H_1}{\partial p^i}, \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} \dot{p}^i &\approx -\frac{\partial H_0}{\partial q_i} - \lambda_m \frac{\partial \phi^m}{\partial q_i} \\ &\approx -\frac{\partial H_1}{\partial q_i}, \end{aligned} \quad (2.25)$$

donde se ha definido el Hamiltoniano primario [13]

$$H_1 \equiv H_0 + \lambda_m \phi^m, \quad (2.26)$$

λ_m son funciones arbitrarias del espacio fase y son llamadas *multiplicadores de Lagrange*.

Se define el paréntesis de Poisson entre dos funciones del espacio fase $F(q, p)$ y $G(q, p)$ como es usual [14]

$$\{F, G\} \equiv \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p^i} - \frac{\partial F}{\partial p^i} \frac{\partial G}{\partial q_i}. \quad (2.27)$$

Con esto las ecuaciones de Hamilton (2.24) y (2.25) se escriben de manera más concisa como

$$\dot{p}^i = \{p^i, H_1\} \quad (2.28)$$

$$\approx \{p^i, H_0\} + \lambda_m \{p^i, \phi^m\},$$

$$\dot{q}_i = \{q_i, H_1\} \quad (2.29)$$

$$\approx \{q_i, H_0\} + \lambda_m \{q_i, \phi^m\}.$$

En general, la evolución temporal de cualquier función del espacio fase $F(q, p)$ se escribe como

$$\begin{aligned} \dot{F} &= \{F, H_1\} \\ &\approx \{F, H_0\} + \lambda_m \{F, \phi^m\}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

2.5 Condición de consistencia y constricciones secundarias

Como se ha visto la existencia de constricciones en la teoría determina su dinámica y en este sentido define la naturaleza del sistema, por lo tanto es lógico esperar que las constricciones encontradas se conserven durante la evolución del sistema lo cual garantiza que el sistema con el que se inicia sea el mismo con el que se trabaja luego de su evolución. Con lo anterior en mente se impone sobre las constricciones la condición de que deben conservarse durante la evolución del sistema (*Condición de Consistencia*) [13] al menos sobre el subespacio Γ_1 y ya que el generador de evolución temporal es el Hamiltoniano primario esta condición se establece como

$$\begin{aligned}\dot{\phi}^m &= \{\phi^m, H_1\} \\ &\approx \{\phi^m, H_0\} + \lambda_{m'} \{\phi^m, \phi^{m'}\} \approx 0.\end{aligned}\tag{2.31}$$

La imposición de esta condición sobre las constricciones primarias conduce (para cada construcción ϕ) a una de las siguientes posibilidades

1. La condición de consistencia se reduce a una identidad, $0 \approx 0$, es decir, se satisface automáticamente luego de usar las constricciones primarias.
2. Se reduce a una ecuación que es independiente de los multiplicadores de Lagrange λ y de las constricciones primarias, implicando nuevas relaciones entre las variables dinámicas del sistema que llamaremos constricciones secundarias: $\varphi(q, p) \approx 0$.
3. La condición de consistencia impone una restricción sobre alguno de los multiplicadores de Lagrange λ .

Si se encuentran constricciones secundarias en la teoría se define el Hamiltoniano secundario H_2 por medio de nuevos multiplicadores de Lagrange

$$H_2 = H_0 + \lambda_m \phi^m + \alpha_l \varphi^l,\tag{2.32}$$

siendo $l = 1, \dots, L$ el número de constricciones secundarias que se encontraron y α_l un nuevo conjunto de multiplicadores de Lagrange. Estas constricciones definen un nuevo subespacio Γ_2 de Γ , tal que $\Gamma_2 \subseteq \Gamma_1$. La noción de igualdad débil o fuerte se define ahora respecto al subespacio Γ_2 . Las constricciones secundarias también deben satisfacer la condición de consistencia, esta vez dada en términos del Hamiltoniano secundario en una forma similar

a (2.31). La imposición de la condición de consistencia sobre las constricciones secundarias conducirá a un nuevo conjunto de constricciones o permitirá determinar alguno de los multiplicadores de Lagrange, etc. El procedimiento es finito de modo que al final la condición de consistencia no dará nueva información ya que su imposición conducirá a identidades del tipo $0 \approx 0$ o bien habrá permitido determinar el valor de todos los multiplicadores de Lagrange.

La distinción entre constricciones primarias y secundarias o superiores no es importante y en lo siguiente no se hará distinción entre ellas.

El conjunto completo de constricciones halladas se denotará por $\{\phi^s\}$ ($s = 1, \dots, S$) siendo S el número total de constricciones. El total de constricciones definirá un nuevo subespacio $\Gamma_s \subseteq \dots \subseteq \Gamma_1 \subseteq \Gamma$ del espacio fase y será respecto a este nuevo subespacio que la noción de igualdad fuerte y débil tendrá sentido.

El generador de evolución temporal ya tendrá en cuenta la información de todas las constricciones presentes en el sistema mediante una combinación lineal de las constricciones [13]

$$H_s \equiv H_0 + \lambda_s \phi^s \quad (2.33)$$

y nuevamente se impondrá la condición de consistencia sobre las constricciones ϕ^s :

$$\dot{\phi}^{s'} \approx \left\{ \phi^{s'}, H_0 \right\} + \lambda_s \left\{ \phi^{s'}, \phi^s \right\} \approx 0, \quad (2.34)$$

lo anterior se puede pensar como un conjunto de ecuaciones inhomogéneas en los multiplicadores λ . Suponiendo que $(V_a)_s(q, p)$, donde el subíndice a denota las componentes de V_s , son todas las soluciones independientes de la ecuación homogénea

$$(V_a)_s \left\{ \phi^{s'}, \phi^s \right\} \approx 0, \quad (2.35)$$

y $U(q, p)$ son soluciones particulares de la ecuación inhomogénea (2.34), por lo tanto, en general los multiplicadores de Lagrange serán de la forma

$$\lambda_s = U_s + v^a (V_a)_s, \quad (2.36)$$

siendo v^a coeficientes arbitrarios. Sustituyendo lo anterior en la ecuación (2.33) se define el Hamiltoniano Total H_T el cual generará la evolución de cualquier variable dinámica

$$H_T \equiv H' + v_a \phi^a, \quad (2.37)$$

donde

$$H' = H_0 + U_s \phi^s, \quad (2.38)$$

$$\phi_a = (V_a)_s \phi^s. \quad (2.39)$$

Como se ha visto, en sistemas singulares es posible que el Hamiltoniano Total contenga en su definición funciones arbitrarias del tiempo v^a . Por lo tanto, la evolución de las variables dinámicas no está determinada unívocamente por las condiciones iniciales.

En este punto es importante mencionar que la *condición de consistencia* no solo tiene implicaciones en el formalismo, permitiendo fijar algunos multiplicadores de Lagrange o generando nuevas constricciones, también a nivel físico su imposición implica la existencia de simetrías en el sistema. Como se sabe, el hecho de que una función del espacio fase sea tal que su paréntesis de Poisson con el generador de evolución temporal (en este caso H_T) sea cero implica la existencia de una constante de movimiento y por tanto la existencia de una simetría en el sistema [13].

2.6 Constricciones de primera y segunda clase

En este punto es conveniente definir lo que se entenderá como cantidades de primera y segunda clase [13] [16]:

Definición: Se dice que una función del espacio fase F es de *primera clase* si el paréntesis de Poisson de dicha función con todas las constricciones es débilmente cero

$$\{F, \phi^s\} \approx 0, \quad (2.40)$$

de otra forma se dirá que la función es de *segunda clase*.

Si una cantidad $R(q, p)$ es de primera clase, se satisface la igualdad

$$\{R, \phi^s\} = R_r^s \phi^r \approx 0, \quad (2.41)$$

donde R_r^s son funciones arbitrarias del espacio fase. De esto se deduce que el paréntesis de Poisson de dos constricciones de primera clase R y S es también de primera clase:

$$\begin{aligned} \{\{R, S\}, \phi^s\} &= \{\{R, \phi^s\}, S\} - \{\{S, \phi^s\}, R\} \\ &= R_r^s \{\phi^r, S\} + \{R_r^s, S\} \phi^r - S_r^s \{\phi^r, R\} - \{S_r^s, R\} \phi^r \\ &\approx 0. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Se puede demostrar que H' y $\phi_a = (V_a)_s \phi^s$ son de primera clase. Para comprobar esto se calcula

$$\begin{aligned} \{H', \phi^s\} &\approx \{H', \phi^s\} + v_a (V^a)_{s'} \{\phi^{s'}, \phi^s\} \\ &\approx \{H_T, \phi^s\} \\ &\equiv -\dot{\phi}^s \approx 0, \end{aligned} \tag{2.43}$$

se ha sumado un cero débil de la forma $v_a (V^a)_{s'} \{\phi^{s'}, \phi^s\} \approx 0$, lo cual es cierto ya que V^a son soluciones generales de la ecuación homogénea (2.35). La última línea se cumple ya que todas las constricciones satisfacen la condición de consistencia. Esto demuestra que H' es de primera clase

Por otro lado, considérese el paréntesis de Poisson entre todas las constricciones halladas ϕ^s y consideremos nuevamente el conjunto de soluciones V^a , luego

$$\begin{aligned} 0 &= (V_a)_s \{\phi^s, \phi^{s'}\} \\ &\approx \{\phi^a, \phi^{s'}\}, \end{aligned} \tag{2.44}$$

lo cual demuestra que $\phi^a = (V^a)_s \phi^s$ es de primera clase. Este resultado es importante y en lo siguiente se hará referencia a ello.

Una vez determinado el total de las constricciones del sistema nos preguntamos cuántas y cuáles son las constricciones de primera clase presentes en la teoría. Para este fin se construye una matriz cuyas entradas están dadas por el paréntesis de Poisson entre todas las constricciones

$$W^{mn} \equiv \{\phi^m, \phi^n\}, \tag{2.45}$$

y de tamaño $S \times S$, siendo S el número total de constricciones que presenta el sistema. Esta matriz permite no solo conocer el número de constricciones de primera clase sino también su forma. Si $\det W \approx 0$ la matriz tendrá rango $R < S$ y nulidad $S - R$. Por lo tanto existirán $S - R$ vectores nulos V_a , $a = 1, \dots, S - R$, los cuales por definición cumplen que

$$\{\phi^m, \phi^s\} (V_s)_a = 0, \tag{2.46}$$

esto es

$$\{\phi^m, \phi^s\} (V_s)_a \approx 0, \tag{2.47}$$

por lo tanto, se tiene un conjunto de constricciones de primera clase dadas por $\phi^s(V_s)_a \equiv \gamma_a$, como ya se había demostrado antes. Por otra parte, habrá R constricciones de segunda clase denotadas por χ .

El álgebra entre las constricciones de primera y segunda clase debe ser de la forma

$$\{\gamma_a, \gamma_b\} = A_{ab}^c \gamma_c + B_{ab}^{de} \chi_d \chi_e, \quad (2.48)$$

$$\{\gamma_a, \chi_b\} = C_{ab}^c \gamma_c + D_{ab}^d \chi_d, \quad (2.49)$$

donde A, B, C, D son funciones del espacio fase. En (2.48) solo pueden aparecer términos cuadráticos en χ para que se cumpla que el paréntesis de Poisson entre dos constricciones de primera clase sea también de primera clase [13].

2.7 Transformaciones de norma

Una vez realizada la clasificación de las constricciones en primera y segunda clase se verá que consecuencia tiene su existencia en la dinámica del sistema. Se define el Hamiltoniano Extendido, en el que ya se hace una distinción explícita entre constricciones de primera y segunda clase

$$\begin{aligned} H_E &= H_0 + U_m \chi^m + v_a \gamma^a \\ &= H' + v_a \gamma^a, \end{aligned} \quad (2.50)$$

donde U es el conjunto de multiplicadores que pudieron determinarse, mientras que v_a son funciones arbitrarias del espacio fase. La evolución de las variables dinámicas está restringida al subespacio Γ_E definido por las constricciones de primera y segunda clase y está es generada por el Hamiltoniano Extendido H_E , de modo que para una función del espacio fase $F(q(t), p(t))$ se tiene

$$\dot{F} = \{F, H_E\} \approx \{F, H'\} + v_a \{F, \gamma^a\}. \quad (2.51)$$

Esto muestra que la evolución del sistema presenta una arbitrariedad debido a la presencia de los coeficientes arbitrarios v_a . Sin embargo la mecánica clásica es determinista por lo tanto esta arbitrariedad no puede tener significado físico. Es decir, dados dos estados con las mismas condiciones iniciales pero diferentes conjuntos v_a deben ser físicamente equivalentes, se dirá que estos sistemas son equivalentes de norma [13].

Consideremos una función del espacio fase $F(q(t), p(t))$, con unas condiciones iniciales $F(0) \equiv F(q(0), p(0))$ y su cambio luego de un tiempo δt además de dos conjuntos diferentes de funciones $\{v_a\}$ y $\{v'_a\}$. El valor de $F(t)$ después de un corto intervalo de tiempo δt se puede calcular expandiendo en serie alrededor de $t = 0$ y a primer orden en δt

$$\begin{aligned} F_v(\delta t) &= F(0) + \delta t \dot{F} = F(0) + \delta t \{F, H_T\} \\ &\approx F(0) + \delta t [\{F, H'\} + v_a \{F, \phi^a\}] \end{aligned} \quad (2.52)$$

por otro lado, para la misma variable y mismas condiciones iniciales, pero diferente conjunto v'_a lo anterior es

$$F_{v'}(\delta t) \approx F(0) + \delta t [\{F, H'\} + v'_a \{F, \phi^a\}]. \quad (2.53)$$

La diferencia entre ambos estados es de la forma

$$\begin{aligned} \delta F &= F_v - F_{v'} \approx (v_a - v'_a) \delta t \{F, \gamma^a\} \\ &= \epsilon_a \{F, \gamma^a\} \\ &\approx \{F, \epsilon_a \gamma^a\} \end{aligned} \quad (2.54)$$

donde $\epsilon_a \equiv (v_a - v'_a) \delta t$. El cambio δF no es físico por hipótesis, así que $F_{v'}(\delta t) = F_v(\delta t) - \delta F$ corresponde al mismo estado físico. Se llega a la conclusión de que las constricciones de primera clase generan transformaciones no físicas de las variables dinámicas, conocidas como *transformaciones de norma* [13], que no alteran el estado físico del sistema y este cambio es generado por la combinación lineal de constricciones de primera clase $\epsilon_a \gamma^a$.

Para variables dinámicas invariantes de norma (variables tales que su paréntesis de Poisson con los generadores de norma γ es débilmente cero), la evolución dada por H' , H_T y H_E es la misma. Para cualquier otra variable se debe utilizar H_E para tomar en cuenta toda la simetría de norma.

Las ecuaciones de movimiento para el formalismo extendido pueden derivarse de un principio de acción extendido

$$S_E[q, p, v] = \int [\dot{q}^i p_i - H' - v_a \phi^a] dt, \quad (2.55)$$

del cual se derivan las ecuaciones de movimiento

$$\dot{F} \approx \{F, H_E\}, \quad (2.56)$$

$$\phi \approx 0. \quad (2.57)$$

Una vez que se ha hecho la clasificación entre constricciones de primera y segunda clase se procede a realizar el conteo de grados de libertad [13].

Definición: Los grados de libertad de un sistema son el número de variables físicas independientes necesarias para describir al sistema.

En este contexto, el conteo de grados de libertad se realiza de la siguiente manera

$$GL = \frac{1}{2} [(\text{Núm. de variables dinámicas}) - 2(\text{Núm. de constricciones de primera clase}) - (\text{Núm. de constricciones de segunda clase})], \quad (2.58)$$

en esta fórmula el factor $\frac{1}{2}$ se incluye porque se está considerando como variables dinámicas el conjunto completo de coordenadas generalizadas q y sus correspondientes momentos canónicos p . Se cuenta dos veces el número de constricciones de primera clase debido al doble carácter de éstas, como constricciones del sistema y como generadores de simetrías de norma.

2.8 Condiciones de norma

Como se ha podido comprobar la existencia de constricciones de primera clase implica una ambigüedad en la evolución del sistema permitiendo la existencia de un conjunto de estados físicos equivalentes entre sí y relacionados por una transformación de norma. Geométricamente se interpreta que estos estados definen un subespacio en el espacio fase donde cada punto representa un estado físicamente equivalente y relacionados entre ellos por medio de una transformación de norma.

Es posible eliminar esta ambigüedad en la dinámica del sistema al imponer ciertas condiciones sobre las variables dinámicas con el objetivo de que haya una correspondencia unívoca entre las condiciones iniciales y el estado final del sistema. A este proceso se le conoce como fijación de la norma. Por medio de este procedimiento se elimina cualquier libertad de norma físicamente irrelevante en la descripción del sistema.

El conjunto de condiciones de norma [13] se introduce como nuevas constricciones en el sistema

$$\Omega_\alpha(q, p) \approx 0, \quad \alpha = 1, \dots, N_{cn}, \quad (2.59)$$

donde N_{cn} es el número de condiciones de norma introducidas. Un buen conjunto de condiciones de norma debe cumplir con los siguientes requerimientos

1. El número de constricciones de primera clase es igual al número de condiciones de norma,
2. Deben fijar totalmente la norma, es decir, no existirá ninguna restricción de primera clase γ^a tal que $\{\Omega_\alpha, \gamma^a\} v_a \approx 0$ a menos que $v_a = 0$.

Es decir que el conjunto de constricciones de primera clase junto con las condiciones de norma forman un conjunto de constricciones de segunda clase.

La forma en que se definen estas condiciones no viene dada por el propio formalismo sino que debe ser introducida de manera conveniente. Las condiciones anteriores solo garantizan que la norma es correctamente fijada, mientras que la cuestión de su validez global es en general un problema abierto. En algunos casos la geometría del problema puede ser tal que condiciones de norma globales no existan.

2.9 Paréntesis de Dirac

Es posible definir un análogo al paréntesis de Poisson que tome en cuenta la clasificación de constricciones, a este nuevo paréntesis se le conoce como paréntesis de Dirac [13] [17]. Es el paréntesis de Dirac el cual será promovido a conmutador en el proceso de cuantización. Para dos funciones F y G del espacio fase el paréntesis de Dirac se define como

$$\{F, G\}_D \equiv \{F, G\} - \{F, \chi^m\} C_{mn}^{-1} \{\chi^n, G\}, \quad (2.60)$$

donde $(C_{mn})^{-1}$ es la matriz inversa de C^{mn} cuyas entradas están dadas por el paréntesis de Poisson entre las constricciones de segunda clase: $C^{mn} \equiv \{\chi^m, \chi^n\}$. Es importante notar que esta matriz es antisimétrica por definición y con determinante diferente de cero, ya que χ^m son de segunda clase, lo que implica que su dimensión es par.

El paréntesis de Dirac cumple con las siguientes propiedades

1. Antisimetría: $\{A, B\}_D = -\{B, A\}_D$,
2. Linealidad: $\{C, \alpha A + \beta B\}_D = \alpha \{C, A\}_D + \beta \{C, B\}_D$,
3. $\{A, BC\}_D = \{A, B\}_C + B \{A, C\}_D$,
4. Identidad de Jacobi: $\{A, \{B, C\}_D\}_D + \{B, \{C, A\}_D\}_D + \{C, \{A, B\}_D\}_D = 0$,

y adicionalmente con

5 Para cualquier función F y χ^m : $\{F, \chi^m\}_D = 0$,

6 Para G de primera clase y cualquier F : $\{F, G\}_D \approx \{F, G\}$.

Las ecuaciones de movimiento se escriben como

$$\dot{F} = \{F, H_E\}_D. \quad (2.61)$$

Como se ha visto, el método de Dirac es una generalización del formalismo Hamiltoniano usual para el caso en que el sistema presenta constricciones. Con él se puede conocer la dinámica del sistema a través del Hamiltoniano Extendido, el número de grados de libertad del sistema y los paréntesis de Dirac los cuales son una generalización del paréntesis de Poisson. La importancia de este formalismo no puede subestimarse y su utilidad se ha comprobado muchas veces al haberse aplicado con éxito a teorías BF [5], el electromagnetismo [18] o Relatividad General [19], etc. En los siguientes capítulos se aplicará el formalismo de Dirac estricto a una teoría BF en cuatro dimensiones y a una acción tipo Holst en tres dimensiones.

Capítulo 3

Formalismo de Faddeev - Jackiw para sistemas singulares

El método de Faddeev-Jackiw [FJ] [20] [21] permite analizar sistemas singulares desde un enfoque más accesible que el método de Dirac, ya que en este formalismo no existe distinción entre constricciones primarias y secundarias, ni es necesario realizar la clasificación de constricciones en primera y segunda clase, cuestión que resulta tediosa en muchos casos. El formalismo de FJ es un método en el cual toda la información relevante del sistema esta codificada en la construcción de una matriz simpléctica y sus vectores nulos. Este método permite obtener toda la información física relevante del sistema tal como el número de grados de libertad, las constricciones del sistema, transformaciones de norma, los paréntesis generalizados de FJ, etc.

El formalismo de FJ se aplica a Lagrangianos lineales en las velocidades generalizadas. Es importante mencionar que siempre es posible llevar Lagrangianos cuadráticos en las velocidades a una forma lineal mediante la introducción de variables auxiliares y que serán consideradas nuevas variables simplécticas. El método ha sido utilizado con éxito para analizar teorías BF [6], el invariante de Euler [22], Relatividad General en la formulación de Bonzom -Livine [23], la teoría de Maxwell [24], etc.

3.1 Lagrangiano lineal en las velocidades

El formalismo de FJ está formulado para Lagrangianos lineales de la forma

$$L = a(\xi)\dot{\xi} - V, \quad (3.1)$$

donde ξ denota el conjunto total de variables dinámicas que describen al sistema.

El procedimiento para llevar a una forma lineal en las velocidades el Lagrangiano de un sistema que en un comienzo es cuadrático en éstas se basa en la transformada de Legendre que es usada para pasar al formalismo Hamiltoniano [25] ya que para un sistema con coordenadas q y momentos p el Hamiltoniano asociado se calcula como $H = \dot{q}p - L$ [14], esta relación implica que $L = \dot{q}p - H$, es decir, una vez que se conoce el Hamiltoniano del sistema H , éste permitirá escribir una versión lineal en las velocidades del Lagrangiano L , esto puede parecer redundante para un sistema regular, sin embargo, para sistemas singulares se verá que este formalismo permite un análisis menos tedioso en términos de cálculo que el método de Dirac.

Es importante mencionar que una vez introducido este conjunto de nuevas variables (obtenidas vía la relación $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}}$), se deberá considerar al mismo nivel que el conjunto de coordenadas generalizadas originales, es decir, una vez que han ayudado a definir un Lagrangiano de la forma (3.1) tanto q como p (o alguna otra variable auxiliar introducida) se considerarán variables simplécticas al mismo nivel.

Para ilustrar la forma en que se lleva un lagrangiano cuadrático en las velocidades a una forma lineal [25], considérese un Lagrangiano dependiente de un conjunto de N coordenadas generalizadas q_i y sus velocidades $\dot{q}_i$ de la forma

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}_i\dot{q}^i - V(q). \quad (3.2)$$

El momento canónico conjugado a las coordenadas es por definición $p^i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \dot{q}^i$. Luego el Hamiltoniano H es de la forma

$$H(q, p) = \dot{q}_i p^i - L = \frac{1}{2}p_i p^i + V(q). \quad (3.3)$$

Una vez que se conoce el Hamiltoniano H , la transformada de Legendre nos permite escribir una versión lineal en las velocidades del Lagrangiano simpléctico

$$\begin{aligned} L(q, \dot{q}, p) &= \dot{q}_i p^i - H \\ &= \dot{q}_i p^i - \frac{1}{2}p_i p^i - V(q). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Para lograr esto se necesitó la introducción de funciones auxiliares (en este caso los momentos canónicos) que amplían el número de variables que describen el sistema, pasando de un conjunto $(q_i, \dot{q}_i)$ a un conjunto $(q_i, \dot{q}_i, p^i)$. Finalmente veamos que este procedimiento no afecta la dinámica del sistema. Las ecuaciones de Euler-Lagrange que se obtienen del Lagrangiano (3.4) son

$$\begin{aligned} \dot{p}^i - \frac{\partial V}{\partial q_i} &= 0, \\ \dot{q}_i - p_i &= 0.. \end{aligned}$$

Este conjunto de ecuaciones acopladas son equivalentes a las que se obtienen del Lagrangiano original (3.2).¹

3.2 Formalismo de Faddeev-Jackiw

Consideremos un Lagrangiano lineal en las velocidades de la forma [21] [26] [27]

$$\mathcal{L}^{(0)}(\xi, \dot{\xi}, \partial_i \xi) = a_A^{(0)}(\xi) \dot{\xi}^{(0)A} - V^{(0)}(\xi), \quad (3.5)$$

donde $\xi^{(0)}$ denota el conjunto total de N variables simplécticas que describen al sistema (coordenadas generalizadas $q_{i'}$ y momentos canónicos $\pi^{i''}$ u otro conjunto de variables dinámicas),

$$\xi^{(0)} \equiv (\xi^{(0)A}) = (q_{i'}, \pi^{i''}), \quad (3.6)$$

los índices toman valores $A = 1, \dots, N$, $i' = 1, \dots, n'$ y $i'' = 1, \dots, n''$ tal que $n' + n'' = N$. Aquí $V^{(0)}$ es llamado potencial simpléctico y $a_A^{(0)}$ es función de $\xi^{(0)}$ y se le conoce como una 1-forma.

Las ecuaciones de Euler -Lagrange que emergen de la variación de un Lagrangiano de la forma anterior se pueden escribir como [21]

$$f_{AB}^{(0)} \dot{\xi}^{(0)B} = \frac{\partial V^{(0)}(\xi)}{\partial \xi^{(0)A}}, \quad (3.7)$$

donde

$$f_{AB}^{(0)} = \frac{\partial a_B^{(0)}}{\partial \xi^{(0)A}} - \frac{\partial a_A^{(0)}}{\partial \xi^{(0)B}}. \quad (3.8)$$

¹Por supuesto este es un ejemplo muy particular pero ilustrativo y en general uno puede tener un lagrangiano de cualquier forma $L(q_i, \dot{q}_i)$, a partir del cual se obtienen los momentos canónicos $\dot{p}^i$ y se calcula el Hamiltoniano del sistema (o el Hamiltoniano canónico H_c en caso de que el sistema presente constricciones) $H = \dot{q}_i p^i - L$ y por tanto el Lagrangiano lineal es $L = \dot{q}_i p^i - H$.

$f^{(0)}$ es una matriz antisimétrica de tamaño $N \times N$ llamada *matriz simpléctica* (en el caso regular $f^{(0)}$ toma la forma de la matriz simpléctica, usualmente denotada por J). Por supuesto hay dos casos posibles: que $f^{(0)}$ sea regular o singular.

Si el determinante de $f^{(0)}$ es diferente de cero se dirá que el sistema es *regular* y existirá la matriz inversa $[f^{(0)}]^{-1}$ a $f^{(0)}$, si este es el caso se podrán conocer de forma unívoca todas las velocidades

$$\dot{\xi}^A = [f^{(0)-1}]_{AB} \frac{\partial V^{(0)}(\xi)}{\partial \xi^B}, \quad (3.9)$$

es decir las ecuaciones de movimiento del sistema (y por tanto su dinámica) están bien definidas y dadas ciertas condiciones iniciales se podrá conocer su estado a cualquier tiempo posterior sin ambigüedades.

Es fácil comprobar que en el caso regular el Hamiltoniano correspondiente al Lagrangiano (3.5) está dado por $V^{(0)}$. En este caso las variables simplécticas son las coordenadas generalizadas y momentos conjugados $\xi^A = (q^i, p_i)$ donde $i = 1, \dots, n$ y $A = 1, \dots, 2n$. La evolución temporal de las variables simplécticas está dada por

$$\begin{aligned} \dot{\xi}^{(0)A} &= \left\{ \xi^{(0)A}, H \right\} = \left\{ \xi^{(0)A}, V^{(0)} \right\} \\ &\equiv \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial \xi^{(0)A}}{\partial \xi^{(0)i}} \frac{\partial V^{(0)}}{\partial \xi^{(0)n+i}} - \frac{\partial \xi^{(0)A}}{\partial \xi^{(0)n+i}} \frac{\partial V^{(0)}}{\partial \xi^{(0)i}} \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial \xi^{(0)A}}{\partial \xi^{(0)i}} \delta_{n+i}^B - \frac{\partial \xi^{(0)A}}{\partial \xi^{(0)n+i}} \delta_i^B \right] \frac{\partial V^{(0)}}{\partial \xi^{(0)B}} \\ &= \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial \xi^{(0)A}}{\partial \xi^{(0)i}} \frac{\partial \xi^B}{\partial \xi^{(0)n+i}} - \frac{\partial \xi^{(0)A}}{\partial \xi^{(0)n+i}} \frac{\partial \xi^B}{\partial \xi^{(0)i}} \right] \frac{\partial V^{(0)}}{\partial \xi^{(0)B}} \\ &= \left\{ \xi^{(0)A}, \xi^{(0)B} \right\} \frac{\partial V^{(0)}}{\partial \xi^{(0)B}}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Comparando (3.9) y (3.10):

$$\dot{\xi}^{(0)A} = [f^{(0)}]_{AB}^{-1} \frac{\partial V^{(0)}}{\partial \xi^{(0)B}} = \left\{ \xi^{(0)A}, \xi^{(0)B} \right\} \frac{\partial V^{(0)}}{\partial \xi^{(0)B}}, \quad (3.11)$$

se implica que existe una relación entre las entradas de la matriz inversa $[f^{(0)}]^{-1}$ y el paréntesis de Poisson de las variables simplécticas (en el caso de sistemas con constricciones la relación que se establece es con el paréntesis de Dirac). Esto motiva a definir el paréntesis generalizado de Faddeev - Jackiw como

$$\left\{ \xi^{(0)A}, \xi^{(0)B} \right\}_{FJ} \equiv [f^{(0)-1}]_{AB}. \quad (3.12)$$

Sin embargo el caso de interés para teorías de norma es aquel donde el $\det [f_{AB}^{(0)}] = 0$, es decir, cuando el sistema es *singular* [20] [21], lo cual implica la existencia de constricciones en la teoría, esto es, un conjunto de relaciones independientes entre sí de las variables simplécticas. En cierto sentido se puede pensar que todo el formalismo está desarrollado con el objetivo de poder construir un tensor simpléctico $[f_{AB}^{(0)}]^{-1}$, ya que sus componentes están relacionadas con los paréntesis de Dirac y en última instancia estos paréntesis serán promovidos a conmutadores en el proceso de cuantización del sistema de interés. Ya que $f^{(0)}$ es singular, tendrá un rango R ($R < N$) y nulidad $M = N - R$, siendo N el número de variables simplecticas del sistema, es decir existirán M vectores nulos $v_m^{(0)}$ ($m = 1, \dots, M$) de la matriz $f^{(0)}$ tal que

$$\left(v_m^{(0)}\right)_A f_{AB}^{(0)} = 0. \quad (3.13)$$

Multiplicando a la ecuación (3.7) por la izquierda por $v_m^{(0)}$

$$0 = \left(v_m^{(0)}\right)_A f_{AB}^{(0)} \dot{\xi}^{(0)B} = \left(v_m^{(0)}\right)_A \frac{\partial v^{(0)}}{\partial \xi^{(0)A}}, \quad (3.14)$$

es decir se tiene un conjunto de M constricciones de la forma [20] [21]:

$$\Omega_m^{(0)}(\xi) = \left(v_m^{(0)}\right)_A \frac{\partial V^{(0)}}{\partial \xi^{(0)A}} = 0. \quad (3.15)$$

De manera similar a lo que ocurre en el formalismo de Dirac se impone que la evolución temporal de las constricciones $\Omega^{(0)}$ sea nula (*condición de consistencia*) [21]

$$\dot{\Omega}_m^{(0)} = \frac{\partial \Omega_m^{(0)}}{\partial \xi^{(0)A}} \dot{\xi}^{(0)A} = 0. \quad (3.16)$$

La información relevante del sistema está dada por las ecuaciones (3.7) y (3.16), i. e., las ecuaciones de movimiento que implican la existencia de constricciones y la conservación de dichas constricciones:

$$\begin{aligned} f_{AB}^{(0)} \dot{\xi}^{(0)B} &= \frac{\partial V^{(0)}}{\partial \xi^{(0)A}}, \\ \frac{\partial \Omega_m^{(0)}}{\partial \xi^{(0)B}} \dot{\xi}^{(0)B} &= 0. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Es posible escribir ambas ecuaciones en una sola expresión al definir la matriz

$$\bar{f}_{AB}^{(0)} \equiv \begin{pmatrix} f_{AB}^{(0)} \\ \frac{\partial \Omega_m^{(0)}}{\partial \xi^{(0)B}} \end{pmatrix}, \quad (3.18)$$

y el vector

$$Z_A \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial V^{(0)}}{\partial \xi^{(0)A}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.19)$$

donde $\bar{f}^{(0)}$ es una matriz de tamaño $(N + M) \times N$ y Z es un vector de tamaño $1 \times N$. Con estas definiciones las ecuaciones (3.17) se escriben como

$$\bar{f}_{AB}^{(0)} \dot{\xi}^{(0)B} = Z_A(\xi). \quad (3.20)$$

Aun cuando $\bar{f}^{(0)}$ no es una matriz cuadrada, ésta puede tener un conjunto de vectores nulos $\bar{v}_{\bar{m}}^{(0)}$ ($\bar{m} = 1, \dots, \bar{M} \leq N$) los cuales proporcionan información sobre la existencia de constricciones adicionales en la teoría [21]. Multiplicando por la izquierda a la ecuación (3.20) por $\bar{v}_{\bar{m}}^{(0)}$ se obtiene un conjunto de relaciones de la forma

$$\Omega_{\bar{m}}^{(1)} \equiv \left(\bar{v}_{\bar{m}}^{(0)} \right)_A Z_A \big|_{\Omega^{(0)}=0} = 0. \quad (3.21)$$

La sustitución $\left(\bar{v}_{\bar{m}}^{(0)} \right)_A Z_A \big|_{\Omega^{(0)}=0}$ implica que las constricciones $\Omega_{\bar{m}}^{(0)}$ ya no aparecerán en el desarrollo posterior. Una vez que se toman en cuenta las constricciones $\Omega^{(0)}$ la condición (3.21) puede conducir a identidades de la forma $0 = 0$ o a un nuevo conjunto de constricciones $\Omega^{(1)}$, si ocurre este último caso se impone nuevamente la condición de consistencia sobre estas nuevas constricciones: $\dot{\Omega}^{(1)} = 0$, definiendo una nueva matriz $\bar{f}^{(1)}$ de una manera similar a $\bar{f}^{(0)}$ y un nuevo vector $\bar{Z}$. Calculando los vectores nulos de $\bar{f}^{(1)}$ y contrayéndolos con $\bar{Z}$ se podrán obtener identidades o nuevas constricciones a las cuales se les impondrá la condición de consistencia, etc. El proceso es finito y continúa hasta que la condición de consistencia no genere nuevas constricciones.

Luego de un número n de pasos se ha determinado un total de M' constricciones del sistema (su evolución temporal no implica nuevas constricciones): $\Omega_{m'}^{(n)}$ ($m' = 1, \dots, M'$). La información de las constricciones encontradas se agrega al Lagrangiano vía un conjunto de multiplicadores de Lagrange $\lambda_{m'}^{(n)}$, esto es [20] [21]

$$\mathcal{L}^{(n)} = a_A^{(0)} \dot{\xi}^{(0)A} + \dot{\lambda}_{m'}^{(n)} \Omega^{(n)m'} - V^{(n)}(\xi), \quad (3.22)$$

donde $V^{(n)} \equiv V^{(0)} \big|_{\Omega^{(0)}=0, \Omega^{(1)}=0, \dots, \Omega^{(n)}=0}$. Se considerará al conjunto de multiplicadores de Lagrange λ como nuevas variables simplécticas adicionales, como consecuencia el conjunto

de variables simplécticas se amplía y se denotará por $\xi^{(n)}$:

$$\xi^{(n)} \equiv \left(\xi^{(0)}, \lambda^{(n)} \right), \quad (3.23)$$

siendo un conjunto de $(N + M')$ variables. Así mismo del Lagrangiano (3.22) se identifica una nueva 1-forma ampliada

$$a^{(n)} \equiv \left(a^{(0)}, \Omega^{(n)} \right). \quad (3.24)$$

Una vez que se ha determinado la forma final del Lagrangiano del sistema dado por (3.22) se calculan las ecuaciones de Euler-Lagrange las cuales determinarán la dinámica del sistema esta vez en términos del conjunto ampliado de variables simplécticas $\xi^{(n)}$. Las ecuaciones de Euler-Lagrange que se derivan del Lagrangiano (3.22) están dadas por [20] [21]

$$f_{AB}^{(n)} \dot{\xi}^{(n)B} = \frac{\partial V^{(n)}}{\partial \xi^{(n)A}}, \quad (3.25)$$

en este caso $A, B = 1, \dots, N, N + 1, \dots, N + M'$. La matriz simpléctica asociada $f_{AB}^{(n)} = \frac{\partial a_B^{(n)}}{\partial \xi^{(n)A}} - \frac{\partial a_A^{(n)}}{\partial \xi^{(n)B}}$ tiene la forma explícita:²

$$f^{(n)} = \begin{pmatrix} f^{(0)} & \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \\ -\left(\frac{\partial \Omega}{\partial \xi}\right)^T & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.26)$$

En el caso de que esta matriz sea regular existirá su inversa $[f^{(n)}]^{-1}$ y a partir de ésta se definirán los *paréntesis generalizados de Faddeev-Jackiw*

$$\left[f^{(n)} \right]_{AB}^{-1} \equiv \left\{ \xi^{(n)A}, \xi^{(n)B} \right\}_{FJ}. \quad (3.27)$$

Es importante mencionar que los paréntesis generalizados de Faddeev - Jackiw coinciden con los paréntesis de Dirac obtenidos en el formalismo de Dirac al trabajar en el esquema completo [21].

²Esto da la justificación para la introducción de los multiplicadores de Lagrange en la ecuación (3.22) en la forma de derivadas temporales $\dot{\lambda}^{(n)}$. Supóngase que se introdujeran en la forma $L^{(n)} = a_i^{(0)} \dot{\xi}^{(0)i} + \Omega_m^{(n)} \lambda^{(n)m'} - V^{(n)}$. En ese caso las ecuaciones de Euler-Lagrange que se obtendrían serían

$$\begin{aligned} f^{(0)} \dot{\xi} &= \frac{\partial V^{(n)}}{\partial \xi}, \\ \Omega^{(n)} &= 0, \end{aligned}$$

lo cual, por supuesto, es correcto. Sin embargo $f^{(0)}$ sigue siendo singular y por lo tanto esto no permite determinar ni los paréntesis de FJ ni permite determinar la evolución del sistema de manera sencilla.

Sin embargo, si aun después de obtener el conjunto completo de constricciones la matriz $f^{(n)}$ continúa siendo singular implicará la existencia de *simetrías de norma* de modo que será necesario fijar la norma con el objetivo de poder invertir la matriz simpléctica, es decir, se deben elegir ciertas condiciones sobre las variables dinámicas de modo que estas condiciones introducidas como nuevas constricciones hagan a la matriz simpléctica regular. La elección de dichas condiciones es hasta cierto punto arbitraria ya que la única condición que se exige es que permitan invertir la matriz $f^{(n)}$. Dichas condiciones de norma se agregan al formalismo de manera similar a las constricciones $\Omega^{(n)}$, es decir, mediante multiplicadores de Lagrange, que amplían el conjunto de variables simplécticas y la 1-forma, para luego calcular la matriz simpléctica y su inversa, permitiendo identificar los paréntesis generalizados de Faddeev-Jackiw.

La correspondencia entre las entradas de la matriz inversa $[f^{(n)}]^{-1}$, i.e., los paréntesis generalizados de Faddeev - Jackiw, con los paréntesis de Dirac es una de las características más importantes del formalismo de FJ. Esta relación se expresa en la siguiente proposición

Proposición: Si $f^{(n)}$ es regular entonces las entradas de la matriz inversa corresponden con los paréntesis de Dirac entre las variables simplécticas:

$$[f^{(n)}]_{AB}^{-1} = \left\{ \xi^{(n)A}, \xi^{(n)B} \right\}_D. \quad (3.28)$$

Hay que señalar que este resultado es válido siempre que se trabaje en el esquema completo del formalismo de Dirac [28] [29].

En este contexto, el conteo de grados de libertad se realiza como

$$\begin{aligned} \text{Grados de libertad} &= \text{Número de Variables Dinámicas} \\ &\quad - \text{Número de Constricciones Independientes}, \end{aligned} \quad (3.29)$$

por supuesto en el conteo se deben tomar en cuenta las condiciones de norma en caso de que haya sido necesario introducirlas para poder hacer invertible la matriz simpléctica.

El formalismo de FJ permite determinar las transformaciones de norma, las cuales dejan invariante la acción del sistema [30]

Proposición: Sean $\left(v_l^{(n)} \right)_A$ vectores nulos de $f^{(n)}$ (ecuación (3.26)), entonces

$$\delta \xi^A = \epsilon_l \left(v_l^{(n)} \right)_A, \quad (3.30)$$

donde $l = 1, \dots, L$ (número de vectores nulos) y $A = 1, \dots, N + M'$ (número de variables simplécticas), son un conjunto de transformaciones que dejan invariante la acción del sistema.

Demostración: Sea el conjunto de variables simplécticas $\xi^{(n)} = (\xi^{(0)}, \lambda^{(n)})$ y la 1-forma $a^{(n)} = (a^{(0)}, \Omega^{(n)})$. El Lagrangiano del sistema se escribe como (3.22):

$$\mathcal{L}^{(n)} = a_A^{(n)} \dot{\xi}^{(0)A} - V^{(n)}. \quad (3.31)$$

y por tanto la acción del sistema

$$S[\xi, \dot{\xi}, \dot{\lambda}] = \int dt \mathcal{L}^{(n)}. \quad (3.32)$$

El cambio de la acción bajo una variación infinitesimal de las variables $\delta\xi$ está dado por

$$\delta S = \int \delta \mathcal{L}^{(n)} dt = \int \delta \xi^{(n)A} \left[f_{AB}^{(n)} \dot{\xi}^{(n)B} - \frac{\partial V^{(n)}}{\partial \xi^{(n)A}} \right] dt, \quad (3.33)$$

si $\delta \xi^A = \epsilon_l \left(v_l^{(n)} \right)^A$, donde $\left(v_l^{(n)} \right)^A$ son los vectores nulos de $f_{AB}^{(n)}$

$$\begin{aligned} \delta I &= \int \epsilon_l \left[\left(v_l^{(n)} \right)^A f_{AB}^{(n)} \dot{\xi}^{(n)B} - \left(v_l^{(n)} \right)^A \frac{\partial V^{(n)}}{\partial \xi^{(n)A}} \right] dt \\ &= \int (-\epsilon_l) \left(v_l^{(n)} \right)^A \frac{\partial V^{(n)}}{\partial \xi^{(n)A}} dt \\ &= \int (-\epsilon_l) \Omega_l^{(n)} dt = 0, \end{aligned} \quad (3.34)$$

lo cual demuestra la proposición.

Se concluye este capítulo con un pequeño comentario sobre el formalismo de FJ. Como se ha visto es un método alternativo al formalismo de Dirac para tratar con teorías singulares aun cuando en este caso el Lagrangiano debe tener una forma lineal en las velocidades generalizadas, se ha mostrado que es posible obtener una versión de esta forma de cualquier Lagrangiano al introducir nuevas variables. Por otro lado, en términos de cálculo es más simple ya que no se requiere de clasificar las constricciones del sistema en primer y segunda clase como ocurre en el formalismo de Dirac, sin embargo se comprueba que los resultados obtenidos en este formalismo encuentran su correspondencia en el formalismo

de Dirac. De esta manera el formalismo de FJ es una opción para analizar las teorías singulares complementando el estudio que se desarrolla con el método de Dirac y su utilidad ha sido comprobada en el análisis de teorías singulares [6] [11] [22] [23]. En los siguientes capítulos se aplicará este método a una teoría BF en cuatro dimensiones y posteriormente a una acción tipo Holst en tres dimensiones, comparando los resultados obtenidos con este método y mediante el formalismo de Dirac.

Capítulo 4

Análisis Hamiltoniano y simpléctico a una Teoría BF en $3+1$ dimensiones con variables tipo Ashtekar

Las teorías BF son las únicas teorías topológicas conocidas que pueden formularse consistentemente en una variedad $\mathcal{M}$ de cualquier dimensión n [31]. Su nombre hace referencia a que en su definición están involucradas la curvatura de la conexión que usualmente se denota por F la cual es una 2-forma, y una $(n - 2)$ - forma B . La importancia de este tipo de teorías reside en dos hechos relevantes desde el punto de vista del estudio de la Relatividad General; por una parte comparte similitudes con dicha teoría, como es que se puede definir sin la necesidad de establecer una métrica de fondo o cualquier estructura geométrica fija implicando que las teorías son covariantes ante difeomorfismos. Por otra parte, se sabe que es posible reformular a RG como una teoría BF con constricciones extra, llamadas *condiciones de simplicidad*, las cuales una vez resueltas permiten recobrar la acción de Hilbert-Palatini, enfoque que se le debe a J. Plebański [32] y que se abordará más adelante.

En la primera parte de este capítulo, se expondrá la forma general de las teorías BF , su dinámica y sus propiedades teniendo un interés especial por las teorías en tres y cuatro dimensiones. En la segunda parte, se expondrá el análisis canónico realizado a una teoría

BF en cuatro dimensiones utilizando variables tipo Ashtekar [7]. Entre los resultados que se obtuvieron está el conjunto completo de constricciones de la teoría y su clasificación así como el álgebra entre ellas, los paréntesis de Dirac, las transformaciones de norma y el conteo de grados de libertad. En este análisis se trabajó con el esquema estricto del formalismo de Dirac, es decir considerando como variables dinámicas al conjunto completo de variables que definen la teoría. El análisis aquí desarrollado no había sido reportado en la literatura y ha sido publicado en la referencia [6].

4.1 Teorías BF

Las teorías BF son ejemplos de teorías topológicas, es decir, sistemas que no presentan grados de libertad físicos por punto [33], característica que comparten con Relatividad General en tres dimensiones, la cual es topológica. Las teorías BF son las únicas teorías topológicas conocidas que pueden ser definidas en una variedad de cualquier dimensión teniendo un interés particular en tres y cuatro dimensiones debido a su relación con Relatividad General [31] [34] [35]. Una teoría BF en un espacio-tiempo $\mathcal{M}$ de dimensión arbitraria n tiene como variables dinámicas la 1-forma de conexión $A^{IJ} = A_{\mu}^{IJ} dx^{\mu}$ y una $(n-2)$ -forma B^{IJ} . En lo sucesivo se usará la siguiente notación $\mu, \nu, \dots = 0, 1, 2, \dots$ correspondiendo a índices de espacio-tiempo mientras que $I, J, K, \dots = 0, 1, 2, 3, \dots$ indicarán índices de grupo interno. Se define la 2-forma curvatura de la conexión $F^{IJ} = \frac{1}{2} F_{\mu\nu}^{IJ} dx^{\mu} \wedge dx^{\nu}$ donde $F_{\mu\nu}^{IJ} = \partial_{\mu} A_{\nu}^{IJ} - \partial_{\nu} A_{\mu}^{IJ} + A_{\mu}^{IK} A_{\nu K}^J - A_{\nu}^{JK} A_{\mu K}^I$.

En general la acción que define una teoría BF tiene la siguiente forma

$$S_{BF}[A, B] = \int_{\mathcal{M}} tr[B \wedge F], \quad (4.1)$$

y las ecuaciones de Euler-Lagrange se obtienen variando la acción anterior

$$\begin{aligned} 0 = \delta S_{BF} &= \delta \int_M tr[B \wedge F] \\ &= \int_M tr[\delta B \wedge F + B \wedge \delta F] \\ &= \int_M tr[\delta B \wedge F + B \wedge D\delta A] \\ &= \int_M tr[\delta B \wedge F + (-1)^{n-1} DB \wedge \delta A], \end{aligned} \quad (4.2)$$

donde el operador D indica la derivada covariante. En el segundo paso se ha utilizado la identidad $\delta F = D\delta A$. Ya que B y A son independientes, la variación anterior conduce a las

ecuaciones Euler-Lagrange [34]

$$\begin{aligned} F &= 0, \\ DB &= 0. \end{aligned} \tag{4.3}$$

La ecuación de movimiento $F = 0$ implica que la variedad es localmente plana es decir que localmente luce como el espacio de Minkowski.

4.2 Teoría BF en 3 dimensiones

Como se mencionó se tiene un interés especial en las teorías BF formuladas en tres y cuatro dimensiones. Como se explicará a continuación es fácil ver que Relatividad General en tres dimensiones es un caso particular de una teoría BF [36]. Para ver esto recordemos la forma en que está formulada la acción de Palatini en tres dimensiones y comparémosla con una teoría BF . Desde el punto de vista de la formulación de Palatini en la cual la acción de Einstein-Hilbert se reescribe en términos de una tríada de 1-formas e_μ^I y la 1-forma de conexión A_μ^I cuya curvatura es una 2-forma denotada por $F_{\mu\nu}^I$ con grupo de simetría $SO(2, 1)$. En esta formulación, la métrica es una cantidad que se deriva como

$$g_{\mu\nu} = e_\mu^I e_\nu^J \eta_{IJ}, \tag{4.4}$$

donde se supone que $g_{\mu\nu}$ es regular, es decir que su determinante es diferente de cero. En tres dimensiones, la acción de Hilbert-Palatini es de la forma

$$S[e, A] = \int tr[e \wedge F[A]], \tag{4.5}$$

y tiene las ecuaciones de movimiento $D_\mu e_\nu^I = 0$ y $F_{\mu\nu}^{IJ} = 0$. La ecuación $F_{\mu\nu}^{IJ} = 0$ implica que la conexión es plana y conduce a las ecuaciones de Einstein en tres dimensiones una vez que la condición de no torsión $D_\mu e_\nu^I = 0$ es resuelta y se usa esta solución en $F_{\mu\nu}^{IJ} = 0$. Considerando ahora la acción (4.1) definida en un espacio-tiempo $\mathcal{M}$ de dimensión $n = 3$, la acción estará definida en términos de una 1-forma B^I , la 1-forma de conexión A^I y su curvatura $F^I[A]$. La variación de la acción (4.1) implica que $DB = 0$ y $F = 0$. Comparando las ecuaciones de movimiento de ambas teorías se encuentra que tienen la misma forma por lo que se puede pensar que una teoría BF en 3 dimensiones con grupo de simetría $SO(2, 1)$ es solo una formulación alternativa de Relatividad General lorentziana, siendo B el análogo de la tríada e^I , sin embargo, se debe notar que no se ha supuesto que el determinante de

B sea diferente de cero y dado que es el análogo de la tríada e^I se puede pensar que las teorías BF incluyen el caso de una métrica $g_{\mu\nu}$ degenerada. Por lo tanto, una teoría BF en tres dimensiones con grupo de norma $SO(2,1)$ es una generalización de la acción de Hilbert-Palatini para el caso de métricas degeneradas.

Una generalización inmediata es escribir una teoría BF en cuatro dimensiones con grupo de Lorentz como grupo interno. En 4 dimensiones una teoría BF está definida por

$$S[A, B] = \int_M B^{IJ} \wedge F_{IJ} = \frac{1}{4} \int \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} B_{\mu\nu}^{IJ} F_{\rho\sigma IJ} d^4x, \quad (4.6)$$

donde la 2-forma $B^{IJ} = \frac{1}{2} B_{\mu\nu}^{IJ} dx^\mu \wedge dx^\nu$, $F_{IJ}(A) = \frac{1}{2} F_{\mu\nu IJ} dx^\mu \wedge dx^\nu$ con $F_{\mu\nu}^{IJ} = \partial_\mu A_\nu^{IJ} - \partial_\nu A_\mu^{IJ} + A_\mu^{IK} A_{\nu K}^J - A_\mu^{JK} A_{\nu K}^I$, $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ es el símbolo de Levi-Civita totalmente antisimétrico. $I, J, \dots = 0, 1, 2, 3$ son índices de Lorentz que pueden subirse y bajarse con la métrica de Minkowski $\eta_{IJ} = (-1, 1, 1, 1)$. Se volverá a esta acción en la siguiente sección.

4.3 Relatividad General obtenida de una teoría tipo BF

Partiendo de una teoría BF es posible obtener la acción de Hilbert-Palatini si se imponen constricciones adicionales sobre las variables $B_{\mu\nu}^{IJ}$, estas constricciones son llamadas *condiciones de simplicidad*. Este hecho fue observado por primera vez por Jerzy Plebański [37] [38] [39] [40] [41]. Para mostrar esto se introduce una acción tipo BF en cuatro dimensiones

$$S[e, A, \phi] = \int B^{IJ} \wedge F_{IJ}[A] + \frac{1}{4} \phi^{\mu\nu\rho\sigma} C_{\mu\nu\rho\sigma}[B] \quad (4.7)$$

con grupo de simetría $SO(3,1)$ o $SO(4)$. Aquí A^{IJ} es la 1-forma de conexión, F^{IJ} es la curvatura de la conexión, e^I es la 1-forma tétrada, $C_{\mu\nu\rho\sigma}[B]$ es una restricción adicional que se impone sobre las variables B y los $\phi^{\mu\nu\rho\sigma}$ multiplicadores de Lagrange tales que $\phi^{\mu\nu\rho\sigma} = \phi^{[\mu\nu][\rho\sigma]}$ y sobre los que se impone la condición adicional $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \phi^{\mu\nu\rho\sigma} = 0$ [38].

Las ecuaciones de movimiento que se derivan de la acción (4.7) son [42]

$$\frac{\delta S}{\delta A} = DB = 0, \quad (4.8)$$

$$\frac{\delta S}{\delta B} = F + \phi_{\mu\nu\rho\sigma} \frac{\delta C^{\mu\nu\rho\sigma}}{\delta B} = 0, \quad (4.9)$$

$$\frac{\delta S}{\delta \phi} = C[B] = 0. \quad (4.10)$$

Como se puede ver de las ecuaciones de movimiento la variación de la acción (4.7) respecto al multiplicador $\phi_{\mu\nu\rho\sigma}$ impone una restricción sobre las variables B^{IJ} , en particular se

impone la constricción $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} B_{\mu\nu}^{IJ} B_{\rho\sigma}^{KL} = \frac{\mathcal{V}}{4!} \epsilon^{IJKL}$ [37], a esta condición se le conoce como *condición de simplicidad* y a $\mathcal{V}$ se le llamará volumen cuatridimensional. Cuando $\mathcal{V} \neq 0$ se dice que se satisface la condición de *no degeneración*. Por otro lado, también es posible escribir $\mathcal{V}$ en términos de B^{IJ} al contraer con $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ la constricción de simplicidad, obteniendo $\mathcal{V} = \frac{1}{24} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_{IJKL} B_{\mu\nu}^{IJ} B_{\rho\sigma}^{KL}$.

Las *condiciones de simplicidad* y *no degeneración* se satisfacen simultáneamente si existe una tétrada de 1-formas $e^I = e_\mu^I dx^\mu$ no degenerada de tal modo que B^{IJ} pueda escribirse en alguna de las dos formas [37]

$$B^{IJ} = \pm e^I \wedge e^J \quad \text{sector topológico,} \quad (4.11)$$

$$B^{IJ} = \pm \frac{1}{2} \epsilon^{IJ}_{KL} e^K \wedge e^L \quad \text{sector físico.} \quad (4.12)$$

Esto establece una relación entre la acción BF y la acción de Palatini. La solución (4.12) representa el *sector físico* de las soluciones y es tal que al sustituir $B^{IJ} = \pm \frac{1}{2} \epsilon^{IJ}_{KL} e^K \wedge e^L$ en la acción (4.7) se obtiene la acción de Hilbert-Palatini [37] tal como se deseaba. Por otro lado a la solución (4.11) se conoce como *sector topológico* ya que al sustituir en (4.7) conduce a una teoría topológica, sin grados de libertad locales, de hecho la acción toma la forma del término de Holst del cual se hablará más adelante. Cabe mencionar que en [43] se demuestra que el término de Holst corresponde a una teoría topológica y que dicho término al escribirlo en términos de variables de Ashtekar da un camino para entender los grados de libertad presentes en la entropía de agujeros negros que aparece en Gravedad Cuántica de Lazos.

4.4 Partícula libre escrita como una acción tipo BF

Esta sección tiene dos objetivos. El primero es mostrar la utilidad de las teorías BF como una forma alternativa de reformular ciertas teorías de interés, para mostrar esto se estudiará el sistema físico más sencillo de todos: el de partícula libre formulada como una teoría tipo BF. Por otro lado este sencillo sistema también sirve para ilustrar los métodos de Dirac y de Faddeev-Jackiw, así como su equivalencia.

Como se sabe, una partícula libre se caracteriza por la acción

$$S = \int dt \frac{1}{2} \dot{x}^i \dot{x}_i, \quad (4.13)$$

donde $i = 1, 2, 3$, y tiene como ecuaciones de movimiento $\frac{d}{dt}\dot{x}_i = 0$, lo cual implica que $\dot{x}$ es constante en el tiempo, un resultado que se conoce de mecánica clásica elemental. Considérese ahora una acción tipo BF dependiente de las coordenadas x y de una variable auxiliar B de la forma

$$S[x, B] = \int [B^i \dot{x}_i - \frac{1}{2} B^i B_i] dt, \quad (4.14)$$

esta acción tiene como ecuaciones de movimiento $\dot{B}_i = 0$ y $\dot{x}_i - B_i = 0$, combinando ambas ecuaciones se obtiene $\ddot{x} = 0$ es decir $\dot{x}$ es constante, un resultado que ya se conocía y se esperaba.

Este sistema tan simple nos da un ejemplo de la utilidad de las teorías BF permitiendo recuperar casos de interés físico al considerar a la variable B como una variable auxiliar sobre la que se pueden imponer condiciones adicionales, si bien es cierto que en este caso eso no fue necesario ya que las propias ecuaciones de movimiento implican que B está relacionada con el momento del sistema.

Partiendo de la acción (4.14) se desarrollará el formalismo de Dirac, para esto se asocia a cada variable dinámica x_i y B_i (6 en total) un momento conjugado p^i , π^i , tal que se cumplen las relaciones $\{x_i, p^j\} = \delta_i^j$ y $\{B_i, \pi^j\} = \delta_i^j$.

Por otro lado, por definición el momento canónico se calcula como $p^i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = B^i$ y $\pi^i = \frac{\partial L}{\partial \dot{B}_i} = 0$, por lo tanto se tienen las siguientes constricciones primarias

$$\phi^i \equiv p^i - B^i \approx 0, \quad (4.15)$$

$$\Phi^i \equiv \pi^i \approx 0. \quad (4.16)$$

El Hamiltoniano primario H_1 es por tanto $H_1 = \frac{1}{2} p_i p^i + \lambda_i (p^i - B^i) + \Lambda_i \pi^i$, donde λ_i y Λ_i son multiplicadores de Lagrange. La condición de consistencia fija el valor de los multiplicadores $\lambda = 0$, $\Lambda = 0$ y no se obtienen nuevas constricciones. Además es claro que las constricciones (4.15) y (4.16) son de segunda clase. Al calcular el número de grados de libertad se encuentra $GL = \frac{1}{2} [12 - 6] = 3$ como era de esperarse. Ya que las constricciones son de segunda clase y se podrá calcular el paréntesis de Dirac, para lo cual se define una matriz cuyas entradas están dadas por $C_{ij} \equiv \{\chi_i, \chi_j\}$, donde χ_i son las constricciones de segunda clase y posteriormente se determina su inversa C^{-1} . En este caso

$$[C^{-1}]_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \eta_{ij} \\ -\eta_{ij} & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.17)$$

El paréntesis de Dirac para dos funciones del espacio fase está definido por $\{A, B\}_D = \{A, B\} - \{A, \chi_i\} C_{ij}^{-1} \{\chi_j, B\}$, esto es:

$$\{x_i, p^j\}_D = \delta_i^j, \quad (4.18)$$

$$\{B_i, \pi^j\}_D = \delta_i^j, \quad (4.19)$$

$$\{x_i, B^j\}_D = \delta_i^j \quad (4.20)$$

notemos que una diferencia en relación a los paréntesis de Poisson usuales definidos al comienzo del análisis consiste en que el paréntesis de Dirac entre x y B es diferente de cero, lo cual tampoco es tan sorprendente ya que B está relacionado con el momento canónico de x .

Ahora se realizará el análisis de FJ a la acción (4.14) identificando el Lagrangiano

$$L = B^i \dot{x}_i - \frac{1}{2} B^i B_i \equiv B^i \dot{x}_i - V, \quad (4.21)$$

las variables dinámicas $\xi = (x_i, B_i)$, la 1-forma $a = (B^i, 0)$ y el potencial simpléctico $V = \frac{1}{2} B^i B_i$. Se calcula la matriz simpléctica $f_{ij} \equiv \frac{\partial a_j}{\partial \xi^i} - \frac{\partial a_i}{\partial \xi^j}$ comprobando que es regular y por lo tanto la teoría no presenta constricciones de FJ. Su inversa es la siguiente:

$$[f^{-1}]_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \eta_{ij} \\ -\eta_{ij} & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.22)$$

y como se ha mencionado, las entradas de la matriz f^{-1} se identifican con los paréntesis de FJ entre las variables simplécticas y éstas a su vez están relacionadas con el paréntesis de Dirac entre las variables simplécticas obtenidas en el formalismo de Dirac, en particular

$$\{x_i, B_j\}_{FJ} = \eta_{ij}. \quad (4.23)$$

Comparando (4.20) y (4.23) se comprueba que son iguales, tal como se esperaba.

Como se ha visto en este sencillo ejemplo el formalismo de Dirac y el de FJ conduce a resultados similares por dos vías diferentes y queda claro que el formalismo de FJ es menos tedioso en términos de cálculos respecto al de Dirac. En la siguiente sección se aplicarán ambos formalismos en el estudio de un sistema mucho más complicado como lo es una teoría BF en 4 dimensiones con grupo de simetría $SO(3, 1)$, y se compararán los resultados obtenidos en ambos formalismos.

4.5 Análisis simpléctico a una teoría BF 3+1 dimensional

En esta sección se desarrollará el análisis de FJ aplicado a una teoría BF en 4 dimensiones con grupo de simetría $SO(3,1)$. Con el objetivo de trabajar con un grupo compacto se romperá el grupo de Lorentz, el grupo resultante es $SO(3)$. Es importante mencionar que en [5] se realizó un análisis canónico a una teoría BF con grupo de simetría $SO(3,1)$, sin embargo, en ese artículo los paréntesis de Dirac no se reportan ya que al trabajar con el grupo $SO(3,1)$ las constricciones de Dirac no tiene una estructura simple y esto dificulta la construcción de tales paréntesis. Por lo tanto, los resultados reportados en esta sección son un aporte original a la literatura.

Entre los resultados obtenidos más importantes se reporta el conjunto completo de constricciones de FJ, el conteo de grados de libertad, y mediante la correcta fijación de la norma se pudieron determinar los paréntesis generalizados de FJ, los cuales se compararán con los paréntesis de Dirac obtenidos en la siguiente sección.

El punto de inicio del análisis es la acción de una teoría BF cuatridimensional

$$S[A_\mu^{IJ}, B_{\alpha\beta}^{KL}] = \Xi \int_M F^{IJ} \wedge B_{IJ}, \quad (4.24)$$

donde Ξ es una constante, $B^{IJ} = \frac{1}{2} B_{\alpha\beta}^{IJ} dx^\alpha \wedge dx^\beta$ es un conjunto de seis 1-formas valuadas en $SO(3,1)$, la 2-forma de curvatura F de la conexión de Lorentz es definida como $F_{\mu\nu IJ} = \partial_\mu A_{\nu IJ} - \partial_\nu A_{\mu IJ} + A_{\mu IK} A_{\nu J}^K - A_{\mu JK} A_{\nu I}^K$. La notación que se usará es $I, J, K \dots = 0, 1, 2, 3$ para índices de Lorentz internos que pueden subir o bajar mediante la métrica interna $\eta_{IJ} = (-1, 1, 1, 1)$, x^μ son las coordenadas que etiquetan puntos de una variedad 4-dimensional M , y $\alpha, \beta, \mu, \dots = 0, 1, 2, 3$ son índices de espacio-tiempo.

Mediante la descomposición $3 + 1$ y rompiendo el grupo de Lorentz a $SO(3)$ se obtiene la siguiente densidad Lagrangiana

$$\begin{aligned} L = \Xi \int d^3x \eta^{abc} & \left[B_{ab}^{0i} \dot{A}_{c0i} + \frac{1}{2} B_{ab}^{ij} \dot{A}_{cij} \right. \\ & + \frac{1}{2} A_{0ij} \left(\partial_c B_{ab}^{ij} + B_{ab}^{il} A_c^j{}_l + 2 B_{ab}^{0i} A_{c0}^j \right) \\ & + A_{00i} \left(\partial_c B_{ab}^{0i} + B_{ab}^{0j} A_c^i{}_j + B_{ab}^{ij} A_{c0j} \right) \\ & + B_{0a}^{0i} \left(\partial_b A_{c0i} - \partial_c A_{b0i} + A_{b0j} A_c^j{}_i + A_{c0}^j A_{bij} \right) \\ & \left. + \frac{1}{2} B_{0a}^{ij} \left(\partial_b A_{cij} - \partial_c A_{bij} + A_{bil} A_c^l{}_j + A_{bi0} A_c^0{}_j - A_{bjl} A_c^l{}_i - A_{bj0} A_c^0{}_i \right) \right], \end{aligned} \quad (4.25)$$

donde $a, b, c, \dots = 1, 2, 3$, $\epsilon^{0abc} = \eta^{abc}$ y $i, j, k, l, \dots = 1, 2, 3$ son índices que pueden subir y bajar mediante la métrica euclídea $\eta_{ij} = (1, 1, 1)$.

Al introducir el siguiente cambio de variable [7]

$$\begin{aligned} A_{aij} &\equiv -\epsilon_{ijk} A_a^k, \\ A_{0ij} &\equiv -\epsilon_{ijk} A_0^k, \\ B_{abij} &\equiv -\epsilon_{ijk} B_{ab}^k, \\ B_{0aij} &\equiv -\epsilon_{ijk} B_{0a}^k, \\ A_{ai} &\equiv \Upsilon_{ai}, \end{aligned} \tag{4.26}$$

el Lagrangiano toma la siguiente forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \Xi \eta^{abc} B_{ab}^{0i} \dot{A}_{c0i} + \Xi \eta^{abc} B_{abi} \dot{\Upsilon}_c^i \\ & - \left[-A_0^i \left(\partial_c \left(\Xi \eta^{abc} B_{abi} \right) + \Xi \eta^{abc} \epsilon_{ik}^j B_{abj} \Upsilon_c^k - \Xi \eta^{abc} \epsilon_{jki} B_{ab}^{0j} A_{c0}^k \right) \right. \\ & - A_{00i} \left(\partial_c \left(\Xi \eta^{abc} B_{ab}^{0i} \right) - \Xi \eta^{abc} \epsilon_{jk}^i B_{ab}^{0j} \Upsilon_c^k - \Xi \eta^{abc} \epsilon^{ijk} B_{abk} A_{c0j} \right) \\ & - \Xi \eta^{abc} B_{0a}^{0i} \left(\partial_b A_{c0i} - \partial_c A_{b0i} + \epsilon_i^{jk} A_{b0j} \Upsilon_{ck} - \epsilon_{ijk} A_{c0}^j \Upsilon_b^k \right) \\ & \left. - \Xi \eta^{abc} B_{0ai} \left(\partial_b \Upsilon_c^i - \partial_c \Upsilon_b^i + \epsilon_{jk}^i \Upsilon_b^j \Upsilon_c^k - \epsilon^{ijk} A_{b0j} A_{c0k} \right) \right]. \end{aligned} \tag{4.27}$$

De lo anterior, se identifica el Lagrangiano simpléctico

$$\mathcal{L}^{(0)} = \Xi \eta^{abc} B_{ab}^{0i} \dot{A}_{c0i} + \Xi \eta^{abc} B_{abi} \dot{\Upsilon}_c^i - \mathcal{V}^{(0)}, \tag{4.28}$$

claramente (4.28) es lineal en las velocidades generalizadas y $\mathcal{V}^{(0)}$ es el potencial simpléctico dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{V}^{(0)} = & -A_0^i \left(\partial_c \left(\Xi \eta^{abc} B_{abi} \right) + \Xi \eta^{abc} \epsilon_{ik}^j B_{abj} \Upsilon_c^k - \Xi \eta^{abc} \epsilon_{jki} B_{ab}^{0j} A_{c0}^k \right) \\ & - A_{00i} \left(\partial_c \left(\Xi \eta^{abc} B_{ab}^{0i} \right) - \Xi \eta^{abc} \epsilon_{jk}^i B_{ab}^{0j} \Upsilon_c^k - \Xi \eta^{abc} \epsilon^{ijk} B_{abk} A_{c0j} \right) \\ & - \Xi \eta^{abc} B_{0a}^{0i} \left(\partial_b A_{c0i} - \partial_c A_{b0i} + \epsilon_i^{jk} A_{b0j} \Upsilon_{ck} - \epsilon_{ijk} A_{c0}^j \Upsilon_b^k \right) \\ & - \Xi \eta^{abc} B_{0ai} \left(\partial_b \Upsilon_c^i - \partial_c \Upsilon_b^i + \epsilon_{jk}^i \Upsilon_b^j \Upsilon_c^k - \epsilon^{ijk} A_{b0j} A_{c0k} \right). \end{aligned} \tag{4.29}$$

Del Lagrangiano (4.28) se identifica el siguiente conjunto de variables simplécticas $\xi^{(0)} = (A_{a0i}, B_{ab}^{0i}, \Upsilon_a^i, B_{abi}, A_0^i, A_{00i}, B_{0a}^{0i}, B_{0ai})$ y la 1-forma $a^{(0)} = (\Xi \eta^{abc} B_{ab}^{0i}$
 $, 0, \Xi \eta^{abc} B_{abi}, 0, 0, 0, 0, 0)$. La matriz simpléctica definida como $f_{AB}^{(0)} = \frac{\delta a_B}{\delta \xi^A} - \frac{\delta a_A}{\delta \xi^B}$, ($A, B =$

1, ..., 8) está dada por

$$f^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & -\Xi\eta^{abc}\delta_j^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Xi\eta^{abc}\delta_j^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\Xi\eta^{abc}\delta_j^i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Xi\eta^{abc}\delta_j^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(x-y),$$

donde x y $y \in \mathbb{R}^3$. Es obvio que $f^{(0)}$ es singular y por lo tanto existirán constricciones. La matriz $f^{(0)}$ tiene el siguiente conjunto de 4 vectores nulos

$$v^{(0)}_1{}^\mu = (0, 0, 0, 0, V^{A_0^i}, 0, 0, 0), \quad (4.30)$$

$$v^{(0)}_2{}^\mu = (0, 0, 0, 0, 0, V^{A_{00i}}, 0, 0), \quad (4.31)$$

$$v^{(0)}_3{}^\mu = (0, 0, 0, 0, 0, 0, V^{B_{0a}^{0i}}, 0), \quad (4.32)$$

$$v^{(0)}_4{}^\mu = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, V^{B_{0ai}}), \quad (4.33)$$

donde $V^{A_0^i}$, $V^{A_{00i}}$, $V^{B_{0a}^{0i}}$ y $V^{B_{0ai}}$ son funciones arbitrarias. Usando estos vectores nulos se encuentran las siguientes constricciones

$$\begin{aligned} \Omega^{(0)}_i &= \int d^3x V^{A_0^i} \frac{\delta}{\delta A_0^i} \int d^3y \mathcal{V}^{(0)}(\xi) \\ &= \partial_c \left(\Xi \eta^{abc} B_{abi} \right) + \Xi \eta^{abc} \epsilon^j_{ik} B_{abj} \Upsilon_c^k - \Xi \eta^{abc} \epsilon_{jki} B_{ab}^{0j} A_{c0}^k, \\ \Omega^{(0)}_{00i} &= \int d^3x V^{A_{00i}} \frac{\delta}{\delta A_{00i}} \int d^3y \mathcal{V}^{(0)}(\xi) \\ &= \partial_c \left(\Xi \eta^{abc} B_{ab}^{0i} \right) - \Xi \eta^{abc} \epsilon^i_{jk} B_{ab}^{0j} \Upsilon_c^k - \Xi \eta^{abc} \epsilon^{ijk} B_{abk} A_{c0j}, \\ \Omega^{(0)}_{0a}{}_{0i} &= \int d^3x V^{B_{0a}^{0i}} \frac{\delta}{\delta B_{0a}^{0i}} \int d^3y \mathcal{V}^{(0)}(\xi) \\ &= \Xi \eta^{abc} \left(\partial_b A_{c0i} - \partial_c A_{b0i} + \epsilon_i^{jk} A_{b0j} \Upsilon_{ck} - \epsilon_{ijk} A_{c0}^j \Upsilon_b^k \right), \\ \Omega^{(0)}_{0ai} &= \int d^3x V^{B_{0ai}} \frac{\delta}{\delta B_{0ai}} \int d^3y \mathcal{V}^{(0)}(\xi) \\ &= \Xi \eta^{abc} \left(\partial_b \Upsilon_c^i - \partial_c \Upsilon_b^i + \epsilon^i_{jk} \Upsilon_b^j \Upsilon_c^k - \epsilon^{ijk} A_{b0j} A_{c0k} \right). \end{aligned} \quad (4.34)$$

Se observa que estas constricciones son las constricciones secundarias obtenidas mediante el método de Dirac (ver la siguiente sección). Para ver si existen más constricciones se calcula

la matriz $\bar{f}$ y el vector Z : $\bar{f}_{AB}\dot{\xi}^{(0)B} = Z_A(\xi)$, donde

$$\bar{f} = \begin{pmatrix} f_{AB}^{(0)} \\ \frac{\delta\Omega_A^{(0)}}{\delta\xi^{(0)B}} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad Z = \begin{pmatrix} \frac{\delta\mathcal{Y}^{(0)}}{\delta\xi^{(0)B}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.35)$$

La matriz $\bar{f}$ está dada explícitamente como

$$\bar{f} = \begin{pmatrix} 0 & -\Xi\eta^{abc}\delta_j^i & 0 \\ \Xi\eta^{abc}\delta_j^i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Xi\eta^{abc}\delta_j^i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\Xi\eta^{abc}\epsilon_{jki}B_{ab}^{oj} & -\Xi\eta^{abc}\epsilon_{kji}A_{c0}^j & \Xi\eta^{abc}\epsilon_{ik}^j B_{abj} \\ -\Xi\eta^{abc}\epsilon^{ikj}B_{abj} & \Xi\eta^{abc}\left(\delta_k^i\partial_c - \epsilon^i_{jk}\Upsilon_c^j\right) & -\Xi\eta^{abc}\epsilon^i_{jk}B_{ab}^{0j} \\ 2\Xi\eta^{abc}\left(\delta_i^k\partial_c - \epsilon_i^{kj}\Upsilon_{bj}\right) & 0 & 2\Xi\eta^{abc}\epsilon_i^{jk}A_{b0j} \\ -2\Xi\eta^{abc}\epsilon^{ijk}A_{b0j} & 0 & 2\Xi\eta^{abc}\left(\delta_k^i\partial_b + \epsilon^i_{jk}\Upsilon_b^j\right) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\Xi\eta^{abc}\delta_j^i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Xi\eta^{abc}\left(\delta_i^k\partial_c + \epsilon_{ij}^k\Upsilon_c^j\right) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\Xi\eta^{abc}\epsilon^{ijk}A_{c0j} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(x-y), \quad (4.36)$$

Como se esperaba la matriz $\bar{f}$ no es cuadrada, sin embargo tiene los siguientes vectores nulos

$$\begin{aligned}\vec{V}_1 &= \left(\epsilon_{kji} A_{c0}^j V^i, -\epsilon_{jki} B_{ab}^{0j} V^i, \partial_c V^k + \epsilon_{ij}^k \Upsilon_c^i V^j, \epsilon_{ik}^j B_{abj} V^i, 0, 0, 0, 0, V^i, 0, 0, 0 \right), \\ \vec{V}_2 &= \left(\partial_c V^k - \epsilon_{kj}^i \Upsilon_c^j V^i, \epsilon^{ikj} B_{abj} V^i, \epsilon^{kij} A_{c0j} V^i, \epsilon_{ji}^k B_{ab}^{0j} V^i, 0, 0, 0, 0, 0, V^i, 0, 0 \right), \\ \vec{V}_3 &= \left(0, 2 \left(\partial_b V^k - \epsilon_i^{kj} \Upsilon_{bj} V^i \right), 0, 2 \epsilon_i^{jk} A_{b0j} V^i, 0, 0, 0, 0, 0, V^i, 0 \right), \\ \vec{V}_4 &= \left(0, 2 \epsilon^{ijk} A_{b0j} V^i, 0, 2 \left(\partial_b V^k + \epsilon_{ji}^k \Upsilon_b^j V^i \right), 0, 0, 0, 0, 0, 0, V^i \right).\end{aligned}$$

Por otro lado el vector Z es

$$Z(\xi) = \begin{pmatrix} \frac{\delta \mathcal{V}^{(0)}(\xi)}{\delta \xi^B} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Xi \eta^{abc} \epsilon_j^k A_0^i B_{ab}^{0j} + \eta^{abc} \epsilon^{ikj} A_{00i} B_{abj} + 2 \Xi \eta^{abc} \partial_b B_{0a}^{0k} \\ -2 \Xi \eta^{abc} \epsilon_i^{kj} B_{0a}^{0i} \Upsilon_{cj} + 2 \Xi \eta^{abc} \epsilon^{ijk} B_{0ai} A_{b0j} \\ \\ \Xi \eta^{abc} \epsilon_{kij} A_0^j A_{c0}^i + \Xi \eta^{abc} \partial_c A_{00k} + \Xi \eta^{abc} \epsilon_{ki}^j A_{00j} \Upsilon_c^i \\ - \Xi \eta^{bca} \epsilon_{ik}^j A_0^i B_{bcj} + \Xi \eta^{bca} \epsilon_{jk}^i A_{00i} B_{bc}^{0j} - 2 \Xi \eta^{bca} \epsilon_i^{jk} A_{c0j} B_{0b}^{0i} \\ - 2 \Xi \eta^{bca} \partial_c B_{0bk} - 2 \epsilon_{jk}^i \Upsilon_b^j B_{0ai} \\ \\ \Xi \eta^{abc} \partial_c A_0^k - \Xi \eta^{abc} \epsilon_{ji}^k A_0^j \Upsilon_c^i + \Xi \eta^{abc} \epsilon^{jik} A_{00j} A_{c0i} \\ \\ \Omega_{\quad k}^{(0)} \\ \Omega_{\quad 00k}^{(0)} \\ \Omega_{\quad 0a \quad 0k}^{(0)} \\ \Omega_{\quad 0ak}^{(0)} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La contracción de los vectores nulos con Z , $\vec{V}_i Z(\xi) = 0$, implica identidades. Por ejemplo, la contracción de $\vec{V}_1$ con $Z_k(\xi)$ conduce a

$$\begin{aligned}
 \vec{V}_1 Z(\xi) &= \epsilon_{ik}^j A_0^i V^k \left[\partial_c \left(\Xi \eta^{abc} B_{abj} \right) + \Xi \eta \epsilon_{jkl}^m B_{abm} \Upsilon_c^l + \Xi \eta^{abc} \epsilon_{plj} B_{ab}^{0p} A_{c0}^l \right] \\
 &+ \epsilon_{kj}^i A_{00i} V^k \left[\Xi \eta^{abc} \partial_c B_{ab}^{0j} - \Xi \eta^{abc} \epsilon_i^m B_{abm} A_{c0}^l - \Xi \eta \epsilon_{nl}^j B_{ab}^{0n} \Upsilon_c^l \right] \\
 &- \epsilon_{jk}^i B_{0ai} V^k \left[\Xi \eta^{abc} \left(\partial_b \Upsilon_c^j - \partial_c \Upsilon_b^j \right) + \Xi \eta^{abc} \epsilon_{pl}^j \Upsilon_b^p \Upsilon_c^l - \Xi \eta^{abc} \epsilon_{pl}^j A_{b0}^p A_{c0}^l \right] \\
 &- \epsilon_{ijk} B_{0a}^{0i} V^k \left[\Xi \eta^{abc} \left(\partial_b A_{c0}^j - \partial_c A_{b0}^j \right) + \epsilon_{ml}^j \Upsilon_c^l A_{b0}^m - \epsilon_{jml} \Upsilon_b^l A_{c0}^m \right] \\
 &= \epsilon_{ik}^j A_0^i V^k \Omega_j^{(0)} + \epsilon_{kj}^i A_{00i} V^k \Omega^{(0)00j} - \epsilon_{jk}^i B_{0ai} V^k \Omega^{(0)0aj} - \epsilon_{ijk} B_{0a}^{0i} V^k \Omega_{0c0}^{(0)j} \\
 &= 0,
 \end{aligned} \tag{4.37}$$

observando que el lado derecho se anula porque es una combinación lineal de constricciones. Por lo tanto no hay más constricciones de FJ.

Se agregan las constricciones dadas en (4.34) al Lagrangiano simpléctico usando los siguientes multiplicadores de Lagrange $A_0^i = \dot{T}^i$, $A_{00i} = \dot{\Lambda}_i$, $B_{0a}^{0i} = \frac{\dot{\varsigma}_a^i}{2}$, $B_{0ai} = \frac{\dot{\chi}_{ai}}{2}$, con lo cual el Lagrangiano toma la siguiente forma

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}^{(1)} &= \Xi \eta^{abc} B_{ab}^{0i} \dot{A}_{c0i} + \Xi \eta^{abc} B_{abi} \dot{\Upsilon}_c^i - \dot{T}^i \Omega^{(0)}_{i00} - \dot{\Lambda}_i \Omega^{(0)}_{00i} - \frac{\dot{\varsigma}_a^i}{2} \Omega^{(0)}_{0ai} \\
 &- \frac{\dot{\chi}_{ai}}{2} \Omega^{(0)}_{0ai} - \mathcal{V},
 \end{aligned} \tag{4.38}$$

donde $\mathcal{V}^{(1)} = \mathcal{V}^{(0)} \big|_{\Omega^{(0)}_{i00}, \Omega^{(0)}_{00i}, \Omega^{(0)}_{0ai}, \Omega^{(0)}_{0ai}=0} = 0$, resultado que ya se esperaba por la covarianza general de la teoría tal como ocurre en Relatividad General.

Del Lagrangiano (4.38) se identifica el siguiente conjunto de variables simplécticas y la 1-forma

$$\begin{aligned}
 \xi^{(1)} &= (A_{c0i}, B_{ab}^{0i}, \Upsilon_c^i, B_{abi}, T^i, \Lambda_i, \varsigma_a^i, \chi_{ai}), \\
 a^{(1)} &= \left(\Xi \eta^{abc} B_{ab}^{0i}, 0, \Xi \eta^{abc} B_{abi}, 0, -\Omega^{(0)}_{i00}, -\Omega^{(0)}_{00i}, -\frac{\Omega^{(0)}_{0ai}}{2}, -\frac{\Omega^{(0)}_{0ai}}{2} \right).
 \end{aligned}$$

Ahora la matriz simpléctica tiene la siguiente forma

$$f^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & -\Xi\eta^{abc}\delta_j^i & 0 & 0 \\ \Xi\eta^{abc}\delta_j^i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\Xi\eta^{abc}\delta_j^i \\ 0 & 0 & \Xi\eta^{abc}\delta_j^i & 0 \\ -\Xi\eta^{abc}\epsilon_{j\ i}^k B_{ab}^{0j} & -\Xi\eta^{abc}\epsilon_{kji} A_{c0}^j & \Xi\eta^{abc}\epsilon_{ik}^j B_{abj} & \Xi\eta^{abc} D_c^k{}^i \\ -\Xi\eta^{abc}\epsilon^{ikj} B_{abj} & \Xi\eta^{abc} d_c^i{}^k & \Xi\eta^{abc}\epsilon_{jk}^i B_{ab}^{0i} & \Xi\eta^{abc}\epsilon^{ijk} A_{c0j} \\ \Xi\eta^{abc} d_{bi}^k & 0 & \Xi\eta^{abc}\epsilon_{i\ k}^j A_{b0j} & 0 \\ -\Xi\eta^{abc}\epsilon^{ijk} A_{b0j} & 0 & \Xi\eta^{abc} d_b^i{}^k & 0 \\ \Xi\eta^{abc}\epsilon_{j\ i}^k B_{ab}^{0j} & \Xi\eta^{abc}\epsilon^{ikj} B_{abj} & \Xi\eta^{abc} d_{ai}^k & \Xi\eta^{abc}\epsilon^{ijk} A_{b0j} \\ \Xi\eta^{abc}\epsilon_{kji} A_{c0}^j & -\Xi\eta^{abc} d_c^i{}^k & 0 & 0 \\ -\Xi\eta^{abc}\epsilon_{ik}^j B_{abj} & \Xi\eta^{abc}\epsilon_{jk}^i B_{ab}^{0i} & -\Xi\eta^{abc}\epsilon_{i\ k}^j A_{b0j} & -\Xi\eta^{abc} D_b^i{}^j \\ -\Xi\eta^{abc} D_c^k{}^i & \Xi\eta^{abc}\epsilon^{ijk} A_{c0j} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(x-y),$$

donde se ha usado la notación $D_{al}^i = \delta_l^i \partial_a + \epsilon_l^{ik} \Upsilon_{ak}$ y $d_{ai}^l = \delta_i^l \partial_a - \epsilon_i^{lk} \Upsilon_{ak}$. Esta matriz es singular, sin embargo ya se han encontrado todas las constricciones de la teoría, por lo tanto la teoría presenta simetría de norma. Con el objetivo de calcular el tensor simpléctico se fija la norma de la siguiente manera

$$\begin{aligned} A_0^i &= 0, \\ A_{00i} &= 0, \\ B_{0a}^{0i} &= 0, \\ B_{0ai} &= 0, \end{aligned}$$

esto significa que $\dot{T}^i = 0$, $\dot{\Lambda}_i = 0$, $\dot{\zeta}_a^i = 0$ y $\dot{\chi}_{ai} = 0$. Para fijar estas condiciones de norma se introduce otro conjunto de multiplicadores de Lagrange $\beta_i, \alpha^i, \rho_i^a, \sigma_a^i$, con esto el La-

grangiano toma la forma

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}^{(2)} = & \Xi \eta^{abc} B_{ab}{}^{0i} \dot{A}_{c0i} + \Xi \eta^{abc} B_{abi} \dot{\Upsilon}_c{}^i - \left[\Omega^{(0)}{}_i - \beta_i \right] \dot{T}^i - \left[\Omega^{(0)}{}^{00i} - \alpha^i \right] \dot{\Lambda}_i \\
 & - \left[\frac{\Omega^{(0)}{}_{0a}{}_{0i}}{2} - \rho_i^a \right] \dot{\varsigma}_a^i - \left[\frac{\Omega^{(0)}{}_{0a}{}^{ai}}{2} - \sigma^{ai} \right] \dot{\chi}_{ai},
 \end{aligned} \tag{4.39}$$

de donde se identifica un nuevo conjunto de variables simplécticas

$$\xi^{(2)} = (A_{a0i}, B_{ab}{}^{0i}, \Upsilon_a^i, B_{abi}, T^i, \Lambda_i, \varsigma_a^i, \chi_{ai}, \beta_i, \alpha^i, \rho_i^a, \sigma^{ai})$$

y la 1-forma

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a}^{(2)} = & \left(\Xi \eta^{abc} B_{ab}{}^{0i}, 0, \Xi \eta^{abc} B_{abi}, 0, - \left[\Omega^{(0)}{}_i - \beta_i \right], - \left[\Omega^{(0)}{}^{00i} - \alpha_i \right], \right. \\
 & \left. - \left[\frac{\Omega^{(0)}{}_{0a}{}_{0i}}{2} - \rho_i \right], - \left[\frac{\Omega^{(0)}{}_{0a}{}^{ai}}{2} - \sigma_i \right], 0, 0, 0, 0 \right).
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la matriz simpléctica relevante es de la siguiente forma

$${}^{(2)}_f = \left(\begin{array}{cccccc}
 0 & -\Xi\eta^{abc}\delta_j^i & 0 & 0 & \Xi\eta^{abc}\epsilon_j^i{}^k B_{ab}{}^{oj} \\
 \Xi\eta^{abc}\delta_j^i & 0 & 0 & 0 & \Xi\eta^{abc}\epsilon_{ijk} A_{c0}{}^j \\
 0 & 0 & 0 & -\Xi\eta^{abc}\delta_j^i & -\Xi\eta^{abc}\epsilon_j^i{}^k B_{abj} \\
 0 & 0 & \Xi\eta^{abc}\delta_j^i & 0 & -\Xi\eta^{abc}\epsilon_j^i{}^k \Upsilon_c^k \\
 -\Xi\eta^{abc}\epsilon_j^i{}^k B_{ab}{}^{0j} & -\Xi\eta^{abc}\epsilon_{ijk} A_{c0}{}^j & \Xi\eta^{abc}\epsilon_{ki}^j B_{abj} & \Xi\eta^{abc}\epsilon_j^i{}^k \Upsilon_c^k & 0 \\
 -\Xi\eta^{abc}\epsilon^{kij} B_{abj} & \Xi\eta^{abc} d_c^i{}^l & -\Xi\eta^{abc}\epsilon_{ji}^k B_{ab}{}^{0j} & -\Xi\eta^{abc}\epsilon^{kji} A_{c0j} & 0 \\
 -\Xi\eta^{abc} d_{bl}^i & 0 & -\Xi\eta^{abc}\epsilon_i^{jk} A_{b0j} & 0 & 0 \\
 -\Xi\eta^{abc}\epsilon^{kji} A_{b0j} & 0 & \Xi\eta^{abc} d_b^l{}^i & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_j^i \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array} \right) \delta^3(x-y) \left(\begin{array}{cccccc}
 \Xi\eta^{abc}\epsilon^{kij} B_{abj} & \Xi\eta^{abc} d_{bj}^i & \Xi\eta^{abc}\epsilon^{kji} A_{b0j} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -\Xi\eta^{abc} d_c^i{}^l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \Xi\epsilon_{ji}^k B_{ab}{}^{0j} & \Xi\eta^{abc}\epsilon_i^{jk} A_{b0j} & -\Xi\eta^{abc} d_b^l{}^i & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \Xi\eta^{abc}\epsilon^{kji} A_{c0j} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -\delta_j^i & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -\delta_j^i & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\delta_b^a \delta_j^i & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\delta_b^a \delta_j^i \\
 \delta_j^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \delta_b^a \delta_j^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \delta_b^a \delta_j^i & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array} \right)$$

donde $d_{ai}{}^l \equiv \delta_i^l \partial_a - \epsilon_i^{lk} \Upsilon_{ak}$. La matriz es regular y su inversa está dada por

$$\begin{aligned}
 f^{(2)}{}^{-1} = & \left(\begin{array}{cccccccc}
 0 & \frac{1}{2\Xi}\eta_{bgc}\delta_j^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -\frac{1}{2\Xi}\eta_{bgc}\delta_j^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2\Xi}\eta_{abc}\delta_j^i & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -\frac{1}{2\Xi}\eta_{abc}\delta_j^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \epsilon_{ijl}A_{c0}^j & -\epsilon_j^l{}^k B_{ab}{}^{0j} & -\epsilon^l{}_{jk}\Upsilon_c^k & -\epsilon^j{}_{kl}B_{mnj} & -\delta_j^i & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -\epsilon^{klj}B_{abj} & \epsilon^{kj}A_{c0j} & -\frac{1}{2}\delta_{mn}^{ab}\epsilon_k^j{}^l A_{b0j} & 0 & -\delta_j^i & 0 & 0 \\
 0 & -\frac{1}{2}\delta_{mn}^{ab}D_{bi}{}^l & 0 & -\frac{1}{2}\delta_{mn}^{ab}D_b{}^k{}^l & 0 & 0 & -\delta_b^a\delta_j^i & 0 \\
 0 & -\frac{1}{2}\delta_{mn}^{ab}\epsilon^{kj}A_{b0j} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\delta_b^a\delta_j^i
 \end{array} \right) \\
 & \left(\begin{array}{cccc}
 -\epsilon_{ijl}A_{c0}^j & 0 & 0 & 0 \\
 \epsilon_j^l{}^k B_{ab}{}^{0j} & \epsilon^{klj}B_{abj} & \frac{1}{2}\delta_{mn}^{ab}D_{ai}{}^l & \frac{1}{2}\delta_{mn}^{ab}\epsilon^{kj}A_{b0j} \\
 \epsilon^l{}_{jk}\Upsilon_c^k & -\epsilon^{kj}A_{c0j} & 0 & 0 \\
 \epsilon^j{}_{kl}B_{mnj} & \frac{1}{2}\delta_{mn}^{ab}\epsilon_k^j{}^l A_{b0j} & \frac{1}{2}\delta_{mn}^{ab}D_a{}^k{}^l & 0 \\
 \delta_j^i & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \delta_j^i & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \delta_b^a\delta_j^i & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \delta_b^a\delta_j^i \\
 0 & \frac{\Xi}{2}H^{mi}{}_{j}{}^q{}^l & -\frac{\Xi}{2}E^{ai}{}_j & \frac{\Xi}{2}F^{mi}{}_{i}{}^l \\
 -\frac{\Xi}{2}H^{mi}{}_{j}{}^q{}^l & \Xi\eta^{abc}\epsilon^{ijk}B_{abk}A_{c0j} & 0 & G^{mjpi} \\
 \frac{\Xi}{2}E^{ai}{}_j & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{\Xi}{2}F^{mi}{}_{i}{}^l & -G^{kjpi} & 0 & 0
 \end{array} \right) \delta^3(x-y), \quad (4.41)
 \end{aligned}$$

donde se han definido

$$\begin{aligned}
 D_{al}{}^i &\equiv \delta_l^i\partial_a + \epsilon_l{}^{ik}\Upsilon_{ak}, \\
 E^{ai}{}_j &\equiv \eta^{abc}\epsilon_{jp}^i\epsilon^{plk}A_{b0l}A_{c0k} + \eta^{abc}\epsilon^l{}_{pj}\epsilon^i{}_{kl}\Upsilon_b^k\Upsilon_c^p, \\
 F^{mi}{}_i{}^l &\equiv \eta^{mnc}\epsilon_{ijk}\epsilon^{kpl}A_{c0}^jA_{n0p}, \\
 G^{mjpi} &\equiv \eta^{mnc}\epsilon_k^j\epsilon_j{}^{li}A_{n0l}\Upsilon_c^k, \\
 H^{mi}{}_{j}{}^q{}^l &\equiv \eta^{abc}\delta_{ab}^{mn}\epsilon_{jk}^i\epsilon^{qp}{}_l A_{n0p}\Upsilon_c^k.
 \end{aligned}$$

Del tensor simpléctico (4.41) se identifican los paréntesis generalizados de FJ dados por

$$\{\xi_i^{(2)}(x), \xi_j^{(2)}(y)\}_{FD} = [f_{ij}^{(2)}(x, y)]^{-1}, \quad (4.42)$$

por lo tanto se tiene

$$\left\{ A_{c0i}(x), B_{ab}^{0j}(y) \right\}_{FJ} = \frac{1}{2\Xi} \eta_{abc} \delta_i^j \delta^3(x-y), \quad (4.43)$$

$$\left\{ \Upsilon_c^i(x), B_{abj}(y) \right\}_{FJ} = \frac{1}{2\Xi} \eta_{abc} \delta_j^i \delta^3(x-y), \quad (4.44)$$

Los paréntesis anteriores se compararán con los paréntesis de Dirac obtenidos en la siguiente sección, encontrando que coinciden. Es importante mencionar que en el formalismo de FJ se encontraron menos constricciones que las que se encontraron mediante el formalismo de Dirac, en ese sentido el formalismo de FJ es más económico.

Finalmente se realiza el conteo de grados de libertad. En el formalismo de FJ no hay una clasificación de las constricciones, todas están al mismo nivel, de modo que el conteo se realiza como sigue: Grados de libertad = variables dinámicas – constricciones independientes. Hay 18 variables canónicas dadas por (A_{c0i}, Υ_a^i) y por otro lado se encuentra que existe reductibilidad en las constricciones halladas: $\partial_a \Omega^{(0)0ai} = \epsilon_{ij}^k \Upsilon_{ak} \Omega^{(0)0aj} + \epsilon_{ij}^k A_{a0k} \Omega^{(0)0a}_{0j}$ y $\partial_a \Omega^{(0)0a}_{0i} = \epsilon_i^{jk} \Upsilon_{ak} \Omega^{(0)0a}_{0j} + \epsilon_i^k A_{a0k} \Omega^{(0)0aj}$, encontrando que hay 18 constricciones independientes. Por lo tanto la teoría tiene 0 grados de libertad tal como se esperaba [33].

4.6 Análisis Canónico de una teoría BF en 3+1 dimensiones.

Comenzando con la acción (4.24), realizando la descomposición 3+1 en índices de espacio-tiempo y rompiendo el grupo de Lorentz $SO(3,1)$ a $SO(3)$ se obtiene la Lagrangiana (4.26):

$$\begin{aligned} L = \Xi \int \eta^{abc} & \left[B_{ab}^{0i} \dot{A}_{c0i} + \frac{1}{2} B_{ab}^{ij} \dot{A}_{cij} \right. \\ & + \frac{1}{2} A_{0ij} \left(\partial_c B_{ab}^{ij} + B_{ab}^{il} A_c^j{}_l + 2 B_{ab}^{0i} A_{c0}^j \right) \\ & + A_{00i} \left(\partial_c B_{ab}^{0i} + B_{ab}^{0j} A_c^i{}_j + B_{ab}^{ij} A_{c0j} \right) \\ & + B_{0a}^{0i} \left(\partial_b A_{c0i} - \partial_c A_{b0i} + A_{b0j} A_c^j{}_i + A_{c0}^j A_{bij} \right) \\ & \left. + \frac{1}{2} B_{0a}^{ij} \left(\partial_b A_{cij} - \partial_c A_{bij} + A_{bil} A_c^l{}_j + A_{bi0} A_c^0{}_j - A_{bjl} A_c^l{}_i - A_{bj0} A_c^0{}_i \right) \right] d^3x, \end{aligned} \quad (4.45)$$

aquí $a, b, c, \dots = 1, 2, 3$, $\epsilon^{0abc} \equiv \eta^{abc}$ y $i, j, k, \dots = 1, 2, 3$ son índices de grupo que pueden ser subidos y bajados con la métrica euclídea $\eta_{ij} = (1, 1, 1)$. Consideremos el siguiente cambio

de variables [7]

$$\begin{aligned}
A_{aij} &\equiv -\epsilon_{ijk} A_a^k, \\
A_{0ij} &\equiv -\epsilon_{ijk} A_0^k, \\
B_{abij} &\equiv -\epsilon_{ijk} B_{ab}^k, \\
B_{0aij} &\equiv -\epsilon_{ijk} B_{0a}^k, \\
A_{a0i} &\equiv A_{a0i}, \\
A_{ai} &\equiv \Upsilon_{ai}, \\
A_0^i &\equiv -T^i, \\
A_{00i} &\equiv -\Lambda_i, \\
B_{0a}^{0i} &\equiv -\frac{1}{2} \varsigma_a^i, \\
B_{0ai} &\equiv -\frac{1}{2} \chi_{ai},
\end{aligned} \tag{4.46}$$

con lo cual el Lagrangiano toma la siguiente forma

$$\begin{aligned}
L &= L[A_{a0i}, \Upsilon_{ai}, T_i, \Lambda_i, \varsigma_{ai}, \chi_{ai}, B_{ab0i}, B_{abi}] \\
&= \int \left[\Xi \eta^{abc} B_{ab}^{0i} \dot{A}_{c0i} + \Xi \eta^{abc} B_{abi} \dot{\Upsilon}_c^i \right. \\
&\quad - T^i \left(\partial_c \left(\Xi \eta^{abc} B_{abi} \right) + \Xi \eta^{abc} \epsilon_{ik}^j B_{abj} \Upsilon_c^k - \Xi \eta^{abc} \epsilon_{jki} B_{ab}^{0j} A_{c0}^k \right) \\
&\quad - \Lambda_i \left(\partial_c \left(\Xi \eta^{abc} B_{ab}^{0i} \right) - \Xi \eta^{abc} \epsilon_{jk}^i B_{ab}^{0j} \Upsilon_c^k - \Xi \eta^{abc} \epsilon^{ijk} B_{abk} A_{c0j} \right) \\
&\quad - \frac{1}{2} \Xi \eta^{abc} \varsigma_a^i \left(\partial_b A_{c0i} - \partial_c A_{b0i} + \epsilon_i^{jk} A_{b0j} \Upsilon_{ck} - \epsilon_{ijk} A_{c0}^j \Upsilon_b^k \right) \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \Xi \eta^{abc} \chi_{ai} \left(\partial_b \Upsilon_c^i - \partial_c \Upsilon_b^i + \epsilon_{jk}^i \Upsilon_b^j \Upsilon_c^k - \epsilon^{ijk} A_{b0j} A_{c0k} \right) \right] d^3x.
\end{aligned}$$

Los momentos canónicos de las variables dinámicas están dadas por

$$\begin{aligned}
 p^{a0i} &\equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{A}_{a0i}} = \Xi \eta^{abc} B_{bc}{}^{0i}, \\
 \pi^{ai} &\equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\Upsilon}_{ai}} = \Xi \eta^{abc} B_{bc}{}^i, \\
 \hat{T}^i &\equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{T}_i} = 0, \\
 \hat{\Lambda}^i &\equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\Lambda}_i} = 0, \\
 \hat{\varsigma}^{ai} &\equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\varsigma}_{ai}} = 0, \\
 \hat{\chi}^{ai} &\equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\chi}_{ai}} = 0, \\
 p^{ab0i} &\equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{B}_{ab0i}} = 0, \\
 p^{abi} &\equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{B}_{abi}} = 0,
 \end{aligned} \tag{4.47}$$

cumpliendo con los siguientes paréntesis de Poisson fundamentales entre los campos

$$\begin{aligned}
 \left\{ \Upsilon_{ai}(x), \pi^{bj}(y) \right\} &= \frac{1}{2} \delta_a^b \delta_i^j \delta^3(x-y), \\
 \left\{ A_{a0i}(x), p^{b0j}(y) \right\} &= \frac{1}{2} \delta_a^b \delta_i^j \delta^3(x-y), \\
 \left\{ T_i(x), \hat{T}^j(y) \right\} &= \frac{1}{2} \delta_i^j \delta^3(x-y), \\
 \left\{ \Lambda_i(x), \hat{\Lambda}^j(y) \right\} &= \frac{1}{2} \delta_i^j \delta^3(x-y), \\
 \left\{ \varsigma_{ai}(x), \hat{\varsigma}^{bj}(y) \right\} &= \delta_a^b \delta_i^j \delta^3(x-y), \\
 \left\{ \chi_{ai}(x), \hat{\chi}^{bj}(y) \right\} &= \delta_a^b \delta_i^j \delta^3(x-y), \\
 \left\{ B_{ab0i}(x), p^{de0j}(y) \right\} &= \frac{1}{4} \left(\delta_a^d \delta_b^e - \delta_a^e \delta_b^d \right) \delta_i^j \delta^3(x-y), \\
 \left\{ B_{abi}(x), p^{dej}(y) \right\} &= \frac{1}{4} \left(\delta_a^d \delta_b^e - \delta_a^e \delta_b^d \right) \delta_i^j \delta^3(x-y).
 \end{aligned} \tag{4.48}$$

De la definición de momentos se identifican las siguientes 60 constricciones primarias

$$\begin{aligned}
 \phi_1^{a0i} &\equiv p^{a0i} - \Xi \eta^{abc} B_{bc}{}^{0i} \approx 0, \\
 \phi_2^{ai} &\equiv \pi^{ai} - \Xi \eta^{abc} B_{bc}{}^i \approx 0, \\
 \phi_3^i &\equiv \hat{T}^i \approx 0, \\
 \phi_4^i &\equiv \hat{\Lambda}^i \approx 0, \\
 \phi_5^{ai} &\equiv \hat{\zeta}^{ai} \approx 0, \\
 \phi_6^{ai} &\equiv \hat{\chi}^{ai} \approx 0, \\
 \phi_7^{ab0i} &\equiv p^{ab0i} \approx 0, \\
 \phi_8^{abi} &\equiv p^{abi} \approx 0.
 \end{aligned} \tag{4.49}$$

El Hamiltoniano Canónico de la teoría está dado por

$$\begin{aligned}
 H_c &= \int \left[\dot{A}_{a0i} p^{a0i} + \dot{\Upsilon}_{ai} \pi^{ai} + \dot{T}_i \hat{T}^i + \dot{\Lambda}_i \hat{\Lambda}^i + \dot{\zeta}_{ai} \hat{\zeta}^{ai} + \dot{B}_{ab0i} p^{ab0i} + \dot{B}_{abi} p^{abi} - L \right] d^3x \\
 &= \int \left[T^i \left(\partial_a \pi^a{}_i - \epsilon_i{}^{jk} \pi^a{}_j \Upsilon_{ak} - \epsilon_{ijk} p^{a0j} A_{a0}{}^k \right) \right. \\
 &\quad + \Lambda_i \left(\partial_a p^{a0i} - \epsilon^i{}_{jk} p^{a0j} \Upsilon_a{}^k - \epsilon^{ijk} \pi^a{}_k A_{a0j} \right) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \Xi \eta^{abc} \zeta_a{}^i \left(\partial_b A_{c0i} - \partial_c A_{b0i} + \epsilon_i{}^{jk} A_{b0j} \Upsilon_{ck} + \epsilon_{ijk} A_{c0}{}^j \Upsilon_b{}^k \right) \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} \Xi \eta^{abc} \chi_{ai} \left(\partial_b \Upsilon_c{}^i - \partial_c \Upsilon_b{}^i + \epsilon^i{}_{jk} \Upsilon_b{}^j \Upsilon_c{}^k - \epsilon^{ijk} A_{b0j} A_{c0k} \right) \right] d^3x,
 \end{aligned} \tag{4.50}$$

sumando las constricciones primarias se obtiene el Hamiltoniano Primario

$$\begin{aligned}
 H_1 &= \int \left[T^i \left(\partial_a \pi^a{}_i - \epsilon_i{}^{jk} \pi^a{}_j \Upsilon_{ak} - \epsilon_{ijk} p^{a0j} A_{a0}{}^k \right) \right. \\
 &\quad + \Lambda_i \left(\partial_a p^{a0i} - \epsilon^i{}_{jk} p^{a0j} \Upsilon_a{}^k - \epsilon^{ijk} \pi^a{}_k A_{a0j} \right) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \Xi \eta^{abc} \zeta_a{}^i \left(\partial_b A_{c0i} - \partial_c A_{b0i} + \epsilon_i{}^{jk} A_{b0j} \Upsilon_{ck} + \epsilon_{ijk} A_{c0}{}^j \Upsilon_b{}^k \right) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \Xi \eta^{abc} \chi_{ai} \left(\partial_b \Upsilon_c{}^i - \partial_c \Upsilon_b{}^i + \epsilon^i{}_{jk} \Upsilon_b{}^j \Upsilon_c{}^k - \epsilon^{ijk} A_{b0j} A_{c0k} \right) \\
 &\quad + \lambda_{a0i} \left(p^{a0i} - \Xi \eta^{abc} B_{bc}{}^{0i} \right) + \lambda_{ai} \left(\pi^{ai} - \Xi \eta^{abc} B_{bc}{}^i \right) + \alpha_i \hat{T}^i + \beta_i \hat{\Lambda}^i \\
 &\quad \left. + \theta_{ai} \hat{\zeta}^{ai} + \mu_{ai} \hat{\chi}^{ai} + \lambda_{ab0i} p^{ab0i} + \lambda_{abi} p^{abi} \right] d^3x,
 \end{aligned} \tag{4.51}$$

donde $\lambda_{a0i}, \lambda_{ai}, \alpha_i, \beta_i, \theta_{ai}, \mu_{ai}, \lambda_{ab0i}, \lambda_{abi}$ son multiplicadores de Lagrange que implican las constricciones primarias. Imponiendo la condición de consistencia sobre constricciones pri-

marías se identifican las siguientes 24 constricciones secundarias

$$\dot{\phi}_3^i \approx 0 \Rightarrow \varphi_3^i \equiv -\frac{1}{2} \left[\partial_a \pi^{ai} - \epsilon^{ijk} \pi^a_j \Upsilon_{ak} - \epsilon^i_{jk} p^{a0j} A_{a0}^k \right] \approx 0, \quad (4.52)$$

$$\dot{\phi}_4^i \approx 0 \Rightarrow \varphi_4^i \equiv -\frac{1}{2} \left[\partial_a p^{a0i} - \epsilon^i_{jk} p^{a0j} \Upsilon_a^k - \epsilon^{ijk} \pi^a_k A_{a0j} \right] \approx 0, \quad (4.53)$$

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_5^{ai} \approx 0 \Rightarrow \varphi_5^{ai} &\equiv -\frac{\Xi}{2} \eta^{abc} \left(\partial_b A_c^{0i} - \partial_c A_b^{0i} - \epsilon^{ijk} A_{b0j} \Upsilon_{ck} + \epsilon^{ijk} A_{c0j} \Upsilon_{bk} \right) \\ &\approx 0, \end{aligned} \quad (4.54)$$

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_6^{ai} \approx 0 \Rightarrow \varphi_6^{ai} &\equiv -\frac{\Xi}{2} \eta^{abc} \left[\partial_b \Upsilon_c^i - \partial_c \Upsilon_b^i + \epsilon^{ijk} \Upsilon_{bj} \Upsilon_{ck} - \epsilon^{ijk} A_{b0j} A_{c0k} \right] \\ &\approx 0, \end{aligned} \quad (4.55)$$

y los siguientes 36 multiplicadores de Lagrange

$$\begin{aligned} \lambda_{ab}^{0i} \approx & \frac{1}{2\Xi} \left(\eta_{abc} \epsilon^i_{jk} T^j p^{c0k} - \eta_{abc} \epsilon^{ijk} \Lambda_j \pi^c_k + \Xi \partial_b \varsigma_a^i - \Xi \partial_a \varsigma_b^i - \Xi \epsilon^i_j{}^k \varsigma_a^j \Upsilon_{bk} \right. \\ & \left. + \Xi \epsilon^i_j{}^k \varsigma_b^j \Upsilon_{ak} + \epsilon^{ijk} \chi_{aj} A_{b0k} - \epsilon^{ijk} \chi_{bj} A_{a0k} \right), \end{aligned} \quad (4.56)$$

$$\begin{aligned} \lambda_{ab}^i \approx & \frac{1}{2\Xi} \left(\eta_{abc} \epsilon^i_j{}^k T^j \pi^c_k + \eta_{abc} \epsilon^{ij}{}_k p^{c0k} \Lambda_j - \Xi \epsilon^i_j{}^k \varsigma_a^j A_{b0k} + \Xi \epsilon^i_j{}^k \varsigma_b^j A_{a0k} \right. \\ & \left. + \Xi \partial_b \chi_a^i - \Xi \partial_a \chi_b^i - \Xi \epsilon^{ijk} \chi_{aj} \Upsilon_{bk} + \Xi \epsilon^{ijk} \chi_{bj} \Upsilon_{ak} \right), \end{aligned} \quad (4.57)$$

$$\lambda_{a0i} \approx 0, \quad (4.58)$$

$$\lambda_{ai} \approx 0. \quad (4.59)$$

La teoría no presenta constricciones terciarias. Por lo tanto, con el objeto de realizar la clasificación de las constricciones en primera y segunda clase se procede a calcular la siguiente matriz cuyas entradas son los paréntesis de Poisson entre todas las constricciones,

esto es

$$\left\{ \varphi_3^i(x), \varphi_3^l(y) \right\} = -\frac{1}{4} \epsilon^{ilk} \varphi_{3k} \delta^3(x-y) \approx 0, \quad (4.60)$$

$$\left\{ \varphi_4^i(x), \varphi_4^l(y) \right\} = \frac{1}{4} \epsilon^{ilk} \varphi_{3k} \delta^3(x-y) \approx 0. \quad (4.61)$$

$$\left\{ \phi_1^{a0i}(x), \phi_7^{de0l}(y) \right\} = \frac{\Xi}{2} \eta^{ade} \eta^{il} \delta^3(x-y), \quad (4.62)$$

$$\left\{ \phi_1^{a0i}(x), \varphi_3^l(y) \right\} = -\frac{1}{4} \epsilon^{il} {}_j p^{a0j} \delta^3(x-y), \quad (4.63)$$

$$\left\{ \phi_1^{a0i}(x), \varphi_4^l(y) \right\} = \frac{1}{4} \epsilon^{ilj} \pi^a{}_j \delta^3(x-y), \quad (4.64)$$

$$\left\{ \phi_1^{a0i}(x), \varphi_5^{dl}(y) \right\} = -\frac{\Xi}{2} \left[-\eta^{il} \eta^{ade} \partial_{x,e} + \eta^{ade} \epsilon^{ilj} \Upsilon_{ej} \right] \delta^3(x-y), \quad (4.65)$$

$$\left\{ \phi_1^{a0i}(x), \varphi_6^{dl}(y) \right\} = -\frac{\Xi}{2} \eta^{ade} \epsilon^{ilj} A_{e0j} \delta^3(x-y), \quad (4.66)$$

$$\left\{ \phi_2^{ai}(x), \phi_8^{del}(y) \right\} = -\frac{\Xi}{2} \eta^{il} \eta^{ade} \delta^3(x-y), \quad (4.67)$$

$$\left\{ \phi_2^{ai}(x), \varphi_3^l(y) \right\} = -\frac{1}{4} \epsilon^{ilj} \pi^a{}_j \delta^3(x-y), \quad (4.68)$$

$$\left\{ \phi_2^{ai}(x), \varphi_4^l(y) \right\} = -\frac{1}{4} \epsilon^{il} {}_j p^{a0j} \delta^3(x-y), \quad (4.69)$$

$$\left\{ \phi_2^{ai}(x), \varphi_5^{dl}(y) \right\} = -\frac{\Xi}{2} \eta^{ade} \epsilon^{ilj} A_{e0j} \delta^3(x-y), \quad (4.70)$$

$$\left\{ \phi_2^{ai}(x), \varphi_6^{dl}(y) \right\} = \frac{\Xi}{2} \eta^{ade} \left[-\eta^{il} \partial_{x,e} + \epsilon^{ilj} \Upsilon_{ej} \right] \delta^3(x-y), \quad (4.71)$$

$$\left\{ \varphi_3^i(x), \varphi_4^l(y) \right\} = -\frac{1}{4} \epsilon^{il} {}_j \varphi_4^j \delta^3(x-y) \approx 0, \quad (4.72)$$

$$\left\{ \varphi_3^i(x), \varphi_5^{dl}(y) \right\} = -\frac{1}{4} \epsilon^{il} {}_k \varphi_5^{dk} \delta^3(x-y) \approx 0, \quad (4.73)$$

$$\left\{ \varphi_3^i(x), \varphi_6^{dl}(y) \right\} = -\frac{1}{4} \epsilon^{il} {}_k \varphi_6^{dk} \delta^3(x-y) \approx 0, \quad (4.74)$$

$$\left\{ \varphi_4^i(x), \varphi_5^{dl}(y) \right\} = \frac{1}{4} \epsilon^{il} {}_k \varphi_6^k \delta^3(x-y) \approx 0, \quad (4.75)$$

$$\left\{ \varphi_4^i(x), \varphi_6^{dl}(y) \right\} = -\frac{1}{4} \epsilon^{il} {}_j \varphi_5^{dj} \delta^3(x-y) \approx 0. \quad (4.76)$$

encontrando que esta matriz tiene rango 36 y 48 vectores nulos. De los vectores nulos se encuentran las siguientes 48 constricciones de primera clase

$$\begin{aligned}
 \gamma_1^i &\equiv \hat{T}^i \approx 0, \\
 \gamma_2^i &\equiv \hat{\Lambda}^i \approx 0, \\
 \gamma_3^{ai} &\equiv \hat{\varsigma}^{ai} \approx 0, \\
 \gamma_4^{ai} &\equiv \hat{\chi}^{ai} \approx 0, \\
 \gamma_{5\ i} &\equiv \partial_a \pi^a_i - \epsilon_i^{jk} \pi^a_j \Upsilon_{ak} - \epsilon_{ijk} p^{a0j} A_{a0}^k \\
 &\quad + \frac{1}{2\Xi} \eta_{abc} \epsilon_{ijk} \left(\pi^{aj} p^{bck} - p^{a0j} p^{bc0k} \right) \approx 0, \\
 \gamma_6^{0i} &\equiv \partial_a p^{a0i} - \epsilon^i_{jk} p^{a0j} \Upsilon_a^k - \epsilon^{ijk} \pi^a_k A_{a0j} \\
 &\quad + \frac{1}{2\Xi} \eta_{abc} \epsilon^i_{jk} \left(\pi^{aj} p^{bc0k} + p^{a0j} p^{bck} \right) \approx 0, \\
 \gamma_{7\ 0i}^a &\equiv \frac{\Xi}{2} \eta^{abc} \left(\partial_b A_{c0i} - \partial_c A_{b0i} + \epsilon_i^{jk} A_{b0j} \Upsilon_{ck} - \epsilon_{ijk} A_{c0}^j \Upsilon_b^k \right) \\
 &\quad - \partial_b p^{ab}_{0i} + \epsilon_i^{jk} \Upsilon_{bk} p^{ab}_{0j} + \epsilon_i^{jk} A_{b0k} p^{ab}_j \approx 0, \\
 \gamma_8^{ai} &\equiv \frac{\Xi}{2} \eta^{abc} \left[\partial_b \Upsilon_c^i - \partial_c \Upsilon_b^i + \epsilon^{ijk} \Upsilon_{bj} \Upsilon_{ck} - \epsilon^{ijk} A_{b0j} A_{c0k} \right] \\
 &\quad - \partial_b p^{abi} - \epsilon^{ijk} A_{b0k} p^{ab}_{0j} + \epsilon^{ijk} \Upsilon_{bk} p^{ab}_j \approx 0.
 \end{aligned} \tag{4.77}$$

y el rango permite identificar las siguientes 36 constricciones de segunda clase

$$\begin{aligned}
 \Gamma_1^{a0i} &\equiv p^{a0i} - \Xi \eta^{abc} B_{bc}^{0i} \approx 0, \\
 \Gamma_2^{ai} &\equiv \pi^{ai} - \Xi \eta^{abc} B_{bc}^i \approx 0, \\
 \Gamma_3^{ab0i} &\equiv p^{ab0i} \approx 0, \\
 \Gamma_4^{abi} &\equiv p^{abi} \approx 0.
 \end{aligned} \tag{4.78}$$

Es importante remarcar que la estructura completa de las constricciones (4.77) no está reportada en la literatura y esto es resultado de implementar la formulación estricta de Dirac. Con la información obtenida se lleva a cabo el conteo de grados de libertad físicos de la teoría de la siguiente forma; hay 120 variables dinámicas, 48 constricciones de primera clase y 36 constricciones de segunda clase, por tanto se obtienen -6 grados de libertad, lo que obviamente no tiene significado físico. Al preguntarse por la reductibilidad de las constricciones se encuentra que no son independientes. La reductibilidad de las constricciones está dada por $\partial_a \gamma_{7\ 0i}^a = \epsilon_i^{jk} \Upsilon_{ak} \gamma_{7\ 0j}^a + \epsilon_i^{jk} A_{a0k} \gamma_{8\ j}^a + \frac{1}{2} \epsilon_i^{jk} F_{abk} \Gamma_3^{ab}_{0j} + \frac{1}{2} \epsilon_i^{jk} F_{ab0k} \Gamma_4^{ab}_j$ y $\partial_a \gamma_8^{ai} = \epsilon^{ijk} \Upsilon_{ak} \gamma_{8\ j}^a - \epsilon^{ijk} A_{a0k} \gamma_{7\ 0j}^a - \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} F_{ab0k} \Gamma_3^{ab}_{0j} + \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} F_{abk} \Gamma_4^{ab}_j$, por tanto, hay 42

constricciones de primera clase. Luego al realizar el conteo se concluye que la teoría tiene 0 grados de libertad, la teoría es topológica tal como se esperaba [33].

El álgebra entre las constricciones está dada por

$$\begin{aligned}
\left\{ \Gamma_1^{a0i}(x), \Gamma_3^{de0l}(y) \right\} &= \frac{\Xi}{2} \eta^{ade} \eta^{il} \delta^3(x-y), \\
\left\{ \Gamma_2^{ai}(x), \Gamma_4^{del}(y) \right\} &= -\frac{\Xi}{2} \eta^{ade} \eta^{il} \delta^3(x-y), \\
\left\{ \gamma_5^i(x), \gamma_5^l(y) \right\} &= \frac{1}{2} \epsilon^{il} \gamma_5^j \delta^3(x-y) \approx 0, \\
\left\{ \gamma_5^i(x), \gamma_6^{0l}(y) \right\} &= \frac{1}{2} \epsilon^{il} \gamma_5^j \delta^3(x-y) \approx 0, \\
\left\{ \gamma_5^i(x), \gamma_7^d{}_{0l}(y) \right\} &= \frac{1}{2} \epsilon^{il} \gamma_7^d{}_{0k} - \frac{1}{4\Xi} \eta_{abc} \Gamma_4^{bc}{}_{l} \Gamma_3^{da}{}_{0i} + \frac{1}{4\Xi} \eta_{abc} \Gamma_3^{bc0} \Gamma_4^{da}{}_{i} \\
&\approx 0, \\
\left\{ \gamma_5^i(x), \gamma_8^{dl}(y) \right\} &= \frac{1}{2} \epsilon^{il} \gamma_8^d{}_{k} - \frac{1}{4\Xi} \eta_{abc} \Gamma_3^{bc0l} \Gamma_3^{da}{}_{0i} + \frac{1}{4\Xi} \delta_i^l \eta_{abc} \Gamma_3^{bc0k} \Gamma_3^{da}{}_{0k} \\
&\quad + \frac{1}{4\Xi} \eta_{abc} \delta_i^l \Gamma_4^{bck} \Gamma_4^{da}{}_{k} - \frac{1}{4\Xi} \eta_{abc} \Gamma_4^{bcl} \Gamma_4^{da}{}_{i} \\
&\approx 0, \\
\left\{ \gamma_6^{0i}(x), \gamma_6^{0l}(y) \right\} &= -\frac{1}{2} \epsilon^{il} \gamma_5^j \delta^3(x-y) \approx 0, \\
\left\{ \gamma_6^{0i}(x), \gamma_7^d{}_{0l}(y) \right\} &= \frac{1}{2} \epsilon^{il} \gamma_7^d{}_{8k} - \frac{1}{4\Xi} \delta_i^l \eta_{abc} \Gamma_3^{bc0} \Gamma_3^{da0k} + \frac{1}{4\Xi} \eta_{abc} \Gamma_3^{bc0} \Gamma_3^{da0i} \\
&\quad + \frac{1}{4\Xi} \eta_{abc} \delta_l^i \Gamma_4^{bc}{}_{k} \Gamma_4^{dak} - \frac{1}{4\Xi} \eta_{abc} \Gamma_4^{bc}{}_{l} \Gamma_4^{dai} \\
&\approx 0, \\
\left\{ \gamma_6^{0i}(x), \gamma_8^{dl}(y) \right\} &= -\frac{1}{2} \epsilon^{il} \gamma_7^d{}_{0j} + \frac{1}{4\Xi} \eta_{abc} g^{il} \Gamma_3^{bc0k} \Gamma_4^{da}{}_{k} - \frac{1}{4\Xi} \eta_{abc} \Gamma_3^{bc0l} \Gamma_4^{dai} \\
&\quad - \frac{1}{4\Xi} \eta_{abc} \Gamma_4^{bcl} \Gamma_3^{da0i} + \frac{1}{4\Xi} g^{il} \eta_{abc} \Gamma_4^{bck} \Gamma_3^{da0}{}_{k} \\
&\approx 0, \\
\left\{ \gamma_7^a{}_{0i}(x), \Gamma_1^{d0l}(y) \right\} &= -\frac{1}{2} \epsilon_i{}^{lj} p^{ad}{}_j \delta^3(x-y) \\
&= -\frac{1}{2} \epsilon_i{}^{lj} \Gamma_4^{ad}{}_j \delta^3(x-y) \approx 0, \\
\left\{ \gamma_7^a{}_{0i}(x), \Gamma_2^{dl}(y) \right\} &= -\frac{1}{2} \epsilon_i{}^{lj} p^{ad}{}_{0j} \delta^3(x-y) \\
&= -\frac{1}{2} \epsilon_i{}^{lj} \Gamma_3^{ad}{}_{0j} \delta^3(x-y) \approx 0, \\
\left\{ \gamma_8^{ai}(x), \Gamma_1^{d0l}(y) \right\} &= \frac{1}{2} \epsilon^{il} p^{ad}{}_{0j} = \frac{1}{2} \epsilon^{il} \Gamma_3^{ad}{}_{0j} \approx 0, \\
\left\{ \gamma_8^{ai}(x), \Gamma_2^{dl}(y) \right\} &= \frac{1}{2} \epsilon^{il} p^{ad}{}_j = \frac{1}{2} \epsilon^{il} \Gamma_4^{ad}{}_j \approx 0,
\end{aligned} \tag{4.79}$$

vemos que el álgebra es cerrada y obedece las reglas del formalismo canónico del álgebra entre las constricciones, esto es, el resultado del paréntesis de Poisson entre constricciones de primera clase debe ser lineal en constricciones de primera clase y cuadrático en constricciones de segunda clase; mientras que el resultado del paréntesis de Poisson entre constricciones de primera clase y constricciones de segunda debe ser lineal en constricciones de primera clase y lineal en constricciones de segunda clase. Se puede ver que estos resultados están en completo acuerdo con estas reglas.

Las constricciones γ_{5i} , γ_6^{0i} forman un álgebra $SO(3,1)$ donde γ_6 son los generadores de boost mientras que γ_5 son generadores de rotaciones.

Las constricciones de primera clase son generadores de transformaciones de norma, dichas transformaciones se obtienen por medio del generador G definido en términos de las constricciones de primera clase

$$G = \int [\theta_{1,i}\gamma_1^i + \theta_{2,i}\gamma_2^i + \theta_{3,ai}\gamma_3^{ai} + \theta_{4,ai}\gamma_4^{ai} + \theta_5^i\gamma_{5,i} + \theta_{6,0i}\gamma_6^{0i} + \theta_{7,a}^{0i}\gamma_{7,0i}^a + \theta_{8,ai}\gamma_8^{ai}] d^3x,$$

generando las siguientes transformaciones de norma

$$\begin{aligned} \delta A_{d0l} &= \{A_{d0l}, G\} \\ &= \frac{1}{2} \left[-\partial_d \theta_{6,0l} + \theta_5^i \epsilon_{lik} A_{d0}^k - \epsilon_{lk}^i \theta_{6,0i} \Upsilon_d^k + \frac{1}{2\Xi} \eta_{dbc} \epsilon_{lik} \theta_5^i p^{bc0k} + \frac{1}{2\Xi} \eta_{dbc} \epsilon^i_{lk} p^{bck} \right] \\ \delta \Upsilon_{dl} &= \{\Upsilon_{dl}, G\} \\ &= \frac{1}{2} \left[-\partial_d \theta_{5,l} + \epsilon_{li}^k \theta_5^i \Upsilon_{dk} - \epsilon_l^{ij} \theta_{6,0i} A_{d0l} - \frac{1}{2\Xi} \eta_{dbc} \epsilon_{lik} \theta_5^i p^{bck} + \frac{1}{2\Xi} \eta_{dbc} \epsilon^i_{lk} \theta_{6,0i} p^{bc0k} \right] \\ \delta T_l &= \{T_l, G\} = \theta_{1,l} \\ \delta \Lambda_i &= \{\Lambda_i, G\} = \theta_{2,l} \\ \delta \varsigma_{dl} &= \{\varsigma_{dl}, G\} = \theta_{3,dl} \\ \delta \chi_{dl} &= \{\chi_{dl}, G\} = \theta_{4,dl} \\ \delta B_{de0l} &= \{B_{de0l}, G\} \\ &= \frac{1}{4} \left[\partial_e \theta_{7,d0l} - \partial_d \theta_{7,e0l} - \theta_l^{ij} \theta_{7,d0j} \Upsilon_{ek} + \epsilon_l^{ij} \theta_{7,e0i} \Upsilon_{dj} - \epsilon_l^{ik} \theta_{8,di} A_{e0k} + \epsilon_l^{ik} \theta_{8,ei} A_{dok} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\Xi} \eta_{dea} \epsilon_{lij} \theta_5^i p^{a0j} + \frac{1}{\Xi} \eta_{dea} \epsilon_l^{ij} \theta_{6,0i} \pi^{aj} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta B_{del} &= \{B_{del}, G\} \\
&= \frac{1}{4} \left[\partial_e \theta_{8,dl} - \partial_d \theta_{8,el} - \epsilon_l^{ik} \theta_{8,di} \Upsilon_{ek} + \epsilon_l^{ik} \theta_{8,ei} \Upsilon_{dk} - \epsilon_{li}^k \theta_{7,d}^{0i} A_{e0k} + \epsilon_{li}^k \theta_{7,e}^{0i} A_{d0k} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\Xi} \eta_{dea} \epsilon_{lij} \theta_5^i \pi^{aj} + \frac{1}{\Xi} \eta_{dea} \epsilon_l^i \theta_{6,0i} p^{a0j} \right] \\
\delta p^{d0l} &= \{p^{d0l}, G\} \\
&= \frac{1}{2} \left[\Xi \eta^{dab} \partial_b \theta_{7,a}^{0l} + \epsilon^l_{ij} \theta_5^i p^{d0j} - \epsilon^{lij} \theta_{6,0i} \pi_k^d - \epsilon^l_j \theta_{7,a}^{0i} p^{ad}_j + \epsilon^{lij} \theta_{8,ai} p^{ad}_{0j} \right. \\
&\quad \left. - \Xi \eta^{dac} \epsilon^l_i \theta_{7,a}^{0i} \Upsilon_{ck} + \Xi \eta^{dac} \epsilon^{lik} \theta_{8,ai} A_{c0k} \right] \\
\delta \pi^{dl} &= \{\pi^{dl}, G\} \\
&= \frac{1}{2} \left[\Xi \eta^{dab} \partial_b \theta_{8,a}^l + \epsilon^l_i \theta_5^i \pi_j^d + \epsilon^{li}_j \theta_{6,0i} p^{d0j} + \epsilon^l_i \theta_{7,a}^{0i} p^{da}_{0j} + \epsilon^{lij} \theta_{8,ai} p^{da}_j \right. \\
&\quad \left. - \Xi \eta^{dab} \epsilon^l_i \theta_{7,a}^{0i} A_{b0j} - \Xi \eta^{dac} \epsilon^{lik} \theta_{8,ai} \Upsilon_{ck} \right] \\
\delta \hat{T}^l &= \{\hat{T}^l, G\} = 0, \\
\delta \hat{\Lambda}^l &= \{\hat{\Lambda}^l, G\} = 0, \\
\delta \hat{\varsigma}^{dl} &= \{\hat{\varsigma}^{dl}, G\} = 0, \\
\delta \hat{\chi}^{dl} &= \{\hat{\chi}^{dl}, G\} = 0, \\
\delta p^{de0l} &= \{p^{de0l}, G\} = 0, \\
\delta p^{del} &= \{p^{del}, G\} = 0.
\end{aligned}$$

Con las constricciones de segunda clase se calcula el paréntesis de Dirac. Para esto se calcula la matriz $C^{\alpha\beta} = \{\Gamma^\alpha, \Gamma^\beta\}$ cuyas entradas están dadas por los paréntesis de Poisson entre las constricciones de segunda clase

$$C_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\Xi}{2} \eta^{ade} \eta^{il} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\Xi}{2} \eta^{ade} \eta^{il} \\ -\frac{\Xi}{2} \eta^{abd} \eta^{il} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\Xi}{2} \eta^{abd} \eta^{il} & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(x-y),$$

y la inversa $[C^{-1}]_{\alpha\beta}$ dada por

$$C_{\alpha\beta}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{2}{\Xi} \eta_{ade} \eta_{il} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{\Xi} \eta_{ade} \eta_{il} \\ \frac{1}{\Xi} \eta_{abd} \eta_{il} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\Xi} \eta_{abd} \eta_{il} & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(x-y).$$

El paréntesis de Dirac entre dos funcionales $F(q, p)$ y $G(q, p)$ se define por

$$\{F, G\}_D \equiv \{F, G\} - \int dudv \{F, \Gamma^\alpha(u)\} C_{\alpha\beta}^{-1}(u, v) \{\Gamma^\beta(v), G\}, \quad (4.80)$$

donde Γ^α representan las constricciones de segunda clase. Los paréntesis de Dirac entre los campos están dados por

$$\left\{A_{a0i}(x), p^{d0j}(y)\right\}_D = \frac{1}{2} \delta_a^d \delta_i^j \delta^3(x-y), \quad (4.81)$$

$$\left\{\Upsilon_{ai}(x), \pi^{dj}(y)\right\}_D = \frac{1}{2} \delta_a^d \delta_i^j \delta^3(x-y), \quad (4.82)$$

$$\left\{T_i(x), \hat{T}^j(y)\right\}_D = \frac{1}{2} \delta_i^j \delta^3(x-y), \quad (4.83)$$

$$\left\{\Lambda_{a0i}(x), \hat{\Lambda}^{d0j}(y)\right\}_D = \frac{1}{2} \delta_i^j \delta^3(x-y), \quad (4.84)$$

$$\left\{\varsigma_{ai}(x), \hat{\varsigma}^{dj}(y)\right\}_D = \delta_a^d \delta_i^j \delta^3(x-y), \quad (4.85)$$

$$\left\{\chi_{ai}(x), \hat{\chi}^{dj}(y)\right\}_D = \delta_a^d \delta_i^j \delta^3(x-y), \quad (4.86)$$

$$\left\{B_{ab0i}(x), p^{de0j}(y)\right\}_D = 0, \quad (4.87)$$

$$\left\{B_{abi}(x), p^{dej}(y)\right\}_D = 0, \quad (4.88)$$

$$\left\{A_{a0i}(x), B_{de0j}(y)\right\}_D = -\frac{1}{2\Xi} \eta_{ade} \eta_{ij} \delta^3(x-y), \quad (4.89)$$

$$\left\{\Upsilon_{ai}(x), B_{dej}(y)\right\}_D = \frac{1}{2\Xi} \eta_{ade} \eta_{ij} \delta^3(x-y), \quad (4.90)$$

En adición, se pueden calcular los paréntesis de Dirac fijando la norma, en este caso se usa la norma temporal, es decir, imponiendo las condiciones $T_i \approx 0$, $\Lambda_i \approx 0$, $\varsigma_{ai} \approx 0$, $\chi_{ai} \approx 0$. Estas condiciones son consideradas un nuevo conjunto de constricciones de segunda clase

por lo que ahora se tendrá un total de 84 constricciones de segunda clase

$$\begin{aligned}
 \Gamma_1^{a0i} &\equiv p^{a0i} - \Xi \eta^{abc} B_{bc}{}^{0i} \approx 0, \\
 \Gamma_2^{ai} &\equiv \pi^{ai} - \Xi \eta^{abc} B_{bc}{}^i \approx 0, \\
 \Gamma_3^{ab0i} &\equiv p^{ab0i} \approx 0, \\
 \Gamma_4^{abi} &\equiv p^{abi} \approx 0, \\
 \Gamma_{5i} &\equiv T_i \approx 0, \\
 \Gamma_{6i} &\equiv \Lambda_i \approx 0, \\
 \Gamma_{7ai} &\equiv \varsigma_{ai} \approx 0, \\
 \Gamma_{8ai} &\equiv \chi_{ai} \approx 0, \\
 \Gamma_{9i} &\equiv \hat{T}_i \approx 0, \\
 \Gamma_{10i} &\equiv \hat{\Lambda}_i \approx 0, \\
 \Gamma_{11ai} &\equiv \hat{\varsigma}_{ai} \approx 0, \\
 \Gamma_{12ai} &\equiv \hat{\chi}_{ai} \approx 0.
 \end{aligned} \tag{4.91}$$

La matriz $C_{\alpha\beta} = \{\Gamma^\alpha, \Gamma^\beta\}$ está dada por

$$C_{\alpha\beta} = \left(\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & \frac{\Xi}{2}\eta^{abc}\eta^{ij} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\Xi}{2}\eta^{abc}\eta^{ij} & 0 & 0 \\ -\frac{\Xi}{2}\eta^{abc}\eta^{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\Xi}{2}\eta^{abc}\eta^{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\delta_j^i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\delta_j^i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \delta^3(x-y), \quad (4.92)$$

$$\left(\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\delta_i^j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\delta_i^j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_a^d\delta_i^j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_a^d\delta_i^j \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\delta_a^d\delta_j^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\delta_a^d\delta_j^i & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

y su inversa

$$\begin{aligned}
 C_{\alpha\beta}^{-1} = & \left(\begin{array}{cccccc}
 0 & 0 & -\frac{2}{\Xi}\eta_{abc}\eta_{ij} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{2}{\Xi}\eta_{abc}\eta_{ij} & 0 & 0 \\
 \frac{1}{\Xi}\eta_{abc}\eta_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -\frac{1}{\Xi}\eta_{abc}\eta_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 2\delta_i^j & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\delta_i^j \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array} \right. \\
 & \left. \begin{array}{cccccc}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -2\delta_j^i & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -2\delta_j^i & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -\delta_a^b\delta_j^i & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\delta_a^d\delta_j^i \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \delta_a^b\delta_i^j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \delta_a^b\delta_i^j & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array} \right) \delta^3(x-y). \quad (4.93)
 \end{aligned}$$

De esta manera, usando (4.93) se construyen los paréntesis de Dirac dados por

$$\{A_{a0i}(x), p^{d0j}(y)\}_D = \frac{1}{2} \delta_a^d \delta_i^j \delta^3(x-y), \quad (4.94)$$

$$\{\Upsilon_{ai}(x), \pi^{dj}(y)\}_D = \frac{1}{2} \delta_a^d \delta_i^j \delta^3(x-y), \quad (4.95)$$

$$\{T_i(x), \hat{T}^j(y)\}_D = 0, \quad (4.96)$$

$$\{\Lambda_i(x), \hat{\Lambda}^j(y)\}_D = 0, \quad (4.97)$$

$$\{\varsigma_{ai}(x), \hat{\varsigma}^{dj}(y)\}_D = 0, \quad (4.98)$$

$$\{\chi_{ai}(x), \hat{\chi}^{dj}(y)\}_D = 0, \quad (4.99)$$

$$\{B_{ab0i}(x), p^{de0j}(y)\}_D = 0, \quad (4.100)$$

$$\{B_{abi}(x), p^{dej}(y)\}_D = 0, \quad (4.101)$$

$$\{A_{a0i}(x), B_{de0j}(y)\}_D = -\frac{1}{2\Xi} \eta_{ade} \eta_{ij} \delta^3(x-y), \quad (4.102)$$

$$\{\Upsilon_{ai}(x), B_{dej}(y)\}_D = \frac{1}{2\Xi} \eta_{ade} \eta_{ij} \delta^3(x-y), \quad (4.103)$$

se observa que los paréntesis de Dirac (4.102) y (4.103) y los paréntesis generalizados de FJ (4.43) y (4.44) coinciden entre sí.

4.7 Conclusión

En este capítulo se ha analizado un tipo especial de teoría topológica: la teoría BF . Esta teoría es de interés desde el punto de vista físico por las propiedades que comparte con Relatividad General [37] [38] y por el hecho de que es posible reformular algunas teorías como una teoría BF imponiendo constricciones extra sobre sus variables, por ejemplo, la teoría electromagnética [18], teoría de Yang-Mills [46] [47], partícula libre, etc. Por ejemplo, se ha visto que Relatividad General en tres dimensiones es un caso particular de una teoría BF tridimensional mientras que en 4 dimensiones existe la formulación de Plebański la cual permite recobrar Relatividad General mediante una apropiada imposición de constricciones adicionales sobre la variable B (*condiciones de simplicidad*) en una teoría BF cuatridimensional.

Por otro lado, se reportan los resultados obtenidos en el análisis a una teoría BF en 4 dimensiones con cambio de variables tipo Ashtekar donde se rompió el grupo de Lorentz al grupo compacto $SO(3)$ de modo que fuera posible calcular los paréntesis de Dirac, a diferencia de lo reportado en [5]. Se realizó el análisis de FJ y de Dirac, logrando resultados equivalentes en ambos casos y comprobando una vez más la economía del formalismo de FJ frente al de Dirac, en particular, se obtuvieron los paréntesis generalizados de FJ los cuales corresponden a los paréntesis de Dirac al trabajar en el esquema estricto. Es importante mencionar que los resultados que se obtuvieron no habian sido reportados en la literatura y se han publicado en [6]. Cabe mencionar que si uno calcula el determinante de la matriz (4.40), uno puede obtener la medida para calcular el producto interno entre

estados físicos [48], por lo tanto este trabajo contribuye al problema de cuantización de teorías de norma como gravedad, donde encontrar la medida es uno de los problemas más difíciles de abordar.

Capítulo 5

Análisis Hamiltoniano y Simpléctico a una acción tipo Holst en tres dimensiones

En este capítulo se mostrará el análisis realizado a una acción tipo Holst mediante los formalismos de Dirac y de FJ. Comenzamos dando una breve introducción a la formulación *ADM*, posteriormente se introduce al formalismo de primer orden de la Relatividad General en cuatro dimensiones y se mostrará la modificación propuesta por Soren Holst [7] cuya importancia a nivel clásico reside en la forma en que modifica las constricciones del sistema. Una vez establecido este contexto se presentará el análisis realizado a una acción tipo Holst en tres dimensiones definida por la acción de Hilbert-Palatini acoplada al término de Chern-Simons.

A partir de 1915 el concepto que se tiene de la gravedad cambió totalmente en relación a las ideas newtonianas predominantes hasta entonces (y que sin embargo aún dominan en muchas áreas de la ciencia). Este cambio se le debe a Albert Einstein [50] quien con sus trabajos explicó la fuerza de la gravedad como una consecuencia de la geometría del espacio-tiempo producida por la presencia de materia y energía en el Universo [51] [52]. Esto supone un cambio revolucionario respecto a las ideas de Newton donde la gravedad se entiende como una interacción instantánea entre los cuerpos masivos dependiendo únicamente de las masas de los cuerpos implicados y la distancia entre ellos. La forma en que Einstein estableció la dinámica del espacio-tiempo y la materia presente en el Universo es mediante las conocidas *Ecuaciones de Einstein* dadas [50] [53] por

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (5.1)$$

donde $g_{\mu\nu}$ denota el tensor métrico a partir del cual se definen los símbolos de Christoffel $\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta} [\partial_\mu g_{\beta\nu} + \partial_\nu g_{\beta\mu} - \partial_\beta g_{\mu\nu}]$, el tensor de curvatura de Riemann $R^\rho_{\sigma\mu\nu} \equiv \partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\sigma} +$

$\Gamma^\rho_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda}\Gamma^\lambda_{\mu\sigma}$, el tensor de Ricci $R_{\mu\nu} \equiv R^\rho_{\mu\rho\nu}$ y la curvatura escalar $g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \equiv R$ [53], por otro lado $T_{\mu\nu}$ denota el tensor de energía momento donde están consideradas todo tipo de materia y energía no gravitacional. En las ecuaciones anteriores se identifican dos partes bien diferenciadas. El lado izquierdo depende únicamente de la geometría del espacio-tiempo mientras que el derecho depende de la configuración de la materia y la energía en el sistema. Un aspecto muy importante de la teoría es que en la ecuación (5.1) no se ha hecho ningún supuesto sobre la forma de la métrica $g_{\mu\nu}$, es decir, esta es dinámica en el sentido de que sus componentes habrán de ser determinadas resolviendo el conjunto de ecuaciones diferenciales dadas en (5.1) (a diferencia de la concepción Newtoniana donde el espacio y el tiempo son fijos y los sistemas evolucionan en el tiempo sobre un espacio fijo de fondo). Las ecuaciones de Einstein son un conjunto de ecuaciones diferenciales en $g_{\mu\nu}$ las cuales incluso Einstein dudó que pudieran ser resueltas exactamente, sin embargo, como se vio casi al mismo tiempo que se formularon dichas ecuaciones, éstas tienen soluciones analíticas entre las que se pueden mencionar la solución de Schwarzschild [54] [55] [56] que describe un campo gravitacional esféricamente simétrico o la métrica FLRW (Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker), que describe un Universo en expansión, homogéneo e isótropo [57]. Estos resultados son muy importantes y fueron la base para el desarrollo de áreas de la física como la cosmología [53] [58]. Más aun, las predicciones hechas con base en esta formulación de la gravedad han sido comprobadas en muchas ocasiones y son bastante conocidas (la precesión del perihelio de Mercurio [59], deflexión de la luz de su trayectoria al pasar cerca de un cuerpo masivo [60], detección de ondas gravitacionales [61] [62] y recientemente la publicación de la primera fotografía de la silueta de un agujero negro [63]), razón por la que actualmente la RG es una de las bases de la física y goza de la total confianza de los físicos.

En esta tesis, no nos enfocaremos en estudiar las soluciones a dichas ecuaciones, sus implicaciones e interpretaciones, sino en los intentos de establecer una formulación Hamiltoniana de la gravedad. Se sabe que es posible derivar las ecuaciones de Einstein (5.1) a partir de un principio de mínima acción. A esta acción se le conoce como acción de Einstein-Hilbert y está dada por [53]

$$S_{EH}[g] = \int \sqrt{-g} R d^4x, \quad (5.2)$$

esta acción tiene como variable dinámica a la métrica $g_{\mu\nu}$ y g denota su determinante. Calculando la variación de la acción anterior respecto a las componentes de la métrica $\frac{\delta S_{EH}}{\delta g_{\mu\nu}} = 0$ se obtienen las ecuaciones (5.1) [64]

$$\begin{aligned} \frac{\delta S_{EH}[g^{\alpha\beta}]}{\delta g^{\mu\nu}} &= \int d^4x \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} [\sqrt{-g} R] = \int d^4x \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} [\sqrt{-g} g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}] \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + R_{\mu\nu} \right\} = 0, \end{aligned} \quad (5.3)$$

lo cual implica las ecuaciones de Einstein-Hilbert

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0, \quad (5.4)$$

o considerando la presencia de energía y materia, las cuales se introducen vía un término $\mathcal{L}_{materia}$, las ecuaciones anteriores se modifican como

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = T_{\mu\nu}, \quad (5.5)$$

siendo $T_{\mu\nu}$ el tensor de energía momento.

Obtener un formalismo Hamiltoniano partiendo del Lagrangiano dado en la acción (5.2) fue por supuesto el primer intento que se realizó históricamente. Sin embargo, la forma en que está escrita la teoría de la Relatividad General tienen como base el *principio de equivalencia* y el *principio de covarianza* (ver apéndice) los cuales en conjunto establecen que *las leyes de la física deben ser escritas en forma covariante*. Las ecuaciones (5.5) están escritas de una manera muy elegante, siendo un conjunto de 10 ecuaciones diferenciales en las componentes de la métrica. Sin embargo algunas de estas ecuaciones representan constricciones entre las variables dinámicas de modo que identificar las ecuaciones que proveen información sobre la dinámica del sistema de aquellas que son constricciones es una tarea difícil debido a la propia naturaleza covariante de las ecuaciones. Una solución que permite determinar el Hamiltoniano del sistema es aquella propuesta por Arnówt-Deser-Misner en 1962 (*Formulación ADM*) [65] [66]. Esta formulación consiste en realizar una foliación del espacio-tiempo, es decir, descomponer la variedad espacio-tiempo cuatridimensional en una familia de hipersuperficies tridimensionales Σ parametrizada por una función escalar t . A continuación se explicará a grandes rasgos en qué consiste esta formulación. Como se mencionó el principio variacional del cual se derivan las ecuaciones de Einstein es la acción de Einstein-Hilbert

$$S_{E-H}[g] = \int d^4x \sqrt{-g} R, \quad (5.6)$$

y tal como se aprende de mecánica clásica usual el primer paso para definir el Hamiltoniano de un sistema es calcular el momento canónico conjugado a todas las variables, en este caso a las componentes de la métrica, que se calculan como la derivada del Lagrangiano respecto a las velocidades generalizadas. Sin embargo, en la formulación covariante de la RG ¿cómo se pueden definir las velocidades generalizadas? Para esto es necesaria una variable que permita definir una velocidad, es decir, un parámetro de evolución [67]. Esto tiene dos consecuencias, por un lado esto aparentemente rompe la covarianza de la teoría y por otro lado esto corta el espacio-tiempo en rebanadas en las cuales el parámetro t es constante ($t = \text{constante}$). Tales rebanadas son hipersuperficies tridimensionales con una métrica asociada γ_{ab} ($a, b, .. = 1, 2, 3$) para cada una además se impone que las hipersuperficies no se intersecten entre ellas de modo que la causalidad no sea violada. Se piensa en la evolución del espacio-tiempo como el cambio de las hipersuperficies en el parámetro t y de este modo se puede cubrir totalmente el espacio-tiempo.

Como ya se dijo, cada hipersuperficie tiene asociado un tensor métrico γ_{ab} con seis componentes, por lo tanto se necesita definir otras cuatro variables para recobrar el número de variables dinámicas que antes se tenía en $g_{\mu\nu}$. Estas cuatro variables se definen de forma natural al considerar la foliación

del espacio-tiempo. A estas variables se les denota como N (función *lapse*) y N^a (funciones *shift*). La función lapse es un parámetro que identifica cada hipersuperficie para cada valor de t mientras que las funciones shift se relacionan con el desplazamiento de un punto al pasar a la siguiente hipersuperficie [65] [66]. El siguiente paso consiste en reescribir el elemento de línea en términos de las nuevas variables (γ_{ab}, N, N_a) a partir de lo cual se podrá expresar los términos de la acción en función de las nuevas variables, a partir de esto se identificará el tensor métrico y con él se construye una versión del tensor de Riemann, el tensor de Ricci, el escalar de curvatura, etc. [65] [66]. Se introduce la curvatura extrínseca k_{ab} de la hipersuperficie $k_{ab} = k_{ab}[\dot{\gamma}_{ab}, N, N_{a|b}]$ (donde $\dot{}$ representa derivada respecto al parámetro t y $|$ representa derivada covariante sobre la hipersuperficie). Con ayuda de estas variables la acción de Einstein-Hilbert se reescribe como [66]

$$S_{EH} = \int d^4x \sqrt{\gamma} N [k^{ab} k_{ab} - k^2 + R], \quad (5.7)$$

con $k = k^a_a$. Esta acción no depende de $\dot{N}$, $\dot{N}_a$ por lo que podemos considerarlas variables dinámicas sin relevancia física (multiplicadores de Lagrange) de modo que se puede pensar que las variables físicamente relevantes son las seis componentes de γ_{ab} . Esta formulación permite construir un Hamiltoniano para Relatividad General, ya que ahora sí es posible definir los momentos canónicos conjugados a las variables dinámicas

$$\begin{aligned} \pi^{ab} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\gamma}_{ab}}, \\ p^\mu &= \frac{\partial L}{\partial \dot{N}_\mu}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

La densidad Hamiltoniana tiene la forma $H = \pi^{ab} \dot{\gamma}_{ab} - L = NH_0 + N^a H_a$ con lo cual se puede reescribir la acción como [66]

$$S_{EH}[\gamma_{ab}, N] = \int dt \int d^3x [\pi^{ab} \dot{\gamma}_{ab} - NH_0 - N^a H_a], \quad (5.9)$$

de lo cual es claro que H_0 y H_a son constricciones, es decir, el Hamiltoniano H es combinación lineal de constricciones. Explícitamente estas constricciones son de la forma

$$H_0 = \sqrt{\gamma} [k^{ab} k_{ab} - k - R] = 0, \quad (5.10)$$

$$H_a = 2\pi^b_{a|b} = 0. \quad (5.11)$$

Como se puede ver, las constricciones anteriores no tienen una forma polinomial en las coordenadas y momentos, por lo tanto al realizar el procedimiento usual de cuantización promoviendo los momentos a operadores diferenciales el Hamiltoniano no tendrá una forma sencilla, por lo cual resolver ambas constricciones es difícil.

En lugar de continuar en este camino, se buscó una formulación alternativa de la acción de Einstein-Hilbert, dicha formulación se le conoce como formulación de Hilbert-Palatini [68] [69]. En esta

formulación las variables dinámicas pasan de ser la métrica $g_{\mu\nu}$ a cuatro 1- formas $e^I = e^I_\mu dx^\mu$ llamada *tétrada* y la 1-forma de *conexión* $w^{IJ} = w^{IJ}_\mu dx^\mu$, este formalismo en el cual e y w son independientes se le conoce como formalismo a primer orden [69]. El procedimiento consiste en reescribir la acción de Hilbert-Palatini en términos de estas nuevas variables, en este contexto, la métrica deja de ser la variable dinámica independiente y es una cantidad que se expresa en términos de la tétrada como [69]

$$g_{\mu\nu} = e^I_\mu e^J_\nu \eta_{IJ}. \quad (5.12)$$

Como es usual, se denotará con $\mu, \nu, \dots = 0, 1, 2, 3$ a los índices de espacio-tiempo, $I, J, \dots = 0, 1, 2, 3$ índices de grupo interno y en este caso se considerará como grupo de simetría $SO(4)$ o $SO(3, 1)$, η_{IJ} corresponde a la métrica interna plana, con la cual suben y bajan índices de grupo. En 4 dimensiones la acción de Einstein-Hilbert se reescribe en términos de e^I_μ y w^{IJ}_μ de la siguiente forma [68] [69]

$$S_{HP}[e, w] = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \, |e| \, e^\mu_I e^\nu_J F^{IJ}_{\mu\nu}[w], \quad (5.13)$$

la acción anterior es conocida como acción de Hilbert-Palatini. En la acción anterior la 2-forma $F^{IJ}_{\mu\nu} = \partial_\mu w^{IJ}_\nu - \partial_\nu w^{IJ}_\mu + [w_\mu, w_\nu]^{IJ}$ denota la curvatura de la conexión y $|e|$ es el determinante de la tétrada. Las ecuaciones de movimiento que se obtienen de la acción anterior se derivan considerando la variación respecto de cada variable. Variando respecto a la conexión w^{IJ}_μ se obtiene la siguiente ecuación de movimiento

$$\frac{\delta S_{HP}}{\delta w^{IJ}_\mu} = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_{IJKL} D_\nu (e^K_\rho e^L_\sigma) = 0, \quad (5.14)$$

la cual es equivalente a la condición

$$D_{[\mu} e^I_{\nu]} = \partial_{[\mu} e^I_{\nu]} + w^I_{[\mu|J]} e^J_{\nu]} = 0, \quad (5.15)$$

a esta ecuación se le conoce como *condición de no torsión* [69]. Por otro lado variando la acción respecto a la tétrada se obtiene

$$\begin{aligned} \delta S &= \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \, |e| \, [2(\delta e^\mu_I) e^\nu_J F^{IJ}_{\mu\nu} - e^K_\rho (\delta e^\rho_K) e^\mu_I e^\nu_J F^{IJ}_{\mu\nu}] \\ &= \frac{1}{8\pi G} \int d^4x \, |e| \, \left[e^\nu_J F^{IJ}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} e^\mu_I e^\rho_K e^\sigma_L F^{KL}_{\rho\sigma} \right] \delta e^\mu_I = 0, \end{aligned} \quad (5.16)$$

expresando esto último en términos del tensor de Ricci y el escalar de curvatura se tiene

$$\delta S = \frac{1}{8\pi G} \int d^4x \, |e| \, [R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R] \eta^{IJ} e^\nu_J \delta e^\mu_I = 0, \quad (5.17)$$

de lo cual se obtiene

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0. \quad (5.18)$$

Es importante mencionar que para obtener esta ecuación es necesario utilizar la solución para w_μ^{IJ} en la ecuación (5.15). Por lo tanto las acciones de Einstein-Hilbert y Hilbert-Palatini son equivalentes, en el sentido de que ambas acciones tienen como ecuaciones de movimiento las ecuaciones de Einstein. La acción (5.13) no es única. En cuatro dimensiones es posible sumarle términos topológicos que no modifican la teoría a nivel clásico, es decir, a nivel de las ecuaciones de movimiento, por ejemplo el invariante de Pontryagin ($L = \text{tr}[F^{\mu\nu} * F_{\mu\nu}]$, donde $F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\rho\sigma}$), el invariante de Nieh-Yan ($N = T^I \wedge T^I - F^{IJ} \wedge e^I \wedge e^J$, donde $F^{IJ} = dw^{IJ} - w^{IK} \wedge w^{KJ}$ y $T^I = de^I - w^{IJ} \wedge e^J$), el invariante de Euler ($L = \star F^{IJ} \wedge F_{IJ}$ donde $\star F^{IJ} = \frac{1}{2}\epsilon^{IJKL}F_{KL}$) y en particular el *término de Holst* dado por [7]

$$S_H = \frac{1}{4} \int dx^4 \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} e_\mu^I e_\nu^J F_{\rho\sigma IJ}. \quad (5.19)$$

Vemos que al sustituir en la acción anterior la solución a la ecuación (5.15) para la conexión $w_\mu^{IJ}[e]$ lo anterior conduce a la identidad de Bianchi $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \delta_{I[K} \delta_{L]J} e_\mu^I e_\nu^J F_{\rho\sigma}^{KL} [w[e]] = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma} [\Gamma(g)] = 0$. Por lo tanto, a nivel de ecuaciones de movimiento el término de Holst no tiene contribución, sin embargo su presencia alterará la estructura simpléctica de la teoría y permite la introducción de un tipo especial de variables las cuales modifican la forma de las constricciones. La acción de interés es una combinación de la acción de Hilbert-Palatini y el término de Holst acoplado con un parámetro conocido como *parámetro de Barbero-Immirzi* γ , es decir

$$S_H = S_{HP} + \gamma^{-1} S_H = \frac{1}{4} \int dx^4 \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \left[\frac{1}{2} \epsilon_{IJKL} e_\mu^I e_\nu^J F_{\rho\sigma}^{KL} + \gamma^{-1} e_\mu^I e_\nu^J F_{\rho\sigma IJ} \right]. \quad (5.20)$$

La forma en que se ha definido la acción S_H es conveniente, es decir, considerando un valor particular para γ permite recobrar las formulaciones hamiltonianas de Barbero ($\gamma = 1$) o la de Ashtekar ($\gamma = i$) [7]. Sin embargo, esta acción solo se puede definir en 3+1 dimensiones por la sencilla razón de que el término de Holst solo se define en cuatro dimensiones. La importancia de la acción de Holst reside en el hecho de generalizar las formulaciones Hamiltonianas de Ashtekar y Barbero. Sin embargo, la estructura simpléctica en cada caso es diferente y depende del valor dado a γ , es decir, que a nivel cuántico la presencia del parámetro de Barbero-Immirzi es crucial, y por lo tanto, conocer su valor es importante en el proceso de cuantización [4]. Sin embargo, hasta este momento no se conoce el valor exacto del parámetro. Conocer el valor del parámetro de Barbero-Immirzi es uno de los problemas actuales de la física [70].

Las constricciones que emergen del análisis de la acción tiene una forma polinomial [7] lo cual hace más sencillo el proceso de cuantización, sin embargo, esto no significa que este proceso ya se haya logrado de manera completa en el sentido de que se tenga una interpretación física de las soluciones de las constricciones.

Con todo lo anterior en mente, en este trabajo se estudió una acción análoga a la de Holst en tres dimensiones. Este sistema, en principio más sencillo, permitirá estudiar un sistema que clásicamente es equivalente a RG en tres dimensiones, pero como se verá, a nivel de paréntesis de Dirac son

diferentes. En concreto, se estudiará la acción de Palatini en tres dimensiones acoplada al término de Chern-Simons por un parámetro γ análogo al parámetro de Barbero-Immirzi [10]. Se presentará el análisis realizado a una acción tipo Holst mediante los métodos de Dirac y de FJ, obteniendo el conjunto completo de constrictciones y su clasificación así como los paréntesis de Dirac y de FJ respectivamente, comparando los dos tipos de paréntesis se encuentra que coinciden.

5.1 Relación entre Relatividad General y la acción de Chern-Simons

Se sabe que es posible reformular la acción de RG en tres dimensiones como la acción de Chern-Simons dependiente únicamente de la conexión [72] [73]. El procedimiento consiste en redefinir el grupo de simetría de la acción de Hilbert-Palatini, definiendo una nueva conexión en términos de la cual se reescribe la acción de Hilbert-Palatini tridimensional como una acción de Chern-Simons.

Consideremos un espacio-tiempo tridimensional. La acción de Hilbert-Palatini en este formalismo está escrita en términos de una 1-forma e_μ^i , una 1-forma de conexión w_μ^i y de la curvatura de la conexión $F[w]$. Aquí los índices latinos denotan índices de grupo interno G y toman valores 1, 2, 3, mientras que los índices griegos toman valores 0, 1, 2 etiquetando coordenadas de espacio-tiempo.

La acción de Hilbert-Palatini es de la forma

$$S_{RG}[e, w] = \frac{1}{2\pi G} \int e^i \wedge F_i[w], \quad (5.21)$$

esta acción es invariante ante la transformación $e \rightarrow geg^{-1}$ y $w \rightarrow gw g^{-1} + gdg^{-1}$ siendo g miembro del grupo de simetría G (por ejemplo $SO(3)$ o $SU(2)$). La idea para reescribir la acción anterior como la acción de Chern-Simons es considerar un grupo de simetría $\tilde{G}$ que amplíe el grupo G , en este caso el grupo $ISO(3)$ teniendo los generadores de rotaciones J_i y de traslación P_i cumpliendo la siguiente álgebra entre los generadores [72]

$$\begin{aligned} [J_i, J_j] &= \epsilon_{ij}^{k} J_k, \\ [J_i, P_j] &= \epsilon_{ij}^{k} P_k, \\ [P_i, P_j] &= 0, \end{aligned}$$

y el siguiente producto interno

$$\langle J_i, P_j \rangle \equiv \delta_{ij}, \quad (5.22)$$

$$\langle J_i, J_j \rangle = \langle P_i, P_j \rangle = 0. \quad (5.23)$$

Con esto se define una nueva 1-forma A_μ dada por

$$A_\mu \equiv w_\mu^i J_i + e_\mu^i P_i, \quad (5.24)$$

esta nueva variable permite escribir la acción de Hilbert-Palatini en tres dimensiones como la acción de Chern-Simons [74] [75]

$$S[A] = \int d^3x \epsilon^{\mu\nu\rho} \left(\langle A_\mu, \partial_\nu A_\rho \rangle + \frac{1}{3} \langle A_\mu, [A_\nu, A_\rho] \rangle \right). \quad (5.25)$$

Esta propiedad ha sido estudiada por autores como V. Bonsom y E. R. Livine en [10] trabajo en que se explota esta relación para proponer una acción tipo Holst en tres dimensiones.

5.2 Análisis simpléctico a la acción de Palatini en 2+1 dimensiones acoplada al término de Chern-Simons

La teoría que se analizará está dada por la siguiente acción

$$S[e, A] = 2 \int_M e^i \wedge F_i[A] + \frac{1}{\gamma} \int_M \left[A^i \wedge dA_i + \frac{2}{3} \epsilon_{ijk} A^i \wedge A^j \wedge A^k \right], \quad (5.26)$$

donde M es una variedad tridimensional sin frontera, $F = dA + A \wedge A$ es la curvatura de la conexión A , e son las triadas, $i, j, \dots = 0, 1, 2$ son índices de grupo interno $SU(2)$ y γ es un parámetro arbitrario similar al parámetro de Barbero-Immirzi [10]. La variación de la acción anterior conduce a las ecuaciones de movimiento

$$\begin{aligned} De + \frac{1}{\gamma} F &= 0, \\ F &= 0, \end{aligned}$$

Podemos observar que estas ecuaciones son clásicamente equivalentes a las ecuaciones de Einstein en tres dimensiones. Como es usual, la notación que se utilizará en esta sección es $\mu, \nu, \dots = 0, 1, 2$ para índices de espacio-tiempo y a, b, c para índices de espacio. Se supondrá que la variedad tiene topología $M = \Sigma \times R$, donde Σ es una superficie de Cauchy y R es un parámetro de evolución. De esta manera, realizando la descomposición 2+1 de la acción (5.26), esta toma la siguiente forma

$$\begin{aligned} S[e, A] = \int \epsilon^{0ab} \left[\left(e_b^i + \frac{1}{2\gamma} A_b^i \right) \dot{A}_{ai} + A_{0i} \left(D_a e_b^i + \frac{1}{2\gamma} F_{ab}^i \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} e_0^i F_{abi} \right] d^3x, \end{aligned} \quad (5.27)$$

donde

$$\begin{aligned} F_{abi} &= \partial_a A_{bi} - \partial_b A_{ai} + \epsilon_i^{jk} A_{aj} A_{bk}, \\ D_a e_{bi} &= \partial_a e_{bi} + \epsilon_i^{jk} A_{aj} e_{bk}. \end{aligned}$$

De (5.27) se identifica la densidad Lagrangiana lineal en las velocidades generalizadas [21]

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{(0)} &= \epsilon^{0ab} \left(e_b^i + \frac{1}{2\gamma} A_b^i \right) \dot{A}_{ai} + \frac{1}{2} \epsilon^{0ab} e_0^i F_{abi} + \epsilon^{0ab} A_{0i} \left(D_a e_b^i + \frac{1}{2\gamma} F_{ab}^i \right) \\ &= \epsilon^{0ab} \left(e_b^i + \frac{1}{2\gamma} A_b^i \right) \dot{A}_{ai} - \left[-\frac{1}{2} \epsilon^{0ab} e_0^i F_{abi} - \epsilon^{0ab} A_{0i} \left(D_a e_b^i + \frac{1}{2\gamma} F_{ab}^i \right) \right] \\ &= a_i^{(0)} \dot{\xi}^{(0)i} - \mathcal{V}^{(0)},\end{aligned}\tag{5.28}$$

donde $\xi^{(0)}$ es el conjunto de variables simplécticas y está dado por

$$\xi^{(0)} = (e_{0i}, e_{ai}, A_{0i}, A_{ai}),\tag{5.29}$$

$a^{(0)}$ es la correspondiente 1-forma

$$a^{(0)} = \left(0, 0, 0, \epsilon^{0ab} \left(e_b^i + \frac{1}{2\gamma} A_b^i \right) \right),\tag{5.30}$$

y el potencial simpléctico es definido por

$$\mathcal{V}^{(0)} = -\frac{1}{2} \epsilon^{0ab} e_0^i F_{abi} - \epsilon^{0ab} A_{0i} \left(D_a e_b^i + \frac{1}{2\gamma} F_{ab}^i \right).\tag{5.31}$$

En el formalismo de FJ las ecuaciones de movimiento se expresan como $f_{ij}^{(0)} \dot{\xi}^{(0)j} = \frac{\partial \mathcal{V}^{(0)}}{\partial \xi^{(0)i}}$, donde $f_{ij}^{(0)}$ es conocida como matriz simpléctica y está dada por $f_{ij}^{(0)} = \frac{\partial a_j^{(0)}}{\partial \xi^{(0)i}} - \frac{\partial a_i^{(0)}}{\partial \xi^{(0)j}}$ [21]. En este caso la matriz simpléctica tiene la siguiente forma

$$f^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon^{0ab} \eta^{il} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon^{0ab} \eta^{il} & 0 & \frac{1}{\gamma} \epsilon^{0ab} \eta^{il} \end{pmatrix} \delta^2(x-y).\tag{5.32}$$

Se observa que $f^{(0)}$ es singular y por lo tanto existirán constricciones. Para poder identificar las constricciones de FJ se calculan los vectores nulos de $f^{(0)}$ que están dadas por

$$\begin{aligned}V_1^{(0)} &= (V^{e_{0i}}, 0, 0, 0), \\ V_2^{(0)} &= (0, 0, V^{A_{0i}}, 0),\end{aligned}$$

donde $V^{e_{0i}}, V^{A_{0i}}$ son funciones arbitrarias. Las constricciones de FJ se obtienen mediante las contracciones [21]

$$\begin{aligned}\Omega_1^{(0)} &= \int \mathbf{d}^3x V_1^{(0)i} \frac{\delta}{\delta \xi^{(0)i}} \int \mathbf{d}^3y \mathcal{V}^{(0)}(\xi) = \int \mathbf{d}^3x V^{e_{0i}} \int \frac{\delta \mathcal{V}^{(0)}(x)}{\delta e_{0i}(y)} d^2y \\ &= V^{e_{0i}} \left[-\frac{1}{2} \epsilon^{0ab} F_{ab}^i \right] = 0, \\ \Omega_2^{(0)} &= \int \mathbf{d}^3x V_2^{(0)i} \frac{\delta}{\delta \xi^{(0)i}} \int \mathbf{d}^3y \mathcal{V}^{(0)}(\xi) = \int \mathbf{d}^3x V^{A_{0i}} \int \frac{\delta \mathcal{V}^{(0)}(x)}{\delta A_{0i}(y)} d^2y \\ &= -V^{A_{0i}} \epsilon^{0ab} \left[D_a e_b^i + \frac{1}{2\gamma} F_{ab}^i \right] = 0,\end{aligned}$$

de esta manera, las constricciones de FJ están dadas por

$$\Omega_1^{(0)i} = \frac{1}{2}\epsilon^{0ab}F_{ab}{}^i = 0, \quad (5.33)$$

$$\Omega_2^{(0)i} = \epsilon^{0ab} \left[D_a e_b{}^i + \frac{1}{2\gamma} F_{ab}{}^i \right] = 0. \quad (5.34)$$

Para determinar si existen más constricciones de FJ se impone la condición de consistencia sobre las constricciones anteriores. Esto significa que el siguiente sistema se satisface [21]

$$\bar{f}_{ij}^{(0)} \dot{\xi}^j = Z_i,$$

donde

$$\begin{aligned} \bar{f}_{ij}^{(0)} &= \begin{pmatrix} f_{ij}^{(0)} \\ \frac{\partial \Omega^{(0)}}{\partial \xi^j} \end{pmatrix}, \\ Z_i &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{V}^{(0)}}{\partial \xi^i} \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La matriz $\bar{f}^{(0)}$ tiene la forma explícita

$$\bar{f}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon^{0ab}\eta^{ij} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon^{0ab}\eta^{ij} & 0 & \frac{1}{\gamma}\epsilon^{0ab}\eta^{ij} \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon^{0ab}[\eta^{ij}\partial_b + \epsilon^{ijk}A_{bk}] \\ 0 & \epsilon^{0ab}[\epsilon^{ij}\partial_b + \epsilon^{ijk}A_{bk}] & 0 & \epsilon^{0ab}\epsilon^{ijk}e_{bk} \\ & & & + \frac{1}{\gamma}\epsilon^{0ab}[\eta^{ij}\partial_b + \epsilon^{ijk}A_{bk}] \end{pmatrix} \delta^2(x-y) \quad (5.35)$$

se observa que la matriz no es cuadrada como se esperaba, sin embargo (5.35) tiene el siguiente conjunto de vectores nulos

$$\begin{aligned} v_1 &= (0, \partial_i V_a - \epsilon_i{}^{jk} A_{aj} V_k, 0, 0, V_i, 0), \\ v_2 &= (0, -\epsilon_i{}^{jk} e_{aj} V_k, 0, \partial_a V_i - \epsilon_i{}^{jk} A_{aj} V_k, 0, V_i). \end{aligned} \quad (5.36)$$

El vector Z_i está dado por

$$Z = \begin{pmatrix} \Omega_1^{(0)i} \\ -\epsilon^{0ab} [\partial_b A_0^i + \epsilon^{ijk} A_{bj} A_{0k}] \\ \Omega_2^{(0)i} \\ \epsilon^{0ab} \partial_a \left(e_0^i + \frac{1}{\gamma} A_0^i \right) - \epsilon^{0ab} \epsilon^{ijk} A_{0j} e_{ak} \\ -\epsilon^{0ab} \epsilon^{ijk} \left(e_{0j} + \frac{1}{\gamma} A_{0j} \right) A_{ak} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.37)$$

La contracción de los vectores nulos (5.36) con el vector Z_i conduce a identidades, por ejemplo

$$v_1 Z = \epsilon^{ijk} V_i A_{0j} \Omega_{1k}^{(0)} = 0, \quad (5.38)$$

lo que implica que no hay más constricciones de FJ. Como se ha mencionado en el formalismo de FJ no es necesario realizar la clasificación de las constricciones en primera y segunda clase. En el formalismo FJ todas las constricciones se consideran al mismo nivel. El conteo de grados de libertad se lleva a cabo de la siguiente forma: hay seis variables dinámicas A_a^i y seis constricciones independientes $\Omega_1^{(0)i}, \Omega_2^{(0)i}$; por lo tanto la teoría no posee grados de libertad, la teoría es topológica, como se esperaba.

Ahora se agregan al Lagrangiano simpléctico las constricciones halladas definiendo el Lagrangiano simpléctico $\mathcal{L}^{(1)}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(1)} &= a_i^{(0)} \dot{\xi}^{(0)i} - \mathcal{V}^{(0)}|_{\Omega_1=\Omega_2=0} - \Omega_{1i}^{(0)} \dot{\alpha}^i - \Omega_{2i}^{(0)} \dot{\beta}^i \\ &= \epsilon^{0ab} \left(e_b^i + \frac{1}{2\gamma} A_b^i \right) \dot{A}_{ai} - \Omega_{1i}^{(0)} \dot{\alpha}^i - \Omega_{2i}^{(0)} \dot{\beta}^i, \end{aligned} \quad (5.39)$$

las constricciones de FJ se introducen vía los multiplicadores de Lagrange $e_{0i} \equiv \dot{\alpha}_i$ y $A_{0i} \equiv \dot{\beta}_i$. Se observa que el potencial simpléctico se anula $\mathcal{V}^{(0)}|_{\Omega_1=\Omega_2=0} = 0$ lo cual es un resultado esperado debido a la covariancia general de la teoría, toda la dinámica del sistema está gobernada por una simetría. Del Lagrangiano simpléctico (5.39) se identifica un nuevo conjunto de variables simplécticas

$$\xi^{(1)} = (\alpha_i, e_{ai}, \beta_i, A_{ai}), \quad (5.40)$$

y una nueva 1-forma

$$a^{(1)} = \left(-\Omega_1^{(0)i}, 0, -\Omega_2^{(0)i}, \epsilon^{0ab} \left(e_b^i + \frac{1}{2\gamma} A_b^i \right) \right). \quad (5.41)$$

y se identifica el siguiente conjunto de variables simplécticas y la 1-forma

$$\begin{aligned}\xi^{(2)} &= (\alpha_i, e_{ai}, \beta_i, A_{ai}, \Theta_i, \Xi_i), \\ a^{(2)} &= \left(-\left(\Omega_1^{(0)i} + \Theta^i\right), 0, -\left(\Omega_2^{(0)i} + \Xi^i\right), \epsilon^{0ab} \left(e_b{}^i + \frac{1}{2\gamma} A_b{}^i \right), 0, 0 \right).\end{aligned}$$

Luego se calcula una nueva matriz simpléctica $f^{(2)}$ dada por

$$f^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon^{0ab} [\eta^{ij} \partial_a - \epsilon^{ijk} A_{ak}] \\ 0 & \epsilon^{0ab} [\eta^{ij} \partial_b + \epsilon^{ijk} A_{bk}] & 0 \\ \epsilon^{0ab} [\eta^{ij} \partial_a - \epsilon^{ijk} A_{ak}] & \epsilon^{0ab} \eta^{ij} & -\epsilon^{0ab} \epsilon^{ijk} e_{ak} + \frac{1}{\gamma} \epsilon^{0ab} [\eta^{ij} \partial_a - \epsilon^{ijk} A_{ak}] \\ -\eta^{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\eta^{ij} \\ \epsilon^{0ab} [\eta^{ij} \partial_b + \epsilon^{ijk} A_{bk}] & \eta^{ij} & 0 \\ \epsilon^{0ab} \eta^{ij} & 0 & 0 \\ \epsilon^{0ab} \epsilon^{ijk} e_{bk} & 0 & \eta^{ij} + \frac{1}{\gamma} \epsilon^{0ab} [\eta^{ij} \partial_b + \epsilon^{ijk} A_{bk}] \\ \frac{1}{\gamma} \epsilon^{0ab} \eta^{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^2(x-y). \quad (5.44)$$

Se observa que $f^{(2)}$ es regular y por lo tanto tiene inversa, la cual está dada por

$$\left[f^{(2)} \right]^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\eta_{ij} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\gamma} \epsilon_{0ab} \eta_{ij} & 0 & \epsilon_{0ab} \eta_{ij} & \eta_{ij} \partial_a - \epsilon_{ji}^k A_{ak} & -\epsilon_{ji}^k e_{ak} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\eta_{ij} \\ 0 & \epsilon_{0ab} \eta_{ij} & 0 & 0 & 0 & \eta_{ij} \partial_a - \epsilon_{ji}^k A_{ak} \\ \eta_{ij} & -[\eta_{ij} \partial_b + \epsilon_{ji}^k A_{bk}] & 0 & 0 & 0 & \epsilon^{0ab} A_{ai} A_{bj} \\ 0 & -\epsilon_{ji}^k e_{bk} & \eta_{ij} & -[\eta_{ij} \partial_b + \epsilon_{ji}^k A_{bk}] & \epsilon^{0ab} A_{ai} A_{bj} & \frac{1}{\gamma} \epsilon^{0ab} A_{ai} A_{bj} \end{pmatrix} \times \delta^2(x-y). \quad (5.45)$$

que corresponde al tensor simpléctico. Los paréntesis generalizados de FJ se identifican del tensor simpléctico (5.45) mediante

$$\{\xi_i^{(2)}(x), \xi_j^{(2)}(y)\}_{FJ} = \left[f_{ij}^{(2)}(x, y) \right]^{-1}, \quad (5.46)$$

esto es

$$\{e_{ai}(x), e_{bj}(y)\}_{FJ} = -\frac{1}{\gamma} \epsilon_{0ab} \eta_{ij} \delta^2(x-y), \quad (5.47)$$

$$\{e_{ai}(x), A_{bj}(y)\}_{FJ} = \epsilon_{0ab} \eta_{ij} \delta^2(x-y), \quad (5.48)$$

$$\{A_{ai}(x), A_{bj}(y)\}_{FJ} = 0, \quad (5.49)$$

estos paréntesis corresponden con aquellos que se obtienen en el formalismo de Dirac (ver la sección siguiente). Como se puede ver hay una contribución de γ en los paréntesis fundamentales y este hecho hace la diferencia con respecto a la teoría de Palatini [71]. De hecho, en la teoría de Palatini los paréntesis de Dirac entre las triadas conmutan mientras que en P-CS no. Únicamente P-CS y Palatini son equivalentes en el límite cuando γ tiende al infinito.

5.3 Análisis Hamiltoniano

En esta sección se reportan los principales resultados del análisis Hamiltoniano. El punto de partida es la acción (5.27)

$$S[e, A] = \int \epsilon^{0ab} \left[\left(e_b^i + \frac{1}{2\gamma} A_b^i \right) \dot{A}_{ai} + \frac{1}{2} e_0^i F_{abi} + A_{0i} \left(D_a e_b^i + \frac{1}{2\gamma} F_{ab}^i \right) \right] d^3x.$$

Se introducen los momentos canónicos para el conjunto completo de variables dinámicas (e, A) , dados por

$$p^\alpha_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{e}_\alpha^i}, \quad (5.50)$$

$$\pi^\alpha_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\alpha^i}, \quad (5.51)$$

tal que

$$\begin{aligned} \{e_\alpha^i(x), p^\beta_j(y)\} &= \delta_\alpha^\beta \delta_i^j \delta^2(x-y), \\ \{A_\alpha^i(x), \pi^\beta_j(y)\} &= \delta_\alpha^\beta \delta_i^j \delta^2(x-y), \end{aligned}$$

cero en otro caso. Se encontraron los siguientes resultados: la teoría presenta 12 constricciones de primera clase

$$\gamma_{1i}^0 \equiv p^0_i \approx 0, \quad (5.52)$$

$$\gamma_{2i}^0 \equiv \pi^0_i \approx 0, \quad (5.53)$$

$$\gamma_{1i} \equiv \frac{1}{2} \eta^{ab} F_{abi} + D_a p^a_i \approx 0, \quad (5.54)$$

$$\gamma_{2i} \equiv D_a \pi^a_i + \frac{1}{2\gamma} \eta^{ab} \partial_a A_{bi} + \epsilon_{ijk} e_a^j p^{ak} \approx 0, \quad (5.55)$$

y el siguiente conjunto de 12 constricciones de segunda clase

$$\chi_{1i}^a \equiv p^a_i \approx 0, \quad (5.56)$$

$$\chi_{2i}^a \equiv \pi^a_i - \eta^{ab} \left(e_{bi} + \frac{1}{2\gamma} A_{bi} \right) \approx 0, \quad (5.57)$$

donde $\epsilon^{0ab} \equiv \eta^{ab}$. La estructura completa de estas constricciones no había sido reportada en la literatura. El álgebra entre constricciones es como sigue

$$\{\gamma_{1i}(x), \gamma_{1j}(y)\} = 0, \quad (5.58)$$

$$\{\gamma_{1i}(x), \gamma_{2j}(y)\} = \epsilon_{ij}^k \gamma_{1k} \approx 0, \quad (5.59)$$

$$\{\gamma_{1i}(x), \chi_1^{aj}(y)\} = 0, \quad (5.60)$$

$$\{\gamma_{1i}(x), \chi_2^{aj}(y)\} = \epsilon_i^{jk} \chi_{1k}^a \approx 0, \quad (5.61)$$

$$\{\gamma_{2i}(x), \gamma_{2j}(y)\} = \epsilon_{il}^k \gamma_{2k} \approx 0, \quad (5.62)$$

$$\{\gamma_{2i}(x), \chi_1^{aj}(y)\} = \epsilon_i^{jk} \chi_{1k}^a, \quad (5.63)$$

$$\{\gamma_{2i}(x), \chi_2^{aj}(y)\} = \epsilon_i^{jk} \chi_{2j}^a \approx 0, \quad (5.64)$$

$$\{\chi_1^{ai}(x), \chi_1^{bj}(y)\} = 0, \quad (5.65)$$

$$\{\chi_1^{ai}(x), \chi_2^{bj}(y)\} = -\eta^{ab} \delta^{ij}, \quad (5.66)$$

$$\{\chi_2^{ai}(x), \chi_2^{bj}(y)\} = -\frac{1}{\gamma} \eta^{ab} \delta^{ij}. \quad (5.67)$$

Se puede ver del álgebra entre las constricciones que γ_{1i} es el generador de traslaciones y γ_{2i} el generador de rotaciones. Para realizar el conteo de grados de libertad se observa que hay 36 variables canónicas, 12 constricciones independientes de primera clase y 12 constricciones de segunda clase, por lo tanto la teoría no tiene grados de libertad.

La presencia de constricciones de segunda clase permite la introducción de los paréntesis de Dirac que para dos funciones del espacio fase A, B está definido por

$$\{A(x), B(y)\}_D = \{A(x), B(y)\} - \int dudv \{A(x), \chi^\alpha(u)\} C_{\alpha\beta}^{-1}(u, v) \{\chi^\beta(v), B(y)\} \quad (5.68)$$

donde $\{A(x), B(y)\}$ es el paréntesis de Poisson entre las funcionales A, B , la matriz $C_{\alpha\beta} \equiv \{\phi^\alpha, \phi^\beta\}$, $\{\phi^\alpha\}$ es el conjunto completo de constricciones de segunda clase encontradas y C^{-1} su inversa, en este caso dadas por

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -\eta^{ab} \delta^{ij} \\ -\eta^{ab} \delta^{ij} & \frac{1}{\gamma} \eta^{ab} \delta^{ij} \end{pmatrix},$$

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\gamma} \eta_{ab} \delta_{ij} & \eta_{ab} \delta_{ij} \\ \eta_{ab} \delta_{ij} & 0 \end{pmatrix}.$$

Usando las constricciones de segunda clase se obtienen los siguientes paréntesis de Dirac

$$\{e^a_i(x), e^b_j(y)\}_D = -\frac{1}{\gamma}\delta_{ij}\eta^{ab}\delta^2(x-y), \quad (5.69)$$

$$\{p^a_i(x), p^b_j(y)\}_D = 0, \quad (5.70)$$

$$\{e^a_i(x), p^b_j(y)\}_D = 0, \quad (5.71)$$

$$\{e^a_i(x), A^b_j(y)\}_D = \delta_{ij}\eta^{ab}\delta^2(x-y), \quad (5.72)$$

$$\{A^a_i(x), A^b_j(y)\}_D = 0, \quad (5.73)$$

$$\{\pi^a_i(x), \pi^b_j(y)\}_D = 0, \quad (5.74)$$

$$\{A^a_i(x), \pi^b_j(y)\}_D = \delta_{ij}\eta^{ab}\delta^2(x-y), \quad (5.75)$$

$$\{e^a_i(x), \pi^b_j(y)\}_D = -\frac{1}{2\gamma}\delta_{ij}\eta^{ab}\delta^2(x-y), \quad (5.76)$$

$$\{A^a_i(x), p^b_j(y)\}_D = 0. \quad (5.77)$$

Podemos observar que los paréntesis (5.69), (5.72), (5.73) y los de FJ (5.47), (5.48), (5.49) coinciden. Además, una vez que se introducen los paréntesis de Dirac se puede considerar a las constricciones de segunda clase como igualdades fuertes y por tanto las constricciones de FJ y Dirac coinciden.

5.4 Conclusiones

En este capítulo se ha analizado el sistema P-CS. Se reporta el conjunto completo de constricciones de FJ, la simetría de norma y los paréntesis generalizados de FJ los cuales no habían sido reportados en la literatura. Como se ha visto la ventaja de implementar el formalismo simpléctico reside en el hecho de ser más económico en términos de cálculo, en particular no ha sido necesario realizar el proceso de clasificación de las constricciones como en el caso del formalismo de Dirac. Por otro lado, se ha encontrado que los paréntesis generalizados de FJ dependen de γ y este hecho hace que la teoría P-CS difiera clásicamente de la teoría de Palatini y da un antecedente para futuros trabajos en el estudio de RG en tres dimensiones y los intentos por determinar la naturaleza y valor de γ . Por ejemplo, se sabe que en $3+1$ dimensiones la interacción entre materia fermiónica está mediada por la torsión y su intensidad está determinada por el parámetro de Barbero-Immirzi tal como se ve en [76], y como se concluye en ese artículo, sería teóricamente posible determinar el valor de γ al medir el efecto de la interacción gravitacional con un fermión. Por esto, sería interesante ver qué ocurre en $2+1$ dimensiones al analizar la acción propuesta P-CS acoplada a materia, con el objetivo de comprobar si en $2+1$ dimensiones ocurre algo similar, es decir, si la presencia del parámetro γ modula la interacción de la materia y de ser así ver qué información puede arrojar este hecho para entender la naturaleza de γ , para lo cual, las relaciones de conmutación obtenidas mediante los métodos de Dirac y FJ resultarán de ayuda.

Por otro lado, en [77] se estudió un conjunto de soluciones particulares a las ecuaciones de Einstein en

2+1 dimensiones, tanto en el formalismo métrico como en el formalismo a primer orden de Palatini, en particular, se estudiaron espacio-tiempos que representan soluciones de agujeros negros en 2+1 dimensiones y universos con una topología específica: universos con topología toroidal $[0, 1] \times T^2$, donde T^2 es un 2-Toro u otros tipos de universos con tipos particulares de topología, por ejemplo, topología esférica $[0, 1] \times S^2$ (donde S^2 se refiere a la 2-esfera), topología de botella de Klein $[0, 1] \times K$, etc. Con esto como precedente, el trabajo a futuro estará enfocado en estudiar la acción propuesta P-CS para estos casos particulares de la métrica, haciendo énfasis en el papel que juega el parámetro γ en cada caso para intentar darle un significado físico en tres dimensiones.

Por otro lado, tal como se desarrolla en [77] para RG en tres dimensiones, una meta a futuro inmediato es desarrollar la cuantización del sistema, es decir, el siguiente paso en el desarrollo de la teoría sería promover las coordenadas y momentos a operadores buscando un estado cuántico que sea solución a las constricciones del sistema. Una meta aún más ambiciosa es poder dar una interpretación física o geométrica a dicha solución y al parámetro γ .

Finalmente, tal como se menciona en la conclusión del capítulo anterior, el determinante de la matriz (5.44) proporciona una medida para el cálculo del producto interno entre estados físicos. Más aun, la presencia del parámetro γ en la matriz (5.44) nos lleva a pensar que dicho parámetro estará involucrado en el determinante y por lo tanto tendrá influencia directa al calcular el producto interno, lo cual puede ayudar a determinar su significado físico y determinar su valor. El cálculo de dicho determinante y su posterior aplicación al proceso de cuantización de la teoría es una posibilidad a futuro que este trabajo abre.

Apéndice A

En este apéndice se explicarán algunos conceptos que complementan lo dicho en los capítulos anteriores así como algunos resultados y desarrollos matemáticos de interés.

A.1 Principios de la Relatividad General

En esta parte del trabajo se explicarán brevemente los principios sobre los cuales la Relatividad General está formulada [52] [51], dichos principios están ampliamente aceptados hoy en día pero en su momento supusieron un cambio radical en el modo de pensar sobre la naturaleza. Estos cuatro principios garantizan la validez física de la Relatividad General y la justifican incluso a nivel filosófico como el *principio de Equivalencia*.

Principio de equivalencia: en general puede expresarse diciendo que un campo gravitacional es indistinguible de la aceleración uniforme [52]. En la práctica esto significa que localmente no es posible distinguir entre estar en la superficie de un planeta y estar en el interior de un cohete moviéndose con aceleración constante. De acuerdo a Einstein ambos fenómenos son de hecho el mismo.

Principio de Covarianza: Einstein razonó que todos los observadores son equivalentes en el sentido de que todos ellos son capaces de descubrir las mismas leyes de la física [52], la validez de este razonamiento es claro si se toma en cuenta que el ser humano ha hecho esto desde un sistema de referencia en presencia de un campo gravitacional (o equivalentemente un sistema de referencia acelerado, según el principio anterior). Esta afirmación tiene importantes repercusiones en la forma en que la teoría es formulada matemáticamente, ya que un observador tendrá asociado un sistema de referencia y por lo tanto un conjunto de coordenadas, la afirmación anterior implica que en Relatividad General no existe un conjunto de coordenadas privilegiadas, por lo tanto las leyes de la física deben tener la misma forma para todos los observadores, es decir, las leyes de la física deben ser invariantes ante cambios de coordenadas. En lenguaje matemático esto significa que *las leyes de*

la física deben ser escritos en forma tensorial (Principio de Covarianza).

Principio de Acoplamiento Mínimo: Este principio dice que no se deben agregar términos innecesarios a las ecuaciones para realizar la transición de Relatividad Especial a Relatividad General [52]. Por ejemplo, en Relatividad Especial la conservación de energía-momento está dada por $\partial_b T^{ab} = 0$, la generalización a Relatividad General es simplemente $\nabla_b T^{ab} = 0$. En otras palabras, este principio implica que si una ley es válida en un espacio-tiempo plano será válida en un espacio-tiempo curvo de modo que para que una expresión invariante de Lorentz sea covariante general basta con hacer el cambio $\eta_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu}$ y $\partial_\mu \rightarrow \nabla_\mu$.

Principio de Correspondencia: Este principio establece que el comportamiento de un sistema descrito en Relatividad General debe conducir a la mecánica de Newton en el límite de bajas velocidades y energías [52].

Estos cuatro principios están presentes en el corazón mismo de RG y me ha parecido importante mencionarlos brevemente ya que muchas veces son obviados, siendo, sin embargo, una parte importante de la teoría. En adición, se puede mencionar un principio que influenció a Einstein al formular la Relatividad General pero que, sin embargo, no pudo ser implementado en la forma final de la teoría. Nos referimos al Principio de Mach que fue propuesto por Ernst Mach en 1893:

Principio de Mach: este principio establece que los conceptos de movimiento e inercia no tienen un significado por sí mismos, sino únicamente relativo [52] [78]. Para ilustrar este hecho imagine un único cuerpo en un universo vacío de cualquier otra materia, en ese caso no se podrá decir si dicho cuerpo se encuentra en movimiento ya que no habría nada respecto a que referir su estado y por lo tanto no presentará ningún efecto inercial. Por otro lado, en un universo en el que exista materia el movimiento de una de sus partes se referirá al resto de la materia presente y ésta será el origen de los efectos inerciales a los que la parte en movimiento se pueda ver sometido. Por lo tanto, un sistema de referencia inercial es un sistema cuyo estado de movimiento es privilegiado respecto al movimiento del resto de materia en el universo. En nuestro universo son las estrellas las que determinan los sistemas de referencia inerciales locales mediante su distribución, movimiento y masa. Sin embargo, este principio tiene algunos problemas ya que no predice ni explica algunos fenómenos, por ejemplo, el hecho de que existen las soluciones para el vacío para las ecuaciones de Einstein.

La concepción actual es que las propiedades inerciales de los objetos deben ser referidos a un campo gravitacional dinámico el cual es influenciado por la materia y energía presentes en el universo [79] [80].

A.2 Término de Chern-Simons

En la sección (7.1) se mostró que la acción de Palatini en tres dimensiones con grupo de simetría G puede reescribirse como una acción de Chern-Simons al considerar un grupo de simetría expandido $\tilde{G}$ que contenga a G y definiendo una nueva conexión [72]. Sin embargo para poder hablar de una acción de Chern-Simons se debe establecer lo que se conoce como *formas de Chern* [74] [75]. Una forma de Chern está definida en una variedad M de dimensión impar, es invariante ante un grupo de simetría G y tiene como variable dinámica la 1-forma de conexión A valuada en el álgebra del grupo

$$A = A_\mu^I T_I dx^\mu, \quad (\text{A.1})$$

donde T_I son los generadores de grupo que cumplen con el álgebra $[T_I, T_J] = f_{IJK} T_K$ (f_{IJK} constantes de estructura). A partir de la conexión se define la 2-forma de curvatura de la conexión $F = dA + A \wedge A$. Con estos elementos se construye una $2n$ -forma llamada n -ésima forma de Chern definida por [74] [75]

$$P_{2n}(F) \equiv \text{tr}[F^n] = \text{tr}[F \wedge F \wedge \dots \wedge F]. \quad (\text{A.2})$$

Para comprobar la invariancia de P_{2n} ante el grupo G recordemos la forma en que la conexión A se transforma bajo un elemento del grupo $U(\alpha(x)) = e^{i\alpha^I(x)T_I} \in G$ [75],

$$A \rightarrow A' = U^{-1}AU + U^{-1}dU, \quad (\text{A.3})$$

donde d implica la derivada exterior. Por lo tanto, la curvatura se transforma como

$$\begin{aligned} F \rightarrow F' &= dA' + A' \wedge A' \\ &= d(U^{-1}AU + U^{-1}dU) + (U^{-1}AU + U^{-1}dU) \wedge (U^{-1}AU + U^{-1}dU) \\ &= U^{-1}FU. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Por lo anterior la forma de Chern P_{2n} es invariante ante G [75]

$$\begin{aligned} P_{2n}(F') &= \text{tr}[F' \wedge F' \wedge F' \dots \wedge F'] \\ &= \text{tr}[U^{-1}FU \wedge U^{-1}FU \wedge \dots U^{-1}FU] \\ &= \text{tr}[F \wedge \dots \wedge F] = \text{tr}[F^n]. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Más aun, se puede demostrar que la $2n$ -forma P_{2n} es *cerrada*, es decir, $dP_{2n} = 0$ [75]

$$\begin{aligned} dP_{2n}(F) &= d\text{tr}[F \wedge F \dots \wedge F] \\ &= \text{tr}[d_A F \wedge F \dots \wedge F + F \wedge d_A F \dots \wedge F + \dots + F \wedge F \dots \wedge d_A F] \\ &= n \text{tr}[d_A F \wedge F \wedge \dots \wedge F] = 0, \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

lo anterior es cierto ya que

$$\begin{aligned}
 d_A F &= dF + [A, F] \\
 &= d[dA + A \wedge A] + [A, dA + A \wedge A] \\
 &= d(A \wedge A) + A \wedge dA - dA \wedge A + A \wedge A \wedge A - A \wedge A \wedge A = 0,
 \end{aligned} \tag{A.7}$$

en estas líneas se ha denotado por $d_A \equiv d + [A, \cdot]$ a la derivada covariante para distinguirla de la derivada exterior d usual. También se ha hecho uso de

$$\begin{aligned}
 \text{tr}[d_A F] &= \text{tr}[dF + [A, F]] = d\text{tr}[F] + \text{tr}[A \wedge F - (-1)^{1 \times 2} F \wedge A] \\
 &= d\text{tr}[F].
 \end{aligned} \tag{A.8}$$

El hecho de que P_{2n} sea *cerrada* implica que localmente puede escribirse como la derivada exterior de una $(2n - 1)$ - forma:

$$P_{2n}(F) = dQ_{2n-1}(A, F), \tag{A.9}$$

a la $(2n - 1)$ -forma $Q_{2n-1}(A, F)$ se le conoce como *forma de Chern-Simons* de $P_{2n}(F)$, por ejemplo para $n = 1$, $P_2(F) = \text{tr}[F] = \text{tr}[dA + A \wedge A] = d\text{tr}[A]$, por lo tanto $Q_1 = \text{tr}[A]$.

En este trabajo el caso de interés corresponde a $n = 2$ y $P_4 = \text{tr}[F \wedge F] = d\text{tr}[A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A]$, es decir, la forma de Chern-Simons $Q_3 = \text{tr}[A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A]$. Se puede comprobar que en efecto Q_3 es la forma de Chern para $n = 2$ al calcular su derivada exterior [75]

$$\begin{aligned}
 dQ_3(A, F) &= d\text{tr}[A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A] \\
 &= \text{tr}[d_A A \wedge dA + 2A \wedge A \wedge d_A A] \\
 &= \text{tr}[(dA + A \wedge A) \wedge (dA + A \wedge A)] \\
 &= \text{tr}[F \wedge F].
 \end{aligned} \tag{A.10}$$

Desde un punto de vista físico la forma de Chern-Simons Q_3 resulta de interés debido a que existe una relación entre la forma de Chern-Simon en tres dimensiones y la acción de Palatini en tres dimensiones con constante cosmológica Λ , relación que ya se mostró en la sección (5.1)

A.3 Acción de Palatini

Esta sección tiene como objetivo dar una breve explicación del formalismo a primer orden de la RG así como mostrar su equivalencia con la acción de E-H en el sentido de que ambas formulaciones comparten las mismas ecuaciones de movimiento, es decir, las ecuaciones de Einstein [68] [69]. Las ecuaciones de Einstein se pueden derivar de un principio de mínima acción conocida como acción

de Einstein-Hilbert la cual tiene como variable dinámica la métrica del espacio-tiempo $g_{\mu\nu}$

$$\begin{aligned} S[g, \chi] &= S_{EH}[g] + S_{materia}[g, \chi] \\ &= \int d^4x \sqrt{-|g|} \left\{ \frac{1}{2k} R + L_{mat}[g, \chi] \right\}, \end{aligned} \quad (A.11)$$

donde $|g|$ es el determinante de la métrica, $R \equiv R^\alpha_\alpha$ es la curvatura escalar, $R_{\alpha\beta} \equiv R^\mu_{\alpha\mu\beta}$ es el tensor de curvatura de Ricci y $R^\alpha_{\beta\gamma\delta}$ es el tensor de curvatura de Riemann. Las variables χ denotan campos de materia. Las ecuaciones de movimiento se obtienen mediante la variación de la acción respecto a las variables dinámicas. Variando respecto a las componentes de la métrica $g^{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} &= \int d^4x \left[\frac{1}{2k} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} \left(\sqrt{-|g|} g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \right) + \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} \sqrt{-|g|} L_{mat} \right] \\ &= \int d^4x \left[\frac{1}{2k} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} \left(\sqrt{-|g|} g^{\alpha\beta} \right) R_{\alpha\beta} + \frac{1}{2k} \sqrt{-|g|} g^{\alpha\beta} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} R_{\alpha\beta} + \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} \sqrt{-|g|} L_{mat} \right] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Se puede demostrar que el término $\int d^4x \frac{1}{2k} \sqrt{-|g|} g^{\alpha\beta} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} R_{\alpha\beta}$ es nulo. Luego

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} &= \int d^4x \left[\frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} \left(\sqrt{-|g|} g^{\alpha\beta} \right) R_{\alpha\beta} + 2k \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} \sqrt{-|g|} L_{mat} \right] \\ &= \int d^4x \left[\frac{\delta \sqrt{-|g|}}{\delta g^{\mu\nu}} g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} + \sqrt{-|g|} \frac{\delta g^{\alpha\beta}}{\delta g^{\mu\nu}} R_{\alpha\beta} + 2k \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} \sqrt{-|g|} L_{mat} \right] = 0. \end{aligned}$$

Utilizando que $\frac{\delta \sqrt{-|g|}}{\delta g^{\mu\nu}} = -\frac{1}{2} \sqrt{-|g|} g_{\mu\nu}$ y $\frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} g^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\delta^\alpha_\mu \delta^\beta_\nu + \delta^\beta_\mu \delta^\alpha_\nu)$ se obtiene:

$$\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = \int d^4x \left[-\frac{1}{2} \sqrt{-|g|} g_{\mu\nu} R + \sqrt{-|g|} R_{\mu\nu} + 2k \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} \sqrt{-|g|} L_{mat} \right] = 0.$$

Esto implica las ecuaciones de Einstein para el campo gravitacional:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{2k}{\sqrt{-|g|}} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} L_{materia} \equiv k T_{\mu\nu}, \quad (A.12)$$

donde se ha definido al tensor de energía-momento $T_{\mu\nu} \equiv \frac{2}{\sqrt{-|g|}} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} L_{materia}$.

Esta formulación en términos de la métrica es la más usual en áreas como cosmología, sin embargo, no es la única forma de escribir un principio de mínima acción a partir del cual se deriven las ecuaciones de Einstein. Alternativamente se conoce la formulación de Palatini o a primer orden, esta acción se define en un espacio-tiempo M y tiene como variables dinámicas las tétradas de 1-formas $e^I_\mu dx^\mu$ y la 1-forma de conexión $w^I_\mu dx^\mu$ [68], donde los índices griegos toman valores 0, 1, 2, 3 y son índices del espacio-tiempo cuatridimensional mientras que los índices latinos son índices de grupo interno, en este caso Minkowski.

Las tétradas $e^I_\mu(x)$ son funciones que definen un mapeo del espacio tangente a la variedad $T(M)$ al espacio interno: $v^I = e^I_\mu v^\mu$ donde v^μ son la componentes de un vector covariante definido en $T(M)$. Vamos a suponer que este mapeo es 1 a 1 de tal manera que exista su inversa $e^\mu_I(x)$, esta

función mapea vectores en el espacio interno (Minkowski) a vectores en el espacio tangente $T(M)$: $v^\mu = e_I^\mu v^I$, cumpliéndose que $e_I^\mu e_\nu^I = \delta_\nu^\mu$ y $e_I^\mu e_\mu^J = \delta_I^J$. Por supuesto la métrica interna denotada por η_{IJ} sirve para subir y bajar índices internos.

En este formalismo la métrica del espacio-tiempo $g_{\mu\nu}$ no es una cantidad independiente, en cambio se relaciona con la métrica interna por [68] [69]

$$g_{\mu\nu} = e_\mu^I e_\nu^J \eta_{IJ}. \quad (\text{A.13})$$

Por otro lado se tiene la 1-forma de conexión $w_\mu^{IJ}(x)dx^\mu$ la cual es a priori independiente de la tétrada y nos va a permitir definir una derivada covariante D que actúa sobre vectores en el espacio de Minkowski

$$Dv^I = dv^I + w^I{}_J v^J, \quad (\text{A.14})$$

donde d es la derivada exterior usual. La 2-forma curvatura de la conexión se define como:

$$F_{\mu\nu}^{IJ} = \partial_\mu w_\nu^{IJ} - \partial_\nu w_\mu^{IJ} + w_\mu^{IK} w_{\nu K}^J - w_\mu^{JK} w_{\nu K}^I. \quad (\text{A.15})$$

Con estos elementos es posible reescribir la acción de Einstein-Hilbert en términos de e y w , a esta acción se le conoce como acción de Palatini y es de la siguiente forma [68] [69]

$$S_{HP} = \frac{1}{2k} \int d^4x \left[|e| \eta^{IK} e_I^\mu e_J^\nu R_{\mu\nu K}^J[w] \right], \quad (\text{A.16})$$

donde $|e|$ es el determinante de la tétrada relacionado con el determinante de la métrica $g_{\mu\nu}$ por $|e| = \sqrt{-|g|}$ ya que $|g_{\mu\nu}| = |e|^2 |\eta_{IJ}|$ siendo $|\eta_{IJ}| = 1$ en el caso euclídeo y -1 en el caso Lorentziano.

Las ecuaciones de movimiento se obtienen variando la acción (A.16) respecto a las variables dinámicas. Respecto a la conexión w_μ^{IJ} se obtiene lo que se conoce como *condición de no torsión* [68] [69]:

$$\epsilon_{IJKL} D(e^K \wedge e^L) = 0, \quad (\text{A.17})$$

esta ecuación de movimiento permite escribir a la conexión como una función de la tétrada de la forma $w_\mu^{IJ} = -e^{\nu J} \nabla_\mu e_\nu^I$.

Por otro lado variando la acción respecto a la tétrada:

$$\begin{aligned} \frac{\delta S_{HP}}{\delta e_L^\alpha} &= \frac{1}{2k} \int d^4x \eta^{IK} \left[\frac{\delta e_I^\mu}{\delta e_L^\alpha} e_J^\nu |e| + e_I^\mu \frac{\delta e_J^\nu}{\delta e_L^\alpha} |e| + e_I^\mu e_J^\nu \frac{\delta |e|}{\delta e_L^\alpha} \right] R_{\mu\nu K}^J[w] \\ &\quad + \frac{1}{2k} \int d^4x \frac{\delta}{\delta e_L^\alpha} [|e| L_{mat}[e, w, \chi]] \\ &= \frac{1}{2k} \int d^4x \eta^{IK} \left[\delta_\alpha^\mu \delta_I^L e_J^\nu |e| + e_I^\mu \delta_\alpha^\nu \delta_J^L |e| - e_I^\mu e_J^\nu |e| e_\alpha^L \right] R_{\mu\nu K}^J[w] \\ &\quad + \frac{1}{2k} \int d^4x \frac{\delta}{\delta e_L^\alpha} [|e| L_{mat}[e, w, \chi]] \\ &= \frac{1}{2k} \int d^4x |e| \left[\eta^{LK} e_J^\nu R_{\alpha\nu K}^J + \eta^{IK} e_I^\mu R_{\mu\alpha K}^L - \eta^{IK} e_I^\mu e_J^\nu e_\alpha^L R_{\mu\nu K}^J \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{|e|} \frac{\delta}{\delta e_L^\alpha} |e| L_{mat} \right] = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Esto implica

$$\frac{1}{2} [\eta^{LK} e_J^\nu R_{\alpha\nu K}^J + \eta^{IK} e_I^\mu R_{\mu\alpha K}^L - \eta^{IK} e_I^\mu e_J^\nu e_\alpha^L R_{\mu\nu K}^J] = -\frac{k}{|e|} \frac{\delta}{\delta e_L^\alpha} (|e| L_{mat}), \quad (\text{A.19})$$

multiplicando por $e_{\beta L}$

$$\frac{1}{2} [\eta^{LK} e_{\beta L} e_J^\nu R_{\alpha\nu K}^J + \eta^{IK} e_{\beta L} e_I^\mu R_{\mu\alpha K}^L - e_{\beta L} \eta^{IK} e_I^\mu e_J^\nu e_\alpha^L R_{\mu\nu K}^J] = -\frac{k}{|e|} e_{\beta L} \frac{\delta}{\delta e_L^\alpha} (|e| L_{mat}),$$

esto es

$$\frac{1}{2} [R_{\alpha J \beta}^J + R_{J \alpha}^J{}_\beta - g_{\alpha\beta} R] = -\frac{k}{|e|} e_{\beta L} \frac{\delta}{\delta e_L^\alpha} (|e| L_{mat}),$$

Estas son, por supuesto, las ecuaciones de Einstein

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = -\frac{k}{|e|} e_{\beta L} \frac{\delta}{\delta e_L^\alpha} (|e| L_{mat}) \equiv -k T_{\alpha\beta}, \quad (\text{A.20})$$

donde se ha definido el tensor de energía-momento como $T_{\alpha\beta} \equiv -\frac{1}{|e|} e_{\beta L} \frac{\delta}{\delta e_L^\alpha} (|e| L_{mat})$. Con esto se demuestra que la acción de Palatini tiene como ecuaciones de movimiento a las ecuaciones de Einstein para el campo gravitacional y es en este sentido que se afirma que la formulación a primer orden de RG y la acción de Einstein-Hilbert son equivalentes.

A.4 La acción de Holst

Como se ha visto, el formalismo de Palatini a primer orden reproduce las ecuaciones de Einstein, sin embargo con el objetivo de obtener una formulación Hamiltoniana y obtener una versión cuántica de la gravedad S. Holst modificó la acción de Palatini agregando una acción conocida como término de Holst acoplado a la acción de Palatini vía un parámetro adimensional γ^{-1} denominado parámetro de Barbero-Immirzi [7]. El término de Holst está definido como $S_{Holst} \equiv \int e \wedge e \wedge F$ y la acción de Holst S_H está dada por

$$\begin{aligned} S_H[w, e] &= S_{H-P} + \gamma^{-1} S_{Holst} \\ &= \frac{1}{2k} \int \frac{1}{2} \epsilon_{IJKL} e^I \wedge e^J \wedge F^{KL} + \frac{1}{\gamma} e^I \wedge e^J \wedge F_{IJ}. \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Esta acción se puede reescribir como

$$\begin{aligned} S_H[w, e] &= \frac{1}{2k} \int \left[\frac{1}{2} \epsilon_{IJKL} + \frac{1}{2\gamma} (\eta_{IK} \eta_{JL} - \eta_{IL} \eta_{JK}) \right] e^I \wedge e^J \wedge F^{KL} \\ &= \frac{1}{2k} \int P_{IJKL} e^I \wedge e^J \wedge F^{KL}, \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

donde $P_{IJKL} \equiv \frac{1}{2} \epsilon_{IJKL} + \frac{1}{2\gamma} (\eta_{IK} \eta_{JL} - \eta_{IL} \eta_{JK})$. El término de Holst no modifica las ecuaciones de movimiento y para comprobar esto calculamos la variación de la acción anterior respecto a las

variables dinámicas. Respecto a la conexión

$$\begin{aligned}\frac{\delta S_H}{\delta w^{KL}} &= \frac{1}{2k} \int P_{IJKL} e^I \wedge e^J \wedge \delta F^{KL} \\ &= \frac{1}{2k} \int \delta w^{KL} \wedge P^{IJ}_{KL} D(e_I \wedge e_J) = 0,\end{aligned}\tag{A.23}$$

lo cual implica que $\frac{1}{2k} P^{IJ}_{KL} D(e_I \wedge e_J) = 0$. Multiplicando por $(P^{-1})^{KL}_{MN} \equiv \frac{2\gamma^2}{\gamma^2-1} \left[\epsilon^{KL}_{MN} - \frac{1}{\gamma^2} (\delta^K_M \delta^L_N - \delta^K_N \delta^L_M) \right]$ se obtiene que [68]

$$\frac{1}{2k} (\delta^I_M \delta^J_N - \delta^I_N \delta^J_M) D(e_I \wedge e_J) = 0.\tag{A.24}$$

Esta ecuación es equivalente a la condición de no torsión (A.17), de modo que esta relación define de forma única a la conexión w^{IJ}_μ en términos de la tétrada e^I_μ , $w^{IJ}_\mu = -e^{\nu J} \nabla_\nu e^I_\mu$. Por lo tanto, la inclusión del término de Holst no modifica el resultado obtenido en el formalismo de Palatini.

Por otro lado, al variar la acción de Holst (A.22) respecto a la tétrada se obtiene

$$\delta_e S_H = \frac{1}{2k} \int \delta e^I \wedge \left[\epsilon_{IJKL} e^J \wedge F^{KL} + \frac{2}{\gamma} e^J \wedge F_{IJ} \right] = 0,$$

esto implica $\frac{1}{2k} \left[\epsilon_{IJKL} e^J \wedge F^{KL} + \frac{2}{\gamma} e^J \wedge F_{IJ} \right] = 0$, o explícitamente

$$\frac{1}{4k} \left[\epsilon_{IJKL} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} e^J_\nu F^{KL}_{\rho\sigma} + \frac{2}{\gamma} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} e^J_\nu F_{\rho\sigma IJ} \right] = 0.\tag{A.25}$$

El primer término $\epsilon_{IJKL} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} e^J_\nu F^{KL}_{\rho\sigma}$ ya se estudió y se ha visto que una vez que se utiliza la solución $w^{IJ}_\mu = -e^{\nu J} \nabla_\mu e^I_\nu$ conduce a las ecuaciones de Einstein $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0$. Por otro lado $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} e^J_\nu F_{\rho\sigma IJ}[w]$ es nulo una vez que se utiliza la solución $w^{IJ}_\mu = -e^{\nu J} \nabla_\mu e^I_\nu$ ya que esto conduce a

$$\begin{aligned}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} e^J_\nu F_{\rho\sigma IJ}[w[e]] &= \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} e^J_\nu e_{\alpha I} e^\beta_J R^\alpha_{\beta\rho\sigma} \\ &= \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} e_{\alpha I} R^\alpha_{\beta\rho\sigma},\end{aligned}\tag{A.26}$$

lo cual es idénticamente cero por la identidad de Bianchi $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} R^\alpha_{\beta\rho\sigma} = 0$, es decir que la inclusión del término de Holst en la acción de Palatini no modifica las ecuaciones de movimiento, obteniendo las ecuaciones de Einstein. Para cada valor de γ , la acción (A.21) provee una familia de acciones clásicamente equivalentes a la acción de Palatini. Sin embargo, la presencia de este término tiene repercusiones a nivel Hamiltoniano, modificando la forma de las constricciones que surgen de la teoría y por supuesto la estructura simpléctica de la teoría, como ya se vio en el capítulo 5 y a continuación se tratará una vez más.

A.5 Formulaci3n Hamiltoniana de la acci3n de Holst

Gran parte del problema que surge en los intentos que se han realizado para cuantizar la acci3n de Relatividad General es debido a la forma complicada de las constricciones de la teorí, por

ejemplo, las constricciones en la formulación *ADM* no tienen una forma polinomial en coordenadas y momentos generalizados lo cual dificulta el paso a la formulación cuántica de la teoría al momento de promover coordenadas y momentos a operadores.

Con el objetivo de simplificar las constricciones que surgen del análisis Hamiltoniano de Relatividad General en el formalismo *ADM*, Ashtekar introdujo un nuevo conjunto de variables conjugadas las cuales simplifican bastante la forma de las constricciones pero tienen la inconveniencia de ser complejas [81], de modo que se deben imponer condiciones extra, llamadas condiciones de realidad [82], que permiten recuperar una versión real de la teoría [83].

Posteriormente Barbero mostró que es posible elegir otro conjunto de variables canónicas relacionadas con las de Ashtekar pero esta vez reales, la elección de este nuevo conjunto de variables destruye la simplicidad de las constricciones obtenida en el formalismo de Ashtekar pero tiene la importante propiedad de seguir siendo una teoría real [84] [85], sin la necesidad de imponer condiciones extra.

En [7] S. Holst presento una acción que generaliza la formulación de Palatini, dicha acción tiene la forma (A.21) y como se ha dicho genera una familia de acciones clásicamente equivalentes a Relatividad General. Es muy importante mencionar que esta acción tiene la particularidad de que a partir de ella y para valores específicos del parámetro γ^{-1} es posible recuperar la formulación Hamiltoniana de Ashtekar ($\gamma = -i$) o de Barbero ($\gamma = 1$). Por sí misma esta propiedad ya hace a la acción (A.21) bastante atractiva sin embargo su importancia va más allá. Se ha comprobado que el parámetro γ está presente en importantes resultados tales como el cálculo de la entropía de agujeros negros o los estados y valores propios del operador de área y volumen [86].

A continuación se presenta el análisis Hamiltoniano a la acción de Holst.

La acción de Holst está dada por [7]

$$S_H = \frac{1}{4} \int d^4x \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \left[\frac{1}{2} \epsilon_{IJKL} e_\mu^I e_\nu^J F_{\rho\sigma}^{KL}[w] \pm \gamma^{-1} e_\mu^I e_\nu^J F_{\rho\sigma IJ}[w] \right], \quad (\text{A.27})$$

donde $I, J, K, \dots = 0, 1, 2, 3$ son índices de Lorentz teniendo asociada una métrica plana de la forma $\eta_{IJ} = (-1, 1, 1, 1)$, mientras que los índices griegos $\mu, \nu, \dots = t, 1, 2, 3$ son índices de espacio-tiempo. Con el propósito de obtener una formulación Hamiltoniana de la acción de Holst se descomponen los índices de espacio-tiempo en sus componentes:

$$S_H = \frac{1}{4} \int d^3x dt \epsilon^{tabc} \left\{ \epsilon^{IJKL} [e_t^I e_a^J F_{bcKL} + e_a^I e_b^J F_{tcKL}] \pm 2\gamma^{-1} [e_t^I e_a^J F_{bcIJ} + e_a^I e_b^J F_{tcIJ}] \right\},$$

Para poder definir el cambio de variables tipo Ashtekar propuesto por Holst en su artículo [7] se descomponen los índices de grupo en sus componentes:

$$\begin{aligned}
S_H = & \frac{1}{4} \int d^3x dt \epsilon^{abc} \left\{ \epsilon^{0ijk} [(e_{t0} e_{ai} - e_{ti} e_{a0}) F_{bcjk} + 2e_{ti} e_{aj} F_{bc0k} \right. \\
& + (e_{a0} e_{bi} - e_{ai} e_{b0}) F_{tcjk} + 2e_{ai} e_{bj} F_{tc0k}] \\
& \pm 2\gamma^{-1} [(e_t^0 e_a^i - e_t^i e_a^0) F_{bc0i} + e_t^i e_a^j F_{bcij} \\
& \left. + (e_a^0 e_b^i - e_a^i e_b^0) F_{tc0i} + e_a^i e_b^j F_{tcij}] \right\}. \tag{A.28}
\end{aligned}$$

Se define $\epsilon^{0abc} \equiv \epsilon^{abc}$ y $\epsilon^{0ijk} \equiv \epsilon^{ijk}$. Siguiendo el artículo de Holst se trabajará bajo la norma temporal, es decir, se impone que $e_{a0} = 0$, esta elección reduce el número de variables dinámicas de 40 a 37 y la acción toma la siguiente forma

$$\begin{aligned}
S_H = & \frac{1}{2} \int \epsilon^{abc} \left\{ e_a^i e_b^j [\epsilon_{ij}^k F_{tc0k} \pm \gamma^{-1} F_{tcij}] + e_{t0} e_{ai} \left[\frac{1}{2} \epsilon_{ij}^k F_{bcjk} \pm \gamma^{-1} F_{bc}^{0i} \right] \right. \\
& \left. + e_t^i e_a^j [\epsilon_{ij}^k F_{bc0k} \pm \gamma^{-1} F_{bcij}] \right\} d^3x dt \\
= & \frac{1}{2} \int \epsilon^{abc} \left\{ e_a^i e_b^j \hat{F}_{tcij} + e_{t0} e_{ai} \hat{F}_{bc}^i + e_t^i e_a^j \hat{F}_{bcij} \right\} d^3x dt, \tag{A.29}
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\hat{F}_{tcij} &= \epsilon_{ij}^k (\partial_t w_{c0k} - \partial_c w_{t0k} + w_{t0l} w_c^l{}_k - w_{c0l} w_t^l{}_k) \\
&\quad \mp \gamma^{-1} (\partial_t w_{cij} - \partial_c w_{tij} + w_{t0i} w_{c0j} - w_{c0i} w_{t0j} + w_{til} w_c^l{}_j - w_{cil} w_t^l{}_j), \\
\epsilon^{abc} \hat{F}_{bc}^i &= 2\epsilon^{abc} \left[\frac{1}{2} \epsilon^{ijk} (\partial_b w_{cjk} + w_{b0j} w_{c0k} + w_{bjl} w_c^l{}_k) \pm \gamma^{-1} (\partial_b w_{c0}^i + w_{b0}^l w_{cl}^i) \right], \\
\epsilon^{abc} \hat{F}_{bcij} &= 2\epsilon^{abc} [\epsilon_{ij}^k (\partial_b w_{c0k} + w_{b0l} w_c^l{}_k) \pm \gamma^{-1} (\partial_b w_{cij} + w_{b0i} w_{c0j} + w_{bil} w_c^l{}_j)].
\end{aligned}$$

Se utilizará la notación $w_{aij} \equiv \epsilon_{ij}^k w_{ak}$, o equivalentemente $w_{ai} = \frac{1}{2} \epsilon_i^{jk} w_{ajk}$, y se definirá el cambio de variable tipo Ashtekar de la forma $A_{ai}^\pm \equiv w_{a0i} \pm \gamma^{-1} w_{ai}$. En este punto debemos elegir el signo de $\pm \gamma^{-1}$, como se verá, dependiendo de esta elección, la única variable dinámica de la teoría, aquella cuya derivada respecto al parámetro t aparezca explícitamente en la acción, será A^- o A^+ sin que esto tenga algún significado físico. Elegimos el signo negativo obteniendo

$$\begin{aligned}
\hat{F}_{tcij} &= \epsilon_{ij}^k \dot{A}_{ck}^- - \partial_c (\epsilon_{ij}^k w_{t0k} - \gamma^{-1} w_{tij}) - \epsilon_{ij}^k w_t^l{}_k A_{cl}^- \\
&\quad - \frac{1}{2} \epsilon_{ij}^k \epsilon_k^{lm} w_{t0l} \left[\left(\frac{1}{\gamma^{-1}} + \gamma^{-1} \right) A_{cm}^+ + \left(\gamma^{-1} - \frac{1}{\gamma^{-1}} \right) A_{cm}^- \right], \tag{A.30}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\epsilon^{abc} \hat{F}_{bcij} &= 2\epsilon^{abc} \left\{ \epsilon_{ij}^k \partial_b A_{ck}^- - \frac{1}{4} \left(\gamma^{-1} - \frac{3}{\gamma^{-1}} \right) A_{bi}^- A_{cj}^- \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\gamma^{-1}} + \gamma^{-1} \right) [A_{bi}^+ A_{cj}^- - A_{bj}^+ A_{ci}^- + A_{bi}^+ A_{cj}^+] \right\}, \tag{A.31}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\epsilon^{abc} \hat{F}_{bc}^i &= 2\epsilon^{abc} \left\{ \frac{1}{2} \partial_b \left[\left(\frac{1}{\gamma^{-1}} + \gamma^{-1} \right) A_c^{+i} + \left(\gamma^{-1} - \frac{1}{\gamma^{-1}} \right) A_c^{-i} \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{8} \epsilon^{ijk} \left[\left(1 + \frac{1}{\gamma^{-2}} \right) (-A_{bj}^+ A_{ck}^+ + 2A_{bj}^+ A_{ck}^-) + \left(3 - \frac{1}{\gamma^{-2}} \right) A_{bj}^- A_{ck}^- \right] \right\} \tag{A.32}
\end{aligned}$$

Es importante notar que al tomar el valor $\gamma^{-1} = \pm i$ toda la dependencia en la variable A_{ai}^+ desaparece. Sin embargo vamos seguir considerando al parámetro γ^{-1} indeterminado. Sustituyendo lo anterior en (A.29):

$$\begin{aligned}
 S_H &= \frac{1}{2} \int d^3x dt \left\{ e_a^i e_b^j \epsilon^{abc} \left[\epsilon_{ij}^k \dot{A}_{ck}^- - \partial_c (\epsilon_{ij}^k w_{t0k} - \gamma^{-1} w_{tij}) - \epsilon_{ij}^k w_t^l{}^l{}_k A_{cl}^- \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{1}{2} \epsilon_{ij}^k \epsilon_k^{lm} w_{t0l} \left[\left(\frac{1}{\gamma^{-1}} + \gamma^{-1} \right) A_{cm}^+ + \left(\gamma^{-1} - \frac{1}{\gamma^{-1}} \right) A_{cm}^- \right] \right] \right. \\
 &\quad \left. + e_{t0} \epsilon^{abc} e_{ai} \left[\partial_b \left[\left(\frac{1}{\gamma^{-1}} + \gamma^{-1} \right) A_c^{+i} + \left(\gamma^{-1} - \frac{1}{\gamma^{-1}} \right) A_c^{-i} \right] \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{1}{4} \epsilon^{ijk} \left[\left(1 + \frac{1}{\gamma^{-2}} \right) (-A_{bj}^+ A_{ck}^+ + 2A_{bj}^+ A_{ck}^-) + \left(3 - \frac{1}{\gamma^{-2}} \right) A_{bj}^- A_{ck}^- \right] \right] \right. \\
 &\quad \left. + e_t^i e_a^j \epsilon^{abc} \left[2\epsilon_{ij}^k \partial_b A_{ck}^- - \frac{1}{2} \left(\gamma^{-1} - \frac{3}{\gamma^{-1}} \right) A_{bi}^- A_{cj}^- \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\gamma^{-1}} + \gamma^{-1} \right) [A_{bi}^+ A_{cj}^- - A_{bj}^+ A_{ci}^- + A_{bi}^+ A_{cj}^+] \right] \right\} \\
 &= S_H[w_{t0i}, w_{tij}, A_{ai}^+, A_{ai}^-, e_{t0}, e_{ti}, e_{ai}].
 \end{aligned} \tag{A.33}$$

De la acción anterior se observa que la única variable dinámica cuya derivada respecto a t aparece explícitamente es A_{ai}^- y asociado a ella se tiene un momento canónico dado por $\pi^{-ai} \equiv \epsilon^{abc} \epsilon^{ijk} e_{bj} e_{ck}$. En el esquema completo a cada variable dinámica se le asocia un momento conjugado, cumpliéndose con los paréntesis de Poisson fundamentales

$$\begin{aligned}
 \{w_{t0i}, \pi^{t0j}\} &= \frac{1}{2} \delta_i^j, \\
 \{w_{tij}, \pi^{tkl}\} &= \frac{1}{2} (\delta_i^k \delta_j^l - \delta_i^l \delta_j^k), \\
 \{A_{ai}^+, \pi^{+bj}\} &= \delta_i^j, \\
 \{A_{ai}^-, \pi^{-bj}\} &= \delta_i^j, \\
 \{e_{t0}, p^{t0}\} &= 1, \\
 \{e_{ti}, p^{tj}\} &= \delta_i^j, \\
 \{e_{ai}, p^{bj}\} &= \delta_a^b \delta_i^j,
 \end{aligned}$$

cero en cualquier otro caso. Se calcula ahora el momento canónico asociado a las variables dinámicas que por definición es $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$:

$$\begin{aligned}
 \pi^{t0i} &= 0, \\
 \pi^{tij} &= 0, \\
 \pi^{+ai} &= 0, \\
 \pi^{-ai} &= \epsilon^{abc} \epsilon^{ijk} e_{bj} e_{ck}, \\
 p^{t0} &= 0, \\
 p^{ti} &= 0, \\
 p^{ai} &= 0.
 \end{aligned}$$

Como puede verse directamente de la acción la teoría es singular y se espera un conjunto de 37 constricciones primarias independientes las cuales estarán dadas por

$$\begin{aligned}
 \phi^{t0i} &= \pi^{t0i} \approx 0, \\
 \phi^{tij} &= \pi^{tij} \approx 0, \\
 \phi^{+ai} &= \pi^{+ai} \approx 0, \\
 \phi^{-ai} &= \pi^{-ai} - \epsilon^{abc} \epsilon^{ijk} e_{bj} e_{ck} \approx 0, \\
 \phi^{t0} &= p^{t0} \approx 0, \\
 \phi^{ti} &= p^{ti} \approx 0, \\
 \phi^{ai} &= p^{ai} \approx 0.
 \end{aligned}$$

Mediante la transformada de Legendre usual se calcula el Hamiltoniano canónico H_c y mediante una combinación lineal de las constricciones primarias se define el Hamiltoniano primario H_1

$$\begin{aligned}
 H_1 &= H_c + \lambda_{t0i} \pi^{t0i} + \lambda_{tij} \pi^{tij} + \lambda_{ai}^+ \pi^{+ai} + \lambda_{ai}^- (\pi^{-ai} - \epsilon^{abc} \epsilon^{ijk} e_{bj} e_{ck}) \\
 &\quad + \lambda_{t0} p^{t0} + \lambda_{ti} p^{ti} + \lambda_{ai} p^{ai} \\
 &= \int d^3x \left\{ - \left(w_{t0k} - \frac{\gamma^{-1}}{2} \epsilon_k^{mn} w_{tmn} \right) \partial_c \pi^{-ck} - w_{tk}^l \pi^{-ck} A_{cl}^- \right. \\
 &\quad - w_{t0l} \frac{1}{2} \epsilon_k^l \pi^{-ck} \left[\left(\frac{1}{\gamma^{-1}} + \gamma^{-1} \right) A_{cm}^+ - \left(\gamma^{-1} - \frac{1}{\gamma^{-1}} \right) A_{cm}^- \right] \\
 &\quad - e_{t0} \epsilon^{abc} e_{ai} \left[\partial_b \left[\left(\frac{1}{\gamma^{-1}} + \gamma^{-1} \right) A_c^{+i} + \left(\gamma^{-1} - \frac{1}{\gamma^{-1}} \right) A_c^{-i} \right] \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{4} \epsilon^{ijk} \left[\left(1 + \frac{1}{\gamma^{-2}} \right) (-A_{bj}^+ A_{ck}^+ + 2A_{bj}^+ A_{ck}^-) + \left(3 - \frac{1}{\gamma^{-2}} \right) A_{bj}^- A_{ck}^- \right] \right] \\
 &\quad - e_{ti}^j e_a^j \epsilon^{abc} \left[2\epsilon_{ij}^k \partial_b A_{ck}^- - \frac{1}{2} \left(\gamma^{-1} - \frac{3}{\gamma^{-1}} \right) A_{bi}^- A_{cj}^- \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\gamma^{-1}} + \gamma^{-1} \right) [A_{bi}^+ A_{cj}^- - A_{bj}^+ A_{ci}^- + A_{bi}^+ A_{cj}^+] \right] \\
 &\quad + \lambda_{t0i} \pi^{t0i} + \lambda_{tij} \pi^{tij} + \lambda_{ai}^+ \pi^{+ai} + \lambda_{ai}^- (\pi^{-ai} - \epsilon^{abc} \epsilon^{ijk} e_{bj} e_{ck}) \\
 &\quad \left. + \lambda_{t0} p^{t0} + \lambda_{ti} p^{ti} + \lambda_{ai} p^{ai} \right\}. \tag{A.34}
 \end{aligned}$$

La imposición de las condiciones de consistencia genera el siguiente conjunto de constricciones secundarias

$$\begin{aligned}
 \varphi^{t0i} &= \frac{1}{2} \left\{ \partial_a \pi^{-ai} + \frac{1}{2} \epsilon_j^i \pi^{-aj} \left[\left(\frac{1}{\gamma^{-1}} + \gamma^{-1} \right) A_{ak}^+ + \left(\gamma^{-1} - \frac{1}{\gamma^{-1}} \right) A_{ak}^- \right] \right\} \approx 0, \\
 \varphi^{tij} &= -\frac{\gamma^{-1}}{2} \epsilon^{ij}_k \partial_a \pi^{-ak} + \frac{1}{2} [\pi^{-ai} A_a^{-j} - \pi^{-aj} A_a^{-i}] \approx 0, \\
 \varphi^{t0} &= \epsilon^{abc} e_{ai} \left[\partial_b \left[\left(\frac{1}{\gamma^{-1}} + \gamma^{-1} \right) A_c^{+i} + \left(\gamma^{-1} - \frac{1}{\gamma^{-1}} \right) A_c^{-i} \right] \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{4} \epsilon^{ijk} \left[\left(1 + \frac{1}{\gamma^{-2}} \right) (-A_{bj}^+ A_{ck}^+ + 2A_{bj}^+ A_{ck}^-) + \left(3 - \frac{1}{\gamma^{-2}} \right) A_{bj}^- A_{ck}^- \right] \right] \approx 0, \\
 \varphi^{ti} &= e_a^j \epsilon^{abc} \left[2\epsilon_j^i \partial_b A_{ck}^- - \frac{1}{2} \left(\gamma^{-1} - \frac{3}{\gamma^{-1}} \right) A_b^{-i} A_{cj}^- \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\gamma^{-1}} + \gamma^{-1} \right) [A_b^{+i} A_{cj}^- - A_{bj}^+ A_c^{-i} + A_b^{+i} A_{cj}^+] \right] \approx 0, \\
 \varphi^{+ai} &= \left(\frac{1}{\gamma^{-1}} + \gamma^{-1} \right) \epsilon^{abc} \partial_b (e_{t0} e_c^i) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\gamma^{-2}} + 1 \right) \epsilon^{ijk} \epsilon^{abc} [A_{bj}^- - A_{bj}^+] e_{t0} e_{ck} \\
 &\quad - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\gamma^{-1}} + \gamma^{-1} \right) \epsilon^{abc} (A_{bj}^+ + A_{bj}^-) [e_{ti}^j e_c^j - e_{ti}^j e_c^i] \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\gamma^{-1}} + \gamma^{-1} \right) \epsilon^{ij}_k w_{t0j} \pi^{-ak}.
 \end{aligned}$$

Las constricciones en el formalismo de Ashtekar se obtienen inmediatamente de lo anterior al considerar el caso particular $\gamma^{-1} = -i$. En este caso se encuentra que cualquier contribución de la variable

A_{ai}^+ se anula, siendo la única variable dinámica A_{ai}^- . Más aun, con esta elección del parámetro γ^{-1} la constricción secundaria φ^{+ai} es idénticamente cero. También se encuentra que existe la dependencia $\varphi^{tij} = i\epsilon^{ij}{}_k \varphi^{t0k}$, reduciendo a las constricciones obtenidas en el formalismo de Ashtekar.

Bibliografía

- [1] Rovelli C. *Siete breves lecciones de física*, Anagrama, ISBN 978-84-339-3704-9, 2016
- [2] Sakurai J. J., Napolitano, J., *Modern Quantum Mechanics*, 2nd edition, Cambridge University Press, ISBN: 9781108499996
- [3] Kiefer C., *Quantum Gravity*, International Series of Monographs on Physics, Second Edition. Oxford Science Publications.
- [4] Rovelli C. and Vidotto F. (2014). *Covariant Loop Quantum Gravity: An Elementary Introduction to Quantum Gravity and Spinfoam Theory*. Cambridge: Cambridge University Press. doi:10.1017/CBO9781107706910
- [5] Escalante A., and Rubalcava-García I., *A pure Dirac's canonical analysis for four-dimensional BF theories*. arXiv:1107.4421v1 [math-ph] 22 Jul 2011
- [6] Escalante A., and Cavildo Sánchez P., *Faddeev-Jackiw quantization of four dimensional BF theory*. Annals of Physics 374(2016) 375-394
- [7] Holst. S., *Barbero's Hamiltonian derived from a generalized Hilbert-Palatini action*. arXiv:gr-qc/9511026v1 7 Nov 1995
- [8] Peldán P., *Actions for Gravity, with Generalizations: A Review*. arXiv:gr-qc/9305011v1 13 May 1993
- [9] Rovelli, C. *Loop quantum gravity*. Physics World (November 2003)
- [10] Valentin Bonzom, Etera R Livine. *A Immirzi-like parameter for 3D quantum gravity*. Class. Quantum Grav. 25 (2008) 195024 (19pp)
- [11] Escalante, A., and Cavildo-Sánchez, P., *Symplectic Approach of Three-Dimensional Palatini Theory Plus a Chern-Simons Term*, Advances in Mathematical Physics, vol. 2018, Article ID 3474760, 7 pages, 2018.
- [12] Blagojevic, M., *Gravitation and Gauge Symmetries*. (IOP, Bristol, United Kingdom, 2002).
- [13] Henneaux, M., Teitelboim, C., *Quantization of Gauge Systems*. (1991). New Jersey: Princeton University Press 1991.
- [14] Goldstein, H., Poole, C. P. Jr., Safko J. L., *Classical Mechanics (3rd Edition)*. ISBN 978-0201657029
- [15] Di Stefano, R., *Modification of Dirac's method of Hamiltonian analysis for constrained systems*. Physical Review D. Volume 27, Number 8, 1983

- [16] Berra Montiel, O. J., *Notas sobre el Formalismo Hamiltoniano de Teorías con Simetrías de Norma y sus Aplicaciones*. Universidad Autónoma de San Luis Potosí, Facultad de Ciencias, 2017.
- [17] Śniatycki, J., *Dirac brackets in geometric dynamics*. Annales de l'Institut Henri Poincaré. Vol. XX, no. 4, 1974, p. 365-372
- [18] Escalante, A., and Rodriguez Tzompantzi, O., *Hamiltonian dynamics for an alternative action describing Maxwell's equations*, International Journal of Pure and Applied Mathematics, 81 (5) 701-713 (2012).
- [19] Kiriushcheva, N., and Kuzmin., S.V., *The Hamiltonian formulation of General Relativity: myths and reality*. arXiv:0809.0097v2 [gr-qc] 12 Jul 2011
- [20] Faddeev, L., and Jackiw, R., Physical Review Letters 60, 1692 (1988)
- [21] Leng Liao, Yong Chuang Huang. *Non-equivalence of Faddeev-Jackiw method and Dirac-Bergmann algorithm and the modification of Faddeev - Jackiw method for keeping the equivalence*. Annals of Physics, Volume 322, Issue 10, October 2007, Pages 2469-2484
- [22] Escalante, A., and Medel-Portugal, C., *Faddeev-Jackiw quantization of topological invariants: Euler and Pontryagin classes*. arXiv:1711.11437v1 [hep-th] 28 Nov 2017
- [23] Escalante, A., and J. Manuel-Cabrera. *Hamiltonian dynamics and Faddeev-Jackiw formulation of 3D gravity with a Barbero-Immirzi like parameter*. European Physical Journal C (2017) 77:303
- [24] Escalante, A., and Zarate Reyes, M., *Hamiltonian dynamics: four dimensional BF-Like theories with a compact dimension*. Revista Mexicana de Física 62(2016) 31-44
- [25] Belhadi, Z., et al. *Quantization of soluble classical constrained systems*. arXiv:1406.3847v2 [hep-th] 27 Aug 2014
- [26] Barcelos-Neto, J., and Cabo Montes de Oca, A., *Faddeev-Jackiw quantization of massive tensor fields*. Zeitschrift für Physik C. 74. 731-735. (1997)
- [27] Jackiw, R., *(Constrained) Quantization Without Tears*. Center for Theoretical Physics. arXiv: hep-th/9306075v1 16 Jun 1993
- [28] Xiaoming, Xu., *Faddeev-Jackiw Quantization and Its Application to the Linear σ Model for Disoriented Chiral Condensates*. Communications in Theoretical Physics. 29(1998) pp. 295-302
- [29] Kulshreshtha, D. S., and W. Müller-Kirsten, H. J., *Quantization of system with constraints: Faddeev-Jackiw method versus Dirac's method applied to superfields*. Physical Review D, Volume 43, Numer 10.
- [30] Escalante, A., and Rodríguez-Tzompantzi O., *On the Faddeev-Jackiw symplectic framework for topologically massive gravity*. European Physical Journal C (2016) 76:577
- [31] Cattaneo, A. S., et al. *Topological BF theories in 3 and 4 dimensions*. arXiv: hep-th/9505027v2 5 May 1995
- [32] Krasnov, K., *Plebański formulation of general relativity: a practical introduction*. arXiv:0904.0423v2 [gr-qc]

- [33] de Gracia, G.B., Pimentel, B.M., and Valcárcel, C.E., *Hamilton-Jacobi analysis of the four-dimensional BF model with cosmological term*. European Physical Journal Plus (2017) 132: 438
- [34] Montesinos, M., *Noether currents for BF gravity*. Classical and Quantum Gravity, 20(2003) 3569-3575
- [35] Montesinos, M., *Alternative symplectic structures for $SO(3,1)$ and $SO(4)$ four dimensional BF theories*. Classical and Quantum Gravity, 23(2006) 2267-2278
- [36] Baez, J. C., *An introduction to Spin Foam Models of BF Theory and Quantum Gravity*. arXiv: gr-qc/9905087v1 21 May 1999
- [37] Gielen, S., and Oriti, D., *Classical general relativity as BF-Plebanski theory with linear constraints*. Classical and Quantum Gravity 27(2010) 085017 (16pp)
- [38] Gielen, S., *Classical GR as a topological theory with linear constraints*. Journal of Physics: Conference series 314(2011) 012044
- [39] De Pietri, R., and Freidel, L., *$so(4)$ Plebanski action and relativistic spin-foam model*. Classical and Quantum Gravity 16 (1999) 2187-2196
- [40] Belov, V., *Poincaré-Plebanski formulation of GR and dual simplicity constraints*. arXiv: 1708.03182v1 [gr-qc] 10 Aug 2017
- [41] Capovilla, R., Montesinos, M., Prieto, V. A., and Rojas, E., *BF gravity and the Immirzi parameter*. arXiv: gr-qc/0102073v3 24 Jul 2001
- [42] Capovilla, R., Dell, J., Jacobson, T., and Lionel Mason. *Self-dual 2-forms and gravity*. Classical and Quantum Gravity 8 (1991) 41-57.
- [43] Liu, L., Montesinos, M., and Perez, A., *A topological limit of gravity admitting an $SU(2)$ connection formulation*. arXiv:0906.4524 [gr-qc]
- [44] Buffenoir, E., Henneaux, M., and Nouic, K., Ph.Roche. *Hamiltonian Analysis of Plebanski Theory*. arXiv:gr-qc/0404041v2 17 Jun 2004
- [45] Freidel, L., and Speziale, S., *On the Relations between Gravity and BF Theories*. Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications. SIGMA 8 (2012), 032, 15 pages
- [46] Escalante, A., and García, I., *Covariant canonical method for Yang-Mills theory expressed as a constrained BF-Like theory*, Advances in Mathematical Physics, 2012 (2012) [13 pages].
- [47] Cattaneo, A., Cotta-Ramusino, P., Fucito, F. et al. Communications in Mathematical Physics (1998) 197: 571.
- [48] David, J. T., *Faddeev-Jackiw quantization and the path integral*. arXiv:1508.07432
- [49] Montesinos, M., *Genuine covariant description of Hamiltonian dynamics*. Journal of Physics: Conference Series 24(2005) 44-51
- [50] Einstein, A., *The Collected Papers of Albert Einstein*. Volume 6. 1997. A. J. Kox, Martin J. Klein, and Robert Schulmann, Editors. The Foundation of the General Theory of Relativity
- [51] Baez, J. C., and Bunn, E. F., *The meaning of Einstein's Equation*. American Journal of Physics 73 (2005), 644-652. arXiv:gr-qc/0103044
- [52] Dimitrios, G., *General Relativity and Modified Gravity*. (2011).

- [53] Gron, O., and Hervik, S., *Einstein's General Theory of Relativity with modern applications in cosmology*. Springer. 2007
- [54] Chifu, E.N., Usman, A., and Meludu, O. C., *Exact analytical solutions of Einstein's gravitational field equations in static homogeneous prolate spheroidal space time*. African Journal of Mathematical Physics, Volume 9 (2010) 25-42
- [55] Narlikar, J.V. and Padmanabhan, T. Found Phys (1988) 18: 659.
<https://doi.org/10.1007/BF00734568>
- [56] Narlikar, J. V. and Padmanabhan, T., *The Schwarzschild Solutions: Some Conceptual Difficulties*. Foundations of Physics, Vol. 18, No. 6, 1988
- [57] Lahav, O., *Observational test of FRW world models*. Classical and Quantum Gravity 19 (2002) 3517 - 3526
- [58] Weinberg, S., *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. John Wiley and Sons, 1972
- [59] Biesel, O., *The Precession of Mercury's Perihelion*. Leiden University, Leiden (2008)
- [60] von Soldner, J.G. (1801) *On the Deflection of a Light Ray from Its Rectilinear Motion, by the Attraction of a Celestial Body at Which It Nearly Passes by*. Berliner Astronomisches Jahrbuch, 161-172.
- [61] Barish, B. C., *The Detection of Gravitational Waves with LIGO*. arXiv:gr-qc/9905026
- [62] B. P. Abbott et al. *Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merge* (LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration) Phys. Rev. Lett. 116, 061102
- [63] (Serie de seis artículos) The Event Horizon Telescope Collaboration. *First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole*. The Astrophysical Journal Letters, 875:L1 (17pp), 2019 April 10
The Event Horizon Telescope Collaboration. *First M87 Event Horizon Telescope Results. II. Array and Instrumentation*. The Astrophysical Journal Letters, 875:L2 (28pp), 2019 April 10
The Event Horizon Telescope Collaboration. *First M87 Event Horizon Telescope Results. III. Data Processing and Calibration*. The Astrophysical Journal Letters, 875:L3 (32pp), 2019 April 10
The Event Horizon Telescope Collaboration. *First M87 Event Horizon Telescope Results. IV. Imaging the Central Supermassive Black Hole*. The Astrophysical Journal Letters, 875:L4 (52pp), 2019 April 10
The Event Horizon Telescope Collaboration. *First M87 Event Horizon Telescope Results. V. Physical Origin of the Asymmetric Ring*. The Astrophysical Journal Letters, 875:L5 (31pp), 2019 April 10
The Event Horizon Telescope Collaboration. *First M87 Event Horizon Telescope Results. VI. The Shadow and Mass of the Central Black Hole*. The Astrophysical Journal Letters, 875:L6 (44pp), 2019 April 10
- [64] Bertschinger, E., *Introduction to Tensor Calculus for General Relativity*. Massachusetts Institute of Technology. Physics 8.962

- [65] Arnowitt, R., Deser, S., and Misner, C. W., *The Dynamics of General Relativity*. arXiv:gr-qc/0405109
- [66] Corichi, A., and Núñez, D., *Introducción al formalismo ADM*. Revista Mexicana de Física 37 No. (1991) 720-7.7
- [67] Blau, M., *Lecture Notes on General Relativity*. Albert Einstein Center for Fundamental Physics. Institut für Theoretische Physik. Universität Bern
- [68] Salgado, M., *Formulación 3+1 de la Relatividad General y formalismo de tetradas con aplicaciones numéricas (Notas)*. Departamento de Gravitación y Teoría de Campos. Instituto de Ciencias Nucleares, UNAM.
- [69] Romano, J. D., *Geometrodynamics vs. Connection Dynamics*. arXiv: gr-qc/9303032v1 26 Mar 1993
- [70] Geiller, M., and Noui, K., *A note on the Holst action, the time gauge and the Barbero-Immirzi parameter*. arXiv:1212.5064v2 [gr-qc] 17 Jun 2013
- [71] Lagraa, M. H., and Lagraa, M., *On The Hamiltonian Formalism Of The Tetrad-Gravity With Fermions*. arXiv:1706.06471
- [72] Witten, E., *2 + 1 DIMENSIONAL GRAVITY AS AN EXACTLY SOLUBLE SYSTEM*. Nuclear Physics B311 (1988/89) 46-78
- [73] Zanelli, J., *Chern-Simons Gravity: From 2+1 to 2n+1 Dimensions*. Brazilian Journal of Physics, vol. 30, no. 2, June, 2000
- [74] Liu, Zheng-Wen., *An introduction to the Chern-Simons Theory*. Department of Physics. Renmin University of China, Beijing
- [75] Baez, J., and Muniain J. P., *Gauge fields, Knots and Gravity*. World Scientific. Series on Knots and Everything- vol. 4 (October 24, 1994). ISBN-10: 9789810220341
- [76] Perez, A., and Rovelli, C., *Physical effects of the Immirzi parameter in loop quantum gravity*. Physical Review D 73, 044013, (2006).
- [77] Carlip, S. (1998). *Quantum Gravity in 2+1 Dimensions* (Cambridge Monographs on Mathematical Physics). Cambridge: Cambridge University Press. doi:10.1017/CBO9780511564192
- [78] Lichtenegger, H., *Mach's Principle*. arXiv:physics/0407078v2 [physics.hist-ph] 31 Mar 2008
- [79] Cala-Vitery, F. E., *De la Relatividad de la Inercia a la Geometrodinámica Intrínseca: Una Interpretación Relacional del Espacio-Tiempo*. Universidad Autónoma de Barcelona. Departamento de Filosofía. (2006)
- [80] Greene, B. R., *El tejido del cosmos*, Ed. Crítica, Drakontos, ISBN 84-8432-737-X, 2006.
- [81] Ashtekar, A., *Lectures on Non-Perturbative Canonical Gravity*. World Scientific, Singapore (1991).
- [82] Wiland, W. M., *Complex Ashtekar Variables and Reality conditions for Holst's Action*. arXiv: 1012.1738v2 [gr-qc] 24 Jan 2012
- [83] Rovelli, C., *Ashtekar formulation of general relativity and loop-space non-perturbative quantum gravity: a report*. Classical and Quantum Gravity 8 (1991) 1613-1675
- [84] Barbero G., J. F., *Real-polynomial formulation of general relativity in terms of connections*. Physical Review D, Volume 49, Number 12

- [85] Barbero, J. F., *Real Ashtekar variables for Lorentzian signature space-times*. Physical Review D 51, 5507 (1995).
- [86] Rovelli, C., *Quantum Gravity*. Cambridge University Press, Cambridge (2004).

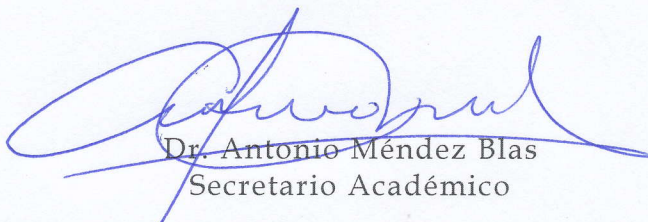


BUAP

MEMORANDUM

Para:	Dr. Héctor Hugo García Campeán, (Presidente). Dr. Gerardo Francisco Torres del Castillo. Dr. Alfredo Herrera Aguilar. Dr. Felipe Pacheco Vázquez. Dr. Alberto Escalante Hernández, (Asesor).
De:	Dr. Antonio Méndez Blas, Secretario Académico.
Asunto:	Se cita al examen de grado de Doctorado en Ciencias (Física) del M. en C. Prihel Cavildo Sánchez.
Fecha:	21 de junio de 2019

Me permito informarles que el Comité Académico del IFUAP, los ha designado integrantes del Comité para el EXAMEN DE GRADO DE DOCTORADO EN CIENCIAS (FÍSICA) del M. en C. Prihel Cavildo Sánchez, con su tesis cuyo título es: *"Formulación de Faddeev-Jackiw para una teoría BF cuatridimensional y Relatividad General en tres dimensiones"*, que presentará el próximo día: Viernes 28 de junio de 2019 a las 16:00 horas en el Auditorio del IFUAP.


Dr. Antonio Méndez Blas
Secretario Académico

Instituto de Física
"Ing. Luis Rivera
Terrazas"

Av. San Claudio esq. 18 sur, edif 110 A, B y C.
Ciudad Universitaria, Col. San Manuel,
Puebla, Pue. C.P. 72570
01(222) 2295610, Fax: ext. 5611