

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias de la Electrónica



“Simulador basado en un sistema bípedo simple”

Tesina para obtener el título de
“Licenciado en Ciencias de la Electrónica”

Tesista: **Sandra Cuatlaxahue Formacio**

Asesor: **Dr. Pablo Sánchez Sánchez**

4 de enero de 2021

Agradecimientos

Quiero expresar mi gratitud a mi familia, a mi madre Aurora y a mis hermanas Erika y Andrea, por el apoyo y la paciencia que me dieron de corazón para lograr con éxito mis estudios universitarios y el cierre de esta etapa académica, con quienes aprendí que a pesar de las adversidades que suele haber en nuestros caminos no desistir en lograr nuestras metas y sueños.

Mi profundo agradecimiento a los profesores con quienes tuve la oportunidad de tomar clases y asesorías, que a través de sus métodos de enseñanza lograron con triunfo mi formación académica; principalmente agradezco al Dr. Pablo Sánchez por su conocimiento, apoyo, orientación y paciencia durante el desarrollo y la culminación de esta tesis.

Y finalmente, a mis compañeros y amigos de carrera con quienes conviví y logré una buena colaboración durante el curso de la carrera.

Sandra Cuatlaxahue Formacio

Resumen

Este trabajo presenta conceptos de robótica y control orientados a desarrollar un simulador basado en un sistema bípedo simple. El sistema bípedo de referencia se tomó de las piernas del cuerpo humano y el movimiento de sus articulaciones en el *plano sagital*. El sistema simulado en esta tesis está formado por dos sub-sistemas de 3 grados de libertad cada uno, dando un total de 6 grados de libertad. La solución analítica se realiza desde el punto de vista de la *robótica cooperativa*.

Los grados de libertad representan las articulaciones unidas a la cadera, las rodillas y los tobillos. El análisis del sistema bípedo se realiza bajo consideraciones ideales, tales como la falta de fricción, la no intervención de fuerzas externas o perturbaciones por parte de los actuadores y el medio, y la influencia de la gravedad sobre el sistema. El diseño del sistema se realizó en **SolidWorks**, el cual es un software de Diseño Asistido por Computadora. **SolidWorks** se usó para la generación de archivos del modelo 3D compatibles con el software **Matlab**, plataforma principal en el que se desarrolla el simulador. Se realizó la comparación de los resultados del simulador (**Matlab-Simulink-SolidWorks**) con la respuesta obtenida del sistema de ecuaciones (**Matlab-Simulink**).

Esta Tesis está organizada de la siguiente forma: en el primer capítulo, se presenta una reseña histórica sobre el desarrollo y evolución de los robots bípedos, así como sus contribuciones en el campo de la medicina, especialmente en el área de la rehabilitación. En el capítulo 2, se describen los conceptos básicos necesarios para el control articular del robot, por medio de modelos matemáticos específicos como el cinemático directo y el dinámico, una ley de control, generación de trayectorias y la definición del movimiento biomecánico de la marcha humana. En el tercer capítulo se describe de manera extendida la obtención de los modelos matemáticos del sistema bípedo simulado. En el capítulo 4 se describe el Diseño Asistido por Computadora, así como el proceso del desarrollo del simulador; En el quinto capítulo se presentan los resultados de la simulación y la interpretación de las gráficas del movimiento obtenido. Las conclusiones y apéndices se presentan al final de la tesis.

Índice general

Agradecimientos	III
Resumen	V
1. Introducción	1
1.1. Antecedentes del desarrollo de robots bípedos	1
1.2. Robots de entrenamiento y terapia física	8
1.3. El escenario en México	15
1.4. Conclusiones	19
2. Conceptos preliminares	21
2.1. Cinemática	21
2.1.1. Cinemática directa	21
2.2. Modelo Dinámico	24
2.2.1. Ecuaciones de movimiento de Lagrange	26
2.2.2. Modelo dinámico de robots	26
2.2.3. Modelo dinámico de robots con accionadores	29
2.3. Propiedades de las matrices	32
2.3.1. Linealidad en los parámetros dinámicos	32
2.3.2. Matriz de inercia	33
2.3.3. Matriz centrífuga y de Coriolis	34
2.3.4. Vector de gravedad	37
2.4. Estabilidad en el sentido de Lyapunov	38
2.4.1. Conceptos básicos	39
2.4.2. Método directo de Lyapunov	45
2.5. Control de posición	48
2.5.1. Control PD con compensación de gravedad	50
2.6. Generación de trayectorias	55
2.6.1. Técnicas básicas de interpolación	56
2.6.2. Trayectorias articulares para manipuladores robóticos	58
2.6.3. Trayectorias de movimiento de punto a punto	58
2.7. Biomecánica básica de la marcha humana	64
2.7.1. Consideraciones anatómicas	65
2.7.2. Ciclo de marcha	67
2.7.3. Cinemática angular	69

2.8. Conclusiones	73
3. Modelado matemático	75
3.1. Descripción del sistema bípedo propuesto	75
3.2. Modelo cinemático directo	76
3.3. Modelo dinámico	81
3.3.1. Modelo dinámico del sub-sistema de la pierna derecha (SPD)	83
3.3.2. Modelo dinámico del sub-sistema de la pierna izquierda (SPI)	96
3.3.3. Acoplamiento del modelo dinámico	106
4. Simulador en torno a MATLAB	111
4.1. Matlab®	111
4.1.1. Simulink®	113
4.1.2. GUIDE	115
4.2. SolidWorks®	117
4.3. Desarrollo del simulador	118
4.3.1. Diseño del sistema bípedo	118
4.3.2. Traducción CAD-Simulink	120
4.3.3. Implementación de los motores DC	122
4.3.4. Implementación del controlador	124
4.3.5. Planeación y generación de trayectorias	125
4.4. Interfaz Gráfica de Usuario (<i>GUI</i>)	133
4.5. Diseño final	134
4.6. Ecuaciones del modelo dinámico en el simulador	136
4.7. Conclusión	136
5. Resultados	137
5.1. Verificación y validación del simulador	137
5.2. Experimentos finales e interpretación de resultados	137
5.2.1. Control de posición	138
5.2.2. Control de movimiento	165
Conclusiones	199
A. Preliminares matemáticos	175
A.1. Notaciones y definiciones	175
A.1.1. Vectores	176
A.1.2. Matrices	177
A.1.3. Espacios de funciones	181
A.1.4. Puntos fijos	186
B. Modelado de motor DC controlado por armadura	189
B.1. Relación entre K_t y K_b	193
B.2. Curvas del par-motor	193
B.2.1. Condiciones en estado estable	194
B.3. Motor conectado a un eslabón	195

B.3.1. Inductancia de armadura despreciable ($L_a = 0$)	197
B.3.2. Modelo del motor con fricción lineal	197
C. Esquemáticos de piezas del sistema bípedo	199
D. Especificaciones de motores de D.C.	203
E. Congresos y publicaciones	205
Bibliografía	211

Índice de figuras

1.1. Piernas robóticas	2
1.2. Piernas robóticas	3
1.3. Robot ATLAS [®]	4
1.4. ASIMO [®] , por la compañía industrial HONDA.	5
1.5. Robots pasivo–dinámicos	7
1.6. Exoesqueleto para rehabilitación.	9
1.7. Dr. Robert B. Salter, 1924–2010.	11
1.8. Lokomat [®] , Suiza.	12
1.9. Auto–Ambulator TM y GT–I	13
1.10. LOPES [®] y ALEX [®]	14
1.11. PCD por tipo de discapacidad, 2014.	16
1.12. Prótesis y ortesis	16
1.13. Exoesqueleto auxiliar creado por UNAM	17
1.14. Sistema de rehabilitación por IPN.	18
2.1. Parámetros D–H para un eslabón giratorio.	23
2.2. Diagrama de bloques.	28
2.3. Robot de 2 grados de libertad	29
2.4. Motor de CC.	30
2.5. Robot–accionadores.	31
2.6. Equilibrio	39
2.7. Estabilidad	41
2.8. Estabilidad asintótica	41
2.9. Control en malla cerrada de robots	49
2.10. Sistema dinámico en malla cerrada	50
2.11. Control PD con compensación de gravedad	51
2.12. Puntos vía para planificar el movimiento alrededor de los obstáculos.	58
2.13. Trayectoria típica del espacio articular.	59
2.14. Planimetría del cuerpo humano.	65
2.15. Movimientos de la articulación de la cadera	65
2.16. Rango de flexión–extensión de la cadera	66
2.17. Rango de flexión–extensión de la rodilla	66
2.18. Rango de flexión–extensión del tobillo	67
2.19. Diagrama esquemático de la secuencia temporal del ciclo de marcha.	68
2.20. Diagrama esquemático de la secuencia del ciclo de marcha.	68

2.21. Desplazamientos angulares de la cadera.	70
2.22. Desplazamientos angulares de la rodilla.	71
2.23. Dorsiflexión (flexión) y flexión plantar (extensión) del tobillo.	72
2.24. Rotación angular del tronco y la pelvis	73
3.1. Composición del robot bípedo.	75
3.2. Parámetros para el robot bípedo.	77
3.3. Distribución de la masa del robot.	83
4.1. Proporciones del cuerpo tomando la cabeza como unidad de medida	118
4.2. Ensamble final del sistema bípedo.	120
4.3. Proceso para pasar de un ensamble CAD hacia un archivo de simulación en simulink.	120
4.4. Modelo a bloques de SimMechanics del sistema bípedo.	123
4.5. Diagrama de bloques para un sistema de motor D.C.	124
4.6. Movimiento angular de la cadera.	125
4.7. Movimiento angular de la rodilla.	126
4.8. Movimiento angular del tobillo.	126
4.9. Generación computacional de las trayectorias	129
4.10. Trayectoria obtenida para la cadera	130
4.11. Trayectoria obtenida para la rodilla	131
4.12. Trayectoria obtenida para el tobillo	132
4.13. Interfaz gráfica de usuario, GUIDE SSBiped	133
4.14. Elementos del simulador	134
4.15. Diagrama de flujo del simulador	135
5.1. Posiciones angulares de extensión y flexión máximas.	139
5.2. Posiciones de salida en flexión, Pierna Derecha.	140
5.3. Posiciones de salida en extensión, Pierna Izquierda.	141
5.4. Error de posición, Pierna Derecha.	142
5.5. Error de posición, Pierna Izquierda.	143
5.6. Torque de los controladores, Pierna Derecha.	144
5.7. Torque de los controladores, Pierna Izquierda.	145
5.8. Torque de motores, Pierna Derecha.	146
5.9. Torque de motores, Pierna Izquierda.	147
5.10. Voltaje en los motores, Pierna Derecha.	148
5.11. Voltaje en los motores, Pierna Izquierda.	149
5.12. Corriente de motores, Pierna Derecha.	150
5.13. Corriente de motores, Pierna Izquierda.	151
5.14. Potencia eléctrica de motores, Pierna Derecha.	152
5.15. Potencia eléctrica de motores, Pierna Izquierda.	153
5.16. Potencia mecánica de motores, Pierna Derecha.	154
5.17. Potencia mecánica de motores, Pierna Izquierda.	155
5.18. Posiciones de salida en flexión, Pierna Derecha.	157
5.19. Posiciones de salida en extensión, Pierna Izquierda.	158
5.20. Error de posición, Pierna Derecha.	159
5.21. Error de posición, Pierna Izquierda.	160

5.22. Torque de los controladores, Pierna Derecha.	161
5.23. Torque de los controladores, Pierna Izquierda.	162
5.24. Comparativas de errores de posición en SPD.	163
5.25. Comparativas de errores de posición en SPD.	164
5.26. Simulación obtenida de la marcha humana	165
5.27. Posición de salida vs posición deseada, Pierna Derecha.	166
5.28. Posición de salida vs posición deseada, Pierna Izquierda.	167
5.29. Error de posición, Pierna Derecha.	168
5.30. Error de posición, Pierna Izquierda.	169
5.31. Trayectorias de movimiento de las articulaciones.	170
5.32. Fases y periodos del ciclo de la marcha.	171
5.33. Eventos clave de la marcha.	171
5.34. Patrones de las articulaciones durante la marcha, plano sagital.	173
5.35. Patrón de posición de los tobillos durante la marcha, plano sagital.	173
5.36. Toques de los controladores, Pierna Derecha.	175
5.37. Torques de los controladores del robot, Pierna Izquierda.	176
5.38. Toques de los motores DC, Pierna Derecha.	177
5.39. Torques de los controladores del robot, Pierna Izquierda.	178
5.40. Voltaje en los motores DC del robot, Pierna Derecha.	179
5.41. Voltaje en los motores DC del robot, Pierna Izquierda.	180
5.42. Corriente en los motores DC del robot, Pierna Derecha.	181
5.43. Corriente en los motores DC del robot, Pierna Izquierda.	182
5.44. Potencia eléctrica en los motores DC del robot, Pierna Derecha.	183
5.45. Potencia eléctrica en los motores DC del robot, Pierna Izquierda.	184
5.46. Potencia mecánica en los motores DC del robot, Pierna Derecha.	185
5.47. Potencia mecánica en los motores DC del robot, Pierna Izquierda.	186
5.48. Posiciones de salida, Pierna Derecha.	188
5.49. Posiciones de salida, Pierna Izquierda.	189
5.50. Errores de posición, Pierna Derecha.	190
5.51. Errores de posición, Pierna Izquierda.	191
5.52. Torques en las articulaciones, Pierna Derecha.	192
5.53. Torques en las articulaciones, Pierna Izquierda.	193
5.54. Patrones en xy de las articulaciones, SPD y SPI.	194
5.55. Patrones en xy de los tobillos, SPD y SPI.	195
5.56. Comparativa de errores de posición entre modelos, en SPD y SPI.	196
5.57. Comparativa de errores de posición entre modelos, en SPD y SPI.	197
B.1. Sección transversal de un motor DC de imán permanente	190
B.2. Diagrama del circuito para un motor de c.c. controlado por armadura	191
B.3. Diagrama de bloques para un sistema de motor D.C.	192
B.4. Curvas características par-velocidad del motor cc	194
B.5. Motor DC	195
B.6. Diagrama de bloques para sistema de orden reducido	198
C.1. Dimensiones del eslabón cadera.	199
C.2. Dimensiones del eslabón muslo derecho.	200

C.3. Dimensiones del eslabón pantorrilla derecha.	200
C.4. Dimensiones del eslabón pie derecho.	201
D.1. Hoja de especificaciones de los motores en el simulador	203
D.2. Hoja de especificaciones de los motores en el simulador	204

Índice de cuadros

2.1. Rango de valores normales (Parámetros de tiempo–distancia).	70
3.1. Parámetros de D–H para $\{SPD\}$	76
3.2. Parámetros de D–H para $\{SPI\}$	76
3.3. Parámetros de la planta.	82
4.1. Listado de solvers y técnica de integración que utilizan	114
4.2. Parámetros físicos del robot.	119
4.3. Bloques existentes en el diagrama de bloques del modelo físico en Simulink.	121
4.4. Ganancias obtenidas.	124
4.5. Valores propuestos para posiciones angulares deseadas.	127
4.6. Configuraciones de entrada.	128
4.7. Valores obtenidos de los puntos de la trayectoria final.	128
5.1. Variables de salida.	138
5.2. Rango de movimiento de las articulaciones.	138
5.3. Parámetros tiempo-distancia obtenidos	172

Capítulo 1

Introducción

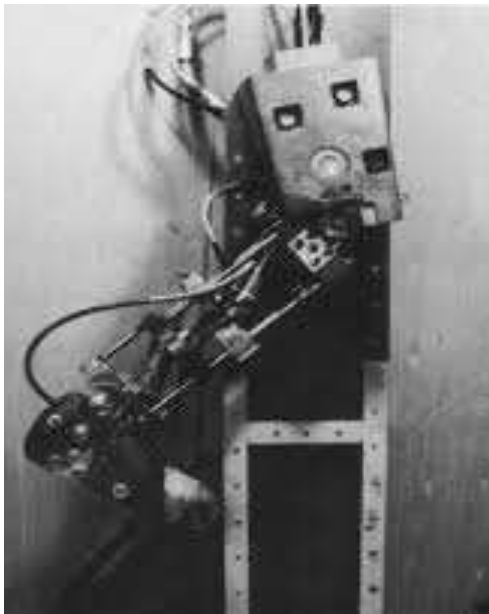
La robótica ha empleado un papel importante en el desarrollo de la tecnología y la ciencia en diversas áreas de trabajo y de investigación, permitiendo a los investigadores aventurarse con su ingenio a mejorar aspectos de los autómatas con el fin de optimizar su eficiencia.

La movilidad de los robots en un entorno de trabajo se ha convertido en un factor importante para la evolución de la robótica. Algunos robots deben ser capaces de trasladarse de un punto a otro aun con la existencia de obstáculos y perturbaciones durante su trayecto. En la robótica se puede encontrar diferentes tipos de locomoción, los más conocidos entre los robots terrestres son el desplazamiento con el uso de ruedas y extremidades. Los robots móviles con ruedas ofrecen soluciones más simples de movimiento que permiten alcanzar altas velocidades en terrenos regulares, pero si se pretende que los robots se desplacen entre los humanos, existen obstáculos considerables que evitan que el robot se traslade fluidamente, como es el caso del desplazamiento en escaleras. Una solución a este problema ha sido el desarrollo de prototipos que imitan distintas formas de desplazamiento similares a la de los animales y al hombre, gracias a su adaptabilidad para desplazarse en terrenos irregulares. Los robots móviles con extremidades con mayor impacto e interés por su investigación y desarrollo han sido los robots humanoides, clasificados dentro de los robots móviles como robots bípedos, sistemas que poseen dos piernas para su locomoción. Estos dispositivos en su mayoría pretenden imitar el sistema motriz de los humanos, donde se deben tomar en cuenta aspectos tales como posición, velocidad y equilibrio, usando únicamente el movimiento de las articulaciones mediante sus actuadores, concibiendo el estudio de este tipo de robots más complejo en comparación a los robots con ruedas [1].

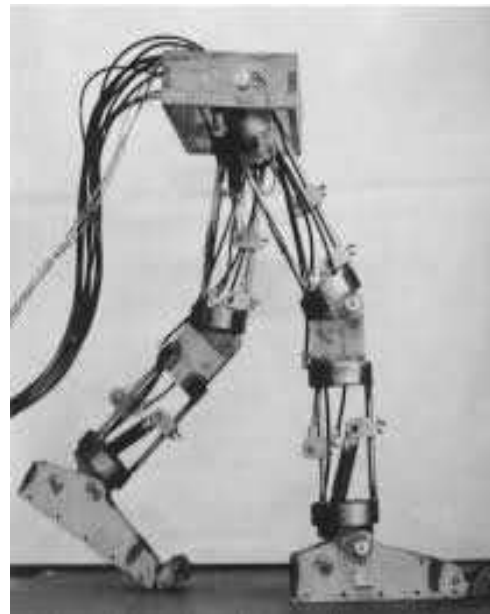
1.1. Antecedentes del desarrollo de robots bípedos

Los trabajos pioneros en el campo de robots bípedos fueron realizados alrededor de 1970 por dos famosos investigadores, Ichiro Kato y Miomir Vukobratovic. Ambos trabajos fueron caracterizados por el diseño de sistemas experimentales. En Japón, los primeros esfuerzos para emular la locomoción bípeda humana en una plataforma robótica, se hicieron en la Universidad de Waseda en Tokyo, bajo la dirección de Ichiro Kato entre los años de 1966 y 1984, cabe mencionar que estos experimentos fueron el punto inicio de una generación de robots bípedos en ese país. Durante ese tiempo, el laboratorio de Kato construye una serie de piernas robóticas diseñadas para emular la alternación del barrido y las fases de la marcha humana.

Los dos primeros modelos, Modelo **WL-1**[®] y el modelo **WL-3**[®], eran representaciones mecánicas básicas de las piernas humanas, con servo-actuadores electro-hidráulicos y sistemas de control en lazo abierto. El Modelo **WL-3**[®] era capaz de coordinar entre una fase de oscilación, durante la cual una de sus piernas sería barrer hacia adelante en un movimiento pendular, y una fase estática, durante la cual su otra pierna se mantendría inmóvil en relación con el suelo. El patrón de la marcha del modelo era repetible, pero no capturaba el movimiento del péndulo invertido dinámico que es característico de la marcha bípeda humana [1,2].



(a) Modelo **WL-1**[®] (1967)



(b) Modelo **WL-3**[®] (1969)

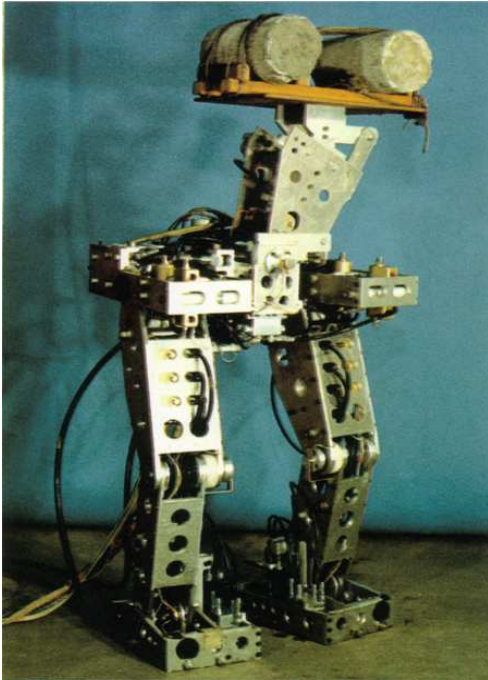
Figura 1.1: Piernas robóticas

En 1972, el Laboratorio de Kato completó el modelo **WL-5**[®], era capaz de realizar el caminar estático¹ con una tasa de rotación de 45 segundos por paso y ofreció posibilidades de giro limitado. A pesar de que podía desarrollar una trayectoria simple en una superficie plana, este modelo, al igual que sus predecesores, se limitó a mover las piernas a través de estados físicamente cuidadosamente planificados y estables. Era equilibrado perpetuamente en las plantas de sus pies y le faltaba la naturaleza dinámica de la marcha humana. El Laboratorio de Kato hizo importantes avances en la robótica bípeda que culminó con la construcción del modelo **WL-10RD**[®], el primer robot bípedo en el mundo capaz de caminar de forma dinámica². Mientras que los modelos anteriores se habían limitado a caminar de forma estática, el modelo **WL-10RD**[®] era capaz de la locomoción bípeda continua a través de estados de no equilibrio, la capacidad de aproximarse a la dinámica de la caída que caracteriza a la marcha humana.

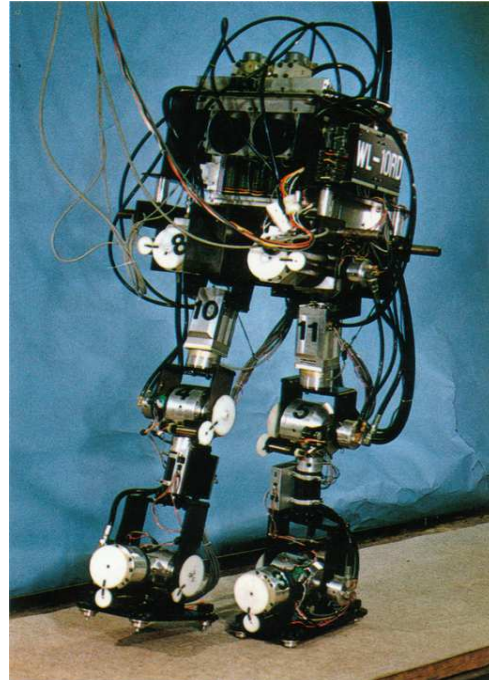
¹El balance estático hace referencia a un sistema que permanece balanceado manteniendo siempre su centro de masa verticalmente proyectado sobre el polígono de soporte formado por sus bases de soporte (Raibert, 1986). Tal es el caso del caminado estático de un robot, en el cual cuando un pie se mueve, el centro de masa no debe estar fuera del área de soporte formada por el pie que continúa en contacto con la tierra.

²En el balance dinámico, la proyección vertical del centro de masa puede encontrarse fuera del área de soporte formada por las bases del robot bípedo en pequeños periodos de tiempo

El modelo fue accionado por servos de tipo rotatorio en los tobillos, rodillas y cadera. Sensores de torque en los tobillos y la cadera permitieron el control de retroalimentación básica, y una parte superior del cuerpo lateralmente flexible que permitió el ajuste del centro de masa. El Modelo WL-10RD[®] era capaz de caminar hacia adelante, hacia atrás y lateralmente con una velocidad de rotación de 1.3 segundos por paso. Lo que representó un hito importante en el campo de los robóticos bípedos en aquella época [1,2].



(a) Modelo WL-5[®] (1972)



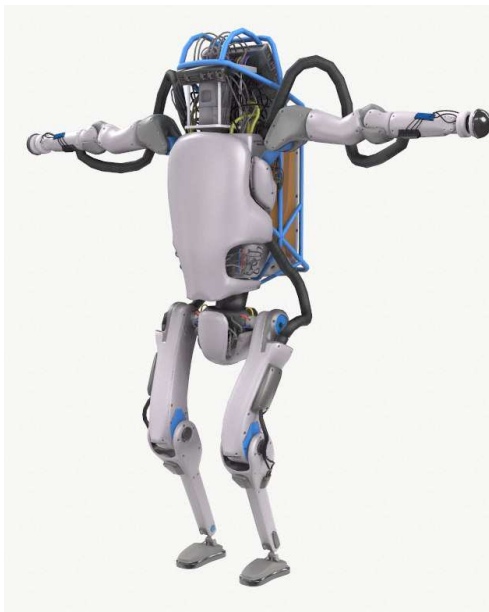
(b) Modelo WL-10RD[®] (1984)

Figura 1.2: Piernas robóticas

En paralelo con los trabajos de Ichiro Kato, Miomir Vukobratovic y su equipo estuvieron muy involucrados en la rehabilitación funcional. En el Instituto Mihailo Puppin, Belgrade, Yugoslavia, ellos diseñaron el primer exoesqueleto activo, y muchos otros dispositivos tales como la *mano de Belgrade*. Pero el resultado más conocido permanece en su análisis de estabilidad de locomoción, el cual exhibido alrededor de 1972 el concepto de **Zero-Moment Point (ZMP)**, ampliamente usado desde ese tiempo. Esto fue la primera prueba a formalizar la necesidad de la estabilidad dinámica de robots bípedos; la idea fue usar la dinámica para extender un criterio clásico de balance estático, es decir, el pie del robot bípedo no puede ser controlado directamente pero si en una forma indirecta, para asegurar las dinámicas apropiadas del mecanismo sobre el pie. Así, todo indicador del medio ambiente del mecanismo es el punto donde la influencia de todas las representaciones de fuerza sobre el mecanismo puede ser reemplazado por una simple fuerza. Cuya primera aplicación práctica del concepto fue en la relación de la ganancia del bípedo dinámicamente balanceado WL-10RD[®] por Ichiro Kato en 1984 [2,4].

Por otra parte, hubo investigaciones en relación a los robots bípedos en distintas partes del mundo. En la década de los 70's se hizo el lanzamiento del Laboratorio de Piernas del Instituto de Tecnología de Massachusetts, fundado y dirigido por Marc Raibert hasta 1995, donde una secuencia de robots saltarines activos con una, dos o cuatro patas fueron diseñados, con resultados impresionantes, entre ellos una famosa máquina saltarina de dos piernas llamada **RABBIT**. El diseño de estos sistemas fue con el propósito de explorar y estudiar el equilibrio y la estabilidad dinámica en la locomoción de las patas con el uso de algoritmos simples de control, partiendo desde una sola pata en el sistema hasta generalizarlo a un sistema de cuatro patas; estos sistemas viajaban a una velocidad específica, siguiendo caminos sencillos y manteniendo el equilibrio cuando se les perturba. [2,5].

Para el año 1992, Marc Raibert fundó **Boston Dynamics**, una empresa dedicada a la simulación y desarrollo de robótica. Actualmente esta empresa cuenta con uno de los robots bípedos más avanzados en el mundo, llamado **ATLAS**[®], con el uso de principios de control dinámico y equilibrio usando diseños mecánicos y electrónicos sofisticados y de vanguardia, así como software para la percepción, la navegación y la inteligencia artificial. El sistema de control de Atlas coordina los movimientos de los brazos, el torso y las piernas para lograr una manipulación móvil de todo el cuerpo, ampliando enormemente su alcance y espacio de trabajo. La visión por computadora, detección de alcance y otros sensores le dan a **ATLAS**[®] la capacidad de manipular objetos en su entorno y viajar en terrenos difíciles. Además mantiene su equilibrio cuando es empujado y puede levantarse si este se vuelca [6].



(a) *Robot ATLAS*[®]



(b) *Boston Dynamics*

Figura 1.3: Robot **ATLAS**[®]

En 1986, la Compañía **Honda Motor** de Japón, inició su programa ahora mundialmente famoso de investigación de robótica humanoide, un programa que en última instancia, produjo uno de los robots humanoides más avanzados en el mundo llamado **ASIMO**[®].

Las primeras investigaciones de Honda en robótica humanoide se centraron principalmente en el problema de lograr la locomoción bípeda antropomórfica. Los primeros modelos experimentales del grupo de investigación subrayó la emulación de la fisiología humana, con dimensiones de pierna, distribuciones de peso, prácticas comunes, unir rangos de movimiento y límites de conjuntos de torque, todos especificados y basados en mediciones de los mismos parámetros en el cuerpo humano.

Para 1991, el modelo experimental 4 de Honda era capaz de caminar de manera dinámica en superficies planas con una velocidad máxima de 4.7 km/h, comparable a la velocidad media de un ser humano adulto. Para que el robot mantenga el equilibrio en cada paso, la intersección de su vector de fuerza de inercia total con el suelo, conocido como el **Punto de Momento Cero (ZMP)**, debe estar en la zona en la que el pie del robot esté en contacto al suelo. Esta condición se puede mantener con fiabilidad para caminar sobre superficies planas, pero es más difícil de sostener cuando se atraviesa un terreno irregular [1].

Para su modelo Experimental 6, Honda desarrolló tres esquemas de control para contrarrestar tales condiciones de pérdida de equilibrio. El primer esquema empleaba mecanismos de respuesta de fuerza de baja reacción en las articulaciones del tobillo en respuesta a las desviaciones pequeñas en la superficie del suelo. Este esquema fue eficiente y exigió poco cambio del patrón de caminata normal del robot, debido al limitado rango de movimiento en las articulaciones del tobillo, que sólo podría manejar un pequeño conjunto de escenarios de equilibrio.

El segundo esquema de control incluía una retroalimentación más compleja que empleaba sensores angulares en las articulaciones, acelerómetros y un giroscopio en la cadera, y sensores en los pies para detectar condiciones de pérdida de equilibrio y de activar la compensación de la aceleración de la parte superior del cuerpo del robot. El tercer esquema de control ajustaría el posicionamiento del siguiente paso del robot tras la activación de la compensación de la aceleración de la parte superior del cuerpo para mantener la longitud de zancada deseada y poca velocidad. En conjunto, estos sistemas de control permitieron a Honda demostrar con éxito el caminado autónomo por escaleras y pendientes a partir de 1993 [1].



Figura 1.4: ASIMO[®], por la compañía industrial HONDA.

ASIMO[®] se convirtió en el robot humanoide más reciente de la empresa Honda Motor, que emplea versiones refinadas de los sistemas de control que fueron desarrollados originalmente para su modelo Experimental 6. Para complementar sus esquemas básicos de control de estabilización andante, **ASIMO**[®] empleó un nuevo esquema de control de alto nivel, apodado el sistema **i-WALK** que le permite generar caminata y giro con los protocolos en tiempo real.

El sistema de **i-WALK** de **ASIMO**[®] permite caminar de manera flexible, por el que el paso y la colocación de los pies están determinados por la velocidad deseada, el terreno local y obstáculos ambientales. Y para facilitar las transiciones entre caminar en línea recta y girado, **ASIMO**[®] desplaza su centro masa en la dirección de la vuelta [1,7].

ASIMO[®] representa uno de los ejemplos más exitosos de una clase de robots bípedos construido con una estrategia de diseño denominada control preciso de ángulo articulado. Los Robots bípedos de control preciso de ángulo articulado son accionados completamente en todos los grados de libertad, que permite las posiciones relativas de sus componentes para ser controlados en todo momento.

Otros ejemplos exitosos de robots bípedos modernos de control preciso de ángulo articulado incluyen el **HRP-3 Promet** desarrollado por **Industrias Kawada** y el **Instituto Nacional de Ciencia y Tecnología Industrial Avanzada de Japón (AIST)**, **Dexter** desarrollado por **Anybots** de los Estados Unidos, y **QRIO** por parte de la compañía **SONY**, siendo estos algunos ejemplos mayores [1,2,7].

Los robots de control preciso de ángulo articulado, debido a su naturaleza controlada por desplazamiento, son capaces de realizar complejas maniobras físicas pero también exigen el mayor gasto de energía. El costo específico energético de transporte, es decir, la energía necesaria para llevar una unidad de peso a una unidad de distancia, de **ASIMO**[®] Honda es aproximadamente 3.2 N/m mientras que el costo de la marcha humana es aproximadamente 0.2 N/m.

En contraste con robots de control preciso de ángulo articulado, los seres humanos son capaces de alcanzar altos niveles de eficiencia energética en la locomoción bípeda sin sacrificar la complejidad funcional [1,7].

Otra clase de robots bípedos que pretende cerrar la brecha entre la eficiencia energética de la locomoción bípeda humana y la robótica, a través de inspiraciones de diseño de la naturaleza pasivo-dinámico de la marcha humana. Estos robots bípedos en consecuencia han sido considerados como caminantes pasivo-dinámicos y representan algunos de los ejemplos más simples mecánicamente y antropomórficos de locomoción bípeda robótica hasta la fecha; caracterizados por la ausencia de un sistema de control y actuadores en las articulaciones, su movimiento depende del efecto de la gravedad y balanceo de sus piernas.

La idea de usar andadores pasivo-dinámicos como emuladores de locomoción bípeda humana fue propuesta primero por Tad McGeer en 1990. McGeer desarrolló un mecanismo simple de dos patas con tres grados de libertad, dos en las rodillas y uno en la cadera, que podía caminar por un ligero descenso con una marcha sorprendentemente antropomórfica.

El dispositivo no utilizó actuadores, sensores o esquemas de control, sino el poder de la gravedad y el péndulo alternado, invirtiendo movimientos de péndulo de sus dos piernas hacia adelante [1,7].



(a) *Propuesto por T. McGeer*



(b) *Robot bípedo Pasibot*

Figura 1.5: Robots pasivo–dinámicos

En la última década, varios grupos de investigación de todo el mundo han seguido los trabajos de McGeer, para incluir pequeños actuadores en articulaciones claves de modo que permita caminar al robot sobre superficies planas e inclinadas. Uno de estos bípedos caminantes desarrollado por Human Power y el Laboratorio de Robótica de la Universidad de Cornell, cuenta con cinco grados de libertad, dos articulaciones en los tobillos, dos articulaciones en las rodillas, y un eje que conecta sus dos piernas a la cadera. El caminante entero se moviliza por dos actuadores en los tobillos, que se extienden alternativamente cada uno de los pies del robot cuando el otro entra en contacto con el suelo. Dos sensores de fuerza en los pies proporcionan las señales de retroalimentación necesaria para la sincronización de paso. Las piernas del caminador son enganchadas en las rodillas para evitar la hiperextensión de las extremidades inferiores, mientras que ambas piernas están sin restricciones en la cadera. Este diseño permite al andador mover sus piernas hacia adelante con un movimiento pendular, reduciendo significativamente sus necesidades energéticas. El caminante también cuenta con dos brazos rígidos mecánicamente vinculados a sus piernas, que proporcionan estabilización rotacional durante la marcha. El andador entero pesa 13 kg y consume 11 Watts mientras camina a una velocidad de 1.5 kilómetros por hora. Su costo energético según del transporte es de aproximadamente 0.2 N/m, comparable a la de un humano caminando y su andar de caminata visiblemente antropomórfico. El caminante bípedo de Cornell, junto con similares caminantes pasivos–dinámicos desarrollados por grupos de investigación en el **Instituto Tecnológico de Massachusetts MIT** y la **Universidad Tecnológica de Delft**, han demostrado las capacidades de sistemas mecánicos simples y bien diseñados para lograr la locomoción bípeda antropomórfica [1].

El éxito de estos paradigmas de la robótica bípeda sugiere una integración de los dos conceptos principales en robots bípedos en hoy, control preciso de ángulo articulado y pasivo–dinámico, es probable que sea una característica definitiva para la próxima generación de robots humanoides. De hecho, el propio cuerpo humano utiliza una combinación cuidadosa de la dinámica natural y control de desplazamiento para alcanzar gran complejidad funcional con alta eficiencia energética.

Es claro que los investigadores en el área de robótica bípeda están ahora encarando un desafío en el diseño de adecuados y eficientes sistemas de control basados en gran parte por la dinámica directa y el **ZMP**. Varias investigaciones tecnológicas de robots bípedos están disponibles, sin embargo, la habilidad de estos sistemas para caminar realmente automáticamente en uno o varios terrenos, permanecen aún para ser demostrados.

El hombre siempre se ha sentido atraído por la idea de diseñar máquinas semejantes a sí mismo, por lo que ha centrado su interés al estudio de la forma más común en la transportación del mundo, la marcha humana. En efecto al estudio y desarrollo de robots bípedos, existen variadas aplicaciones para este tipo de robots, pueden ser útiles desde la exploración de lugares inaccesibles o peligrosos, para proporcionar servicios o entretenimiento en los lugares donde vivimos y trabajamos [1,2].

1.2. Robots de entrenamiento y terapia física

Los humanos presentan complejos y especializados algoritmos naturales de control, que les brindan la capacidad de realizar tareas específicas y complicadas, en un rango de condiciones y con rápidos tiempos de respuesta. En contraste, los robots pueden realizar tareas que requieren gran fuerza, dependiendo de la naturaleza de su estructura y de la potencia de sus actuadores.

Es evidente, entonces, que combinando estas dos entidades, el ser humano y el robot en un solo sistema integrado, se pueden alcanzar soluciones interesantes que se beneficiarían de las ventajas que aporta cada sub–sistema. Las investigaciones y desarrollos tecnológicos en el campo de los robots bípedos han tenido aportaciones en el campo de la ingeniería biomédica con el desarrollo de plataformas robóticas para aplicaciones de rehabilitación con el fin de mejorar las sesiones de terapia física tanto para el paciente como para el terapeuta. El desarrollo de plataformas robóticas para aplicaciones de rehabilitación es actualmente un foco de investigación en todo el mundo. Dentro de los principales avances se encuentran los exoesqueletos, denominados en este caso aplicado por bio–ingeniería como **ortesis** activas.

Los exoesqueletos consisten en un mecanismo estructural externo acoplado a la persona y cuyas uniones y eslabones corresponden a las de la parte del cuerpo humano que emula; así, la potencia mecánica de las máquinas integrada con el sistema de control inherente al humano llevaría a realizar tareas que necesitan aplicar grandes fuerzas de una manera eficiente, lo cual es el principio básico del diseño de los exoesqueletos.

Por lo que durante las últimas décadas se ha interesado la inclusión de robots humanoides para asistir al ser humano en ciertas tareas como mano de obra, o la utilización de derivaciones de estos sistemas robotizados como medio de entrenamiento o prótesis en el área de salud [8].

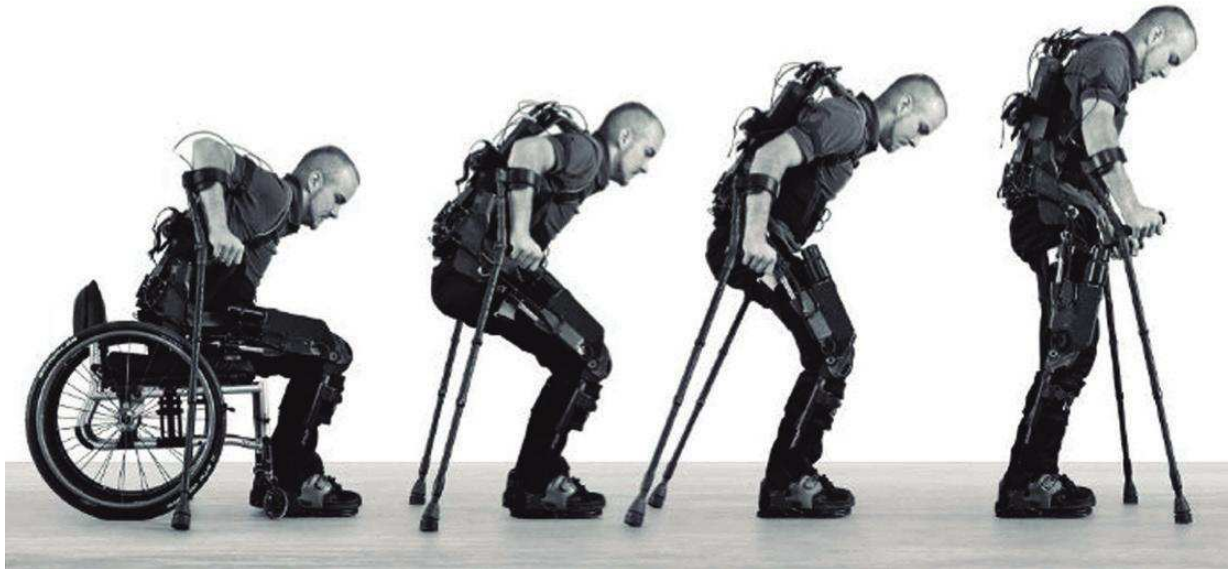


Figura 1.6: Exoesqueleto para rehabilitación.

La restauración de la función motora es una prioridad en la rehabilitación con el objetivo de facilitar la reintegración del paciente a la sociedad. Tras varios estudios, diversos laboratorios desarrollaron un enfoque de rehabilitación en el que los pasos del paciente se realizan en una cinta rodante, con el apoyo de un arnés para el peso del cuerpo y la asistencia de hasta tres terapeutas. Dependiendo del nivel del deterioro del paciente, son necesarios de uno a tres terapeutas para el entrenamiento en andador con soporte de peso corporal: un terapeuta asiste en la estabilización y movimiento de la pelvis, mientras que dos terapeutas se sientan al lado de la cinta de correr y ayudan a las piernas del paciente en los estados de oscilación y de apoyo. Este tipo de entrenamiento se basa en el principio de la generación de entrada normativa de locomoción que promueve la reorganización funcional y recuperación de los circuitos neuronales heridos [9].

En las terapias se busca obtener ayudar a la gente a volver a aprender como moverse después de lesiones o enfermedades neuromusculares; conocido este proceso como neuro-rehabilitación. Aun con la participación diaria de la práctica de movimiento intensivo durante muchas semanas, este proceso es lento; para algunas tareas, como la enseñanza de una persona con problemas de equilibrio y debilidad en las piernas para caminar, se requiere que el terapeuta tenga fuerza sustancial y agilidad [8,9,11].

Debido al tiempo y el labor intenso por parte de los terapeutas, en los últimos años, esta atención de salud ha puesto límites a la cantidad de terapia que puede ofrecer. Irónicamente, al mismo tiempo, ha habido una creciente evidencia científica de que más terapia puede en algunos casos aumentar

la recuperación de movimiento a través de su uso dependiente de la plasticidad³. A finales de 1980, investigadores en robótica y de rehabilitación comenzaron a reconocer que la neuro-rehabilitación es una actividad para la automatización debido a su labor intensiva, naturaleza mecánica y debido a la cantidad de la recuperación vinculada con la cantidad de repetición. Los robots podrían ofrecer al menos las partes repetitivas de terapia de movimiento a un costo más bajo que los terapeutas humanos, lo que permite a los pacientes recibir más tratamiento [9, 11, 12].

El gran desafío para la automatización de la terapia de movimiento es determinar lo que el robot debe hacer en colaboración con los propios intentos de movimiento del paciente con el fin de mejorar al máximo la habilidad del movimiento. Conocer este desafío implica resolver dos problemas fundamentales: la determinación de tareas de movimiento adecuados, es decir, qué movimientos deben practicar los pacientes y que retroalimentación debe recibir sobre su rendimiento; y la determinación de un patrón apropiado de entrada mecánica al paciente durante estas tareas de movimiento, es decir, las fuerzas que el robot aplicará a las extremidades del paciente para provocar la plasticidad [9].

Entonces, durante el desarrollo de los sistemas robóticos de entrenamiento, los ingenieros se encuentran con dos principales dificultades. El primero de ellos es sobre las tareas de movimiento óptimo y las entradas mecánicas no son bien conocidas, ya que el número de grandes ensayos controlados y aleatorios que han comparado con rigor diferentes técnicas de terapias es aún pequeño; por lo tanto al momento de plantear la configuración para construir el dispositivo de terapia robótica hay gran incertidumbre en cuanto a qué es exactamente lo que el dispositivo debe hacer. Sin embargo, la existencia de esta incertidumbre ofrece la oportunidad de utilizar los dispositivos de terapia robótica como propias herramientas científicas. Estos dispositivos tienen el potencial de ayudar a identificar lo que provoca exactamente la plasticidad durante la rehabilitación del movimiento, ya que pueden proporcionar patrones bien controlados y medir simultáneamente los resultados de la terapia. Un mejor control sobre la administración de tratamiento y la mejora de la evaluación cuantitativa de la mejoría de los pacientes son dos características deseables para los ensayos clínicos que a menudo han faltado en el pasado. La segunda dificultad es tecnológica, los dispositivos de terapia robótica a menudo tienen como objetivo ayudar en la terapia de muchos grados de libertad del cuerpo, por ejemplo, los brazos y el torso para alcanzar, o la pelvis y las piernas para caminar. Los dispositivos también requieren de un ancho de banda dinámico de manera que puedan, por ejemplo, no solo imponer un movimiento deseado en un paciente que está paralizado, sino también debilitamiento del sistema cuando el paciente vaya recuperando su fuerza motriz. Además, es deseable hacer los dispositivos portables, por lo que el paciente pueda participar en la rehabilitación en un entorno natural, como caminar sobre el suelo, o incluso durante todo el curso de la normalidad de las actividades de la vida diaria. Por lo tanto, reuniendo el gran reto de la terapia robótica, requiere avances sustanciales interrelacionados tanto en la neurociencia y la ingeniería robótica clínica para el desarrollo de dispositivos que se aproximen a la flexibilidad y la inteligencia de un terapeuta humano [9].

³Capacidad de las células del sistema nervioso para regenerarse anatómica y funcionalmente, después de estar sujetas a influencias patológicas ambientales o de desarrollo, incluyendo traumatismo y enfermedades, este proceso de plasticidad sináptica resulta esencial para el aprendizaje y la memoria.

Los inicios de la rehabilitación de las extremidades inferiores con dispositivos asistidos por motor datan de los años setenta. En ese tiempo se probó el concepto de riel de movimiento pasivo continuo. Este tipo de estructura mecánica se evaluó a partir del trabajo de Robert Bruce Salter, un cirujano ortopédico, quien observó que la flexión–extensión cíclica de la articulación del paciente reduce el tiempo de recuperación y aumenta su rango de movimiento después de la cirugía ortopédica. Estos dispositivos están diseñados en dos tipos, para la rehabilitación de la extremidad superior y la inferior [10].



Figura 1.7: Dr. Robert B. Salter, 1924–2010.

La rápida revolución tecnológica en el campo de la electrónica y los sistemas de control aumentó el número de dispositivos semiautomáticos y automáticos instalados y utilizados en clínicas de rehabilitación. Las características habituales en la aplicación de un sistema de control electrónico para rehabilitación permite al usuario ajustar algunos parámetros básicos, tales como, el rango y la velocidad del movimiento, proporciona un control de cumplimiento que evita la fuerza excesiva que actúa sobre la articulación rehabilitada, y con el progreso de la terapia, el dispositivo realiza un aumento automático del rango de movimiento. La neuro–rehabilitación moderna con dispositivos asistidos por robots es un campo relativamente nuevo en la rehabilitación. El sistema de locomoción robótico fue desarrollado a finales de los 90 para ayudar al entrenamiento automático sobre una cinta rodante.

En el año 2000, la experiencia en el campo de la rehabilitación y el conocimiento de ingeniería permitió a los investigadores de la **Universidad de ETH** (siglas en alemán, **Eidgenössische Technische Hochschule**) en Zurich, Suiza, crear un sistema de **ortesis** mecánico llamado **Lokomat[®]**, Figura (1.8). Éste es un exoesqueleto que conecta el exterior con las piernas y ayuda al movimiento. Está diseñado para el proceso de reeducación de la marcha de pacientes con trastornos neurológicos y lesiones de la médula espinal.

El **Lokomat**[®] es un exoesqueleto robótico compuesto por cuatro articulaciones motorizadas que mueven la cadera y las rodillas, dos articulaciones por pierna. Los actuadores consisten de roscas esféricas conectadas a motores de corriente directa (DC). Las piernas son manejadas en una marcha modelada a lo largo de una trayectoria arreglada por control de posición.

El dispositivo sujeta los muslos y las piernas a través de correas acojinadas. Un mecanismo paralelogramo pasivo concede traslación vertical del torso del paciente, restringiendo la traslación lateral. El peso del cuerpo del paciente es descargado a través de un arnés en la parte superior.

El **Lokomat**[®] es comúnmente usado en docenas de laboratorios de investigación y clínicas en todo el mundo, incluso en México [9, 10, 13].



(a) *Uso del sistema Lokomat*[®].



(b) *Lokomat*[®].

Figura 1.8: **Lokomat**[®], Suiza.

El **Lokomat**[®] es el dispositivo médico robótico líder en el mundo que proporciona un entrenamiento de la marcha altamente repetitivo y fisiológico, especialmente a pacientes con discapacidades graves. La terapia asistida por robot permite un entrenamiento eficaz e intensivo y garantiza el

aprovechamiento óptimo del potencial de neuroplasticidad y recuperación. La forma de andar fisiológica está asegurada por la combinación de exoesqueleto ajustable individualmente con el sistema patentado de soporte dinámico del peso corporal.

Otros sistemas de robots de entrenamiento de marcha en uso para terapias en varias clínicas de todo el mundo, son el **Auto-Ambulator** y el **Andador GT-I**. El **Auto-Ambulator** consiste de dos brazos robóticos que asisten el paso del paciente sobre un andador entrenado con el peso de su cuerpo sujetado. La interfaz para las piernas del paciente es a través de correas desde el muslo hasta los tobillos. El **Auto-Ambulator** es comúnmente usado en 57 centros de rehabilitación de HealthSouth, todos ellos en Estados Unidos de América, Figura 1.9(a) [9, 13].



(a) *AutoAmbulator*[®]



(b) *GT-I*

Figura 1.9: *Auto-Ambulator*TM y *GT-I*

El sistema **GT-I** se aparta más de la terapia asistida mencionada con anterioridad, ya que interactúa con las extremidades inferiores del paciente a través de dos placas de soporte en lugar de actuar sobre el vástago como los terapeutas humanos lo hacen. También parece salirse más del andar natural porque el principio de pie plano altera sustancialmente las señales sensoriales del impacto del pie con la banda de tierra o caminadora. Los **GT-I** son impulsados por un mecanismo accionado por separado que mueve el pie a lo largo de una trayectoria de la marcha con una manivela fija y un sistema duplicado de ejes de balancín. La longitud de la zancada se puede ajustar entre sesiones por el cambio de marchas, el peso corporal se descarga según sea necesario por un arnés de arriba. El torso se mueve **sagitalmente** de una manera dependiente de la fase por cuerdas atadas al arnés y conectados por otro a la manivela del pie. Actualmente, el **GT-I** está instalado en decenas de clínicas, principalmente en Europa, Figura 1.9(b) [9].

Además de los tres sistemas anteriores, existen numerosos proyectos en desarrollo de sistemas de rehabilitación de extremidades inferiores, tales como el dispositivo **LOPES**[®] (Lower-extremity Powered Exoskeleton) y **ALEX**[®] (Active Leg Exoskeleton), Figura 1.10. **LOPES**[®] está diseñado para la rehabilitación de la marcha y usa una cinta de correr en el procedimiento de entrenamiento. Los principales objetivos de este proyecto son reducir la carga del fisioterapeuta para mejorar la efectividad del entrenamiento en pacientes con accidente cerebrovascular y apoyar elementos seleccionados del aparato de locomoción en el proceso de reeducación de la marcha. La generación del movimiento de la **ortesis** robótica se hace de acuerdo a la trayectoria programada. Durante el proceso de entrenamiento se tiene en cuenta la interacción entre el paciente y el esqueleto mecánico. El control compatible y adaptable con elasticidad en serie ajustable en los accionamientos del motor se aplica a las uniones activas del exoesqueleto. Esta solución permite a los pacientes sentir la mínima influencia de la **ortesis** mecánica en las extremidades rehabilitadas. El número de grados de libertad que contiene proporciona movimientos libres de la cadera a lo largo de tres ejes [9, 10].



(a) Sistema LOPES[®]



(b) Sistema ALEX[®]

Figura 1.10: LOPES[®] y ALEX[®]

El sistema **ALEX**[®] desarrollado recientemente en la Universidad de Delaware, Newark, USA. Se reconoce por un gran número de grados de libertad y un sistema de compensación de gravedad pasiva. La **ortesis** mecánica de la pierna tiene 3 grados de libertad activos correspondientes al movimiento de flexión de la rodilla y la cadera en el **plano sagital**. La **ortesis** tiene un grado de libertad responsable de los **movimientos de aducción y abducción** de la pierna. Todo el mecanismo está unido a la estructura de soporte con dos grados de libertad pasivos, que proporcionan movimientos verticales y horizontales adicionales. Los elementos elásticos usados en la construcción de articulaciones pasivas se utilizan para compensar el peso de la abrazadera y realizan los movimientos

adecuados de la pelvis (lateral, vertical y de rotación) [9, 10].

Las extremidades inferiores del cuerpo humano son las principales responsables de pararse, mantener el equilibrio y caminar. Los requisitos de estas funciones son los mismos en los robots bípedos. Los robots bípedos están diseñados y controlados por el principio de imitar de forma realista a las personas, como resultado, los robots bípedos y las tecnologías relacionadas, como el control de estabilidad y la planificación del movimiento, pueden aplicarse en el entrenamiento de rehabilitación de miembros inferiores humanos y en la caminata asistida. La aplicación de la tecnología de robot bípedo al entrenamiento humano en rehabilitación de miembros inferiores es limitada.

La mayoría de los robots de exoesqueleto bipedal todavía están en las etapas iniciales de desarrollo. Sin embargo, los logros técnicos de los robots bípedos han contribuido al desarrollo de robots de rehabilitación de miembros inferiores, en particular para la planificación de la marcha, el control de estabilidad y las aplicaciones de sensores. Por supuesto, un nuevo examen del enfoque teórico ayuda a mejorar los robots. Sin embargo, los robots bípedos y los robots de rehabilitación no pueden equipararse. Para los robots de rehabilitación, los seres humanos pueden actuar como un enlace en el control, mientras que la tecnología de robot bípedo existente a menudo no considera este aspecto. Por lo tanto, es necesario desarrollar y mejorar el esquema de control desde la perspectiva única del robot de rehabilitación.

En general, la tecnología de robot bípedo tiene un gran volumen de material de referencia para robots de rehabilitación de miembros inferiores. Independientemente del tipo de robot de rehabilitación de la extremidad inferior, todos utilizan la teoría del control del robot bípedo, especialmente para el control de la estabilidad y la planificación de la marcha [3].

1.3. El escenario en México

La historia de la rehabilitación en México se remonta a la creación de la Escuela Nacional para Ciegos y Deficientes Visuales a finales del siglo XIX. Durante el siglo XX hubo avances significativos en la atención a las personas con discapacidad, en la que participaron instituciones de salud del país, incluyendo hospitales como el General de México, el Juárez de la Ciudad de México, el Infantil de México, el Hospital Colonia, el Hospital Central Militar, etc., y la participación del Sistema Nacional para el Desarrollo Integral de la Familia (DIF), el Instituto Nacional de Rehabilitación (INR) y las instituciones pertenecientes a la seguridad social como el Instituto Mexicano del Seguro Social (IMSS) y el Instituto de Seguridad y Servicios Sociales de los Trabajadores del Estado (ISSSTE); además, de la participación de instituciones de asistencia privada como la Asociación Pro Personas con Parálisis Cerebral (APAC) y los Centros de Rehabilitación Infantil Teletón (CRIT). Asimismo, se establecieron en todo el país programas de formación técnica y de posgrado en Medicina Física y Rehabilitación [14].

De acuerdo con información reciente de la Encuesta Nacional de Ingresos y Gastos de los Hogares (ENIGH), publicada por el Instituto Nacional de Estadística y Geografía (INEGI) 2014, se estimó que el 6.4% de la población del país (7.65 millones de personas) reportaron tener al menos una discapacidad, las cuales representan en su mayoría a personas adultas mayores que contaban con 60 años o más (52.1% del total de las personas con discapacidad, es decir 3.98 millones de personas).

Las tres principales discapacidades son la motriz (56.1 %), la visual (32.7 %) y la auditiva (18.3 %), Figura 1.11 [15].

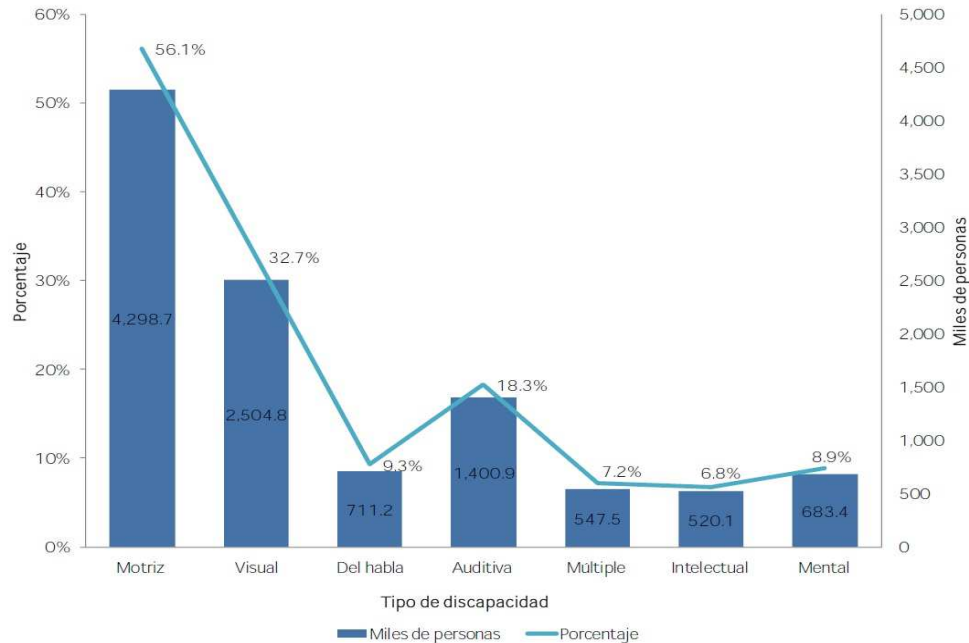


Figura 1.11: PCD por tipo de discapacidad, 2014.

Dentro de las ayudas técnicas a las que las personas con discapacidad motriz recurrieron con mayor frecuencia se encuentran el bastón, la silla de ruedas, la andadera y en último término muletas. Por otro lado, los equipos de prótesis más utilizados como ayudas técnicas que permiten incrementar el desempeño de las personas con discapacidad son las prótesis de pie, pierna o rodilla (18 %); de cadera (12 %); de mano, dedos o brazo (4 %); ocular (1 %) u otro tipo de prótesis (3 %). Además, los equipos de **ortesis** más utilizados son el bastón (9 %), aparatos auditivos (9 %), aparatos ortopédicos (7 %) y otros tipos de prótesis (8 %), Figura 1.12 [15].

Recientemente, la comunidad de investigadores de centros de investigación e instituciones de educación superior han mostrado un interés creciente en el desarrollo de aplicaciones enfocadas a procesos de terapia de rehabilitación y desarrollo de nuevas tecnologías en prótesis y **ortesis**, con el propósito de proporcionar productos de calidad y bajos costos para el alcance de las personas que lo requieran. Existen proyectos en desarrollo en todo el país orientados al tratamiento de la discapacidad en las extremidades inferiores, entre ellos se encuentran dos proyectos que ya están disponibles para el uso del paciente. En 2016, académicos y egresados de la carrera en Ingeniería Mecatrónica de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM) crearon un exoesqueleto para auxiliar discapacitados por lesión medular completa o quienes presenten dificultad para mover sus piernas, Figura 1.13.

El sistema permite a los usuarios tener **flexión, extensión, abducción y aducción** de la cadera, así como flexión y extensión de rodilla y tobillos. Para el diseño del funcionamiento del modelo se recibió asesoría del **Laboratorio de Análisis del Movimiento del Instituto Nacional de Rehabilitación (INR)**. Su costo es considerablemente bajo en comparación a otros comerciales que existen actualmente. El funcionamiento del exoesqueleto es apoyado por dos bastones que tienen un display, en

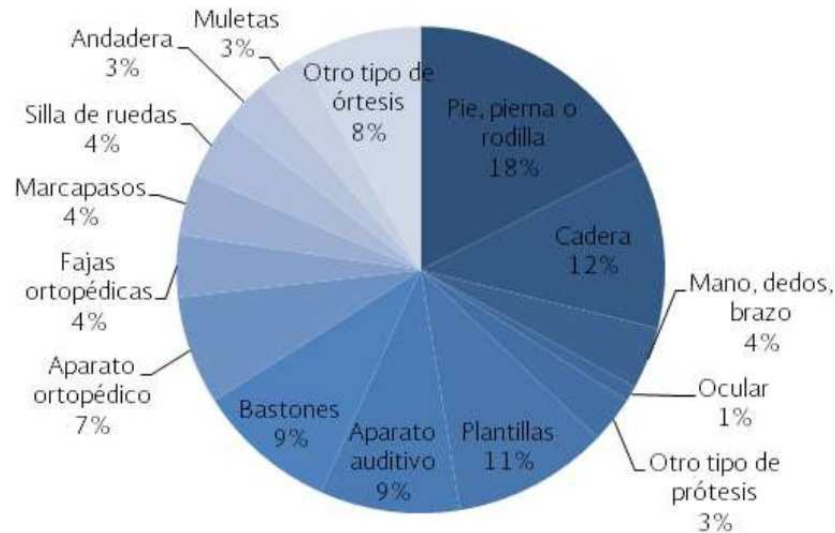


Figura 1.12: Prótesis y ortesis.

el que el paciente elige la actividad a efectuar, además de darle soporte, y utiliza pilas que permiten la autonomía durante dos horas. El uso debe ser validado por un médico, quien determina los movimientos y la velocidad de los mismos, así como el tiempo para poder utilizarlo.

El objetivo del exoesqueleto es que pueda ser utilizado en primera instancia en terapias y tratamiento de rehabilitación en instalaciones de salud y para el uso en hogares o espacios abiertos. Actualmente trabajan para hacerlo más ligero, a partir de cambiar las piezas de aluminio por otras de fibra de carbono. Además, se busca que la caminata del paciente pueda ser más suave, que le permita efectuar movimientos laterales y dar vueltas mientras camina [16,17].

Científicos del Instituto Politécnico Nacional (IPN) diseñaron y construyeron un exoesqueleto original como instrumento para ayudar a la rehabilitación de personas con lesiones medulares o lesiones en las extremidades inferiores del cuerpo, figura 1.14. El producto generado ya se utiliza en el Hospital General La Villa de la Delegación Gustavo A. Madero desde principios del 2018. La tecnología fue desarrollada por profesores y estudiantes de tres unidades del Politécnico: el **Centro de Innovación y Desarrollo Tecnológico en Computo (Cidetec)**, la **Unidad Profesional Interdisciplinaria de Ingeniería y Tecnologías Avanzadas (UPIITA)** y la **Unidad Profesional Interdisciplinaria de Biotecnología (Upibi)**. El exoesqueleto se mueve en el plano frontal y permite mover articulaciones como cadera, rodilla y tobillo de manera independiente. Cuenta con 11 grados de libertad y ejecuta al menos 10 terapias de tratamiento definidas por trayectorias de referencia en cada articulación, las cuales pueden ser programadas mediante el empleo de una interfaz gráfica de usuario. Da soporte y ajuste a las piernas del paciente con un sistema de presión basado en bolsas, de este modo sujeta toda la pierna lo cual permite que un paciente con problemas de equilibrio o de soporte se sienta más seguro cuando este colocado en el dispositivo. Con este nuevo aparato podría atenderse entre 15 mil y 20 mil pacientes, de los que se calcula que, sólo en la Ciudad de México, al menos 100 mil pacientes requieren rehabilitación por lesiones en columna al año [18].

La discapacidad forma parte de la propia condición humana, por lo que existe una alta probabilidad de que cualquier persona sufra de algún tipo de discapacidad ya sea temporal o permanente en algún momento de su vida. Esta probabilidad aumenta conforme la edad de la persona avanza por ello una elevada proporción de personas adultas mayores enfrentan alguna discapacidad. Asimismo, dado el envejecimiento poblacional del país es probable que aumente el número de personas con discapacidad. Las causas de la discapacidad pueden cambiar a lo largo de la vida de las personas, a menor edad las razones principales de la discapacidad son por nacimiento o enfermedad, mientras que a mayor edad se asocia la causa de edad avanzada y enfermedad. Las personas con discapacidad sufren un bajo desarrollo humano para una vida independiente, insuficiente desarrollo económico debido a una baja participación en el mercado laboral, limitada atención de los servicios de salud y desafortunadamente elevados episodios de discriminación [15].

1.4. Conclusiones

El desarrollo de robots bípedos ha sido un campo con alto interés en las últimas décadas en todo el mundo, por años este campo ha demostrado ser un terreno de amplias expectativas y futuras aplicaciones para estos sistemas. El entender cómo y porqué se comporta el sistema de marcha original en el cuerpo humano, ha llevado a progresar los sistemas robóticos bípedos así como contribuciones técnicas de la ingeniería en el desarrollo de instrumentos científicos para el areas de la salud.

Actualmente existen robots bípedos que imitan la marcha humana a un nivel impresionante a través de terrenos irregulares como nos lo ha demostrado Boston Dynamics, pero aun existe una enorme brecha en igualar esta locomoción implantada en los robots con la original. Es un campo que necesita la intervención de expertos en sistemas mecánicos, electrónicos, materiales, control y computación avanzada como la inteligencia artificial y procesamiento de imágenes. Así como una fuente de información por parte de estudios de la medicina como la neurociencia, y medicina física y rehabilitación.

La creación de campos de estudios especializados como las ciencias e ingeniería en Biomédicas ha culminado la aplicación de diferentes campos de ciencias exactas hacia el área de salud, con el propósito de mejorar los resultados en estudios de investigación, tratamiento de enfermedades y discapacidades de los pacientes, así como herramientas para mejorar el proceso de diagnóstico.

En México se ha incrementado investigaciones en las aéreas de robótica bípeda y biomédica en los últimos años, son pocos los proyectos que han logrado una aplicación clínica y un futuro proceso de comercialización, pero las investigaciones aun en desarrollo, se consideran como fuente importante de experiencia y conocimiento para las presentes y futuras generaciones de investigadores.



(a) *Exoesqueleto*



(b) *Uso del exoesqueleto*

Figura 1.13: Exoesqueleto auxiliar creado por UNAM



Figura 1.14: Sistema de rehabilitación por IPN.

Capítulo 2

Conceptos preliminares

En el actual capítulo se presentan las bases fundamentales para el análisis y la interpretación del sistema a simular, a través de sus modelos matemáticos, la ley de control, el método para la generación de trayectorias y finalizando con un breve estudio sobre el movimiento de la marcha humana.

2.1. Cinemática

La cinemática se interesa por la descripción analítica del movimiento espacial del robot como una función del tiempo, y en particular por las relaciones entre la posición y orientación del extremo final del robot y los valores que toman sus coordenadas articulares. Existen dos problemas fundamentales a resolver en la cinemática del robot: uno es el que se conoce como el *problema cinemático directo*, que consiste en determinar cuál es la posición y orientación del extremo final del robot con respecto a un sistema de coordenadas que se toma como referencia, conocidos los valores de las articulaciones y los parámetros geométricos de los elementos del robot; el segundo, denominado *problema cinemático inverso*, resuelve la configuración que debe adoptar el robot para una posición y orientación del extremo conocido [19]. Para fines específicos de esta tesis, la cinemática a resolver para el sistema bípedo será únicamente la cinemática directa.

2.1.1. Cinemática directa

La cinemática directa de un robot determina la configuración del efector final dando las configuraciones relativas de cada par de eslabones unidos del robot. El álgebra lineal se utiliza fundamentalmente para representar y describir la localización de un objeto en el espacio tridimensional con respecto a un sistema de referencia fijo. Dado que un robot manipulador se puede considerar como una cadena cinemática formada por objetos rígidos o eslabones unidos entre sí mediante articulaciones, se puede establecer un sistema de referencia fijo situado en la base del robot y describir la localización de cada uno de los eslabones con respecto a dicho sistema de referencia. De esta forma, el problema cinemático directo se reduce a encontrar una matriz de transformación homogénea que relacione la posición y orientación del extremo del robot respecto del sistema de referencia fijo situado en la base del mismo. Esta matriz será función de las coordenadas articulares [19].

En robótica, la forma habitual para describir la relación que existe entre dos eslabones contiguos, es la representación de Denavit–Hartenberg (D–H), un método matricial que permite establecer de manera sistemática un sistema de coordenadas $\{S_i\}$ ligado a cada eslabón i de una cadena articulada, pudiéndose determinar a continuación las ecuaciones cinemáticas de la cadena completa. Según la representación de D–H, escogiendo adecuadamente los sistemas de coordenadas asociados a cada eslabón, será posible pasar de uno al siguiente mediante 4 transformaciones básicas que dependen exclusivamente de las características geométricas del eslabón. Estas transformaciones básicas consisten en una sucesión de rotaciones y traslaciones que permiten relacionar el sistema de referencia del elemento i con el sistema del elemento $i - 1$. Las transformaciones en cuestión son las siguientes [19]:

1. Rotación alrededor del eje z_{i-1} un ángulo θ_i .
2. Traslación a lo largo de z_{i-1} una distancia d_i ; vector $d_i (0, 0, d_i)$.
3. Traslación a la largo de x_i una distancia a_i ; vector $a_i (0, 0, a_i)$.
4. Rotación alrededor del eje x_i un ángulo α_i .

Dado que el producto de matrices no es conmutativo, las transformaciones se han de realizar en el orden indicado. De este modo se tiene que [19]:

$${}^{i-1}A_i = T(z, \theta_i) T(0, 0, d_i) T(a_i, 0, 0) T(x, \alpha_i) \quad (2.1)$$

y realizando el producto entre matrices, entonces:

$${}^{i-1}A_i = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & -\cos(\alpha_i)\sin(\theta_i) & \sin(\alpha_i)\sin(\theta_i) & a_i\cos(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\alpha_i)\cos(\theta_i) & -\sin(\alpha_i)\cos(\theta_i) & a_i\sin(\theta_i) \\ 0 & \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

donde $\theta_i, a_i, d_i, \alpha_i$ son los parámetros D–H del i -ésimo eslabón. De este modo, basta con identificar los parámetros para obtener las matrices A y relacionar así todos y cada uno de los eslabones del robot [19]. Los cuatro parámetros de D–H dependen únicamente de las características geométricas de cada eslabón y de las articulaciones que le unen con el anterior y siguiente. En concreto estos representan (Figura 2.1) [19]:

- θ_i es el ángulo que forman los ejes x_{i-1} y x_i medido en un plano perpendicular al eje z_{i-1} , utilizando la regla de la mano derecha. Se trata de un parámetro variable en articulaciones giratorias [19].
- d_i es la distancia a lo largo del eje z_{i-1} desde el origen del sistema de coordenadas $(i - 1)$ -ésimo hasta la intersección del eje z_{i-1} con el eje x_i . Se trata de un parámetro variable en articulaciones prismáticas [19].

- a_i es la distancia a lo largo del eje x_i que va desde la intersección del eje z_{i-1} con el eje x_i hasta el origen del sistema i -ésimo, en el caso de articulaciones giratorias. En el caso de articulaciones prismáticas, se calcula como una distancia más corta entre los ejes z_{i-1} y z_i [19].
- α_i es el ángulo de separación del eje z_{i-1} y el eje z_i , medido en un plano perpendicular al eje x_i , utilizando la regla de la mano derecha [19].

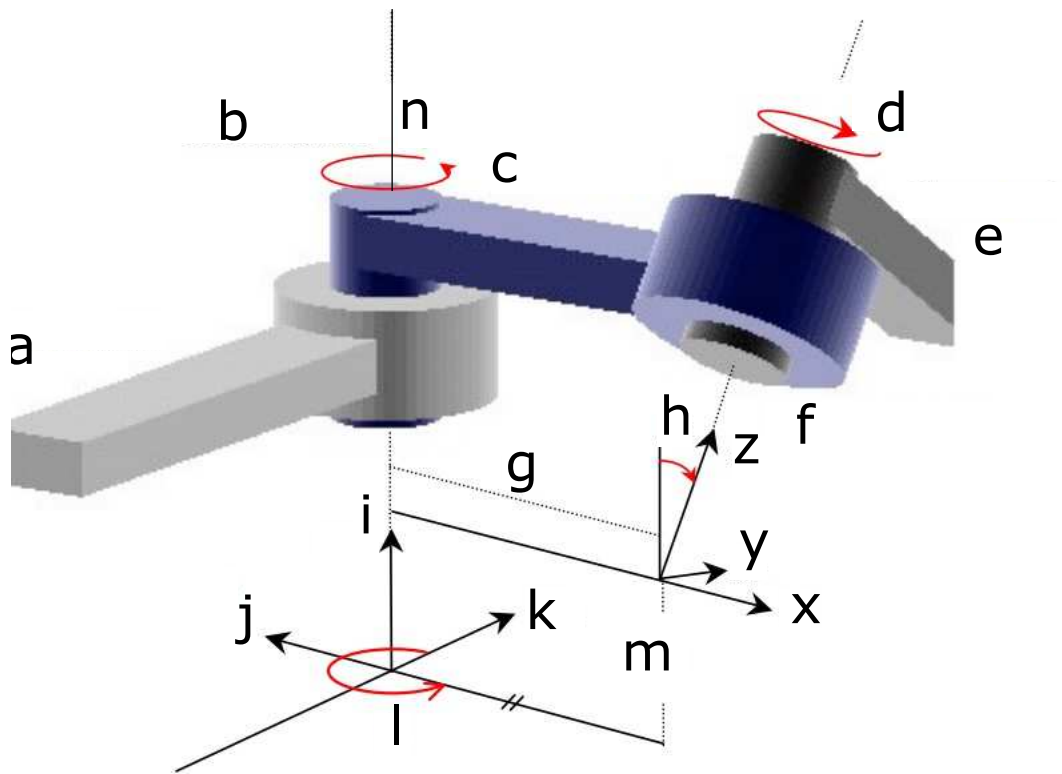


Figura 2.1: Parámetros D-H para un eslabón giratorio.

Una vez obtenidos los parámetros de D-H, el cálculo de las relaciones entre los eslabones consecutivos del robot es inmediato, ya que viene dadas por las matrices A , que se calculan según la expresión general, ecuación (2.2) [19].

Las relaciones entre eslabones no consecutivos vienen dadas por las matrices T que se obtienen como producto de un conjunto de matrices A . Así, se puede calcular la matriz T que indica la localización del sistema asociado al extremo del robot con respecto al sistema de referencia de la base del robot [19]:

$${}^0T_i = {}^0A_1 {}^1A_2 \dots {}^{i-1}A_i \quad \text{donde } i = 1, 2, \dots, n \quad (2.3)$$

La matriz $T \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ expresará la rotación y la traslación del extremo final del robot en función de sus coordenadas articulares, con lo que quedará resuelto el problema cinemático directo. En general, una matriz de transformación homogénea $T \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ se compone de cuatro submatrices [19, 20]:

$$T = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{3 \times 3} & \mathbf{p}_{3 \times 1} \\ \mathbf{f}_{1 \times 3} & \omega_{1 \times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{matriz de rotación} & \text{vector de posición} \\ \text{transformación de perspectiva} & \text{escalado} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

La submatriz $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ representa la matriz de rotación; $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ representa el vector de posición del origen del sistema de coordenadas rotado con respecto al sistema de referencia; $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^{1 \times 3}$ representa la transformación de perspectiva; y $\omega \in \mathbb{R}$ es el factor de escala global [20]. Si el manipulador se relaciona a un sistema de coordenadas de referencia mediante una transformación \mathbf{B} y tiene una herramienta unida a la base de montaje de la última articulación descrita por \mathbf{H} , entonces el punto final de la herramienta se puede relacionar con el sistema de coordenadas de referencia multiplicando las matrices \mathbf{B} , 0T_i y \mathbf{H} juntas como [20]:

$${}^{ref}T_{herr} = \mathbf{B}^0T_i\mathbf{H} \quad (2.5)$$

Obsérvese que $\mathbf{H} \equiv {}^iH_{herr}$ y $\mathbf{B} \equiv {}^{ref}H_0$ [20].

2.2. Modelo Dinámico

Los robots manipuladores son sistemas mecánicos articulados por eslabones conectados entre sí a través de uniones o articulaciones. Las articulaciones son básicamente de dos tipos: rotacionales y traslacionales [21]. Tradicionalmente, se coloca un marco de referencia cartesiano de tres dimensiones en cualquier lugar de la base del robot, y los eslabones se enumeran consecutivamente desde la base (Eslabón 0) hasta el final (Eslabón n). Las uniones son los puntos de contacto entre los eslabones y se numeran de tal forma que la unión i conecta los eslabones i e $i - 1$ [21]. Cada unión se controla independientemente a través de un accionador, que se coloca generalmente en dicha unión, y el movimiento de las uniones produce el movimiento relativo de los eslabones. Aquí se denotará temporalmente por z_i , al eje de movimiento de la unión i . La coordenada articular generalizada denotada por q_i es el desplazamiento angular alrededor de z_i si la unión i es rotacional, o el desplazamiento lineal sobre z_i si la unión i es traslacional. En el caso típico donde los accionadores se localizan en las uniones entre eslabones, las coordenadas articulares generalizadas reciben el nombre de *posiciones articulares*. A menos que se indique lo contrario, aquí se supondrá que éste es el caso [21]. Las posiciones articulares correspondientes a cada articulación del robot, que se miden por medio de sensores colocados en los accionadores localizados generalmente justo en las articulaciones, se agrupan para propósitos de análisis en el vector de posiciones articulares \mathbf{q} . En consecuencia, para un robot con n articulaciones, es decir, de n grados de libertad, el vector de posiciones articulares \mathbf{q} tendrán n elementos [21]:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

Entonces, el *modelo cinemático directo* de un robot, describe la relación entre la posición articular q y la posición y orientación x del dispositivo terminal del robot. En otras palabras, el modelo cinemático directo de un robot es una relación de la forma [21]:

$$x = f(q) \quad (2.7)$$

La obtención del modelo cinemático directo $x = f(q)$, aunque laboriosa, es metódica, y en el caso de robots de escasos grados de libertad, involucra sencillas expresiones trigonométricas [21]. El *modelo dinámico* de un robot consiste en una ecuación diferencial (ordinaria) vectorial en las posiciones, ya sean articulares q o cartesianas x , generalmente de segundo orden, pudiéndose expresar como [21]:

$$f(q, \dot{q}, \ddot{q}, \tau) = 0 \quad (2.8)$$

$$f(x, \dot{x}, \ddot{x}, \tau) = 0 \quad (2.9)$$

donde (2.8) y (2.9) no es la misma, ni tampoco debe ser confundida con la relación $f(q)$ del modelo cinemático directo y, finalmente, τ denota al vector de pares y fuerzas aplicadas en las articulaciones por medio de los accionadores. El modelo dinámico (2.8) recibe el nombre de modelo dinámico articular, mientras que (2.9) es el modelo dinámico cartesiano. En este texto, sólo se considerará el *modelo dinámico articular*, y se omitirá por simplicidad, el vocablo *articular* [21].

Uno de los procedimientos más empleados para la obtención de los modelos dinámicos de los robots manipuladores, en forma cerrada, es el basado en las ecuaciones de movimiento de Lagrange. El empleo de las ecuaciones de Lagrange para el modelado, requiere la noción de dos conceptos importantes [21]:

- *Energía cinética* está definida como el trabajo necesario para acelerar una partícula de una masa dada desde su posición de equilibrio hasta una velocidad deseada. Sólo depende de la masa y la rapidez de la partícula, no de su dirección de movimiento. La energía cinética nunca puede ser negativa, y es cero sólo si la partícula está en reposo. La suma de la energía de traslación más la energía de rotación cuya representación matemática es [22]:

$$\mathcal{K}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\dot{q}^2 \quad (2.10)$$

donde m es la masa de la partícula, v es la velocidad de la partícula, I es el momentum de inercia de la partícula y q es la distancia angular de la partícula.

- *Energía potencial gravitacional* es la energía que una partícula tiene debido a su posición en el espacio, no a su movimiento [22]. Cuya ecuación es:

$$\mathcal{U}(q) = mgh \quad (2.11)$$

donde m es la masa de la partícula, g es la fuerza de gravitatoria y h es la altura.

2.2.1. Ecuaciones de movimiento de Lagrange

La energía total \mathcal{E} de un robot manipulador de n grados de libertad es la suma de sus energías cinética $\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ y potencial $\mathcal{U}(\mathbf{q})$ [21]:

$$\mathcal{E}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) = \mathcal{K}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) + \mathcal{U}(\mathbf{q}(t)) \quad (2.12)$$

donde $\mathbf{q}(t) = [q_1(t), \dots, q_n(t)]^T$. El *Lagrangiano* $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ de un robot manipulador de n grados de libertad es la diferencia entre su energía cinética $\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ y su energía potencial $\mathcal{U}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ [21]:

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) = \mathcal{K}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) - \mathcal{U}(\mathbf{q}(t)) \quad (2.13)$$

Aquí se considera que la energía potencial $\mathcal{U}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ se debe a fuerzas conservativas como la fuerza de gravedad y a fuerzas de resortes. Las ecuaciones de movimiento de Lagrange para un manipulador de n grados de libertad, vienen dadas por [21]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial (\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}))}{\partial (\dot{\mathbf{q}})} \right] - \frac{\partial (\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}))}{\partial (\mathbf{q})} = \boldsymbol{\tau} \quad (2.14)$$

o de forma equivalente

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial (\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}))}{\partial (\dot{q}_i)} \right] - \frac{\partial (\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}))}{\partial (q_i)} = \tau_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.15)$$

donde τ_i son las fuerzas y pares ejercidos externamente (por accionadores) en cada articulación así como fuerzas no conservativas. Como fuerzas no conservativas se incluyen las de fricción, las de resistencia al movimiento de un objeto dentro de un fluido, y en general las que dependen del tiempo o de la velocidad [21]. Nótese que se tendrán tantas ecuaciones escalares dinámicas como grados de libertad tenga el robot manipulador [21]. El uso de las ecuaciones de Lagrange para el modelado dinámico de manipuladores se reduce a cuatro etapas [21]:

- E1. Cálculo de la energía cinética: $\mathcal{K}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))$
- E2. Cálculo de la energía potencial: $\mathcal{U}(\mathbf{q}(t))$
- E3. Cálculo del lagrangiano (2.13): $\mathcal{L}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))$
- E4. Desarrollo de las ecuaciones de Lagrange (2.15).

2.2.2. Modelo dinámico de robots

La misma metodología que se usa en la aplicación de las ecuaciones de Lagrange para obtener las ecuaciones dinámicas para robots puede emplearse para determinar el modelo dinámico de cualquier robot de n grados de libertad.

El modelo dinámico del robot manipulador, en forma más general, se define como [21,31]:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{f}(\boldsymbol{\tau}, \dot{\mathbf{q}}) + \boldsymbol{\tau}_d = \boldsymbol{\tau} \quad (2.16)$$

donde $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ son el vector de posición, velocidad y aceleración articular del robot, respectivamente, $\mathbf{M}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de Inercias, $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de Coriolis y Fuerza Centrípeta, $\mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es el par gravitacional, $\mathbf{f}(\boldsymbol{\tau}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es el vector de fricción, $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es el par aplicado y $\boldsymbol{\tau}_d \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ representa las perturbaciones externas [31].

Considérese un robot manipulador de n grados de libertad formado por eslabones rígidos, conectados por uniones libres de fricción y elasticidad o algunas otras perturbaciones. La energía cinética $\mathcal{K}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))$ asociada a tal dispositivo mecánico articulado puede expresarse siempre como [21]:

$$\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (2.17)$$

donde $\mathbf{M}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de masas e inercias, la cual es una matriz cuadrada, simétrica y definida positiva. La energía potencial $\mathcal{U}(\mathbf{q})$ no tiene una forma específica como el caso de la energía cinética, pero se sabe que depende del vector de posiciones articulares \mathbf{q} [21]. El Lagrangiano $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, dado por (2.13), es en este caso [21]:

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \mathcal{U}(\mathbf{q}) \quad (2.18)$$

Con esta forma para el lagrangiano, la ecuación de movimiento de Lagrange (2.15) puede expresarse como [21]:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \left[\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \right] \right] - \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left[\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \right] + \frac{\partial \mathcal{U}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} = \boldsymbol{\tau}. \quad (2.19)$$

Por otro lado, puede verificarse que [21]:

$$\frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \left[\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \right] = \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}, \quad (2.20)$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \left[\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \right] \right] = \mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}. \quad (2.21)$$

Considerando las expresiones anteriores, la ecuación de movimiento toma la forma [21]:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left[\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \right] + \frac{\partial \mathcal{U}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} = \boldsymbol{\tau}, \quad (2.22)$$

o de modo compacto

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} \quad (2.23)$$

donde

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left[\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \right], \quad (2.24)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathcal{U}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \quad (2.25)$$

La ecuación dinámica para robots de n grados de libertad es (2.23). Nótese que (2.23) es una ecuación diferencial vectorial no lineal en el estado $[\mathbf{q}^T \ \dot{\mathbf{q}}^T]^T$. $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es el vector de Coriolis y fuerzas centrífugas, $\mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es el vector de fuerzas o pares gravitacionales y $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es el vector de fuerzas o pares aplicados en las articulaciones [21].

El modelo (2.23) puede verse como un sistema dinámico cuya entrada es el vector $\boldsymbol{\tau}$ y sus salidas son los vectores \mathbf{q} y $\dot{\mathbf{q}}$. Esto puede esquematizarse mediante el diagrama de la Figura 2.2 [21].



Figura 2.2: Diagrama de bloques.

Cada elemento de $\mathbf{M}(\mathbf{q})$, $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ y $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ es, en general, una función relativamente compleja de las posiciones y velocidades de todas las articulaciones, es decir, de \mathbf{q} y $\dot{\mathbf{q}}$. Los elementos de $\mathbf{M}(\mathbf{q})$, $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ y $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ dependen, por supuesto, de la geometría del robot que se modela [21]. Nótese que la determinación del vector $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ para un robot dado, puede obtenerse con relativa sencillez ya que viene dado por (2.25). En otras palabras, el vector de pares gravitacionales $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ es simplemente el gradiente de la energía potencial $\mathcal{U}(\mathbf{q})$ [21]. La existencia de la matriz $\mathbf{M}(\mathbf{q})^{-1}$ (ésta existe debido a que $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ es una matriz definida positiva) permite expresar el modelo dinámico (2.23) de un robot de n grados de libertad en términos del vector de estado $[\mathbf{q}^T \ \dot{\mathbf{q}}^T]^T$ de la forma siguiente [21]:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{M}(\mathbf{q})^{-1} [\boldsymbol{\tau}(t) - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{g}(\mathbf{q})] \end{bmatrix}. \quad (2.26)$$

Debido a la naturaleza no lineal del modelo dinámico (2.26) para robots de n grados de libertad, el concepto de estabilidad de un robot en lazo abierto debe manejarse con precaución. La definición de estabilidad en el sentido de Lyapunov (Definición 2.2), es aplicable a un estado de equilibrio, por lo que es indispensable, primero, determinar los estados para (2.26) que describen el comportamiento del robot [21].

La condición necesaria y suficiente para la existencia de puntos de equilibrio para (2.26) es que $\tau(t)$ sea constante y que además exista solución en $s \in \mathbb{R}^n$ para la ecuación algebraica, posiblemente no lineal en s : $g(s) = \tau$. En tal situación los equilibrios vienen dados por $[\dot{q}^T \ q^T]^T = [s^T \ 0^T]^T \in \mathbb{R}^{2n}$. En el caso particular de $\tau \equiv 0$, los posibles equilibrios de (2.26) vendrían dados por $[\dot{q}^T \ q^T]^T = [s^T \ 0^T]^T$ donde s sería solución de $g(s) = 0$. Dada la definición de $g(q)$ como el gradiente de la energía potencial $\mathcal{U}(q)$, luego s corresponde a los vectores donde la energía potencial posee puntos extremos [21].

2.2.3. Modelo dinámico de robots con accionadores

En un robot manipulador real, el vector de pares τ es suministrado por accionadores que tradicionalmente son de tipo electromecánico, neumático o hidráulico. Dichos accionadores relacionan dinámicamente el par o fuerza suministrado con la entrada de dicho accionador. Esta entrada puede ser un voltaje o corriente para el caso de accionadores electromecánicos, y flujo o presión de aceite para accionadores hidráulicos. La Figura 2.3 muestra el esquema de un manipulador de 2 grados de libertad, en donde los accionadores transmiten el movimiento a través de engranes [21].

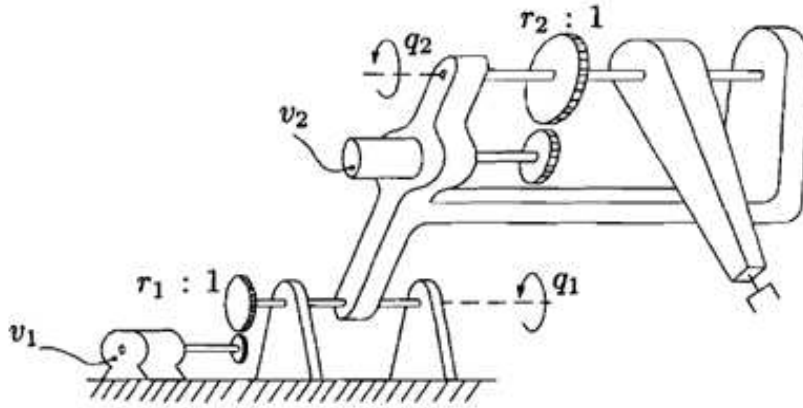


Figura 2.3: Robot de 2 grados de libertad

2.2.3.1. Accionadores con dinámica lineal

En ocasiones, cierto tipo de accionadores electromecánicos pueden modelarse satisfactoriamente mediante ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden. Un caso común es aquél donde los accionadores son motores de Corriente Continua (CC). El modelo dinámico relaciona el voltaje v aplicado a la armadura del motor con el par τ suministrado por dicho motor. Un modelo dinámico lineal simplificado de un motor de CC con inductancia de armadura despreciable como el mostrado en la Figura 2.4, viene dado por la siguiente ecuación [21]:

$$J_m \ddot{q} + f_m \dot{q} + \frac{K_a K_b}{R_a} \dot{q} + \frac{1}{r^2} \tau = \frac{K_a}{r R_a} v \quad (2.27)$$

donde J_m inercia del robot [$kg \ m^2$], K_a constante motor-par [$N \ m/A$], R_a resistencia de armadura [Ω], K_b constante de contra reacción electromotriz [$V \ s/rad$], f_m coeficiente de fricción del ro-

tor con sus soportes $[N m]$, τ par neto aplicado después del juego de engranes sobre el eje de la carga $[N m]$, q posición angular del eje de la carga $[rad]$, r relación de reducción de los engranes (en general $r \gg 1$) y v voltaje de armadura $[V]$.

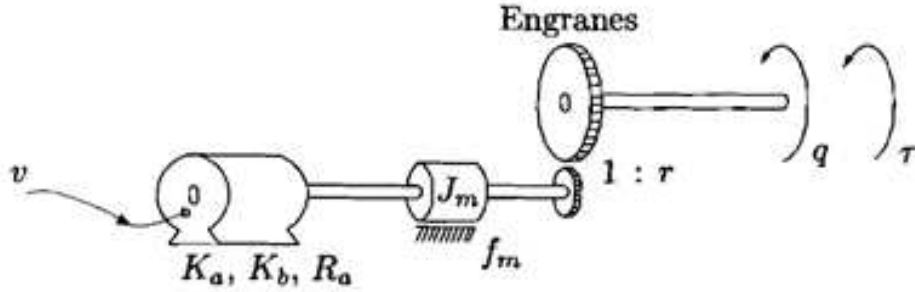


Figura 2.4: Motor de CC.

La ecuación (2.27) relaciona el voltaje v aplicado a la armadura del motor con el par τ aplicado a la carga en términos de su posición, velocidad y aceleración angular [21].

Considerando que cada uno de los accionadores de las n articulaciones es un motor de CC, de la ecuación (2.27) se obtiene [21]:

$$J\ddot{q} + B\dot{q} + R\tau = Kv \quad (2.28)$$

donde

$$J = \text{diag} \{J_{m_i}\}, \quad (2.29)$$

$$B = \text{diag} \left\{ f_{m_i} + \left(\frac{K_a K_b}{R_a} \right)_i \right\}, \quad (2.30)$$

$$R = \text{diag} \left\{ \frac{1}{r_i^2} \right\} \quad (2.31)$$

$$K = \text{diag} \left\{ \left(\frac{K_a}{R_a} \right)_i \frac{1}{r_i} \right\}, \quad (2.32)$$

donde para cada motor ($i = 1, \dots, n$), J_{m_i} es la inercia del rotor, f_{m_i} el coeficiente de amortiguamiento, $(K_a K_b / R_a)_i$ es una constante electromecánica y r_i es la tasa de reducción del juego de engranes [21].

El modelo dinámico completo de un manipulador (sin considerar la fricción en las articulaciones) cuyos accionadores se localizan en las articulaciones se obtiene reemplazando τ de (2.28) en (2.23) [21]:

$$[RM(q) + J]\ddot{q} + RC(q, \dot{q})\dot{q} + Rg(q) + B\dot{q} = Kv \quad (2.33)$$

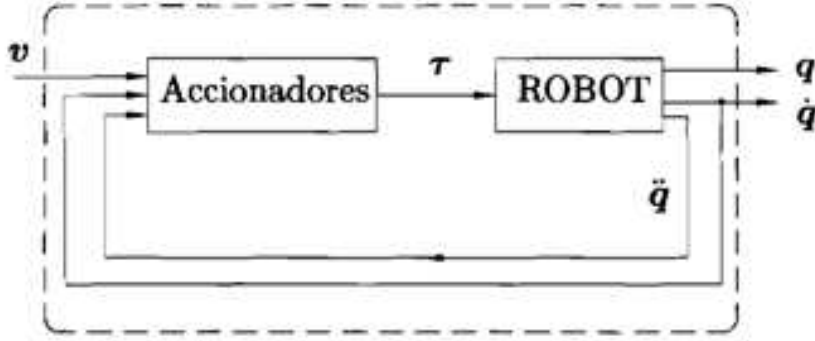


Figura 2.5: Robot-acionadores.

La ecuación anterior puede verse como un sistema dinámico cuya entrada es v y sus salidas son q y \dot{q} . Un diagrama de bloques del modelo (2.33) del manipulador y sus accionadores es mostrado en la Figura 2.5 [21].

La ecuación robot-acionadores (2.33) se simplifica considerablemente cuando las relaciones de engranes r_i son suficientemente grandes. En dicho caso ($r_i \gg 1$), se tiene $R \approx \mathbf{0}$ y la ecuación (2.33) puede aproximarse por [21]:

$$J\ddot{q} + B\dot{q} \approx Kv \quad (2.34)$$

es decir, la dinámica no lineal del robot puede despreciarse. Lo expuesto anteriormente puede resumirse de la siguiente manera. Si la relación de reducción por el juego de engranes es elevada, entonces la dinámica asociada al modelo robot-acionadores se describe sólo por la dinámica de los accionadores. Éste es el argumento principal que fundamenta la idea de que un buen controlador de accionadores es adecuado para el control de robots provisto de dichos accionadores, y cuyo movimiento es transmitido a través de engranes de elevada reducción [21].

Es importante resaltar que los parámetros involucrados en la ecuación (2.28), dependen exclusivamente de los accionadores, y no del manipulador ni de su carga. Entonces, es razonable suponer conocidos y constantes dichos parámetros [21].

Como la relación de engranes r_i se supone no nula, entonces la matriz R dada por (2.31) es no singular por lo que R^{-1} existe y la ecuación (2.33) puede escribirse como [21,24]:

$$M'(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) + R^{-1}B\dot{q} = R^{-1}Kv \quad (2.35)$$

donde $M'(q) = M(q) + R^{-1}J$.

La existencia de la matriz $M'(q)^{-1}$ permite expresar el modelo (2.35) en términos del vector de estado $\begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix}$ como [21]:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ M'(q)^{-1} [R^{-1}Kv - R^{-1}B\dot{q} - C(q, \dot{q})\dot{q} - g(q)] \end{bmatrix}. \quad (2.36)$$

El problema de control de movimiento en estas condiciones consiste en: dado un conjunto de vectores acotados q_d , \dot{q}_d y \ddot{q}_d determinar un vector de voltajes v a suministrar a los motores, de tal forma que las posiciones q asociadas a las coordenadas articulares del robot, sigan con precisión a q_d [21].

2.3. Propiedades de las matrices

En esta sección se exponen algunas de las propiedades básicas del modelo dinámico para robots de n grados de libertad. Caracterizado mediante la ecuación (2.23) [21]:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau. \quad (2.37)$$

A pesar de la complejidad de la ecuación dinámica (2.37) que gobierna el comportamiento de los robots manipuladores, esta ecuación y los términos que la forman poseen propiedades que resultan de interés por sí mismas. Además, dichas propiedades son de particular valía en el estudio de sistemas de control para robots manipuladores [21]. Las propiedades son:

- Linealidad en los parámetros dinámicos.
- Matriz de inercia $M(q)$.
- Matriz centrífuga y de Coriolis $C(q, \dot{q})$.
- Vector de gravedad $g(q)$.
- Dinámica residual.

2.3.1. Linealidad en los parámetros dinámicos

Una particularidad importante de la ecuación dinámica (2.37), que entre paréntesis es no lineal en el vector de estado $[q^T \dot{q}^T]^T$, es que puede expresarse en términos lineales de los parámetros dinámicos del robot, por ejemplo de las masas e inercias. Esta característica es básica para el análisis de controladores adaptables. Esta propiedad se formaliza de la siguiente manera [21].

Propiedad 1. [21] *Linealidad en términos de los parámetros dinámicos.* Considérese las matrices $M(q)$, $C(q, \dot{q})$ y el vector $g(q)$ del modelo dinámico (2.37). Se tienen las siguientes propiedades:

P1. Para todo $u, v, w \in \mathbb{R}^n$:

$$M(q)u + C(q, w)v + g(q) = \Phi(q, u, v, w)\theta + \kappa(q, u, v, w) \quad (2.38)$$

donde $\kappa(q, u, v, w) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $\Phi(q, u, v, w) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ y el vector $\theta \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ depende exclusivamente de los parámetros dinámicos del manipulador y de su carga.

P2. si $q, u, v, w \in \mathcal{L}_\infty^n$ entonces $\Phi(q, u, v, w) \in \mathcal{L}_\infty^{n \times m}$:



Conviene resaltar que siempre es posible encontrar un vector $\theta \in \mathbb{R}^m$ para el cual $\kappa(q, u, v, w) \equiv \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$. Considerando esto y tomando $u = \ddot{q}$ y $v = w = \dot{q}$, la ecuación (2.37) puede entonces escribirse como [21]:

$$Y(q, \dot{q}, \ddot{q}) \theta = M(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + g(q) = \tau \quad (2.39)$$

donde $Y(q, \dot{q}, \ddot{q}) = \Phi(q, \ddot{q}, \dot{q}, \dot{q}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$, y $\theta \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ que contiene las m constantes dependientes de los parámetros dinámicos. La constante n es evidentemente el número de grados de libertad, mientras que el valor entero m depende de la selección de los parámetros dinámicos del robot [21].

A partir de la **Propiedad 1**, puede demostrarse que el modelo dinámico de robots con accionadores (lineales) descrito por la ecuación (2.35) satisface también una relación de linealidad en términos de los parámetros dinámicos del robot así como de las constantes de los accionadores. Específicamente, para todo $q, \dot{q}, \ddot{q} \in \mathbb{R}^n$ se tiene [21]:

$$\begin{aligned} \Omega(q, \dot{q}, \ddot{q}) \theta &= K^{-1} (RM(q) + J) \ddot{q} + K^{-1} RC(q, \dot{q}) \dot{q} \\ &\quad + K^{-1} Rg(q) + K^{-1} Rf(\dot{q}) + K^{-1} B\dot{q}, \\ &= v \end{aligned} \quad (2.40)$$

donde $\Omega(q, \dot{q}, \ddot{q})$ es una matriz de $n \times m$ y θ es un vector de $m \times 1$ que contiene m constantes que dependen de parámetros dinámicos del robot y de los accionadores [21].

2.3.2. Matriz de inercia

La matriz de inercia $M(q)$ juega un papel importante tanto en el modelado dinámico como en el diseño de controladores para robots. En el primer caso, la matriz de inercia se encuentra íntimamente relacionada con la energía cinética $\mathcal{K}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q}$, mientras que en el segundo, se emplean algunas de sus propiedades para el estudio de estabilidad de sistemas de control de robots. Entre dichas propiedades se encuentran las enunciadas a continuación [21].

Propiedad 2. [21] *Matriz de inercia $M(q)$.* La matriz $M(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz cuadrada simétrica definida positiva cuyos elementos son funciones solamente de q . La matriz de inercia $M(q)$ satisface las siguientes propiedades [21]:

P1. Existe una constante real positiva α tal que:

$$M(q) \geq \alpha I \quad \forall q \in \mathbb{R}^n \quad (2.41)$$

donde $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ denota la matriz identidad. La matriz $M(q)^{-1}$ existe y es definida positiva.

P2. Para el caso de robots provistos únicamente de articulaciones rotacionales, existe una constante $\beta > 0$ tal que:

$$\lambda_{\max} \{M(q)\} \leq \beta \quad \forall q \in \mathbb{R}^n. \quad (2.42)$$

Una manera sencilla de calcular β es la dada por:

$$\beta \geq n \left[\max_{i,j,q} |M_{ij}(\mathbf{q})| \right] \quad (2.43)$$

donde $M_{ij}(\mathbf{q})$ denota al ij -ésimo elemento de la matriz $\mathbf{M}(\mathbf{q})$.

P3. Para el caso de robots provistos únicamente de articulaciones rotacionales, existe una constante $k_M > 0$ tal que:

$$\|\mathbf{M}(\mathbf{x})\mathbf{z} - \mathbf{M}(\mathbf{y})\mathbf{z}\| \leq k_M \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \|\mathbf{z}\| \quad (2.44)$$

para todo vector $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$. Una manera sencilla de determinar k_M es:

$$k_M \geq n^2 \left[\max_{i,j,k,q} \left| \frac{\partial M_{ij}(\mathbf{q})}{\partial q_k} \right| \right]. \quad (2.45)$$

P4. Para el caso de robots provistos únicamente de articulaciones, existe una constante $k'_M > 0$ tal que:

$$\|\mathbf{M}(\mathbf{x})\mathbf{y}\| \leq k'_M \|\mathbf{y}\| \quad (2.46)$$

para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

■

Una consecuencia obvia de la **Propiedad 2** y en particular, del hecho de que $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ sea una matriz definida positiva, es que la función $V: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ definida como [21]:

$$V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (2.47)$$

es una función definida positiva en $\dot{\mathbf{q}}$ [21].

2.3.3. Matriz centrífuga y de Coriolis

La importancia de las propiedades de la matriz centrífuga y de Coriolis $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ se hace patente en el estudio de estabilidad de los sistemas de control de robots. Las principales propiedades de dicha matriz se citan a continuación [21].

Propiedad 3. [21] *Matriz de Coriolis $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$.* La matriz de fuerzas centrífugas y de Coriolis $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz de cuyos elementos son funciones de \mathbf{q} y $\dot{\mathbf{q}}$. Además $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ satisface las siguientes propiedades [21]:

P1. La matriz $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ puede no ser única, pero el vector $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}$ es único.

P2. $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$ para todo vector $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$.

P3. Para todo vector $\mathbf{q}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ y escalar α , se tiene que:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{x}) \mathbf{y} &= \mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{y}) \mathbf{x} \\ \mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{z} + \alpha \mathbf{x}) \mathbf{y} &= \mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{z}) \mathbf{y} + \alpha \mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{x}) \mathbf{y}. \end{aligned} \quad (2.48)$$

P4. El vector $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{x}) \mathbf{y}$ puede expresarse en la forma:

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{x}) \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T \mathbf{C}_1(\mathbf{q}) \mathbf{y} \\ \mathbf{x}^T \mathbf{C}_2(\mathbf{q}) \mathbf{y} \\ \vdots \\ \mathbf{x}^T \mathbf{C}_n(\mathbf{q}) \mathbf{y} \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

donde $\mathbf{C}_k(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son matrices simétricas para todo $k = 1, 2, \dots, n$. De hecho, el ij -ésimo elemento $C_{kij}(\mathbf{q})$ de la matriz $\mathbf{C}_k(\mathbf{q})$ corresponde al símbolo de Christoffel $C_{jik}(\mathbf{q})$.

P5. Para el caso de robots provistos únicamente de articulaciones rotacionales, existe una constante $k_{C_1} > 0$ tal que:

$$\|\mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{x}) \mathbf{y}\| \leq k_{C_1} \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \quad (2.50)$$

para todo $\mathbf{q}, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$.

P6. Para el caso de robots provistos únicamente de articulaciones rotacionales, existen constantes $k_{C_1} > 0$ y $k_{C_2} > 0$ tales que:

$$\|\mathbf{C}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \mathbf{w} - \mathbf{C}(\mathbf{y}, \mathbf{v}) \mathbf{w}\| \leq k_{C_1} \|\mathbf{z} - \mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\| + k_{C_2} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \|\mathbf{w}\| \|\mathbf{z}\| \quad (2.51)$$

para todo vector $\mathbf{v}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$.

P7. La matriz $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ está relacionada con la matriz de inercia $\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q})$ por la expresión:

$$\mathbf{x}^T \left[\frac{1}{2} \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right] \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n \times 1} \quad (2.52)$$

y de hecho, $\frac{1}{2} \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ es una matriz antisimétrica. En forma análoga la matriz $\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ es antisimétrica, y también resulta cierto que:

$$\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) = \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T. \quad (2.53)$$

Independientemente de la manera en la que se obtenga $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, ésta siempre satisfará:

$$\dot{\mathbf{q}}^T \left[\frac{1}{2} \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right] \dot{\mathbf{q}} = 0 \quad \forall \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n. \quad (2.54)$$

■

A continuación, se presenta la demostración de la existencia de una constante positiva k_{C_1} , tal que $\|C(\mathbf{q}, \mathbf{x}) \mathbf{y}\| \leq k_{C_1} \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$ para todo vector $\mathbf{q}, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ [21].

Considerando (2.49), la norma $\|C(\mathbf{q}, \mathbf{x}) \mathbf{y}\|^2$ del vector $C(\mathbf{q}, \mathbf{x}) \mathbf{y}$ se define de la forma habitual como la suma de sus elementos al cuadrado [21]:

$$\|C(\mathbf{q}, \mathbf{x}) \mathbf{y}\|^2 = \sum_{k=1}^{n \times 1} \left(\mathbf{x}^T \mathbf{C}_k(\mathbf{q}) \mathbf{y} \right)^2. \quad (2.55)$$

Por lo tanto, esto conduce a la siguiente expresión [21]:

$$\begin{aligned} \|C(\mathbf{q}, \mathbf{x}) \mathbf{y}\|^2 &= \sum_{k=1}^{n \times 1} \left| \mathbf{x}^T \mathbf{C}_k(\mathbf{q}) \mathbf{y} \right|^2, \\ &\leq \left[\sum_{k=1}^{n \times 1} \|\mathbf{C}_k(\mathbf{q})\|^2 \right] \|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{y}\|^2, \end{aligned} \quad (2.56)$$

donde se ha usado el hecho de que para vectores \mathbf{x}, \mathbf{y} y para la matriz cuadrada \mathbf{A} de dimensiones compatibles, se satisface $|\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$ [21]. Teniendo en cuenta que la norma espectral $\|\mathbf{A}\|$ de una matriz simétrica $\mathbf{A} = a_{ij}$ de dimensión n verifica la desigualdad: $\|\mathbf{A}\| \leq n \max_{i,j} \{|a_{ij}|\}$, luego se tiene que [21]:

$$\|\mathbf{C}_k(\mathbf{q})\|^2 \leq n^2 \left[\max_{i,j,q} \left\{ |\mathbf{C}_{kij}(\mathbf{q})| \right\} \right]^2, \quad (2.57)$$

donde $\mathbf{C}_{kij}(\mathbf{q})$ denota el ij -ésimo elemento de la matriz simétrica $\mathbf{C}_k(\mathbf{q})$. Por lo tanto, se llega inmediatamente a [21]:

$$\begin{aligned} \left[\sum_{k=1}^{n \times 1} \|\mathbf{C}_k(\mathbf{q})\|^2 \right] &\leq n^2 \sum_{k=1}^{n \times 1} \left[\max_{i,j,q} \left\{ |\mathbf{C}_{kij}(\mathbf{q})| \right\} \right]^2, \\ &\leq n^3 \left[\max_{k,i,j,q} \left\{ |\mathbf{C}_{kij}(\mathbf{q})| \right\} \right]^2, \\ &\leq n^4 \left[\max_{k,i,j,q} \left\{ |\mathbf{C}_{kij}(\mathbf{q})| \right\} \right]^2, \end{aligned} \quad (2.58)$$

donde se ha usado el hecho de que $n \geq 1$. El último paso de la desigualdad, aunque conservador, se justifica para mantener exponentes enteros. Incorporando esta desigualdad en (2.56) se llega finalmente a la expresión [21]:

$$\|C(\mathbf{q}, \mathbf{x})\| \leq n^2 \left[\max_{k,i,j,q} |\mathbf{C}_{kij}(\mathbf{q})| \right] \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \quad (2.59)$$

donde se identifica claramente la constante k_{C_1} como

$$k_{C_1} = n^2 \left[\max_{k,i,j,q} |C_{kij}(\mathbf{q})| \right]. \quad (2.60)$$

Como aplicación inmediata de la expresión $\|C(\mathbf{q}, \mathbf{x}) \mathbf{y}\| \leq k_{C_1} \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$, se tiene entonces que [21]:

$$\|C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}\| \leq k_{C_1} \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 \quad (2.61)$$

2.3.4. Vector de gravedad

El vector de pares gravitacionales $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ está presente en robots que no han sido diseñados, desde un punto de vista mecánico, con compensación de pares de gravedad, es decir, sin contrapesos o resortes, o para robots destinados a desplazarse fuera del plano horizontal. Algunas de sus propiedades más importantes se citan a continuación [21].

Propiedad 4. [21] *Vector de gravedad $\mathbf{g}(\mathbf{q})$. El vector $\mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ depende sólo de las posiciones articulares \mathbf{q} . El vector $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ está acotado si \mathbf{q} lo está también. Adicionalmente, $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ tiene las siguientes propiedades [21]:*

P1. *El vector $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ y el vector de velocidad $\dot{\mathbf{q}}$ pueden relacionarse mediante:*

$$\int_0^T \mathbf{g}(\mathbf{q})^T \dot{\mathbf{q}} dt = \mathcal{U}(\mathbf{q}(T)) - \mathcal{U}(\mathbf{q}(0)) \quad (2.62)$$

para todo $T \in \mathbb{R}_+$.

P2. *Para el caso de robots provistos únicamente de articulaciones rotacionales, existe una constante finita $k_{\mathcal{U}}$ tal que:*

$$\int_0^T \mathbf{g}(\mathbf{q})^T \dot{\mathbf{q}} dt + \mathcal{U}(\mathbf{q}(0)) \geq k_{\mathcal{U}} \quad (2.63)$$

para todo $T \in \mathbb{R}_+$ y donde $k_{\mathcal{U}} = \min_{\mathbf{q}} \{\mathcal{U}(\mathbf{q})\}$.

P3. *Para el caso de robots provistos únicamente de articulaciones rotacionales, el vector $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ es Lipschitz, es decir, existe una constante $k_g > 0$ tal que:*

$$\|\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{y})\| \leq k_g \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \quad (2.64)$$

para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$. Una forma sencilla de calcular k_g es como:

$$k_g \geq n \left[\max_{i,j,q} \left| \frac{\partial g_i(\mathbf{q})}{\partial q_j} \right| \right]. \quad (2.65)$$

Además, k_g satisface:

$$k_g \geq \left\| \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right\| \geq \lambda_{\max} \left\{ \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right\} \quad (2.66)$$

P4. Para el caso de robots provistos únicamente de articulaciones rotacionales, existe una constante k' tal que:

$$\|\mathbf{g}(\mathbf{q})\| \leq k' \quad (2.67)$$

para todo $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$.

■

Para la demostración de (2.62) considérese la función de energía potencial $\mathcal{U}(\mathbf{q})$ para un manipulador dado. La derivada temporal de $\mathcal{U}(\mathbf{q})$ viene dada por [21]:

$$\frac{d}{dt}\mathcal{U}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathcal{U}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{q}} \quad (2.68)$$

y reemplazando (2.25),

$$\frac{d}{dt}\mathcal{U}(\mathbf{q}) = \mathbf{g}(\mathbf{q})^T \dot{\mathbf{q}}. \quad (2.69)$$

Integrando $d\mathcal{U}(\mathbf{q})$ desde $\mathcal{U}(\mathbf{q}(0))$ hasta $\mathcal{U}(\mathbf{q}(T))$ para cualquier $T \in \mathbb{R}_+$ [21]:

$$\int_{\mathcal{U}(\mathbf{q}(0))}^{\mathcal{U}(\mathbf{q}(T))} d\mathcal{U}(\mathbf{q}) = \int_0^T \mathbf{g}(\mathbf{q}(t))^T \dot{\mathbf{q}}(t) dt \quad (2.70)$$

de donde finalmente se obtiene:

$$\mathcal{U}(\mathbf{q}(T)) - \mathcal{U}(\mathbf{q}(0)) = \int_0^T \mathbf{g}(\mathbf{q}(t))^T \dot{\mathbf{q}}(t) dt. \quad (2.71)$$

2.4. Estabilidad en el sentido de Lyapunov

En esta sección se presentan conceptos y teoremas básicos de la teoría de Lyapunov y en particular, el denominado *segundo método de Lyapunov* o *método directo de Lyapunov* [21]. La teoría de estabilidad de Lyapunov tiene como principal objetivo estudiar el comportamiento de sistemas dinámicos descritos por ecuaciones diferenciales de la forma [21]:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)), \quad \mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^n \quad \forall t \geq 0, \quad (2.72)$$

donde el vector $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ se refiere al estado del sistema dinámico representado por (2.72) y $\mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ se denomina la condición inicial o estado inicial. La función $\mathbf{f} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{n \times 1} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times 1}$ es una función continua en t y $\mathbf{x}(t)$, y se supone que es tal que [21]:

- La ecuación (2.72) tiene una solución única en el intervalo $(0, \infty]$ correspondiente a cada condición inicial de $\mathbf{x}(0)$ [21].

- Si $x(t)$ es la solución de (2.72) correspondiente a la condición inicial $x(0)$, entonces $x(t)$ depende de una manera continua del estado inicial $x(0)$ [21].

Si la función f no depende explícitamente del tiempo, es decir, $f(t, x(t)) = f(x(t))$, luego la ecuación (2.72) se denomina autónoma. Si $f(t, x(t)) = A(t)x(t) + u(t)$ con $A(t)$ una matriz cuadrada de dimensión n y siendo $A(t)$ y $u(t)$ funciones únicamente de t (o constantes), entonces la ecuación (2.72) es lineal. En caso contrario es no lineal [21].

2.4.1. Conceptos básicos

Entre los conceptos básicos de la teoría de Lyapunov destacan los siguientes: equilibrio, estabilidad, estabilidad asintótica y estabilidad exponencial. Cada uno de ellos será tratado a continuación. Primeramente, se presenta el concepto de equilibrio, el cual, a pesar de su sencillez, juega un papel clave en la teoría de estabilidad de Lyapunov [21].

Definición 1 (Equilibrio). Un vector constante $x_e \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es un equilibrio o estado de equilibrio del sistema (2.72) si [21]

$$f(t, x_e) = 0 \quad \forall t \geq 0.$$

Como consecuencias inmediatas de la definición de equilibrio, y excluyendo casos "patológicos", se tiene que si la condición inicial $x(0) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es justamente un equilibrio ($x(0) = x_e \in \mathbb{R}^{n \times 1}$), entonces se satisface [21]:

- $x(t) = x_e \quad \forall t \geq 0.$
- $\dot{x}(t) = 0 \quad \forall t \geq 0.$

Lo expuesto anteriormente se ilustra en la Figura 2.6, donde se muestra el caso $x(0) \in \mathbb{R}^2$. La condición inicial $x(0)$ es justamente x_e , por lo que la evolución en el tiempo de la solución $x(t)$ es exactamente el vector constante x_e [21].

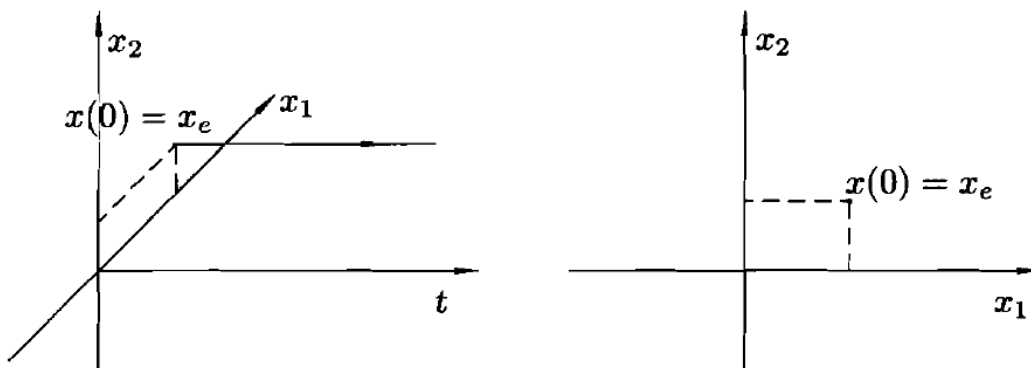


Figura 2.6: Equilibrio

Tradicionalmente se supone que el origen del espacio de estado $\mathbb{R}^{n \times 1}$, esto es $\mathbf{x} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, es un equilibrio de (2.72). Si éste no es el caso, puede demostrarse que mediante un cambio adecuado de coordenadas, cualquier equilibrio de (2.72) puede trasladarse al origen del espacio de estado [21].

En general, una ecuación diferencial puede tener más de un equilibrio, inclusive un número infinito de ellos. Sin embargo, también puede ocurrir que una ecuación no posea equilibrio alguno [21]. ■

A continuación se presentan los conceptos básicos de estabilidad para equilibrios de ecuaciones diferenciales. No está de más subrayar nuevamente, que los conceptos de estabilidad que serán enunciados, son considerados como **atributos** para **equilibrios** de ecuaciones diferenciales y no para las ecuaciones diferenciales mismas, ni sus soluciones. Sin pérdida de generalidad, se supondrá en el resto de la sección que el origen $\mathbf{x} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es un equilibrio de (2.72) [21].

Definición 2 (Estabilidad). El origen $\mathbf{x} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es un equilibrio estable (en el sentido de Lyapunov) de la ecuación (2.72) si para cada número $\varepsilon > 0$ se puede encontrar un número $\delta > 0$, tal que [21]:

$$\|\mathbf{x}(0)\| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq 0.$$

En la definición anterior la constante $\delta(\leq \varepsilon)$ no es única. Si existe una constante δ que satisfaga la condición de la definición, entonces cualquier $\alpha\delta$ con $\alpha \leq 1$ también la satisface [21].

Debe tenerse claro que la definición de estabilidad requiere la existencia de un $\delta > 0$ para cada $\varepsilon > 0$ y no para algún $\varepsilon > 0$ [21].

Finalmente, se deberá interpretar claramente la **Definición 2** de estabilidad y no establecer, como suele suceder en ocasiones por confusión, que para cada constante $\varepsilon > 0$ se puede encontrar un número $\delta > 0$ tal que [21]:

$$\|\mathbf{x}(0)\| < \varepsilon \Rightarrow \|\mathbf{x}(t)\| < \delta, \quad \forall t \geq 0.$$

Lo expuesto anteriormente significaría que el origen es un equilibrio estable si para toda condición inicial acotada, las soluciones también están acotadas. Esto último, no es necesario ni tampoco es suficiente para estabilidad en el sentido de Lyapunov. La estabilidad del origen debe ser interpretada como dada una pequeña discrepancia de la condición inicial $\mathbf{x}(0)$ con respecto al equilibrio (origen), la solución $\mathbf{x}(t)$ correspondiente permanecerá acotada. Nótese que se habla de valores pequeños de la condición inicial y no para toda condición inicial [21].

A modo de ilustración del concepto de estabilidad, la Figura 2.7 muestra un caso para $\mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^2$ donde el origen $\mathbf{x} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$ es un equilibrio estable y, por simplicidad, sólo se muestra la trayectoria $\mathbf{x}(t)$ correspondiente a una condición inicial $\mathbf{x}(0)$. En la Figura 2.7 se muestra también un ε y un δ que satisfacen la condición de la definición de estabilidad, es decir, $\|\mathbf{x}(0)\| < \delta$ implica que $\|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon$ para todo $t \geq 0$ [21].

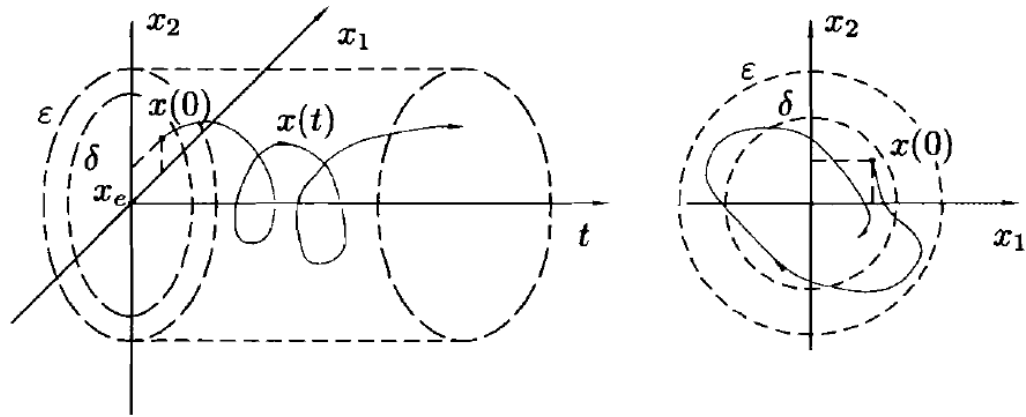


Figura 2.7: Estabilidad

Definición 3 (Estabilidad asintótica). El origen $x = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es un equilibrio asintóticamente estable de (2.72) si [21]:

1. El origen es estable.
2. El origen es atractivo, es decir, existe un número $\delta' > 0$ tal que:

$$\|x(0)\| < \delta' \Rightarrow \|x(t)\| \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

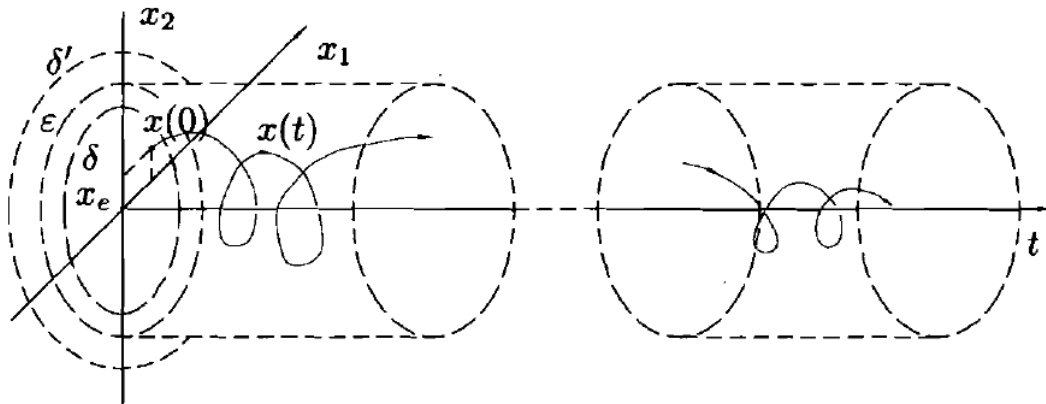


Figura 2.8: Estabilidad asintótica

La Figura 2.8 ilustra el concepto de estabilidad asintótica para el caso de $x(0) \in \mathbb{R}^2$. La asignación del nombre de estabilidad asintótica en la definición anterior es desafortunada, induciendo a confusión, ya que podría interpretarse como que el equilibrio es estable cuando $t \rightarrow \infty$ (asintóticamente), siendo que la definición claramente indica en la condición 1 que el equilibrio debe ser estable. Podría pensarse que la condición 1 es superflua ya que ésta es implicada por la condición 2. Sin embargo, tal implicación no es cierta [21].

Definición 4 (Estabilidad asintótica global). *El origen $x = 0 \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es un equilibrio asintóticamente estable en forma global de la ecuación (2.72) si [21]:*

1. *El origen es estable.*
2. *El origen es atractivo globalmente, es decir,*

$$\|x(t)\| \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow \infty, \forall x(0) \in \mathbb{R}^{n \times 1}.$$

■

De la definición anterior se deduce que un equilibrio asintóticamente estable globalmente implica que dicho equilibrio es también asintóticamente estable, pero lo contrario es falso [21].

Definición 5 (Estabilidad exponencial global). *El origen $x = 0 \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es un equilibrio exponencialmente estable en forma global de (2.72) si existen constantes positivas α y β tales que [21]:*

$$\|x(t)\| < \alpha \|x(0)\| e^{-\beta t}, \forall t \geq 0, \forall x(0) \in \mathbb{R}^{n \times 1}.$$

■

De acuerdo con las definiciones anteriores, un equilibrio exponencialmente estable en forma global es también un equilibrio asintóticamente estable en forma global. Lo contrario, sin embargo, no es necesariamente verdadero [21].

Definición 6 (Inestabilidad). *El origen $x = 0 \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es un equilibrio inestable de la ecuación (2.72) si éste no es estable [21].*

■

El concepto de equilibrio (origen) inestable es equivalente a enunciar que existe al menos un $\varepsilon > 0$ para el cual no es posible encontrar un $\delta > 0$ tal que [21]:

$$\|x(0)\| = \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon \quad \forall t \geq 0,$$

en otras palabras, si existe al menos un $\varepsilon > 0$, el cual se desea que acote la norma de la solución $\|x(t)\|$ y no existe ninguna condición inicial $x(0) \neq 0 \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ cuya solución $x(t)$ lo satisfaga ($\|x(t)\| < \varepsilon \quad \forall t \geq 0$), entonces el origen es inestable. Es importante subrayar que en ningún momento se afirma que la solución $x(t)$ deba “crecer” indefinidamente [21].

Algunos autores prefieren hablar de propiedades de estabilidad de sistemas en un equilibrio dado, en vez de propiedades de estabilidad de un equilibrio para un sistema. Por ejemplo, la frase “el sistema es estable en el origen” es empleada en lugar de “el origen es un equilibrio estable del sistema”. Ambos conceptos son equivalentes y en este texto se empleará este último, respetando de esta manera las definiciones presentadas anteriormente [21].

A continuación se presentan las definiciones de una clase particular de funciones, que son importantes en el empleo del método directo de Lyapunov para el estudio de estabilidad de equilibrios de ecuaciones diferenciales [21].

Definición 7 (Función definida positiva localmente y función definida positiva). *Una función continua $W : \mathbb{R}^{n \times 1} \rightarrow \mathbb{R}_+$ es una función definida positiva localmente si [21]:*

- $W(0) = 0$.
- $W(x) > 0$ para todo $x \neq 0$ pero con $\|x\|$ pequeña.

Una función continua $W : \mathbb{R}^{n \times 1} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función definida positiva si [21]:

- $W(0) = 0$.
- $W(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$.

■

Ocasionalmente se hará referencia a una función definida positiva como función “definida positiva (globalmente)” o función “definida positiva en forma global” para hacer énfasis al distinguirla de una función definida positiva localmente. De acuerdo con la definición anterior es obvio que una función definida positiva es también una función definida positiva localmente. También, de acuerdo con las definiciones de función definida positiva y de matriz definida positiva, una función cuadrática $f : \mathbb{R}^{n \times 1} \rightarrow \mathbb{R}$ de la forma [21]:

$$f(x) = x^T P x$$

con $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, es una función definida positiva si y sólo si $P > 0$ [21].

Si $W(x)$ es una función definida positiva, entonces a $-W(x)$ se la referirá como función definida negativa [21].

Definición 8 (Función radialmente no acotada y función menguante). *Una función continua $W : \mathbb{R}^{n \times 1} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función radialmente no acotada si [21]:*

- $W(x) \rightarrow \infty$ cuando $\|x\| \rightarrow \infty$.

Una función continua $V : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{n \times 1} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función menguante (globalmente), si existe una función definida positiva $W : \mathbb{R}^{n \times 1} \rightarrow \mathbb{R}_+$ tal que [21]:

$$V(t, \mathbf{x}) \leq W(\mathbf{x}), \quad \forall t \geq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n \times 1}.$$

■

Naturalmente, si $V(t, \mathbf{x})$ es una función definida positiva independiente de t , es decir, $V(t, \mathbf{x}) = V(\mathbf{x})$, luego $V(\mathbf{x})$ es trivialmente una función menguante [21].

Con abuso de la nomenclatura, se dirá que una función dependiente del tiempo $V : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{n \times 1} \rightarrow \mathbb{R}_+$ es definida positiva si existe una función definida positiva $W : \mathbb{R}^{n \times 1} \rightarrow \mathbb{R}_+$ tal que [21]:

$$V(t, \mathbf{x}) \geq W(\mathbf{x}), \quad \forall t \geq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n \times 1}.$$

También se dirá que $V(t, \mathbf{x})$ es radialmente no acotada si $W(\mathbf{x})$ lo es [21].

A continuación se exponen una serie de conceptos relacionados con la noción de función candidata de Lyapunov [21].

Definición 9 (Función candidata de Lyapunov). Una función $V : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{n \times 1} \rightarrow \mathbb{R}_+$ es una función candidata de Lyapunov para el equilibrio $\mathbf{x} = 0 \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ de la ecuación $\dot{\mathbf{x}} = f(t, \mathbf{x})$ si [21]:

- $V(t, \mathbf{x})$ es una función definida positiva localmente.
- $\frac{\partial V(t, \mathbf{x})}{\partial t}$ es una función continua con respecto a t y \mathbf{x} .
- $\frac{\partial V(t, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$ es una función continua con respecto a t y \mathbf{x} .

■

En otras palabras, una función candidata de Lyapunov para el equilibrio $\mathbf{x} = 0 \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ de $\dot{\mathbf{x}} = f(t, \mathbf{x})$ es cualquier función definida positiva localmente y continuamente diferenciable (es decir, con derivadas parciales continuas) [21].

La derivada temporal de una función de Lyapunov juega un papel clave en la extracción de conclusiones sobre los atributos de estabilidad para los equilibrios de las ecuaciones diferenciales. Por este motivo, se presenta la siguiente definición [21].

Definición 10 (Derivada de una función candidata de Lyapunov). Sea $V(t, \mathbf{x})$ una función candidata de Lyapunov para la ecuación (2.72). La derivada de $V(t, \mathbf{x})$ a lo largo de las trayectorias de (2.72), denotada por $\dot{V}(t, \mathbf{x})$ vendrá dada por [21]:

$$\dot{V}(t, \mathbf{x}) = \frac{d}{dt}V(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial V(t, \mathbf{x})}{\partial t} + \frac{\partial V(t, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} f(t, \mathbf{x}).$$

■

Obsérvese de la definición anterior, que si $V(\mathbf{x})$ no depende explícitamente del tiempo, y la ecuación (2.72) es autónoma, entonces [21]:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x})$$

la cual tampoco depende explícitamente del tiempo [21].

Definición 11 (Función de Lyapunov). Una función candidata de Lyapunov $V(t, \mathbf{x})$ para la ecuación (2.72) es una función de Lyapunov para (2.72) si su derivada a lo largo de las trayectorias de (2.72) satisface [21]:

$$\dot{V}(t, \mathbf{x}) \leq 0 \quad \forall t \geq 0 \quad \text{al menos para } \|\mathbf{x}\| \text{ pequeña.}$$

■

2.4.2. Método directo de Lyapunov

Con los preliminares anteriores, ahora pueden presentarse los teoremas fundamentales de la teoría de estabilidad de Lyapunov. Los teoremas presentados vendrán dados sin demostraciones [21].

Teorema 1 (Estabilidad). El origen $\mathbf{x} = 0 \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es un estado de equilibrio estable de la ecuación (2.72), si existe una función candidata de Lyapunov $V(t, \mathbf{x})$ tal que su derivada temporal satisfaga [21]:

$$\dot{V}(t, \mathbf{x}) \leq 0, \quad \forall t \geq 0 \quad \text{al menos para } \|\mathbf{x}\| \text{ pequeña.}$$

■

Conviene apuntar que la conclusión del teorema se mantiene obviamente si $\dot{V}(t, \mathbf{x}) \leq 0$ para todo $t \geq 0$ y para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, o si la función candidata de Lyapunov $V(t, \mathbf{x})$ es una función definida positiva (globalmente) en lugar de ser definida positiva localmente. El siguiente teorema, permite establecer resultados de estabilidad del equilibrio y además, acotamiento de las soluciones [21].

Teorema 2 (Estabilidad y acotamiento de las soluciones). *El origen $x = 0 \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es un equilibrio estable, y las soluciones $x(t)$ están acotadas para toda condición inicial $x(0) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, si existe una función candidata de Lyapunov que sea definida positiva (globalmente), radialmente no acotada, $V(t, x)$, tal que su derivada temporal satisfaga [21]:*

$$\dot{V}(t, x) \leq 0 \quad \forall t \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^{n \times 1}.$$

■

Demostración. En vista de que $V(t, x)$ es una función candidata de Lyapunov y satisface $V(t, x) \leq 0$, del **Teorema 1** se concluye estabilidad del origen [21].

Por otro lado, como $V(t, x)$ es una función definida positiva y $\dot{V}(t, x) \leq 0$ entonces [21]:

$$0 \leq V(t, x(t)) \leq V(0, x(0)) \quad \forall t \geq 0$$

es decir, $V(t, x)$ es una función acotada para todo $t \geq 0$. Usando adicionalmente el hecho de que $V(t, x)$ sea una función radialmente no acotada, se concluye que x está acotada [21].

A continuación se presentan condiciones suficientes para determinar estabilidad asintótica en forma global [21].

Teorema 3 (Estabilidad asintótica global). *El origen $x = 0 \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es un estado de equilibrio asintóticamente estable en forma global de (2.72), si existe una función candidata de Lyapunov $V(t, x)$ definida positiva (globalmente), radialmente no acotada, y menguante, tal que su derivada satisfaga [21]:*

- $\dot{V}(t, 0) = 0 \quad \forall t \geq 0.$
- $\dot{V}(t, x) < 0 \quad \forall t \geq 0, \quad \forall x \neq 0 \in \mathbb{R}^{n \times 1}.$

■

La condición impuesta por el teorema anterior sobre $\dot{V}(t, x)$ equivale a requerir que $\dot{V}(t, x)$ sea una función definida negativa (globalmente). Es conveniente apuntar que más allá de la conclusión de estabilidad asintótica global enunciada en el teorema, en realidad, las condiciones establecidas son suficientes para garantizar un resultado de estabilidad más fuerte llamado estabilidad asintótica global en forma *uniforme* [21].

En el caso de que la ecuación (2.72) sea autónoma, la función candidata de Lyapunov no suele depender explícitamente del tiempo, por lo que es trivialmente menguante, de modo que para que el origen sea un equilibrio asintóticamente estable en forma global es suficiente que la función candidata de Lyapunov $V(x)$ sea definida positiva (globalmente), y radialmente no acotada, a la vez que su derivada $\dot{V}(x)$ sea una función definida negativa (globalmente) [21].

El siguiente resultado presenta condiciones necesarias para la existencia de ciertas propiedades globales de estabilidad de equilibrios en ecuaciones diferenciales autónomas [21].

Teorema 4. *Considérese la ecuación diferencial autónoma [21]:*

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t)), \quad \mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^{n \times 1}, \quad \forall t \geq 0.$$

La existencia de un único estado de equilibrio es una condición necesaria para que éste sea asintóticamente estable en forma global [21].

■

La prueba del **Teorema 4** es inmediata observando que el concepto de estabilidad citado implica $\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_e\| \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, donde \mathbf{x}_e es el equilibrio analizado. Debido a la globalidad de la citada propiedad de estabilidad, la convergencia de la solución $\mathbf{x}(t)$ al equilibrio \mathbf{x}_e debe verificarse para toda condición inicial. Claramente, éste no sería el caso si además de \mathbf{x}_e existen más estados de equilibrio, ya que si la condición inicial $\mathbf{x}(0)$ fuese exactamente alguno de esos otros estados de equilibrio, entonces la solución $\mathbf{x}(t)$ permanecería ahí para todo $t \geq 0$ [21].

Nótese que el **Teorema 4** no establece, como condición necesaria de estabilidad de un equilibrio, la existencia de un único estado de equilibrio. Es importante mencionar, que pueden coexistir equilibrios con propiedades locales de estabilidad, e incluso, equilibrios estables con equilibrios inestables [21].

Debido a que las propiedades globales de estabilidad implican la existencia de un único equilibrio para el sistema descrito por la ecuación diferencial respectiva, se permite hablar no solo de las propiedades de estabilidad global de dicho equilibrio, sino también de dichas propiedades para el sistema que representan, es decir, afirmaciones como “este sistema es asintóticamente estable en forma global” serían correctas [21].

El siguiente teorema es una versión simplificada del denominado teorema de LaSalle [21].

Teorema 5 (LaSalle). *Considérese la ecuación diferencial autónoma [21]:*

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}),$$

cuyo origen $\mathbf{x} = 0 \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es un equilibrio. Supóngase que existe una función candidata de Lyapunov $V(\mathbf{x})$ definida positiva (globalmente) y radialmente desacotada tal que [21]:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n \times 1}.$$

Defínase el conjunto Ω como [21]:

$$\Omega = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n \times 1} : \dot{V}(\mathbf{x}) = 0 \right\}.$$

Si $\mathbf{x}(0) = 0$ es la única condición inicial en Ω para la cual $\mathbf{x}(t) \in \Omega$ para $t > 0$, entonces el origen $\mathbf{x} = 0 \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es un equilibrio asintóticamente estable en forma global [21].

■

Una manera práctica para probar la condición del teorema de LaSalle es la siguiente. Primeramente, se determinan los componentes (o sus combinaciones) del vector de estado x tales que al anularse impliquen que $\dot{V}(x) = 0$. A continuación se consideran dichos componentes como nulos y sus derivadas temporales sucesivas también se toman como nulas. Luego se emplean estas consideraciones en la ecuación original $\dot{x} = f(x)$. Finalmente, si de ahí puede concluirse que las restantes variables de estado (aquéllas cuyos valores no afectan $V(x) = 0$), son nulas, esto querrá decir que $x = 0$ es la única condición inicial en Ω para la cual la solución $x(t)$ permanecerá en Ω [21].

La aplicación del teorema de LaSalle para establecer estabilidad asintótica global, no requiere que $-\dot{V}(x)$ sea una función definida positiva. Sin embargo, recuérdese que este teorema sólo puede emplearse en ecuaciones diferenciales autónomas [21].

Los teoremas anteriores son comúnmente los más empleados en el análisis de estabilidad en el sentido de Lyapunov. Es importante decir que existen otros resultados adicionales, que incluyen por ejemplo, teoremas para estudiar inestabilidad [21].

2.5. Control de posición

Considérese el modelo dinámico de un robot manipulador de n grados de libertad con eslabones rígidos, sin fricción en sus uniones y con actuadores ideales [21]

$$M(q) + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau \quad (2.73)$$

o en términos del vector de estado $[\ q^T \ \dot{q}^T \]^T$:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ M(q)^{-1} [\tau(t) - C(q, \dot{q})\dot{q} - g(q)] \end{bmatrix} \quad (2.74)$$

donde $M(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de inercia, $C(q, \dot{q})\dot{q} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es el vector de fuerzas centrífugas y de Coriolis, $g(q) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es el vector de pares gravitacionales y $\tau \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es un vector de fuerzas y pares aplicados en las uniones mediante los accionadores. Los vectores $q, \dot{q}, \ddot{q} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ denotan la posición, velocidad y aceleración articular, respectivamente [21].

El problema de control de posición de robots manipuladores puede formularse en los siguientes términos. Considérese la ecuación dinámica de un robot de n grados de libertad (2.73). Dada una posición articular deseada q_d , que se supone constante, se trata de determinar una función vectorial τ , de tal forma que las posiciones q asociadas a las coordenada articulares del robot lleguen asintóticamente a q_d . En términos más formales, el *objetivo de control de posición pura*, o simplemente *control de posición*, consiste en determinar τ de tal forma que [21]:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q(t) = q_d \quad (2.75)$$

donde $q_d \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es un vector constante [21].

El cálculo del vector τ involucra generalmente a una función vectorial no lineal de q , \dot{q} y \ddot{q} . Esta función se denomina “ley de control” o simplemente controlador. Es importante recordar que muchos robots manipuladores disponen de sensores de posición y velocidad para cada articulación, por lo que los vectores q y \dot{q} son medibles y pueden ser empleados en los controladores. Algunos otros vienen equipados sólo con sensores de posición articular, por lo que puede ser necesario estimar la velocidad a partir de la medición de posición, ya sea mediante filtrado o por medio de observaciones. Genéricamente, el controlador puede expresarse como [21]:

$$\tau = \tau(q, \dot{q}, \ddot{q}, q_d, M(q), C(q, \dot{q}), g(q)). \quad (2.76)$$

Para fines prácticos es deseable que el controlador no dependa de la aceleración articular \ddot{q} . La Figura 2.9 presenta un diagrama de bloque formado por un controlador en malla cerrada con un robot [21].

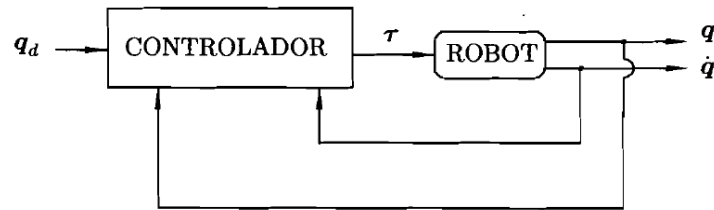


Figura 2.9: Control en malla cerrada de robots

Si el controlador (2.76) no depende explícitamente de $M(q)$, $C(q, \dot{q})$ y $g(q)$, se dice que el controlador no se basa en el modelo del robot. Este nombre es, sin embargo, desafortunado ya que existen controladores, por ejemplo del tipo PID, que poseen parámetros de diseño cuyos valores numéricos se determinan en función del modelo del robot al cual controlan. De este modo, el diseño adecuado del controlador requiere el conocimiento del modelo del robot, en realidad de sus parámetros físicos, a pesar de ser un controlador del tipo que no se basa en el modelo [21].

La metodología de estudio y análisis de estabilidad de un controlador para el control de posición pura, puede resumirse de acuerdo a los siguientes pasos [21]:

1. Obtención de la ecuación dinámica en lazo cerrado. Dicha ecuación se obtiene reemplazando la acción de control τ (ecuación (2.76)) en modelo dinámico del manipulador (ecuación (2.73)). En general, la ecuación en lazo cerrado resulta ser una ecuación diferencial ordinaria no lineal pero autónoma.
2. Representación de la ecuación en lazo cerrado en la forma:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q_d - q \\ \dot{q} \end{bmatrix} = f(q, \dot{q}, q_d, M(q), C(q, \dot{q}), g(q)). \quad (2.77)$$

La ecuación en lazo cerrado anterior puede verse como un sistema dinámico cuya entrada es q_d , siendo sus salidas el estado $\tilde{q} = q_d - q$ y \dot{q} . Aquí \tilde{q} denota el error de posición articular. La Figura 2.10 muestra el diagrama de bloque correspondiente.

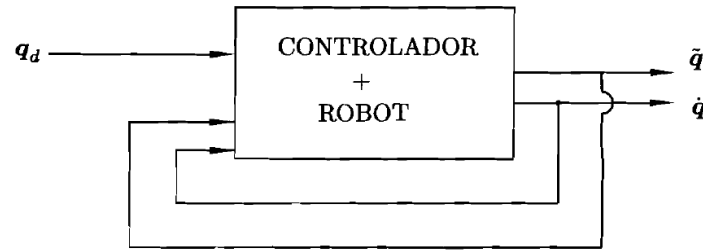


Figura 2.10: Sistema dinámico en malla cerrada

3. Estudio de la existencia y posible unicidad de equilibrios de la ecuación en lazo cerrado.
4. Propuesta de una función candidata de Lyapunov para el estudio de estabilidad de algún equilibrio de interés de la ecuación en lazo cerrado, haciendo uso de los **Teoremas 1, 2, 3 y 5**.
5. Como alternativa al paso 4), en el caso de no ser viable la propuesta de una función candidata de Lyapunov para determinar las propiedades de estabilidad del punto de equilibrio en estudio, se emplea el Lema A.2 mediante la propuesta de una función definida positiva cuyas características permitan determinar el comportamiento cualitativo de las soluciones de la ecuación en lazo cerrado.

2.5.1. Control PD con compensación de gravedad

El control de posición pura de robots manipuladores puede realizarse potencialmente mediante la técnica de control PD [21]:

$$\tau = K_p \tilde{q} + K_v \dot{\tilde{q}} \quad (2.78)$$

Sin embargo, dicho esquema de control posee ciertas restricciones que pueden limitar su uso. Efectivamente, el controlador PD cuya sencilla ley de control viene dada por la ecuación (2.78), garantiza el cumplimiento del objetivo de control de posición en forma global para robots cuyos modelos dinámicos no poseen el vector de pares gravitacionales $g(q)$. En este caso, la sintonía⁴ de este controlador es trivial ya que es suficiente con seleccionar las matrices de diseño K_p y K_v como simétricas y definidas positivas. No obstante, el control PD no garantiza el cumplimiento del objetivo de control de posición pura de manipuladores cuyos modelos dinámicos contienen el término de pares gravitacionales $g(q)$, a menos que la posición deseada q_d sea tal que $g(q_d) = 0$ [21].

En esta sección se estudia el control PD con compensación de gravedad, que es capaz de satisfacer el objetivo de control de posición pura en forma global para robots de n grados de libertad; además, su sintonía resulta trivial. El estudio formal de dicho controlador se remonta al año 1981 por Takegaki y Arimoto⁵. En la ley de control se requiere el conocimiento previo de una parte del modelo dinámico del robot a ser controlado, puesto que usa el vector de pares gravitacionales $g(q)$ [21].

⁴ Se entiende aquí por sintonía, a la determinación de valores para los parámetros de diseño del controlador que garanticen el cumplimiento del objetivo de control de posición o movimiento.

⁵ Takegaki M., Arimoto S., 1981, "A new feedback Method for dynamic control of manipulators", Transactions ASME, Journal of Dynamic Systems, Measurement and control, Vol. 103, pp. 119–125.

La ley de control PD con compensación de gravedad está representada por [21]:

$$\tau = K_p \tilde{q} + K_v \dot{\tilde{q}} + g(q) \quad (2.79)$$

donde $K_p, K_v \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son matrices simétricas definidas positivas. Nótese que la única diferencia respecto al control PD (2.78) es el término aditivo $g(q)$. A diferencia del control PD, que no requiere conocimiento alguno sobre la estructura del modelo del robot, el controlador (2.79) hace uso explícito del conocimiento parcial del modelo del manipulador, específicamente de $g(q)$. Sin embargo, es importante observar que para un robot dado el vector de pares gravitacionales $g(q)$ puede obtenerse con relativa facilidad, puesto que para este fin basta con calcular sólo la expresión correspondiente a la energía potencial $\mathcal{U}(q)$ del robot. El vector $g(q)$ se obtiene finalmente de (2.25) como $g(q) = \partial \mathcal{U}(q) / \partial q$ [21].

La ley de control (2.79) requiere información sobre la posición deseada $q_d(t)$ y la velocidad deseada $\dot{q}_d(t)$, así como medición de la posición $q(t)$ y velocidad $\dot{q}(t)$ a cada instante. La Figura 2.11 muestra el diagrama de bloques correspondiente al control PD con compensación de gravedad de robots [21].

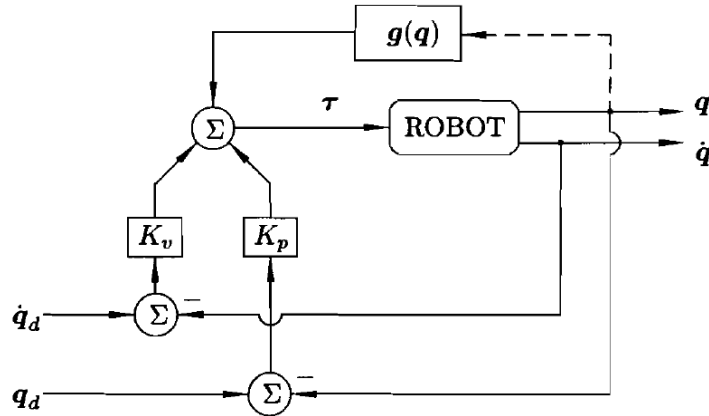


Figura 2.11: Control PD con compensación de gravedad

La ecuación que describe el comportamiento en lazo cerrado se obtiene al combinar las ecuaciones (2.73) y (2.79) [21]:

$$M(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + g(q) = K_p \tilde{q} + K_v \dot{\tilde{q}} + g(q), \quad (2.80)$$

o en términos del vector de estado $\begin{bmatrix} \tilde{q}^T & \dot{\tilde{q}}^T \end{bmatrix}^T$:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{q}} \\ \ddot{q}_d - M(q)^{-1} [K_p \tilde{q} + K_v \dot{\tilde{q}} - C(q, \dot{q}) \dot{q}] \end{bmatrix}. \quad (2.81)$$

Una condición necesaria y suficiente para que el origen $\begin{bmatrix} \tilde{q}^T & \dot{\tilde{q}}^T \end{bmatrix}^T = 0 \in \mathbb{R}^{2n}$ sea equilibrio de la ecuación de lazo cerrado es que la posición deseada $q_d(t)$ satisfaga [21]:

$$M(q_d) \ddot{q}_d + C(q_d, \dot{q}_d) \dot{q}_d = 0, \quad (2.82)$$

o equivalentemente, que $q_d(t)$ sea solución de [21]

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q_d \\ \dot{q}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q}_d \\ -M(q_d)^{-1} C(q_d, \dot{q}_d) \dot{q}_d \end{bmatrix} \quad (2.83)$$

para cualquier condición inicial $\begin{bmatrix} q_d(0)^T & \dot{q}_d(0)^T \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{2n}$ [21].

Evidentemente, en el escenario donde la posición deseada $q_d(t)$ no satisfaga la condición establecida, entonces el origen no será equilibrio de la ecuación de lazo cerrado, y por lo tanto no podrá esperarse que se satisfaga cabalmente el objetivo de control de movimiento, es decir, llevar el error de posición $\tilde{q}(t)$ asintóticamente a cero. No obstante, puede conseguirse que asintóticamente el error de posición $\tilde{q}(t)$ sea tan pequeño como se desee, a condición de seleccionar las matrices K_p y K_v suficientemente "grandes" [21].

Una condición suficiente para que el origen $\begin{bmatrix} \tilde{q}^T & \dot{\tilde{q}}^T \end{bmatrix}^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{2n}$ sea el único equilibrio de la ecuación de malla cerrada es que la posición articular deseada q_d sea un vector constante. El desarrollo de la verificación de la estabilidad del controlador en el sistema es desarrollada a continuación [21].

Deseamos comprobar que el controlador funcionará en el sistema robótico, es decir, que el sistema tenga un punto de equilibrio estable después de incluir el controlador en serie en el lazo del robot. En todo sistema donde deseemos realizar una acción de control, por definición tendremos que el error es la diferencia entre el estado retroalimentado y la referencia o valor deseado; en nuestro caso la referencia es constante en el tiempo y tendremos por misión del control llevar dicho error a un valor constante cero, en el menor tiempo posible.

La nueva ecuación de lazo cerrado puede escribirse en términos del vector de estado $[\tilde{q}^T, \dot{\tilde{q}}^T]^T$, que incluye al error de posición y a la velocidad articular como variables de estado, y como estados la velocidad y la aceleración articular, esta es descrita como:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{q} \\ M^{-1}(q) [K_p \tilde{q} - K_v \dot{\tilde{q}} - C(q, \dot{q}) \dot{\tilde{q}}] \end{bmatrix} \quad (2.84)$$

la cual, debido a que q_d es constante, representa una ecuación diferencial autónoma. Como se puede observar, la nueva ecuación de lazo cerrado incluye términos del modelo dinámico y del controlador propuesto.

El paso siguiente es la determinación de la existencia de un punto de equilibrio único; esta condición debe ser una premisa para poder realizar el análisis de estabilidad ⁶.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{q} \\ M^{-1}(q) [K_p \tilde{q} - K_v \dot{q} - C(q, \dot{q}) \dot{q}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.85)$$

entonces

$$-\dot{q} = \mathbf{0} \quad (2.86)$$

$$M^{-1}(q) [K_p \tilde{q} - K_v \dot{q} - C(q, \dot{q}) \dot{q}] = \mathbf{0} \quad (2.87)$$

de la ecuación (2.86)

$$-\dot{q} = \mathbf{0} \Leftrightarrow -I \dot{q} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \dot{q} = \mathbf{0}$$

resolviendo la ecuación (2.87):

$$\begin{aligned} M^{-1}(q) [K_p \tilde{q} - K_v \dot{q} - C(q, \dot{q}) \dot{q}] &= \mathbf{0} \\ K_p \tilde{q} - K_v \mathbf{0} - C(q, \mathbf{0}) \mathbf{0} &= \mathbf{0} \Leftrightarrow M(q) > \mathbf{0} \\ k_p \tilde{q} &= \mathbf{0} \Leftrightarrow \tilde{q} = \mathbf{0} \\ &\Rightarrow q_d = q. \end{aligned}$$

De la ecuación anterior se obtiene un resultado interesante, la condición de equilibrio para el error es cuando $q_d = q$, esto quiere decir, que tenemos un punto de equilibrio único, el vector origen o cero $[\tilde{q}^T \quad \dot{q}^T]^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{2n}$.

Para estudiar la estabilidad del origen como equilibrio, se emplea el metodo directo de Lyapunov que ha sido presentado previamente. Específicamente, se empleará el **Teorema 2** para demostrar estabilidad del equilibrio (origen). Esta parte se basa en la propuesta de una función de energía, donde esta función se propone por la técnica de moldeo de energía. Considérese la siguiente función candidata de Lyapunov [21]:

$$V(\tilde{q}, \dot{q}) = \mathcal{K}(q, \dot{q}) + \frac{1}{2} \tilde{q}^T K_p \tilde{q} \quad (2.88)$$

donde $\mathcal{K}(q, \dot{q})$ denota la energía cinética del robot. Claramente, la función $V(\tilde{q}, \dot{q})$ es una función definida positiva en forma global y radialmente no acotada, ya que la energía cinética $\mathcal{K}(q, \dot{q})$ es definida positiva en \dot{q} y como por otro lado K_p es una matriz definida positiva, entonces también la forma cuadrática $\tilde{q}^T K_p \tilde{q}$ es una función definida positiva en \tilde{q} .

⁶La teoría de Lyapunov se basa en el estudio de la estabilidad del punto de equilibrio.

La función candidata de Lyapunov puede expresarse como [21]:

$$\begin{aligned} V(\tilde{q}, \dot{q}) &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} K_p & 0 \\ 0 & M(q_d - \tilde{q}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix}, \\ &= \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} + \frac{1}{2} \tilde{q}^T K_p \tilde{q}, \end{aligned} \quad (2.89)$$

cuya derivada con respecto al tiempo es

$$\dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) = \dot{q}^T M(q) \ddot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{M}(q) \dot{q} + \tilde{q}^T K_p \dot{\tilde{q}}. \quad (2.90)$$

Al sustituir $M(q) \ddot{q}$ de la ecuación de lazo cerrado (2.84) se simplifica a:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) &= \dot{q}^T M(q) M^{-1}(q) [K_p \tilde{q} - K_v \dot{q} - C(q, \dot{q}) \dot{q}] + \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{M}(q) \dot{q} + \tilde{q}^T K_p \dot{\tilde{q}} \\ &= \dot{q}^T K_p \tilde{q} - \dot{q}^T K_v \dot{q} - \dot{q}^T C(q, \dot{q}) \dot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{M}(q) \dot{q} - \tilde{q}^T K_p \dot{q} \\ &= -\dot{q}^T K_v \dot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^T [\dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q})] \dot{q} \\ &= -\dot{q}^T K_v \dot{q} \\ &= - \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} K_v & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & K_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix} \leq 0 \end{aligned} \quad (2.91)$$

donde se ha eliminado el término $\dot{q}^T \left[\frac{1}{2} \dot{M}(q) - C(q, \dot{q}) \right] \dot{q}$ en vista de la **Propiedad 2** y se ha empleado $\dot{\tilde{q}} = -\dot{q}$ ya que q_d es constante [21].

La función $V(\tilde{q}, \dot{q})$ es entonces una función de Lyapunov en vista de que $\dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) \leq 0$ y en consecuencia el origen es estable y las soluciones $\tilde{q}(t)$ y $\dot{q}(t)$ están acotadas (**Teorema 2**) [21].

Debido a la autonomía con respecto al tiempo de la ecuación de lazo cerrado (2.84), puede explorarse la aplicación del teorema de LaSalle (**Teorema 5**) para analizar la estabilidad asintótica global del origen [21].

Con este propósito, nótese que el conjunto Ω viene dado por [21]:

$$\begin{aligned} \Omega &= \left\{ x \in \mathbb{R}^{2n} : \dot{V}(x) = 0 \right\}, \\ &= \left\{ x = \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n} : \dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) = 0 \right\}, \\ &= \left\{ \tilde{q} \in \mathbb{R}^{n \times 1}, \dot{q} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n \times 1} \right\}. \end{aligned} \quad (2.92)$$

Obsérvese que $\dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) = 0$ si y solo si $\dot{q} = \mathbf{0}$. Para que una solución $x(t)$ pertenezca a Ω para todo $t \geq 0$, es necesario y suficiente que $\dot{q}(t) = \mathbf{0}$ para todo $t \geq 0$. Por lo tanto, también debe satisfacer que $\ddot{q}(t) = \mathbf{0}$ para todo $t \geq 0$. Tomando esto en consideración, de la ecuación de lazo cerrado (2.84) se concluye que si $x(t) \in \Omega$ para todo $t \geq 0$, entonces [21]:

$$M(q_d - \tilde{q}(t))^{-1} K_p \tilde{q}(t) = \mathbf{0}, \quad (2.93)$$

significando esto que $\tilde{q}(t) = \mathbf{0}$ para todo $t \geq 0$. Por lo tanto, $\left[\tilde{q}(0)^T \quad \dot{q}(0)^T \right]^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{2n}$ es la única condición inicial en Ω para la cual $x(t) \in \Omega$ para todo $t \geq 0$. Luego, de acuerdo con el teorema de LaSalle (**Teorema 5**), esto basta para garantizar estabilidad asintótica global del origen $\left[\tilde{q}^T \quad \dot{q}^T \right]^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{2n}$ [21].

Como resultado, se afirma que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{q}(t) = \mathbf{0}, \quad (2.94)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{q}(t) = \mathbf{0}, \quad (2.95)$$

es decir, que se verifica el objetivo de control de posición pura [21].

2.6. Generación de trayectorias

Para definir una trayectoria espacial y temporal de un robot, existen dos formas básicas para especificar el movimiento [23]:

- Suministrando puntos consecutivos e ignorando la trayectoria espacial que describe el robot entre cada dos puntos [23].
- Especificando el camino que debe unir los puntos mediante una determinada trayectoria, tal como la línea recta o un círculo, que debe describir el robot en el espacio de trabajo [23].

La primera alternativa, denominada tradicionalmente *control punto a punto*, sólo tiene interés práctico cuando los puntos están suficientemente separados ya que, en caso contrario, la especificación sería muy laboriosa. Por otra parte, los puntos tampoco deben de estar muy separados ya que entonces corren el riesgo de que se generen movimientos imprevisibles o no controlados. En este control punto a punto el sistema de control automático del robot debe realizar la interpolación entre los puntos especificados, de forma tal que, posteriormente, sea posible realizar el control de movimientos para que el robot pase por dichos puntos [23].

La segunda estrategia se denomina tradicionalmente *control de trayectoria continua*. En este caso, el sistema de control debe hacer que el robot reproduzca lo más fielmente posible la trayectoria especificada [23].

La especificación del movimiento puede involucrar o no restricciones temporales. En los robots manipuladores esta especificación temporal es muy usual, dando lugar a condiciones sobre la velocidad y aceleración con que deben ejecutarse los movimientos. No debe olvidarse que las trayectorias generadas deben tener buenas propiedades con vistas a su ejecución por el robot. Por consiguiente, es necesario tener en cuenta, directa o indirectamente, las restricciones cinemáticas y dinámicas involucradas. En general, las trayectorias deben ser suaves, lo que implica restricciones sobre las derivadas. Normalmente se exigen que al menos la primera derivada sea continua, pudiendo exigirse también la continuidad en derivadas de orden superior [23].

Se recuerda que el problema de la generación de trayectorias debe resolverse en tiempo real. Por tanto, se trata también de que la generación de las trayectorias sea computacionalmente eficiente. En robots manipuladores, la generación de trayectorias articulares suele realizarse en tiempos del orden de los milisegundos o decenas de milisegundos [23].

2.6.1. Técnicas básicas de interpolación

La generación de trayectorias hace necesario considerar al menos la continuidad de la primera derivada. Por consiguiente, las restricciones son [23]:

$$\mathbf{p}(\lambda_0) = \mathbf{p}_0 \quad (2.96)$$

$$\mathbf{p}(\lambda_f) = \mathbf{p}_f \quad (2.97)$$

$$\mathbf{p}'(\lambda_0) = \mathbf{p}'_0 \quad (2.98)$$

$$\mathbf{p}'(\lambda_f) = \mathbf{p}'_f \quad (2.99)$$

donde λ es el parámetro. Para que se cumplan estas restricciones, se necesita un polinomio de al menos grado tres (cúbico) [23]:

$$\mathbf{p}(\lambda) = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1\lambda + \mathbf{a}_2\lambda^2 + \mathbf{a}_3\lambda^3 \quad (2.100)$$

$$\mathbf{p}'(\lambda) = \mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2\lambda + 3\mathbf{a}_3\lambda^2 \quad (2.101)$$

$$\mathbf{p}''(\lambda) = 2\mathbf{a}_2 + 6\mathbf{a}_3\lambda \quad (2.102)$$

Por lo tanto, se tienen cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas que son los parámetros \mathbf{a}_0 , \mathbf{a}_1 , \mathbf{a}_2 y \mathbf{a}_3 [23].

Suponiendo $\lambda_0 = 0$, las ecuaciones son [23]:

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{a}_0 \quad (2.103)$$

$$\mathbf{p}_f = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1\lambda_f + \mathbf{a}_2\lambda_f^2 + \mathbf{a}_3\lambda_f^3 \quad (2.104)$$

$$\mathbf{p}'_0 = \mathbf{a}_1 \quad (2.105)$$

$$\mathbf{p}'_f = \mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2\lambda_f + 3\mathbf{a}_3\lambda_f^2 \quad (2.106)$$

Resolviendo, se obtiene:

$$a_0 = p_0 \quad (2.107)$$

$$a_1 = p'_0 \quad (2.108)$$

$$a_2 = \frac{3}{\lambda_f^2} (p_f - p_0) - \frac{2}{\lambda_f} p'_0 - \frac{1}{\lambda_f} p'_f \quad (2.109)$$

$$a_3 = -\frac{2}{\lambda_f^3} (p_f - p_0) + \frac{1}{\lambda_f^2} (p'_f - p'_0) \quad (2.110)$$

Si se desea tener en cuenta restricciones en derivadas de orden superior a uno, es necesario incrementar el orden del polinomio. En particular, se emplean polinomios de grado cinco para especificar también la segunda derivada [23]:

$$p(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + a_3\lambda^3 + a_4\lambda^4 + a_5\lambda^5 \quad (2.111)$$

En este caso, suponiendo $\lambda_0 = 0$, las condiciones son [23]:

$$p_0 = a_0 \quad (2.112)$$

$$p_f = a_0 + a_1\lambda_f + a_2\lambda_f^2 + a_3\lambda_f^3 + a_4\lambda_f^4 + a_5\lambda_f^5 \quad (2.113)$$

$$p'_0 = a_1 \quad (2.114)$$

$$p'_f = a_1 + 2a_2\lambda_f + 3a_3\lambda_f^2 + 4a_4\lambda_f^3 + 5a_5\lambda_f^4 \quad (2.115)$$

$$p''_0 = 2a_2 \quad (2.116)$$

$$p''_f = 2a_2 + 6a_3\lambda_f + 12a_4\lambda_f^2 + 20a_5\lambda_f^3 \quad (2.117)$$

Estas restricciones especifican un sistema lineal de seis ecuaciones con seis incógnitas, cuya solución es [23]:

$$a_0 = p_0 \quad (2.118)$$

$$a_1 = p'_0 \quad (2.119)$$

$$a_2 = \frac{p''_0}{2} \quad (2.120)$$

$$a_3 = \frac{20p_f - 20p_0 - (8p'_f + 12p'_0)\lambda_f - (3p''_0 - p''_f)\lambda_f^2}{2\lambda_f^3} \quad (2.121)$$

$$a_4 = \frac{30p_0 - 30p_f + (14p'_f + 16p'_0)\lambda_f + (3p''_0 - 2p''_f)\lambda_f^2}{2\lambda_f^4} \quad (2.122)$$

$$a_5 = \frac{12p_f - 12p_0 - (6p'_f + 6p'_0)\lambda_f - (p''_0 - p''_f)\lambda_f^2}{2\lambda_f^5} \quad (2.123)$$

Las ecuaciones anteriores pueden aplicarse de forma recurrente para definir una curva por tramos considerando puntos de paso [23]. Si el parámetro λ es el tiempo, la primera y segunda derivada corresponden a la velocidad y aceleración. Estas restricciones sobre velocidad y aceleración son frecuentes en la generación de trayectorias para manipuladores robóticos [23].

2.6.2. Trayectorias articulares para manipuladores robóticos

Una trayectoria es una función de tiempo $q(t)$ tal que $q(t_0) = q_{init}$ y $q(t_f) = q_{final}$. En este caso, $t_f - t_0$ representa la cantidad de tiempo necesario para ejecutar la trayectoria. Dado que la trayectoria está parametrizada por el tiempo, podemos calcular velocidades y aceleraciones a lo largo de las trayectorias de la diferenciación [24]. Un algoritmo de planificación de la trayectoria no suele dar el mapa de trayectoria; se le dará sólo una secuencia de puntos (llamado puntos vía) a lo largo de la ruta. Una manera de que la ruta podría ser especificada como se muestra en la Figura (2.12), donde el movimiento deseado simplemente se registra como un conjunto de ángulos de las articulaciones (en realidad como un conjunto de valores de encoder) y el robot se puede controlar por completo en el espacio articular [24].

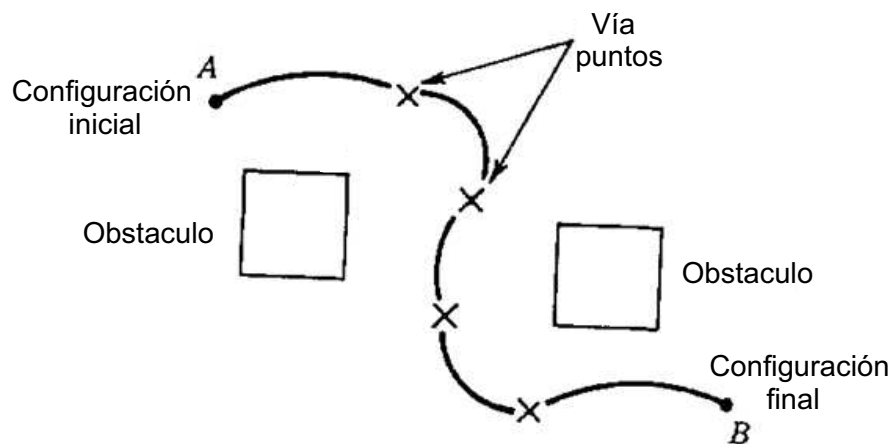


Figura 2.12: Puntos vía para planificar el movimiento alrededor de los obstáculos.

En este estudio de planificación de trayectorias se considerara el movimiento punto a punto con el fin de determinar una función suave de interpolación para cada articulación [24].

2.6.3. Trayectorias de movimiento de punto a punto

Como se describió anteriormente, el problema aquí es encontrar una trayectoria que conecta una configuración inicial a una configuración final al tiempo que satisface otras restricciones especificadas en los puntos extremos (por ejemplo, restricciones de velocidad y/o aceleración). Sin pérdida de generalidad, vamos a considerar la planificación de la trayectoria para una sola articulación, ya que

las trayectorias para las articulaciones restantes se crearán de forma independiente y exactamente de la misma manera. Por lo tanto, vamos a preocuparnos por el problema de la determinación de $q(t)$, donde $q(t)$ es una variable conjunta escalar. Nótese que todas las articulaciones deben alcanzar los puntos de paso al mismo tiempo [24].

Suponiendo que en el tiempo t_0 la variable articular satisface [24]

$$q(t_0) = q_0 \quad (2.124)$$

$$\dot{q}(t_0) = v_0 \quad (2.125)$$

y deseamos tener los valores en t_f [24]

$$q(t_f) = q_f \quad (2.126)$$

$$\dot{q}(t_f) = v_f \quad (2.127)$$

la Figura (2.13) muestra una trayectoria idónea para este movimiento. En adición, podríamos querer especificar las condiciones de la aceleración inicial y final. En este caso tenemos que agregar dos ecuaciones [24]

$$\ddot{q}(t_0) = \alpha_0 \quad (2.128)$$

$$\ddot{q}(t_f) = \alpha_f \quad (2.129)$$

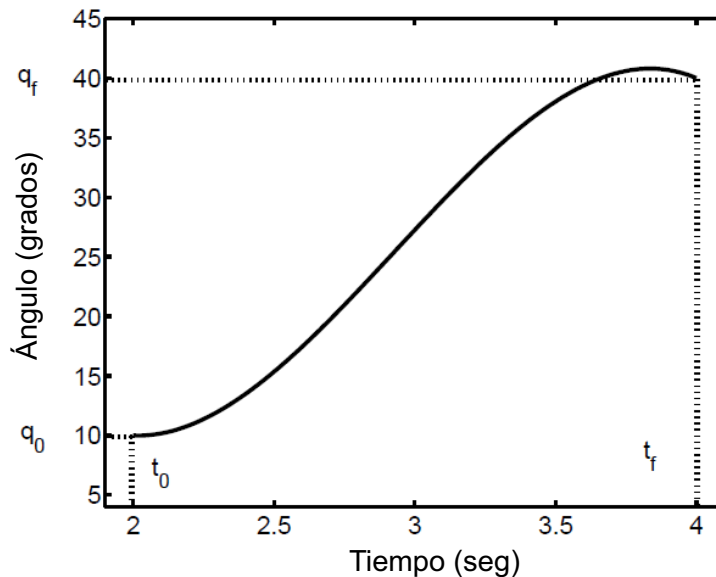


Figura 2.13: Trayectoria típica del espacio articular.

2.6.3.1. Empleo de polinomios cúbicos

Supongamos que se desea generar una trayectoria entre dos configuraciones, y que deseamos especificar las velocidades de inicio y fin de la trayectoria. Una forma de generar una curva lisa tal como el mostrado en la Figura 2.13 es por una función polinómica de t . Si tenemos cuatro restricciones para satisfacer, como (2.124) – (2.126), se requerirá un polinomio con cuatro coeficientes independientes que se pueden elegir para satisfacer dichas restricciones. Por lo tanto consideramos una trayectoria cúbica de la forma [24]:

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 t + \mathbf{a}_2 t^2 + \mathbf{a}_3 t^3 \quad (2.130)$$

Entonces la velocidad deseada es dada como [24]:

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 t + 3\mathbf{a}_3 t^2 \quad (2.131)$$

Combinando las ecuaciones (2.130) y (2.131) con las cuatro limitaciones produce cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas [24]:

$$\mathbf{q}_0 = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 t_0 + \mathbf{a}_2 t_0^2 + \mathbf{a}_3 t_0^3 \quad (2.132)$$

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 t_0 + 3\mathbf{a}_3 t_0^2 \quad (2.133)$$

$$\mathbf{q}_f = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 t_f + \mathbf{a}_2 t_f^2 + \mathbf{a}_3 t_f^3 \quad (2.134)$$

$$\mathbf{v}_f = \mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 t_f + 3\mathbf{a}_3 t_f^2 \quad (2.135)$$

Estas cuatro ecuaciones se pueden combinar en una sola ecuación matricial [24]

$$\begin{bmatrix} 1 & t_0 & t_0^2 & t_0^3 \\ 0 & 1 & 2t_0 & 3t_0^2 \\ 1 & t_f & t_f^2 & t_f^3 \\ 0 & 1 & 2t_f & 3t_f^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_0 \\ \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_0 \\ \mathbf{v}_0 \\ \mathbf{q}_f \\ \mathbf{v}_f \end{bmatrix} \quad (2.136)$$

La ecuación (2.176) siempre tiene una solución única proporcionando un intervalo de tiempo distinto de cero es permitido para la ejecución de la trayectoria [24].

Por consiguiente, si las restricciones son [23]:

$$\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0 \quad (2.137)$$

$$\mathbf{q}(t_f) = \mathbf{q}_f \quad (2.138)$$

$$\dot{\mathbf{q}}(0) = \mathbf{0} \quad (2.139)$$

$$\dot{\mathbf{q}}(t_f) = \mathbf{0} \quad (2.140)$$

Obsérvese que se trata de un movimiento que termina parándose en t_f (velocidad final nula). Los coeficientes del polinomio vienen dados por [23]:

$$a_0 = q_0 \quad (2.141)$$

$$a_1 = 0 \quad (2.142)$$

$$a_2 = \frac{3}{t_f^2} (q_f - q_0) \quad (2.143)$$

$$a_3 = -\frac{2}{t_f^3} (q_f - q_0) \quad (2.144)$$

2.6.3.2. Empleo de polinomios cúbicos con puntos de paso

Se trata del método que permite especificar movimiento, sin necesidad de pararse. En los puntos de paso se tendrá velocidades conocidas (no nulas) que corresponden a un paso sin parar [23,24]:

$$\dot{q}(0) = \dot{q}_0 \quad (2.145)$$

$$\dot{q}(t_f) = \dot{q}_f \quad (2.146)$$

Es decir, igual que en caso anterior pero con velocidades no nulas. Las ecuaciones son las mismas que se plantean en el apartado (2.6.1). Por tanto, la solución viene dado por [23,24]:

$$a_0 = q_0 \quad (2.147)$$

$$a_1 = \dot{q}_0 \quad (2.148)$$

$$a_2 = \frac{3}{t_f^2} (q_f - q_0) - \frac{2}{t_f} \dot{q}_0 - \frac{1}{t_f} \dot{q}_f \quad (2.149)$$

$$a_3 = -\frac{2}{t_f^3} (q_f - q_0) + \frac{1}{t_f^2} (\dot{q}_f + \dot{q}_0) \quad (2.150)$$

Considere una trayectoria articular compuesta por dos tramos, con ángulo inicial q_0 , ángulo de paso q_v y ángulo final q_f . El primer tramo cubico viene dado por [23,24]

$$q = a_{10} + a_{11}t + a_{12}t^2 + a_{13}t^3 \quad (2.151)$$

y el segundo por

$$q = a_{20} + a_{21}t + a_{22}t^2 + a_{23}t^3 \quad (2.152)$$

Sean t_{f1} y t_{f2} los tiempos de finalización de los dos tramos.

En este caso, pueden plantearse las ecuaciones [23,24]:

$$q_0 = a_{10} \quad (2.153)$$

$$q_v = a_{10} + a_{11}t_{f1} + a_{12}t_{f1}^2 + a_{13}t_{f1}^3 \quad (2.154)$$

$$q_v = a_{20} \quad (2.155)$$

$$q_f = a_{20} + a_{21}t_{f2} + a_{22}t_{f2}^2 + a_{23}t_{f2}^3 \quad (2.156)$$

Además, la velocidad inicial en el primer tramo y la final en el segundo son nulas y, por tanto [23,24]

$$0 = a_{11} \quad (2.157)$$

$$0 = a_{21} + 2a_{22}t_{f2} + 3a_{23}t_{f2}^2 \quad (2.158)$$

Por otra parte, la velocidad final del primer tramo debe ser igual que la inicial del segundo [23,24]

$$a_{11} + 2a_{12}t_{f1} + 3a_{13}t_{f1}^2 = a_{21} \quad (2.159)$$

Asimismo, se considera la continuidad de la aceleración. Por tanto, la aceleración final del primer tramo debe ser igual que la aceleración inicial del segundo [23,24]:

$$2a_{12} + 6a_{13}t_{f1} = a_{22} \quad (2.160)$$

Se tiene un problema con ocho ecuaciones y ocho incógnitas cuya solución para $t_{f1} = t_{f2} = t_f$ es [23,24]:

$$a_{10} = q_0 \quad (2.161)$$

$$a_{11} = 0 \quad (2.162)$$

$$a_{12} = \frac{12q_v - 3q_f - 9q_0}{4t_f^2} \quad (2.163)$$

$$a_{13} = \frac{-8q_v + 3q_f + 5q_0}{4t_f^3} \quad (2.164)$$

$$a_{20} = q_v \quad (2.165)$$

$$a_{21} = \frac{3q_f - 3q_0}{4t_f} \quad (2.166)$$

$$a_{22} = \frac{-12q_v + 6q_f + 6q_0}{4t_f^2} \quad (2.167)$$

$$a_{23} = \frac{8q_v - 5q_f - 3q_0}{4t_f^3} \quad (2.168)$$

2.6.3.3. Empleo de polinomios de orden superior

Una discontinuidad en la aceleración conduce a un impulsivo sacudido (el derivado de la aceleración se llama impulso), que pueden excitar modos de vibración en el manipulador y reducir la precisión de seguimiento. Por esta razón, se puede desear para especificar las restricciones sobre la aceleración, así como sobre la posición y velocidad. En este caso, tenemos seis limitaciones (una para posición inicial y final, velocidad inicial y final, y las aceleración inicial y final). Por lo tanto se requiere un polinomio de quinto orden [24]:

$$q_0 = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + a_4t^4 + a_5t^5 \quad (2.169)$$

Utilizando (2.124) – (2.129) y teniendo el número apropiado de derivados se obtienen las siguientes ecuaciones [24]

$$q_0 = a_0 + a_1t_0 + a_2t_0^2 + a_3t_0^3 + a_4t_0^4 + a_5t_0^5 \quad (2.170)$$

$$v_0 = a_1 + 2a_2t_0 + 3a_3t_0^2 + 4a_4t_0^3 + 5a_5t_0^4 \quad (2.171)$$

$$\alpha_0 = 2a_2 + 6a_3t_0 + 12a_4t_0^2 + 20a_5t_0^3 \quad (2.172)$$

$$q_f = a_0 + a_1t_f + a_2t_f^2 + a_3t_f^3 + a_4t_f^4 + a_5t_f^5 \quad (2.173)$$

$$v_f = a_1 + 2a_2t_f + 3a_3t_f^2 + 4a_4t_f^3 + 5a_5t_f^4 \quad (2.174)$$

$$\alpha_f = 2a_2 + 6a_3t_f + 12a_4t_f^2 + 20a_5t_f^3 \quad (2.175)$$

puede ser escrito como [24]

$$\begin{bmatrix} 1 & t_0 & t_0^2 & t_0^3 & t_0^4 & t_0^5 \\ 0 & 1 & 2t_0 & 3t_0^2 & 4t_0^3 & 5t_0^4 \\ 0 & 0 & 2 & 6t_0 & 12t_0^2 & 20t_0^3 \\ 1 & t_f & t_f^2 & t_f^3 & t_f^4 & t_f^5 \\ 0 & 1 & 2t_f & 3t_f^2 & 4t_f^3 & 5t_f^4 \\ 0 & 0 & 2 & 6t_f & 12t_f^2 & 20t_f^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 \\ v_0 \\ \alpha_0 \\ q_f \\ v_f \\ \alpha_f \end{bmatrix} \quad (2.176)$$

Sea el caso donde las condiciones son [24]:

$$q_0 = a_0 \quad (2.177)$$

$$q_f = a_0 + a_1t_f + a_2t_f^2 + a_3t_f^3 + a_4t_f^4 + a_5t_f^5 \quad (2.178)$$

$$v_0 = v(0) = a_1 \quad (2.179)$$

$$v_f = a_1 + 2a_2t_f + 3a_3t_f^2 + 4a_4t_f^3 + 5a_5t_f^4 \quad (2.180)$$

$$\alpha_0 = \alpha(0) = 2a_2 \quad (2.181)$$

$$\alpha_f = 2a_2 + 6a_3t_f + 12a_4t_f^2 + 20a_5t_f^3 \quad (2.182)$$

Estas restricciones especifican un sistema lineal de seis ecuaciones con seis incógnitas cuya solución es [24]

$$a_0 = q_0 \quad (2.183)$$

$$a_1 = v_0 \quad (2.184)$$

$$a_2 = \frac{\alpha_0}{2} \quad (2.185)$$

$$a_3 = \frac{20q_f - 20q_0 - (8v_f + 12v_0)t_f - (3\alpha_0 - \alpha_f)t_f^2}{2t_f^3} \quad (2.186)$$

$$a_4 = \frac{30q_0 - 30q_f + (14v_f + 16v_0)t_f + (3\alpha_0 - 2\alpha_f)t_f^2}{2t_f^4} \quad (2.187)$$

$$a_5 = \frac{12q_f - 12q_0 - (6v_f + 6v_0)t_f - (\alpha_0 - \alpha_f)t_f^2}{2t_f^5} \quad (2.188)$$

En la generación de la trayectoria se puede hacer el uso de un solo polinomio de alto orden para toda la trayectoria, o el uso de polinomios de bajo orden para los segmentos de trayectoria adyacentes a través de puntos. En la segunda opción para la generación de trayectoria, estos polinomios a veces referidos como la interpolación de polinomios o mezcla de polinomios, se debe que tener cuidado de que las restricciones de continuidad (por ejemplo, en la velocidad y la aceleración) se satisfacen en los puntos intermedios, al cambiar de un polinomio a otro, es decir, una secuencia de movimientos se puede planificar el uso de la fórmula mediante el uso de las condiciones finales q_f , v_f del movimiento de orden i como condiciones iniciales para el $i + 1$ -ésimo movimiento [24].

2.7. Biomecánica básica de la marcha humana

La locomoción bípeda, o marcha, es una tarea funcional que requiere interacciones complejas y coordinación entre la mayoría de las grandes articulaciones del cuerpo, particularmente de las extremidades inferiores. Esta tarea fundamental ha sido objeto de estudio por científicos durante varios siglos, tanto respecto a la descripción de los movimientos típicos del cuerpo como respecto a las *condiciones patológicas* e intervenciones terapéuticas. El análisis y entrenamiento de la marcha en una forma u otra es un tema principal de la práctica de fisioterapia y de medicina en la rehabilitación. A medida que los avances tecnológicos se hacen más sofisticados y accesibles, los análisis biomecánicos detallados de la marcha pueden desarrollarse cada vez más en una clínica. Esto significa que la biomecánica de la marcha necesita ser más ampliamente comprendida tanto por clínicos como por investigadores.

A continuación se resumen las características anatómicas de las grandes articulaciones de los miembros inferiores y el tronco, describiendo las fases de la marcha de adultos sanos en los planos: frontal (coronal o longitudinal), sagital y transversal (horizontal) (Figura 2.14) [25].

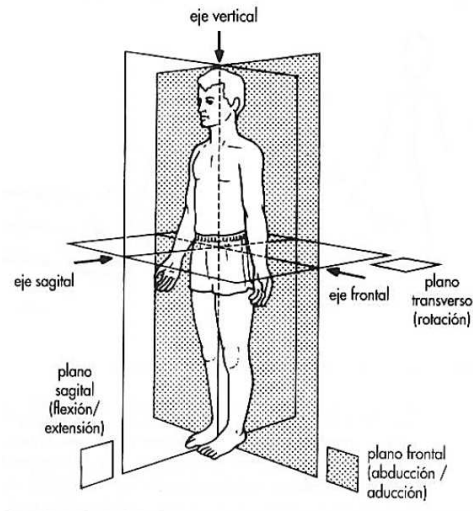


Figura 2.14: Planimetría del cuerpo humano.

2.7.1. Consideraciones anatómicas

2.7.1.1. Cadera

Durante la marcha, el movimiento de la cadera tiene lugar en los tres planos: la flexión–extensión tiene lugar en el plano sagital; la aducción–abducción tiene lugar sobre el plano frontal; y las rotaciones interna y externa sobre el plano transversal (Figura 2.15).

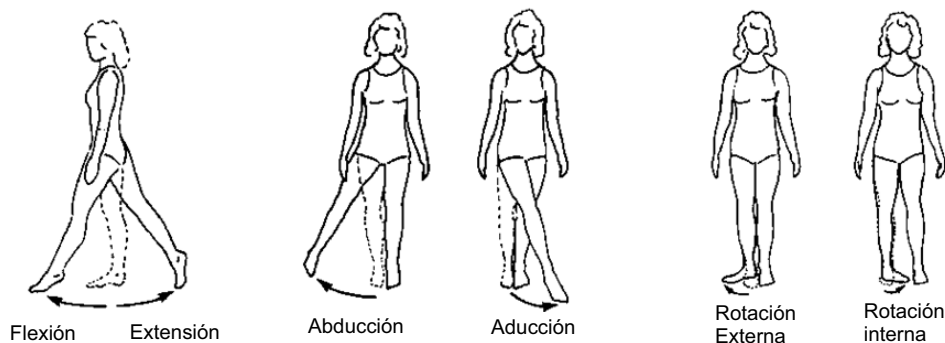


Figura 2.15: Movimientos de la articulación de la cadera

Aunque los movimientos de flexión–extensión son los de mayor amplitud, los movimientos en los otros dos planos son notables y consistentes dentro de y entre diferentes individuos. Además, las alteraciones en cualquier de los tres planos de movimiento pueden causar desviaciones problemáticas del típico patrón de marcha en la cadera y en otras articulaciones.

En el plano sagital, el rango de movimiento de flexión es de 0° a aproximadamente 140° y el rango de extensión va de 0° a 15° como se puede observar en la Figura (2.16), donde las letras C, R y T corresponden a las articulaciones de cadera, rodilla y tobillo respectivamente [25].

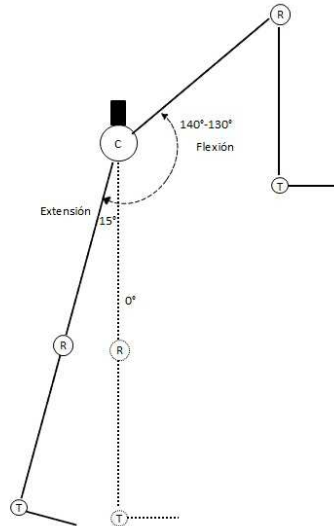


Figura 2.16: Rango de flexión-extensión de la cadera

2.7.1.1. Rodilla

En el caso de la rodilla, son también posibles tres grados de libertad de rotación angular durante la marcha. El movimiento principal es la flexión-extensión de la rodilla en el plano sagital, en este plano, el movimiento desde la extensión completa a la flexión completa de la rodilla va de 0° a los 140° aproximadamente, aunque hay casos en que se presenta un leve movimiento de hiperextensión de 10° como máximo (Figura 2.17). También pueden realizarse la rotación externa e interna de la rodilla y la aducción-abducción en el plano frontal, pero con menos consistencia y amplitud entre individuos sanos debido a restricciones del tejido blando y del hueso a estos movimientos [25].

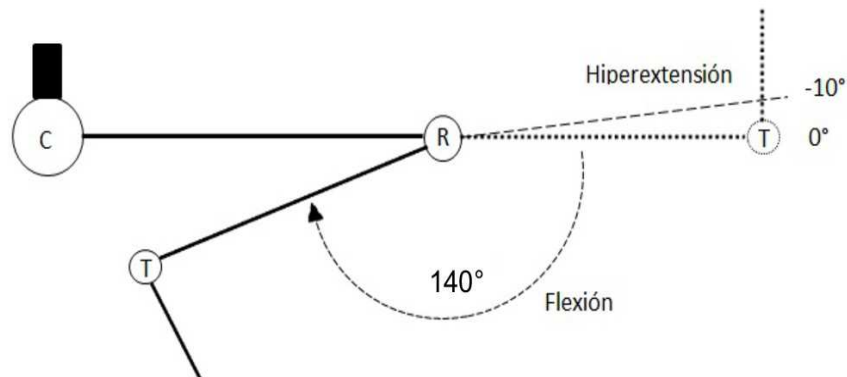


Figura 2.17: Rango de flexión-extensión de la rodilla

2.7.1.3. Tobillo

El movimiento del tobillo está limitado por la morfología de la articulación *tibioperonea–astragalina*, que permite sólo la flexión plantar (extensión) y la dorsiflexión (flexión), donde las mediciones muestran un movimiento normal de 10° a 20° de flexión dorsal y de 40° a 55° de flexión plantar (Figura 2.18). Aunque frecuentemente se modela en el análisis de la marcha como un segmento rígido, se necesita el pie para actuar tanto como una estructura semirrígida (como un resorte durante la transferencia de peso y como un brazo de palanca durante el despegue) o como una estructura rígida que permite una estabilidad adecuada para mantener el peso del cuerpo [25].

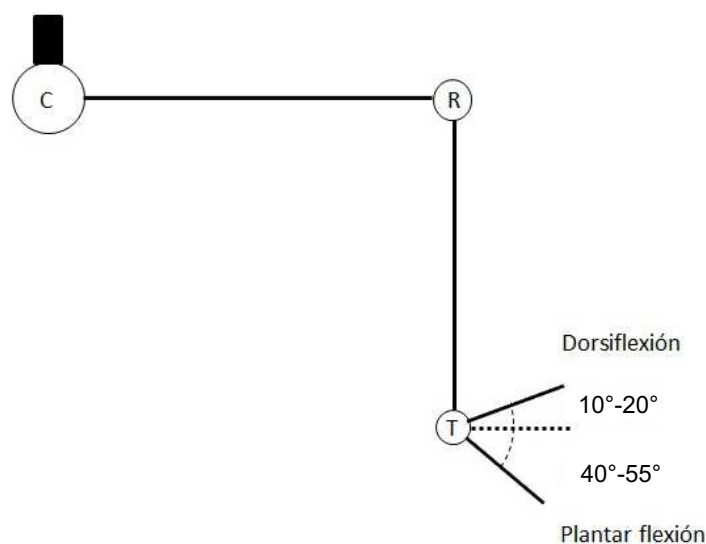


Figura 2.18: Rango de flexión–extensión del tobillo

2.7.1.4. Tronco

La pelvis y el tórax pueden ser considerados por separado o como una unidad rígida que comprende la cabeza, las extremidades superiores y el tronco (pelvis y tórax) [25].

2.7.2. Ciclo de marcha

La locomoción bípeda es una actividad cíclica consistente en dos fases para cada miembro, la fase portante y la fase oscilante. La marcha es más o menos simétrica con respecto al movimiento angular de las principales articulaciones, a los patrones de activación muscular, al comportamiento en carga de las extremidades inferiores y como resultado, es eficiente trasladando el centro de gravedad del cuerpo en todas las direcciones de locomoción. Un ciclo de marcha completo se define por la realización secuencial de una fase portante y oscilante de una extremidad o como un paso (Figuras 2.19 y 2.20).

Los límites de un paso pueden ser delimitados por un hito específico de la marcha (por ejemplo, contacto inicial) en un miembro hasta la siguiente realización del mismo hito en el miembro homolateral [25].

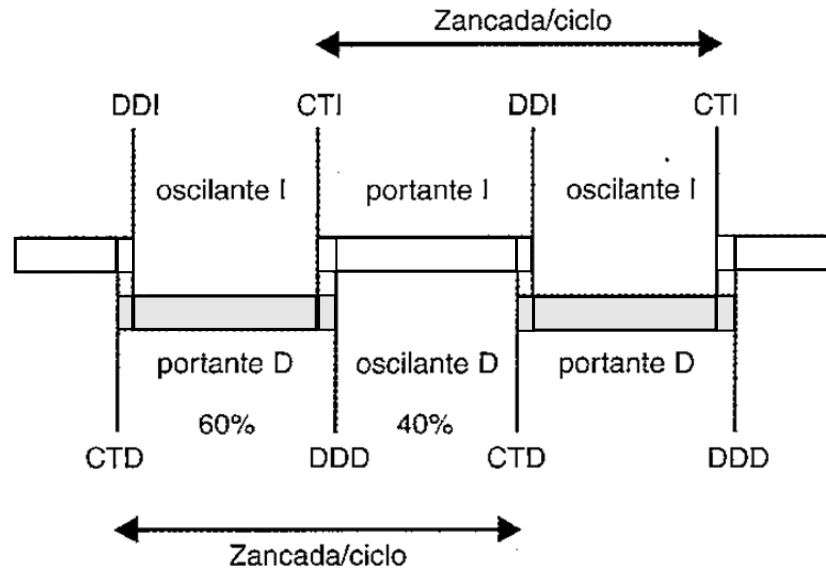


Figura 2.19: Diagrama esquemático de la secuencia temporal del ciclo de marcha.

Del diagrama esquemático de la Figura 2.19 muestra completamente la zancada derecha (barras grises) e izquierda. CT, contacto inicial del talón; DD, despegue de los dedos, D, derecha; I, izquierda. Las áreas de solapamiento entre CT y DD representan los periodos de apoyo bipodal, que coinciden con la aparición de la pre-oscilación en el miembro atrasado y la respuesta a la carga en el miembro adelantado. En el caso de la zancada derecha, el inicio del apoyo bipodal (que dura aproximadamente 10% del paso) tiene lugar desde el CTD al DDI, y el final del apoyo bipodal (permanente al 10% de la zancada) tiene lugar desde el CTI hasta DDD [25].

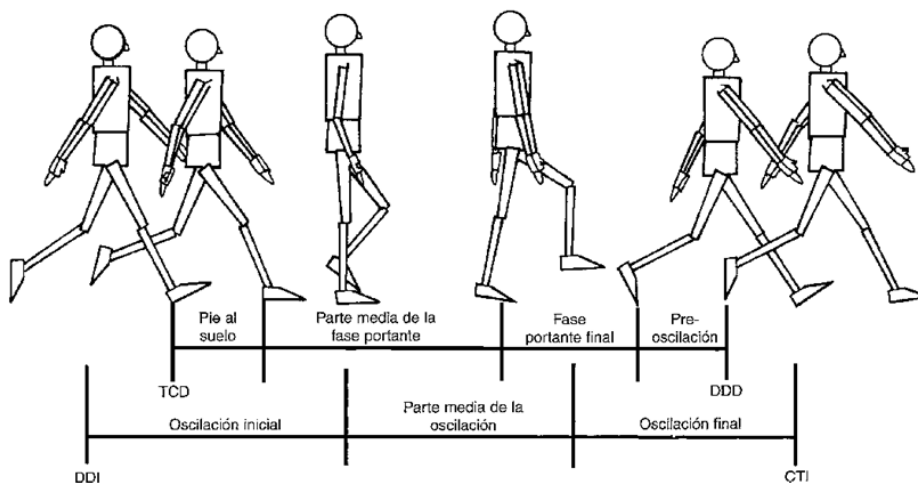


Figura 2.20: Diagrama esquemático de la secuencia del ciclo de marcha.

El diagrama esquemático de la secuencia espacial del ciclo de marcha de la Figura 2.20 muestra la fase portante en la pierna derecha y la fase oscilante en la pierna izquierda. TC, talón/contacto inicial; DD, despegue de los dedos, D, derecha; I, izquierda. La fase portante se define por dos límites CT y DD, y se descompone en cuatro periodos, respuesta a la carga (pie plano) (del 0 al 10 % de la zancada), parte media de la fase portante (del 10 % al 30 % de la zancada), fase portante final (desde 30 % al 50 % de la zancada), y la pre-oscilación (del 50 % al 60 % de la zancada). La fase oscilante se define por dos límites, DD y CT, y se descomponen en tres periodos, la oscilación inicial (desde el 60 % al 70 % de la zancada), la parte media de la fase de oscilación (desde 70 % al 85 % del paso) y la fase oscilante final (desde 85 % al 100 % del paso). A continuación se dará una explicación más detallada de las fases del ciclo de marcha [25].

La fase portante abarca el 60 % de la zancada y consta de dos períodos de doble apoyo del miembro (inicial y final), cuando el pie contralateral está en contacto con el suelo, y de un periodo intermedio de apoyo unipodal, cuando el miembro contralateral está inmerso en la fase oscilante. La fase portante se puede descomponer en seis hitos o periodos. El contacto inicial o contacto del talón se define como el instante en el que el pie contacta con el suelo. La respuesta a la carga es un intervalo durante el cual la planta del pie toma contacto con el suelo y el peso del cuerpo recae sobre el miembro en carga. El período de respuesta a la carga coincide con el fin del doble apoyo inicial de los dos miembros aproximadamente en el 10 % o 12 % del paso. La parte media de la fase portante es el período durante el cual la tibia rota sobre el pie fijo en la dirección de locomoción. El comienzo de esta parte media de la fase portante coincide con el apoyo unipodal y dura aproximadamente el 10 % o 30 % del paso. La fase portante final es el período durante el cual el peso del cuerpo es transferido desde las regiones del retropié y mediopié hacia el antepié. Tiene lugar desde el 30 % hasta el 50 % del paso y coincide con el inicio del apoyo bipodal final. La parte previa a la fase oscilante tiene lugar simultáneamente con el final del doble apoyo y dura desde aproximadamente el 50 % hasta el 60 % del paso. Durante esta fase previa, el peso es transferido al miembro contralateral como preparación a la fase oscilante. El final de esta parte previa a la fase oscilante corresponde al despegue del suelo de los dedos en el momento en que el pie pierde contacto con el suelo, por lo tanto delimita el comienzo de la fase oscilante [25].

La fase oscilante comprende el 40 % del ciclo de marcha y se descompone en tres periodos. El inicio de la fase oscilante dura aproximadamente desde el 60 % hasta el 73 % del paso (aproximadamente un tercio de la fase oscilante), desde el despegue de los dedos hasta que el pie oscilante está a la misma altura que el pie portante. La mitad de la fase oscilante termina cuando la tibia del miembro oscilante se orienta verticalmente y dura desde el 73 % al 87 % del paso. La fase oscilante final dura desde el 87 % al 100 % del paso y termina en el momento del contacto inicial [25].

2.7.3. Cinemática angular

Esta discusión se centra en los desplazamientos articulares angulares alrededor de los ejes de movimiento del miembro inferior principal y de los segmentos axiales (Figura 2.14) durante la marcha en terreno llano. En relación al presente trabajo los movimientos con mayor importancia son los que se realizan en el plano sagital, debido a la configuración del sistema bípedo a simular, dependiendo del rango en que se encuentran estos movimientos son conocidos como flexión y extensión para cada articulación.

Las Figuras 2.21–2.24 (Las líneas continuas indican los valores medios sobre el curso de una sola zancada y las líneas discontinuas indican 90 % del intervalo calculado), muestran ejemplos de desplazamientos angulares en estos segmentos de movimiento durante el transcurso de una zancada sobre terreno llano en una población adulta sana de 15 a 35 años de edad que presentaron rangos de valores para los parámetros de tiempo–distancia de la marcha a una velocidad de marcha libre mostrados en la Tabla 2.1 [25].

Etapa	Rango	Unidades
Zancada o ciclo de tiempo	1.00 a 1.200	<i>m/s</i>
Zancada o ciclo de longitud	1.20 a 1.900	<i>m</i>
Longitud del paso	0.56 a 1.100	<i>m</i>
Anchura del paso	7.70 a 9.600	<i>cm</i>
Cadencia	90.0 a 140.0	<i>pasos/minuto</i>
Velocidad	0.90 a 1.800	<i>m/s</i>

Tabla 2.1: Rango de valores normales (Parámetros de tiempo–distancia).

2.7.3.1. Cadera

En el contacto inicial, la cadera esta flexionada aproximadamente 30° . A lo largo de la fase portante final, la cadera se extiende hasta que alcanza aproximadamente 10° de extensión. Durante la fase pre–oscilante y a lo largo de la mayoría de la fase oscilante, la cadera se flexiona hasta aproximadamente 35° , y entonces comienza a extiende justo antes del siguiente contacto inicial mientras el miembro inferior se extiende para situar el pie en el suelo, (Fig. 2.21A) [25].

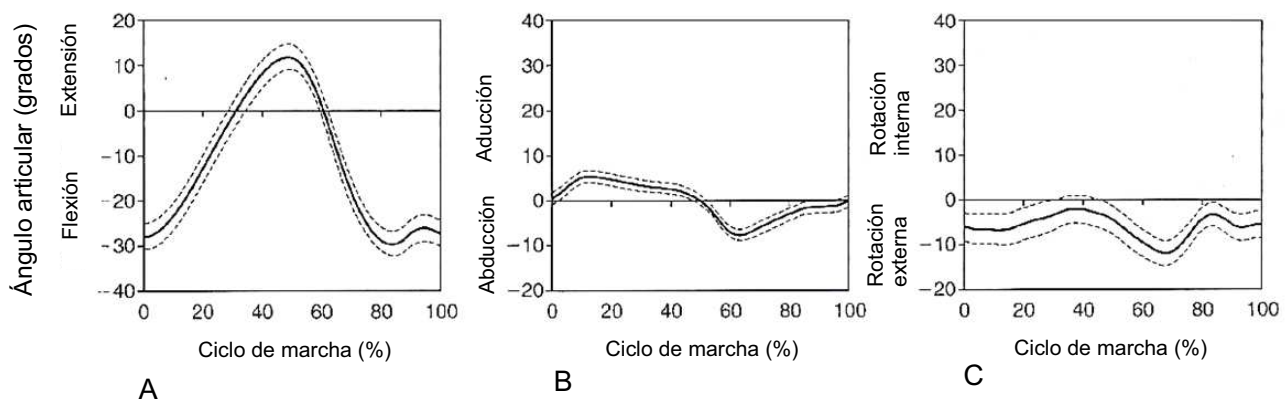


Figura 2.21: Desplazamientos angulares de la cadera.

La cadera se sitúa en posición neutra con respecto a la aducción–abducción en el contacto inicial (Fig. 2.21B). Para el final del apoyo bipodal inicial o al inicio de la parte media de la fase portante, la cabeza alcanza su máxima posición de aducción, aproximadamente 5° . A lo largo del resto de la fase portante, la cadera se abduce hasta aproximadamente 10° en el despegue de los dedos, entonces repentinamente aduce a lo largo de la fase oscilante preparando el siguiente contacto inicial [25].

Los movimientos rotacionales de la cadera son más variables entre individuos durante la marcha (Fig. 2.21C). En el contacto inicial, la cadera está rotada externaente aproximadamente 5° y permanece así a lo largo de la respuesta a la carga y en el inicio de la parte media de la fase oscilante. Comienza a rotar internamente hasta situarse a 2° de la rotación neutra en la mitad de la fase portante terminal, entonces invierte su dirección y rota externamente, a medida que el talón comienza a elevarse, hasta su pico de 15° de rotación externa durante la fase oscilante inicial. Cuando el miembro oscilante pasa la extremidad inferior contraria portante, durante la mitad de la fase oscilante, su cadera rota internamente hasta tres grados respecto la posición neutra, luego oscila entre 3° y 5° de rotación externa durante la fase terminal oscilante. Excepto quizás en un pequeño periodo durante la mitad de la fase oscilante terminal, la cadera nunca llega a una posición de rotación interna durante la marcha [25].

2.7.3.2. Rodilla

En el contacto inicial, la rodilla está casi totalmente extendida, entonces gradualmente se flexiona hacia su pico de flexión de aproximadamente 20% en la fase de apoyo, durante el inicio de la parte media de la fase portante (Fig. 2.22A). Durante la última porción de la parte media de la fase portante, se extiende otra vez casi completamente, y entonces se flexiona hasta aproximadamente 40% durante la fase pre-oscilante. Inmediatamente tras el despegue de los dedos, la rodilla continua flexionando hasta su pico de flexión de 60% a 70% en la mitad de la fase oscilante, entonces se extiende otra vez para el siguiente contacto inicial [25].

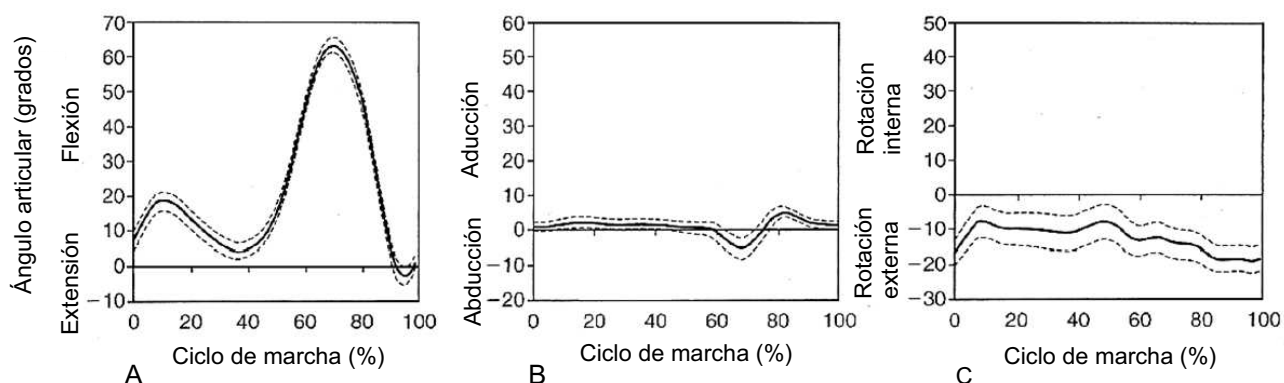


Figura 2.22: Desplazamientos angulares de la rodilla.

En el plano de movimiento de la aducción-abducción, la rodilla es bastante estable durante la fase portante debido a la presencia de restricciones óseas y ligamentosas en la posición relativamente extendida de la rodilla. El alineamiento esquelético individual desempeña un papel principal en los movimientos de aducción-abducción de la rodilla. En la muestra normal presentada en la Figura 2.22B en la que predominan los hombres (25 hombre/29 sujetos), la rodilla permanece en una leve posición de aducción a lo largo de la fase portante pero fluctúa solo con un margen de 2° ó 3° respecto a la posición neutra. Durante la fase pre-oscilante y en el inicio de la misma, mientras el peso trasladado hacia el miembro contrario, la rodilla puede abducirse hasta 10° , pero luego recupera su posición de aducción en la fase oscilante terminal [25].

La rotación interna y externa alrededor de la rodilla durante la marcha, como en el caso de la aducción–abducción, está determinada principalmente por mecanismos óseos y ligamentosos y es variable entre individuos. Aunque el rango de desplazamiento sean relativo, los patrones globales de movimiento deberían ser similares [25]. En la muestra normal (25 hombres/29 sujetos) representada en la Figura 2.22C, la rodilla se mantiene en una posición de rotación externa a lo largo de la fase portante y flutúa entre 10° y 20° . Los movimientos rotacionales sobre la rodilla están fuertemente acoplados con los movimientos de flexión y extensión. Una comparación de la Figura 2.22A–C ilustra que durante los periodos en que la rodilla está flexionando, también rota internamente; mientras que en los periodos en que la rodilla está extendida, también hace rotación externa [25].

2.7.3.3. Tobillo

En el contacto inicial, la articulación del tobillo está en posición neutra o ligeramente en flexión plantar de 3° a 5° (Figura 2.23). Desde el contacto inicial hasta la respuesta a la carga, el tobillo realiza flexión plantar (es decir, extiende) hasta un máximo de 7° mientras el pie desciende hacia la superficie de apoyo. A lo largo de la parte media de la fase portante, el tobillo hace flexión dorsal (es decir, se flexiona) hasta un máximo de 15° mientras la extremidad inferior rota anterior y medialmente sobre la extremidad inferior de apoyo. Durante la fase portante terminal y la pre–oscilante, el tobillo hace flexión plantar hasta aproximadamente 15° mientras que el peso del cuerpo se transfiere hacia el miembro contralateral. Inmediatamente tras el despegue de los dedos, el tobillo hace una rápida dorsiflexión hacia la posición neutra para lograr la elevación de los dedos y luego puede flexionar plantarmente durante la fase oscilante terminal como preparación para el contacto inicial [25].

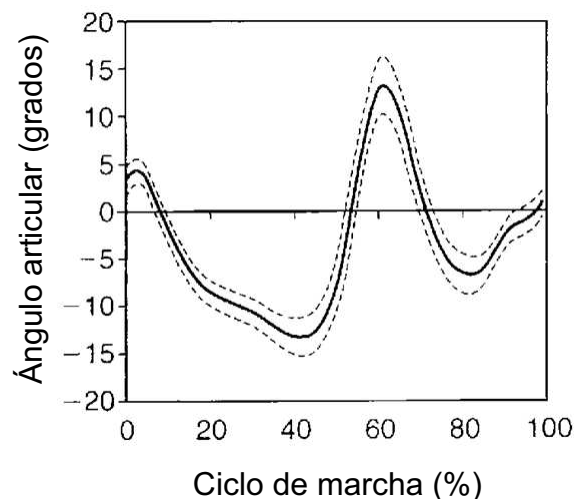


Figura 2.23: Dorsiflexión (flexión) y flexión plantar (extensión) del tobillo.

Tronco y pelvis

En el contacto inicial, la pelvis báscula anteriormente aproximadamente 7° (Figura 2.24A, abajo) rota hacia delante aproximadamente 5° (Fig. 2.24C, abajo), y no hay asimetrías de derecha a izquierda. Durante la respuesta a la carga, la pelvis báscula hacia arriba en el lado del miembro portante hasta un máximo de 5° , entonces recupera la basculación neutra en el siguiente contacto inicial del

miembro oscilante (Fig. 2.24B, abajo). Durante la fase portante, la pelvis rota hacia atrás en el lado del miembro portante y báscula anteriormente (parte inferior de Fig. 2.24 C y B, respectivamente). La excursión total de la inclinación anteroposterior es aproximadamente 5° ; para la inclinación lateral, aproximadamente 10° ; y para la rotación anterior y posterior; aproximadamente 10° [25]. El movimiento del tronco durante la marcha es contrario en dirección, o fuera de fase, respecto al movimiento de la pelvis (Fig. 2.24, A–C, arriba). Por ejemplo, en el contacto inicial, el tronco rota hacia atrás aproximadamente 3° mientras la pelvis rota hacia delante aproximadamente 5° . Las amplitudes de los desplazamientos angulares del segmento del tronco, como se refleja en el movimiento de la cintura escapular, son levemente atenuados en comparación con los movimientos de la pelvis, como puede ser fácilmente apreciado comparando la representaciones de arriba (tronco) y abajo (pelvis) en la Figura 2.24 [25].

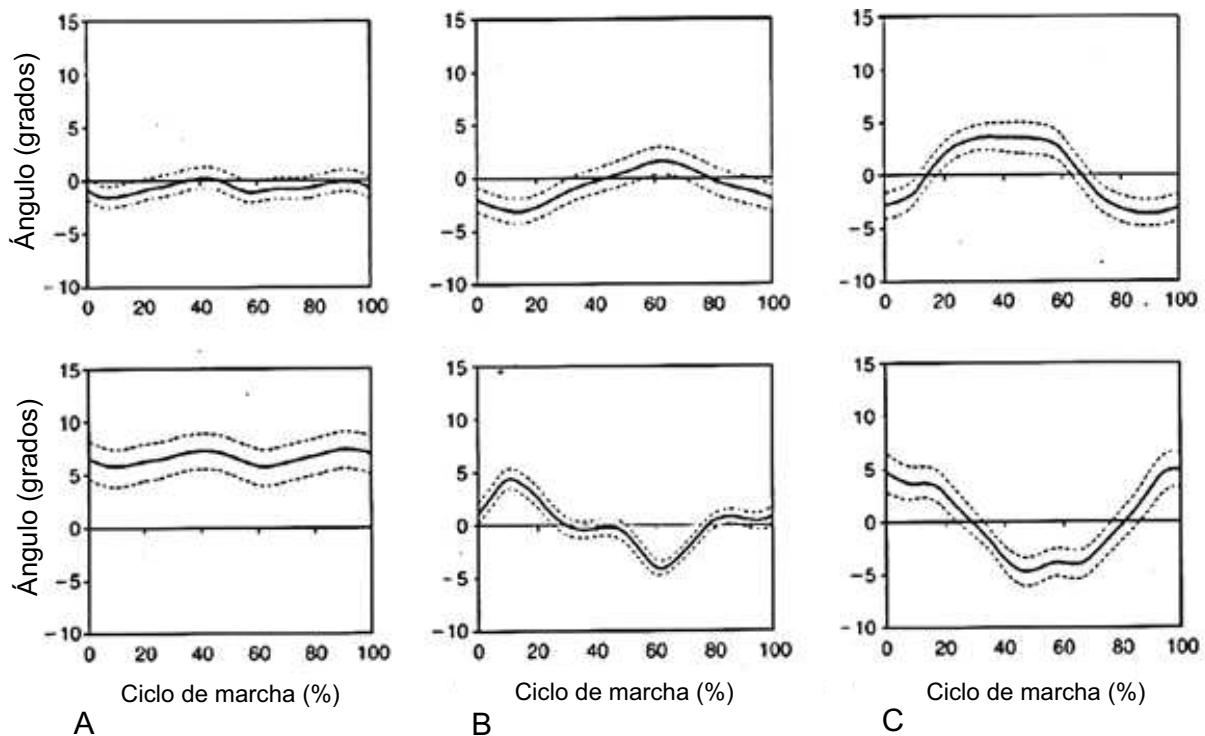


Figura 2.24: Rotación angular del tronco y la pelvis .

2.8. Conclusiones

La simulación de cualquier sistema físico siempre está acompañada de un estudio previo a su desarrollo, conocer el sistema matemáticamente y su evolución durante diferentes escenarios nos permite saber con cierta probabilidad como el sistema se desempeñará. La estabilidad en un sistema robótico con la ley de control aplicado es fundamental para garantizar el movimiento deseado. Finalmente, la definición de la tarea a ejecutar por parte del sistema robótico nos permite determinar las posiciones y trayectorias deseadas a través de métodos matemáticos que mayor nos convenga, según los estándares definidos del objetivo a conseguir por parte de la simulación.

Capítulo 3

Modelado matemático

Después de una breve introducción sobre las investigaciones de los robots bípedos y sus aportaciones en la rehabilitación, seguido de una revisión teórica de conceptos de robótica necesarios para el proceso de la tesis; a continuación, en el presente capítulo se desarrolla los modelos matemáticos del sistema bípedo propuesto.

3.1. Descripción del sistema bípedo propuesto

De manera general, el sistema bípedo está formado por dos sub-sistemas, cada uno representa una de las piernas: el sub-sistema de la pierna derecha (SPD), y el sub-sistema de la pierna izquierda (SPI). En su totalidad, el sistema está compuesto por 7 eslabones rígidos que son enumerados como se observa en la Figura (3.1).

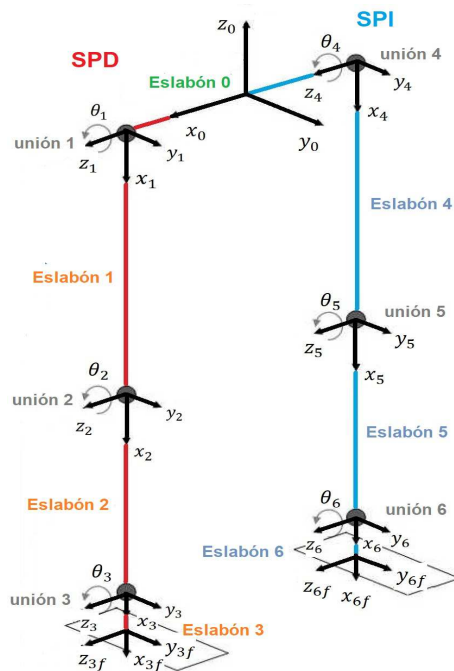


Figura 3.1: Composición del robot bípedo.

Se considera como eslabón 0 el que representa la cadera y en la que se unen los dos sub-sistemas, el **SPD** y el **SPI**. Por consecuencia se tiene una base común para ambos sub-sistemas. Los eslabones 1, 2 y 3 componen el sub-sistema de la pierna derecha, y los eslabones 4, 5 y 6 forman el sub-sistema de la pierna izquierda. En cada pierna, existen 3 articulaciones del tipo rotacional. El sistema bípedo está formado por 6 grados de libertad. La posición y orientación de los pies son definidos como efectores finales con respecto al sistema de coordenadas base (x_0, y_0, z_0) que se localiza en medio del eslabón 0, ver Figura (3.1).

Para la obtención de los modelos matemáticos del sistema bípedo se realiza el análisis de los sub-sistemas **SPI** y **SPD** de manera individual. Después, se acoplan los modelos obtenidos de ambos sub-sistemas para obtener el modelo dinámico general del sistema bípedo completo. Esta forma de analizar el sistema es un método ampliamente usado en sistemas cooperativos de robots manipuladores [26–28].

3.2. Modelo cinemático directo

Para el sistema bípedo se obtuvieron dos matrices para la localización de los efectores finales, una para el sub-sistema de la pierna derecha **SPD** y otra para el sub-sistema de la pierna izquierda **SPI**. La cinemática directa del sistema se obtuvo aplicado el algoritmo de **Denavit-Hartenberg** (D–H). El análisis inicia desde el sistema de referencia fijo $\{x_0, y_0, z_0\}$ (coordenada base) ubicado en la cadera, hasta al efector final de cada sub-sistema. El sistema de referencia móvil para el sub-sistema **SPD** es $\{x_{3f}, y_{3f}, z_{3f}\}$, mientras que para el sub-sistema **SPI** es $\{x_{6f}, y_{6f}, z_{6f}\}$. La representación matricial de cada eslabón se obtuvo con los parámetros descritos en las Tablas (3.1), (3.2) y las proyecciones realizadas en la Figura (3.2).

Articulación	θ	d	a	α
1	θ_1	0	l_1	0
2	θ_2	0	l_2	0
3	θ_3	0	l_3	0

Tabla 3.1: Parámetros de D–H para $\{SPD\}$.

Articulación	θ	d	a	α
4	θ_4	0	l_1	0
5	θ_5	0	l_2	0
6	θ_6	0	l_3	0

Tabla 3.2: Parámetros de D–H para $\{SPI\}$.

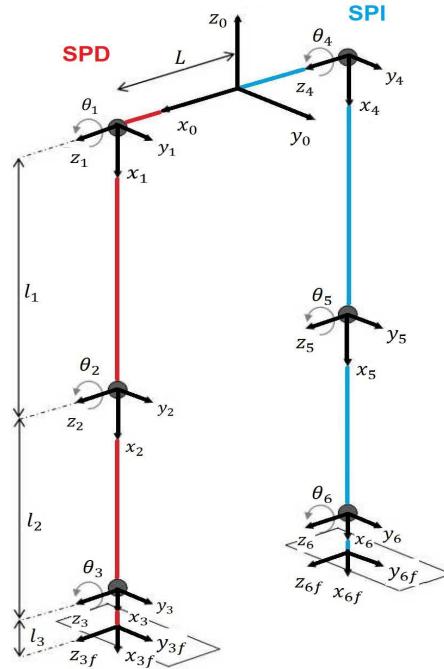


Figura 3.2: Parámetros para el robot bípedo.

La descripción de la posición y orientación del sub-sistema de la pierna derecha **SPD** es dada por las siguientes matrices de transformación homogénea:

$${}^1A_2 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & -\text{sen}(\theta_1) & 0 & l_1 \cos(\theta_1) \\ \text{sen}(\theta_1) & \cos(\theta_1) & 0 & l_1 \text{sen}(\theta_1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

$${}^2A_3 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) & -\text{sen}(\theta_2) & 0 & l_2 \cos(\theta_2) \\ \text{sen}(\theta_2) & \cos(\theta_2) & 0 & l_2 \text{sen}(\theta_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

$${}^3A_{3f} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_3) & -\text{sen}(\theta_3) & 0 & l_3 \cos(\theta_3) \\ \text{sen}(\theta_3) & \cos(\theta_3) & 0 & l_3 \text{sen}(\theta_3) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

La ubicación espacial de los sistemas de coordenadas $\{x_2, y_2, z_2\}$, $\{x_3, y_3, z_3\}$ y $\{x_{3f}, y_{3f}, z_{3f}\}$ que describen al sub-sistema $\{\text{SPD}\}$ con respecto al sistema de coordenadas fijo $\{x_1, y_1, z_1\}$ son descritos por las siguientes matrices de transformación:

$${}^1A_2 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & -\text{sen}(\theta_1) & 0 & l_1 \cos(\theta_1) \\ \text{sen}(\theta_1) & \cos(\theta_1) & 0 & l_1 \text{sen}(\theta_1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} {}^1A_3 &= {}^1A_2 {}^2A_3 \\ &= \begin{bmatrix} C\theta_{12} & -S\theta_{12} & 0 & l_2 C\theta_{12} + l_1 C\theta_1 \\ S\theta_{12} & C\theta_{12} & 0 & l_2 S\theta_{12} + l_1 S\theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} {}^1A_{3f} &= {}^1A_2 {}^2A_3 {}^3A_{3f} \\ &= \begin{bmatrix} C\theta_{123} & -S\theta_{123} & 0 & l_3 C\theta_{123} + l_2 C\theta_{12} + l_1 C\theta_1 \\ S\theta_{123} & C\theta_{123} & 0 & l_3 S\theta_{123} + l_2 S\theta_{12} + l_1 S\theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.6)$$

donde:

$$\begin{aligned} C\theta_{123} &= \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ S\theta_{123} &= \text{sen}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ C\theta_{12} &= \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ S\theta_{12} &= \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \\ C\theta_1 &= \cos(\theta_1) \\ S\theta_1 &= \text{sen}(\theta_1) \end{aligned}$$

Para relacionar las matrices descritas en (3.4)–(3.6) con el sistema de coordenadas fijo ubicado en la cadera $\{x_0, y_0, z_0\}$, son multiplicadas por la siguiente matriz de traslación, que a la vez describe la ubicación espacial de la articulación de la cadera con respecto al sistema de coordenadas base:

$${}^0A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & L \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & L \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Por lo tanto, la ubicación de los sistemas de coordenadas de los elementos que componen al sub-sistema **SPD** con respecto al sistema de coordenadas base $\{x_0, y_0, z_0\}$, están definidos por (3.7) y:

$$\begin{aligned} {}^0A_2 &= {}^0A_1 {}^1A_2 \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & L \\ \text{sen}(\theta_1) & \text{cos}(\theta_1) & 0 & l_1 \text{sen}(\theta_1) \\ -\text{cos}(\theta_1) & \text{sen}(\theta_1) & 0 & -l_1 \text{cos}(\theta_1) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} {}^0A_3 &= {}^0A_1 {}^1A_3 \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & L \\ S\theta_{12} & C\theta_{12} & 0 & l_2 S\theta_{12} + l_1 S\theta_1 \\ -C\theta_{12} & S\theta_{12} & 0 & -l_2 C\theta_{12} - l_1 C\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} {}^0A_{3f} &= {}^0A_1 {}^1A_{3f} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & L \\ S\theta_{123} & C\theta_{123} & 0 & l_3 S\theta_{123} + l_2 S\theta_{12} + l_1 S\theta_1 \\ -C\theta_{123} & S\theta_{123} & 0 & -l_3 C\theta_{123} - l_2 C\theta_{12} - l_1 C\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.10)$$

El modelo cinemático del sub-sistema **SPD** está definido por (3.7)–(3.10). Cabe señalar que (3.7)–(3.10) son necesarias para obtener el modelo dinámico de sub-sistema **SPD**. El sub-sistema **SPI** descrito por los parámetros de D–H de la tabla (3.2) y la Figura (3.2) genera las siguientes matrices de transformación homogénea:

$${}^4A_5 = \begin{bmatrix} \text{cos}(\theta_4) & -\text{sen}(\theta_4) & 0 & l_1 \text{cos}(\theta_4) \\ \text{sen}(\theta_4) & \text{cos}(\theta_4) & 0 & l_1 \text{sen}(\theta_4) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

$${}^5A_6 = \begin{bmatrix} \text{cos}(\theta_5) & -\text{sen}(\theta_5) & 0 & l_2 \text{cos}(\theta_5) \\ \text{sen}(\theta_5) & \text{cos}(\theta_5) & 0 & l_2 \text{sen}(\theta_5) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

$${}^6A_{6f} = \begin{bmatrix} \text{cos}(\theta_6) & -\text{sen}(\theta_6) & 0 & l_3 \text{cos}(\theta_6) \\ \text{sen}(\theta_6) & \text{cos}(\theta_6) & 0 & l_3 \text{sen}(\theta_6) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

La ubicación de los sistemas de coordenadas $\{x_5, y_5, z_5\}$, $\{x_6, y_6, z_6\}$ y $\{x_{6f}, y_{6f}, z_{6f}\}$ con respecto al sistema de coordenadas $\{x_4, y_4, z_4\}$ que componen al sub-sistema **SPI**, son descritos por:

$${}^4A_5 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_4) & -\text{sen}(\theta_4) & 0 & l_1 \cos(\theta_4) \\ \text{sen}(\theta_4) & \cos(\theta_4) & 0 & l_1 \text{sen}(\theta_4) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} {}^4A_6 &= {}^4A_5 {}^5A_6 \\ &= \begin{bmatrix} C\theta_{45} & -S\theta_{45} & 0 & l_2 C\theta_{45} + l_1 C\theta_4 \\ S\theta_{45} & C\theta_{45} & 0 & l_2 S\theta_{45} + l_1 S\theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} {}^4A_{6f} &= {}^4A_5 {}^5A_6 {}^6A_{6f} \\ &= \begin{bmatrix} C\theta_{456} & -S\theta_{456} & 0 & l_3 C\theta_{456} + l_2 C\theta_{45} + l_1 C\theta_4 \\ S\theta_{456} & C\theta_{456} & 0 & l_3 S\theta_{456} + l_2 S\theta_{45} + l_1 S\theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.16)$$

donde:

$$\begin{aligned} C\theta_{456} &= \cos(\theta_4 + \theta_5 + \theta_6) \\ S\theta_{456} &= \text{sen}(\theta_4 + \theta_5 + \theta_6) \\ C\theta_{45} &= \cos(\theta_4 + \theta_5) \\ S\theta_{45} &= \text{sen}(\theta_4 + \theta_5) \\ C\theta_4 &= \cos(\theta_4) \\ S\theta_4 &= \text{sen}(\theta_4) \end{aligned}$$

Multiplicando las ecuaciones (3.14)–(3.16) por la matriz

$${}^0A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -L \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -L \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

se obtiene la ubicación de los sistemas de coordenadas de los elementos que componen al sub-sistema **SPI** con respecto a las coordenadas de la base $\{x_0, y_0, z_0\}$.

y se obtiene

$$\begin{aligned}
 {}^0A_5 &= {}^0A_4 {}^4A_5 \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -L \\ \text{sen}(\theta_4) & \cos(\theta_4) & 0 & l_1 \text{sen}(\theta_4) \\ -\cos(\theta_4) & \text{sen}(\theta_4) & 0 & -l_1 \cos(\theta_4) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned}
 {}^0A_6 &= {}^0A_4 {}^4A_6 \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -L \\ S\theta_{45} & C\theta_{45} & 0 & l_2 S\theta_{45} + l_1 S\theta_4 \\ -C\theta_{45} & S\theta_{45} & 0 & -l_2 C\theta_{45} - l_1 C\theta_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned}
 {}^0A_{6f} &= {}^0A_4 {}^4A_{6f} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -L \\ S\theta_{456} & C\theta_{456} & 0 & l_3 S\theta_{456} + l_2 S\theta_{45} + l_1 S\theta_4 \\ -C\theta_{456} & S\theta_{456} & 0 & -l_3 C\theta_{456} - l_2 C\theta_{45} - l_1 C\theta_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

El modelo cinemático del sub-sistema **SPI** está definido por (3.17)–(3.20) y son necesarias para la obtención del modelo dinámico del sistema **SPI**.

3.3. Modelo dinámico

El robot bípedo está formado por 7 eslabones conectados a través de articulaciones rotacionales. El significado de las diversas constantes está resumido en la Tabla 3.3.

La cadera se considera como el eslabón 0; el eslabón 1, 2 y 3 forman el sub-sistema de la pierna derecha **SPD**, y los eslabones 4, 5 y 6 forman el sub-sistema de la pierna izquierda **SPI**.

Los desplazamientos del robot se llevarán a cabo en el plano vertical $\{y - z\}$ tal y como se muestra en la Figura 3.3. Los grados de libertad están asociados a los ángulos $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5$ y θ_6 , siendo todos positivos en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj (sentido contra horario).

Descripción	Notación	Unidades
Longitud del eslabón 0	$2L$	m
Longitud del eslabón 1 y 4	l_1	m
Longitud del eslabón 2 y 5	l_2	m
Longitud del eslabón 3 y 6	l_3	m
Distancia al centro de masa (eslabón 0)	l_{c0}	m
Distancia al centro de masa (eslabón 1 y 4)	l_{c1}	m
Distancia al centro de masa (eslabón 2 y 5)	l_{c2}	m
Distancia al centro de masa (eslabón 3 y 6)	l_{c3}	m
Masa del eslabón 0	m_0	kg
Masa del eslabón 1 y 4	m_1	kg
Masa del eslabón 2 y 5	m_2	kg
Masa del eslabón 3 y 6	m_3	kg
Inercia del eslabón 0	I_0	kg m^2
Inercia del eslabón 1 y 4	I_1	kg m^2
Inercia del eslabón 2 y 5	I_2	kg m^2
Inercia del eslabón 3 y 6	I_3	kg m^2
Aceleración de la gravedad	g	m / s^2

Tabla 3.3: Parámetros de la planta.

De la misma forma que en el modelo cinemático directo, se obtienen los modelos dinámicos de cada sub-sistema debido a la ubicación de la base del sistema bípedo en general, para posteriormente acoplar estos modelos en uno solo. El vector de posiciones articulares de la pierna derecha $\theta_{SPD}(t)$ y el vector de posiciones articulares de la pierna izquierda $\theta_{SPI}(t)$ se definen como:

$$\theta_{SPD}(t) = [\theta_1(t) \quad \theta_2(t) \quad \theta_3(t)]^T \quad (3.21)$$

$$\theta_{SPI}(t) = [\theta_4(t) \quad \theta_5(t) \quad \theta_6(t)]^T \quad (3.22)$$

Cabe recalcar que el proceso del cálculo del modelo dinámico para ambos sub-sistemas a través de las ecuaciones de movimiento de Lagrange, se reducen a cuatro etapas:

E1. Cálculo de la energía cinética: $\mathcal{K}(q(t), \dot{q}(t))$.

E2. Cálculo de la energía potencial: $\mathcal{U}(q(t))$.

E3. Cálculo del Lagrangiano (2.13): $\mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t))$.

E4. Desarrollo de las ecuaciones de Lagrange (2.15).

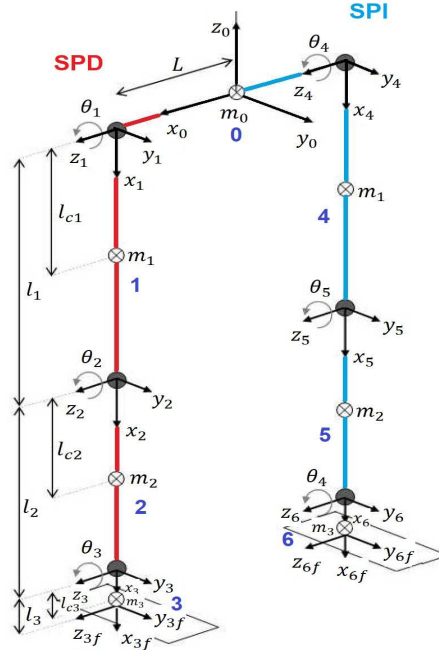


Figura 3.3: Distribución de la masa del robot.

3.3.1. Modelo dinámico del sub-sistema de la pierna derecha (SPD)

El análisis se realiza considerando cada eslabón durante el calculo del modelo; al final de este apartado se muestra el modelo dinámico final obtenido para el sub-sistema de la pierna derecha **SPD**.

3.3.1.1. Cálculo de la Energía Cinética

La energía cinética $\mathcal{K}(\theta, \dot{\theta})$ para ambas piernas del sistema bípodo puede descomponerse en la suma de cuatro partes: $\mathcal{K}_{SPD}(\theta, \dot{\theta}) = \mathcal{K}_0(\theta, \dot{\theta}) + \mathcal{K}_1(\theta, \dot{\theta}) + \mathcal{K}_2(\theta, \dot{\theta}) + \mathcal{K}_3(\theta, \dot{\theta})$ donde $\mathcal{K}_0(\theta, \dot{\theta})$, $\mathcal{K}_1(\theta, \dot{\theta})$, $\mathcal{K}_2(\theta, \dot{\theta})$ y $\mathcal{K}_3(\theta, \dot{\theta})$ son las energías cinéticas⁷ asociadas a las masas m_0 , m_1 , m_2 y m_3 respectivamente de la pierna derecha; y que por lo tanto para $\mathcal{K}_{SPI}(\theta, \dot{\theta}) = \mathcal{K}_0(\theta, \dot{\theta}) + \mathcal{K}_4(\theta, \dot{\theta}) + \mathcal{K}_5(\theta, \dot{\theta}) + \mathcal{K}_6(\theta, \dot{\theta})$ donde $\mathcal{K}_0(\theta, \dot{\theta})$, $\mathcal{K}_4(\theta, \dot{\theta})$, $\mathcal{K}_5(\theta, \dot{\theta})$ y $\mathcal{K}_6(\theta, \dot{\theta})$ son las energías cinéticas asociadas a las masas m_0 , m_1 , m_2 y m_3 respectivamente de la pierna izquierda. A continuación se obtienen dichas expresiones.

⁷La energía cinética se determina como la suma de:

- El producto de la mitad de sus masa por el cuadrado de la rapidez del centro de masa.
- El producto de la mitad de su momento de inercia (referido al centro de masa) por el cuadrado de su velocidad angular (referido al centro de masa).

■ **Eslabón 0:**

Tomando en cuenta que, el sistema de coordenadas $\{x_0, y_0, z_0\}$ está fijo en el espacio tridimensional y se considera que es el sistema de referencia, también definido como sistema de coordenadas base. El sistema de coordenadas $\{x_i, y_i, z_i\}$, donde $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 3f$ y $6f$ está girando con respecto al sistema de referencia $\{x_0, y_0, z_0\}$. Si un punto p que está en reposos y fijo con respecto al sistema de coordenadas $\{x_i, y_i, z_i\}$, entonces el mismo punto p se puede representar con respecto a sistema de coordenadas x_0, y_0, z_0 [20]. Entonces las coordenadas del centro de masa del eslabón 0 son:

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{bmatrix} = {}^0A_1 {}^0r_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & L \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -L \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

donde 0A_1 es la matriz de transformación homogénea que representa al sistema x_1, y_1, z_1 con respecto al sistema de referencia x_0, y_0, z_0 ; y 0r_1 es el vector de posición del centro de masa del eslabón 0 referido al sistema de coordenadas x_1, y_1, z_1 . Entonces la velocidad $v_0 = 0$ y la rapidez al cuadrado $v_0^T v_0 = 0$, por lo tanto:

$$\mathcal{K}_0(\theta, \dot{\theta}) = 0 \quad (3.24)$$

■ **Eslabón 1(4):**

Las coordenadas del centro de masa del eslabón 1 son:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{bmatrix} &= {}^0A_2 {}^1r_2 \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & L \\ \text{sen}(\theta_1) & \cos(\theta_1) & 0 & l_1 \text{sen}(\theta_1) \\ -\cos(\theta_1) & \text{sen}(\theta_1) & 0 & -l_1 \cos(\theta_1) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -l_1 + l_{c1} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} L \\ l_{c1} \text{sen}(\theta_1) \\ -l_{c1} \cos(\theta_1) \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.25)$$

El vector velocidad v_1 del centro de masa de dicho eslabón es en consecuencia:

$$v_1 = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} L \\ l_{c1} \text{sen}(\theta_1) \\ -l_{c1} \cos(\theta_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ l_{c1} \cos(\theta_1) \dot{\theta}_1 \\ l_{c1} \text{sen}(\theta_1) \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Por lo tanto, la velocidad al cuadrado $v_1^T v_1$ del centro de masa resulta ser:

$$\begin{aligned}
 v_1^T v_1 &= \begin{bmatrix} 0 & l_{c1} \cos(\theta_1) \dot{\theta}_1 & l_{c1} \sin(\theta_1) \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ l_{c1} \cos(\theta_1) \dot{\theta}_1 \\ l_{c1} \sin(\theta_1) \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \\
 &= l_{c1}^2 \cos^2(\theta_1) \dot{\theta}_1^2 + l_{c1}^2 \sin^2(\theta_1) \dot{\theta}_1^2 \\
 &= l_{c1}^2 \dot{\theta}_1^2 (\cos^2(\theta_1) + \sin^2(\theta_1)) \\
 &= l_{c1}^2 \dot{\theta}_1^2
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

Finalmente, la energía cinética correspondiente al movimiento del eslabón 1 se obtiene como:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{K}_1(\theta, \dot{\theta}) &= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2 \\
 &= \frac{1}{2} m_1 l_{c1}^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

■ **Eslabón 2(5):**

Las coordenadas del centro de masa del eslabón 2 expresadas en el plano $x - y$ son:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix} &= {}^0 A_3^2 r_3 \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & L \\ S\theta_{12} & C\theta_{12} & 0 & l_2 S\theta_{12} + l_1 S\theta_1 \\ -C\theta_{12} & S\theta_{12} & 0 & -l_2 C\theta_{12} - l_1 C\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -l_2 + l_{c2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} L \\ l_{c2} \sin(\theta_1 + \theta_2) + l_1 \sin(\theta_1) \\ -l_{c2} \cos(\theta_1 + \theta_2) - l_1 \cos(\theta_1) \\ 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

donde:

$$\begin{aligned}
 C\theta_{12} &= \cos(\theta_1 + \theta_2) \\
 S\theta_{12} &= \sin(\theta_1 + \theta_2) \\
 C\theta_1 &= \cos(\theta_1) \\
 S\theta_1 &= \sin(\theta_1)
 \end{aligned}$$

El vector velocidad v_2 del centro de masa de dicho eslabón es en consecuencia:

$$\begin{aligned}
 v_2 &= \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} L \\ l_{c2} \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) + l_1 \text{sen}(\theta_1) \\ -l_{c2} \cos(\theta_1 + \theta_2) - l_1 \cos(\theta_1) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 \\ l_{c2} \cos(\theta_1 + \theta_2) (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) + l_1 \cos(\theta_1) \dot{\theta}_1 \\ l_{c2} \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) + l_1 \text{sen}(\theta_1) \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \quad (3.30)
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, empleando las identidades trigonométricas $\cos^2(x) + \text{sen}^2(x) = 1$ y $\cos(A \pm B) = \cos(A)\cos(B) \mp \text{sen}(A)\text{sen}(B)$ se obtiene finalmente la velocidad al cuadrado $v_2^T v_2$ del centro de masa del eslabón 2:

$$\begin{aligned}
 v_2^T v_2 &= l_{c2}^2 \cos^2(\theta_1 + \theta_2) (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + 2l_{c2}l_1 \cos(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_1) (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \dot{\theta}_1 \\
 &\quad + l_1^2 \cos^2(\theta_1) \dot{\theta}_1^2 + l_{c2}^2 \text{sen}^2(\theta_1 + \theta_2) (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \\
 &\quad + 2l_{c2}l_1 \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \text{sen}(\theta_1) (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \dot{\theta}_1 + l_1^2 \text{sen}^2(\theta_1) \dot{\theta}_1^2 \\
 &= l_{c2}^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 (\cos^2(\theta_1 + \theta_2) + \text{sen}^2(\theta_1 + \theta_2)) + l_1^2 \dot{\theta}_1^2 (\cos^2(\theta_1) + \text{sen}^2(\theta_1)) \\
 &\quad + 2l_{c2}l_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \dot{\theta}_1 (\cos(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_1) + \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \text{sen}(\theta_1)) \\
 &= l_{c2}^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + 2l_{c2}l_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \dot{\theta}_1 \cos(\theta_2) \quad (3.31)
 \end{aligned}$$

de donde:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{K}_2(\theta, \dot{\theta}) &= \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} I_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \\
 &= \frac{1}{2} m_2 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_{c2}^2 (\dot{\theta}_1^2 + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2) \\
 &\quad + m_2 l_{c2} l_1 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_1) \cos(\theta_2) + \frac{1}{2} I_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \quad (3.32)
 \end{aligned}$$

■ **Eslabón 3(6):**

Las coordenadas del centro de masa del eslabón 3 son:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \\ 1 \end{bmatrix} &= {}^0A_{3f} {}^3r_{3f} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & L \\ S\theta_{123} & C\theta_{123} & 0 & l_3S\theta_{123} + l_2S\theta_{12} + l_1S\theta_1 \\ -C\theta_{123} & S\theta_{123} & 0 & -l_3C\theta_{123} - l_2C\theta_{12} - l_1C\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -l_3 + l_{c3} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} L \\ l_{c3}\text{sen}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) + l_2\text{sen}(\theta_1 + \theta_2) + l_1\text{sen}(\theta_1) \\ -l_{c3}\text{cos}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) - l_2\text{cos}(\theta_1 + \theta_2) - l_1\text{cos}(\theta_1) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.33)
 \end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned}
 C\theta_{123} &= \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\
 S\theta_{123} &= \text{sen}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\
 C\theta_{12} &= \cos(\theta_1 + \theta_2) \\
 S\theta_{12} &= \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \\
 C\theta_1 &= \cos(\theta_1) \\
 S\theta_1 &= \text{sen}(\theta_1)
 \end{aligned}$$

El vector velocidad v_3 del centro de masa de dicho eslabón es en consecuencia:

$$\begin{aligned}
 v_3 &= \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} L \\ l_{c3}\text{sen}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) + l_2\text{sen}(\theta_1 + \theta_2) + l_1\text{sen}(\theta_1) \\ -l_{c3}\text{cos}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) - l_2\text{cos}(\theta_1 + \theta_2) - l_1\text{cos}(\theta_1) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 \\ l_{c3}\text{cos}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)\dot{\theta}_{123} + l_2\text{cos}(\theta_1 + \theta_2)\dot{\theta}_{12} + l_1\text{cos}(\theta_1)\dot{\theta}_1 \\ l_{c3}\text{sen}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)\dot{\theta}_{123} + l_2\text{sen}(\theta_1 + \theta_2)\dot{\theta}_{12} + l_1\text{sen}(\theta_1)\dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \quad (3.34)
 \end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned}
 \dot{\theta}_{123} &= (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \\
 \dot{\theta}_{12} &= (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, empleando las identidades trigonométricas $\cos^2(x) + \sen^2(x) = 1$ y $\cos(A \pm B) = \cos(A)\cos(B) \mp \sen(A)\sen(B)$ se obtiene finalmente la velocidad al cuadrado $v_3^T v_3$ del centro de masa del eslabón 3:

$$\begin{aligned}
v_3^T v_3 &= +l_2^2 \cos^2(\theta_1 + \theta_2) (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + l_1^2 \cos^2(\theta_1) \dot{\theta}_1^2 + 2l_2 l_1 \cos(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_1) (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \dot{\theta}_1 \\
&\quad + l_{c3}^2 \cos^2(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)^2 + l_{c3}^2 \sen^2(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)^2 \\
&\quad + 2l_{c3} l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \cos(\theta_1 + \theta_2) (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\
&\quad + 2l_{c3} l_2 \sen(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \sen(\theta_1 + \theta_2) (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\
&\quad + l_2^2 \sen^2(\theta_1 + \theta_2) (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + 2l_2 l_1 \sen(\theta_1 + \theta_2) \sen(\theta_1) (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \dot{\theta}_1 \\
&\quad + 2l_{c3} l_1 \sen(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \sen(\theta_1) (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \dot{\theta}_1 + l_1^2 \sen^2(\theta_1) \dot{\theta}_1^2 \\
&\quad + 2l_{c3} l_1 \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \cos(\theta_1) (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \dot{\theta}_1 \\
&= +l_{c3}^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)^2 + 2l_{c3} l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) (C\theta_{123} C\theta_{12} + S\theta_{123} S\theta_{12}) \\
&\quad + l_2^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + 2l_2 l_1 (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2) \dot{\theta}_1 (C\theta_{12} C\theta_1 + S\theta_{12} S\theta_1) \\
&\quad + 2l_{c3} l_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \dot{\theta}_1 (C\theta_{123} C\theta_1 + S\theta_{123} S\theta_1) \\
&= +l_{c3}^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)^2 + 2l_{c3} l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos(\theta_3) + 2l_2 l_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \dot{\theta}_1 \cos(\theta_2) \\
&\quad + 2l_{c3} l_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \dot{\theta}_1 \cos(\theta_2 + \theta_3) + l_2^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \tag{3.35}
\end{aligned}$$

de donde:

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_3(\theta, \dot{\theta}) &= +\frac{1}{2} m_3 v_3^2 + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)^2 \\
&= +\frac{1}{2} m_3 l_{c3}^2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_3^2 + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 + 2\dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3) + \frac{1}{2} m_3 l_2^2 (\dot{\theta}_1^2 + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2) \\
&\quad + m_3 l_{c3} l_2 (\dot{\theta}_1^2 + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2) \cos(\theta_3) + \frac{1}{2} m_3 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \\
&\quad + m_3 l_{c3} l_1 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_1) \cos(\theta_2 + \theta_3) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)^2 \\
&\quad + m_3 l_2 l_1 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_1) \cos(\theta_2) \tag{3.36}
\end{aligned}$$

3.3.1.2. Cálculo de la Energía Potencial

De forma similar al cálculo de la energía cinética para cada sub-sistema, el cálculo de la energía potencial para **SPD** puede descomponer como la suma de 4 partes, $\mathcal{U}_{SPD}(\theta) = \mathcal{U}_0(\theta) + \mathcal{U}_1(\theta) + \mathcal{U}_2(\theta) + \mathcal{U}_3(\theta)$ donde $\mathcal{U}_0(\theta)$, $\mathcal{U}_1(\theta)$, $\mathcal{U}_2(\theta)$ y $\mathcal{U}_3(\theta)$ son las energías potenciales⁸ asociadas a las masas m_0 , m_1 , m_2 y m_3 de los eslabones 0, 1, 2 y 3 respectivamente.

⁸Aquí se considera que la energía potencial es nula en $y = 0$

Se tiene entonces que:

$$\mathcal{U}_0(\theta) = 0 \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_1(\theta) &= m_1 g h_1 \\ &= m_1 g (-l_{c1} \cos(\theta_1)) \\ &= -m_1 l_{c1} g \cos(\theta_1) \end{aligned} \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_2(\theta) &= m_2 g h_2 \\ &= m_2 g (-l_{c2} \cos(\theta_1 + \theta_2) - l_1 \cos(\theta_1)) \\ &= -m_2 l_{c2} g \cos(\theta_1 + \theta_2) - m_2 l_1 g \cos(\theta_1) \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_3(\theta) &= m_3 g h_3 \\ &= m_3 g (-l_{c3} \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) - l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) - l_1 \cos(\theta_1)) \\ &= -m_3 l_{c3} g \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) - m_3 l_2 g \cos(\theta_1 + \theta_2) - m_3 l_1 g \cos(\theta_1) \end{aligned} \quad (3.40)$$

3.3.1.3. Cálculo del Lagrangiano

A partir de (3.24), (3.28), (3.32), (3.36) - (3.40) puede obtenerse el lagrangiano de la pierna derecha:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{SPD}(\theta, \dot{\theta}) &= \mathcal{K}_{SDP}(\theta, \dot{\theta}) - \mathcal{U}_{SPD}(\theta), \\ &= \mathcal{K}_0(\theta, \dot{\theta}) + \mathcal{K}_1(\theta, \dot{\theta}) + \mathcal{K}_2(\theta, \dot{\theta}) + \mathcal{K}_3(\theta, \dot{\theta}) - (\mathcal{U}_0(\theta) + \mathcal{U}_1(\theta) + \mathcal{U}_2(\theta) + \mathcal{U}_3(\theta)), \end{aligned} \quad (3.41)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{SPD}(\theta) &= -m_1 l_{c1} g \cos(\theta_1) - m_2 l_{c2} g \cos(\theta_1 + \theta_2) - m_2 l_1 g \cos(\theta_1) \\ &\quad - m_3 l_{c3} g \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) - m_3 l_2 g \cos(\theta_1 + \theta_2) - m_3 l_1 g \cos(\theta_1) \\ &= -[m_1 l_{c1} + m_2 l_1 + m_3 l_1] g \cos(\theta_1) - [m_2 l_{c2} + m_3 l_2] g \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ &\quad - m_3 l_{c3} g \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3). \end{aligned} \quad (3.42)$$

y

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_{SPD}(\theta, \dot{\theta}) &= \frac{1}{2}m_1l_{c1}^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}I_1\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2l_{c2}^2(\dot{\theta}_1^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2) + \frac{1}{2}I_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \\
&+ m_2l_{c2}l_1(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2\dot{\theta}_1)\cos(\theta_2) + \frac{1}{2}m_3l_{c3}^2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_3^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3 + 2\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3) \\
&+ \frac{1}{2}m_3l_2^2(\dot{\theta}_1^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2) + m_3l_{c3}l_2(\dot{\theta}_1^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_3\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2)\cos(\theta_3) \\
&+ \frac{1}{2}m_3l_1^2\dot{\theta}_1^2 + m_3l_2l_1(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2\dot{\theta}_1)\cos(\theta_2) + m_3l_{c3}l_1(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_3\dot{\theta}_1)\cos(\theta_2 + \theta_3) \\
&+ \frac{1}{2}I_3(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)^2 \\
&= \frac{1}{2}[m_1l_{c1}^2 + m_2l_1^2 + m_3l_1^2]\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}[m_2l_{c2}^2 + m_3l_2^2](\dot{\theta}_1^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2) + [m_2l_{c2} + m_3l_2] \\
&\cdot (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2\dot{\theta}_1)l_1\cos(\theta_2) + \frac{1}{2}m_3l_{c3}^2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_3^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3 + 2\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3) + m_3l_{c3}l_2 \\
&\cdot (\dot{\theta}_1^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2^2)\cos(\theta_3) + m_3l_{c3}l_1(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_3\dot{\theta}_1)\cos(\theta_2 + \theta_3) \\
&+ \frac{1}{2}I_1\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}I_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + \frac{1}{2}I_3(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)^2 \tag{3.43}
\end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{SPD}(\theta, \dot{\theta}) &= \frac{1}{2}[m_1l_{c1}^2 + m_2l_1^2 + m_3l_1^2]\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}[m_2l_{c2}^2 + m_3l_2^2](\dot{\theta}_1^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2) + \frac{1}{2}I_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \\
&+ [m_2l_{c2} + m_3l_2](\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2\dot{\theta}_1)l_1\cos(\theta_2) + \frac{1}{2}m_3l_{c3}^2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_3^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3 \\
&+ 2\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3) + m_3l_{c3}l_2(\dot{\theta}_1^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2^2)\cos(\theta_3) + \frac{1}{2}I_3(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)^2 \\
&+ m_3l_{c3}l_1(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_3\dot{\theta}_1)\cos(\theta_2 + \theta_3) + \frac{1}{2}I_1\dot{\theta}_1^2 + [m_1l_{c1} + m_2l_1 + m_3l_1]g\cos(\theta_1) \\
&+ [m_2l_{c2} + m_3l_2]g\cos(\theta_1 + \theta_2) + m_3l_{c3}g\cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3). \tag{3.44}
\end{aligned}$$

3.3.1.4. Desarrollo de las ecuaciones de Lagrange

De (3.44), aplicando derivadas parciales con respecto a cada ángulo que componen las articulaciones y derivando con respecto a la variable del tiempo. A continuación se desarrolla el procedimiento de la obtención de las ecuaciones de Lagrange.

Análisis para obtener los elementos de τ_1

Desarrollo de la derivada parcial con respecto a $\dot{\theta}_1$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}_{SPD}}{\partial \dot{\theta}_1} &= \left[m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + m_3 l_1^2 \right] \dot{\theta}_1 + \frac{1}{2} \left[m_2 l_{c2}^2 + m_3 l_2^2 \right] (2\dot{\theta}_1 + 2\dot{\theta}_2) + \frac{1}{2} I_3 (2\dot{\theta}_1 + 2\dot{\theta}_2 + 2\dot{\theta}_3) + [m_2 l_{c2} + m_3 l_2] \\
&\cdot (2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) l_1 \cos(\theta_2) + \frac{1}{2} m_3 l_{c3}^2 (2\dot{\theta}_1 + 2\dot{\theta}_2 + 2\dot{\theta}_3) + \frac{1}{2} I_2 (2\dot{\theta}_1 + 2\dot{\theta}_2) + m_3 l_{c3} l_2 (2\dot{\theta}_1 + 2\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \\
&\cdot \cos(\theta_3) + m_3 l_{c3} l_1 (2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \cos(\theta_2 + \theta_3) + I_1 \dot{\theta}_1 \\
&= \left[m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + m_3 l_1^2 \right] \dot{\theta}_1 + \left[m_2 l_{c2}^2 + m_3 l_2^2 \right] (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) + m_3 l_{c3}^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) + I_1 \dot{\theta}_1 + [m_2 l_{c2} l_1 + m_3 l_2 l_1] \\
&\cdot (2 \cos(\theta_2) \dot{\theta}_1 + \cos(\theta_2) \dot{\theta}_2) + I_3 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) + m_3 l_{c3} l_1 (2 \cos(\theta_2 + \theta_3) \dot{\theta}_1 + \cos(\theta_2 + \theta_3) \dot{\theta}_2 \\
&+ \cos(\theta_2 + \theta_3) \dot{\theta}_3) + I_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) + m_3 l_{c3} l_2 (2 \cos(\theta_3) \dot{\theta}_1 + 2 \cos(\theta_3) \dot{\theta}_2 + \cos(\theta_3) \dot{\theta}_3) \quad (3.45)
\end{aligned}$$

Se realiza la derivada con respecto al tiempo

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}_{SPD}}{\partial \dot{\theta}_1} \right] &= \left[m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + m_3 l_1^2 \right] \ddot{\theta}_1 + \left[m_2 l_{c2}^2 + m_3 l_2^2 \right] (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + m_3 l_{c3}^2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_3) + [m_2 l_{c2} l_1 + m_3 l_2 l_1] \\
&\cdot [-2 \sin(\theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + 2 \cos(\theta_2) \ddot{\theta}_1] + I_1 \ddot{\theta}_1 + I_2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + I_3 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_3) + m_3 l_{c3} l_2 + m_3 l_{c3} l_1 \\
&+ [m_2 l_{c2} l_1 + m_3 l_2 l_1] [-\sin(\theta_2) \dot{\theta}_2^2 + \cos(\theta_2) \ddot{\theta}_2] [-2 \sin(\theta_3) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 + 2 \cos(\theta_3) \ddot{\theta}_1] + m_3 l_{c3} l_1 \\
&+ m_3 l_{c3} l_2 [-\sin(\theta_3) \dot{\theta}_3^2 + \cos(\theta_3) \ddot{\theta}_3] [-2 \sin(\theta_2 + \theta_3) \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) + 2 \cos(\theta_2 + \theta_3) \ddot{\theta}_1] \\
&+ m_3 l_{c3} l_2 [-2 \sin(\theta_3) \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 + 2 \cos(\theta_3) \ddot{\theta}_2] [-\sin(\theta_2 + \theta_3) \dot{\theta}_3 (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) + \cos(\theta_2 + \theta_3) \ddot{\theta}_3] \\
&+ m_3 l_{c3} l_1 [\cos(\theta_2 + \theta_3) \ddot{\theta}_2 - \sin(\theta_2 + \theta_3) \dot{\theta}_2 (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)] \quad (3.46)
\end{aligned}$$

Se factoriza la ecuación (3.46)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}_{SPD}}{\partial \dot{\theta}_1} \right] &= \left[m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + m_3 l_1^2 + m_2 l_{c2}^2 + m_3 l_2^2 + 2(m_2 l_{c2} l_1 + m_3 l_2 l_1) \cos(\theta_2) + 2m_3 l_{c3} l_2 \cos(\theta_3) \right. \\
&+ m_3 l_{c3}^2 + 2m_3 l_{c3} l_1 \cos(\theta_2 + \theta_3) + I_1 + I_2 + I_3 \left. \right] \ddot{\theta}_1 + [m_2 l_{c2} + m_3 l_2^2 + m_3 l_{c3}^2 + 2m_3 l_{c3} l_2 \cos(\theta_3) \\
&+ (m_2 l_{c2} l_1 + m_3 l_2 l_1) \cos(\theta_2) + m_3 l_{c3} l_1 \cos(\theta_2 + \theta_3) + I_2 + I_3] \ddot{\theta}_2 + [m_3 l_{c3}^2 + m_3 l_{c3} l_2 \cos(\theta_3) \\
&+ m_3 l_{c3} l_1 \cos(\theta_2 + \theta_3) + I_3] \ddot{\theta}_3 + [-2(m_2 l_{c2} l_1 + m_3 l_2 l_1) \sin(\theta_2) \dot{\theta}_2 - 2m_3 l_{c3} l_2 \sin(\theta_3) \dot{\theta}_3 \\
&- 2m_3 l_{c3} l_1 \sin(\theta_2 + \theta_3) \cdot (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)] \dot{\theta}_1 + [-2m_3 l_{c3} l_2 \sin(\theta_3) \dot{\theta}_3 - m_3 l_{c3} l_1 \sin(\theta_2 + \theta_3) (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)] \dot{\theta}_2 \\
&+ [-m_3 l_{c3} l_2 \sin(\theta_3) \dot{\theta}_3 - m_3 l_{c3} l_1 \sin(\theta_2 + \theta_3) (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)] \dot{\theta}_3 \quad (3.47)
\end{aligned}$$

Se evalúa la derivada parcial con respecto a θ_1

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{SPD}}{\partial \theta_1} = -[m_1 l_{c1} + m_2 l_1 + m_3 l_1] g \sin(\theta_1) - [m_2 l_{c2} + m_3 l_2] g \sin(\theta_1 + \theta_2) - m_3 l_{c3} g \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \quad (3.48)$$

Análisis para obtener los elementos de τ_2

Desarrollo de la derivada parcial con respecto a $\dot{\theta}_2$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_{SPD}}{\partial \dot{\theta}_2} = & \left[m_2 l_{c2}^2 + m_3 l_2^2 \right] (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) + [m_2 l_{c2} + m_3 l_2] \dot{\theta}_1 l_1 \cos(\theta_2) + m_3 l_{c3}^2 (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_3) + I_3 (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_3) \\ & + m_3 l_{c3} l_2 (2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_3 + 2\dot{\theta}_2) \cos(\theta_3) + m_3 l_{c3} l_1 \dot{\theta} \cos(\theta_2 + \theta_3) + I_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \end{aligned} \quad (3.49)$$

Se realiza la derivada con respecto al tiempo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}_{SPD}}{\partial \dot{\theta}_2} \right] = & \left[m_2 l_{c2}^2 + m_3 l_2^2 \right] (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + [m_2 l_{c2} + m_3 l_2] l_1 [\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_2) - \dot{\theta}_1 \sin(\theta_2) \dot{\theta}_2] + m_3 l_{c3}^2 (\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_1 \\ & + \ddot{\theta}_3) + m_3 l_{c3} l_2 [2(\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_3) - \dot{\theta}_1 \sin(\theta_3) \dot{\theta}_3) + (\ddot{\theta}_3 \cos(\theta_3) - \dot{\theta}_3 \sin(\theta_3) \dot{\theta}_3) + 2(\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_3) \\ & - \dot{\theta}_2 \sin(\theta_3) \dot{\theta}_3)] + m_3 l_{c3} l_1 [\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_2 + \theta_3) - \dot{\theta}_1 \sin(\theta_2 + \theta_3) (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)] + I_2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \\ & + I_3 (\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_3) \\ = & \left[m_2 l_{c2}^2 + m_3 l_2^2 + (m_2 l_{c2} + m_3 l_2) l_1 \cos(\theta_2) + m_3 l_{c3}^2 + 2m_3 l_{c3} l_2 \cos(\theta_3) + m_3 l_{c3} l_1 \cos(\theta_2 + \theta_3) \right. \\ & + I_2 + I_3] \ddot{\theta}_1 + \left[m_2 l_{c2}^2 + m_3 l_2^2 + m_3 l_{c3}^2 + 2m_3 l_{c3} l_2 \cos(\theta_3) + I_2 + I_3 \right] \ddot{\theta}_2 + [m_3 l_{c3} l_2 \cos(\theta_3) + I_3 \\ & + m_3 l_{c3}^2] \ddot{\theta}_3 - [m_2 l_{c2} + m_3 l_2] l_1 \sin(\theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - 2m_3 l_{c3} l_2 \sin(\theta_3) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 - m_3 l_{c3} l_2 \sin(\theta_3) \dot{\theta}_2^2 \\ & - 2m_3 l_{c3} l_2 \sin(\theta_3) \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 - m_3 l_{c3} l_1 \sin(\theta_2 + \theta_3) \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \end{aligned} \quad (3.50)$$

Se evalúa la derivada parcial con respecto a θ_2

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_{SPD}}{\partial \theta_2} = & - [m_2 l_{c2} + m_3 l_2] (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \dot{\theta}_1 l_1 \sin(\theta_2) - [m_2 l_{c2} + m_3 l_2] g \sin(\theta_1 + \theta_2) - m_3 l_{c3} g \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ & - m_3 l_{c3} l_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \dot{\theta}_1 \sin(\theta_2 + \theta_3) \end{aligned} \quad (3.51)$$

Análisis para obtener los elementos de τ_3

Desarrollo de la derivada parcial con respecto a $\dot{\theta}_3$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_{SPD}}{\partial \dot{\theta}_3} = & \frac{1}{2} m_3 l_{c3}^2 (2\dot{\theta}_3 + 2\dot{\theta}_1 + 2\dot{\theta}_2) + m_3 l_{c3} l_2 (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_1) \cos(\theta_3) + m_3 l_{c3} l_1 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_2 + \theta_3) \\ & + \frac{1}{2} I_3 (2\dot{\theta}_3 + 2\dot{\theta}_1 + 2\dot{\theta}_2) \\ = & m_3 l_{c3}^2 (\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) + m_3 l_{c3} l_2 (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_1) \cos(\theta_3) + m_3 l_{c3} l_1 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_2 + \theta_3) + I_3 (\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \end{aligned} \quad (3.52)$$

Se realiza la derivada con respecto al tiempo

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}_{SPD}}{\partial \dot{\theta}_3} \right] &= m_3 l_{c3}^2 (\ddot{\theta}_3 + \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + m_3 l_{c3} l_2 [\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_3) - \dot{\theta}_2 \sin(\theta_3) \dot{\theta}_3 + \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_3) - \dot{\theta}_1 \sin(\theta_3) \dot{\theta}_3] \\
&\quad + m_3 l_{c3} l_1 [\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_2 + \theta_3) - \dot{\theta}_1 \sin(\theta_2 + \theta_3) (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)] + I_3 (\ddot{\theta}_3 + \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \\
&= \left[m_3 l_{c3}^2 + m_3 l_{c3} l_2 \cos(\theta_3) + m_3 l_{c3} l_1 \cos(\theta_2 + \theta_3) + I_3 \right] \ddot{\theta}_1 + \left[m_3 l_{c3}^2 + m_3 l_{c3} l_2 \cos(\theta_3) + I_3 \right] \ddot{\theta}_2 \\
&\quad + \left[m_3 l_{c3}^2 + I_3 \right] \ddot{\theta}_3 - m_3 l_{c3} l_2 \sin(\theta_3) \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 - m_3 l_{c3} l_2 \sin(\theta_3) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 - m_3 l_{c3} l_1 \sin(\theta_2 + \theta_3) \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)
\end{aligned} \tag{3.53}$$

Se evalúa la derivada parcial con respecto a θ_3

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}_{SPD}}{\partial \theta_3} &= -m_3 l_{c3} l_2 (\dot{\theta}_1^2 + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2^2) \sin(\theta_3) - m_3 l_{c3} g \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\
&\quad - m_3 l_{c3} l_1 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_1) \sin(\theta_2 + \theta_3)
\end{aligned} \tag{3.54}$$

Las ecuaciones dinámicas que modelan el sub-sistema de la pierna derecha **SPD** se obtienen aplicando las ecuaciones de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}_{SPD}}{\partial \dot{\theta}_i} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}_{SPD}}{\partial \theta_i} = \tau_i \quad i = 1, 2, 3 \tag{3.55}$$

de donde finalmente se obtiene

$$\begin{aligned}
\tau_1 &= \left[m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + m_3 l_1^2 + m_2 l_{c2}^2 + m_3 l_2^2 + 2(m_2 l_{c2} l_1 + m_3 l_2 l_1) \cos(\theta_2) \right. \\
&\quad \left. + m_3 l_{c3}^2 + 2m_3 l_{c3} l_2 \cos(\theta_3) + 2m_3 l_{c2} l_1 \cos(\theta_2 + \theta_3) + I_1 + I_2 + I_3 \right] \ddot{\theta}_1 \\
&\quad + \left[m_2 l_{c2} + m_3 l_2^2 + (m_2 l_{c2} l_1 + m_3 l_2 l_1) \cos(\theta_2) + m_3 l_{c3}^2 + 2m_3 l_{c3} l_2 \cos(\theta_3) \right. \\
&\quad \left. + m_3 l_{c3} l_1 \cos(\theta_2 + \theta_3) + I_2 + I_3 \right] \ddot{\theta}_2 + \left[m_3 l_{c3}^2 + m_3 l_{c3} l_2 \cos(\theta_3) \right. \\
&\quad \left. + m_3 l_{c3} l_1 \cos(\theta_2 + \theta_3) + I_3 \right] \ddot{\theta}_3 - \left[2(m_2 l_{c2} l_1 + m_3 l_2 l_1) \sin(\theta_2) \dot{\theta}_2 \right. \\
&\quad \left. + 2m_3 l_{c3} l_2 \sin(\theta_3) \dot{\theta}_3 + 2m_3 l_{c3} l_1 \sin(\theta_2 + \theta_3) (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \right] \dot{\theta}_1 \\
&\quad - \left[2m_3 l_{c3} l_2 \sin(\theta_3) \dot{\theta}_3 + m_3 l_{c3} l_1 \sin(\theta_2 + \theta_3) (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \right] \dot{\theta}_2 \\
&\quad - \left[m_3 l_{c3} l_2 \sin(\theta_3) \dot{\theta}_3 + m_3 l_{c3} l_1 \sin(\theta_2 + \theta_3) (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \right] \dot{\theta}_3 \\
&\quad + [m_1 l_{c1} + m_2 l_1 + m_3 l_1] g \sin(\theta_1) + [m_2 l_{c2} + m_3 l_2] g \sin(\theta_1 + \theta_2) \\
&\quad + m_3 l_{c3} g \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)
\end{aligned} \tag{3.56}$$

$$\begin{aligned}
\tau_2 &= \left[m_2 l_{c2}^2 + m_3 l_2^2 + (m_2 l_{c2} + m_3 l_2) l_1 \cos(\theta_2) + m_3 l_{c3}^2 + 2m_3 l_{c3} l_2 \cos(\theta_3) \right. \\
&\quad + m_3 l_{c3} l_1 \cos(\theta_2 + \theta_3) + I_2 + I_3 \left. \right] \ddot{\theta}_1 + \left[m_2 l_{c2}^2 + m_3 l_2^2 + m_3 l_{c3}^2 \right. \\
&\quad + 2m_3 l_{c3} l_2 \cos(\theta_3) + I_2 + I_3 \left. \right] \ddot{\theta}_2 + \left[m_3 l_{c3}^2 + m_3 l_{c3} l_2 \cos(\theta_3) + I_3 \right] \ddot{\theta}_3 \\
&\quad - [m_2 l_{c2} + m_3 l_2] l_1 \sin(\theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - m_3 l_{c3} l_1 \sin(\theta_2 + \theta_3) \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \\
&\quad + [m_2 l_{c2} + m_3 l_2] l_1 \sin(\theta_2) \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) + m_3 l_{c3} l_1 \sin(\theta_2 + \theta_3) \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \\
&\quad - 2m_3 l_{c3} l_2 \sin(\theta_3) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 - m_3 l_{c3} l_2 \sin(\theta_3) \dot{\theta}_3^2 - 2m_3 l_{c3} l_2 \sin(\theta_3) \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \\
&\quad + [m_2 l_{c2} + m_3 l_2] g \sin(\theta_1 + \theta_2) + m_3 l_{c3} g \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\
&= \left[m_2 l_{c2}^2 + m_3 l_2^2 + (m_2 l_{c2} + m_3 l_2) l_1 \cos(\theta_2) + m_3 l_{c3}^2 + 2m_3 l_{c3} l_2 \cos(\theta_3) \right. \\
&\quad + m_3 l_{c3} l_1 \cos(\theta_2 + \theta_3) + I_2 + I_3 \left. \right] \ddot{\theta}_1 + \left[m_2 l_{c2}^2 + m_3 l_2^2 + m_3 l_{c3}^2 \right. \\
&\quad + 2m_3 l_{c3} l_2 \cos(\theta_3) + I_2 + I_3 \left. \right] \ddot{\theta}_2 + \left[m_3 l_{c3}^2 + m_3 l_{c3} l_2 \cos(\theta_3) + I_3 \right] \ddot{\theta}_3 \\
&\quad + [(m_2 l_{c2} + m_3 l_2) l_1 \sin(\theta_2) \dot{\theta}_1 + m_3 l_{c3} l_1 \sin(\theta_2 + \theta_3) \dot{\theta}_1 \\
&\quad - 2m_3 l_{c3} l_2 \sin(\theta_3) \dot{\theta}_3] \dot{\theta}_1 - [2m_3 l_{c3} l_2 \sin(\theta_3) \dot{\theta}_3] \dot{\theta}_2 - [m_3 l_{c3} l_2 \sin(\theta_3) \dot{\theta}_3] \dot{\theta}_3 \\
&\quad + [m_2 l_{c2} + m_3 l_2] g \sin(\theta_1 + \theta_2) + m_3 l_{c3} g \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \tag{3.57}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\tau_3 &= \left[m_3 l_{c3}^2 + m_3 l_{c3} l_2 \cos(\theta_3) + m_3 l_{c3} l_1 \cos(\theta_2 + \theta_3) + I_3 \right] \ddot{\theta}_1 + \left[m_3 l_{c3}^2 \right. \\
&\quad + m_3 l_{c3} l_2 \cos(\theta_3) + I_3 \left. \right] \ddot{\theta}_2 + \left[m_3 l_{c3}^2 + I_3 \right] \ddot{\theta}_3 - m_3 l_{c3} l_2 \sin(\theta_3) \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \\
&\quad - m_3 l_{c3} l_2 \sin(\theta_3) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 + m_3 l_{c3} l_2 \sin(\theta_3) \left(\dot{\theta}_1^2 + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2^2 \right) \\
&\quad - m_3 l_{c3} l_1 \sin(\theta_2 + \theta_3) \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) + m_3 l_{c3} l_1 \sin(\theta_2 + \theta_3) \left(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_1 \right) \\
&\quad + m_3 l_{c3} g \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\
&= \left[m_3 l_{c3}^2 + m_3 l_{c3} l_2 \cos(\theta_3) + m_3 l_{c3} l_1 \cos(\theta_2 + \theta_3) + I_3 \right] \ddot{\theta}_1 + \left[m_3 l_{c3}^2 + \right. \\
&\quad + m_3 l_{c3} l_2 \cos(\theta_3) + I_3 \left. \right] \ddot{\theta}_2 + \left[m_3 l_{c3}^2 + I_3 \right] \ddot{\theta}_3 + m_3 l_{c3} l_2 \sin(\theta_3) \dot{\theta}_1^2 \\
&\quad + 2m_3 l_{c3} l_2 \sin(\theta_3) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + m_3 l_{c3} l_2 \sin(\theta_3) \dot{\theta}_2^2 + m_3 l_{c3} l_1 \sin(\theta_2 + \theta_3) \dot{\theta}_1^2 \\
&\quad + m_3 l_{c3} g \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\
&= \left[m_3 l_{c3}^2 + m_3 l_{c3} l_2 \cos(\theta_3) + m_3 l_{c3} l_1 \cos(\theta_2 + \theta_3) + I_3 \right] \ddot{\theta}_1 \\
&\quad + \left[m_3 l_{c3}^2 + m_3 l_{c3} l_2 \cos(\theta_3) + I_3 \right] \ddot{\theta}_2 + \left[m_3 l_{c3}^2 + I_3 \right] \ddot{\theta}_3 \\
&\quad + [m_3 l_{c3} l_2 \sin(\theta_3) \dot{\theta}_1 + 2m_3 l_{c3} l_2 \sin(\theta_3) \dot{\theta}_2 + m_3 l_{c3} l_1 \sin(\theta_2 + \theta_3) \dot{\theta}_1] \dot{\theta}_1 \\
&\quad + [m_3 l_{c3} l_2 \sin(\theta_3) \dot{\theta}_2] \dot{\theta}_2 + m_3 l_{c3} g \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \tag{3.58}
\end{aligned}$$

siendo τ_1 , τ_2 y τ_3 , los pares que actúan en las uniones 1, 2 y 3, respectivamente.

Nótese que las ecuaciones dinámicas del robot (3.56)-(3.58) son un conjunto de tres ecuaciones diferenciales no lineales y a partir de ellas el modelo dinámico para **SPD** es expresado de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11}(\mathbf{q}) & \mathbf{M}_{12}(\mathbf{q}) & \mathbf{M}_{13}(\mathbf{q}) \\ \mathbf{M}_{21}(\mathbf{q}) & \mathbf{M}_{22}(\mathbf{q}) & \mathbf{M}_{23}(\mathbf{q}) \\ \mathbf{M}_{31}(\mathbf{q}) & \mathbf{M}_{32}(\mathbf{q}) & \mathbf{M}_{33}(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) & \mathbf{C}_{12}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) & \mathbf{C}_{13}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\ \mathbf{C}_{21}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) & \mathbf{C}_{22}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) & \mathbf{C}_{23}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\ \mathbf{C}_{31}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) & \mathbf{C}_{32}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) & \mathbf{C}_{33}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1(\mathbf{q}) \\ \mathbf{g}_2(\mathbf{q}) \\ \mathbf{g}_3(\mathbf{q}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}_1 \\ \boldsymbol{\tau}_2 \\ \boldsymbol{\tau}_3 \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

Expresando la Ecuación (3.59) de forma general para las articulaciones 1, 2 y 3 que componen la pierna derecha, se tiene:

$$\mathbf{M}_{1,2,3}(\mathbf{q}_{1,2,3}) \ddot{\mathbf{q}}_{1,2,3} + \mathbf{C}_{1,2,3}(\mathbf{q}_{1,2,3}, \dot{\mathbf{q}}_{1,2,3}) \dot{\mathbf{q}}_{1,2,3} + \mathbf{g}_{1,2,3}(\mathbf{q}_{1,2,3}) = \boldsymbol{\tau}_{1,2,3} \quad (3.60)$$

donde los elementos que componen la matriz de las masas e inercias $\mathbf{M}_{1,2,3}(\mathbf{q}_{1,2,3})$ son:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{11}(\mathbf{q}) &= m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + m_3 l_1^2 + m_2 l_{c2}^2 + m_3 l_2^2 + 2(m_2 l_{c2} l_1 + m_3 l_2 l_1) \cos(\theta_2) \\ &\quad + m_3 l_{c3}^2 + 2m_3 l_{c3} l_2 \cos(\theta_3) + 2m_3 l_{c2} l_1 \cos(\theta_2 + \theta_3) + I_1 + I_2 + I_3 \\ \mathbf{M}_{12}(\mathbf{q}) &= m_2 l_{c2} + m_3 l_2^2 + (m_2 l_{c2} l_1 + m_3 l_2 l_1) \cos(\theta_2) + m_3 l_{c3}^2 + 2m_3 l_{c3} l_2 \cos(\theta_3) \\ &\quad + m_3 l_{c3} l_1 \cos(\theta_2 + \theta_3) + I_2 + I_3 \\ \mathbf{M}_{13}(\mathbf{q}) &= m_3 l_{c3}^2 + m_3 l_{c3} l_2 \cos(\theta_3) + m_3 l_{c3} l_1 \cos(\theta_2 + \theta_3) + I_3 \\ \mathbf{M}_{21}(\mathbf{q}) &= m_2 l_{c2}^2 + m_3 l_2^2 + (m_2 l_{c2} + m_3 l_2) l_1 \cos(\theta_2) + m_3 l_{c3}^2 + 2m_3 l_{c3} l_2 \cos(\theta_3) \\ &\quad + m_3 l_{c3} l_1 \cos(\theta_2 + \theta_3) + I_2 + I_3 \\ \mathbf{M}_{22}(\mathbf{q}) &= m_2 l_{c2}^2 + m_3 l_2^2 + m_3 l_{c3}^2 + 2m_3 l_{c3} l_2 \cos(\theta_3) + I_2 + I_3 \\ \mathbf{M}_{23}(\mathbf{q}) &= m_3 l_{c3}^2 + m_3 l_{c3} l_2 \cos(\theta_3) + I_3 \\ \mathbf{M}_{31}(\mathbf{q}) &= m_3 l_{c3}^2 + m_3 l_{c3} l_2 \cos(\theta_3) + m_3 l_{c3} l_1 \cos(\theta_2 + \theta_3) + I_3 \\ \mathbf{M}_{32}(\mathbf{q}) &= m_3 l_{c3}^2 + m_3 l_{c3} l_2 \cos(\theta_3) + I_3 \\ \mathbf{M}_{33}(\mathbf{q}) &= m_3 l_{c3}^2 + I_3 \end{aligned}$$

para la matriz de Coriolis y fuerza centrípeta $\mathbf{C}_{1,2,3}(\mathbf{q}_{1,2,3}, \dot{\mathbf{q}}_{1,2,3})$ son:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{11}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= -[2(m_2 l_{c2} l_1 + m_3 l_2 l_1) \text{sen}(\theta_2) \dot{\theta}_2 + 2m_3 l_{c3} l_2 \text{sen}(\theta_3) \dot{\theta}_3 \\ &\quad + 2m_3 l_{c3} l_1 \text{sen}(\theta_2 + \theta_3) (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)] \\ \mathbf{C}_{12}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= -[2m_3 l_{c3} l_2 \text{sen}(\theta_3) \dot{\theta}_3 + m_3 l_{c3} l_1 \text{sen}(\theta_2 + \theta_3) (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)] \\ \mathbf{C}_{13}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= -[m_3 l_{c3} l_2 \text{sen}(\theta_3) \dot{\theta}_3 + m_3 l_{c3} l_1 \text{sen}(\theta_2 + \theta_3) (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)] \\ \mathbf{C}_{21}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= (m_2 l_{c2} + m_3 l_2) l_1 \text{sen}(\theta_2) \dot{\theta}_1 + m_3 l_{c3} l_1 \text{sen}(\theta_2 + \theta_3) \dot{\theta}_1 - 2m_3 l_{c3} l_2 \text{sen}(\theta_3) \dot{\theta}_3 \\ \mathbf{C}_{22}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= -2m_3 l_{c3} l_2 \text{sen}(\theta_3) \dot{\theta}_3 \\ \mathbf{C}_{23}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= -m_3 l_{c3} l_2 \text{sen}(\theta_3) \dot{\theta}_3 \\ \mathbf{C}_{31}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= m_3 l_{c3} l_2 \text{sen}(\theta_3) \dot{\theta}_1 + 2m_3 l_{c3} l_2 \text{sen}(\theta_3) \dot{\theta}_2 + m_3 l_{c3} l_1 \text{sen}(\theta_2 + \theta_3) \dot{\theta}_1 \\ \mathbf{C}_{32}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= m_3 l_{c3} l_2 \text{sen}(\theta_3) \dot{\theta}_2 \\ \mathbf{C}_{33}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= 0 \end{aligned}$$

y para la matriz del par gravitacional $g_{1,2,3}$ ($q_{1,2,3}$) son:

$$\begin{aligned} g_1(q) &= [m_1 l_{c1} + m_2 l_1 + m_3 l_1] g \text{sen}(\theta_1) + [m_2 l_{c2} + m_3 l_2] g \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \\ &\quad + m_3 l_{c3} g \text{sen}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ g_2(q) &= [m_2 l_{c2} + m_3 l_2] g \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) + m_3 l_{c3} g \text{sen}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ g_3(q) &= m_3 l_{c3} g \text{sen}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \end{aligned}$$

3.3.2. Modelo dinámico del sub-sistema de la pierna izquierda (SPI)

Para el sub-sistema de la pierna izquierda (SPI) se obtienen las siguientes expresiones usando el mismo procedimiento del sub-sistema de la pierna derecha (SPD). Observe que, así como en el modelo cinemático directo de cada sub-sistema resultaron parecidos, los modelos dinámicos de ambos sub-sistemas son similares, con la diferencia que cada uno se expresa en los ángulos articulares que los componen. Partiendo de las matrices que definen el modelo cinemático de SPI, Ecuaciones (3.17)-(3.20) y de la Figura (3.3), se obtiene el modelo dinámico para SPI descrito a continuación.

3.3.2.1. Cálculo de la Energía Cinética

■ Eslabón 0:

Las coordenadas del centro de masa del eslabón 0 son:

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{bmatrix} = {}^0A_4 {}^0r_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -L \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ L \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

Por lo tanto

$$\mathcal{K}_0(\theta, \dot{\theta}) = 0 \quad (3.62)$$

■ Eslabón 1 (4):

Las coordenadas del centro de masa del eslabón 4 son:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \\ z_4 \\ 1 \end{bmatrix} &= {}^0A_5 {}^4r_5 \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -L \\ \text{sen}(\theta_4) & \cos(\theta_4) & 0 & l_1 \text{sen}(\theta_4) \\ -\cos(\theta_4) & \text{sen}(\theta_4) & 0 & -l_1 \cos(\theta_4) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -l_1 + l_{c1} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -L \\ l_{c1} \text{sen}(\theta_4) \\ -l_{c1} \cos(\theta_4) \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.63)$$

El vector velocidad v_4 del centro de masa de dicho eslabón es en consecuencia:

$$v_4 = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \\ z_4 \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} -L \\ l_{c1} \text{sen}(\theta_4) \\ -l_{c1} \text{cos}(\theta_4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ l_{c1} \text{cos}(\theta_4) \dot{\theta}_4 \\ l_{c1} \text{sen}(\theta_4) \dot{\theta}_4 \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

Por lo tanto, la velocidad al cuadrado $v_4^T v_4$ del centro de masa resulta ser:

$$\begin{aligned} v_4^T v_4 &= \begin{bmatrix} 0 & l_{c1} \text{cos}(\theta_4) \dot{\theta}_4 & l_{c1} \text{sen}(\theta_4) \dot{\theta}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ l_{c1} \text{cos}(\theta_4) \dot{\theta}_4 \\ l_{c1} \text{sen}(\theta_4) \dot{\theta}_4 \end{bmatrix} \\ &= l_{c1}^2 \text{cos}^2(\theta_4) \dot{\theta}_4^2 + l_{c1}^2 \text{sen}^2(\theta_4) \dot{\theta}_4^2 = l_{c1}^2 \dot{\theta}_4^2 (\text{cos}^2(\theta_4) + \text{sen}^2(\theta_4)) \\ &= l_{c1}^2 \dot{\theta}_4^2 \end{aligned} \quad (3.65)$$

Finalmente, la energía cinética correspondiente al movimiento del eslabón 4 se obtiene como:

$$\mathcal{K}_4(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} m_1 v_4^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_4^2 = \frac{1}{2} m_1 l_{c1}^2 \dot{\theta}_4^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_4^2 \quad (3.66)$$

■ **Eslabón 2 (5):**

Las coordenadas del centro de masa del eslabón 5 son:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_5 \\ y_5 \\ z_5 \\ 1 \end{bmatrix} &= {}^0 A_6 {}^5 r_6 \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -L \\ S\theta_{45} & C\theta_{45} & 0 & l_2 S\theta_{45} + l_1 S\theta_4 \\ -C\theta_{45} & S\theta_{45} & 0 & -l_2 C\theta_{45} - l_1 C\theta_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -l_2 + l_{c2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -L \\ l_{c2} \text{sen}(\theta_4 + \theta_5) + l_1 \text{sen}(\theta_4) \\ -l_{c2} \text{cos}(\theta_4 + \theta_5) - l_1 \text{cos}(\theta_4) \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.67)$$

donde:

$$\begin{aligned} C\theta_{45} &= \text{cos}(\theta_4 + \theta_5) \\ S\theta_{45} &= \text{sen}(\theta_4 + \theta_5) \\ C\theta_4 &= \text{cos}(\theta_4) \\ S\theta_4 &= \text{sen}(\theta_4) \end{aligned}$$

El vector velocidad v_5 del centro de masa de dicho eslabón es en consecuencia:

$$\begin{aligned}
 v_5 &= \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_5 \\ y_5 \\ z_5 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} -L \\ l_{c2} \text{sen}(\theta_4 + \theta_5) + l_1 \text{sen}(\theta_4) \\ -l_{c2} \cos(\theta_4 + \theta_5) - l_1 \cos(\theta_4) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 \\ l_{c2} \cos(\theta_4 + \theta_5) (\dot{\theta}_4 + \dot{\theta}_5) + l_1 \cos(\theta_4) \dot{\theta}_4 \\ l_{c2} \text{sen}(\theta_4 + \theta_5) (\dot{\theta}_4 + \dot{\theta}_5) + l_1 \text{sen}(\theta_4) \dot{\theta}_4 \end{bmatrix} \quad (3.68)
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, empleando las identidades trigonométricas $\cos^2(x) + \text{sen}^2(x) = 1$ y $\cos(A \pm B) = \cos(A)\cos(B) \mp \text{sen}(A)\text{sen}(B)$ se obtiene finalmente la velocidad al cuadrado $v_5^T v_5$ del centro de masa del eslabón 5:

$$\begin{aligned}
 v_5^T v_5 &= l_{c2}^2 \cos^2(\theta_4 + \theta_5) (\dot{\theta}_4 + \dot{\theta}_5)^2 + 2l_{c2}l_1 \cos(\theta_4 + \theta_5) \cos(\theta_4) (\dot{\theta}_4 + \dot{\theta}_5) \dot{\theta}_4 + l_1^2 \cos^2(\theta_4) \dot{\theta}_4^2 \\
 &\quad + l_{c2}^2 \text{sen}^2(\theta_4 + \theta_5) (\dot{\theta}_4 + \dot{\theta}_5)^2 + 2l_{c2}l_1 \text{sen}(\theta_4 + \theta_5) \text{sen}(\theta_4) (\dot{\theta}_4 + \dot{\theta}_5) \dot{\theta}_4 + l_1^2 \text{sen}^2(\theta_4) \dot{\theta}_4^2 \\
 &= l_{c2}^2 (\dot{\theta}_4 + \dot{\theta}_5)^2 (\cos^2(\theta_4 + \theta_5) + \text{sen}^2(\theta_4 + \theta_5)) + l_1^2 \dot{\theta}_4^2 (\cos^2(\theta_4) + \text{sen}^2(\theta_4)) \\
 &\quad + 2l_{c2}l_1 (\dot{\theta}_4 + \dot{\theta}_5) \dot{\theta}_4 (\cos(\theta_4 + \theta_5) \cos(\theta_4) + \text{sen}(\theta_4 + \theta_5) \text{sen}(\theta_4)) \\
 &= l_{c2}^2 (\dot{\theta}_4 + \dot{\theta}_5)^2 + l_1^2 \dot{\theta}_4^2 + 2l_{c2}l_1 (\dot{\theta}_4 + \dot{\theta}_5) \dot{\theta}_4 \cos(\theta_5) \quad (3.69)
 \end{aligned}$$

de donde:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{K}_5(\theta, \dot{\theta}) &= \frac{1}{2} m_2 v_5^2 + \frac{1}{2} I_2 (\dot{\theta}_4 + \dot{\theta}_5)^2 \\
 &= \frac{1}{2} m_2 l_1^2 \dot{\theta}_4^2 + \frac{1}{2} m_2 l_{c2}^2 (\dot{\theta}_4^2 + 2\dot{\theta}_4 \dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_5^2) + m_2 l_{c2} l_1 (\dot{\theta}_4^2 + \dot{\theta}_5 \dot{\theta}_4) \cos(\theta_5) + \frac{1}{2} I_2 (\dot{\theta}_4 + \dot{\theta}_5)^2 \quad (3.70)
 \end{aligned}$$

■ **Eslabón 3 (6):**

Las coordenadas del centro de masa del eslabón 6 son:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} x_6 \\ y_6 \\ z_6 \\ 1 \end{bmatrix} &= {}^0A_{6f} {}^6r_{6f} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -L \\ S\theta_{456} & C\theta_{456} & 0 & l_3 S\theta_{456} + l_2 S\theta_{45} + l_1 S\theta_4 \\ -C\theta_{456} & S\theta_{456} & 0 & -l_3 C\theta_{456} - l_2 C\theta_{45} - l_1 C\theta_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -l_3 + l_{c3} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -L \\ l_{c3} \text{sen}(\theta_4 + \theta_5 + \theta_6) + l_2 \text{sen}(\theta_4 + \theta_5) + l_1 \text{sen}(\theta_4) \\ -l_{c3} \cos(\theta_4 + \theta_5 + \theta_6) - l_2 \cos(\theta_4 + \theta_5) - l_1 \cos(\theta_4) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.71)
 \end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned}
 C\theta_{456} &= \cos(\theta_4 + \theta_5 + \theta_6) \\
 S\theta_{456} &= \text{sen}(\theta_4 + \theta_5 + \theta_6) \\
 C\theta_{45} &= \cos(\theta_4 + \theta_5) \\
 S\theta_{45} &= \text{sen}(\theta_4 + \theta_5) \\
 C\theta_4 &= \cos(\theta_4) \\
 S\theta_4 &= \text{sen}(\theta_4)
 \end{aligned}$$

El vector velocidad v_6 del centro de masa de dicho eslabón es en consecuencia:

$$\begin{aligned}
 v_6 &= \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_6 \\ y_6 \\ z_6 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} -L \\ l_{c3} \text{sen}(\theta_4 + \theta_5 + \theta_6) + l_2 \text{sen}(\theta_4 + \theta_5) + l_1 \text{sen}(\theta_4) \\ -l_{c3} \cos(\theta_4 + \theta_5 + \theta_6) - l_2 \cos(\theta_4 + \theta_5) - l_1 \cos(\theta_4) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 \\ l_{c3} \cos(\theta_4 + \theta_5 + \theta_6) \dot{\theta}_{456} + l_2 \cos(\theta_4 + \theta_5) \dot{\theta}_{45} + l_1 \cos(\theta_4) \dot{\theta}_4 \\ l_{c3} \text{sen}(\theta_4 + \theta_5 + \theta_6) \dot{\theta}_{456} + l_2 \text{sen}(\theta_4 + \theta_5) \dot{\theta}_{45} + l_1 \text{sen}(\theta_4) \dot{\theta}_4 \end{bmatrix} \quad (3.72)
 \end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned}
 \dot{\theta}_{456} &= (\dot{\theta}_4 + \dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_6) \\
 \dot{\theta}_{45} &= (\dot{\theta}_4 + \dot{\theta}_5)
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, empleando las identidades trigonométricas $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ y $\cos(A \pm B) = \cos(A)\cos(B) \mp \sin(A)\sin(B)$ se obtiene finalmente la velocidad al cuadrado $v_6^T v_6$ del centro de masa del eslabón 6:

$$\begin{aligned}
v_6^T v_6 &= l_{c3}^2 \cos^2(\theta_4 + \theta_5 + \theta_6) (\dot{\theta}_4 + \dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_6)^2 + 2l_{c3}l_2 \cos(\theta_4 + \theta_5 + \theta_6) \cos(\theta_4 + \theta_5) \\
&\quad \cdot (\dot{\theta}_4 + \dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_6) (\dot{\theta}_4 + \dot{\theta}_5) + 2l_{c3}l_1 \cos(\theta_4 + \theta_5 + \theta_6) \cos(\theta_4) (\dot{\theta}_4 + \dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_6) \dot{\theta}_4 \\
&\quad + l_2^2 \cos^2(\theta_4 + \theta_5) (\dot{\theta}_4 + \dot{\theta}_5)^2 + l_1^2 \cos^2(\theta_4) \dot{\theta}_4^2 + 2l_2l_1 \cos(\theta_4 + \theta_5) \cos(\theta_4) \\
&\quad \cdot (\dot{\theta}_4 + \dot{\theta}_5) \dot{\theta}_4 + l_{c3}^2 \sin^2(\theta_4 + \theta_5 + \theta_6) (\dot{\theta}_4 + \dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_6)^2 + 2l_{c3}l_2 \sin(\theta_4 + \theta_5 + \theta_6) \\
&\quad \cdot \sin(\theta_4 + \theta_5) (\dot{\theta}_4 + \dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_6) (\dot{\theta}_4 + \dot{\theta}_5) + l_2^2 \sin^2(\theta_4 + \theta_5) (\dot{\theta}_4 + \dot{\theta}_5)^2 \\
&\quad + 2l_2l_1 \sin(\theta_4 + \theta_5) \sin(\theta_4) (\dot{\theta}_4 + \dot{\theta}_5) \dot{\theta}_4 + 2l_{c3}l_1 \sin(\theta_4 + \theta_5 + \theta_6) \sin(\theta_4) \\
&\quad \cdot (\dot{\theta}_4 + \dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_6) \dot{\theta}_4 + l_1^2 \sin^2(\theta_4) \dot{\theta}_4^2 \\
&= l_{c3}^2 (\dot{\theta}_4 + \dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_6)^2 + 2l_{c3}l_2 (\dot{\theta}_4 + \dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_6) (\dot{\theta}_4 + \dot{\theta}_5) (C\theta_{456}C\theta_{45} + S\theta_{456}S\theta_{45}) \\
&\quad + 2l_{c3}l_1 (\dot{\theta}_4 + \dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_6) \dot{\theta}_4 (C\theta_{456}C\theta_4 + S\theta_{456}S\theta_4) + l_2^2 (\dot{\theta}_4 + \dot{\theta}_5)^2 + 2l_2l_1 (\dot{\theta}_4 + \dot{\theta}_5) \\
&\quad \cdot \dot{\theta}_4 (C\theta_{45}C\theta_4 + S\theta_{45}S\theta_4) + l_1^2 \dot{\theta}_4^2 \\
&= l_{c3}^2 (\dot{\theta}_4 + \dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_6)^2 + 2l_{c3}l_2 (\dot{\theta}_4 + \dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_6) (\dot{\theta}_4 + \dot{\theta}_5) \cos(\theta_6) + l_2^2 (\dot{\theta}_4 + \dot{\theta}_5)^2 \\
&\quad + 2l_{c3}l_1 (\dot{\theta}_4 + \dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_6) \dot{\theta}_4 \cos(\theta_5 + \theta_6) + l_1^2 \dot{\theta}_4^2 + 2l_2l_1 (\dot{\theta}_4 + \dot{\theta}_5) \dot{\theta}_4 \cos(\theta_5) \quad (3.73)
\end{aligned}$$

de donde:

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_6(\theta, \dot{\theta}) &= \frac{1}{2} m_3 v_6^2 + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\theta}_4 + \dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_6)^2 \\
&= \frac{1}{2} m_3 l_{c3}^2 (\dot{\theta}_4^2 + \dot{\theta}_5^2 + \dot{\theta}_6^2 + 2\dot{\theta}_4\dot{\theta}_5 + 2\dot{\theta}_4\dot{\theta}_6 + 2\dot{\theta}_5\dot{\theta}_6) + \frac{1}{2} m_3 l_2^2 (\dot{\theta}_4^2 + 2\dot{\theta}_4\dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_5^2) \\
&\quad + m_3 l_{c3}l_2 (\dot{\theta}_4^2 + 2\dot{\theta}_4\dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_6\dot{\theta}_4 + \dot{\theta}_6\dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_5^2) \cos(\theta_6) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\theta}_4 + \dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_6)^2 \\
&\quad + m_3 l_{c3}l_1 (\dot{\theta}_4^2 + \dot{\theta}_5\dot{\theta}_4 + \dot{\theta}_6\dot{\theta}_4) \cos(\theta_5 + \theta_6) + \frac{1}{2} m_3 l_1^2 \dot{\theta}_4^2 + m_3 l_2l_1 (\dot{\theta}_4^2 + \dot{\theta}_5\dot{\theta}_4) \cos(\theta_5) \quad (3.74)
\end{aligned}$$

3.3.2.2. Cálculo de la Energía Potencial

La energía potencial puede descomponerse como la suma de 4 partes, para $\mathcal{U}_{SPI}(\theta) = \mathcal{U}_0(\theta) + \mathcal{U}_4(\theta) + \mathcal{U}_5(\theta) + \mathcal{U}_6(\theta)$ donde $\mathcal{U}_0(\theta)$, $\mathcal{U}_4(\theta)$, $\mathcal{U}_5(\theta)$ y $\mathcal{U}_6(\theta)$ son las energías potenciales asociadas a las masas m_0 , m_1 , m_2 y m_3 de los eslabones 0, 4, 5 y 6, respectivamente.

Se tiene entonces que:

$$\mathcal{U}_0(\theta) = 0 \quad (3.75)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_4(\theta) &= m_1 g h_4 = m_1 g (-l_{c1} \cos(\theta_4)) \\ &= -m_1 l_{c1} g \cos(\theta_4) \end{aligned} \quad (3.76)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_5(\theta) &= m_2 g h_5 = m_2 g (-l_{c2} \cos(\theta_4 + \theta_5) - l_1 \cos(\theta_4)) \\ &= -m_2 l_{c2} g \cos(\theta_4 + \theta_5) - m_2 l_1 g \cos(\theta_4) \end{aligned} \quad (3.77)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_6(\theta) &= m_3 g h_6 = m_3 g (-l_{c3} \cos(\theta_4 + \theta_5 + \theta_6) - l_2 \cos(\theta_4 + \theta_5) - l_1 \cos(\theta_4)) \\ &= -m_3 l_{c3} g \cos(\theta_4 + \theta_5 + \theta_6) - m_3 l_2 g \cos(\theta_4 + \theta_5) - m_3 l_1 g \cos(\theta_4) \end{aligned} \quad (3.78)$$

3.3.2.3. Cálculo del Lagrangiano

A partir de (3.62), (3.66), (3.70), (3.74) - (3.78) se obtiene el lagrangiano de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{SPI}(\theta, \dot{\theta}) &= \mathcal{K}_{SPI}(\theta, \dot{\theta}) - \mathcal{U}_{SPI}(\theta), \\ &= \mathcal{K}_0(\theta, \dot{\theta}) + \mathcal{K}_4(\theta, \dot{\theta}) + \mathcal{K}_5(\theta, \dot{\theta}) + \mathcal{K}_6(\theta, \dot{\theta}) - (\mathcal{U}_0(\theta) + \mathcal{U}_4(\theta) + \mathcal{U}_5(\theta) + \mathcal{U}_6(\theta)), \end{aligned} \quad (3.79)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{SPI}(\theta, \dot{\theta}) &= \frac{1}{2} [m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + m_3 l_1^2] \dot{\theta}_4^2 + \frac{1}{2} [m_2 l_{c2}^2 + m_3 l_2^2] (\dot{\theta}_4^2 + 2\dot{\theta}_4 \dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_5^2) + \frac{1}{2} I_2 (\dot{\theta}_4 + \dot{\theta}_5)^2 \\ &+ [m_2 l_{c2} + m_3 l_2] (\dot{\theta}_4^2 + \dot{\theta}_5 \dot{\theta}_4) l_1 \cos(\theta_5) + m_3 l_{c3} l_1 (\dot{\theta}_4^2 + \dot{\theta}_5 \dot{\theta}_4 + \dot{\theta}_6 \dot{\theta}_4) \cos(\theta_5 + \theta_6) \\ &+ \frac{1}{2} m_3 l_{c3}^2 (\dot{\theta}_4^2 + \dot{\theta}_5^2 + \dot{\theta}_6^2 + 2\dot{\theta}_4 \dot{\theta}_5 + 2\dot{\theta}_4 \dot{\theta}_6 + 2\dot{\theta}_5 \dot{\theta}_6) + \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_4^2 + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\theta}_4 + \dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_6)^2 \\ &+ m_3 l_{c3} l_2 (\dot{\theta}_4^2 + 2\dot{\theta}_4 \dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_6 \dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_6 \dot{\theta}_4 + \dot{\theta}_5^2) \cos(\theta_6) \end{aligned} \quad (3.80)$$

y

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{SPI}(\theta) &= -[m_1 l_{c1} + m_2 l_1 + m_3 l_1] g \cos(\theta_4) - [m_2 l_{c2} + m_3 l_2] g \cos(\theta_4 + \theta_5) \\ &- m_3 l_{c3} g \cos(\theta_4 + \theta_5 + \theta_6). \end{aligned} \quad (3.81)$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{SPI}(\theta, \dot{\theta}) = & \frac{1}{2} [m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + m_3 l_1^2] \dot{\theta}_4^2 + \frac{1}{2} [m_2 l_{c2}^2 + m_3 l_2^2] (\dot{\theta}_4^2 + 2\dot{\theta}_4 \dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_5^2) + \frac{1}{2} I_2 (\dot{\theta}_4 + \dot{\theta}_5)^2 \\
& + [m_2 l_{c2} + m_3 l_2] (\dot{\theta}_4^2 + \dot{\theta}_5 \dot{\theta}_4) l_1 \cos(\theta_5) + m_3 l_{c3} l_1 (\dot{\theta}_4^2 + \dot{\theta}_5 \dot{\theta}_4 + \dot{\theta}_6 \dot{\theta}_4) \cos(\theta_5 + \theta_6) \\
& + \frac{1}{2} m_3 l_{c3}^2 (\dot{\theta}_4^2 + \dot{\theta}_5^2 + \dot{\theta}_6^2 + 2\dot{\theta}_4 \dot{\theta}_5 + 2\dot{\theta}_4 \dot{\theta}_6 + 2\dot{\theta}_5 \dot{\theta}_6) + [m_1 l_{c1} + m_2 l_1 + m_3 l_1] g \cos(\theta_4) \\
& + m_3 l_{c3} l_2 (\dot{\theta}_4^2 + 2\dot{\theta}_4 \dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_6 \dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_6 \dot{\theta}_4 + \dot{\theta}_5^2) \cos(\theta_6) + [m_2 l_{c2} + m_3 l_2] g \cos(\theta_4 + \theta_5) \\
& + m_3 l_{c3} g \cos(\theta_4 + \theta_5 + \theta_6) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\theta}_4 + \dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_6)^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_4^2 \tag{3.82}
\end{aligned}$$

3.3.2.4. Desarrollo de las ecuaciones de Lagrange

De (3.82), aplicando derivadas parciales con respecto a cada ángulo que componen las articulaciones y derivando con respecto a la variable del tiempo. A continuación se desarrolla el procedimiento de la obtención de las ecuaciones de Lagrange.

Análisis para obtener los elementos de τ_4

Desarrollo de la derivada parcial con respecto a $\dot{\theta}_4$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}_{SPI}}{\partial \dot{\theta}_4} = & [m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + m_3 l_1^2] \dot{\theta}_4 + [m_2 l_{c2}^2 + m_3 l_2^2] (\dot{\theta}_4 + \dot{\theta}_5) + [m_2 l_{c2} l_1 + m_3 l_2 l_1] (2 \cos(\theta_5) \dot{\theta}_4 \\
& + \cos(\theta_5) \dot{\theta}_5) + m_3 l_{c3}^2 (\dot{\theta}_4 + \dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_6) + m_3 l_{c3} l_2 (2 \cos(\theta_6) \dot{\theta}_4 + 2 \cos(\theta_6) \dot{\theta}_5 + \cos(\theta_6) \dot{\theta}_6) \\
& + m_3 l_{c3} l_1 (2 \cos(\theta_5 + \theta_6) \dot{\theta}_4 + \cos(\theta_5 + \theta_6) \dot{\theta}_5 + \cos(\theta_5 + \theta_6) \dot{\theta}_6) + I_1 \dot{\theta}_4 + I_2 (\dot{\theta}_4 + \dot{\theta}_5) \\
& + I_3 (\dot{\theta}_4 + \dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_6) \tag{3.83}
\end{aligned}$$

Se realiza la derivada con respecto al tiempo

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}_{SPI}}{\partial \dot{\theta}_4} \right] = & [m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + m_3 l_1^2 + m_2 l_{c2}^2 + m_3 l_2^2 + 2(m_2 l_{c2} l_1 + m_3 l_2 l_1) \cos(\theta_5) + m_3 l_{c3}^2 + 2m_3 l_{c3} l_2 \cos(\theta_6) \\
& + 2m_3 l_{c3} l_1 \cos(\theta_5 + \theta_6) + I_1 + I_2 + I_3] \ddot{\theta}_4 + [m_2 l_{c2} + m_3 l_2^2 + (m_2 l_{c2} l_1 + m_3 l_2 l_1) \cos(\theta_5) + m_3 l_{c3}^2 \\
& + 2m_3 l_{c3} l_2 \cos(\theta_6) + m_3 l_{c3} l_1 \cos(\theta_5 + \theta_6) + I_2 + I_3] \ddot{\theta}_5 + [m_3 l_{c3}^2 + m_3 l_{c3} l_2 \cos(\theta_6) \\
& + m_3 l_{c3} l_1 \cos(\theta_5 + \theta_6) + I_3] \ddot{\theta}_6 + [-2(m_2 l_{c2} l_1 + m_3 l_2 l_1) \sin(\theta_5) \dot{\theta}_5 - 2m_3 l_{c3} l_2 \sin(\theta_6) \dot{\theta}_6 \\
& - 2m_3 l_{c3} l_1 \sin(\theta_5 + \theta_6) (\dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_6)] \dot{\theta}_4 + [-2m_3 l_{c3} l_2 \sin(\theta_6) \dot{\theta}_6 - m_3 l_{c3} l_1 \sin(\theta_5 + \theta_6) (\dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_6)] \dot{\theta}_5 \\
& + [-m_3 l_{c3} l_2 \sin(\theta_6) \dot{\theta}_6 - m_3 l_{c3} l_1 \sin(\theta_5 + \theta_6) (\dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_6)] \dot{\theta}_6 \tag{3.84}
\end{aligned}$$

Se evalúa la derivada parcial con respecto a θ_4

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{SPI}}{\partial \theta_4} = - [m_1 l_{c1} + m_2 l_1 + m_3 l_1] g \text{sen} (\theta_4) - [m_2 l_{c2} + m_3 l_2] g \text{sen} (\theta_4 + \theta_5) - m_3 l_{c3} g \text{sen} (\theta_4 + \theta_5 + \theta_6) \quad (3.85)$$

Análisis para obtener los elementos de τ_5

Desarrollo de la derivada parcial con respecto a $\dot{\theta}_5$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_{SPI}}{\partial \dot{\theta}_5} = & [m_2 l_{c2}^2 + m_3 l_2^2] (\dot{\theta}_4 + \dot{\theta}_5) + [m_2 l_{c2} + m_3 l_2] \dot{\theta}_4 l_1 \cos (\theta_5) + m_3 l_{c3}^2 (\dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_4 + \dot{\theta}_6) \\ & + m_3 l_{c3} l_2 (2\dot{\theta}_4 + \dot{\theta}_6 + 2\dot{\theta}_5) \cos (\theta_6) + m_3 l_{c3} l_1 \dot{\theta} \cos (\theta_5 + \theta_6) + I_2 (\dot{\theta}_4 + \dot{\theta}_5) + I_3 (\dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_4 + \dot{\theta}_6) \end{aligned} \quad (3.86)$$

Se realiza la derivada con respecto al tiempo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}_{SPI}}{\partial \dot{\theta}_5} \right] = & [m_2 l_{c2}^2 + m_3 l_2^2 + (m_2 l_{c2} + m_3 l_2) l_1 \cos (\theta_5) + m_3 l_{c3}^2 + 2m_3 l_{c3} l_2 \cos (\theta_6) + m_3 l_{c3} l_1 \cos (\theta_5 + \theta_6) \\ & + I_2 + I_3] \ddot{\theta}_4 + [m_2 l_{c2}^2 + m_3 l_2^2 + m_3 l_{c3}^2 + 2m_3 l_{c3} l_2 \cos (\theta_6) + I_2 + I_3] \ddot{\theta}_5 + [m_3 l_{c3}^2 \\ & + m_3 l_{c3} l_2 \cos (\theta_6) + I_3] \ddot{\theta}_6 - [m_2 l_{c2} + m_3 l_2] l_1 \text{sen} (\theta_5) \dot{\theta}_4 \dot{\theta}_5 - 2m_3 l_{c3} l_2 \text{sen} (\theta_6) \dot{\theta}_4 \dot{\theta}_6 \\ & - m_3 l_{c3} l_2 \text{sen} (\theta_6) \dot{\theta}_6^2 - 2m_3 l_{c3} l_2 \text{sen} (\theta_6) \dot{\theta}_5 \dot{\theta}_6 - m_3 l_{c3} l_1 \text{sen} (\theta_5 + \theta_6) \dot{\theta}_4 (\dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_6) \end{aligned} \quad (3.87)$$

Se evalúa la derivada parcial con respecto a θ_5

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_{SPI}}{\partial \theta_5} = & - [m_2 l_{c2} + m_3 l_2] (\dot{\theta}_4 + \dot{\theta}_5) \dot{\theta}_4 l_1 \text{sen} (\theta_5) - m_3 l_{c3} l_1 (\dot{\theta}_4 + \dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_6) \dot{\theta}_4 \text{sen} (\theta_5 + \theta_6) \\ & - [m_2 l_{c2} + m_3 l_2] g \text{sen} (\theta_4 + \theta_5) - m_3 l_{c3} g \text{sen} (\theta_4 + \theta_5 + \theta_6) \end{aligned} \quad (3.88)$$

Análisis para obtener los elementos de τ_6

Desarrollo de la derivada parcial con respecto a $\dot{\theta}_6$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{SPI}}{\partial \dot{\theta}_6} = m_3 l_{c3}^2 (\dot{\theta}_6 + \dot{\theta}_4 + \dot{\theta}_5) + m_3 l_{c3} l_2 (\dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_4) \cos (\theta_6) + m_3 l_{c3} l_1 \dot{\theta}_4 \cos (\theta_5 + \theta_6) + I_3 (\dot{\theta}_6 + \dot{\theta}_4 + \dot{\theta}_5) \quad (3.89)$$

Se realiza la derivada con respecto al tiempo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}_{SPI}}{\partial \dot{\theta}_6} \right] = & [m_3 l_{c3}^2 + m_3 l_{c3} l_2 \cos (\theta_6) + m_3 l_{c3} l_1 \cos (\theta_5 + \theta_6) + I_3] \ddot{\theta}_4 + [m_3 l_{c3}^2 + m_3 l_{c3} l_2 \cos (\theta_6) + I_3] \ddot{\theta}_5 \\ & + [m_3 l_{c3}^2 + I_3] \ddot{\theta}_6 - m_3 l_{c3} l_2 \text{sen} (\theta_6) \dot{\theta}_5 \dot{\theta}_6 - m_3 l_{c3} l_2 \text{sen} (\theta_6) \dot{\theta}_4 \dot{\theta}_6 - m_3 l_{c3} l_1 \text{sen} (\theta_5 + \theta_6) \dot{\theta}_4 (\dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_6) \end{aligned} \quad (3.90)$$

Se evalúa la derivada parcial con respecto a θ_6

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_{SPI}}{\partial \theta_6} = & -m_3 l_{c3} l_2 \left(\dot{\theta}_4^2 + 2\dot{\theta}_4 \dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_6 \dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_6 \dot{\theta}_4 + \dot{\theta}_5^2 \right) \text{sen}(\theta_6) - m_3 l_{c3} l_1 \left(\dot{\theta}_4^2 + \dot{\theta}_5 \dot{\theta}_4 + \dot{\theta}_6 \dot{\theta}_4 \right) \text{sen}(\theta_5 + \theta_6) \\ & - m_3 l_{c3} g \text{sen}(\theta_4 + \theta_5 + \theta_6) \end{aligned} \quad (3.91)$$

Las ecuaciones dinámicas que modelan el sistema de la pierna izquierda se obtienen aplicando las ecuaciones de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}_{SPI}}{\partial \dot{\theta}_i} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}_{SPI}}{\partial \theta_i} = \tau_i \quad i = 4, 5, 6 \quad (3.92)$$

de donde finalmente se obtiene

$$\begin{aligned} \tau_4 = & \left[m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + m_3 l_1^2 + m_2 l_{c2}^2 + m_3 l_2^2 + 2(m_2 l_{c2} l_1 + m_3 l_2 l_1) \cos(\theta_5) + m_3 l_{c3}^2 + 2m_3 l_{c3} l_2 \cos(\theta_6) \right. \\ & + 2m_3 l_{c2} l_1 \cos(\theta_5 + \theta_6) + I_1 + I_2 + I_3 \left. \right] \ddot{\theta}_4 + \left[m_2 l_{c2} + m_3 l_2^2 + (m_2 l_{c2} l_1 + m_3 l_2 l_1) \cos(\theta_5) + m_3 l_{c3}^2 \right. \\ & + 2m_3 l_{c3} l_2 \cos(\theta_6) + m_3 l_{c3} l_1 \cos(\theta_5 + \theta_6) + I_2 + I_3 \left. \right] \ddot{\theta}_5 + \left[m_3 l_{c3}^2 + m_3 l_{c3} l_2 \cos(\theta_6) \right. \\ & + m_3 l_{c3} l_1 \cos(\theta_5 + \theta_6) + I_3 \left. \right] \ddot{\theta}_6 - \left[2(m_2 l_{c2} l_1 + m_3 l_2 l_1) \text{sen}(\theta_5) \dot{\theta}_5 + 2m_3 l_{c3} l_2 \text{sen}(\theta_6) \dot{\theta}_6 \right. \\ & + 2m_3 l_{c3} l_1 \text{sen}(\theta_5 + \theta_6) (\dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_6) \left. \right] \dot{\theta}_4 - \left[2m_3 l_{c3} l_2 \text{sen}(\theta_6) \dot{\theta}_6 + m_3 l_{c3} l_1 \text{sen}(\theta_5 + \theta_6) (\dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_6) \right] \dot{\theta}_5 \\ & - \left[m_3 l_{c3} l_2 \text{sen}(\theta_6) \dot{\theta}_6 + m_3 l_{c3} l_1 \text{sen}(\theta_5 + \theta_6) (\dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_6) \right] \dot{\theta}_6 + [m_1 l_{c1} + m_2 l_1 + m_3 l_1] g \text{sen}(\theta_4) \\ & + [m_2 l_{c2} + m_3 l_2] g \text{sen}(\theta_4 + \theta_5) + m_3 l_{c3} g \text{sen}(\theta_4 + \theta_5 + \theta_6) \end{aligned} \quad (3.93)$$

$$\begin{aligned} \tau_5 = & \left[m_2 l_{c2}^2 + m_3 l_2^2 + (m_2 l_{c2} + m_3 l_2) l_1 \cos(\theta_5) + m_3 l_{c3}^2 + 2m_3 l_{c3} l_2 \cos(\theta_6) + m_3 l_{c3} l_1 \cos(\theta_5 + \theta_6) + I_2 \right. \\ & + I_3 \left. \right] \ddot{\theta}_4 + \left[m_2 l_{c2}^2 + m_3 l_2^2 + m_3 l_{c3}^2 + 2m_3 l_{c3} l_2 \cos(\theta_6) + I_2 + I_3 \right] \ddot{\theta}_5 + \left[m_3 l_{c3}^2 + m_3 l_{c3} l_2 \cos(\theta_6) \right. \\ & + I_3 \left. \right] \ddot{\theta}_6 + \left[(m_2 l_{c2} + m_3 l_2) l_1 \text{sen}(\theta_5) \dot{\theta}_4 + m_3 l_{c3} l_1 \text{sen}(\theta_5 + \theta_6) \dot{\theta}_4 - 2m_3 l_{c3} l_2 \text{sen}(\theta_6) \dot{\theta}_6 \right] \dot{\theta}_4 \\ & - \left[2m_3 l_{c3} l_2 \text{sen}(\theta_6) \dot{\theta}_6 \right] \dot{\theta}_5 - \left[m_3 l_{c3} l_2 \text{sen}(\theta_6) \dot{\theta}_6 \right] \dot{\theta}_6 + [m_2 l_{c2} + m_3 l_2] g \text{sen}(\theta_4 + \theta_5) \\ & + m_3 l_{c3} g \text{sen}(\theta_4 + \theta_5 + \theta_6) \end{aligned} \quad (3.94)$$

y

$$\begin{aligned} \tau_6 = & \left[m_3 l_{c3}^2 + m_3 l_{c3} l_2 \cos(\theta_6) + m_3 l_{c3} l_1 \cos(\theta_5 + \theta_6) + I_3 \right] \ddot{\theta}_4 + \left[m_3 l_{c3}^2 + m_3 l_{c3} l_2 \cos(\theta_6) + I_3 \right] \ddot{\theta}_5 \\ & + \left[m_3 l_{c3}^2 + I_3 \right] \ddot{\theta}_6 + \left[m_3 l_{c3} l_2 \text{sen}(\theta_6) \dot{\theta}_4 + 2m_3 l_{c3} l_2 \text{sen}(\theta_6) \dot{\theta}_5 + m_3 l_{c3} l_1 \text{sen}(\theta_5 + \theta_6) \dot{\theta}_4 \right] \dot{\theta}_4 \\ & + \left[m_3 l_{c3} l_2 \text{sen}(\theta_6) \dot{\theta}_5 \right] \dot{\theta}_5 + m_3 l_{c3} g \text{sen}(\theta_4 + \theta_5 + \theta_6) \end{aligned} \quad (3.95)$$

siendo τ_4 , τ_5 y τ_6 , los pares que actúan en las uniones 4, 5 y 6.

Nótese que las ecuaciones dinámicas del robot (3.93)-(3.95) son un conjunto de tres ecuaciones diferenciales no lineales similares a las ecuaciones (3.56)-(3.58), por lo tanto a partir de ellas el modelo dinámico para **SPI** es expresado como:

$$\begin{bmatrix} M_{11}(q) & M_{12}(q) & M_{13}(q) \\ M_{21}(q) & M_{22}(q) & M_{23}(q) \\ M_{31}(q) & M_{32}(q) & M_{33}(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_4 \\ \ddot{q}_5 \\ \ddot{q}_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{11}(q, \dot{q}) & C_{12}(q, \dot{q}) & C_{13}(q, \dot{q}) \\ C_{21}(q, \dot{q}) & C_{22}(q, \dot{q}) & C_{23}(q, \dot{q}) \\ C_{31}(q, \dot{q}) & C_{32}(q, \dot{q}) & C_{33}(q, \dot{q}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_4 \\ \dot{q}_5 \\ \dot{q}_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1(q) \\ g_2(q) \\ g_3(q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_4 \\ \tau_5 \\ \tau_6 \end{bmatrix} \quad (3.96)$$

Expresando la Ecuación (3.96) de forma general para las articulaciones 4, 5 y 6 que componen al sub-sistema de la pierna izquierda **SPI**, se tiene:

$$M_{4,5,6}(q_{4,5,6}) \ddot{q}_{4,5,6} + C_{4,5,6}(q_{4,5,6}, \dot{q}_{4,5,6}) \dot{q}_{4,5,6} + g_{4,5,6}(q_{4,5,6}) = \tau_{4,5,6} \quad (3.97)$$

donde los elementos que componen la matriz de las masas e inercias $M_{4,5,6}(q_{4,5,6})$ son:

$$\begin{aligned} M_{11}(q) &= m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + m_3 l_1^2 + m_2 l_{c2}^2 + m_3 l_2^2 + 2(m_2 l_{c2} l_1 + m_3 l_2 l_1) \cos(\theta_5) \\ &\quad + m_3 l_{c3}^2 + 2m_3 l_{c3} l_2 \cos(\theta_6) + 2m_3 l_{c2} l_1 \cos(\theta_5 + \theta_6) + I_1 + I_2 + I_3 \\ M_{12}(q) &= m_2 l_{c2} + m_3 l_2^2 + (m_2 l_{c2} l_1 + m_3 l_2 l_1) \cos(\theta_5) + m_3 l_{c3}^2 + 2m_3 l_{c3} l_2 \cos(\theta_6) \\ &\quad + m_3 l_{c3} l_1 \cos(\theta_5 + \theta_6) + I_2 + I_3 \\ M_{13}(q) &= m_3 l_{c3}^2 + m_3 l_{c3} l_2 \cos(\theta_6) + m_3 l_{c3} l_1 \cos(\theta_5 + \theta_6) + I_3 \\ M_{21}(q) &= m_2 l_{c2}^2 + m_3 l_2^2 + (m_2 l_{c2} + m_3 l_2) l_1 \cos(\theta_5) + m_3 l_{c3}^2 + 2m_3 l_{c3} l_2 \cos(\theta_6) \\ &\quad + m_3 l_{c3} l_1 \cos(\theta_5 + \theta_6) + I_2 + I_3 \\ M_{22}(q) &= m_2 l_{c2}^2 + m_3 l_2^2 + m_3 l_{c3}^2 + 2m_3 l_{c3} l_2 \cos(\theta_6) + I_2 + I_3 \\ M_{23}(q) &= m_3 l_{c3}^2 + m_3 l_{c3} l_2 \cos(\theta_6) + I_3 \\ M_{31}(q) &= m_3 l_{c3}^2 + m_3 l_{c3} l_2 \cos(\theta_6) + m_3 l_{c3} l_1 \cos(\theta_5 + \theta_6) + I_3 \\ M_{32}(q) &= m_3 l_{c3}^2 + m_3 l_{c3} l_2 \cos(\theta_6) + I_3 \\ M_{33}(q) &= m_3 l_{c3}^2 + I_3 \end{aligned}$$

para la matriz de Coriolis y fuerza centrípeta $C_{4,5,6}(q_{4,5,6}, \dot{q}_{4,5,6})$ son:

$$\begin{aligned} C_{11}(q, \dot{q}) &= -[2(m_2 l_{c2} l_1 + m_3 l_2 l_1) \operatorname{sen}(\theta_5) \dot{\theta}_5 + 2m_3 l_{c3} l_2 \operatorname{sen}(\theta_6) \dot{\theta}_6 \\ &\quad + 2m_3 l_{c3} l_1 \operatorname{sen}(\theta_5 + \theta_6) (\dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_6)] \\ C_{12}(q, \dot{q}) &= -[2m_3 l_{c3} l_2 \operatorname{sen}(\theta_6) \dot{\theta}_6 + m_3 l_{c3} l_1 \operatorname{sen}(\theta_5 + \theta_6) (\dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_6)] \\ C_{13}(q, \dot{q}) &= -[m_3 l_{c3} l_2 \operatorname{sen}(\theta_6) \dot{\theta}_6 + m_3 l_{c3} l_1 \operatorname{sen}(\theta_5 + \theta_6) (\dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_6)] \\ C_{21}(q, \dot{q}) &= (m_2 l_{c2} + m_3 l_2) l_1 \operatorname{sen}(\theta_5) \dot{\theta}_4 + m_3 l_{c3} l_1 \operatorname{sen}(\theta_5 + \theta_6) \dot{\theta}_4 - 2m_3 l_{c3} l_2 \operatorname{sen}(\theta_6) \dot{\theta}_6 \\ C_{22}(q, \dot{q}) &= -2m_3 l_{c3} l_2 \operatorname{sen}(\theta_6) \dot{\theta}_6 \\ C_{23}(q, \dot{q}) &= -m_3 l_{c3} l_2 \operatorname{sen}(\theta_6) \dot{\theta}_6 \\ C_{31}(q, \dot{q}) &= m_3 l_{c3} l_2 \operatorname{sen}(\theta_6) \dot{\theta}_4 + 2m_3 l_{c3} l_2 \operatorname{sen}(\theta_6) \dot{\theta}_5 + m_3 l_{c3} l_1 \operatorname{sen}(\theta_5 + \theta_6) \dot{\theta}_4 \\ C_{32}(q, \dot{q}) &= m_3 l_{c3} l_2 \operatorname{sen}(\theta_6) \dot{\theta}_5 \\ C_{33}(q, \dot{q}) &= 0 \end{aligned}$$

y para la matriz del par gravitacional $g_{4,5,6}(\mathbf{q}_{4,5,6})$ son:

$$\begin{aligned} g_1(\mathbf{q}) &= [m_1 l_{c1} + m_2 l_1 + m_3 l_1] g \text{sen}(\theta_4) + [m_2 l_{c2} + m_3 l_2] g \text{sen}(\theta_4 + \theta_5) \\ &\quad + m_3 l_{c3} g \text{sen}(\theta_4 + \theta_5 + \theta_6) \\ g_2(\mathbf{q}) &= [m_2 l_{c2} + m_3 l_2] g \text{sen}(\theta_4 + \theta_5) + m_3 l_{c3} g \text{sen}(\theta_4 + \theta_5 + \theta_6) \\ g_3(\mathbf{q}) &= m_3 l_{c3} g \text{sen}(\theta_4 + \theta_5 + \theta_6) \end{aligned}$$

3.3.3. Acoplamiento del modelo dinámico

La ecuación de movimiento de un manipulador es descrito en términos de las coordenadas de sus articulaciones q_i en la siguiente forma:

$$\mathbf{M}_i(q_i) \ddot{q}_i + \mathbf{C}_i(q_i, \dot{q}_i) \dot{q}_i + g_i(q_i) = \tau_i \quad (3.98)$$

El sistema bípedo propuesto esta formado por dos sub-sistemas que representan las piernas **SPD** y **SPI**, y que en conjunto forman el sistema robótico completo:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} \begin{cases} \text{Subsistema SPD, } (i = 1, 2, 3) \\ \mathbf{M}_i(q_i) \ddot{q}_i + \mathbf{C}_i(q_i, \dot{q}_i) \dot{q}_i + g_i(q_i) = \tau_i \\ \text{Subsistema SPI, } (i = 4, 5, 6) \\ \mathbf{M}_i(q_i) \ddot{q}_i + \mathbf{C}_i(q_i, \dot{q}_i) \dot{q}_i + g_i(q_i) = \tau_i \end{cases}$$

La dinámica combinada utilizada en robots manipuladores colaborativos para obtener un único modelo dinámico, menciona de forma general, la ecuación de movimiento de k manipuladores puede ser descrita como:

$$\mathbf{M}_m(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_m(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}_m(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} \quad (3.99)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_m(\mathbf{q}) &= \text{diag} \{ \mathbf{M}_1(q_1), \dots, \mathbf{M}_k(q_k) \} \in \mathbb{R}^{n_m \times n_m}, \\ \mathbf{C}_m(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \text{diag} \{ \mathbf{C}_1(q_1, \dot{q}_1), \dots, \mathbf{C}_k(q_k, \dot{q}_k) \} \in \mathbb{R}^{n_m \times n_m}, \\ \mathbf{g}_m(\mathbf{q}) &= [g_1(q_1)^T \dots g_k(q_k)^T]^T \in \mathbb{R}^{n_m}, \\ \mathbf{q} &= [q_1^T \dots q_k^T]^T \in \mathbb{R}^{n_m}, \\ \boldsymbol{\tau} &= [\tau_1^T \dots \tau_k^T]^T \in \mathbb{R}^{n_m}, \\ n_m &= \sum_{i=1}^k n_i. \end{aligned}$$

Siendo la composición del sistema bípedo completo por dos sub-sistemas (**SPD** y **SPI**) de 3 grados de libertad cada uno de ellos, se tiene que:

$$\begin{aligned}
 n_m &= \sum_{i=1}^2 n_i = n_1 + n_2 = 6, \\
 \mathbf{M}_m(\mathbf{q}) &= \text{diag} \{ \mathbf{M}_1(\mathbf{q}_1), \mathbf{M}_2(\mathbf{q}_2) \} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}, \\
 \mathbf{C}_m(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \text{diag} \{ \mathbf{C}_1(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1), \mathbf{C}_2(\mathbf{q}_2, \dot{\mathbf{q}}_2) \} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}, \\
 \mathbf{g}_m(\mathbf{q}) &= \left[\mathbf{g}_1(\mathbf{q}_1)^T \quad \mathbf{g}_2(\mathbf{q}_2)^T \right]^T \in \mathbb{R}^6, \\
 \mathbf{q} &= \left[\mathbf{q}_1^T \quad \mathbf{q}_2^T \right]^T \in \mathbb{R}^6, \\
 \boldsymbol{\tau} &= \left[\boldsymbol{\tau}_1^T \quad \boldsymbol{\tau}_2^T \right]^T \in \mathbb{R}^6.
 \end{aligned}$$

$\mathbf{M}_1(\mathbf{q}_1)$, $\mathbf{C}_1(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1)$, $\mathbf{g}_1(\mathbf{q}_1)$, \mathbf{q}_1 y $\boldsymbol{\tau}_1$ corresponden a las matrices y vectores del primer modelo dinámico que corresponde al sub-sistema de la pierna derecha **SPD**, y $\mathbf{M}_2(\mathbf{q}_2)$, $\mathbf{C}_2(\mathbf{q}_2, \dot{\mathbf{q}}_2)$, $\mathbf{g}_2(\mathbf{q}_2)$, \mathbf{q}_2 y $\boldsymbol{\tau}_2$ pertenecen al segundo modelo dinámico que corresponde al sub-sistema de la pierna izquierda **SPI**. En consecuencia a la unificación de estos sub-sistemas, obtenemos un modelo general del sistema bípedo por completo de 6 grados de libertad. Entonces, los modelos dinámicos obtenidos anteriormente por cada sub-sistema, **SPD** y **SPI**, en el modelo dinámico final del sistema completo, es escrito de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_1 \\ \dot{\mathbf{q}}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{C}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_1 \\ \dot{\mathbf{q}}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{g}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}_1 \\ \boldsymbol{\tau}_2 \end{bmatrix} \tag{3.100}$$

donde

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}_1 &= \mathbf{M}_{1,2,3}(\mathbf{q}_{1,2,3}) \\
 \mathbf{M}_2 &= \mathbf{M}_{4,5,6}(\mathbf{q}_{4,5,6}) \\
 \mathbf{C}_1 &= \mathbf{C}_{1,2,3}(\mathbf{q}_{1,2,3}, \dot{\mathbf{q}}_{1,2,3}) \\
 \mathbf{C}_2 &= \mathbf{C}_{4,5,6}(\mathbf{q}_{4,5,6}, \dot{\mathbf{q}}_{4,5,6}) \\
 \dot{\mathbf{q}}_1 &= \dot{\mathbf{q}}_{1,2,3} \\
 \dot{\mathbf{q}}_2 &= \dot{\mathbf{q}}_{4,5,6} \\
 \ddot{\mathbf{q}}_1 &= \ddot{\mathbf{q}}_{1,2,3} \\
 \ddot{\mathbf{q}}_2 &= \ddot{\mathbf{q}}_{4,5,6} \\
 \mathbf{g}_1 &= \mathbf{g}_{1,2,3}(\mathbf{q}_{1,2,3}) \\
 \mathbf{g}_2 &= \mathbf{g}_{4,5,6}(\mathbf{q}_{4,5,6}) \\
 \boldsymbol{\tau}_1 &= \boldsymbol{\tau}_{1,2,3} \\
 \boldsymbol{\tau}_2 &= \boldsymbol{\tau}_{4,5,6}
 \end{aligned}$$

Sustituyendo los elementos de las matrices y vectores de las Ecuaciones (3.60) y (3.97), que corresponden a cada sub-sistema, en la ecuación (3.100), se tiene el modelo general del sistema bípodo completo como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} & \mathbf{M}_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} & \mathbf{M}_{23} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{M}_{31} & \mathbf{M}_{32} & \mathbf{M}_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{M}_{44} & \mathbf{M}_{45} & \mathbf{M}_{46} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{M}_{54} & \mathbf{M}_{55} & \mathbf{M}_{56} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{M}_{64} & \mathbf{M}_{65} & \mathbf{M}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \\ \ddot{q}_4 \\ \ddot{q}_5 \\ \ddot{q}_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} & \mathbf{C}_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{C}_{22} & \mathbf{C}_{23} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{C}_{31} & \mathbf{C}_{32} & \mathbf{C}_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{C}_{44} & \mathbf{C}_{45} & \mathbf{C}_{46} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{C}_{54} & \mathbf{C}_{55} & \mathbf{C}_{56} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{C}_{64} & \mathbf{C}_{65} & \mathbf{C}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \\ \dot{q}_5 \\ \dot{q}_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{g}_2 \\ \mathbf{g}_3 \\ \mathbf{g}_4 \\ \mathbf{g}_5 \\ \mathbf{g}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}_1 \\ \boldsymbol{\tau}_2 \\ \boldsymbol{\tau}_3 \\ \boldsymbol{\tau}_4 \\ \boldsymbol{\tau}_5 \\ \boldsymbol{\tau}_6 \end{bmatrix} \quad (3.101)$$

donde los elementos que componen la matriz de masas e inercias \mathbf{M}_m final son:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{11} &= m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + m_3 l_1^2 + m_2 l_{c2}^2 + m_3 l_2^2 + 2(m_2 l_{c2} l_1 + m_3 l_2 l_1) \cos(\theta_2) \\ &\quad + m_3 l_{c3}^2 + 2m_3 l_{c3} l_2 \cos(\theta_3) + 2m_3 l_{c2} l_1 \cos(\theta_2 + \theta_3) + I_1 + I_2 + I_3 \\ \mathbf{M}_{12} &= m_2 l_{c2} + m_3 l_2^2 + (m_2 l_{c2} l_1 + m_3 l_2 l_1) \cos(\theta_2) + m_3 l_{c3}^2 + 2m_3 l_{c3} l_2 \cos(\theta_3) \\ &\quad + m_3 l_{c3} l_1 \cos(\theta_2 + \theta_3) + I_2 + I_3 \\ \mathbf{M}_{13} &= m_3 l_{c3}^2 + m_3 l_{c3} l_2 \cos(\theta_3) + m_3 l_{c3} l_1 \cos(\theta_2 + \theta_3) + I_3 \\ \mathbf{M}_{21} &= m_2 l_{c2}^2 + m_3 l_2^2 + (m_2 l_{c2} + m_3 l_2) l_1 \cos(\theta_2) + m_3 l_{c3}^2 + 2m_3 l_{c3} l_2 \cos(\theta_3) \\ &\quad + m_3 l_{c3} l_1 \cos(\theta_2 + \theta_3) + I_2 + I_3 \\ \mathbf{M}_{22} &= m_2 l_{c2}^2 + m_3 l_2^2 + m_3 l_{c3}^2 + 2m_3 l_{c3} l_2 \cos(\theta_3) + I_2 + I_3 \\ \mathbf{M}_{23} &= m_3 l_{c3}^2 + m_3 l_{c3} l_2 \cos(\theta_3) + I_3 \\ \mathbf{M}_{31} &= m_3 l_{c3}^2 + m_3 l_{c3} l_2 \cos(\theta_3) + m_3 l_{c3} l_1 \cos(\theta_2 + \theta_3) + I_3 \\ \mathbf{M}_{32} &= m_3 l_{c3}^2 + m_3 l_{c3} l_2 \cos(\theta_3) + I_3 \\ \mathbf{M}_{33} &= m_3 l_{c3}^2 + I_3 \\ \mathbf{M}_{44} &= m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + m_3 l_1^2 + m_2 l_{c2}^2 + m_3 l_2^2 + 2(m_2 l_{c2} l_1 + m_3 l_2 l_1) \cos(\theta_5) \\ &\quad + m_3 l_{c3}^2 + 2m_3 l_{c3} l_2 \cos(\theta_6) + 2m_3 l_{c2} l_1 \cos(\theta_5 + \theta_6) + I_1 + I_2 + I_3 \\ \mathbf{M}_{45} &= m_2 l_{c2} + m_3 l_2^2 + (m_2 l_{c2} l_1 + m_3 l_2 l_1) \cos(\theta_5) + m_3 l_{c3}^2 + 2m_3 l_{c3} l_2 \cos(\theta_6) \\ &\quad + m_3 l_{c3} l_1 \cos(\theta_5 + \theta_6) + I_2 + I_3 \\ \mathbf{M}_{46} &= m_3 l_{c3}^2 + m_3 l_{c3} l_2 \cos(\theta_6) + m_3 l_{c3} l_1 \cos(\theta_5 + \theta_6) + I_3 \\ \mathbf{M}_{54} &= m_2 l_{c2}^2 + m_3 l_2^2 + (m_2 l_{c2} + m_3 l_2) l_1 \cos(\theta_5) + m_3 l_{c3}^2 + 2m_3 l_{c3} l_2 \cos(\theta_6) \\ &\quad + m_3 l_{c3} l_1 \cos(\theta_5 + \theta_6) + I_2 + I_3 \\ \mathbf{M}_{55} &= m_2 l_{c2}^2 + m_3 l_2^2 + m_3 l_{c3}^2 + 2m_3 l_{c3} l_2 \cos(\theta_6) + I_2 + I_3 \\ \mathbf{M}_{56} &= m_3 l_{c3}^2 + m_3 l_{c3} l_2 \cos(\theta_6) + I_3 \\ \mathbf{M}_{64} &= m_3 l_{c3}^2 + m_3 l_{c3} l_2 \cos(\theta_6) + m_3 l_{c3} l_1 \cos(\theta_5 + \theta_6) + I_3 \\ \mathbf{M}_{65} &= m_3 l_{c3}^2 + m_3 l_{c3} l_2 \cos(\theta_6) + I_3 \\ \mathbf{M}_{66} &= m_3 l_{c3}^2 + I_3 \end{aligned}$$

Los elementos de la matriz de Coriolis y fuerza centrípeta C_m final son:

$$\begin{aligned}
C_{11} &= - [2 (m_2 l_{c2} l_1 + m_3 l_2 l_1) \text{sen} (\theta_2) \dot{\theta}_2 + 2 m_3 l_{c3} l_2 \text{sen} (\theta_3) \dot{\theta}_3 \\
&\quad + 2 m_3 l_{c3} l_1 \text{sen} (\theta_2 + \theta_3) (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)] \\
C_{12} &= - [2 m_3 l_{c3} l_2 \text{sen} (\theta_3) \dot{\theta}_3 + m_3 l_{c3} l_1 \text{sen} (\theta_2 + \theta_3) (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)] \\
C_{13} &= - [m_3 l_{c3} l_2 \text{sen} (\theta_3) \dot{\theta}_3 + m_3 l_{c3} l_1 \text{sen} (\theta_2 + \theta_3) (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)] \\
C_{21} &= (m_2 l_{c2} + m_3 l_2) l_1 \text{sen} (\theta_2) \dot{\theta}_1 + m_3 l_{c3} l_1 \text{sen} (\theta_2 + \theta_3) \dot{\theta}_1 - 2 m_3 l_{c3} l_2 \text{sen} (\theta_3) \dot{\theta}_3 \\
C_{22} &= -2 m_3 l_{c3} l_2 \text{sen} (\theta_3) \dot{\theta}_3 \\
C_{23} &= -m_3 l_{c3} l_2 \text{sen} (\theta_3) \dot{\theta}_3 \\
C_{31} &= m_3 l_{c3} l_2 \text{sen} (\theta_3) \dot{\theta}_1 + 2 m_3 l_{c3} l_2 \text{sen} (\theta_3) \dot{\theta}_2 + m_3 l_{c3} l_1 \text{sen} (\theta_2 + \theta_3) \dot{\theta}_1 \\
C_{32} &= m_3 l_{c3} l_2 \text{sen} (\theta_3) \dot{\theta}_2 \\
C_{33} &= 0 \\
C_{44} &= - [2 (m_2 l_{c2} l_1 + m_3 l_2 l_1) \text{sen} (\theta_5) \dot{\theta}_5 + 2 m_3 l_{c3} l_2 \text{sen} (\theta_6) \dot{\theta}_6 \\
&\quad + 2 m_3 l_{c3} l_1 \text{sen} (\theta_5 + \theta_6) (\dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_6)] \\
C_{45} &= - [2 m_3 l_{c3} l_2 \text{sen} (\theta_6) \dot{\theta}_6 + m_3 l_{c3} l_1 \text{sen} (\theta_5 + \theta_6) (\dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_6)] \\
C_{46} &= - [m_3 l_{c3} l_2 \text{sen} (\theta_6) \dot{\theta}_6 + m_3 l_{c3} l_1 \text{sen} (\theta_5 + \theta_6) (\dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_6)] \\
C_{54} &= (m_2 l_{c2} + m_3 l_2) l_1 \text{sen} (\theta_5) \dot{\theta}_4 + m_3 l_{c3} l_1 \text{sen} (\theta_5 + \theta_6) \dot{\theta}_4 - 2 m_3 l_{c3} l_2 \text{sen} (\theta_6) \dot{\theta}_6 \\
C_{55} &= -2 m_3 l_{c3} l_2 \text{sen} (\theta_6) \dot{\theta}_6 \\
C_{56} &= -m_3 l_{c3} l_2 \text{sen} (\theta_6) \dot{\theta}_6 \\
C_{64} &= m_3 l_{c3} l_2 \text{sen} (\theta_6) \dot{\theta}_4 + 2 m_3 l_{c3} l_2 \text{sen} (\theta_6) \dot{\theta}_5 + m_3 l_{c3} l_1 \text{sen} (\theta_5 + \theta_6) \dot{\theta}_4 \\
C_{65} &= m_3 l_{c3} l_2 \text{sen} (\theta_6) \dot{\theta}_5 \\
C_{66} &= 0
\end{aligned}$$

y para la matriz del par gravitacional g_m final son:

$$\begin{aligned}
g_1 &= [m_1 l_{c1} + m_2 l_1 + m_3 l_1] g \text{sen} (\theta_1) + [m_2 l_{c2} + m_3 l_2] g \text{sen} (\theta_1 + \theta_2) \\
&\quad + m_3 l_{c3} g \text{sen} (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\
g_2 &= [m_2 l_{c2} + m_3 l_2] g \text{sen} (\theta_1 + \theta_2) + m_3 l_{c3} g \text{sen} (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\
g_3 &= m_3 l_{c3} g \text{sen} (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\
g_4 &= [m_1 l_{c1} + m_2 l_1 + m_3 l_1] g \text{sen} (\theta_4) + [m_2 l_{c2} + m_3 l_2] g \text{sen} (\theta_4 + \theta_5) \\
&\quad + m_3 l_{c3} g \text{sen} (\theta_4 + \theta_5 + \theta_6) \\
g_5 &= [m_2 l_{c2} + m_3 l_2] g \text{sen} (\theta_4 + \theta_5) + m_3 l_{c3} g \text{sen} (\theta_4 + \theta_5 + \theta_6) \\
g_6 &= m_3 l_{c3} g \text{sen} (\theta_4 + \theta_5 + \theta_6)
\end{aligned}$$

Capítulo 4

Simulador en torno a MATLAB

La habilidad para usar simuladores en el diseño de sistemas en todos los campos de ingeniería y ciencias, se ha convertido en un factor importante para el análisis de datos que se obtienen durante la simulación con el propósito de entender y mejorar las condiciones y desempeño de un sistema. Un simulador es una herramienta computacional que nos permite reproducir el comportamiento de un sistema mediante las ecuaciones matemáticas que lo describen y brindar un ambiente gráfico de interpretación de datos dependientes de los estímulos internos y externos. Sin embargo, hacer simulaciones tiene limitaciones debido a la inexactitud de los modelos dinámicos ya que no se pueden representar e incluir todos los fenómenos físicos presentes en el sistema, de aquí que la simulación nos sirve para tener una idea de la respuesta del sistema a estímulos tanto internos como externos [29–31].

En el desarrollo del actual capítulo se presenta las características principales de **Matlab**[®] y **SolidWorks**[®] que benefician el desarrollo del simulador en base al modelo dinámico del sistema bípedo en lazo cerrado con el controlador propuesto.

4.1. Matlab[®]

Matlab[®] es un lenguaje de programación de alto nivel basado en matrices/arreglos que poseen sentencias de control de flujo, funciones, estructuras de datos, entrada/salida, y características de programación orientada a objetos; todo esto, orientado al cálculo técnico que integra un entorno amigable para el cálculo, la visualización de resultados y la codificación de programas. Generalmente es utilizado en: cálculo y matemática, desarrollo de algoritmos, adquisición de datos, modelado, simulación y prototipado, análisis, exploración y visualización de datos, gráficos científicos y de ingeniería, y desarrollo de aplicaciones con interfaces gráficas. El nombre **Matlab**[®] proviene de **Matrix Laboratory (Laboratorio de Matrices)** dado que en sus orígenes fue escrito para facilitar el desarrollo de software matricial. Las características principales de **Matlab**[®] son [32]:

- Lenguaje de programación de alto nivel para cálculo técnico.
- Entorno de desarrollo para la gestión de código, archivos y datos.
- Herramientas interactivas para la exploración, diseño y resolución de problemas interactivos.

- Funciones matemáticas para álgebra lineal, estadística, análisis de Fourier, filtrado, optimización e integración numérica
- Funciones gráficas para visualización de datos en 2D y 3D.
- Herramientas para crear interfaces gráficas de usuario personalizadas.
- Funciones para integrar algoritmos basados en Matlab con aplicaciones y lenguajes externos (C/C++, FORTRAN, Java, COM y Microsoft Excel).
- Provee Toolboxes, herramientas orientadas a problemas específicos.

Programación y archivos .m

Matlab[®] posee un compilador que traduce las sentencias **Matlab**[®] en funciones equivalentes en lenguaje C; luego, se compila éste último para obtener así el código objeto a través de un compilador C para posteriormente enlazarse con las bibliotecas matemáticas C de **Matlab**[®] junto a otros archivos que se disponga. Por lo tanto, el lenguaje de programación **Matlab**[®] es de alto nivel, posee un compilador e interpretador, es imperativo, orientado a objetos y paralelo [32].

La manera de guardar comandos y, por tanto, de construir programas que ejecuten determinadas rutinas consiste en crear lo que se llaman **ficheros-M**. La potencia de **Matlab**[®] reside en su capacidad para ejecutar una larga serie de comandos almacenados en estos ficheros de texto (**M-File**, en inglés). Los **ficheros-M** comerciales se venden agrupados en librerías llamadas *toolboxes*. El usuario de **Matlab**[®] puede editar y modificar los **ficheros-M** de las *toolboxes* y también puede crear sus propios ficheros que contienen sentencias **Matlab**[®]. La extensión de éstos archivos es .m, y el nombre de un archivo M es inmediatamente asociado al Sistema **Matlab**[®] como un nuevo comando [32].

Existen dos tipos de archivos M [32]:

Archivo M Script:

- Son los archivos M más simples.
- Son archivos externos y generalmente contienen sentencias **Matlab**[®].
- Pueden operar con variables (datos) pre-existentes o creados dentro de ellos.
- No requieren la declaración de delimitadores de inicio/ fin (begin/end).
- En su llamada (invocación), no reciben ni retornan argumentos.
- Puede generar gráficos de salida usando comandos tales como plot.
- Pueden incluir líneas de comentario en cualquier posición, adjuntas a sentencias o como líneas de documentación del script.

Archivo M Función. Solo operan con [32]:

- Argumentos de entrada.
- Variables que están definidas dentro de ellas.
- Variables globales
- Argumentos de salida.

Debido que **Matlab**® es un lenguaje de programación de alto nivel y un entorno interactivo para el cálculo técnico, e incluye funciones para el desarrollo de algoritmos, análisis de datos, cálculo numérico, y visualización; **Matlab**® sirve como base de todos los otros productos de **MathWorks**®, como es el caso de **Simulink**®, entorno donde es desarrollado la simulación del sistema bípedo, y que ambos programas (**Matlab**® y **Simulink**®) pueden computar en forma paralela y generar código [32].

4.1.1. Simulink®

Simulink® es un entorno de diagramas de bloques extendible para la simulación de sistemas y el diseño basado en modelos. Permite a los ingenieros simular y analizar una amplia gama de sistemas que incluyen controles, señales y procesamiento de imágenes, comunicaciones, y sistemas físicos multidominio. Por lo tanto, es una herramienta que ofrece un editor gráfico, bibliotecas de bloques personalizables y un conjunto de solvers, para modelar y simular sistemas. Está basado en un entorno de diagramas de bloque multidominio bajo un diseño basado en modelos. **Simulink**® permite el diseño y la simulación a nivel de sistema, la generación automática de código, así como la prueba y verificación continua de los sistemas embebidos [32].

La capacidad de integración de **Simulink**® con **Matlab**®, le permite incorporar algoritmos de este lenguaje dentro de los modelos **Simulink**®, exportar los resultados de la simulación a **Matlab**® para así poder llevar a cabo más análisis. Dentro del entorno **Matlab**®, **Simulink**® es un toolbox que se diferencia de los otros, tanto por su interfaz especial como por la “técnica de programación”. Los sistemas dinámicos pueden ser simulados utilizando **Simulink**®. En la mayoría de casos, estos implican procesos lineales o no lineales dependientes del tiempo, que pueden ser descritos usando ecuaciones diferenciales (tiempo continuo) o ecuaciones en diferencia (tiempo discreto). Otra forma común de describir los sistemas dinámicos es mediante los diagramas de bloque. Los diagramas de bloques es un intento de entender el comportamiento del sistema por medio de una representación gráfica, que esencialmente consiste de representaciones de los componentes individuales del sistema (bloques) junto con un flujo de señales entre estos componentes. **Simulink**® se basa en esta forma de representación, para ello usa una interfaz gráfica para convertir un diagrama de bloques de esta clase (casi) directamente en un modelo **Simulink**® y luego simular el funcionamiento del sistema. Hay que observar que un uso bien fundamentado de **Simulink**® requiere ciertos conocimientos de tecnología de control y la teoría de sistemas, por lo que el tema central es la solución numérica de simples ecuaciones diferenciales. Los sistemas dinámicos (que son continuos en el tiempo) se describen por ecuaciones diferenciales. Por lo tanto, cuando se describe el sistema con un diagrama de bloques y se simula la reacción del sistema a una señal de entrada, esencialmente estamos buscando nada más que la solución de la ecuación diferencial en la que se basa el sistema.

También es posible convertir una ecuación diferencial en un diagrama de bloques y resolver numéricamente la ecuación diferencial con **Simulink**[®]. **Simulink**[®] es, por lo tanto, un solucionador numérico (solver) de ecuaciones diferenciales [32].

Simulink[®] ofrece una extensa biblioteca de solucionadores (solvers), cada uno de los cuales determina el tiempo de la de simulación y se aplica un método numérico para resolver el conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias que representan el modelo. La siguiente tabla muestra cada solver y la técnica de integración que utiliza [32,33]:

Solver	Integración Técnica	Orden de Precisión
EDO1	Método de Euler	Primero
ode2	Método de Heun	Segundo
ode3	Fórmula Bogacki-Shampine	Tercera
ode4	Fórmula de cuarto orden de Runge-Kutta (RK4)	Cuarto
ode5	Fórmula Dormand-Prince (RK5)	Quinto
ode8	Fórmula Dormand-Prince RK8 (7)	Octavo

Tabla 4.1: Listado de solvers y técnica de integración que utilizan

La tabla muestra los solucionadores con el fin de la complejidad computacional de los métodos de integración que utilizan, desde el menos complejo (EDO1) hasta las más complejas (ode8). Ninguno de estos solucionadores tiene un mecanismo de control de errores. Por lo tanto, la precisión y la duración de una simulación depende directamente del tamaño de las medidas adoptadas por el solucionador. A medida que disminuye el tamaño de paso (muestra), los resultados llegan a ser más preciso, pero la simulación lleva más tiempo [32,33].

Entonces de manera resumida, las características principales de **Simulink**[®] son [32]:

- Editor gráfico para crear y gestionar diagramas de bloques jerárquicos.
- Bibliotecas de bloques predefinidos para modelar sistemas continuos y discretos.
- Motor de simulación con solvers de ecuaciones diferenciales ordinarias de paso fijo y paso variable.
- Scopes y data displays para ver los resultados de la simulación.
- Herramientas de gestión de proyectos y datos para administrar los archivos y los datos del modelo.
- Herramientas de análisis de modelos para perfeccionar la arquitectura del modelo y aumentar la velocidad de simulación.
- Bloque **Matlab**[®] Function para importar algoritmos de **Matlab**[®] en modelos.
- Legacy Code Tool para importar código C y C++ a los modelos.

SimMechanics®

Para el modelado físico en **Simulink**®, podemos encontrar el toolbox de **SimMechanics**®, este proporciona un entorno de simulación multi-cuerpo para sistemas mecánicos de 3D, tales como robots, suspensiones de vehículos, equipos de construcción y equipo de aterrizaje de aviones. Uno modela el sistema multi-cuerpo usando bloques que representan los órganos, articulaciones, limitaciones y elementos de fuerza, y luego **SimMechanics**® formula y resuelve las ecuaciones de movimiento para el sistema mecánico completo. Modelos de sistemas CAD, incluyendo la masa, la inercia, las articulaciones, limitación, y la geometría 3D, se pueden importar en **SimMechanics**®. Y una animación 3D generada automáticamente permite visualizar la dinámica del sistema [32,33].

Sus características principales son [32,33]:

- Bloques y construcciones de modelado para simular y analizar sistemas mecánicos 3D en **Simulink**®
- Definición cuerpo rígido usando extrusiones geometría y personalizados estándares definidos en **Matlab**®
- Cálculo automático de la masa y la inercia tensor
- Modos de simulación para el análisis de movimiento y calcular las fuerzas
- La visualización y animación de la dinámica de sistemas multi-cuerpo con geometría 3D
- Utilidad SimMechanics Link, que proporciona una interfaz para **Pro / ENGINEER**®, **SolidWorks**® y **Autodesk**® **Inventor**®, y otras plataformas CAD para importar el conjunto del diseño en **SimMechanics**®. La masa y la inercia de cada parte del ensamble se importa como cuerpos rígidos, la geometría del conjunto del CAD se guarda y se asocia con el cuerpo apropiado en **SimMechanics**®.
- El apoyo a la generación de código C (con Simulink Coder)

4.1.2. GUIDE

La interfaz gráfica de usuario, conocida también como GUI (del inglés Graphical User Interface) es un tipo de interfaz de usuario que utiliza un conjunto de imágenes y objetos gráficos para representar la información y acciones disponibles en la interfaz. Como en una GUI las acciones se realizan mediante manipulación directa, el usuario no tiene que crear un script, digitar algún comando en la línea de comandos o comprender los detalles de cómo se realizan las tareas para poder hacer alguna actividad con la aplicación. Las GUIs surgen como evolución de la línea de comandos de los primeros sistemas operativos y es pieza fundamental en un entorno gráfico [32,37].

Una **GUI Matlab** es una ventana figura (figure) en la cual se añaden los controles operados por el usuario (componentes) . A través de devoluciones de llamada (callbacks) se puede hacer que los componentes hagan lo que se desea cuando el usuario le da click o los manipula con pulsaciones del teclado (keystrokes) [32,37].

Toda aplicación **GUIDE** consta como mínimo de dos archivos [32,37]:

- Archivo **.fig**: Es un archivo binario que contiene una descripción completa del diseño de la GUI y sus componentes. Este archivo es del tipo **.mat**, por lo tanto solo se puede modificar en Layout Editor de **GUIDE** [32,37].
- Archivo **.m**: Es un archivo de texto que contiene código de inicialización y plantillas para la codificación de funciones callback que controlan el comportamiento de la GUI. Dado que éste archivo esta constituido de funciones, el archivo M de la aplicación GUI nunca puede ser un script [32,37].

Cada componente de la aplicación posee propiedades. Las propiedades permiten establecer las características del componente. Éstas se establecen modificando sus valores. **GUIDE** provee de la herramienta Property Inspector, para poder realizar el mantenimiento de las propiedades de cada componente. Cada vez que se añada un nuevo componente a la aplicación, **GUIDE** asignará valores por defecto a sus propiedades, los cuales podrán ser luego personalizables según la necesidad de la aplicación que estemos desarrollando. Todos los componentes tienen la propiedad *Tag*, la cual permite referenciar al componente dentro del código fuente. Todos los Tags de una aplicación **GUIDE** conforman una estructura llamada handles, a través de la cual se hace referencia al componente en el código fuente [32,37].

Estructura del archivo M de una GUI

- *La Función Principal (de inicialización)*: el archivo M generado por **GUIDE** es un archivo del tipo función. El nombre de la función principal es el mismo nombre del archivo M. Aquí se especifican las tareas de inicialización de **GUIDE** [32,37].
- *La Función de Apertura (OpeningFcn)*: Es aquella subfunción que realiza las tareas de inicialización antes de que el usuario tenga acceso a la GUI [32,37].
- *La Función de Salida (OutputFcn)*: Es aquella subfunción que retorna salidas a la línea de comando **Matlab**[®] después de que la función de apertura retorna el control y antes de que el control retorne a la línea de comandos [32,37].
- *Las Funciones callback*: Cada callback es una sub-función de la función principal. Cuando **GUIDE** genera un archivo M, éste automáticamente incluye plantillas para las funciones callback de uso frecuente para cada componente. Los callbacks de los componentes y de la ventana figura, controlan el comportamiento de la Ventana Figura y de los componentes individuales. **Matlab**[®] invoca a un callback en respuesta a un evento particular de un componente [32,37].
- *Las Funciones utilitarias o de ayuda*: Son sub-funciones que realizan tareas misceláneas no directamente asociado con algún evento de la ventana figura o de un componente [32,37].

4.2. SolidWorks®

SolidWorks® es un programa de diseño mecánico en 3D completo que integra un gran número de funciones avanzadas para facilitar el modelado piezas, crear grandes ensamblajes, generar planos y otras funcionalidades que le permiten validar, gestionar y comunicar proyectos de forma rápida, precisa y fiable. Se caracteriza por su entorno intuitivo y por disponer de herramientas de diseño fáciles de utilizar. La característica que hace que **SolidWorks®** sea una herramienta competitiva, ágil y versátil es su capacidad de ser paramétrico, variacional y asociativo, además de usar las Funciones Geométricas Inteligentes y emplear un Gestor de Diseño (FeatureManager) que permite visualizar, editar, eliminar y actualizar cualquier operación realizada en una pieza de forma bidireccional entre todos los documentos asociados [38].

Sus características principales son:

- **Definición de parámetros clave.** Los parámetros clave son las dimensiones (cotas) y las Relaciones Geométricas que definen un modelo tridimensional. **SolidWorks®** asocia a cada una de las cotas de un croquis así como a las operaciones tridimensionales un nombre que permite modificarla en cualquier momento y su actualización en el resto de documentos asociados [38].
- **Asociatividad.** Todos los documentos (Pieza, Ensamblaje o Plano) están vinculados y la modificación de un fichero de pieza modifica el ensamblaje y los planos asociados de forma automática, sin la participación del usuario. Los ficheros se actualizan aunque se encuentren cerrados [38].
- **Funciones geométricas inteligentes.** La creación de taladros, chaflanes, redondeos, vaciados o la creación de nervios, entre otras operaciones, son creadas de forma rápida, ágil e intuitiva. En muchas operaciones el proceso de definición esta guiado y puede previsualizar la operación antes de su aceptación definitiva [38].
- **Gestor de diseño.** También es conocido como árbol de operaciones o FeatureManager. En él se incluyen de forma histórica todas las operaciones que han sido necesarias efectuar para conformar la pieza durante su diseño. El Gestor de Diseño permite visualizar y ocultar operaciones, suprimirlas o eliminarlas, cambiar el color y, lo que es más importante, modificar sus parámetros de definición [38].

Otra aplicación de **SolidWorks®** es la simulación y movimiento; es una herramienta intuitiva de Simulación Física incluida en **SolidWorks®** que permite agregar distintos movimientos a los componentes que forman su ensamblaje para evaluar como la forma, las dimensiones y las relaciones geométricas establecidas entre ellos que definen la cinemática de su conjunto. Es una ayuda imprescindible para asegurar la ausencia de interferencias o choques entre los elementos de un ensamblaje; lo que reduce la necesidad de realizar costosos prototipos, acaba con las repeticiones de trabajo y las demoras, y ahorra tiempo y costes de desarrollo [38].

Visión general de análisis por elementos finitos

Para la simulación, **SolidWorks**[®] utiliza métodos de análisis por elementos finitos para calcular desplazamientos, deformaciones y tensiones de los componentes con cargas internas y externas tales como fuerzas, presiones, aceleraciones, temperaturas y contacto entre componentes. Durante la aplicación del método de elementos finitos, en lugar de intentar resolver el problema como un todo en una sola operación, se divide el cuerpo del problema en un número finito de elementos, los cuales a su vez se resuelven simultáneamente y se obtiene el resultado de un todo conformado por cada resultado arrojado por los elementos finitos. Pero, dado que el problema tiene que ser discretizado, este método numérico al igual que todos los métodos numéricos, arrojan valores aproximados de las incógnitas en un número finito de locaciones dentro del cuerpo, las cuales dependen directamente, del número de elementos usados para la discretización de la pieza [38].

4.3. Desarrollo del simulador

4.3.1. Diseño del sistema bípedo

El diseño del sistema bípedo está basado en los cánones de las proporciones del cuerpo humano, Figura 4.1, de los cuales se puede observar que las rodillas están aproximadamente a la mitad de la longitud total de las piernas de un individuo. Cabe mencionar, como todo sistema de órganos, en el desarrollo del sistema óseo influyen múltiples factores internos (como la osificación u osteogénesis proceso de la formación de los huesos dependiente del sistema sanguíneo y que dura toda la vida con el crecimiento y remodelación de los huesos) y factores externos (como las actividades de trabajo de la vida cotidiana) que condicionan las variaciones de dimensiones, forma y estructura de los huesos, por lo que evidentemente cada persona es distinta a las demás y tiene sus particularidades [39–42].

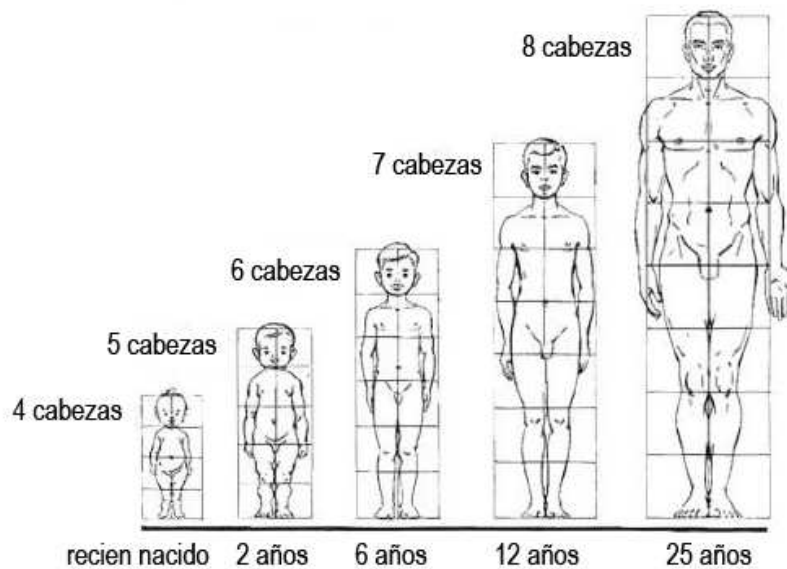


Figura 4.1: Proporciones del cuerpo tomando la cabeza como unidad de medida .

En la Figura (4.2) se observa el ensamble final del sistema robótico, ver Apéndice B para consultar medidas del diseño de cada eslabón. Como se comentó con anterioridad, el diseño fue realizado en el programa de **Solidworks**[®], el cual nos proporciona propiedades físicas de cada uno de los eslabones que componen al sistema con referencia al punto de origen de cada pieza, ver Tabla (4.2); recordando que estas propiedades son necesarias para la simulación del sistema en los programas de **Simulink**[®] y **Matlab**[®].

Eslabón	Masa (g)	Posición C_m (cm)	Inercia ($g \cdot cm^2$)
Cadera	674.78	$x = 3.00000$ cm $y = 2.33000$ cm $z = 0.00000$ cm	$I_x=12847.46$ $I_y=14923.43$ $I_z=25158.18$
Articulación Cadera Derecha	1591.03	$x = 3.26000$ cm $y = -12.840$ cm $z = -0.3300$ cm	$I_x=13746.49$ $I_y=191822.10$ $I_z=196618.02$
Articulación Cadera Izquierda	1591.03	$x = 2.74000$ cm $y = -12.840$ cm $z = -0.3300$ cm	$I_x=13746.49$ $I_y=191822.10$ $I_z=196618.02$
Articulación Rodilla Derecha	887.47	$x = 2.45000$ cm $y = -11.400$ cm $z = -0.0400$ cm	$I_x=5663.12$ $I_y=70338.91$ $I_z=71252.64$
Articulación Rodilla Izquierda	887.47	$x = 3.55000$ cm $y = -11.400$ cm $z = -0.0400$ cm	$I_x=5663.12$ $I_y=70338.91$ $I_z=71252.64$
Articulación Tobillo Derecha	504.61	$x = 3.32000$ cm $y = -3.610$ cm $z = -1.970$ cm	$I_x=5437.97$ $I_y=16189.32$ $I_z=18030.39$
Articulación Tobillo Izquierda	504.61	$x = 2.68000$ cm $y = -3.610$ cm $z = -1.970$ cm	$I_x=5437.97$ $I_y=16189.32$ $I_z=18030.39$

Tabla 4.2: Parámetros físicos del robot.

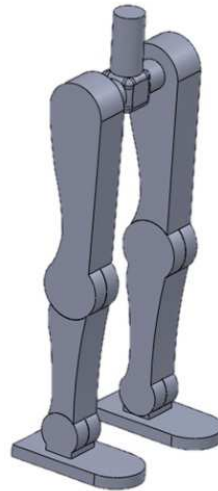


Figura 4.2: Ensamble final del sistema bípedo.

4.3.2. Traducción CAD-Simulink

El proceso de la conexión entre el sistema CAD del diseño del robot hacia el entorno de **Simulink**[®] para poder realizar las simulaciones pertinentes y el estudio cinético y dinámico del robot, consta de dos pasos fundamentales [33,35,36,39]:

- Pasar del CAD a un formato XML que puede ser leído por el SimMechanics como diagrama de bloques.
- Generar un archivo con formato MDL que será el que se pueda leer y manipular en **Simulink**[®].

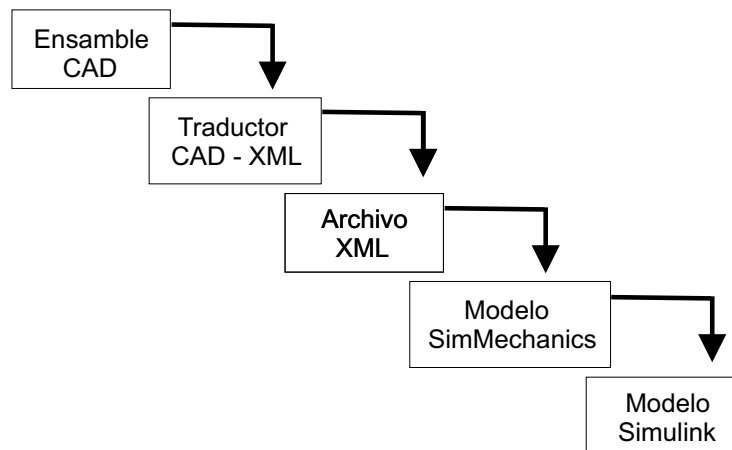


Figura 4.3: Proceso para pasar de un ensamble CAD hacia un archivo de simulación en simulink.


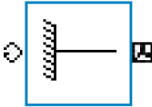

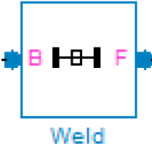
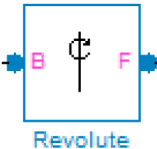
Bloque	Descripción
	<p>Machine Environment: Entorno de la maquina. Este bloque define las condiciones del entorno de simulación.</p>
	<p>Ground: Tierra. Este bloque define la posición de la tierra a la que irá sujeta la base de la máquina. Es la conexión de la máquina y el entorno.</p>
	<p>Body: Cuerpo. Es la representación de cuerpo o un elemento sólido. Se definen la masa, el centro de gravedad y el momento de inercia</p>
	<p>Weld: Soldadura. El bloque de soldadura define una unión entre dos cuerpos mediante una junta que tiene 0 grados de libertad. Cuando son cuerpos solitarios define que estos están soldados a tierra.</p>
	<p>Revolute: Junta de revolución. Se determina una junta o par de revolución entre dos cuerpos conectados entre sí. En este bloque es posible definir actuadores y sensores.</p>

Tabla 4.3: Bloques existentes en el diagrama de bloques del modelo físico en Simulink.

Existe una herramienta creada por **Mathworks**[®] que permite esta conexión mediante un traductor. Este transporta los parámetros y características del modelo CAD hacia un modelo físico en diagrama de bloques, que permitirá al finalizar el análisis en SimMechanics [33,35,36,39].

Durante el proceso de traducción entre la plataforma CAD y **Matlab**[®], se obtuvo tres archivos del modelo:

- **Archivos .STL:** nos permite tener un entorno de simulación con los elementos reales del ensamble
- **Archivos .XML:** la traducción del modelo 3D para **Matlab**[®] donde describe el sistema con sus propiedades físicas
- **Archivos .MDL:** que es reconocido por **Simulink**[®] y es la representación del modelo 3D de **SolidWorks**[®] por medio de bloques de SimMechanics [33,35,36,39].

En el archivo .MDL generado, la representación del sistema es a través de los siguientes bloques de la tabla (4.3) del toolbox SimMechanics en **Simulink**[®]. Existen otros bloques en el toolbox SimMechanics, su uso depende del tipo de sistema a simular.

La ventaja del uso de un programa CAD con ligas a **Matlab**[®] es la autogeneración del modelo 3D a bloques para **Simulink**[®]; del cual procede revisar y ajustar algunos valores en los bloques que por defecto son caracterizados con respecto a las coordenadas del espacio de trabajo de **SolidWorks**[®].

El modelo a bloques del diseño del sistema bípedo, se muestra en la Figura (4.4). Posteriormente a la definición de los bloques a utilizarse dentro de la simulación se procede a realizar la preparación del modelo dentro del entorno de **Simulink**[®]: definiendo las condiciones del entorno del robot, como la gravedad, en el bloque *Machine Environment*, que se haya importado adecuadamente desde el ensamble CAD hacia **Simulink**[®]; definición de la ubicación de la tierra en la coordenadas de origen (0,0,0), bloque *Ground*; y la verificación y corrección de las conexiones de los bloques que le siguen como es el caso de *RootPart*, con el fin de que los elementos se encuentren exactamente en el origen coordenado.

Finalmente, para establecer si se encuentra correctamente definido el sistema, se ejecuta la simulación y si está correcto se observa como el robot colapsa por la gravedad [33,35,36,39].

4.3.3. Implementación de los motores DC

El vector de pares τ del sistema es suministrado por motores D.C. de imanes permanentes, accionadores que son de tipo electromecánico. Dichos accionadores relacionan dinámicamente el par o fuerza suministrado con la entrada de dicho accionador que en este caso es voltaje. [21]

El modelo matemático del motor de corriente directa requiere de dos ecuaciones, una ecuación mecánica y otra eléctrica. Estas ecuaciones están acopladas y se basan en las leyes de la dinámica y de Kirchhoff, respectivamente; por una parte, la ecuación mecánica modela principalmente el movimiento del rotor, y por otra parte la ecuación eléctrica modela lo que ocurre en el circuito eléctrico del inducido [21]

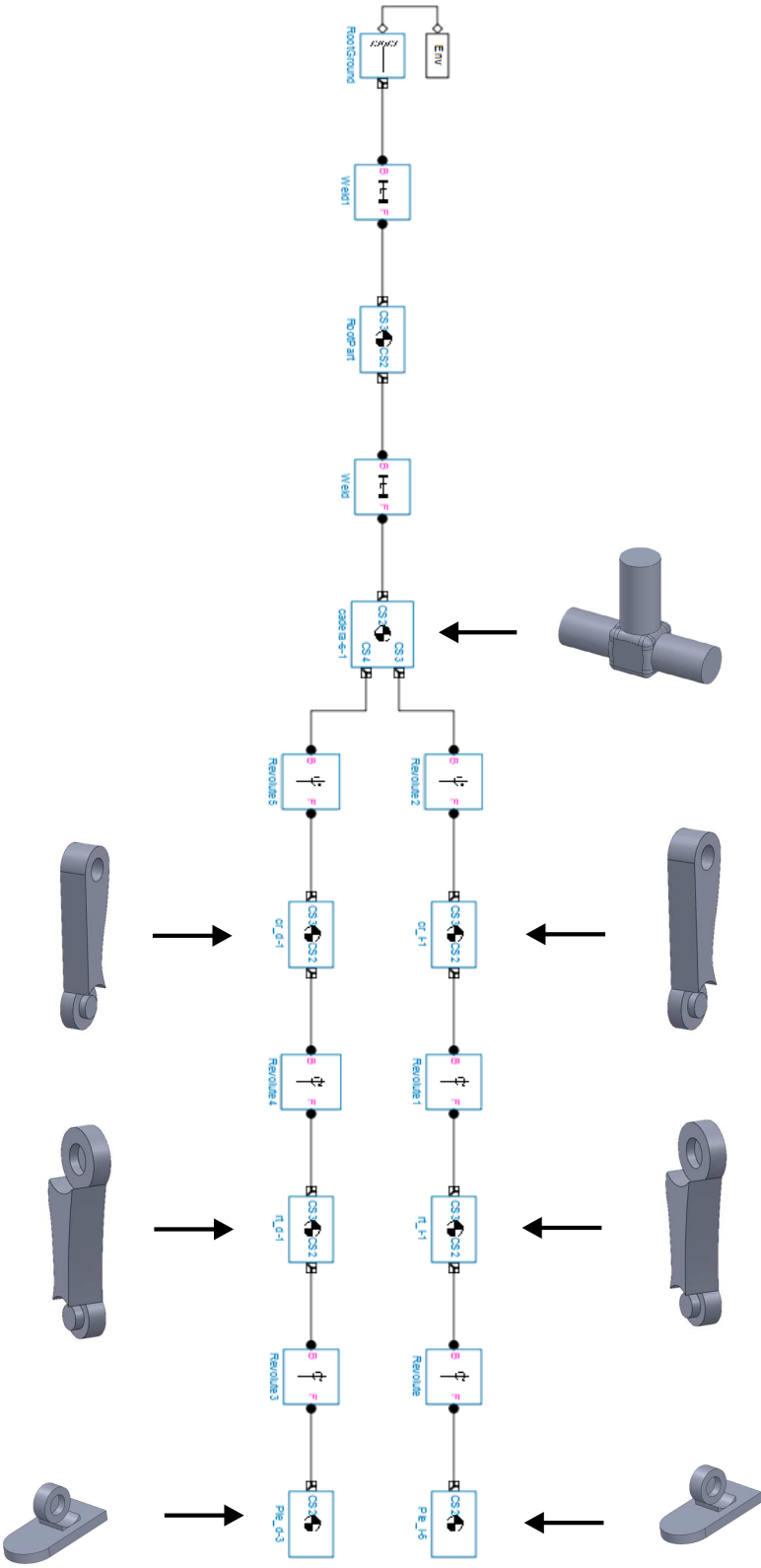


Figura 4.4: Modelo a bloques de SimMechanics del sistema bípedo.

El diagrama de bloques para el sistema de motor D.C. en el dominio de la frecuencia, se representa en la Figura (4.5), En el apéndice B, se describe la obtención de modelo del motor de corriente continua en detalle y en capítulos previos se presentó la integración del modelo matemático del motor con el modelo dinámico del sistema, Ecuación (4.1).

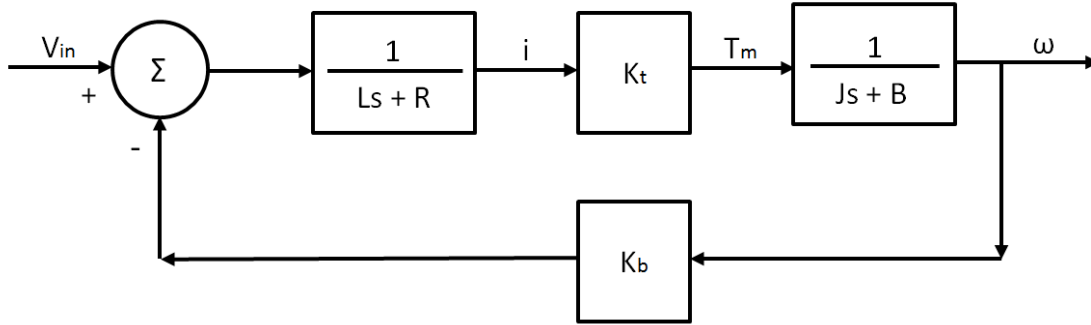


Figura 4.5: Diagrama de bloques para un sistema de motor D.C.

Las especificaciones de los motores utilizados en el simulador son descritos en el apéndice C, estos fueron elegidos por su torque generado, ya que a través de las ganancias K que relacionan el torque necesario con el voltaje en los motores, Ecuación (4.1), se obtuviera ganancias r de la Ecuación(4.2) no extremadamente grandes. La caracterización de los motores DC para las articulaciones en el sistema quedaron de la siguiente forma: el modelo ME1003 para las articulaciones de la cadera, el modelo 82 830 502 para las articulaciones de las rodillas y finalmente el modelo 82 850 002 para las articulaciones de los tobillos.

$$[RM(q) + J] \ddot{q} + RC(q, \dot{q}) \dot{q} + Rg(q) + B\dot{q} = Kv \quad (4.1)$$

$$\theta_m = rq \quad (4.2)$$

4.3.4. Implementación del controlador

Las ganancias de los controladores de la Ecuación (4.3), fueron ajustadas hasta obtener una respuesta estable para el control de posición en un tiempo mínimo, del cual se obtuvo de 3 segundos y cuyo efecto en el sistema, las respuestas de los motores DC no excedieran sus características eléctricas. Estas ganancias son las mismas para ambas piernas y serán estas mismas ganancias las que se aplicarán para el control de movimiento punto a punto, Tabla (4.4).

$$\tau = K_p \tilde{q} - K_v \dot{q} + g(q) \quad ; \quad \tilde{q} = q_d - q \quad (4.3)$$

Eslabón	K_p	K_v
Cadera	90	12
Rodilla	12	1.6
Tobillo	1.3	0.9

Tabla 4.4: Ganancias obtenidas.

4.3.5. Planeación y generación de trayectorias

La búsqueda de la sucesión de posiciones que permiten llevar al robot de una posición inicial a una final, fue basada en las gráficas de la cinemática de la marcha humana que presentan las articulaciones de la cadera, la rodilla y el tobillo en el plano sagital, Figuras (4.6 - 4.8). En esta tesis, se toma el movimiento completo del robot formado por dos trayectorias: una es la fase de apoyo y la otra la fase de balanceo.

Selección de posiciones angulares deseadas

En vista de que las gráficas de las Figuras (4.6 - 4.8) nos presentan el movimiento promedio de los rangos máximos y mínimos que muestra la marcha humana, se hizo una preselección de los valores posibles que formarían la trayectoria final, como referencia cuantitativa para la selección final de las posiciones iniciales, intermedias y finales de cada movimiento, y cuyos valores fueron escogidos tras realizar varios ensayos en el simulador, Tabla 4.5. La selección de las posiciones angulares es realizada en cada 10 % del ciclo, con el propósito de observar durante la simulación del sistema bípedo las fases y periodos que componen la marcha, de las cuales, dentro de la fase de apoyo se encuentran los periodos más pequeños: periodo de respuesta a la carga que se presenta del 0 % al 10 % del ciclo de marcha y la pre-oscilación que se presenta del 50 % al 60 % del ciclo.

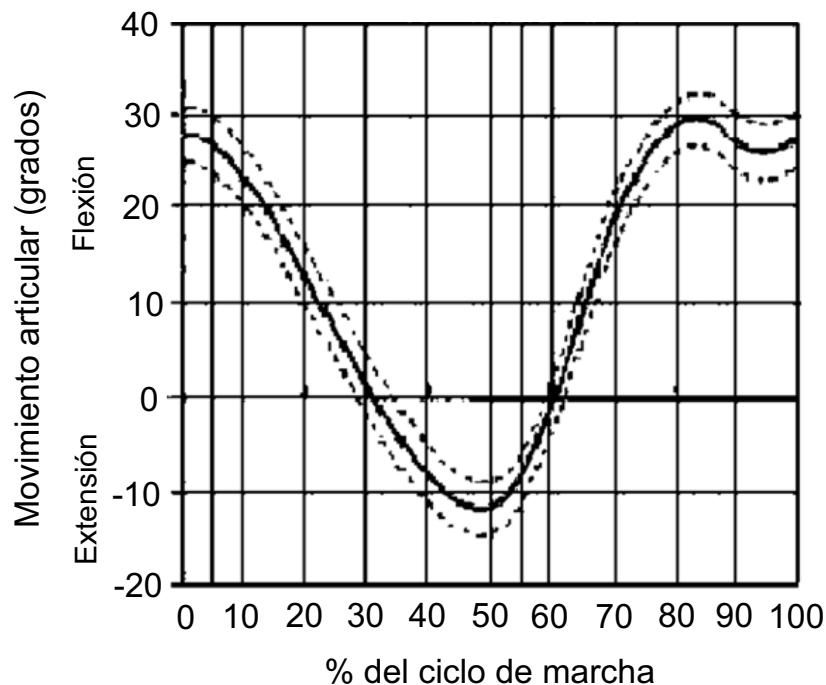


Figura 4.6: Movimiento angular de la cadera.

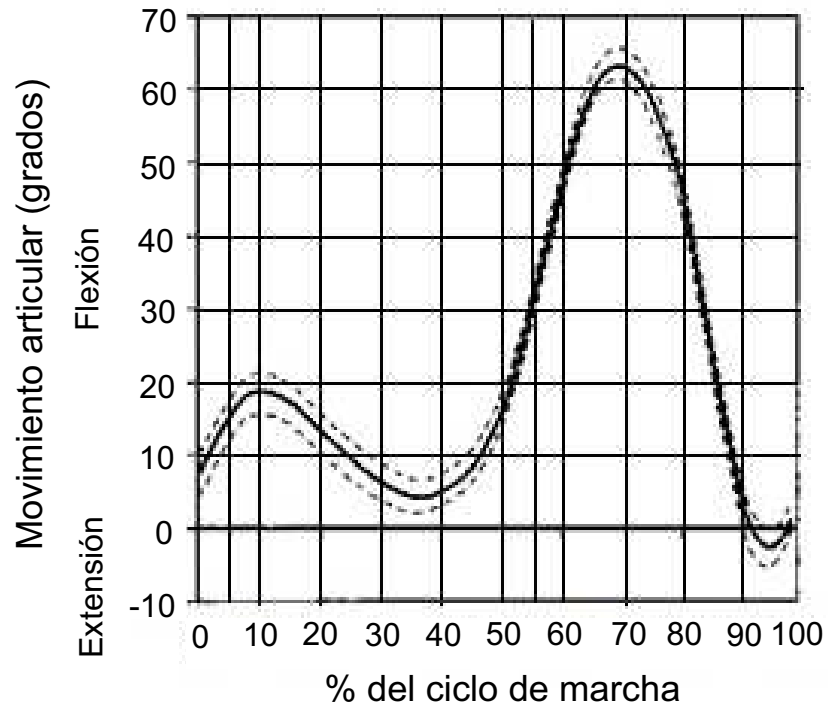


Figura 4.7: Movimiento angular de la rodilla.

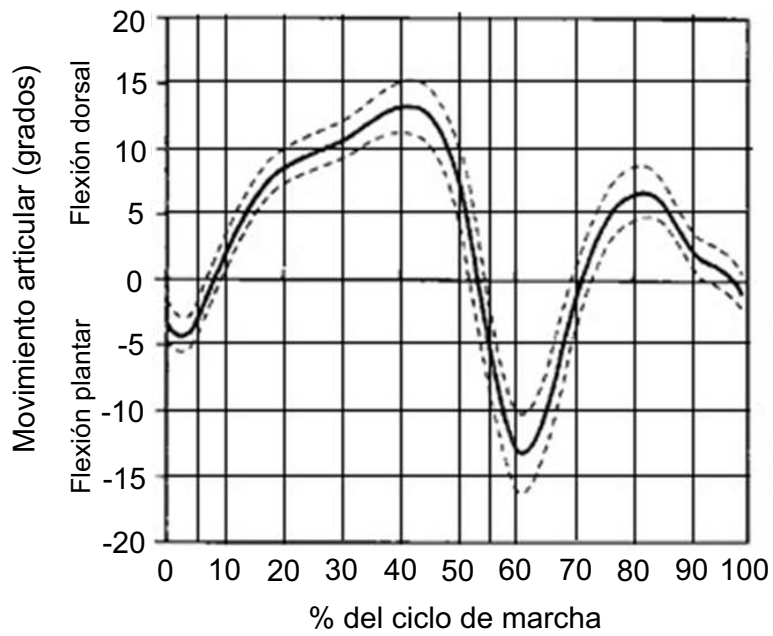


Figura 4.8: Movimiento angular del tobillo.

Articulación	% de ciclo de marcha										
	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Cadera	25	20	8	-2	-10	-15	0	20	32	23	25
Rodilla	10	21	14	7	8	19	50	65	40	0	10
Tobillo	-5	4	7	9	15	5	-16	0	8	1	-5
Fases	D. A.	Apoyo				D. A.	Balanceo				D. A.

Tabla 4.5: Valores propuestos para posiciones angulares deseadas.

De la tabla anterior, Tabla 4.5, las primeras posiciones deseadas que definen el inicio de las rutas que deben seguir las articulaciones de una de las piernas son las que se presentan en la columna del 0 % del ciclo de la marcha, la cual representa el contacto del talón con el suelo, es decir, iniciará su movimiento desde la fase portable hasta concluir con un ciclo de marcha en el último periodo de la fase oscilante, columna del 100 % del ciclo que equivale a la columna del 0 %; por lo tanto, como el movimiento de las piernas en la marcha humana es síncrona, la otra pierna iniciará las rutas de sus articulaciones con las posiciones angulares que se encuentran en la columna del 50 % del ciclo de marcha, es decir con el periodo llamado oscilación inicial, entonces el final de un ciclo de marcha será en las posiciones angulares de la columna 50 % de ciclo nuevamente. Recordemos que en los porcentajes del 0 % (equivalente al 100 %) y 50 % del ciclo de la marcha existe un doble apoyo (D. A.), es decir, que ambos pies están en contacto con el suelo, por lo que el estado de inicio y fin de cada fase coinciden en estos porcentajes del ciclo.

Trayectorias generadas

Para la generación de trayectoria, las velocidades y aceleraciones son definidas nulas con el fin de obtener movimientos suaves en cada posición deseada durante la simulación. Durante el desarrollo de las trayectorias que pasan a través de una secuencia de configuraciones (posiciones, velocidades y aceleraciones angulares), se empleó una mezcla de polinomios de quinto orden, es decir, se tomó de par en par las configuraciones donde las condiciones finales del primer par se convierten en las condiciones iniciales del siguiente y así sucesivamente. Siendo el polinomio de quinto orden:

$$\theta_i(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + a_4t^4 + a_5t^5 \quad (4.4)$$

En este caso, siendo $T = t_f - t_i$, los coeficientes del polinomio en general son:

$$a_0 = \theta_i \quad (4.5)$$

$$a_1 = \dot{\theta}_i \quad (4.6)$$

$$a_2 = \frac{\ddot{\theta}_i}{2} \quad (4.7)$$

$$a_3 = \frac{20\theta_f - 20\theta_i - (8\dot{\theta}_f + 12\dot{\theta}_i)T - (3\ddot{\theta}_f - \ddot{\theta}_i)T^2}{2T^3} \quad (4.8)$$

$$a_4 = \frac{30\theta_i - 30\theta_f + (14\dot{\theta}_f + 16\dot{\theta}_i)T + (3\ddot{\theta}_f - 2\ddot{\theta}_i)T^2}{2T^4} \quad (4.9)$$

$$a_5 = \frac{12\theta_f - 12\theta_i - (6\dot{\theta}_f + 6\dot{\theta}_i)T - (\ddot{\theta}_f - \ddot{\theta}_i)T^2}{2T^5} \quad (4.10)$$

A partir de las Ecuaciones (4.4 - 4.10) como las bases matemáticas para la generación computacional de las trayectorias, se implemento su desarrollo desde un archivo .m en Matlab[®] y cuyo diagrama de flujo del programa se observa en la Figura (4.9). La secuencia de configuraciones de entrada para la generación de trayectorias se muestran en la Tabla (4.6).

Articulación	% de ciclo de marcha (12 segundos)										
	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Cadera	25					-15			32		25
Rodilla	10	21			8			65			10
Tobillo	-5		7		15		-16		8		-5
Fases	D. A.	Apoyo			D. A.	Balanceo			D. A.		

Tabla 4.6: Configuraciones de entrada.

Los resultados obtenidos por el archivo .m se muestran en la Tabla(4.7) y las gráficas de posición, velocidad y aceleración angulares en las Figuras (4.10 - 4.12). En la Tabla (4.7), se muestran los valores obtenidos de la posición para cada articulación, con un tiempo de paso del 10 % del ciclo de la marcha y de los cuales son visibles en las gráficas de las Figuras (4.10 - 4.12).

Articulación	% de ciclo de marcha (step 1.2 seg.)										
	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Cadera	25	22.6	12.3	-2.3	-12.6	-15	-5.1	22.1	32	28.5	25
Rodilla	10	21	18.2	10.7	8	19.9	53	65	53.4	21.5	10
Tobillo	-5	1	7	11	15	-0.5	-16	-4	8	1.5	-5
Fases	D. A.	Apoyo			D. A.	Balanceo			D. A.		

Tabla 4.7: Valores obtenidos de los puntos de la trayectoria final.

Los valores obtenidos de la Tabla (4.7), son aproximados a los valores propuestos en la Tabla (4.5), están lo posiblemente dentro de los rangos máximos y mínimos que nos muestran las gráficas de la marcha humana original.

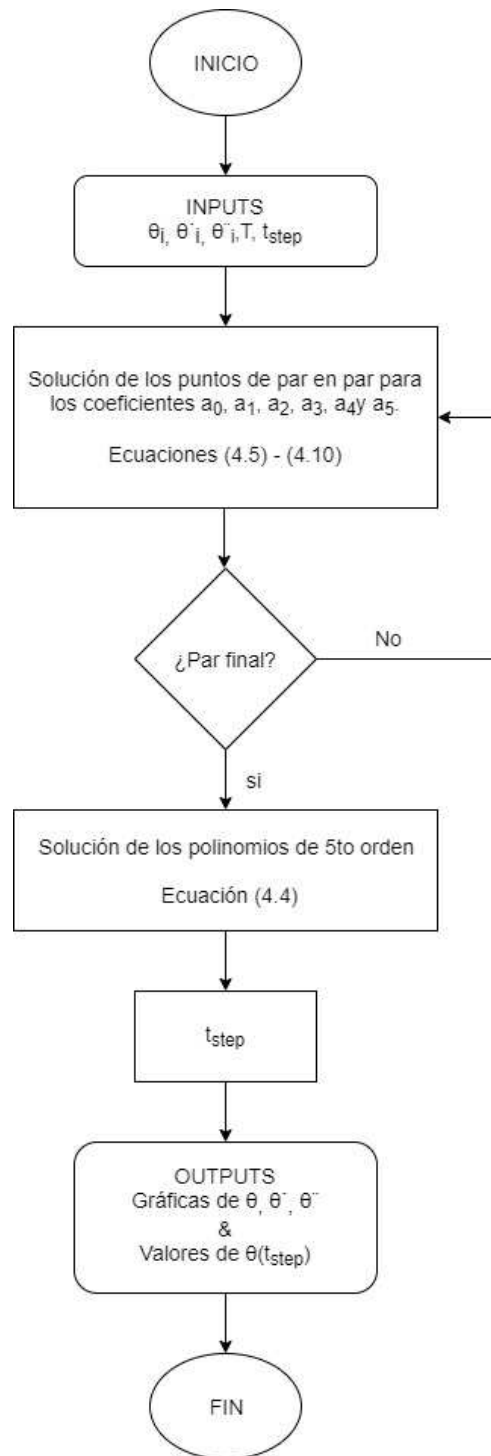


Figura 4.9: Generación computacional de las trayectorias

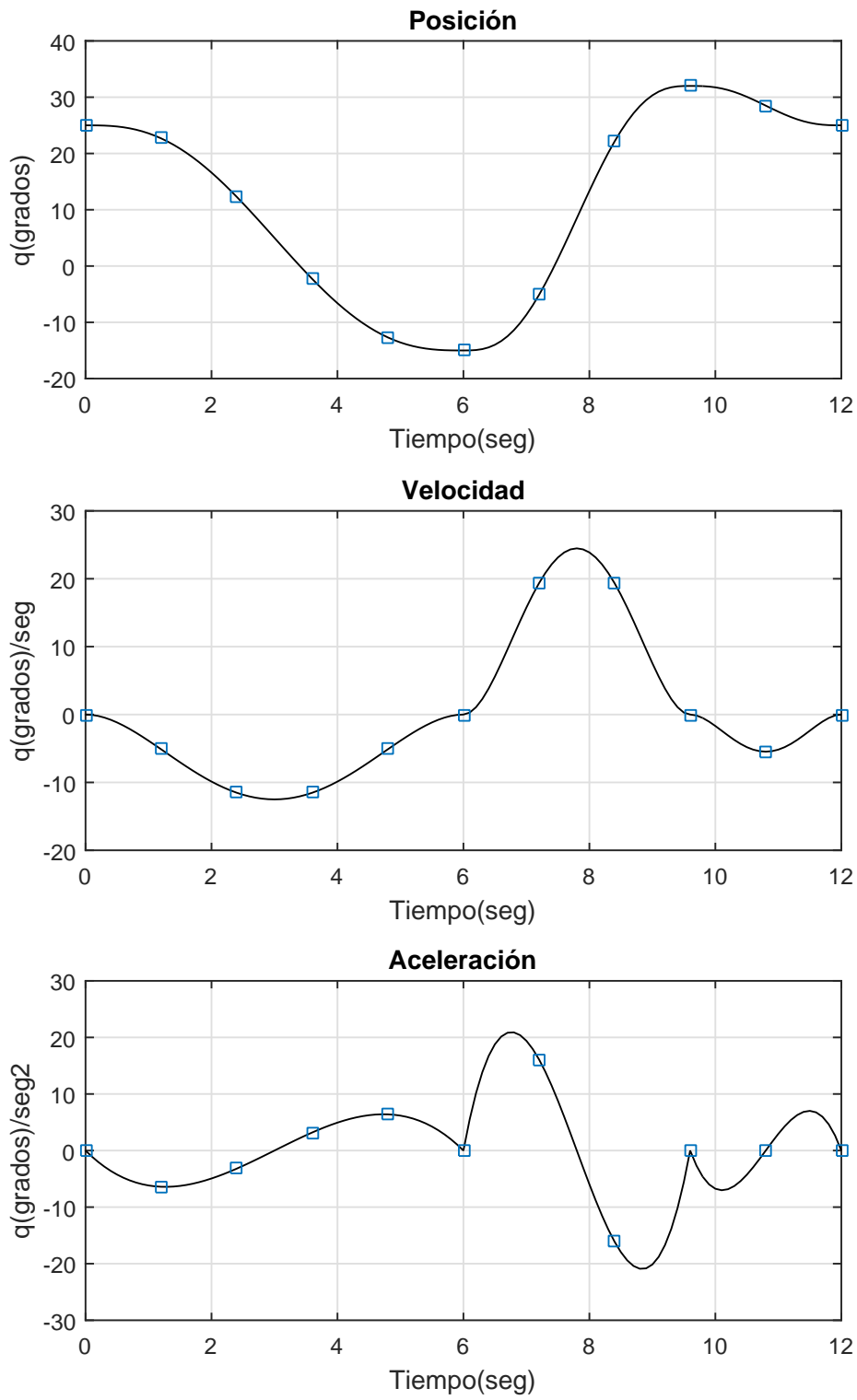


Figura 4.10: Trayectoria obtenida para la cadera

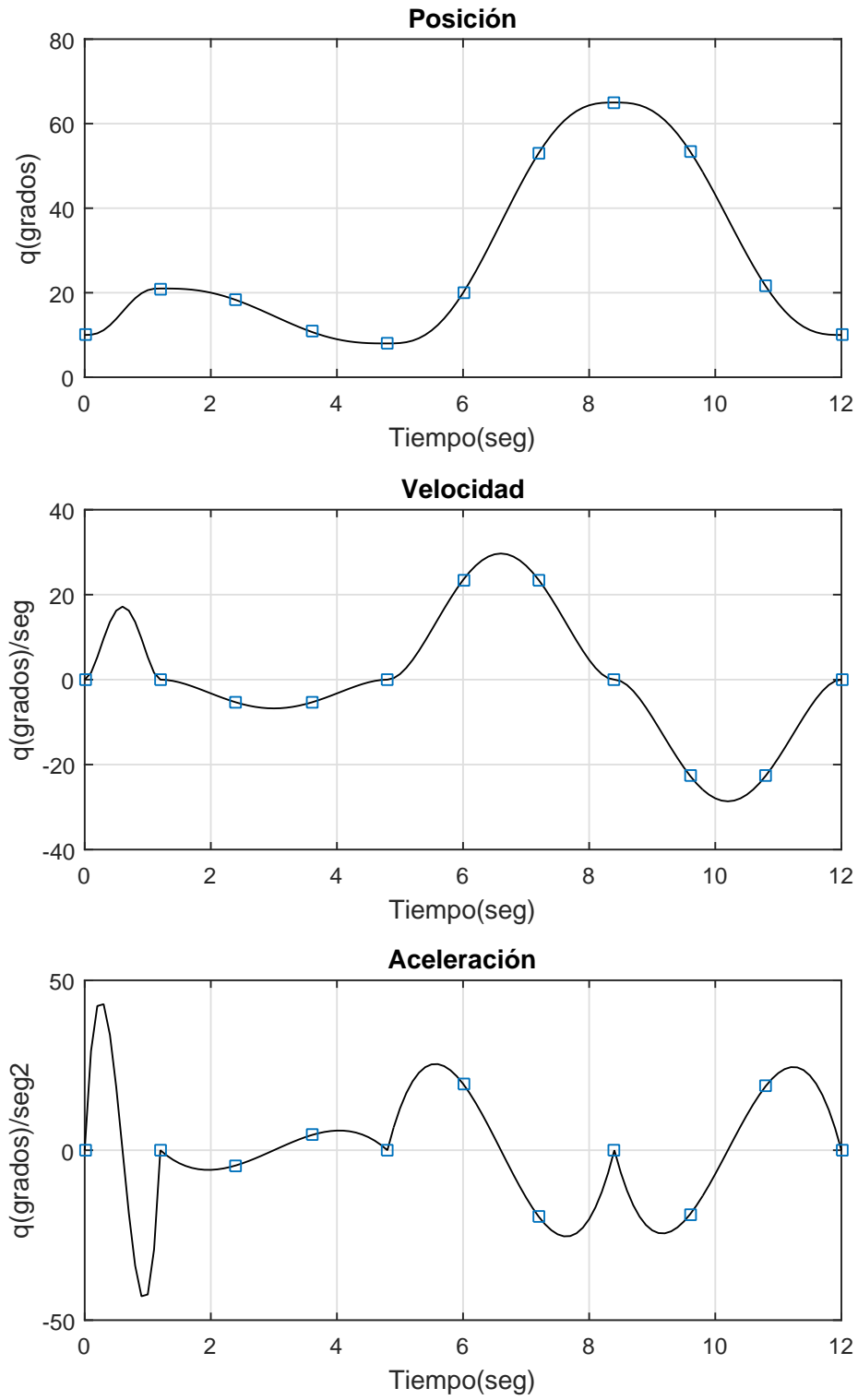


Figura 4.11: Trayectoria obtenida para la rodilla

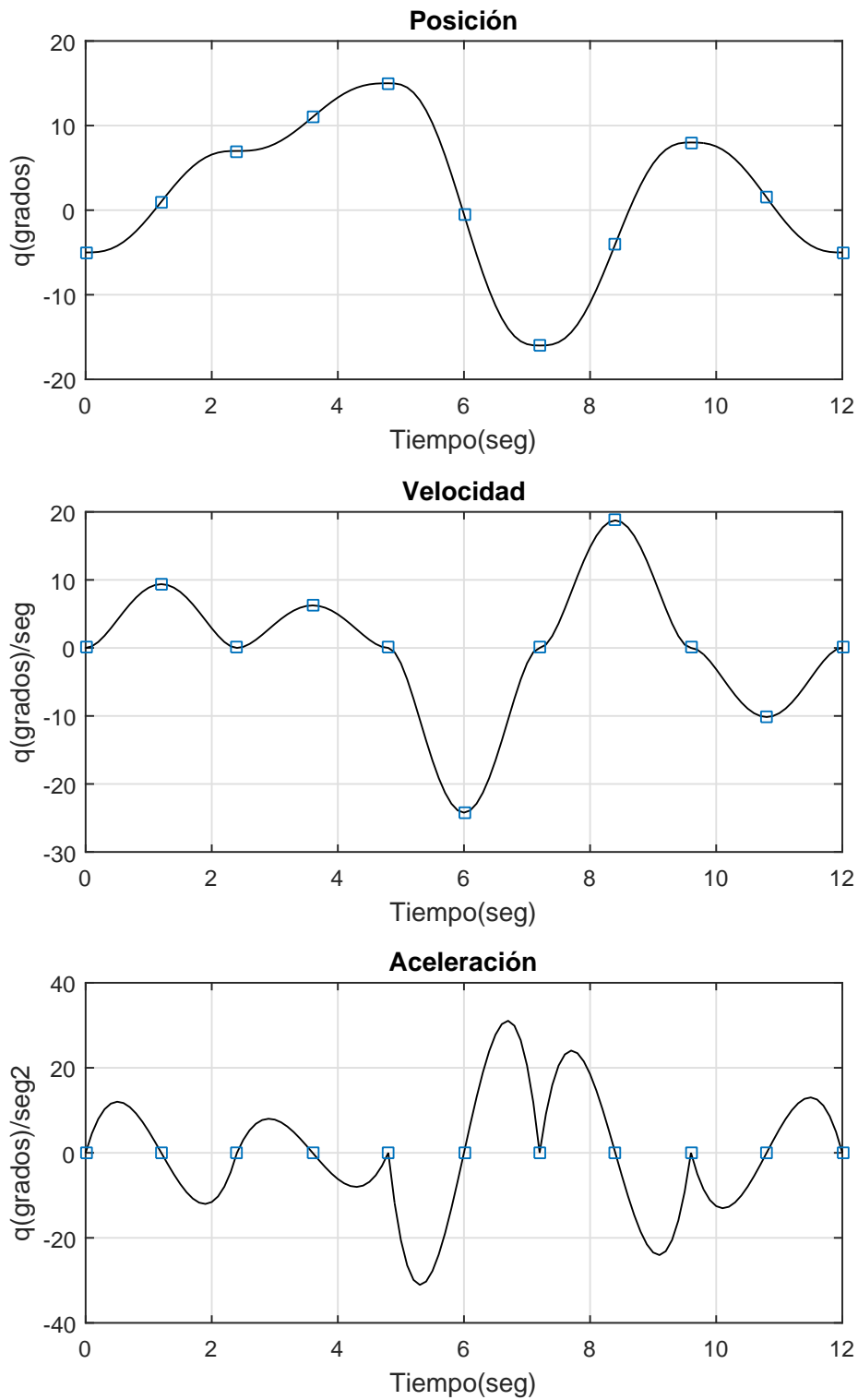


Figura 4.12: Trayectoria obtenida para el tobillo

4.4. Interfaz Gráfica de Usuario (GUI)

Con el uso de una interfaz gráfica de usuario, se proporciona un manejo sencillo de la simulación del sistema en simulink. Evita la necesidad de manipular el archivo de simulación .slx de forma directa, siendo además las pocas variables de entrada para la observación de las salidas de la simulación, dado que los objetivos de la simulación del sistema son específicamente el movimiento cíclico de la marcha previamente definida, y la observación de las articulaciones con respecto a los grados de extensión y flexión correspondientes. Entonces, la introducción de los datos de entrada para la simulación se restringe para ser únicamente de las posiciones deseadas para cada articulación, y ejecutar un número de ciclos de marcha o un tiempo determinado para simulación de la marcha. Dentro de la interfaz, se integraron botones de ejecución para la simulación como son play, pause, continue y stop. Y finalmente, las salidas de la simulación son la visualización del movimiento del modelo 3D, las gráficas de las posiciones de salida, error de posición, posiciones deseadas, los torques generados por los controladores, el torque interno de los motores, voltaje de entrada para los motores, corriente eléctrica de los motores, la potencia eléctrica y mecánica de los motores, así como las gráficas del movimiento de los tobillos en un plano xy , Figure (4.13).

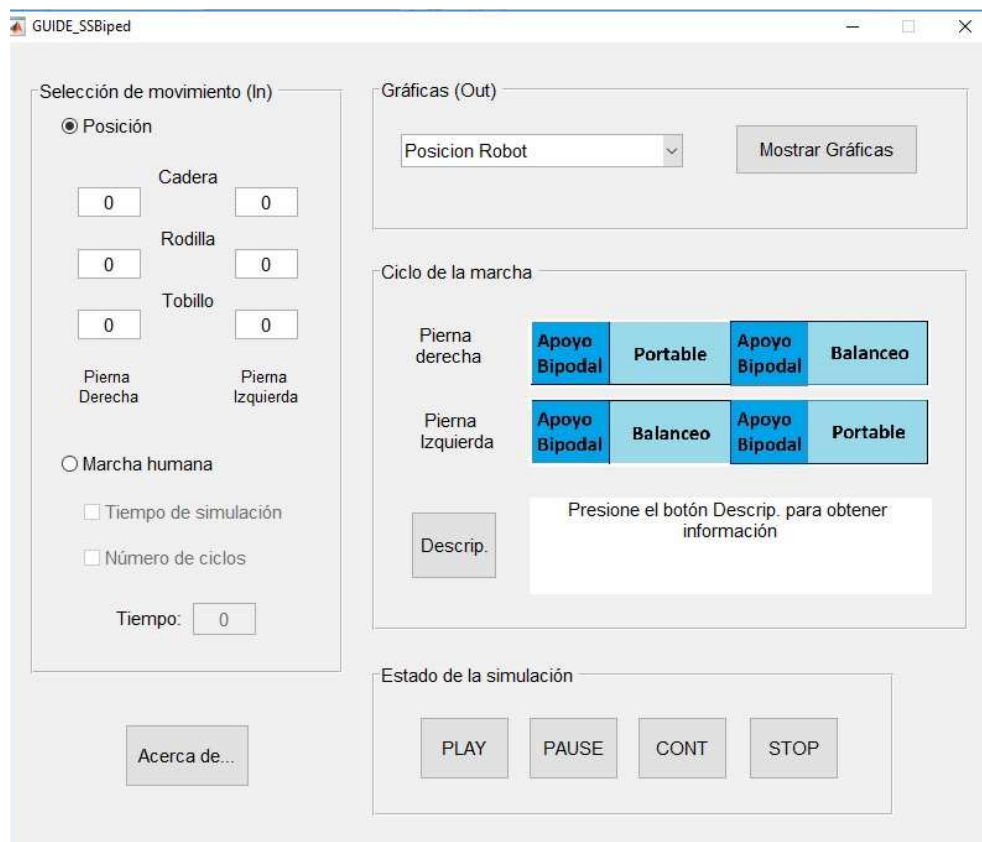


Figura 4.13: Interfaz gráfica de usuario, GUIDE SSBiped

4.5. Diseño final

La estructura principal del simulador está compuesta por los siguientes elementos principales: el modelo dinámico que describe la respuesta del sistema a estímulos internos y externos, la ley de control para las acciones del sistema, el modelo 3D que nos permite visualizar el sistema en movimiento, y los parámetros físicos que le dan al sistema sus características físicas, Figura (4.14).

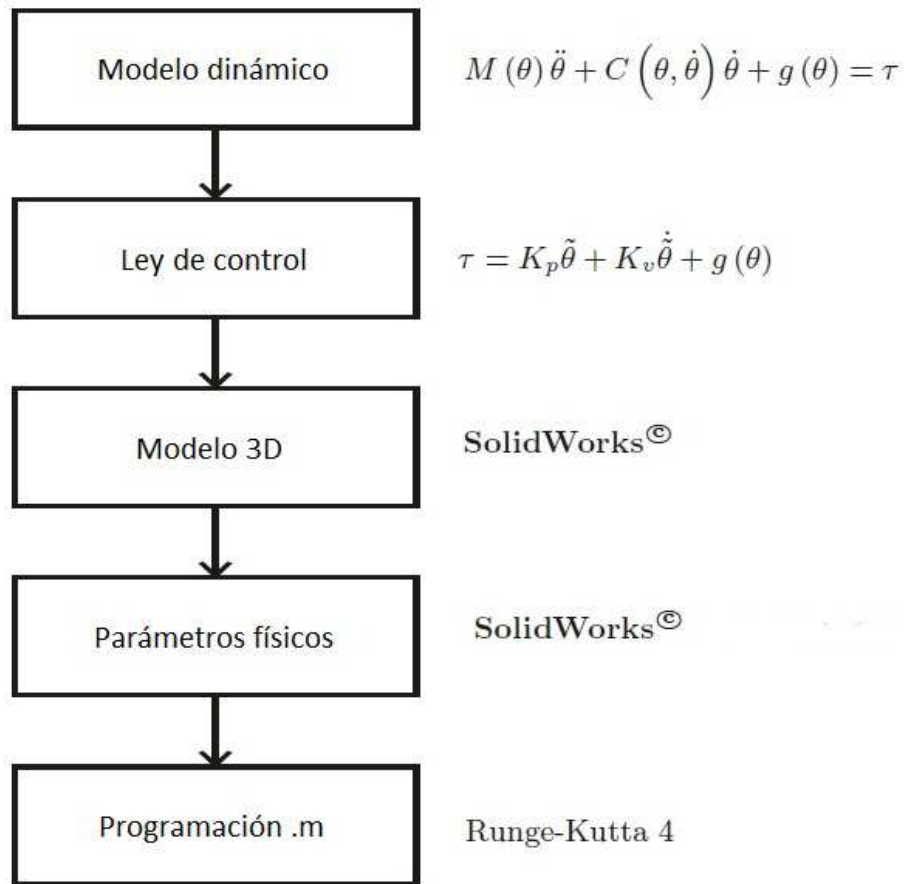


Figura 4.14: Elementos del simulador

El lenguaje de programación que establece el método numérico es necesario para relacionar estos elementos. La relación **Matlab**[®] - **Simulink**[®] usa el método numérico Runge-Kutta 4, con un orden de precisión medio y el más popular en comparación a las demás opciones dentro de Matlab.

En la Figura (4.15) se observa el diagrama de flujo del simulador, al momento de interactuar con la interfaz gráfica de usuario se inicializa con la carga del modelo de bloques del sistema así como su imagen, posteriormente se selecciona el control a ejecutar y los demás datos de entrada que pueden ser de posiciones angulares de las articulaciones, número de ciclos de marcha o el tiempo de ejecución para la simulación. La simulación se centra en la aplicación del control y el modelo dinámico del sistema y la visualización del movimiento del modelo 3D hasta terminar el tiempo de simulación, dado que la unidad de la simulación siempre se maneja con respecto al tiempo. Al finalizar la ejecución, esta disponible la visualización de las gráficas de las variables de salida y las respuestas de los actuadores.

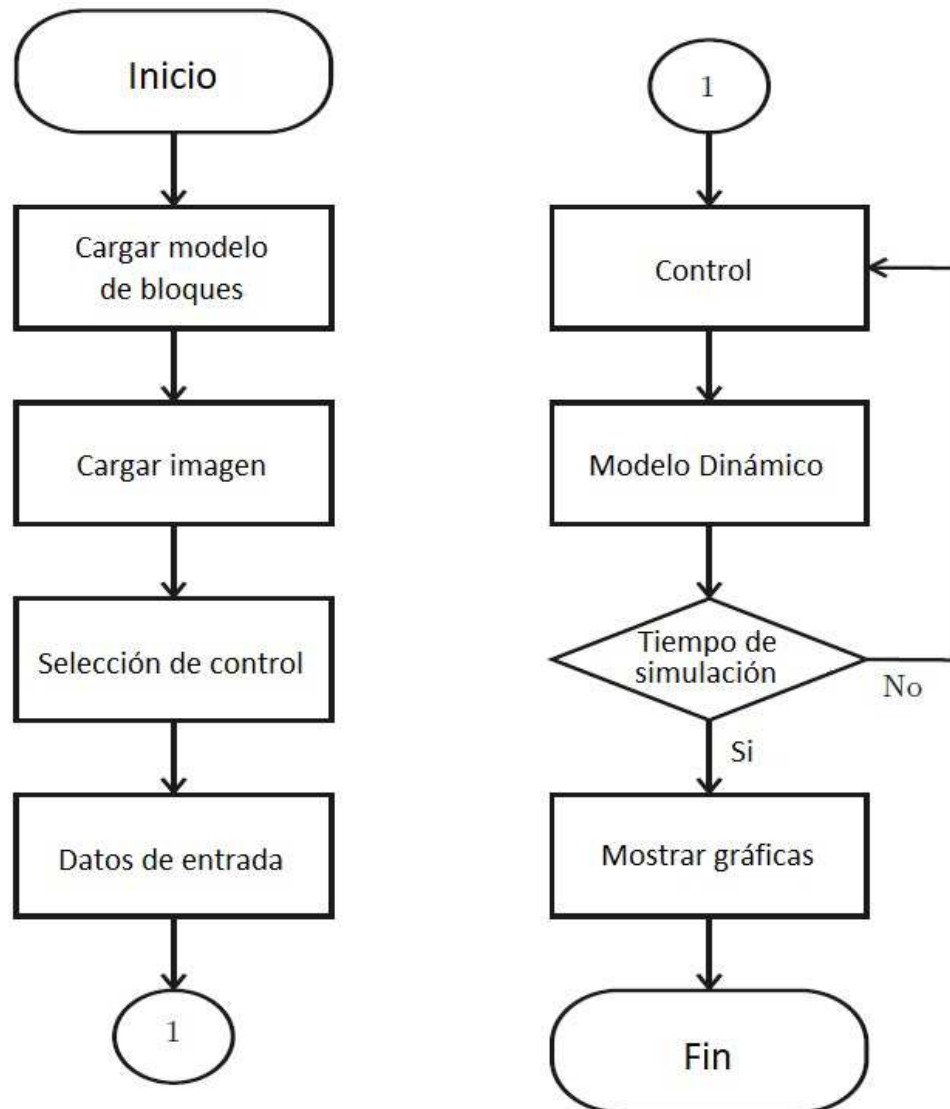


Figura 4.15: Diagrama de flujo del simulador

Matlab[®] nos permite usar la imagen 3D realizada en **SolidWorks**[®] usando el Toolbox llamado como SimMechanics. Esta caja de herramientas convierte la imagen en un objeto, este objeto puede moverse de acuerdo con los resultados del método numérico ode45. SimMechanics proporciona un entorno de simulación multi-cuerpo para sistemas mecánicos 3D. Modela el sistema multi-cuerpo utilizando bloques que representan cuerpos, articulaciones, restricciones y elementos de fuerza, y luego SimMechanics formula y resuelve las ecuaciones de movimiento para el sistema mecánico completo. Los modelos de sistemas CAD requieren información de masa, inercia, unión, restricción y geometría 3D. Una animación 3D generada automáticamente nos permite visualizar la dinámica del sistema.

4.6. Ecuaciones del modelo dinámico en el simulador

De manera paralela al *modelo en bloques* del sistema bípedo creado del enlace de los archivos de CAD de **SolidWorks**[®] con bloques de **Simulink**[®] en la sección 4.3, se agrega dentro de simulador las ecuaciones de modelo dinámico del sistema robótico (3.3.3) obtenido en el capítulo anterior, como uso de comparativa del comportamiento del modelo a bloques de Simulink con las ecuaciones puras del modelo dinámico (3.3.3); a través del uso de bloques de *Funciones Matlab* para llamar las funciones que contienen las ecuaciones del modelo dinámico y ser resueltas junto al modelo a bloques en Simulink por cada simulación ejecutada.

El modelo matemático (3.3.3) es descrito de tal forma que las entradas al modelo a resolver sean las posiciones deseadas para cada articulación y las salidas sean las aceleraciones angulares como se observa en la siguiente ecuación:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{M}_m(\mathbf{q})^{-1} [\boldsymbol{\tau} - \mathbf{C}_m(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{g}_m(\mathbf{q})] \quad (4.11)$$

donde $\boldsymbol{\tau} = K_p \tilde{\mathbf{q}} + K_v \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathbf{g}_m(\mathbf{q})$.

4.7. Conclusión

El uso de herramientas de software para el análisis de sistemas físicos, es una práctica que proporciona ventajas en tiempo y costo, demanda un entendimiento claro y preciso sobre los modelos matemáticos de los sistemas, características físicas de los elementos, así como el proceso adecuado de la generación de archivos, programación y ejecución de los mismos. Recordemos que una simulación es la interpretación computacional de un sistema por medio de sus modelos matemáticos bajo ciertas características de su entorno definidas, por lo que el conocimiento y estudio previo es importante antes de realizar simulaciones para una adecuada interpretación de la información obtenida por medio de esta herramienta.

Capítulo 5

Resultados

En ciencia e ingeniería la simulación es una referencia para la investigación y un método perfecto para la enseñanza y aprendizaje. Visto durante los capítulos anteriores, para la creación del simulador, fue importante definir el sistema que será simulado, la formulación de modelos matemáticos, datos importantes que requiere el modelo y selección adecuada de la paquetería o lenguaje de software para procesar el modelo. En el presente capítulo se plantea la verificación y validación el modelo simulado que cumpla con los requisitos establecidos previamente, la realización de experimentos y la interpretación de los resultados obtenidos [47, 48].

5.1. Verificación y validación del simulador

Con la finalización de la interfaz gráfica de usuario, se dispuso de realizar la verificación del simulador, confirmando que el modelo conceptual o teórico fue correctamente implementado en el procedimiento que comprende al programa de simulación, la generación de la interface, los elementos que componen el simulador y cumplimiento del simulador con los requisitos de diseño. La validación del simulador se llevó a cabo efectuando varias pruebas, ejecutando el simulador con la introducción de variables de entrada válidas y que cumplan con las restricciones correspondientes, e introduciendo variables de entrada no válidas o que no cumplan con las respectivas restricciones, como es el caso del rango de movimiento del sistema, Tabla(5.2) o las características de los motores. En los casos que se presentaron errores, se retrocedió a la etapa de desarrollo del simulador para identificar y corregir los errores.

5.2. Experimentos finales e interpretación de resultados

El sistema simulado fue planteado libre de interacciones externas a excepción de la fuerza de gravedad; por lo que, los resultados que concretan el objetivo principal de esta tesis se limitan únicamente a las posiciones angulares del sistema y el error de posición. La relación de los torques generados por los controladores con la caracterización de los motores DC como actuadores en las articulaciones son una pequeña amplificación del comportamiento del sistema por lo que estos tienen un rol suplementario. Las propiedades del diseño del sistema fueron decididas de manera arbitraria, debido a que su evaluación no se contempla dentro del la solución de este trabajo.

Los experimentos realizados en esta sección tienen como propósito validar que el simulador, a través de la interfaz gráfica, cumpla con el objetivo para el que fue creado. La existencia de un margen de error mínimo entre los datos obtenidos y los datos deseados se tomó como referencia de una simulación correcta. Las variables de salida del simulador se enlistan en la Tabla (5.1), todas ellas gráficas con respecto al tiempo como se muestra en las siguientes secciones.

VARIABLES DE SALIDA	UNIDADES
Posición deseada del Robot	grados ($^{\circ}$)
Posición salida del Robot	grados ($^{\circ}$)
Error de posición del Robot	grados ($^{\circ}$)
Torque del Controlador	($Kg * m/s^2$)
Torque del Motor	($N * m$)
Voltaje del Motor	Volt (V)
Corriente del Motor	Ampere (A)
Potencia eléctrica del Motor	Watt (W)
Potencia mecánica del Motor	Watt (W)

Tabla 5.1: Variables de salida.

Los resultados del sistema se divide en dos partes, la primera de ellas es con el uso de control de posición y la segunda con el control de movimiento, estas serán descritas previamente con los resultados obtenidos de las variables de salida del simulador, Tabla (5.1).

5.2.1. Control de posición

La corrida de experimentos se inició con el control de posición de extensión y flexión en cada articulación para ambas piernas, Tabla (5.2). El modelo 3D en las posiciones de extensión y flexión máximas se observan en la Figura (5.1) y las gráficas de las variables de la Tabla (5.1) se muestran a continuación.

Articulación	Extensión	Flexión
Cadera	-15°	90°
Rodilla	-90°	0°
Tobillo	-25°	20°

Tabla 5.2: Rango de movimiento de las articulaciones.

Las primeras gráficas de los resultados a mostrar, Figuras (5.2)-(5.17), son del *modelo en bloques* del sistema bípedo creado del enlace de los archivos de CAD de **SolidWorks**[®] con bloques de **Simulink**[®], posteriormente se mostrarán las variables principales de la solución de las ecuaciones del modelo dinámico (3.3.3), denominándolo como *modelo por ecuaciones*, estas gráficas, Figuras (5.18)-(5.23), que serán tomadas como referencias y comparativas para el *modelo en bloques*.

Del *modelo en bloques* se obtuvieron los siguientes resultados. Las Figuras (5.2) y (5.3) muestran las gráficas de las posiciones de salida y las posiciones deseadas de las articulaciones de cada pierna, definidas por las líneas azules y rojas respectivamente, las Figuras (5.4) y (5.5) se muestran las gráficas

de error de posición del sistema. Se puede apreciar respuestas estables con curvas suaves, el tiempo de respuesta del sistema para cada articulación se consiguió aproximadamente de 3 segundos para alcanzar las posiciones deseadas, de las cuales podemos confirmar con las gráficas de error de posición próximo a los 0 grados. Con la ejecución de varias pruebas con diferentes ángulos de posición en ambas piernas se observó que el error mínimo conseguido es de 0,2 grados, lo que podemos ver con claridad en las gráficas de la posición y error de la rodilla de la pierna derecha, esto debido a la solución que nos proporciona la dinámica de la relación entre el modelo 3D con **Simulink**[®].

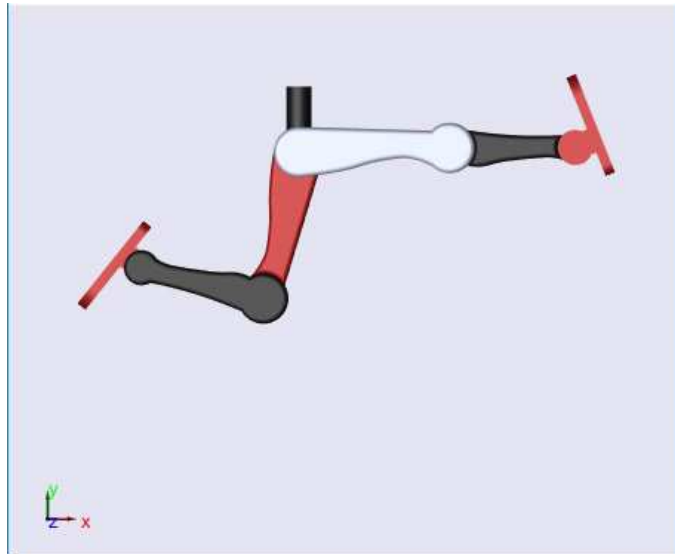


Figura 5.1: Posiciones angulares de extensión y flexión máximas.

En las Figuras (5.6) y (5.7) se muestran los torques generados por los controladores, se observa que las señales son suaves en las articulaciones de la cadera y las rodillas en ambas piernas, y en el caso de los tobillos se observan amplitudes de los torques con formas instantáneas. Todas estas respuestas de los torques de salida de los controladores tienden a cero, comportamiento esperado por la diferencia entre las posiciones de salida con las deseadas; el comportamiento del torque es proporcional al error de posición, conforme la posición de salida del sistema esté más cerca de la deseada, el torque del controlador irá disminuyendo su amplitud. Las ganancias de los controladores fueron ajustadas con base en varias pruebas en el simulador hasta obtener un tiempo de respuesta mínimo posible, 3 segundos aproximadamente, y del comportamiento de los motores con su relación con los torques de los controladores.

La caracterización de los motores DC fueron aplicados en cada una de las articulaciones del sistema, por lo que las uniones entre los eslabones fueron actuados a través de posiciones angulares, cada posición angular fue definida por la posición angular del motor en relación, con una ganancia de engranes, a la posición de la articulación del sistema. El comportamiento de las características eléctricas y mecánicas de los motores se observa en las Figuras (5.8) - (5.17), la caracterización de los motores con el uso de especificaciones eléctricas de motores comerciales es tomado solo como de referencia, un estudio exhaustivo para la selección de actuadores con mejor desempeño no entra en la solución de esta tesis. Los resultados logrados de las variables eléctricas y mecánicas de los motores se encuentran dentro de especificaciones de referencia y cumplen con el comportamiento electromecánico estudiado en la sección de Apéndices.

Posición deseada y posición de salida del Robot, Figuras (5.2, 5.3):

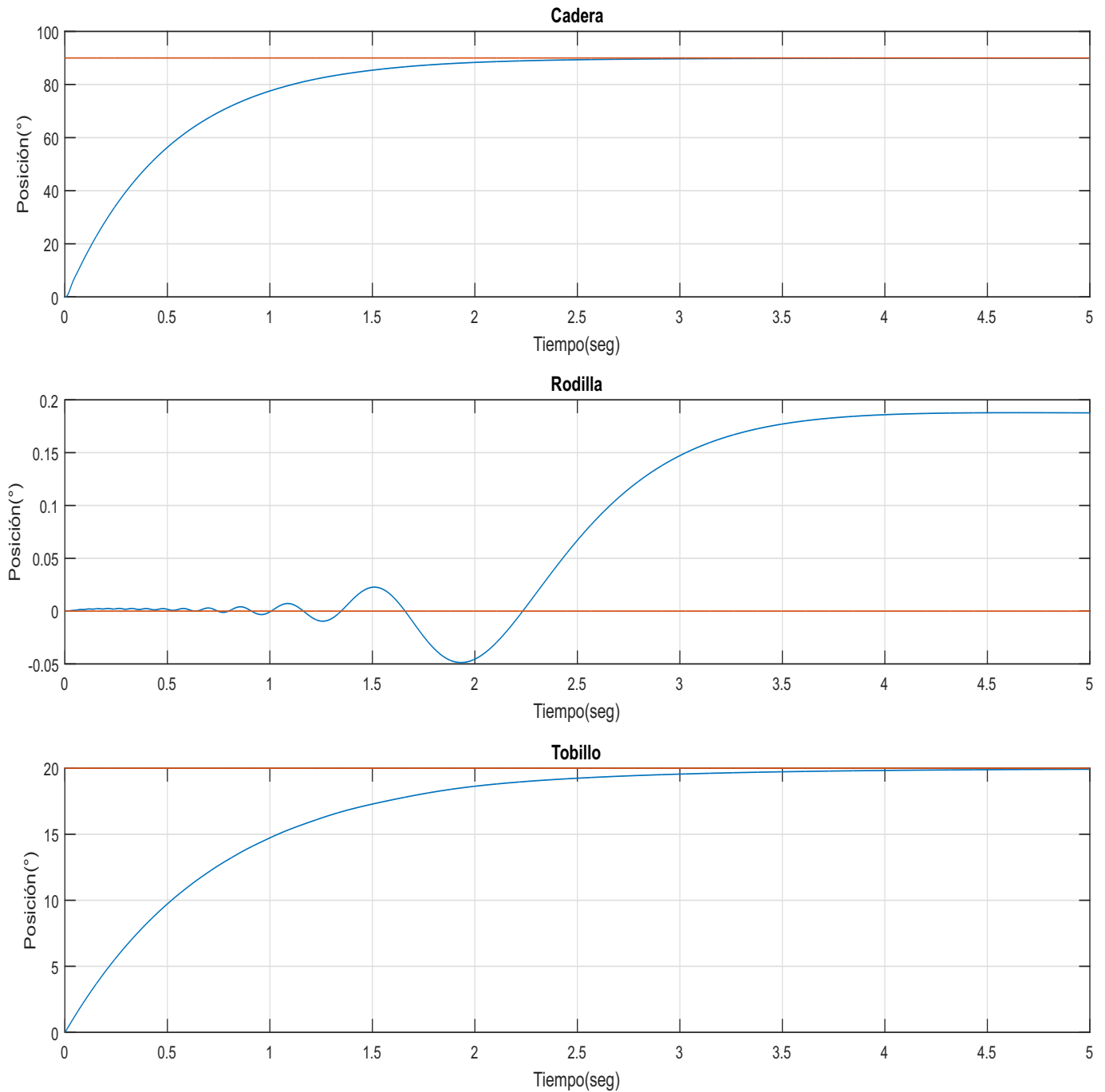


Figura 5.2: Posiciones de salida en flexión, Pierna Derecha.

Posición deseada y posición de salida del Robot, Figuras (5.2, 5.3):

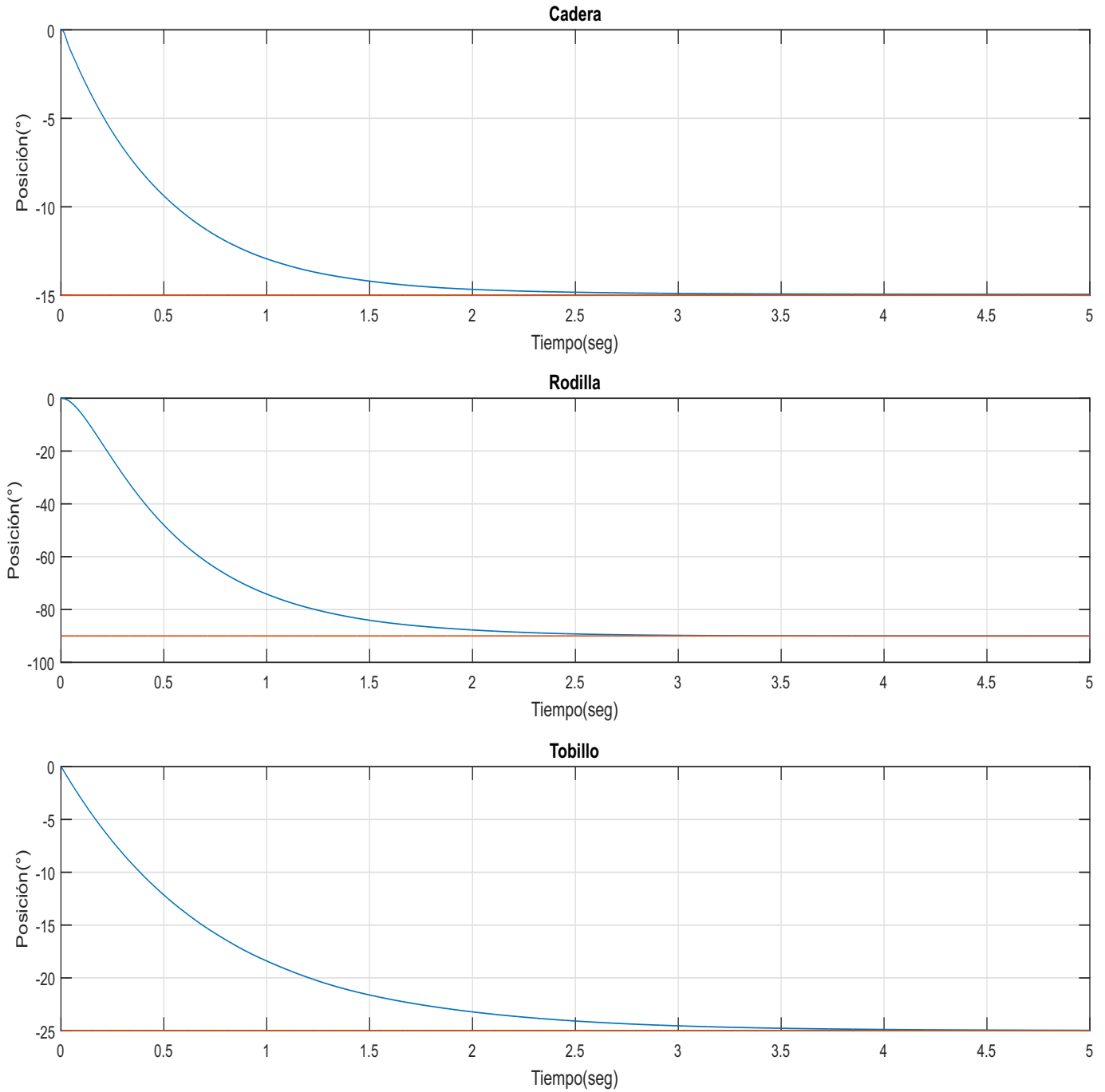


Figura 5.3: Posiciones de salida en extensión, Pierna Izquierda.

Error de posición del robot, Figuras (5.4, 5.5):

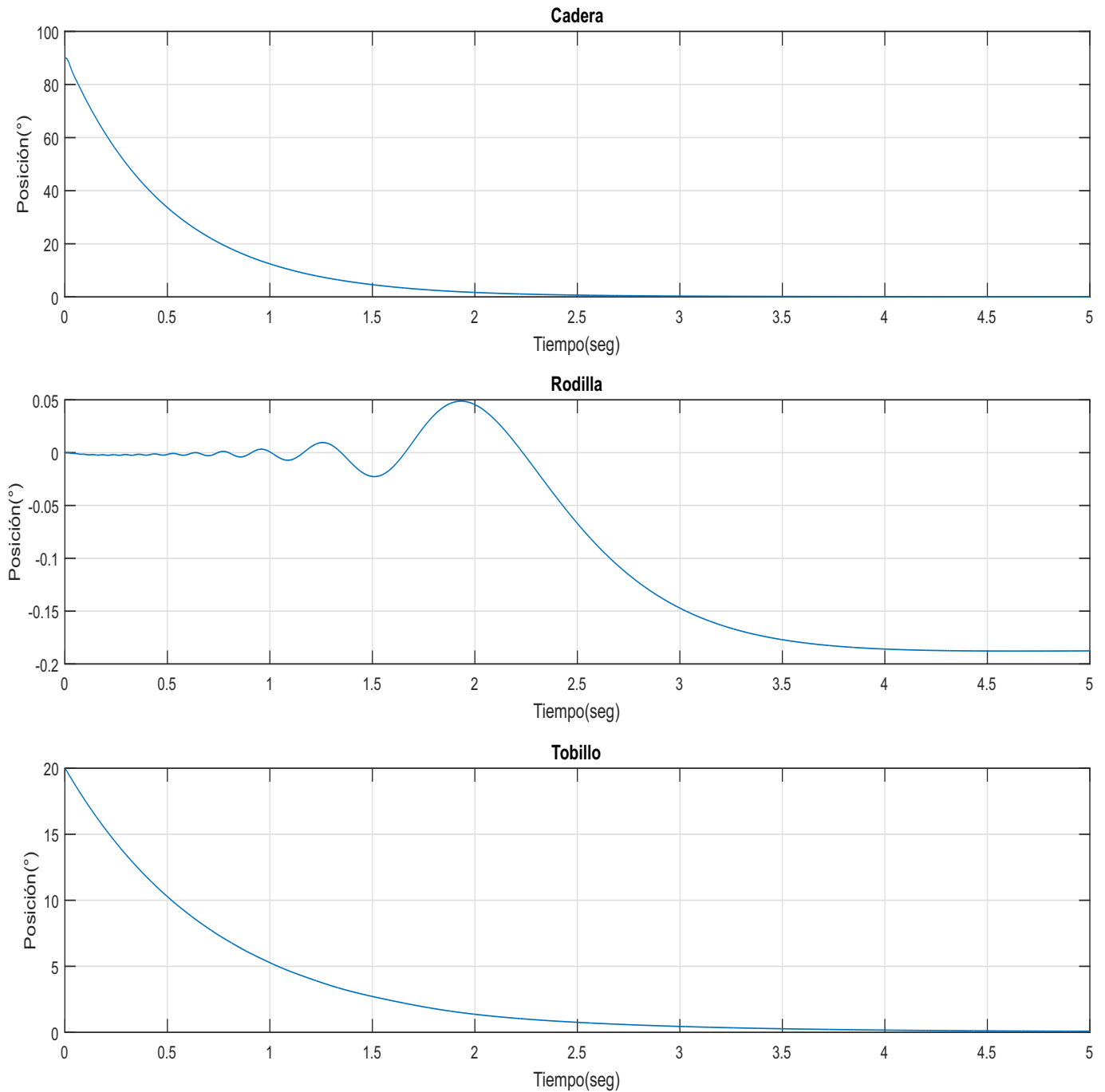


Figura 5.4: Error de posición, Pierna Derecha.

Error de posición del robot, Figuras (5.4, 5.5):

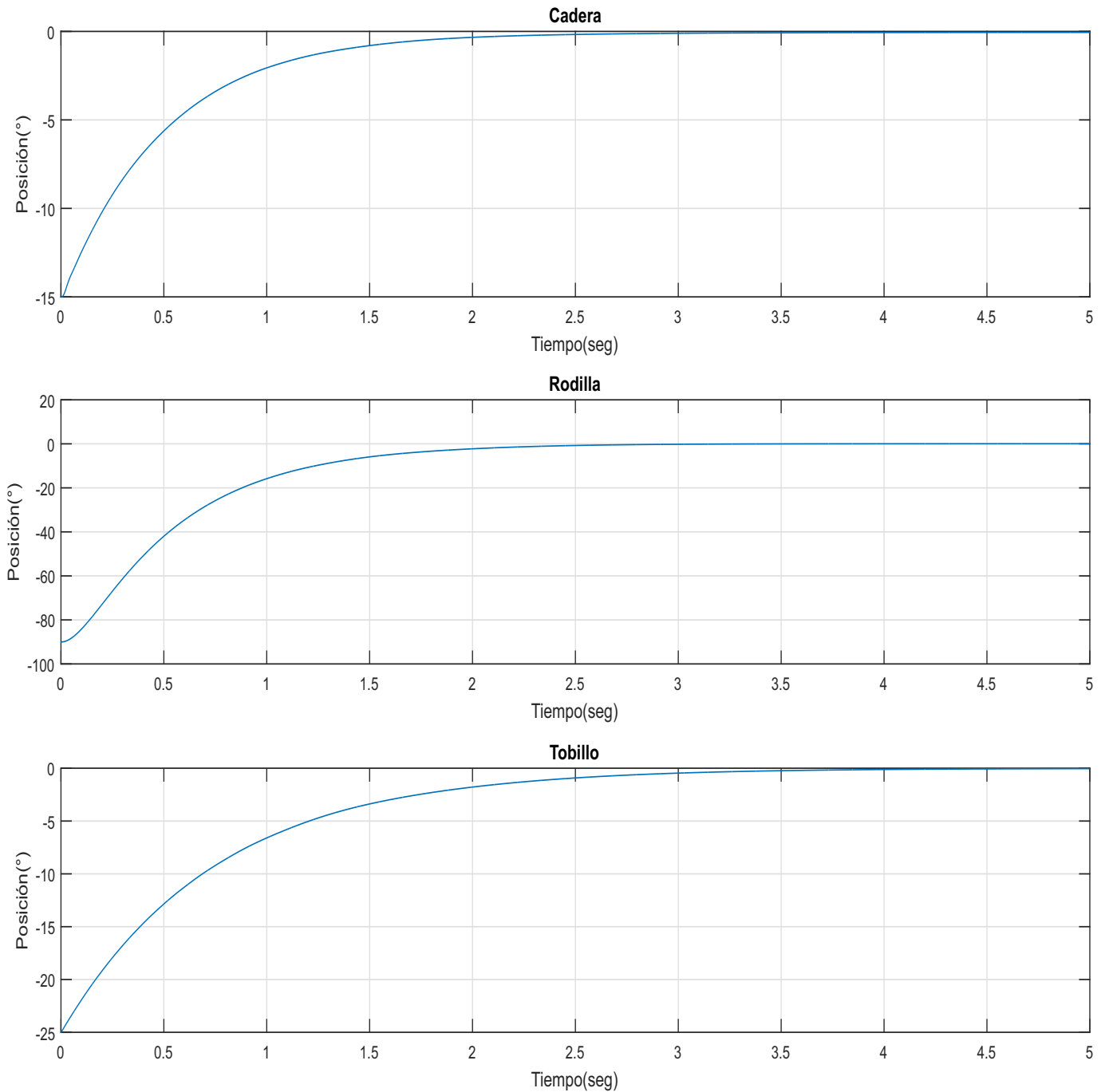


Figura 5.5: Error de posición, Pierna Izquierda.

Torque de los controladores, Figuras (5.6, 5.7):

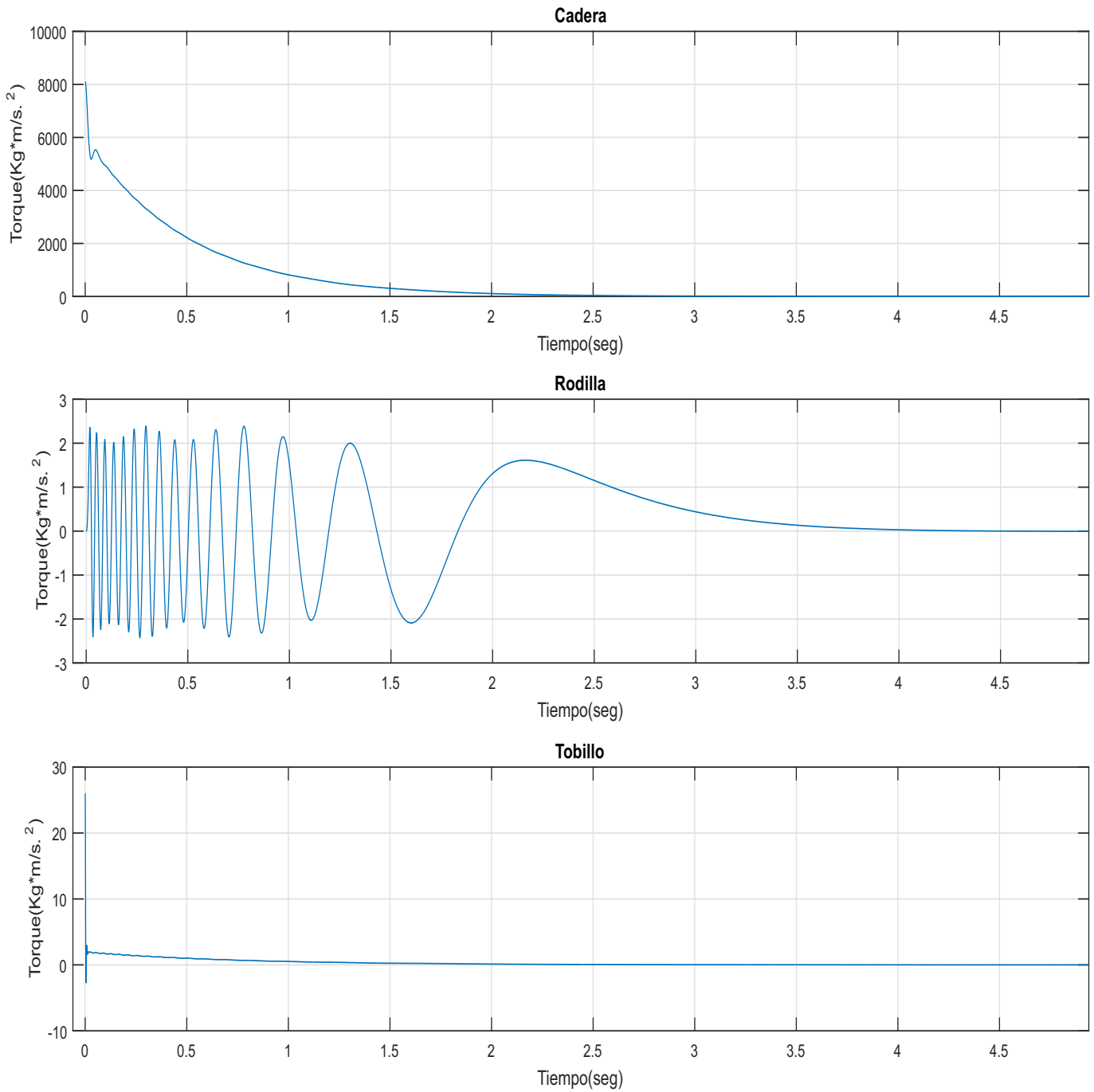


Figura 5.6: Torque de los controladores, Pierna Derecha.

Torque de los controladores, Figuras (5.6, 5.7):

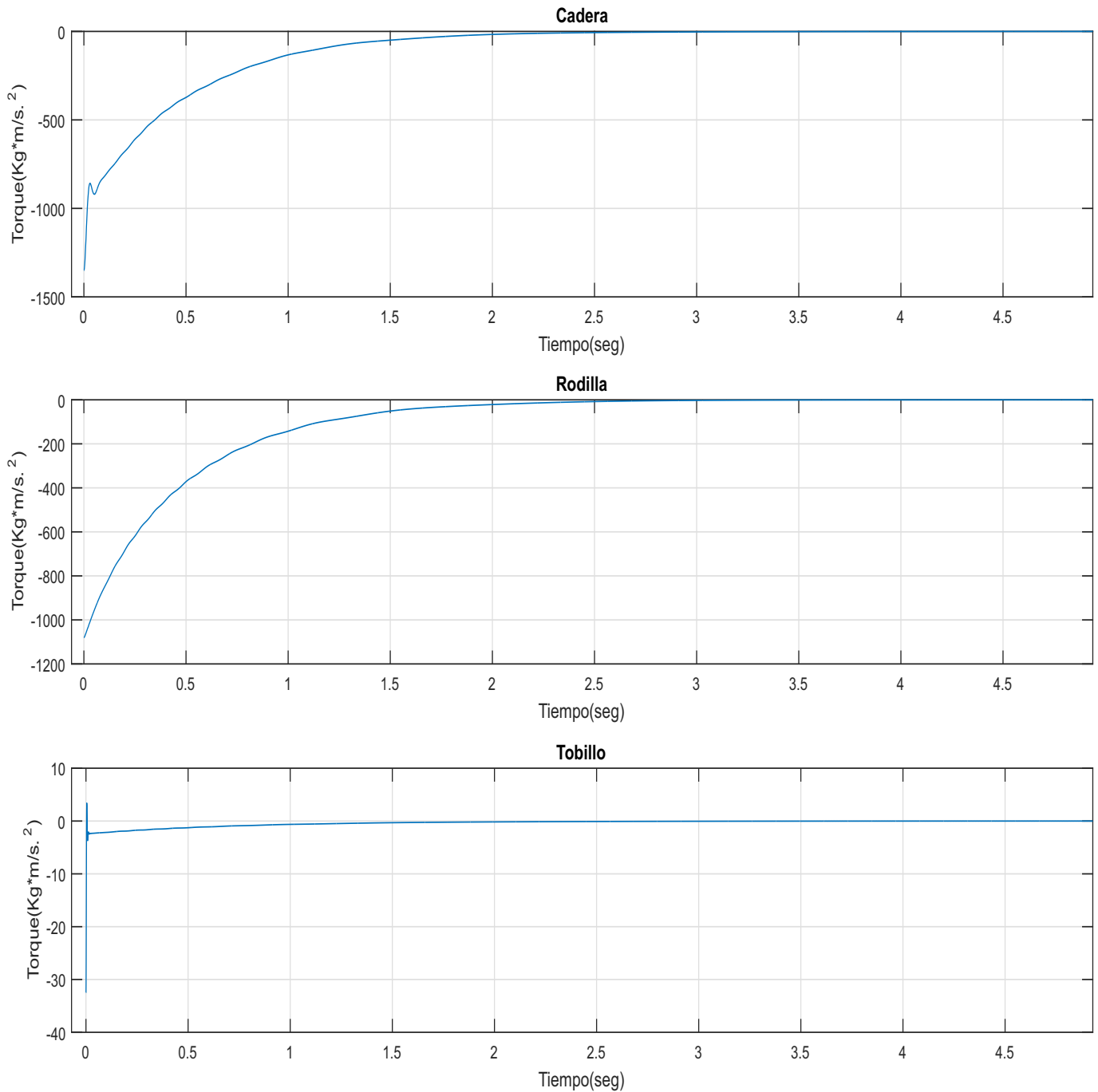


Figura 5.7: Torque de los controladores, Pierna Izquierda.

Torque de los motores, Figuras (5.8, 5.9):

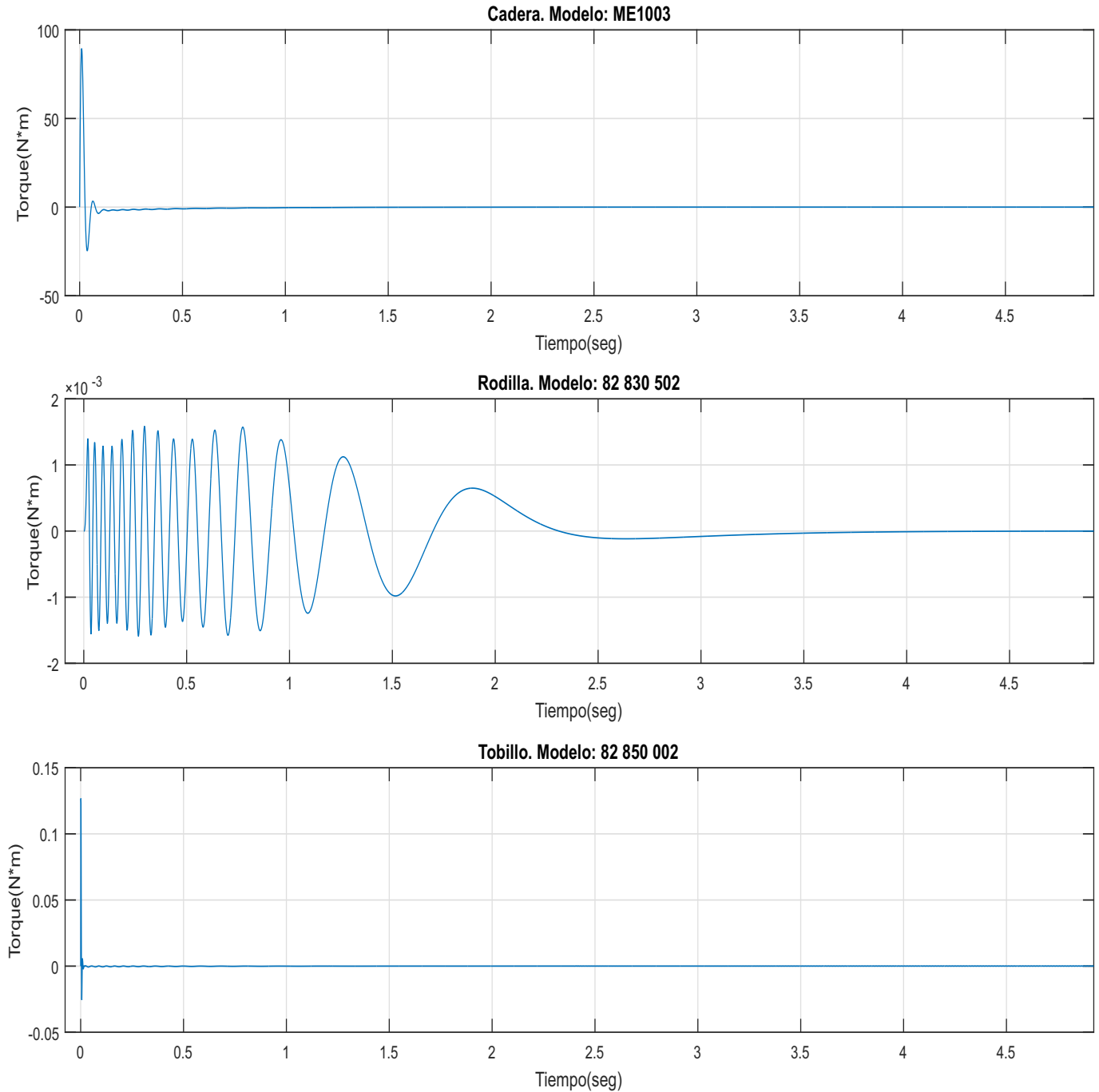


Figura 5.8: Torque de motores, Pierna Derecha.

Torque de los motores, Figuras (5.8, 5.9):

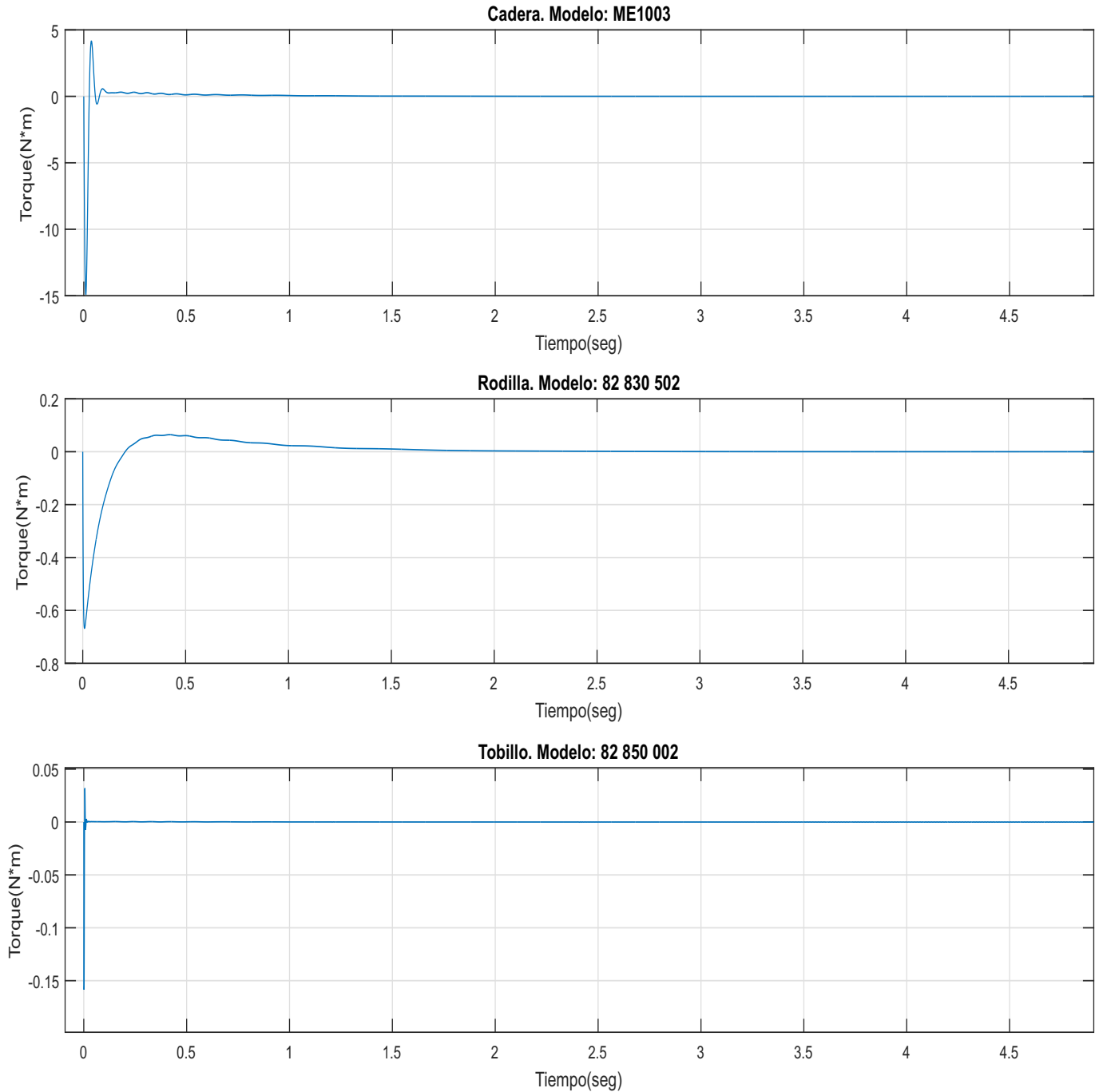


Figura 5.9: Torque de motores, Pierna Izquierda.

Voltaje en los motores, Figuras (5.10, 5.11):

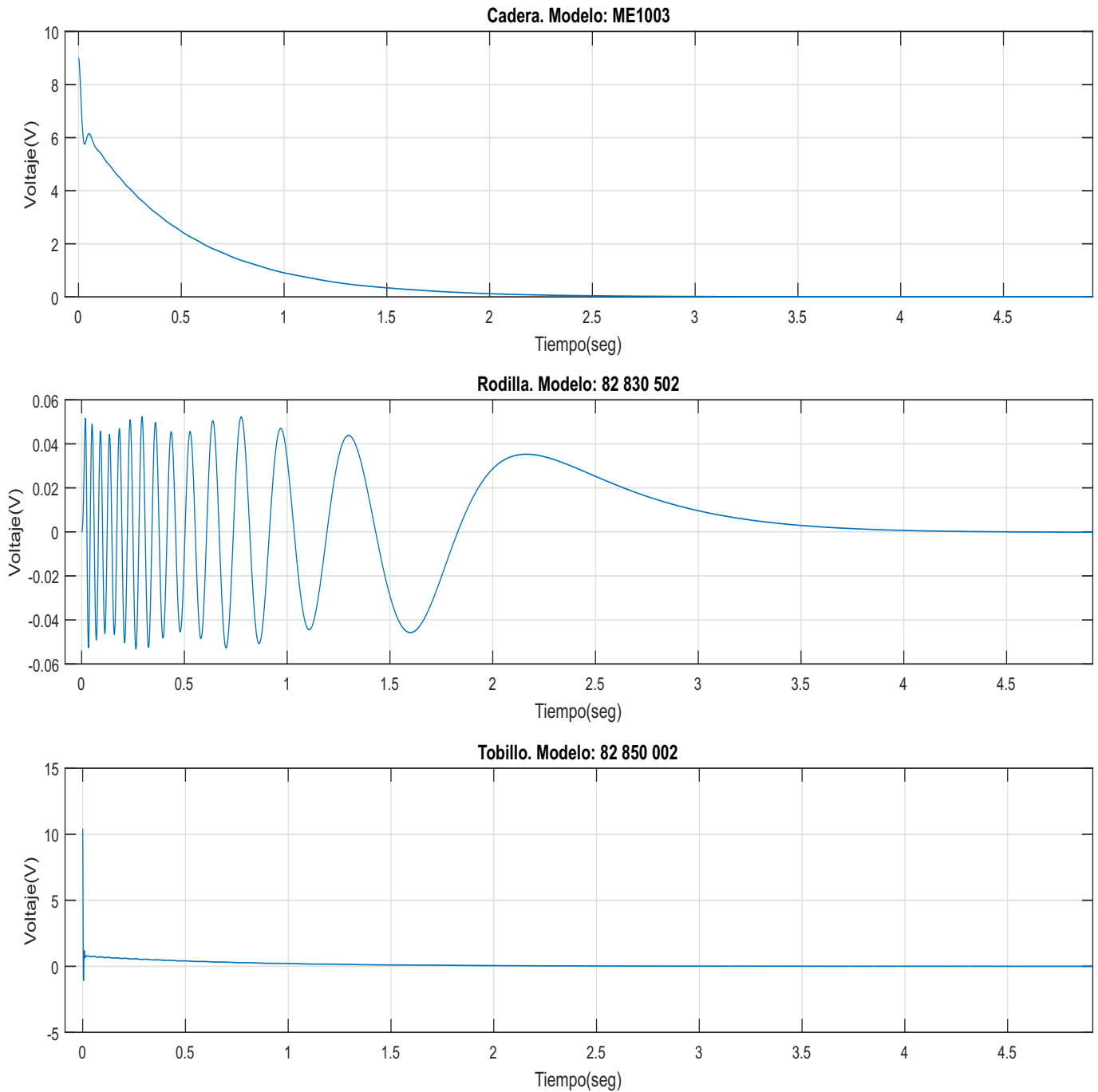


Figura 5.10: Voltaje en los motores, Pierna Derecha.

Voltaje en los motores, Figuras (5.10, 5.11):

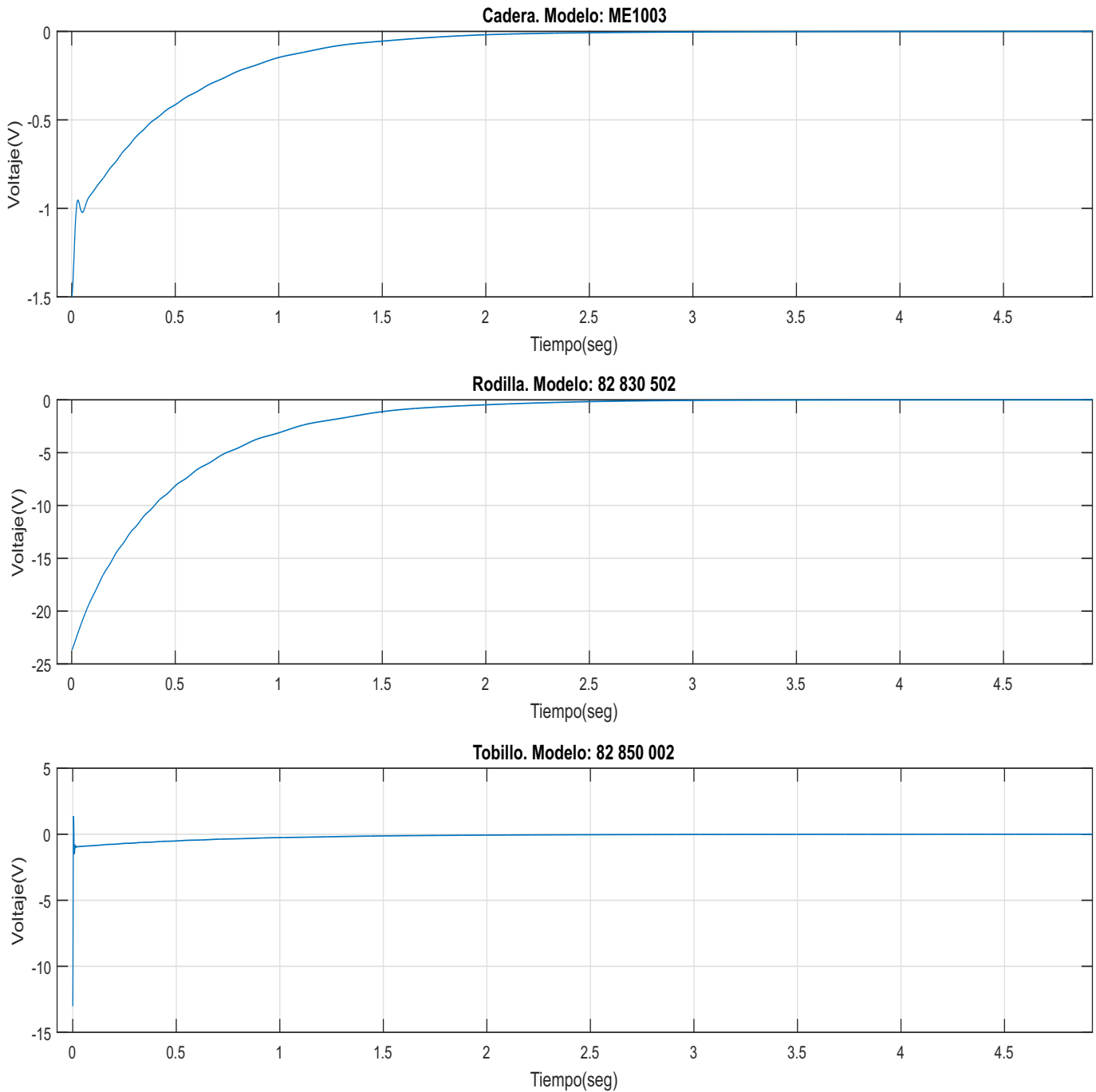


Figura 5.11: Voltaje en los motores, Pierna Izquierda.

Corriente en los motores, Figuras (5.12, 5.13):

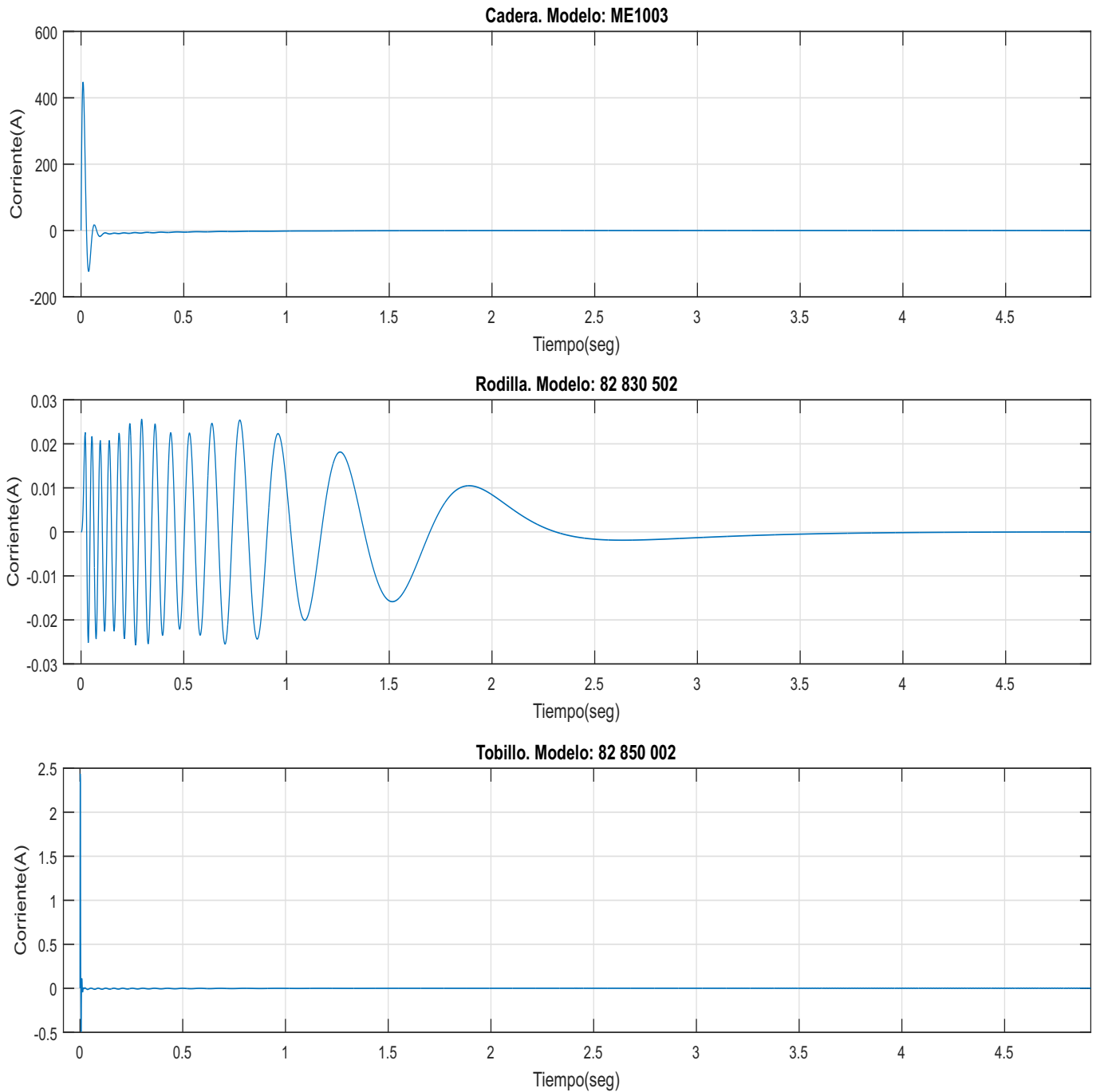


Figura 5.12: Corriente de motores, Pierna Derecha.

Corriente en los motores, Figuras (5.12, 5.13):

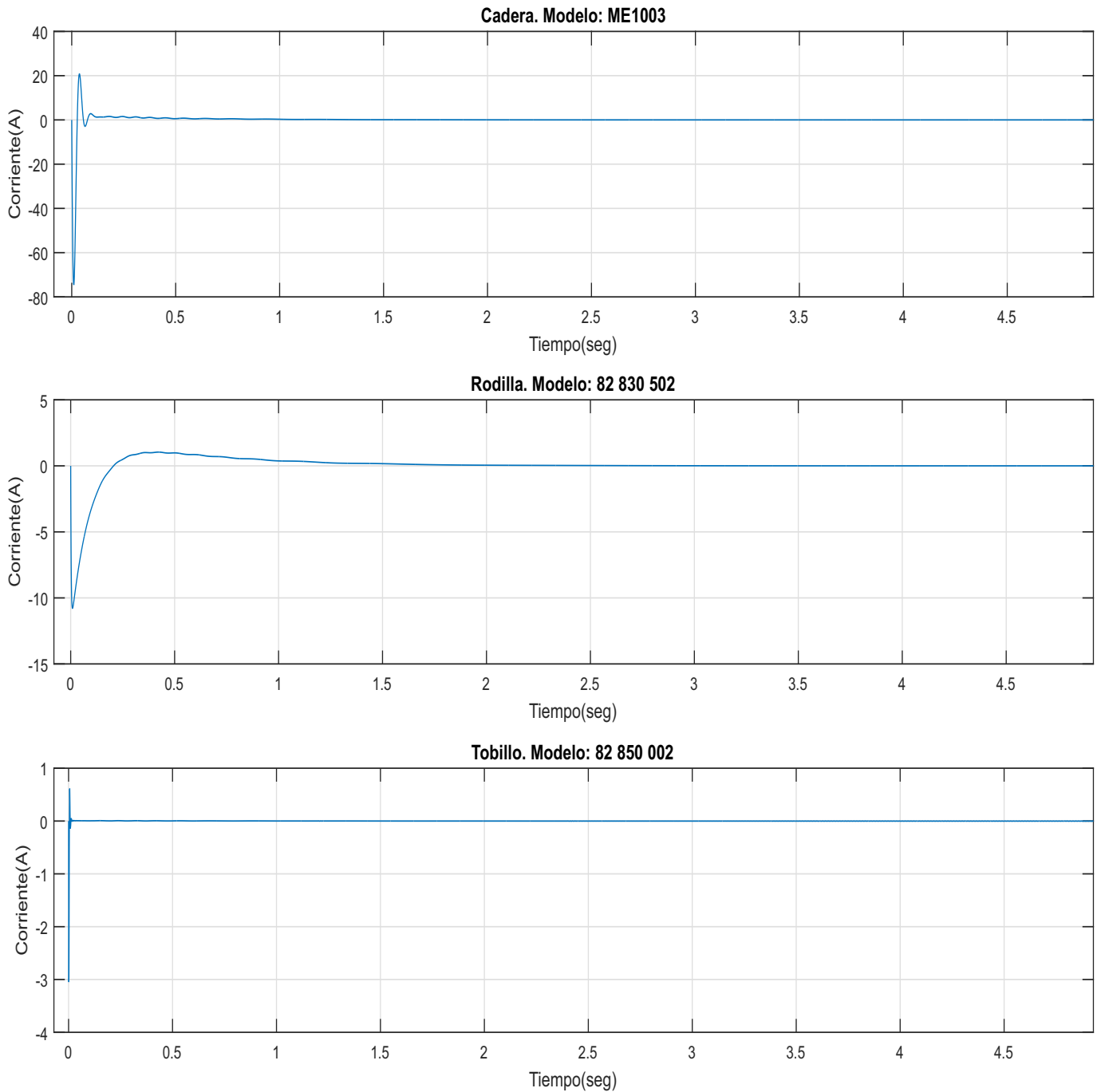


Figura 5.13: Corriente de motores, Pierna Izquierda.

Potencia eléctrica de los motores, Figuras (5.14, 5.15):

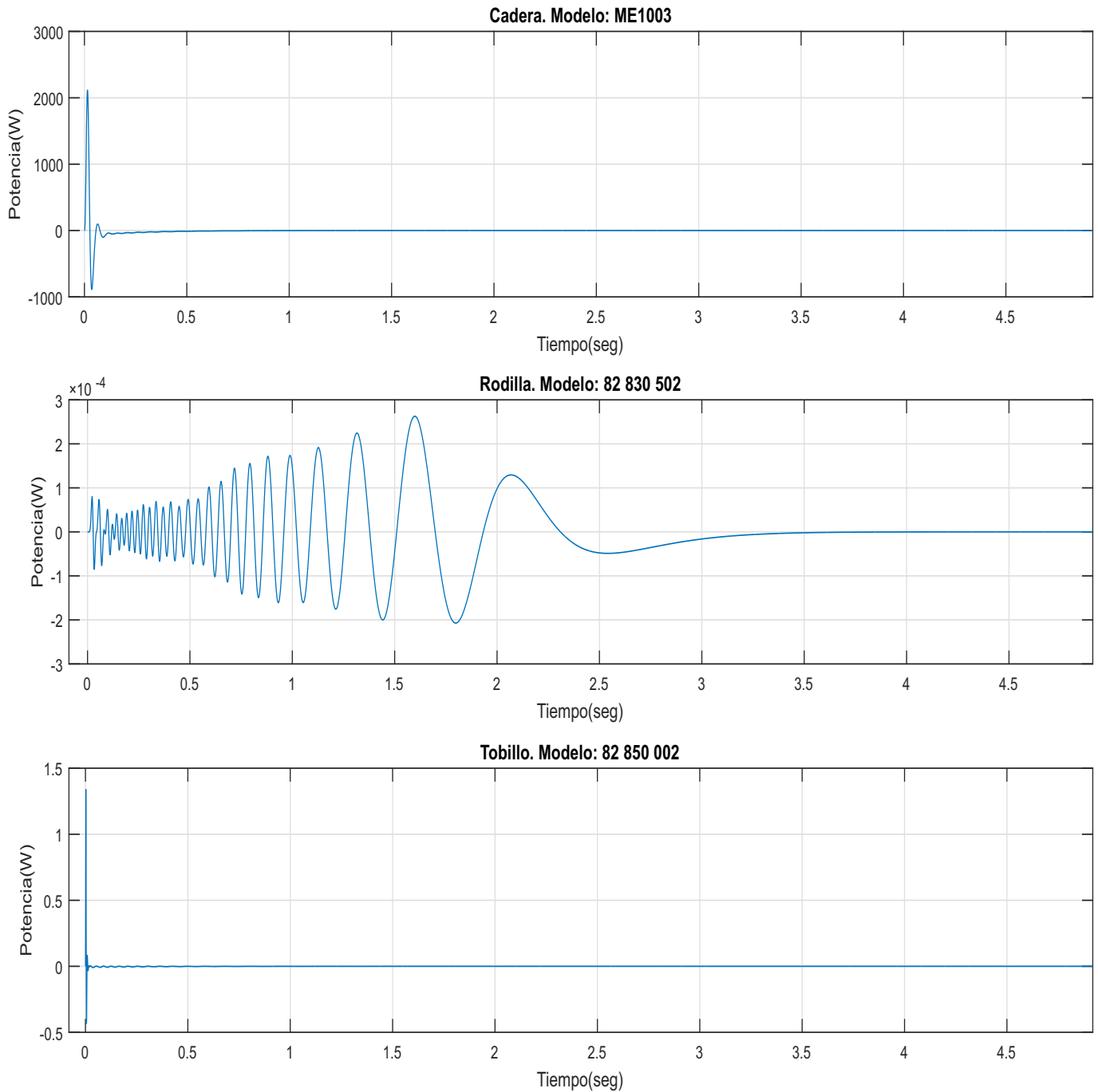


Figura 5.14: Potencia eléctrica de motores, Pierna Derecha.

Potencia eléctrica de los motores, Figuras (5.14, 5.15):

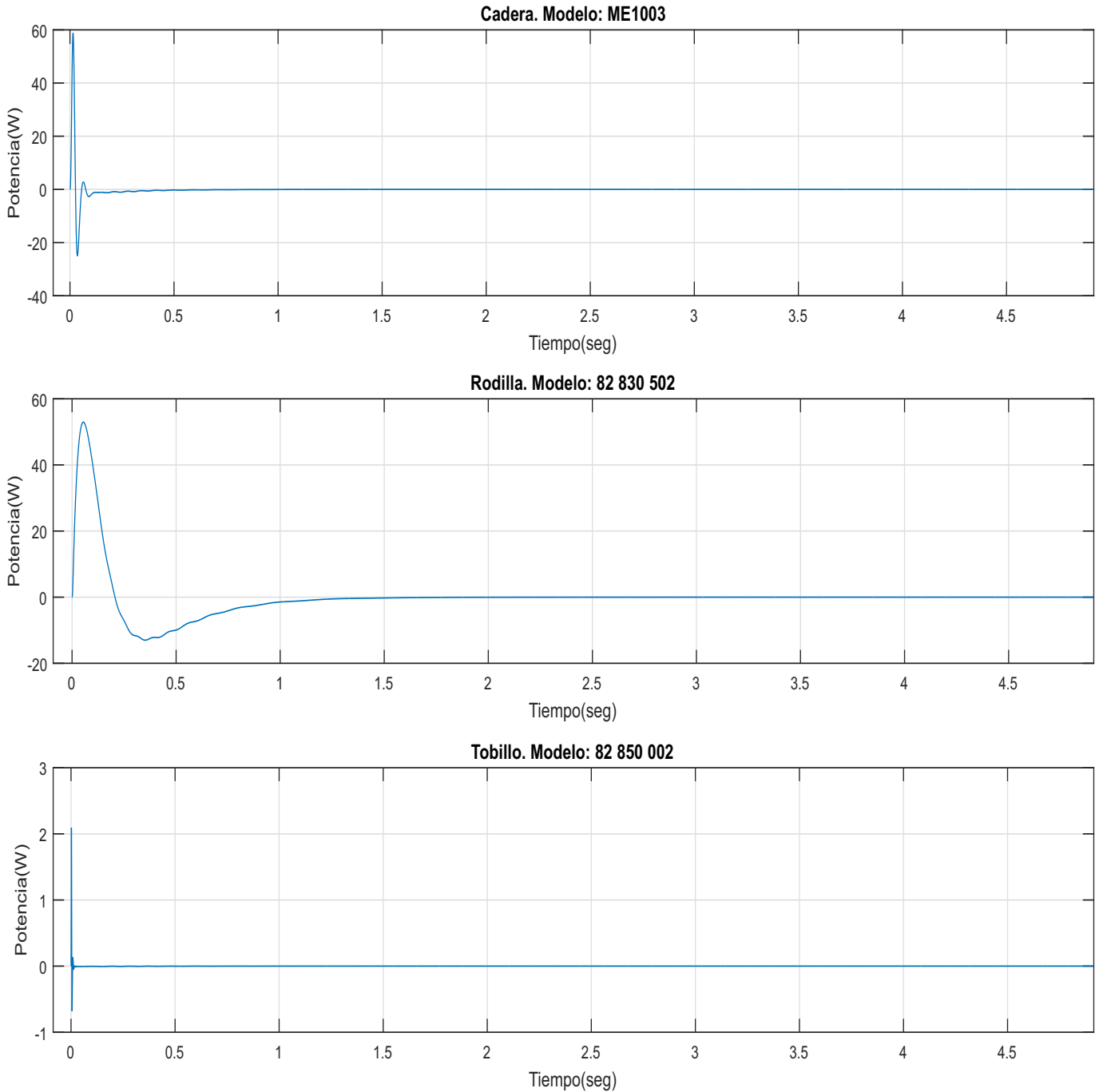


Figura 5.15: Potencia eléctrica de motores, Pierna Izquierda.

Potencia mecánica de los motores, Figuras (5.16, 5.17):

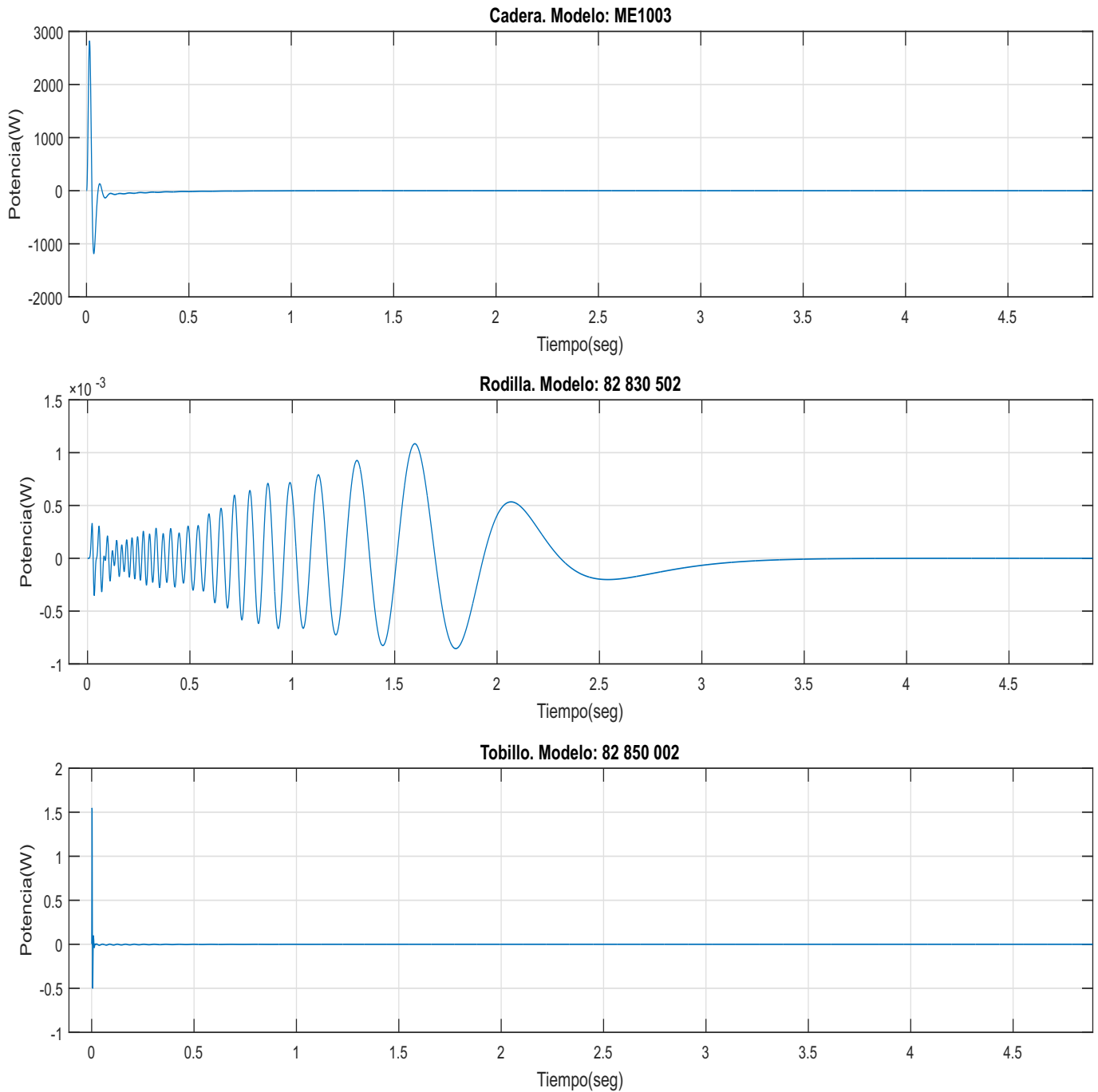


Figura 5.16: Potencia mecánica de motores, Pierna Derecha.

Potencia mecánica de los motores, Figuras (5.16, 5.17):

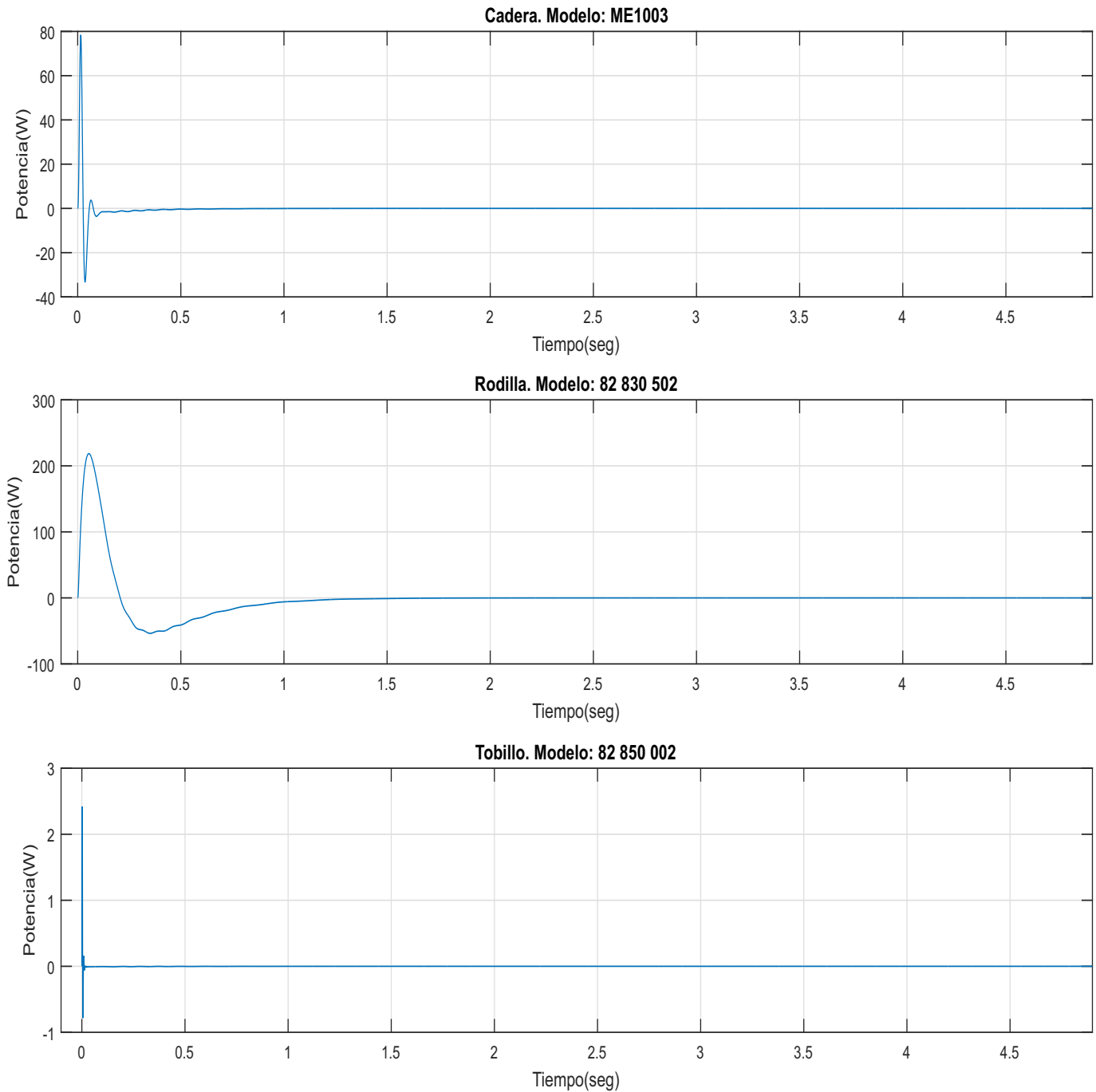


Figura 5.17: Potencia mecánica de motores, Pierna Izquierda.

A continuación se muestran las gráficas de las variables principales de la solución de las ecuaciones (3.3.3) en el *modelo por ecuaciones*. Las variables a observar del comportamiento del sistema bípedo, se deducen del modelo dinámico general:

$$\ddot{q} = M(q)^{-1} [\tau - C(q, \dot{q}) \dot{q} - g(q)]$$

Estas variables son, las posiciones de salida del sistema, que provienen de la integración del vector de aceleraciones angulares \ddot{q} ; los errores de posición \tilde{q} , que son la diferencia de las posiciones deseadas con las de salida de las articulaciones; y finalmente el torque generado por cada uno de los controladores τ .

Las Figuras (5.18) y (5.19), muestran las gráficas de las posiciones de salida de cada pierna, **SPD** (sub-sistema de la pierna derecha) y **SPI** (sub-sistema de la pierna izquierda), respectivamente. Se puede apreciar respuestas con curvas suaves para alcanzar las posiciones deseadas, existen pequeños sobresaltos por parte de las posiciones de salida de las articulaciones que representan las rodillas y los tobillos. Además, los tiempos de respuesta de las articulaciones que representan la cadera y las rodillas son menores a las obtenidas en el *modelo en bloques*, estos tiempos son aproximadamente de 1 segundo para alcanzar las posiciones deseadas; en el caso de las articulaciones que representan los tobillos, estos son muy similares a los obtenidos en el *modelo en bloques*, con un tiempo de respuesta aproximado de 3 segundos.

En las Figuras (5.50) y (5.51), se observan las gráficas de error de posición de cada articulación de la pierna derecha e izquierda en forma de curvas suaves que conforme al paso del tiempo, los errores de posición tienden a los 0 grados. Debido al comportamiento de las posiciones de salida, gráficas (5.18) y (5.19), las curvas de las variables de error, por consecuencia también presentan esas pequeñas sobresaltos y diferencias de tiempo en cada articulación.

Finalmente, en las gráficas de las Figuras (5.22) y (5.23), se observan las gráficas de los torques generados por los controladores de cada articulación, estos tienden a ser diferentes con respecto al *modelo en bloques*, debido a la existencia de pequeños sobresaltos que derivan la existencia de un mayor torque.

Las gráficas de las Figuras (5.18)-(5.23), son resultado de varias pruebas con diferentes solvers en Simulink, de los cuales, con el mejor desempeño en la solución del modelo dinámico (3.3.3) con los parámetros físicos del sistema propuesto, Tabla (4.2), se selecciono uno diferente al utilizado para el *modelo en bloques* (Runge-Kutta, de paso fijo), este fue el Dormand-Price con un paso variable. Pero aún con un mejor desempeño de este solver, existió una limitación en cuestión de los parámetros físicos del sistema, las inercias el *modelo en bloques*, que son tomadas como del modelo original, no podían ser exactamente a las originales, ya que al ser tan pequeñas el solver tiende a no poder solucionar las ecuaciones. Las inercias para este modelo que utiliza directamente las ecuaciones del modelo dinámico, fueron lo más pequeñas y próximas a las originales, se observó que conforme se aproximaba los valores de las inercias de los eslabones a las originales, los sobretiros disminuían y los tiempos de respuesta se aproximaban a las 3 segundos obtenidos en el *modelo en bloques* del sistema robótico.

Posición de salida del Robot en el *modelo por ecuaciones*, Figuras (5.18) y (5.19):

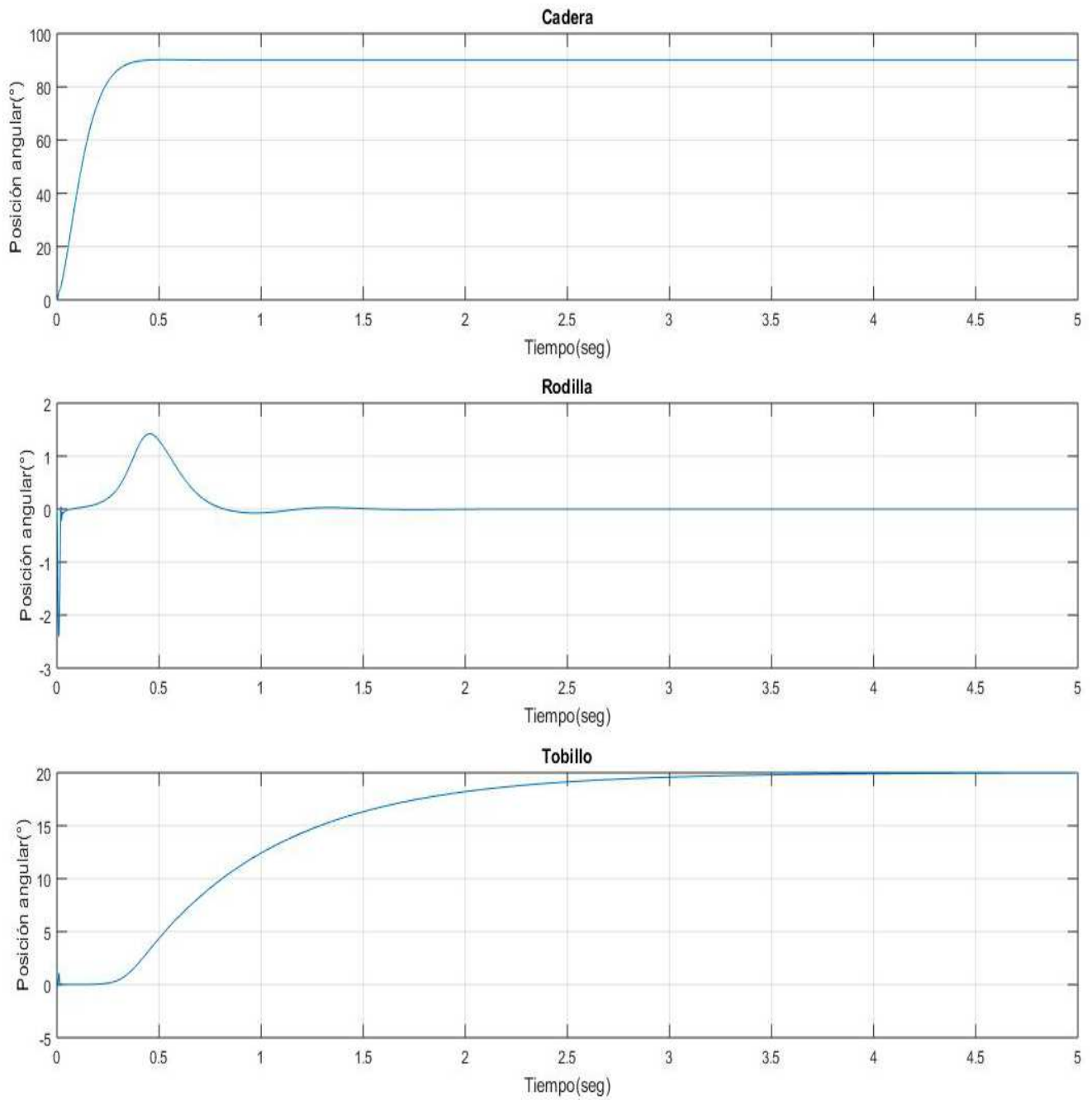


Figura 5.18: Posiciones de salida en flexión, Pierna Derecha.

Posición de salida del Robot en el *modelo por ecuaciones*, Figuras (5.18) y (5.19):

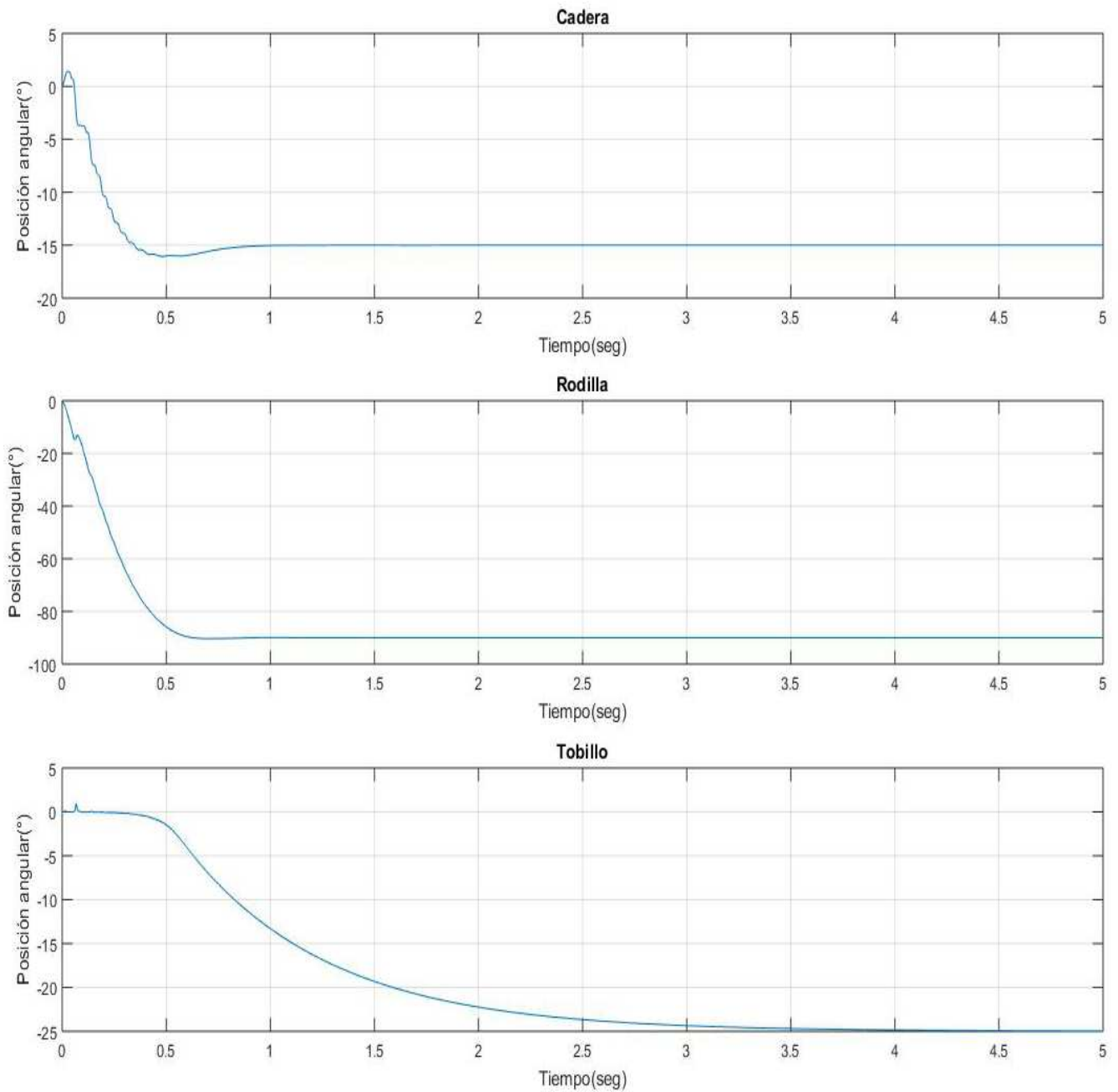


Figura 5.19: Posiciones de salida en extensión, Pierna Izquierda.

Error de posiciones del robot en el *modelo por ecuaciones*, Figuras (5.50) y (5.51):

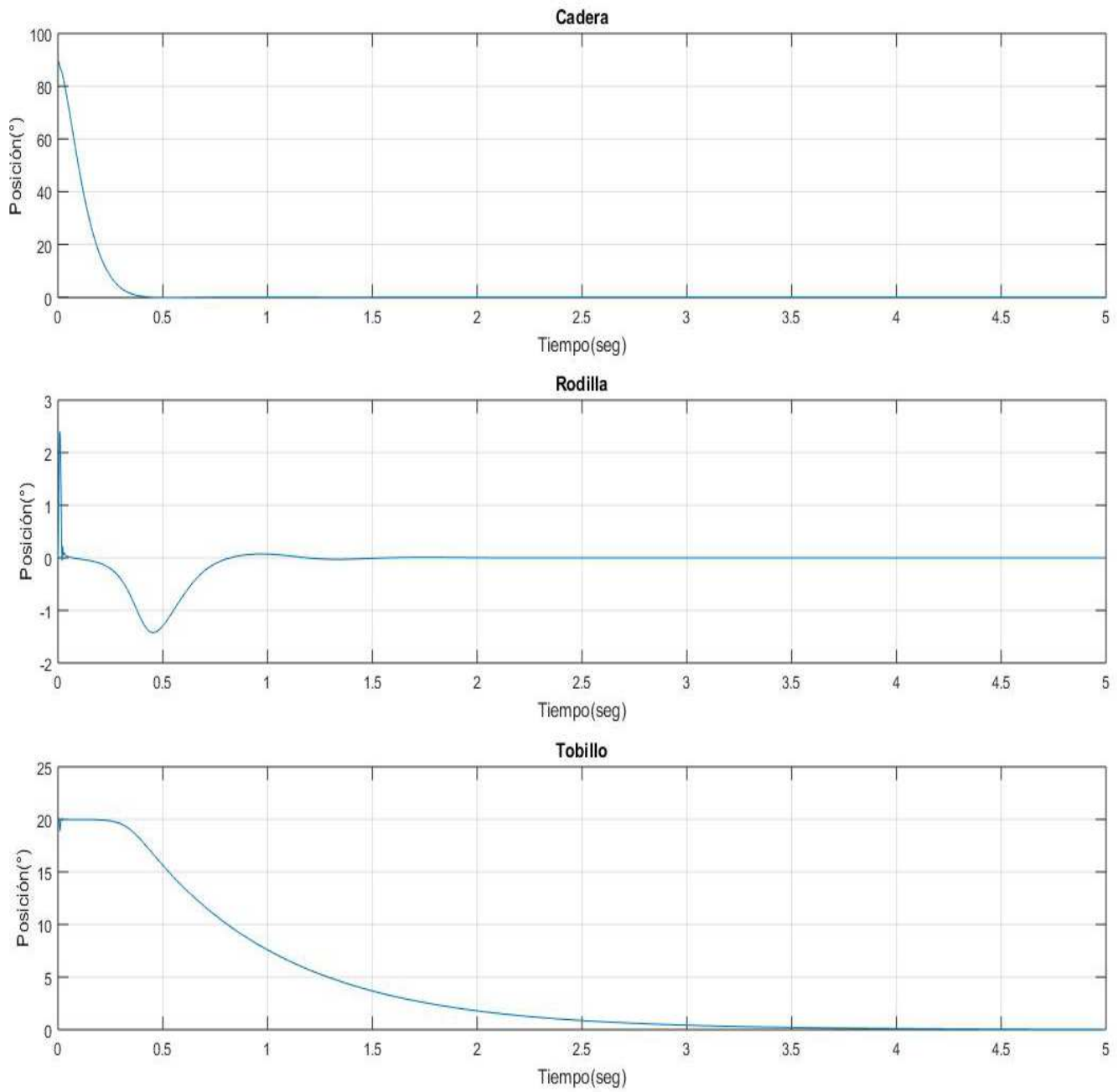


Figura 5.20: Error de posición, Pierna Derecha.

Error de posiciones del robot en el *modelo por ecuaciones*, Figuras (5.50) y (5.51):

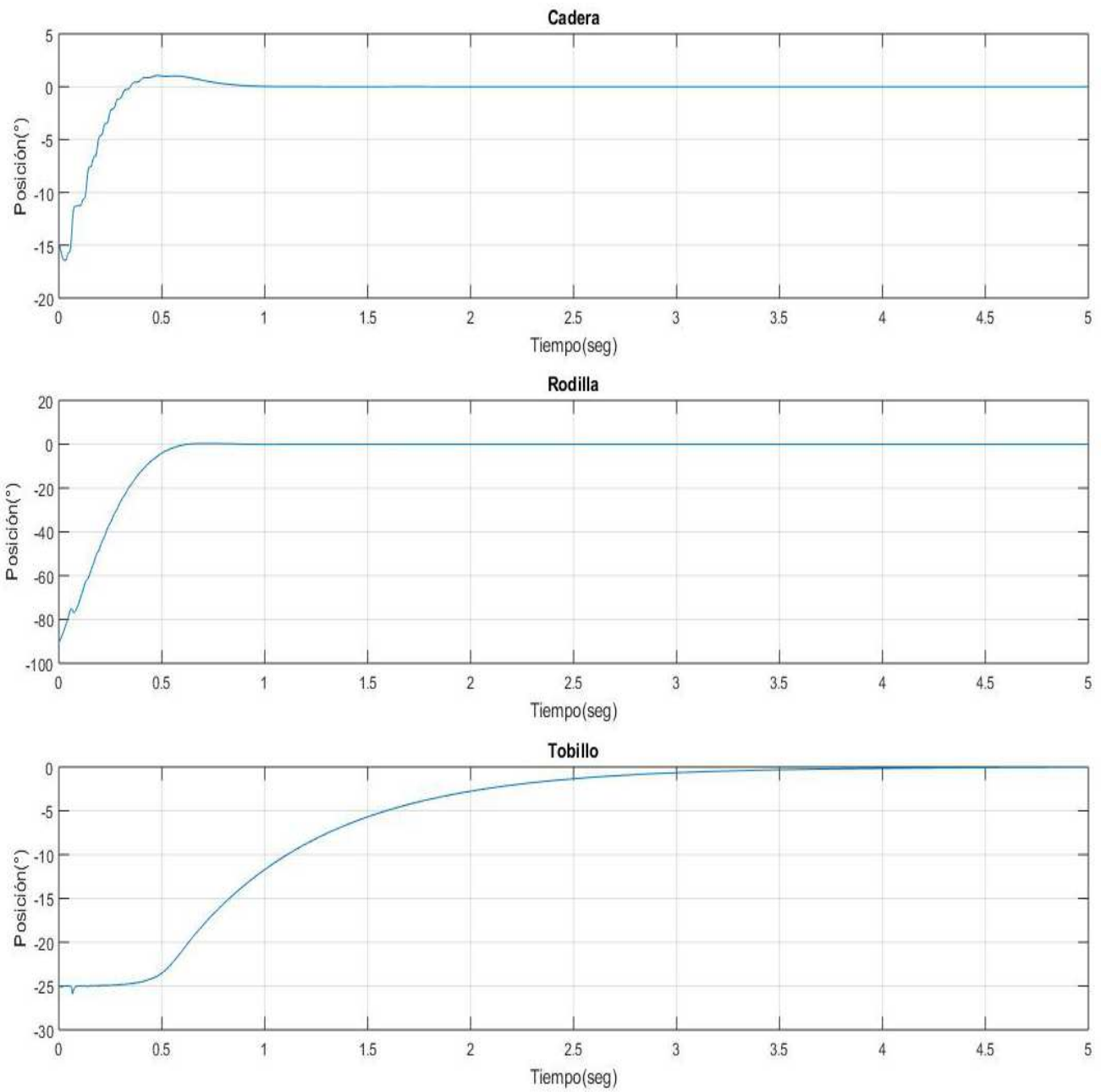


Figura 5.21: Error de posición, Pierna Izquierda.

Torque de los controladores en el *modelo por ecuaciones*, Figuras (5.22) y (5.23):

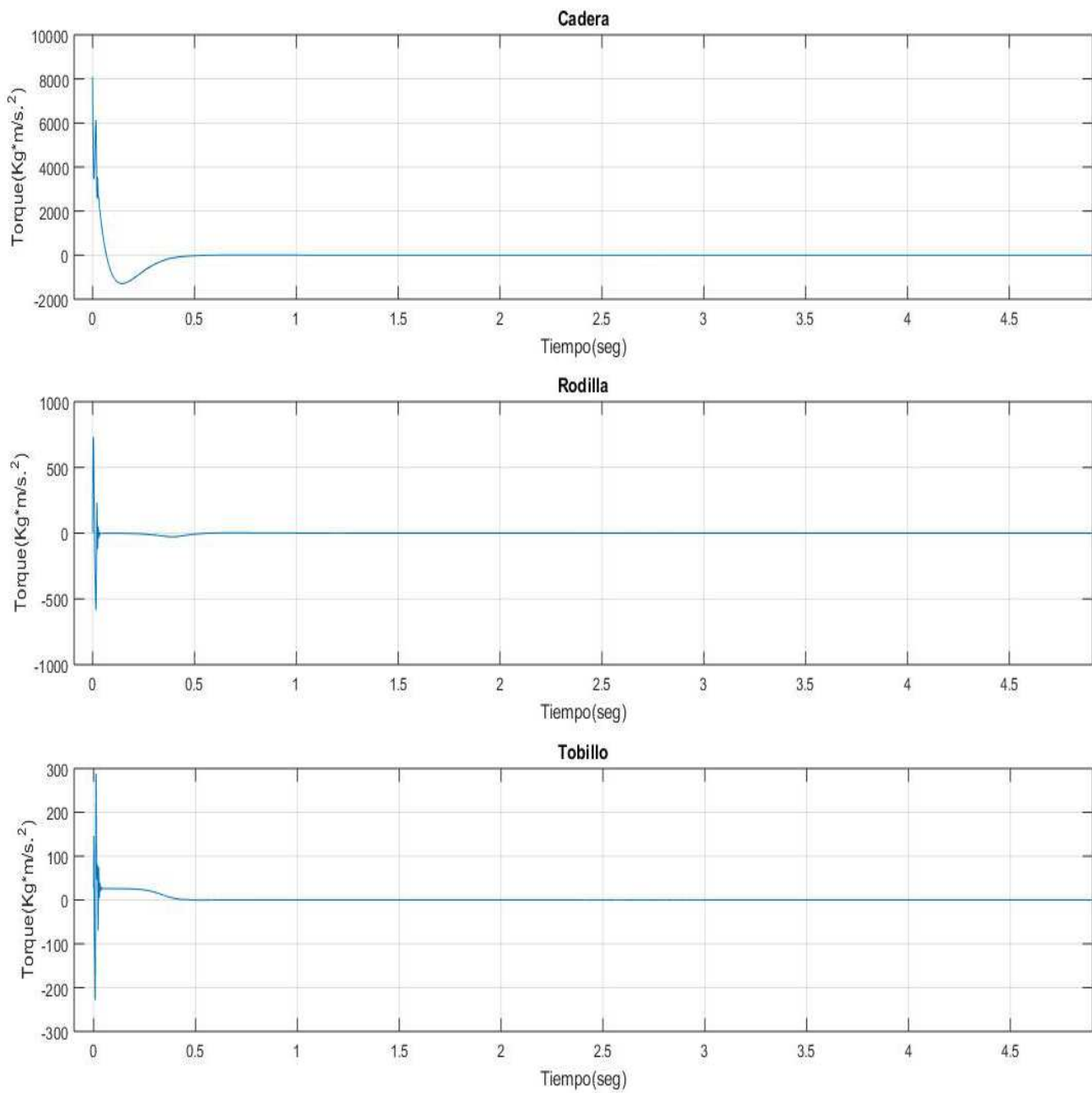


Figura 5.22: Torque de los controladores, Pierna Derecha.

Torque de los controladores en el *modelo por ecuaciones*, Figuras (5.22) y (5.23):

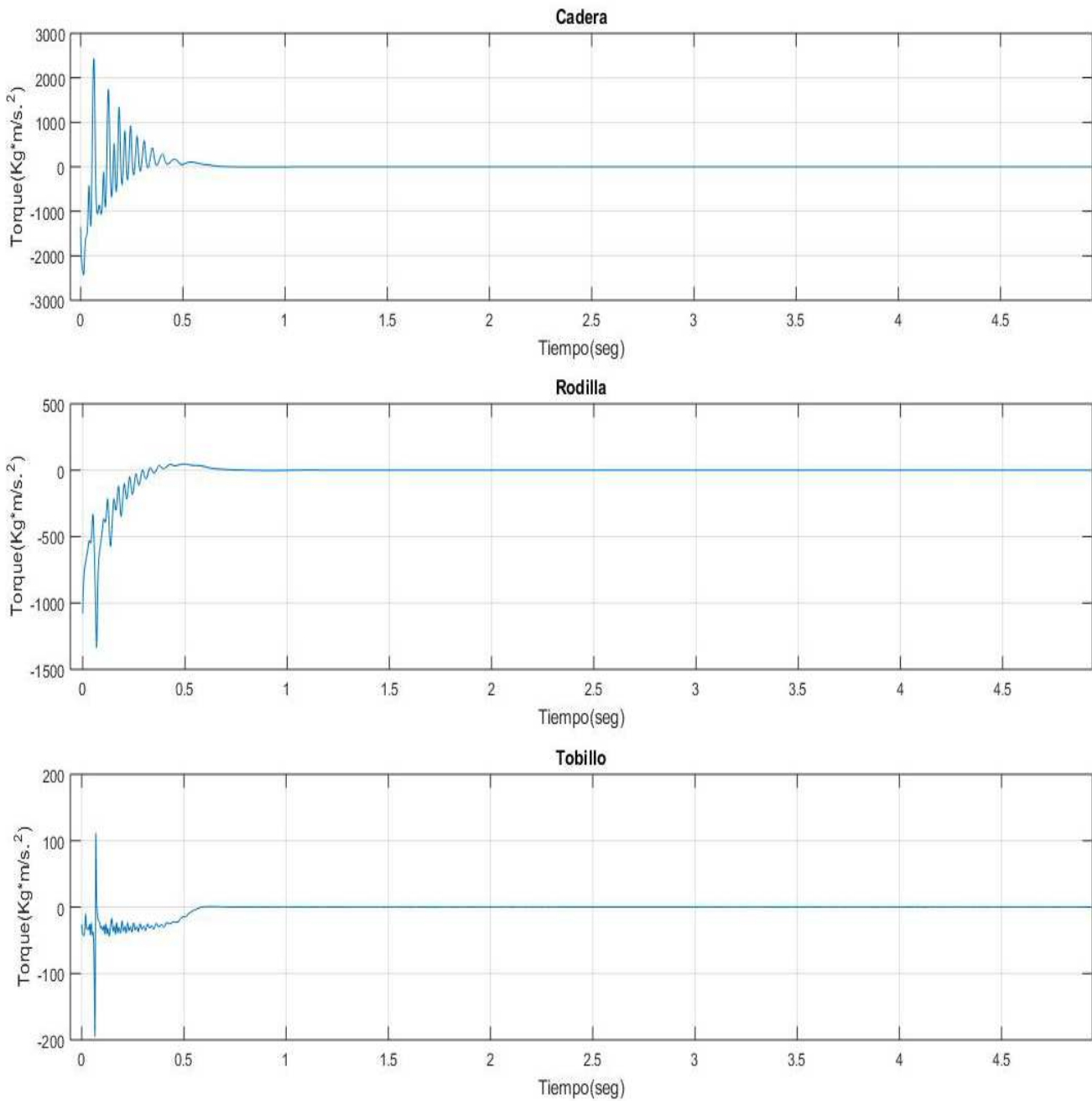


Figura 5.23: Torque de los controladores, Pierna Izquierda.

A continuación se muestran gráficas de los errores de posiciones de las articulaciones para cada sub-sistema **SPD** y **SPI** obtenidas por el *modelo en bloques* (líneas rojas) y el *modelo por ecuaciones* (líneas azules), Figuras (5.24) y (5.25).

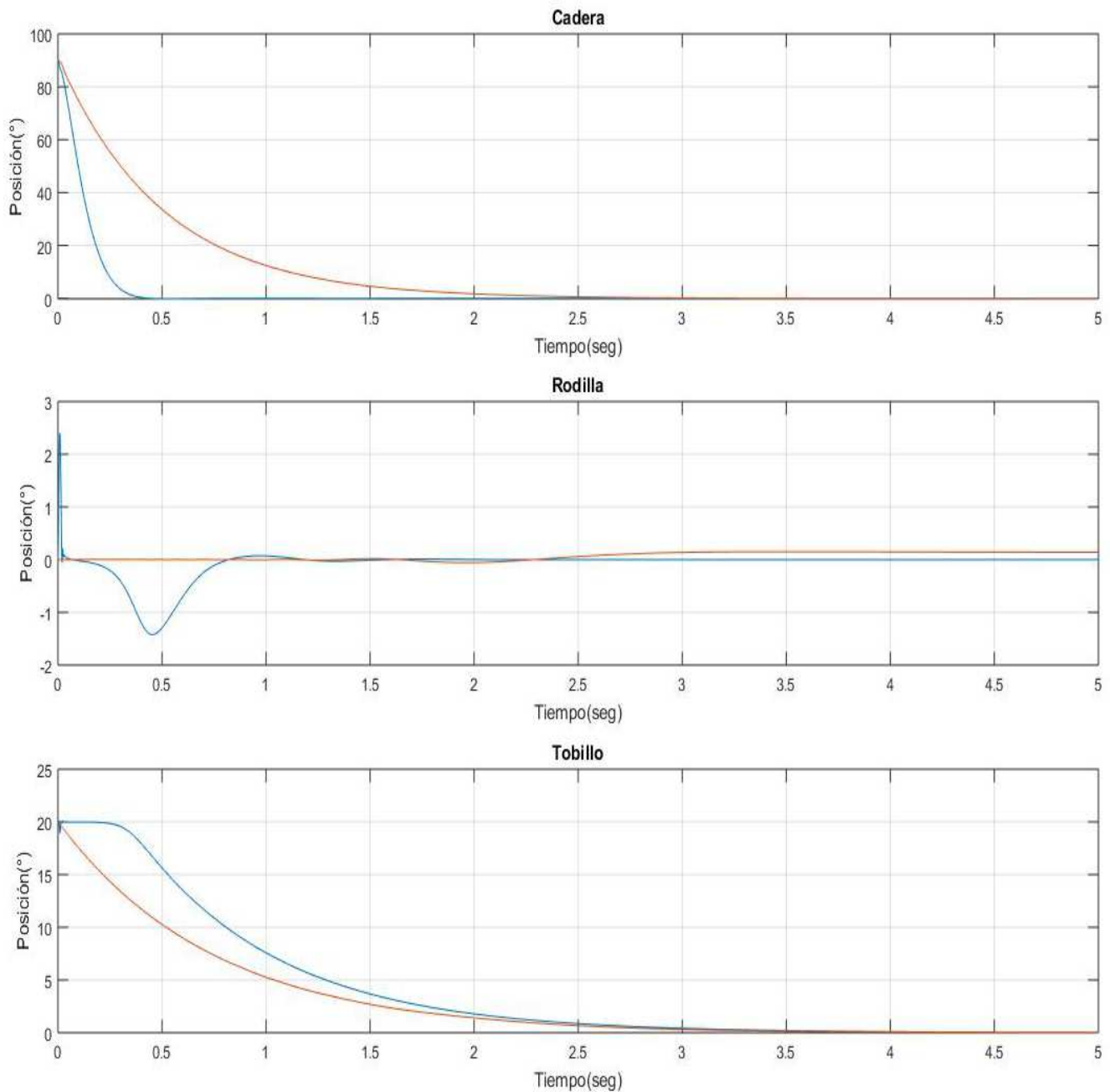


Figura 5.24: Comparativas de errores de posición en SPD.

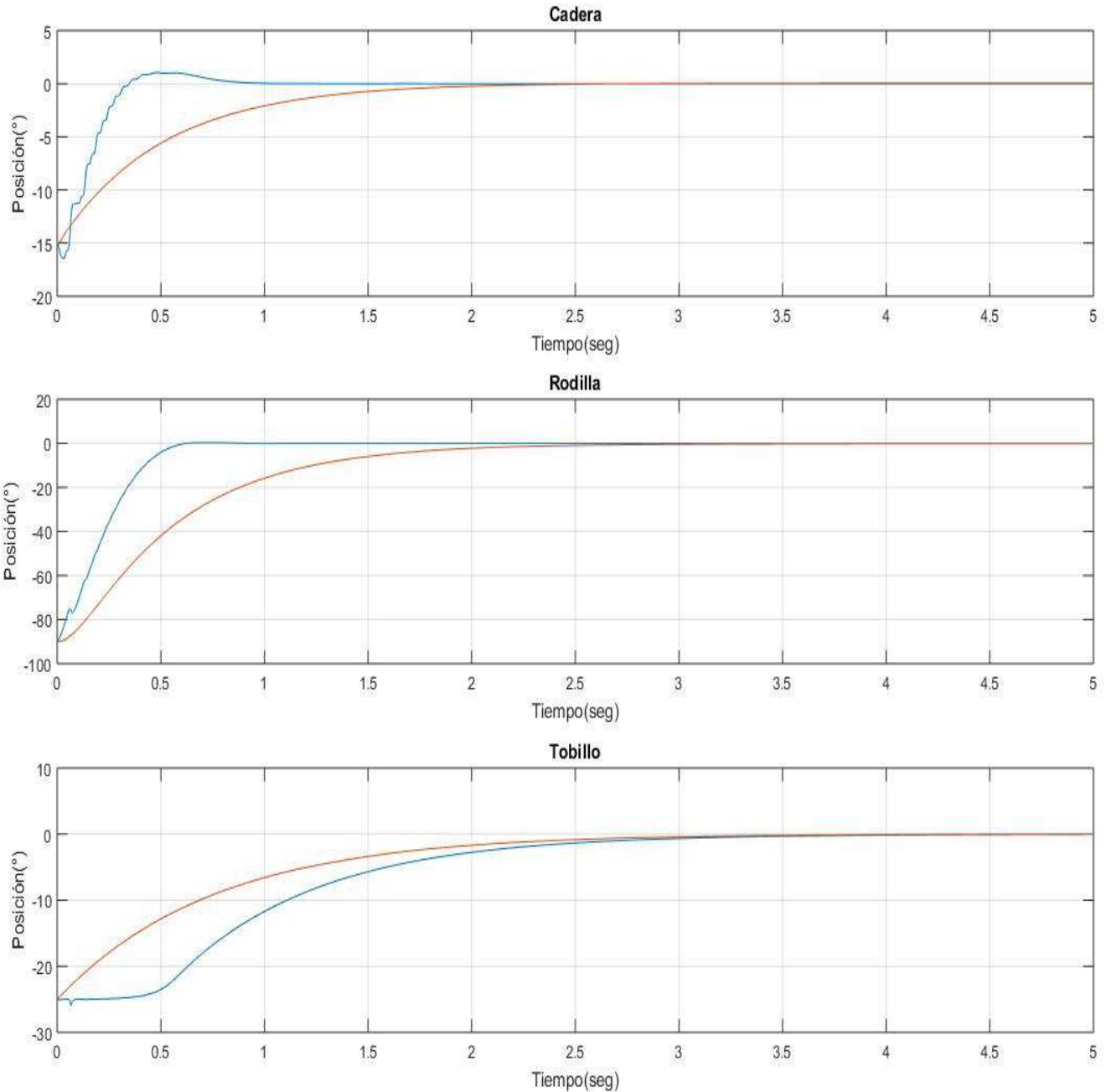


Figura 5.25: Comparativas de errores de posición en SPD.

Estas gráficas nos muestran el desempeño de un modelo con respecto al otro, podemos ver que en el *modelo en bloques* las curvas de los errores suele ser con mayor curvatura y toma mayor tiempo en disminuir la diferencia entre la posición de salida con la deseada. En el caso del *modelo por ecuaciones* se tiene una respuesta curva pero la posición de salida para alcanzar la posición deseada toma menor tiempo con respecto al *modelo en bloques*, así como la existencia de pequeños sobresaltos debido a los torques calculados por sus respectivos controladores en cada modelo, Figuras (5.6), (5.7), (5.22) y (5.23).

5.2.2. Control de movimiento

El experimento final fue la ejecución de movimiento de la marcha humana de las articulaciones en el plano sagital, el movimiento del robot se observa en la Figura (5.26), en esta imagen se observa la posición del sistema por cada 10 % del avance del ciclo de la marcha. Para cualquier número de ciclos de marcha ejecutados, las respuestas de las variables de salida de la Tabla (5.1) fueron las mismas. La simulación de un ciclo de marcha obtenida tiene una duración de 12 segundos, las respuestas de las variables de salida son estables y con un comportamiento idéntico al caso del uso de control de posición. Para ambas piernas, sub-sistemas (**SPD** y **SPI**), con un número de ciclos de marcha simulados mayor a uno se puede apreciar desde las gráficas de posiciones de salida y el movimiento generado, esa simetría que caracteriza a la marcha humana.

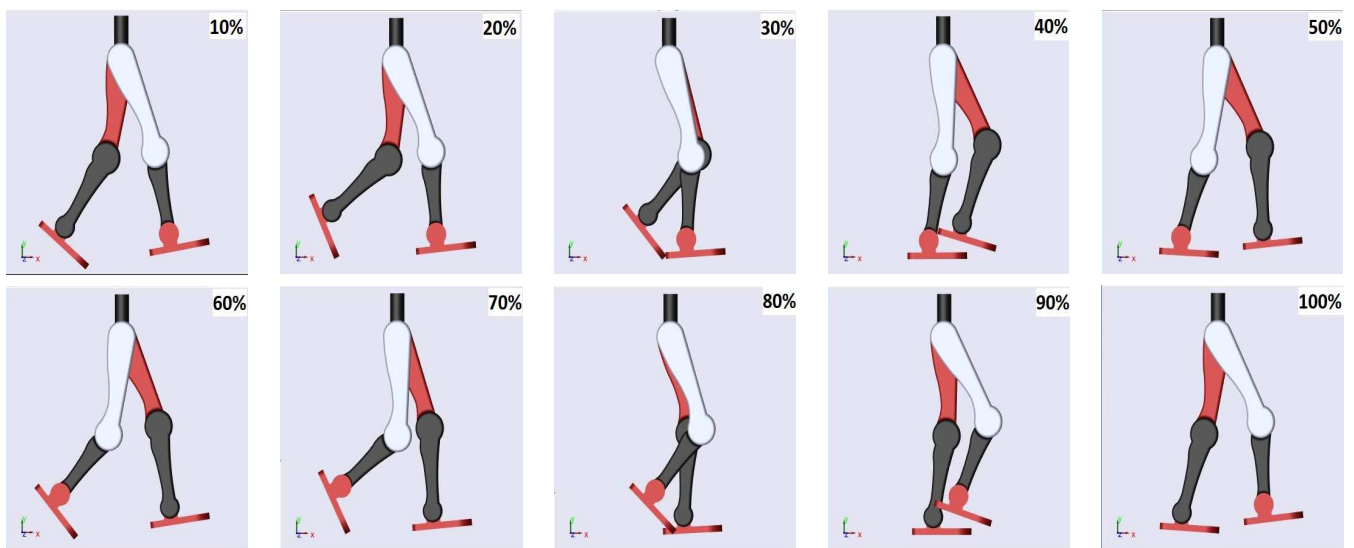


Figura 5.26: Simulación obtenida de la marcha humana

Las gráficas de las Figuras (5.27)-(5.47), son del *modelo en bloques* del sistema bípedo creado del enlace de los archivos de CAD de **SolidWorks**[®] con bloques de **Simulink**[®], posteriormente se mostrarán las gráficas de las variables principales del *modelo por ecuaciones* (3.3.3), Figuras (5.48)-(5.55).

Del *modelo en bloques* se obtuvieron los siguientes resultados. En las Figuras (5.27) y (5.28), de cada articulación se observan las posiciones deseadas, definidas por las líneas rojas, y las posiciones de salida del sistema, definidas por las líneas azules; las posiciones de salida presentan curvas suaves y estables que se puede reafirmar con la observación de sus gráficas de error de posición, Figura (5.29) y (5.30). El error máximo obtenido fue de 4 grados aproximadamente y un mínimo de 0,2 grados, el error de posición en cada punto de posición deseada cambia debido a la diferencia de grados que existe entre cada uno de ellos.

Las gráficas de posición de salida para ambas piernas, sub-sistemas **SPD** y **SPI** del robot son las siguientes.

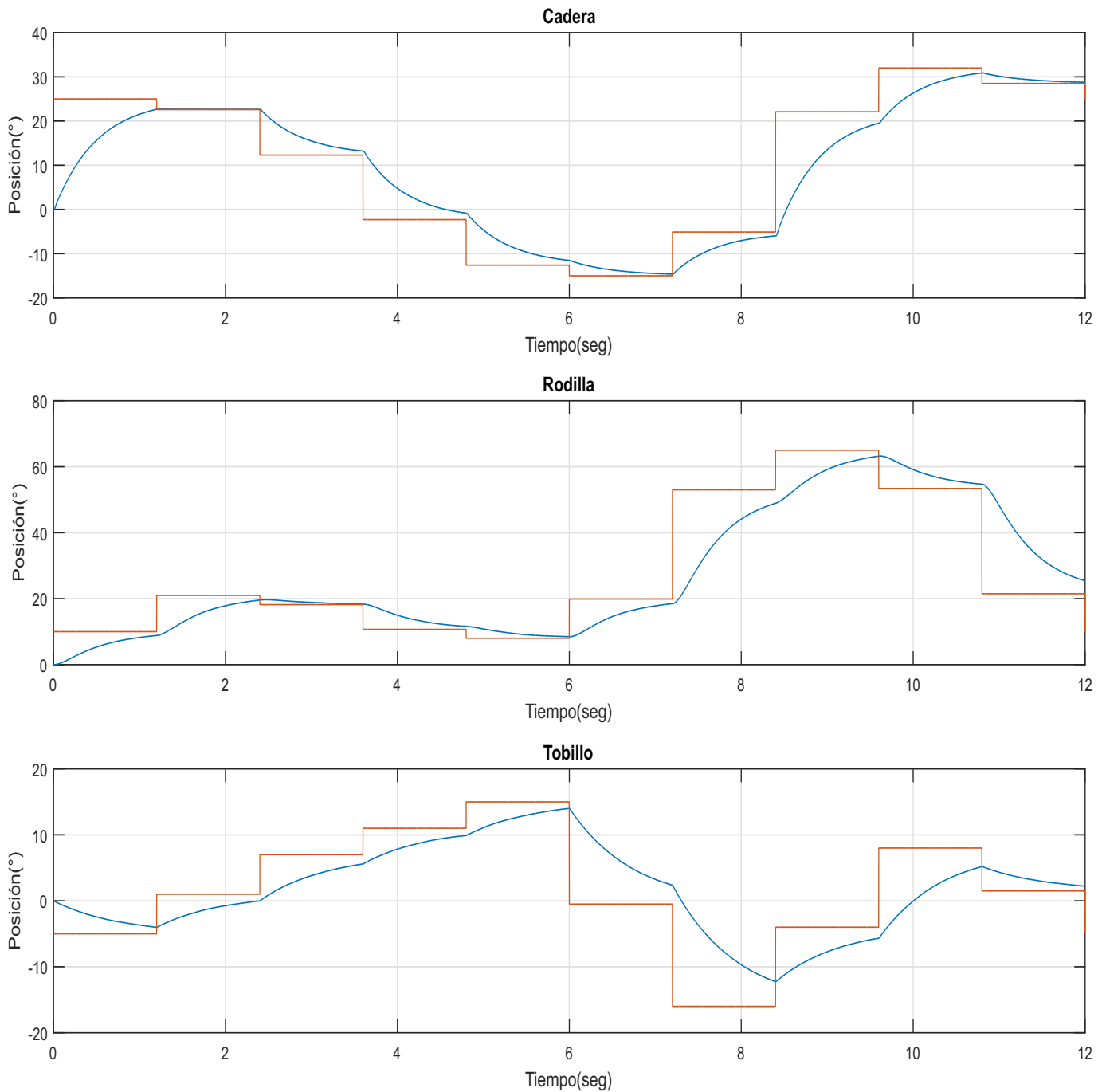


Figura 5.27: Posición de salida vs posición deseada, Pierna Derecha.

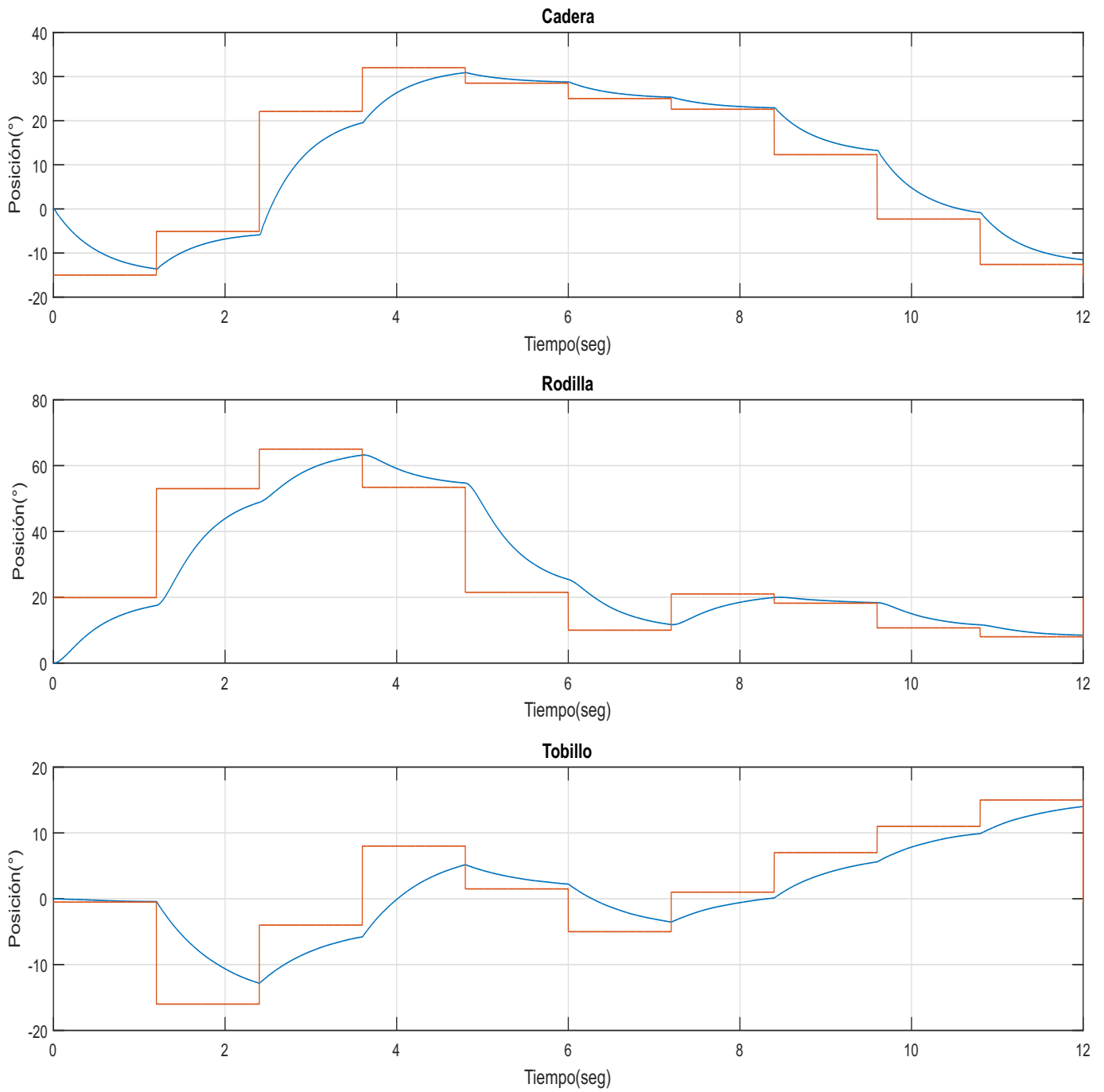


Figura 5.28: Posición de salida vs posición deseada, Pierna Izquierda.

Gráficas de error de posición del robot:

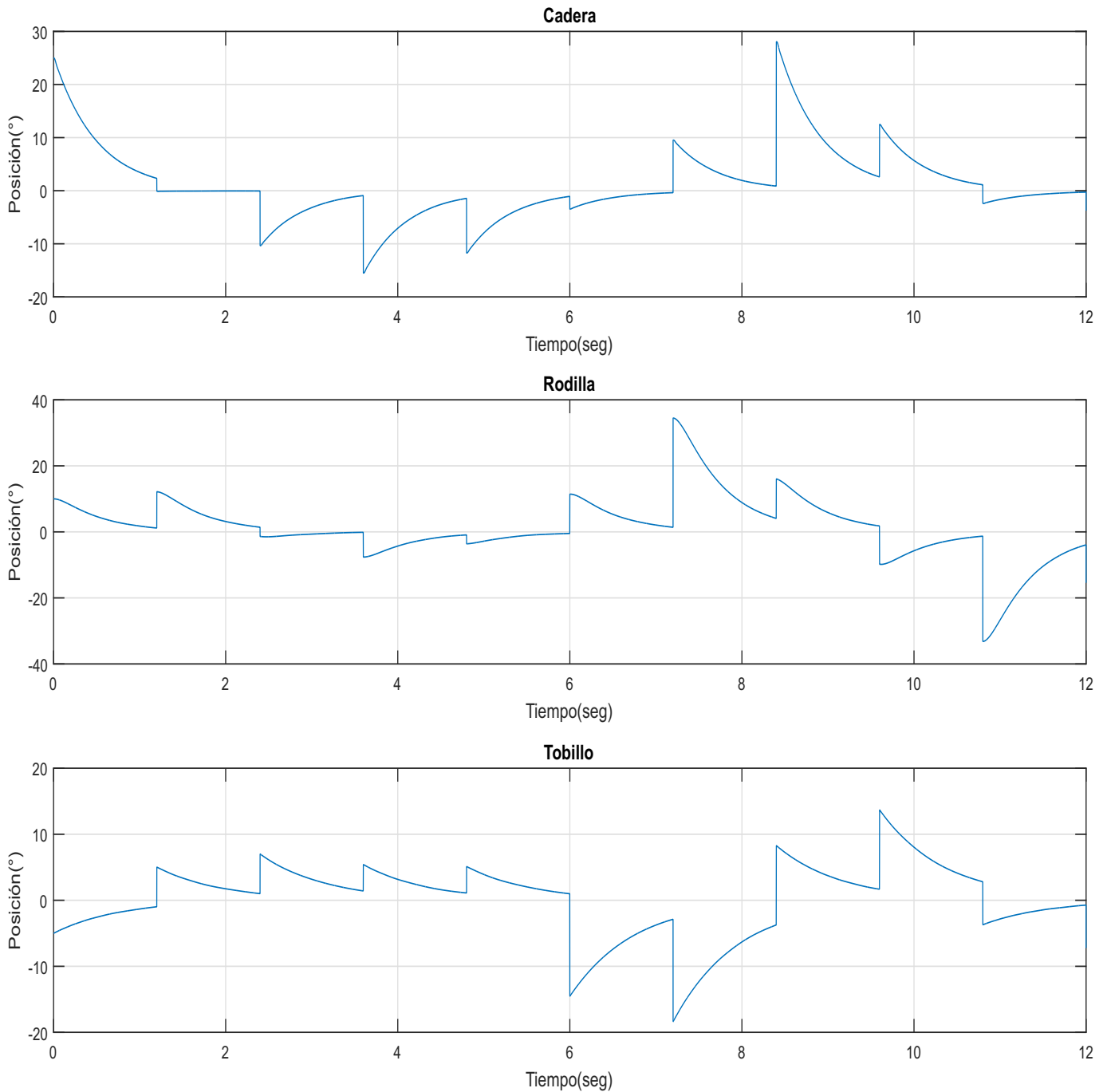


Figura 5.29: Error de posición, Pierna Derecha.

Gráficas de error de posición del robot:

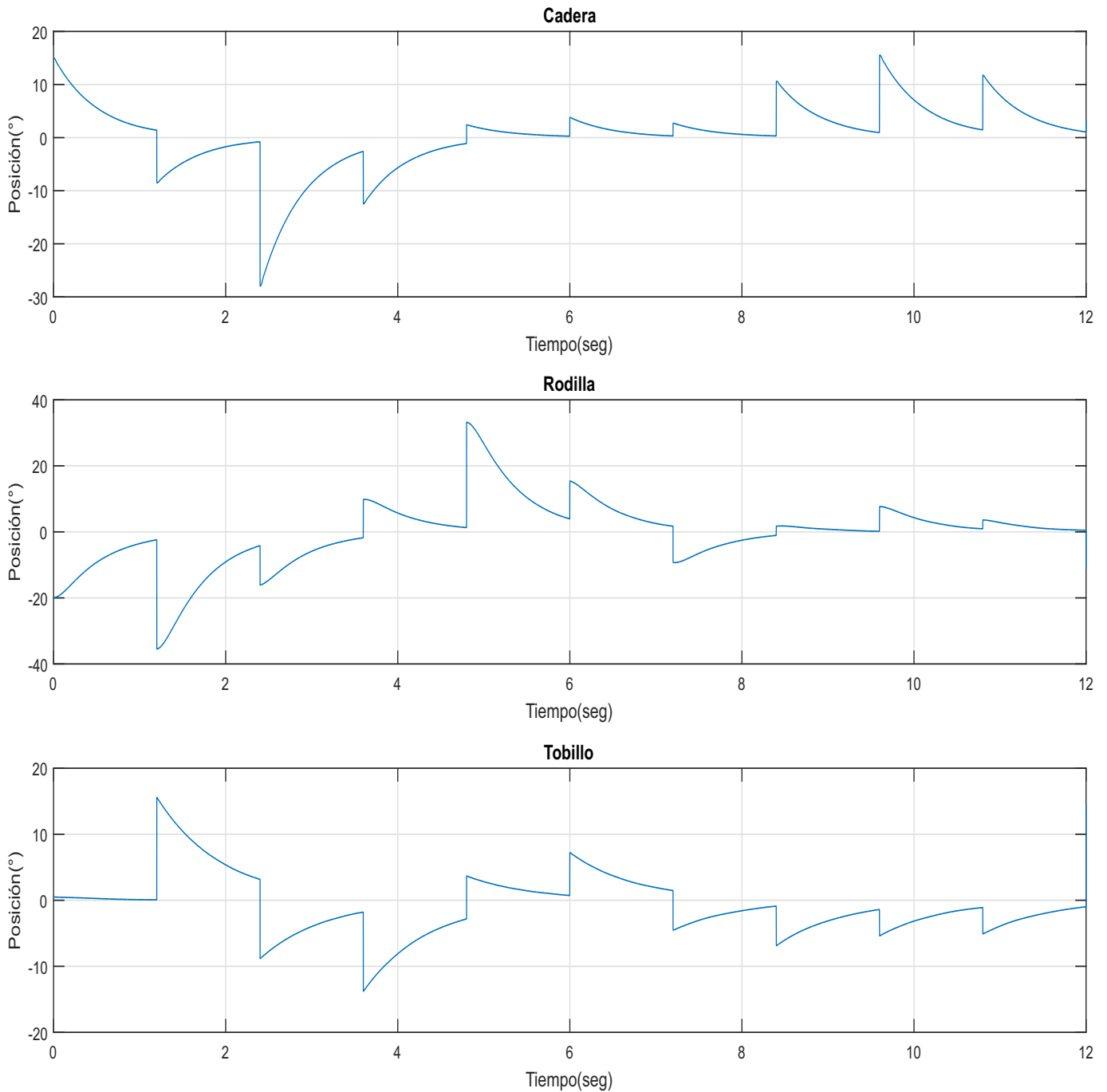


Figura 5.30: Error de posición, Pierna Izquierda.

El modelo fue sometido a varias pruebas con diferentes configuraciones de secuencia de puntos para la selección final de la trayectoria. La secuencia final fue elegida con base a un mejor parecido al movimiento de la marcha promedio y que la mayoría de los puntos de la secuencia, Tabla (4.7), se encontraran dentro de los rangos del movimiento de las articulaciones durante la marcha, Figura (5.31) de [25]. Los polinomios utilizados para la generación de las trayectorias crean curvas ligeramente pronunciadas entre cada par de puntos de entrada del cálculo de trayectoria, pese a ser una solución cuyas matemáticas no tienden a ser complejas, estas curvaturas tienden con frecuencia a arrojar valores alejados de la trayectoria deseada.

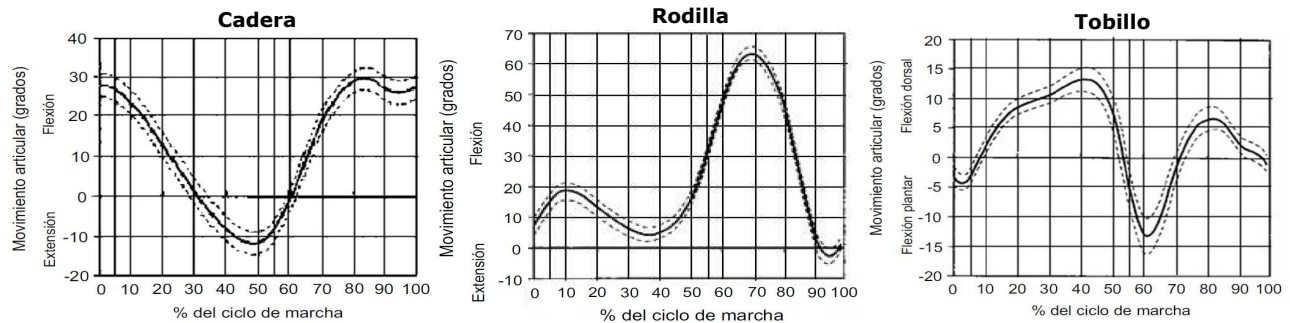


Figura 5.31: Trayectorias de movimiento de las articulaciones.

De acuerdo con [25], [50], [51], [52] y [53], la marcha humana es un ciclo que se distribuye en dos fases: **fase portable** y **fase de oscilación**. Además, el ciclo de marcha se puede segmentar en pequeños periodos dentro de estas dos fases. A partir de la Figura (5.32) se hace mención la siguiente descripción de la marcha:

La **Fase portable** abarca el 60 % del ciclo de marcha, inicia con un *contacto de talón* (CT, D derecha o I izquierda) o también denominado como *respuesta de carga*, y termina con *despegue de los dedos* (DD, D derecha o I izquierda) o también denominado como *pre oscilación*. Esta fase se puede dividir en cuatro periodos:

- **A**, *contacto de talón* o *respuesta de carga*, abarca del 0 % al 10 % del ciclo,
- **B**, *parte media de la zancada*, abarca del 10 % al 30 % del ciclo,
- **C**, *fase portable final*, abarca del 30 % al 50 % del ciclo,
- y **D**, *pre-oscilación*, abarca del 50 % al 60 % del ciclo.

En el caso de la **fase de oscilación**, abarca un 40 % del ciclo de la marcha, esta inicia cuando se termina el periodo del *despegue de los dedos* (DD) o también llamado *pre oscilación*, y termina al inicio del periodo del *contacto del talón* (CT). Los periodos en los que se puede dividir esta fase son tres:

- **E**, *oscilación inicial*, abarca del 60 % al 70 % del ciclo;
- **F**, *parte media de la oscilación*, abarca del 70 % al 85 % del ciclo;
- y **G**, *oscilación final*, abarca del 85 % al 100 % del ciclo.

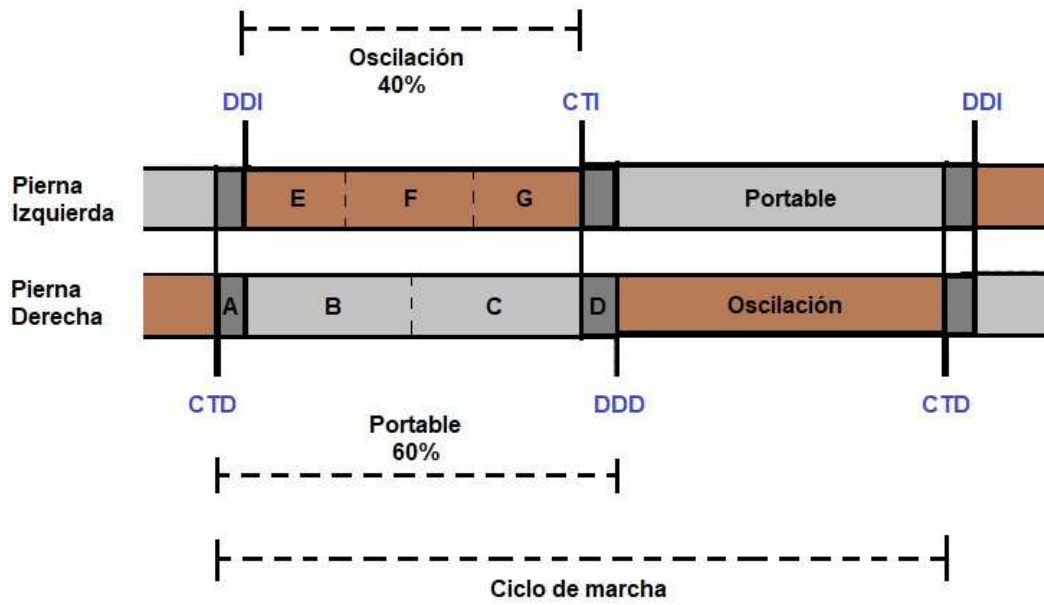


Figura 5.32: Fases y periodos del ciclo de la marcha.

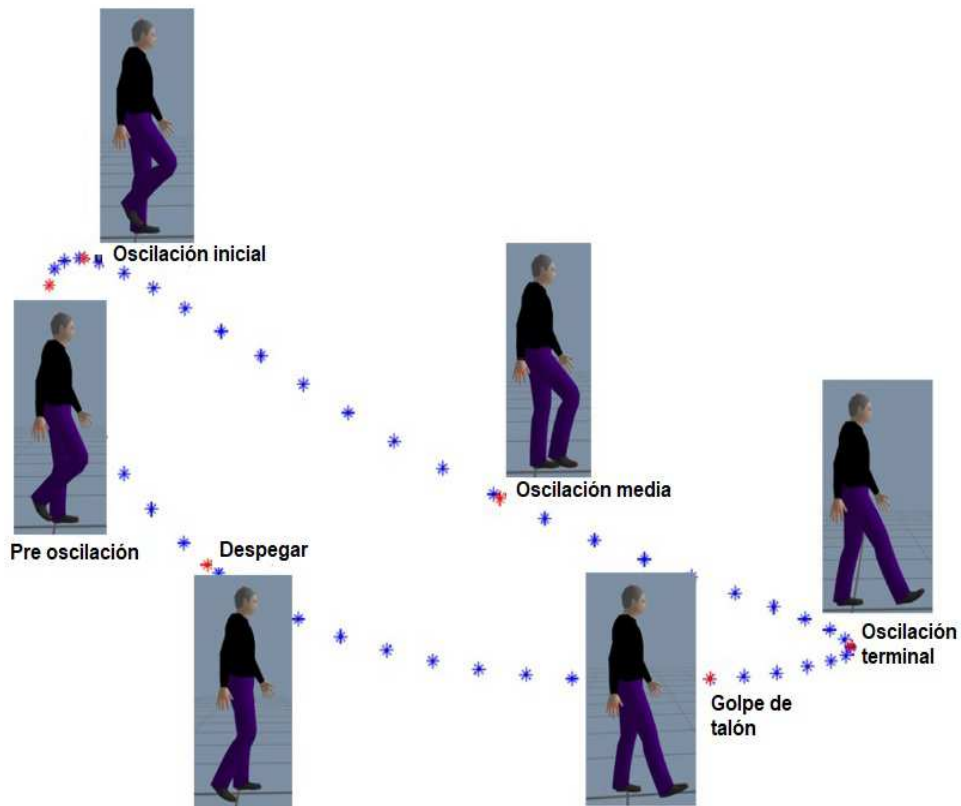


Figura 5.33: Eventos clave de la marcha.

De acuerdo con [51] y [52], a partir de las posiciones angulares de las articulaciones de cadera, rodilla y tobillo, Figuras (5.31), y el uso de la cinemática directa, se emplean para calcular la posición del tobillo en un espacio 2D con respecto a la articulación de la cadera en un plano sagital, como se muestra en la Figura (5.33). Para la generación de la forma del patrón de posición del tobillo en 2D, se requiere de seis puntos de control, estos eventos o puntos clave de la marcha en orden temporal son: *golpe de talón* o contacto del talón, *despegue* (despegue de los dedos), *pre-oscilación*, *oscilación inicial*, *oscilación media* y *oscilación terminal*; los cuales son los mismo periodos en los que se segmentan las fases de la marcha. A partir de [51] y [52], el modelo cinemático de las articulaciones de la rodilla y el tobillo con respecto a la articulación de la cadera en el plano sagital son:

$$\begin{aligned}x_{rodilla} &= l_1 \sin(\theta_i), \\y_{rodilla} &= -l_1 \cos(\theta_i),\end{aligned}\tag{5.1}$$

$$\begin{aligned}x_{tobillo} &= l_2 \sin((\theta_i + \theta_j) + l_1 \sin(\theta_i), \\y_{tobillo} &= -l_2 \cos((\theta_i + \theta_j) - l_1 \cos(\theta_i),\end{aligned}\tag{5.2}$$

descendientes de las ecuaciones de las posición de los eslabones 1, 2, 4 y 5 en las ecuaciones (3.25), (3.29), (3.63) y (3.67) de la cinemática directa del sistema calculada previamente. Las ecuaciones (5.1) y (5.2), son similares a las que se mencionan durante el cálculo del patrón de posición del tobillo en los artículos [51] y [52]. Aplicando los ángulos de salida de las articulaciones durante simulación de la marcha, Figuras (5.27) y (5.28), se obtuvieron las siguientes trayectorias de posición de los tobillos y la rodillas en un plano xy de **SPD** y **SPI**, Figuras (5.34) y (5.35). En la Figura (5.34), se observa los patrones de posición de las articulaciones de la cadera (punto en $(0, 0)$) como referencia, rodillas (líneas rojas) y tobillos (líneas azules) de ambas piernas, **SPD** (sub-sistema de la pierna derecha) y **SPI** (sub-sistema de la pierna izquierda), derecha e izquierda, respectivamente. En la Figura (5.35) se observan sólo los patrones de posición de los tobillos de **SPD** (arriba) y **SPI** (abajo), en los patrones se puede observar la ubicación media de los periodos o puntos clave de la marcha humana (A, B, C, D, E, F y G) descritas previamente, también se observa la división del patrones por cada 10 % de ciclo que avanza la marcha. Las gráficas de las Figuras (5.34) y (5.35), permite obtener información de parámetros de tiempo-distancia de la marcha, esta información es fundamental en casos específicos donde se requiera conocer o valorar la marcha realizada por un ser humano o por un sistema robótico simulado. Algunos valores obtenidos de estos parámetros a partir de la gráfica de los patrones de posición de los tobillos del sistema simulado, son los que se muestran en la Tabla (5.3).

Parámetro	Valor
Tiempo del ciclo	12 seg.
Zancada	0.96 m.
Longitud del paso	0.48 m.
Altura del paso	8 cm.
Cadencia	10 pasos/minuto
Velocidad	8 cm/seg.

Tabla 5.3: Parámetros tiempo-distancia obtenidos

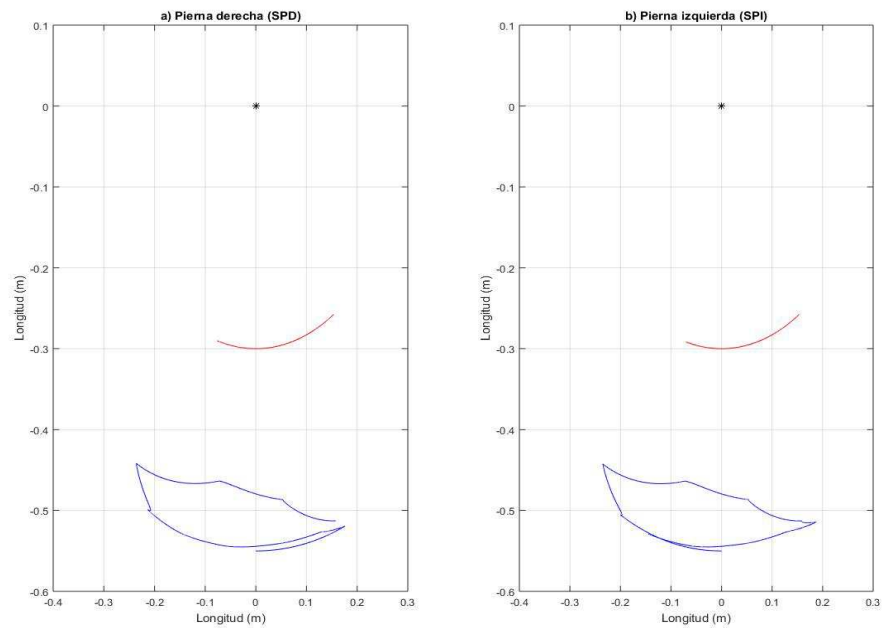


Figura 5.34: Patrones de las articulaciones durante la marcha, plano sagital.

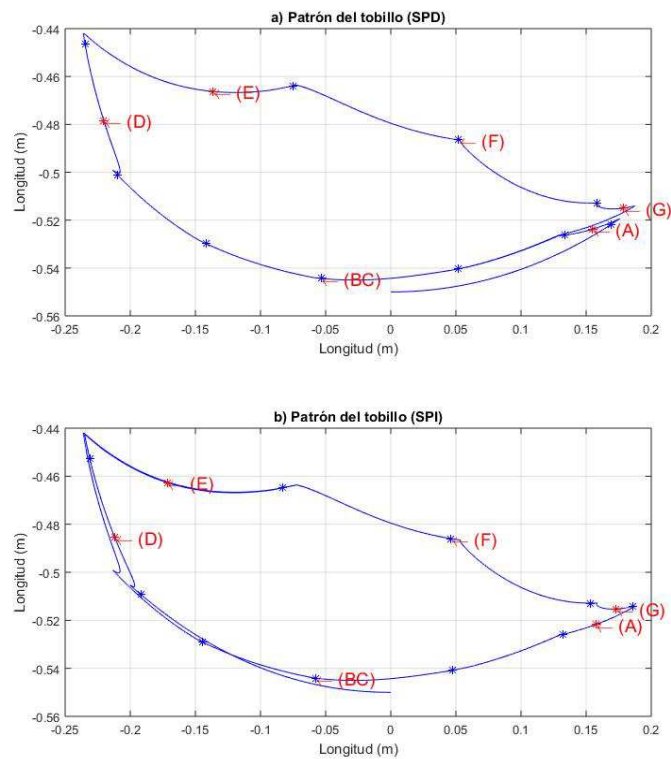


Figura 5.35: Patrón de posición de los tobillos durante la marcha, plano sagital.

Los datos relevantes de la marcha humana para el movimiento sagital de la pierna son los ángulos de flexión y extensión de la cadera, y la flexión y extensión de la rodilla, Figura (5.31). Cabe recalcar que existen diferencias entre los conjuntos de datos de información por diferentes grupos de investigación sobre cinemática y cinética de la marcha humana debido a la variación en las técnicas de medición y las selecciones de sujetos, por lo que en la literatura podemos encontrar diferentes conjuntos de datos por diferentes autores [49]. La evaluación de la marcha generada por el sistema robótico no entra en el desarrollo de la tesis, no se contempla el análisis de este, por lo que los datos que se puedan derivar de la observación de las gráficas en la Figuras (5.34) y (5.35), sólo son pura información que describe características del movimiento de la marcha en el robot simulado.

En las Figuras (5.36) y (5.37), se observa los torques generados por los controladores de cada articulación de ambas piernas, **SPD** y **SPI**, torques necesarios para la movilización de cada eslabón. Las ganancias de los controladores utilizados en control de posición fueron las mismas para el control de movimiento punto por punto. Las curvas de los torques van disminuyendo conforme las posiciones de salida del sistema se van acercando a las posiciones deseadas. A partir de la relación de los torques de los controladores con los motores, de las características electromecánicas de cada motor, se obtuvieron respuestas estables y dentro de las especificaciones de las hojas de datos de referencia. En las gráficas se observa que los motores tienden a disminuir la amplitud de sus variables entre puntos cuya diferencia de grados de posición deseada es pequeña, y aumenta entre puntos de posición deseada si su diferencia de grados es mayor, Figuras (5.38)–(5.46).

A continuación se muestran las gráficas de las variables principales del *modelo por ecuaciones* definido por el modelo dinámico del robot, Ecuación (3.3.3). Las variables a observar del comportamiento del sistema bípedo son, las posiciones de salida del sistema q , los errores de posición $\tilde{q} = q_d - q$ y finalmente el torque generado por cada uno de los controladores τ .

Las Figuras (5.48) y (5.49), muestran las gráficas de las posiciones de salida de cada pierna, **SPD** (sub-sistema de la pierna derecha) y **SPI** (sub-sistema de la pierna izquierda) respectivamente. Se puede apreciar respuestas con curvas suaves para alcanzar las posiciones deseadas; de igual forma que en control de posición, existen pequeños sobresaltos en las posiciones de salida de las articulaciones que representan las rodillas y los tobillos. Este comportamiento se puede observar en las gráficas de error de posición de las articulaciones en las Figuras (5.50) y (5.51), conforme el tiempo va avanzando el error de las posiciones va disminuyendo y en forma suave.

En las gráficas de las Figuras (5.52) y (5.53) se observan los torques generados por los controladores, estos generan por momentos torques mayores en comparación a los que se pueden observar en las gráficas de los torques de los controladores en el *modelo en bloques*, lo que provoca pequeños sobresaltos en las posiciones de salida y por consecuencia en los errores de posición de las articulaciones; pero conforme va avanzando el tiempo estos torques van disminuyendo, tendiendo a cero.

El conjunto de datos de movimiento de las articulaciones en el plano sagital de las piernas son las mismas que se muestran en la gráficas de la Figura (5.31), los patrones de posición de las rodillas y los tobillos en el un plano sagital fue calculada a través de las mismas ecuaciones de posición (5.1) y (5.2), con la aplicación de las posiciones de salida de las articulaciones durante simulación de la marcha, Figuras (5.48) y (5.49).

Gráficas de torques de los controladores en el sistema robótico:

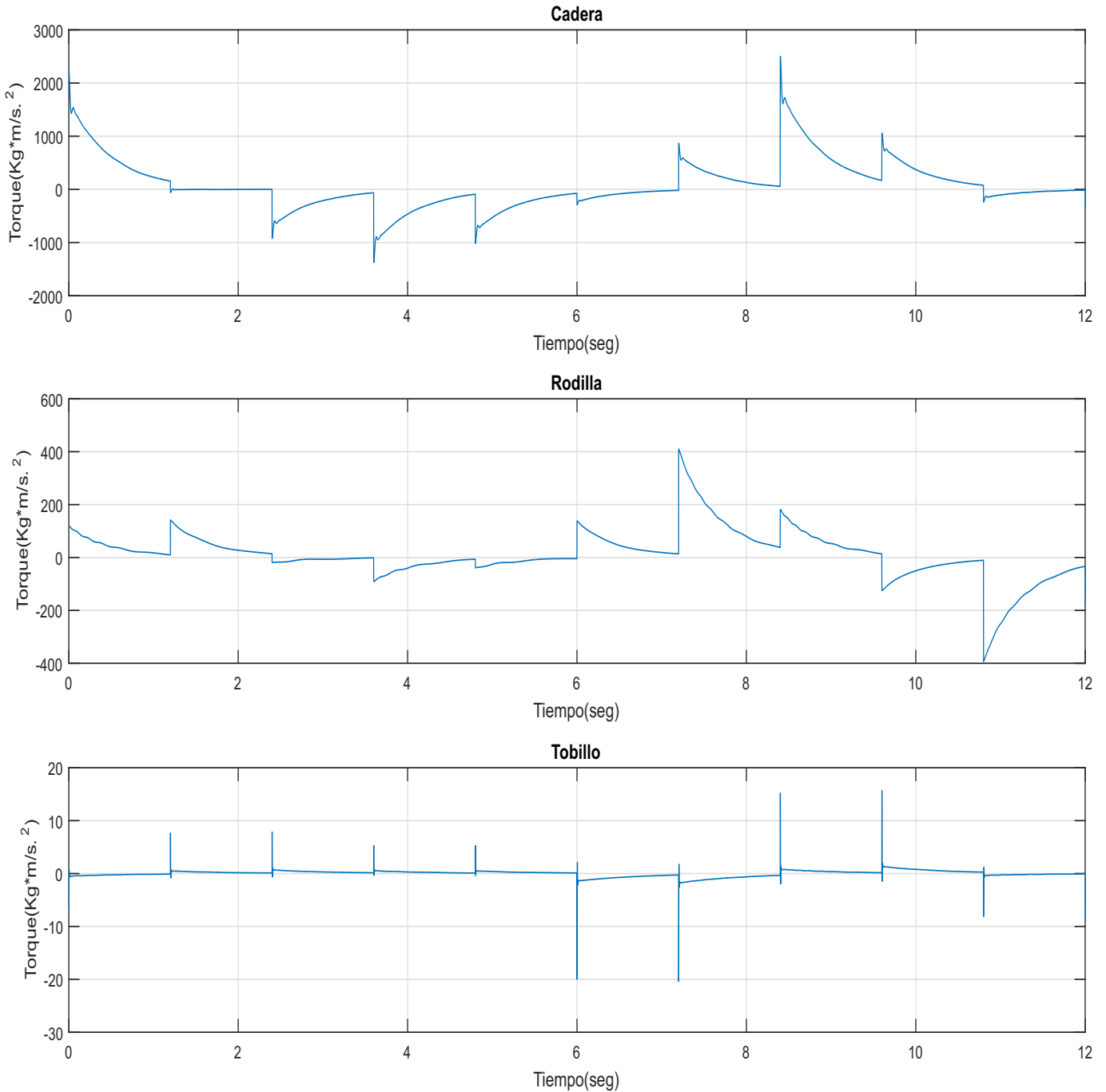


Figura 5.36: Toques de los controladores, Pierna Derecha.

Gráficas de torques de los controladores en el sistema robótico:

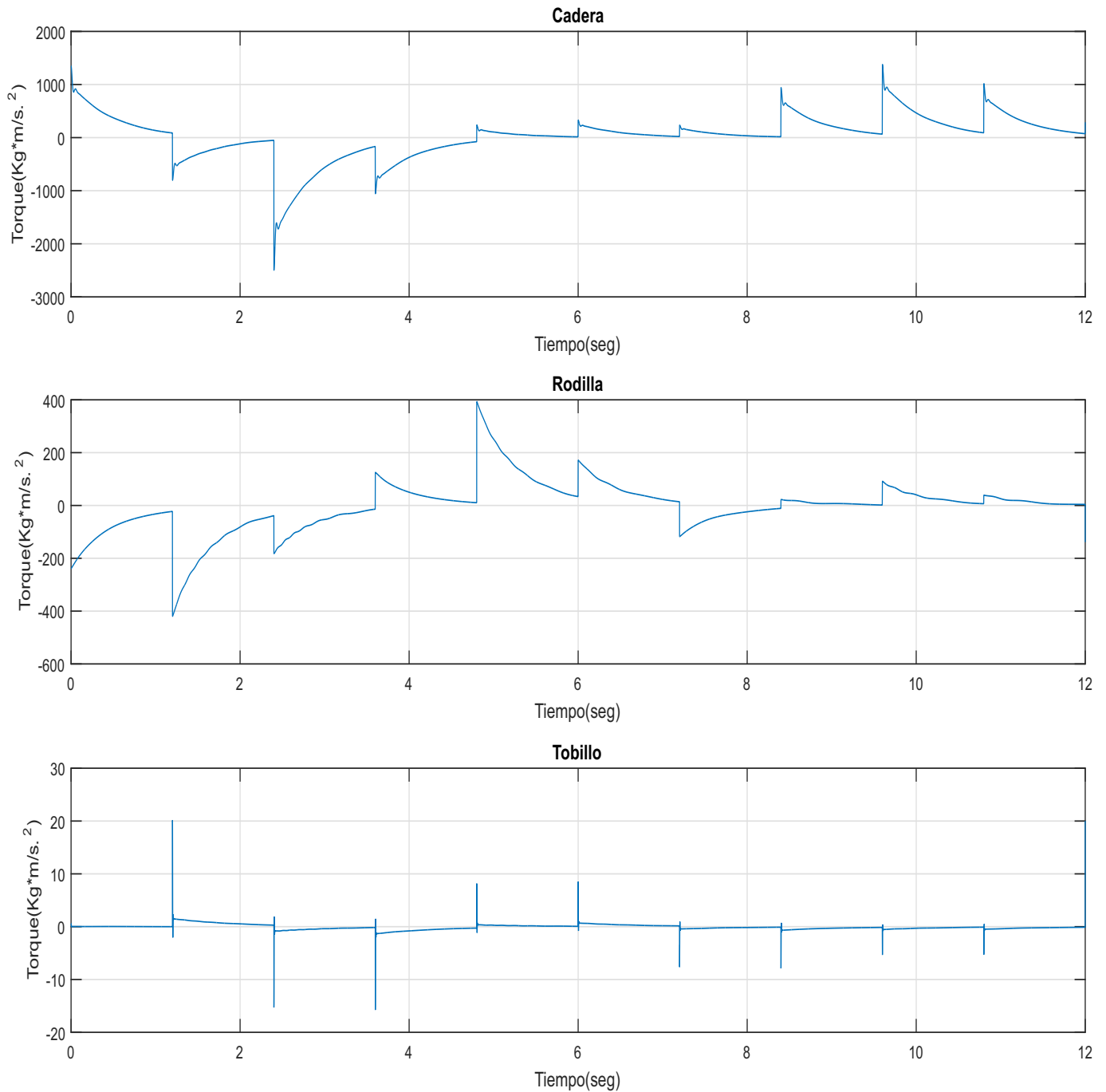


Figura 5.37: Torques de los controladores del robot, Pierna Izquierda.

Gráficas de los torques de los motores DC:

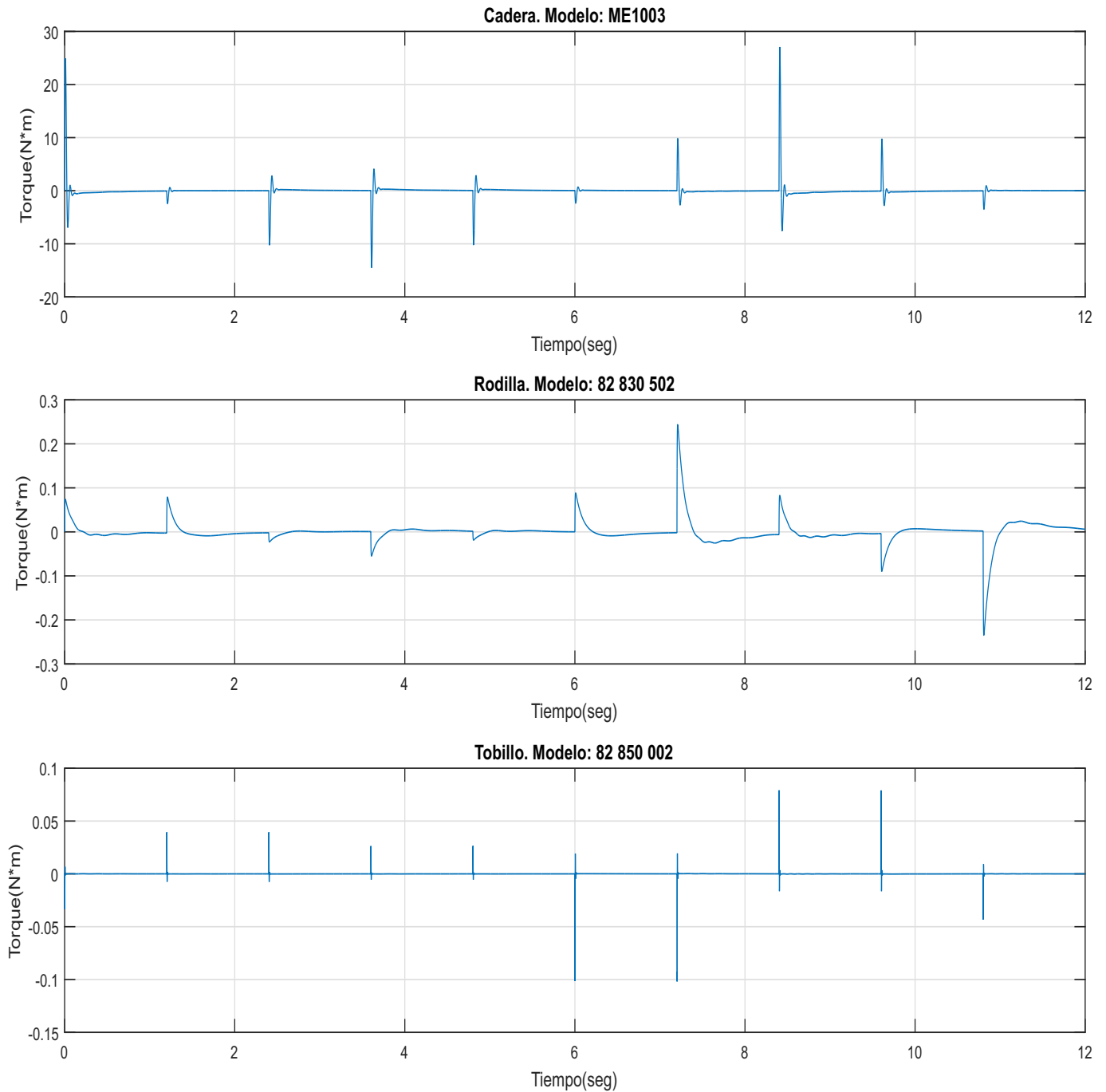


Figura 5.38: Toques de los motores DC, Pierna Derecha.

Gráficas de los torques de los motores DC:

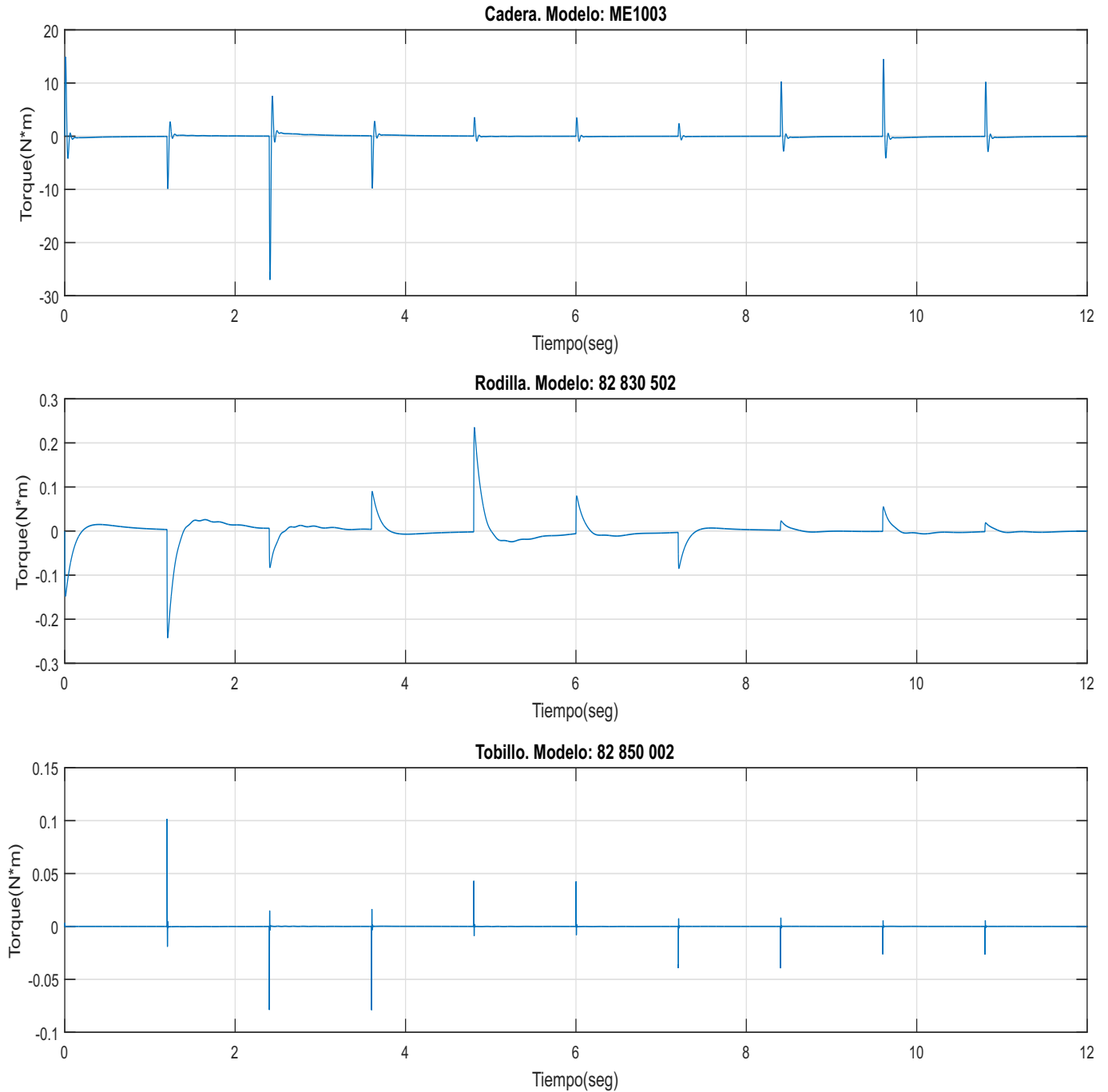


Figura 5.39: Torques de los controladores del robot, Pierna Izquierda.

Gráficas de los voltajes en los motores DC del robot:

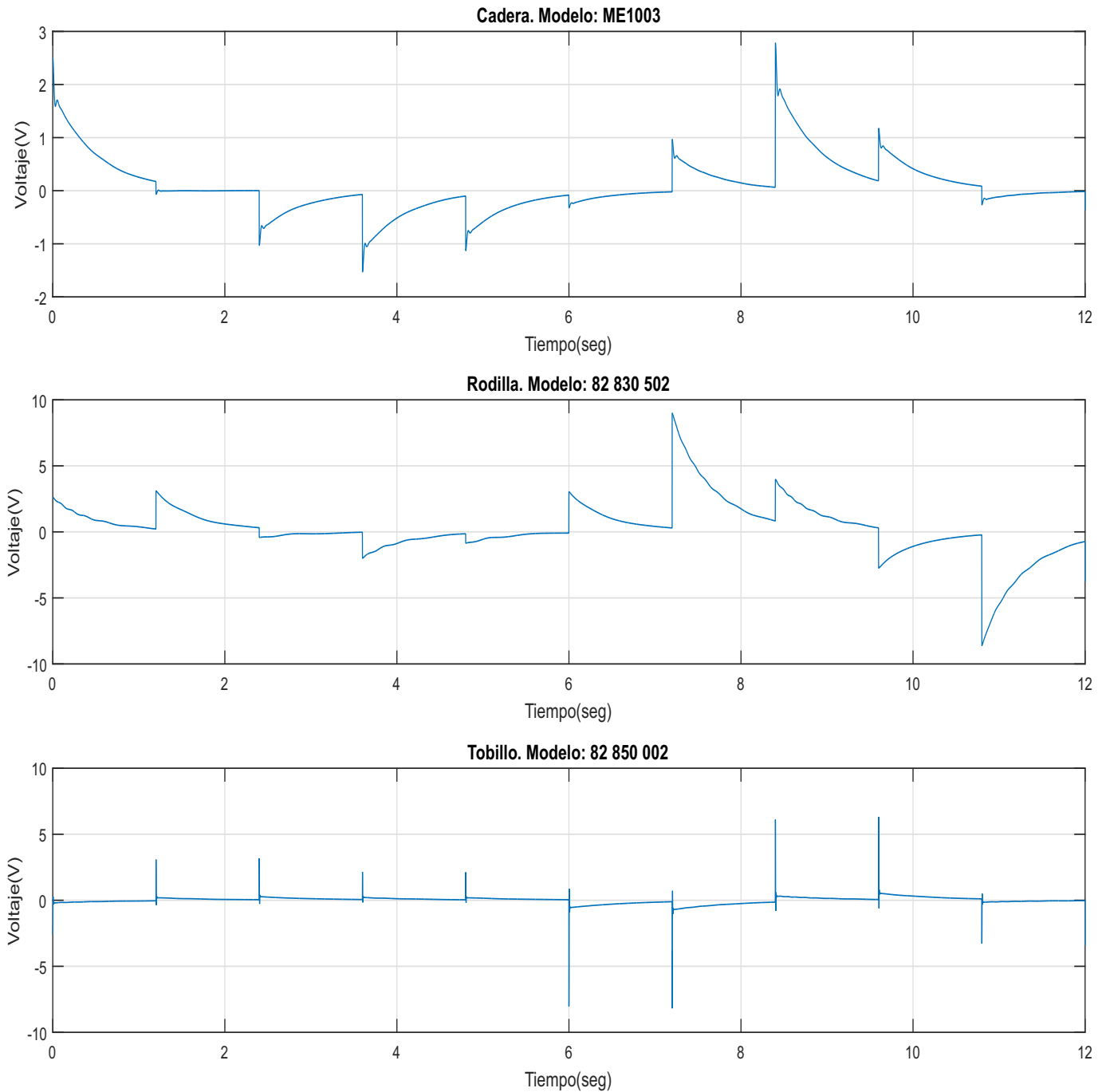


Figura 5.40: Voltaje en los motores DC del robot, Pierna Derecha.

Gráficas de los voltajes en los motores DC del robot:

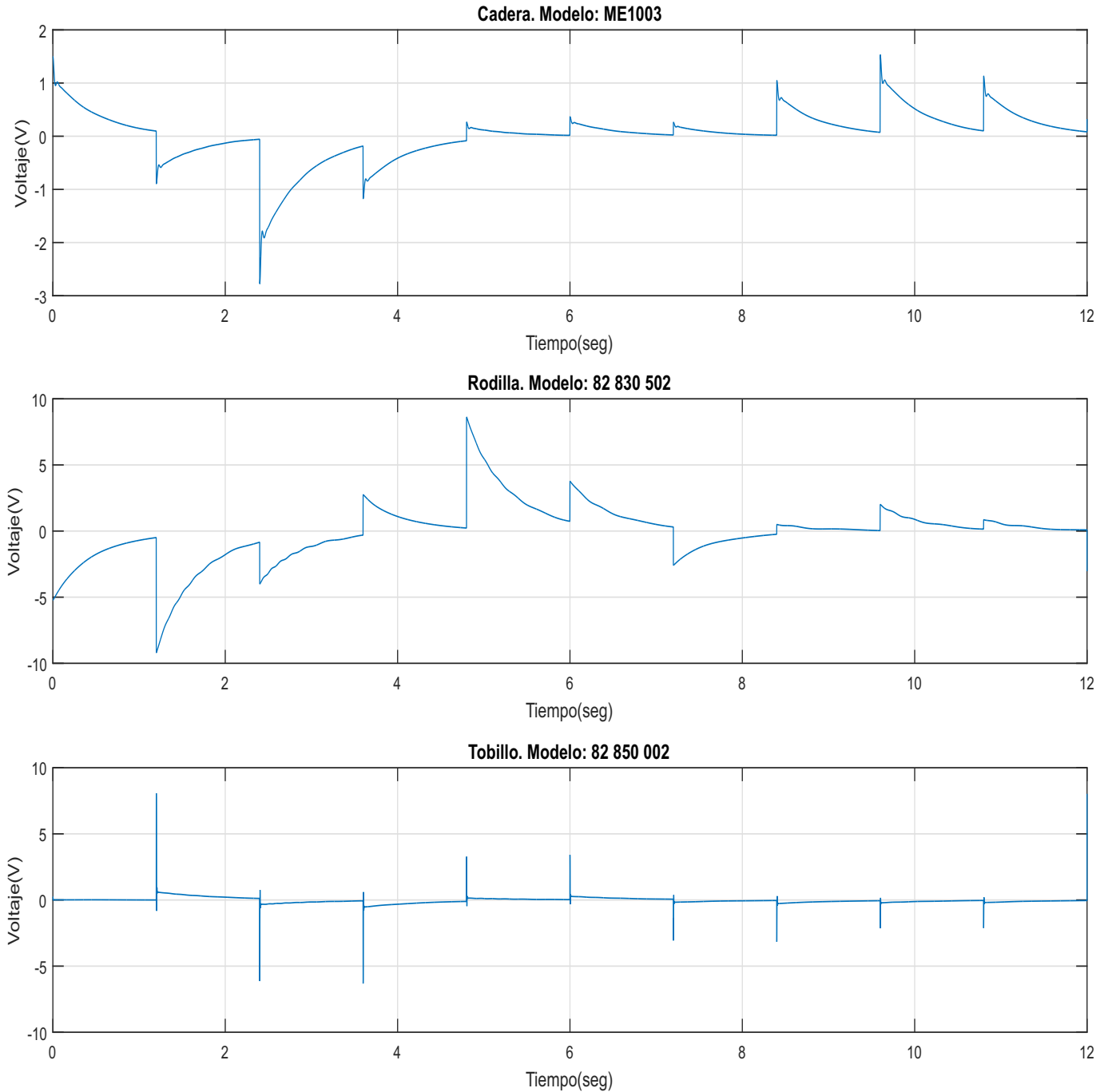


Figura 5.41: Voltaje en los motores DC del robot, Pierna Izquierda.

Gráficas de las corrientes en los motores DC del robot:

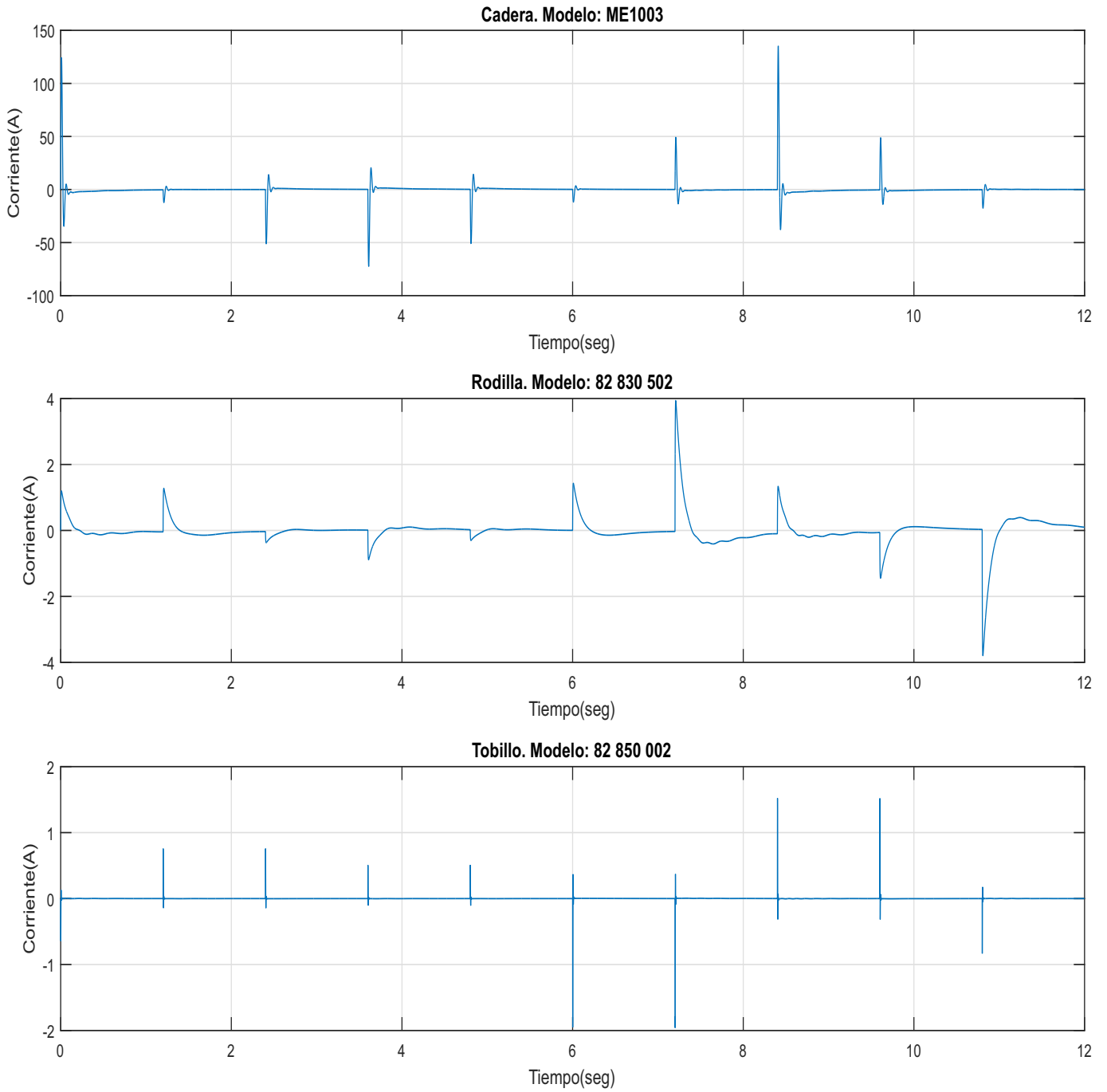


Figura 5.42: Corriente en los motores DC del robot, Pierna Derecha.

Gráficas de las corrientes en los motores DC del robot:

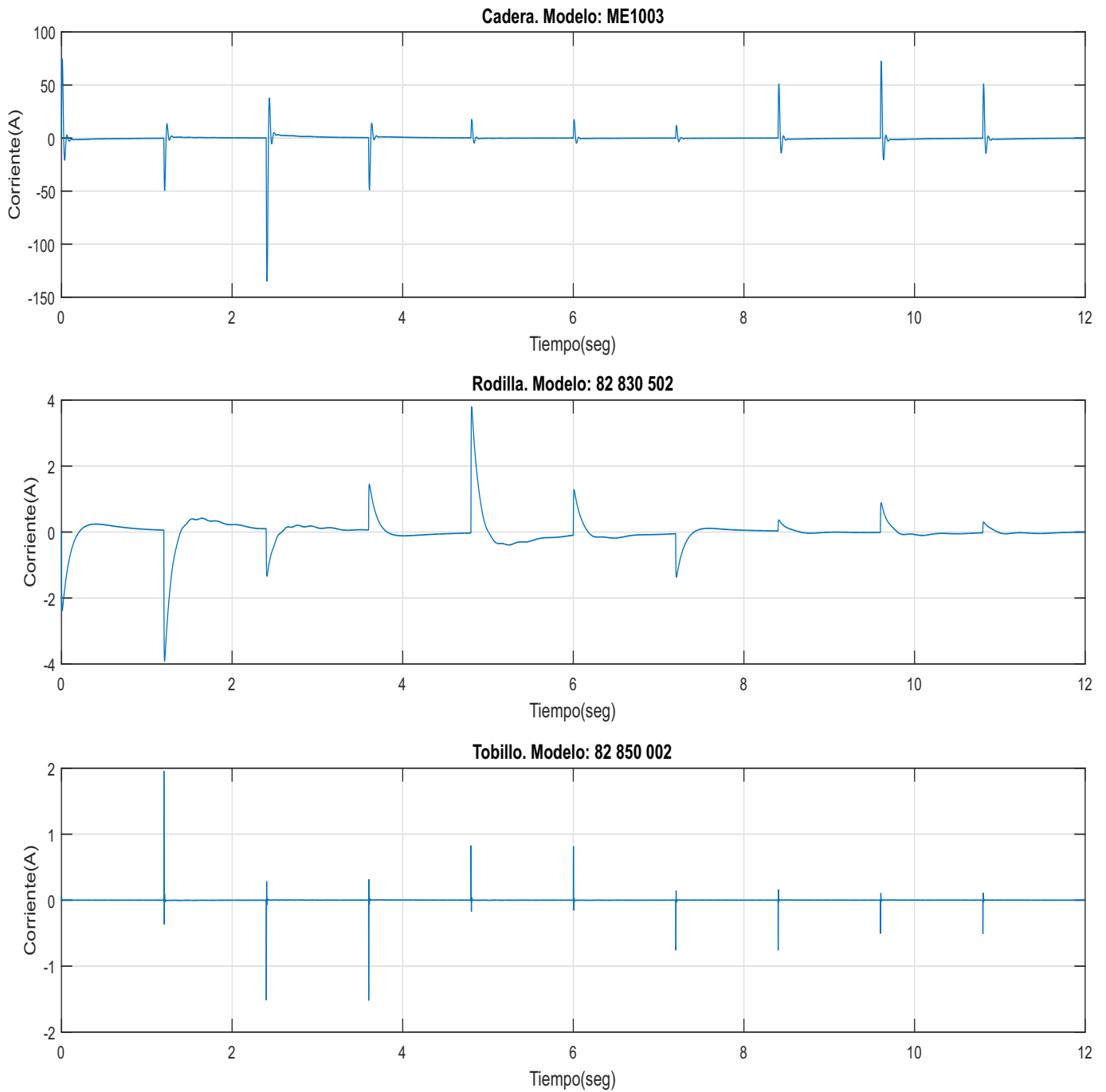


Figura 5.43: Corriente en los motores DC del robot, Pierna Izquierda.

Gráficas de potencia eléctrica en los motores DC del robot:

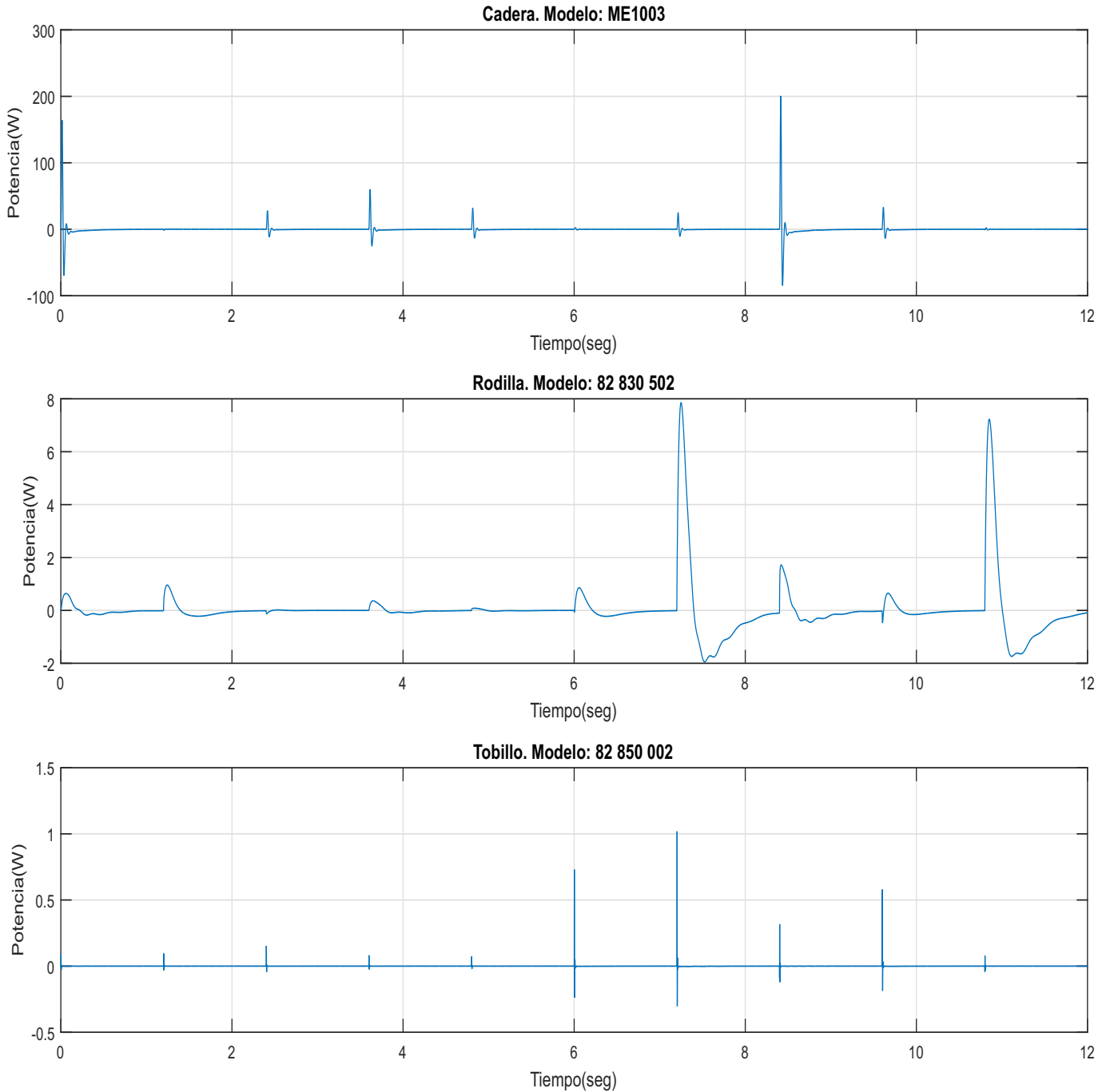


Figura 5.44: Potencia eléctrica en los motores DC del robot, Pierna Derecha.

Gráficas de potencia eléctrica en los motores DC del robot:

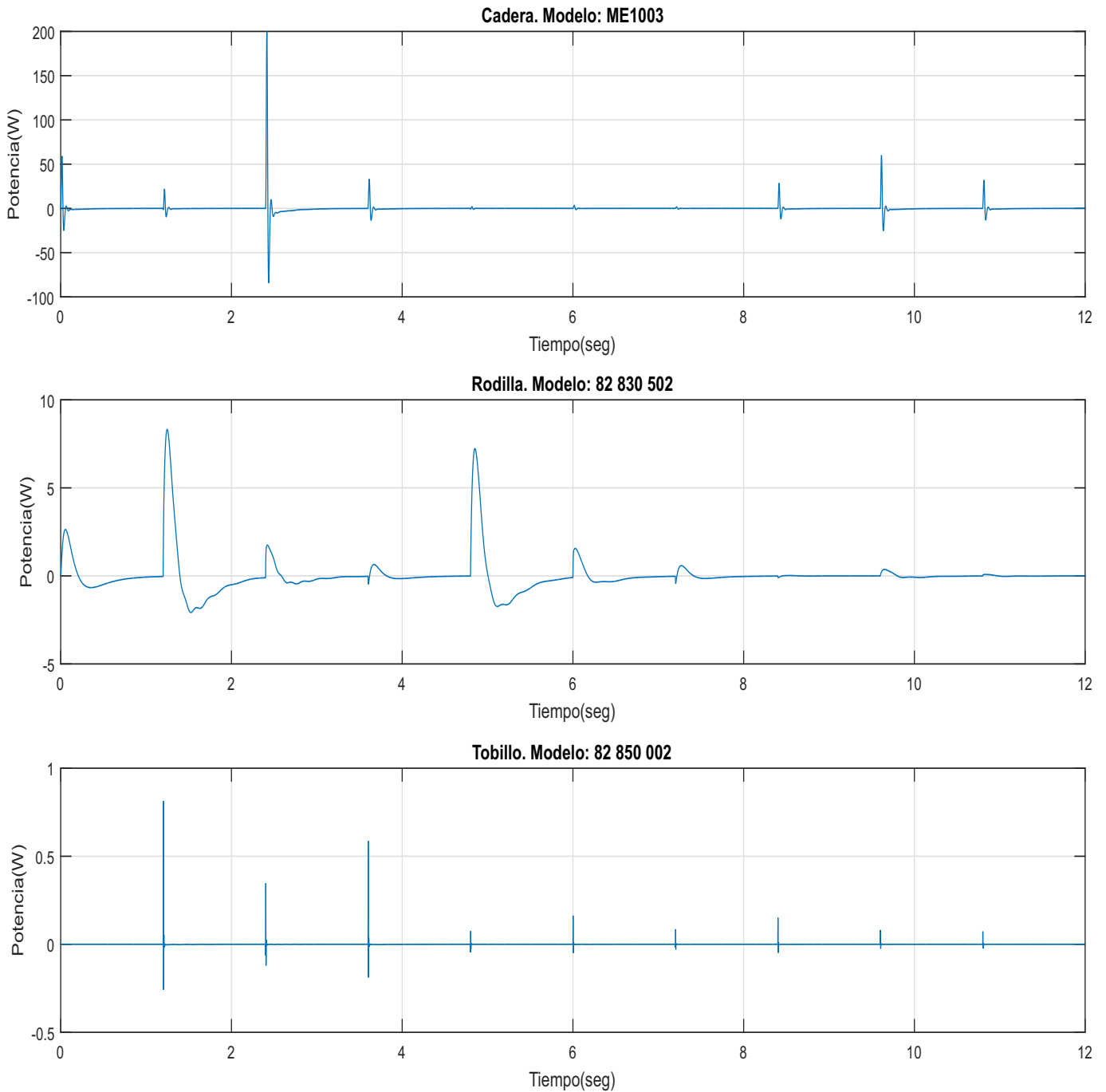


Figura 5.45: Potencia eléctrica en los motores DC del robot, Pierna Izquierda.

Gráficas de potencia mecánica en los motores DC del robot:

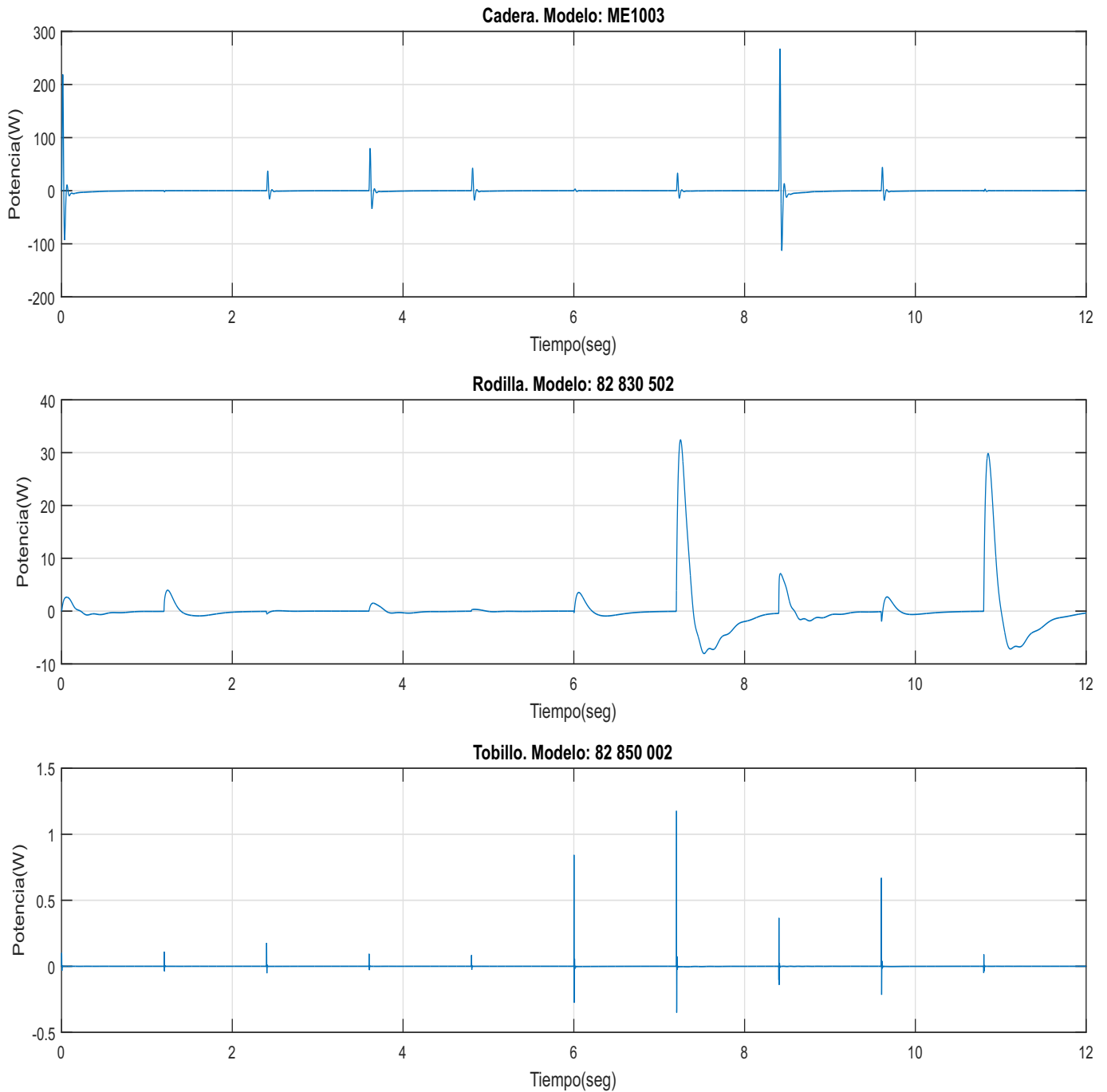


Figura 5.46: Potencia mecánica en los motores DC del robot, Pierna Derecha.

Gráficas de potencia mecánica en los motores DC del robot:

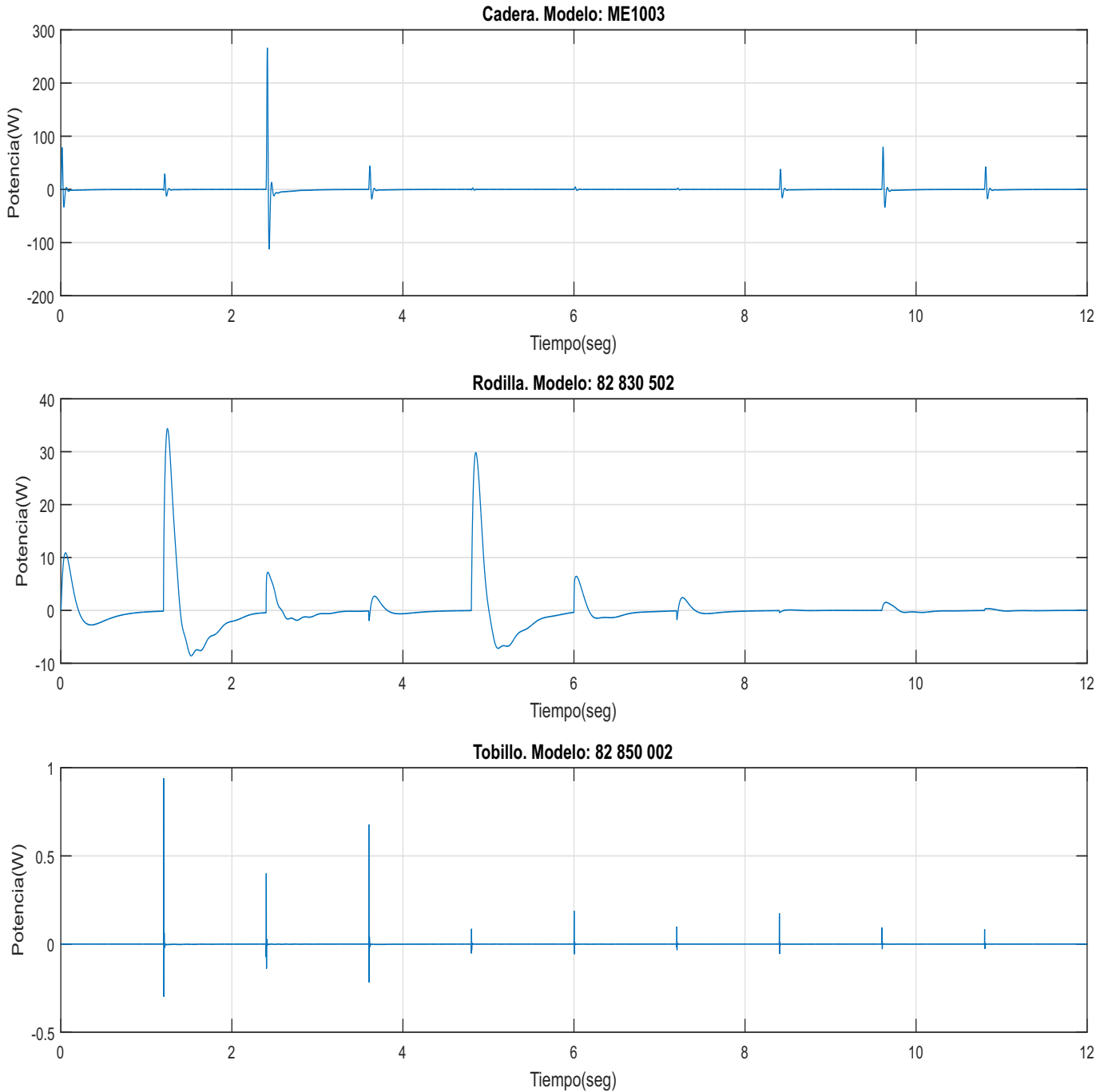


Figura 5.47: Potencia mecánica en los motores DC del robot, Pierna Izquierda.

Los patrones de posición de los tobillos y las rodillas en el plano sagital para **SPD** y **SPI** son las que se observan en las Figuras (5.54) y (5.55). En la Figura (5.54), se observa los patrones de posición de las articulaciones de la cadera (punto en $(0, 0)$), rodillas (líneas rojas) y tobillos (líneas azules) para ambas piernas, **SPD** (sub-sistema de la pierna derecha) y **SPI** (sub-sistema de la pierna izquierda), derecha e izquierda respectivamente. En la Figura (5.55) se observa únicamente los patrones de posición de los tobillos para **SPD** (arriba) y **SPI** (abajo), en los patrones se puede observar la ubicación aproximada de los periodos o puntos clave de la marcha (A, BC, D, E, F y G) que fueron descritas previamente, también se observa la división del patrones por cada 10 % de ciclo que avanza la marcha.

En la Figura (5.54), se observan los patrones de posición de las articulaciones de la cadera (punto en $(0,0)$), rodilla (línea roja) y tobillo (línea azul) de ambas piernas (**SPD** y **SPI**); estas gráficas son muy similares a las obtenidas de las en el *modelo en bloques* del sistema, el patrón de posición de las rodillas en ambas piernas tienden a ser ligeramente mayores en comparación a las de la gráficas de la Figura (5.34); en el caso de los tobillos, Figuras (5.54) y (5.55), debido a los sobresaltos observados en las posiciones de salida por el comportamiento de los torques generados por los controladores, también se observan estos sobresaltos en los patrones de posiciones en un plano xy (o sagital), además las dimensiones de largo y ancho de este patrón son muy próximas a los del *modelo en bloques*, Figura (5.35).

Para finalizar esta sección de resultados, se muestran gráficas de los errores de posiciones de las articulaciones para cada sub-sistema **SPD** y **SPI** obtenidas por el *modelo en bloques* (líneas rojas) y el *modelo por ecuaciones* (líneas azules), Figuras (5.56) y (5.57). Estas gráficas nos muestran el desempeño de un modelo con respecto al otro, así como se observe la comparativa entre estos dos modelos en el control de posición, en el caso de control de movimiento también podemos observar que en el *modelo en bloques* las curvas de los errores suele ser con mayor curvatura y toma mayor tiempo en disminuir la diferencia entre la posición de salida con la deseada. En el caso del *modelo por ecuaciones* se tiene una respuesta curva pero la posición de salida para alcanzar la posición deseada toma menor tiempo con respecto al *modelo en bloques*, así como la existencia de pequeños sobresaltos debido a los torques calculados por sus respectivos controladores en cada modelo.

Posiciones de salida de las articulaciones de cada pierna:

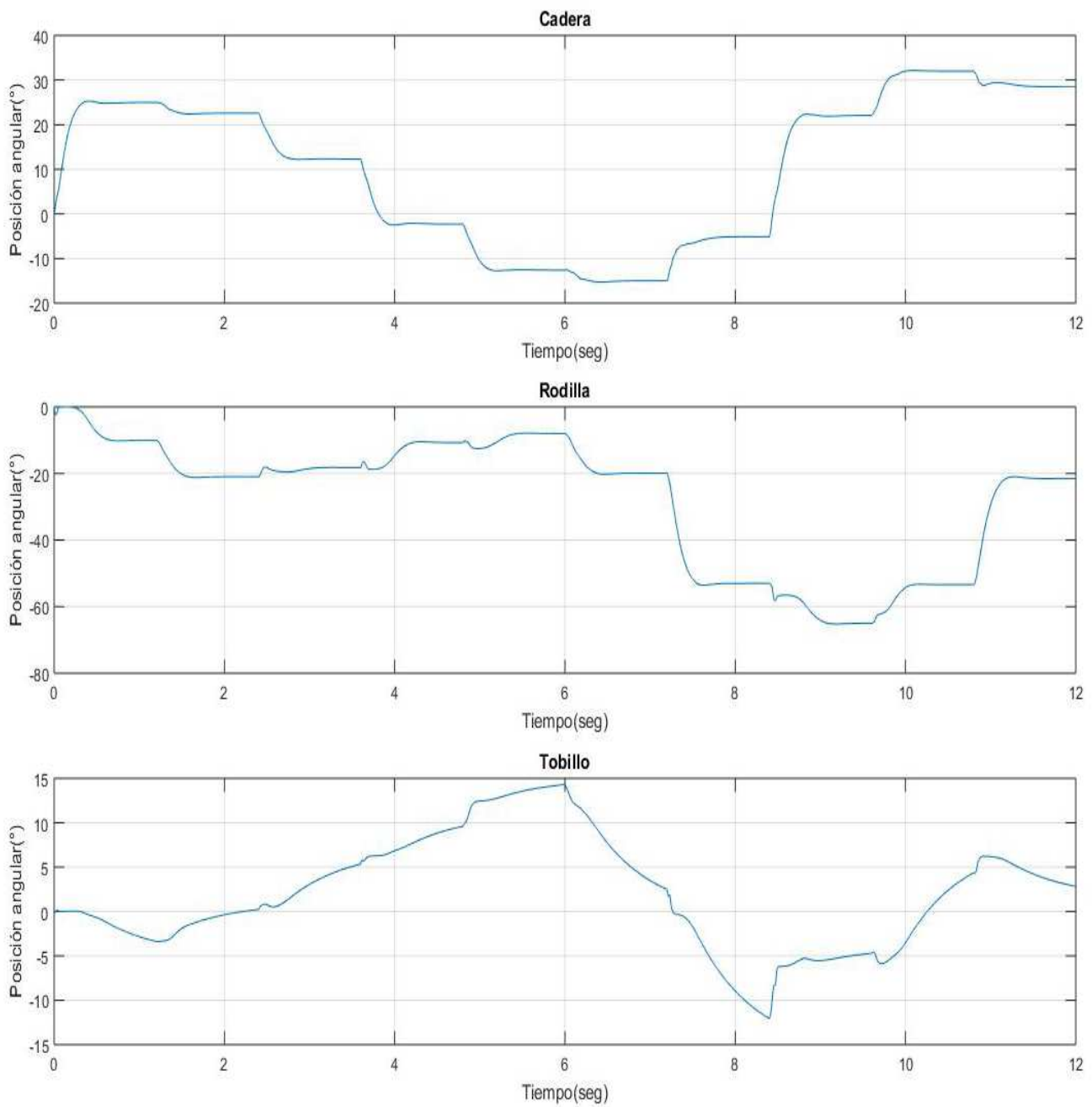


Figura 5.48: Posiciones de salida, Pierna Derecha.

Posiciones de salida de las articulaciones de cada pierna:

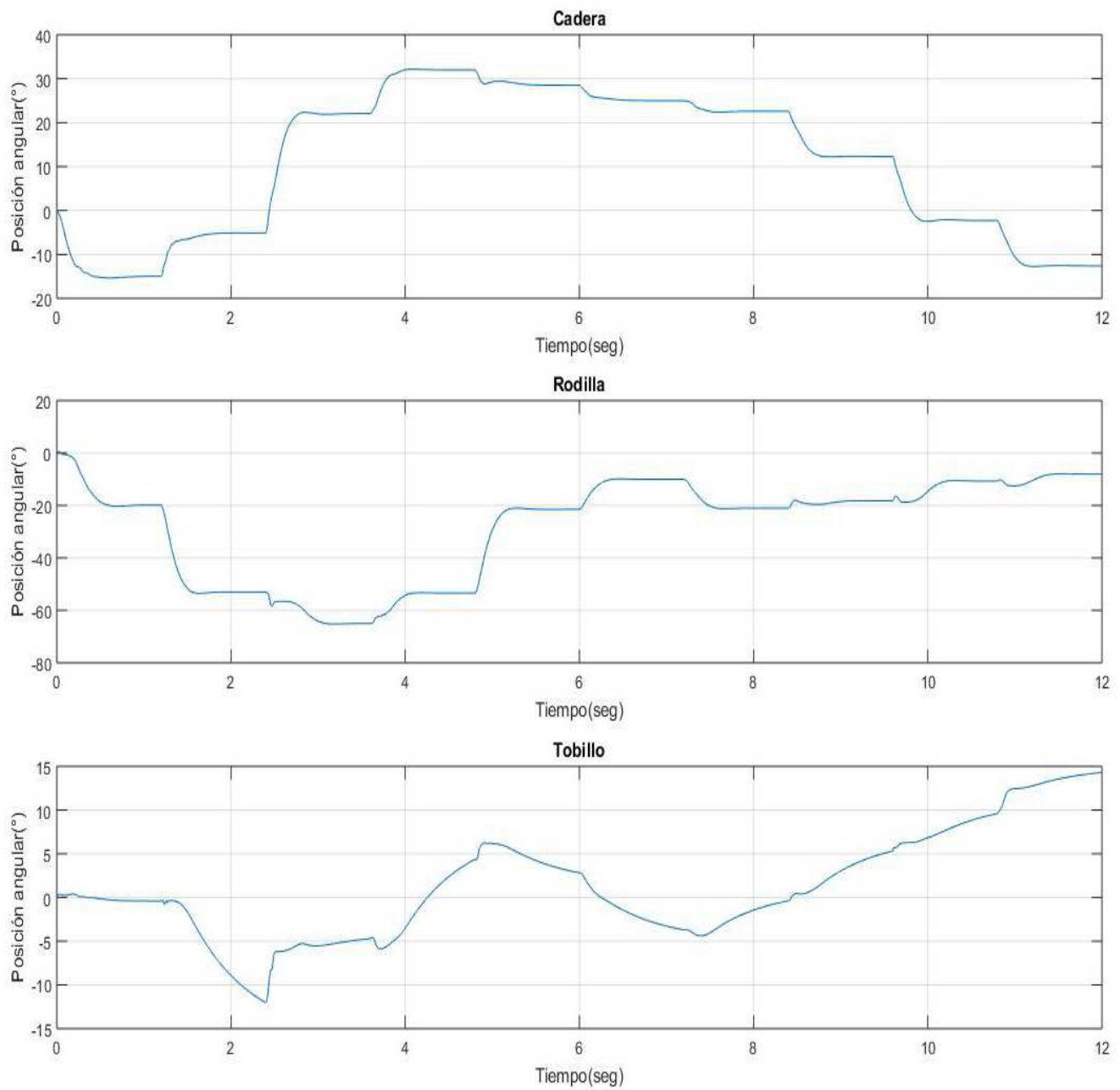


Figura 5.49: Posiciones de salida, Pierna Izquierda.

Error de posición de las articulaciones:

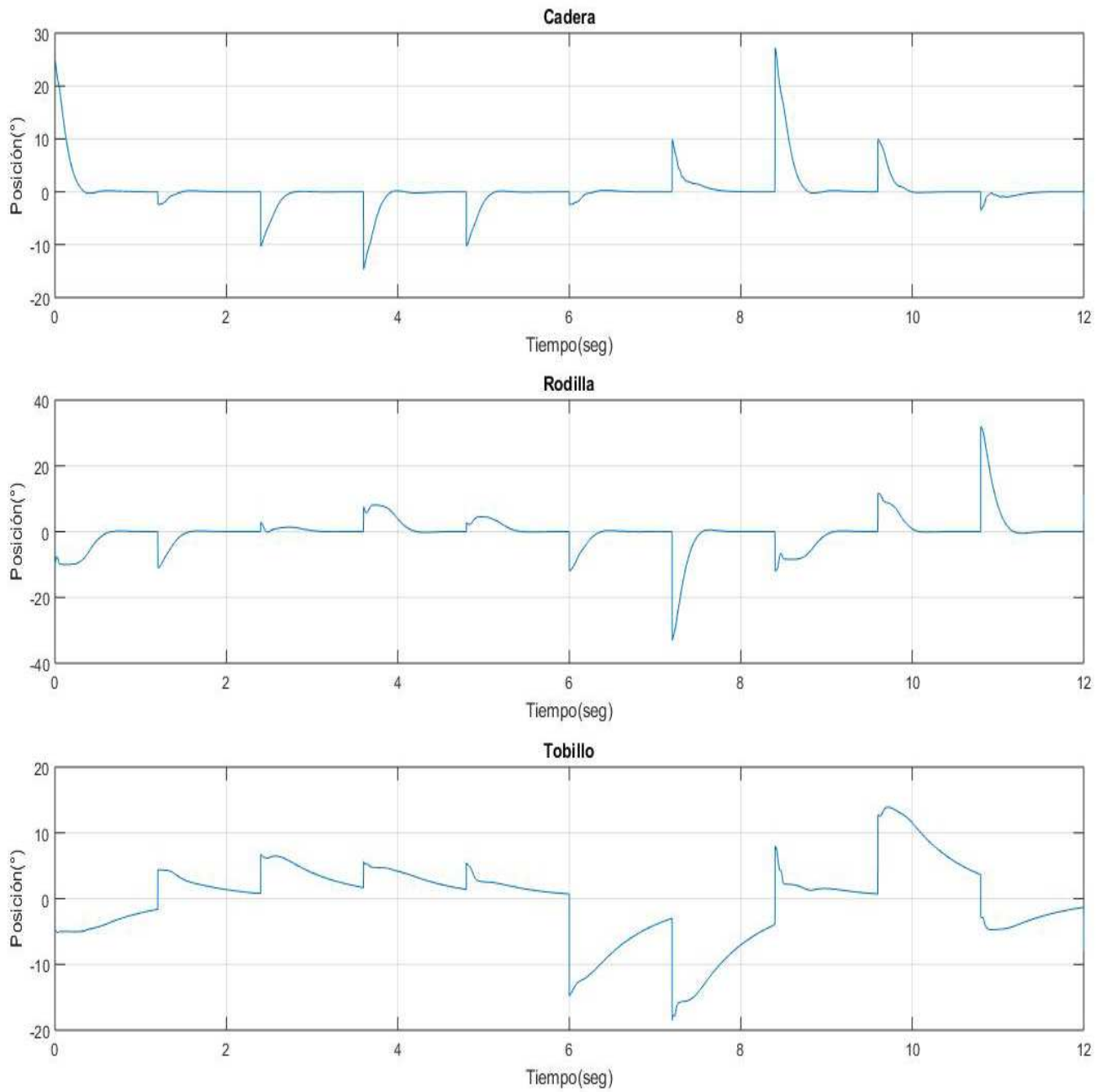


Figura 5.50: Errores de posición, Pierna Derecha.

Error de posición de las articulaciones:

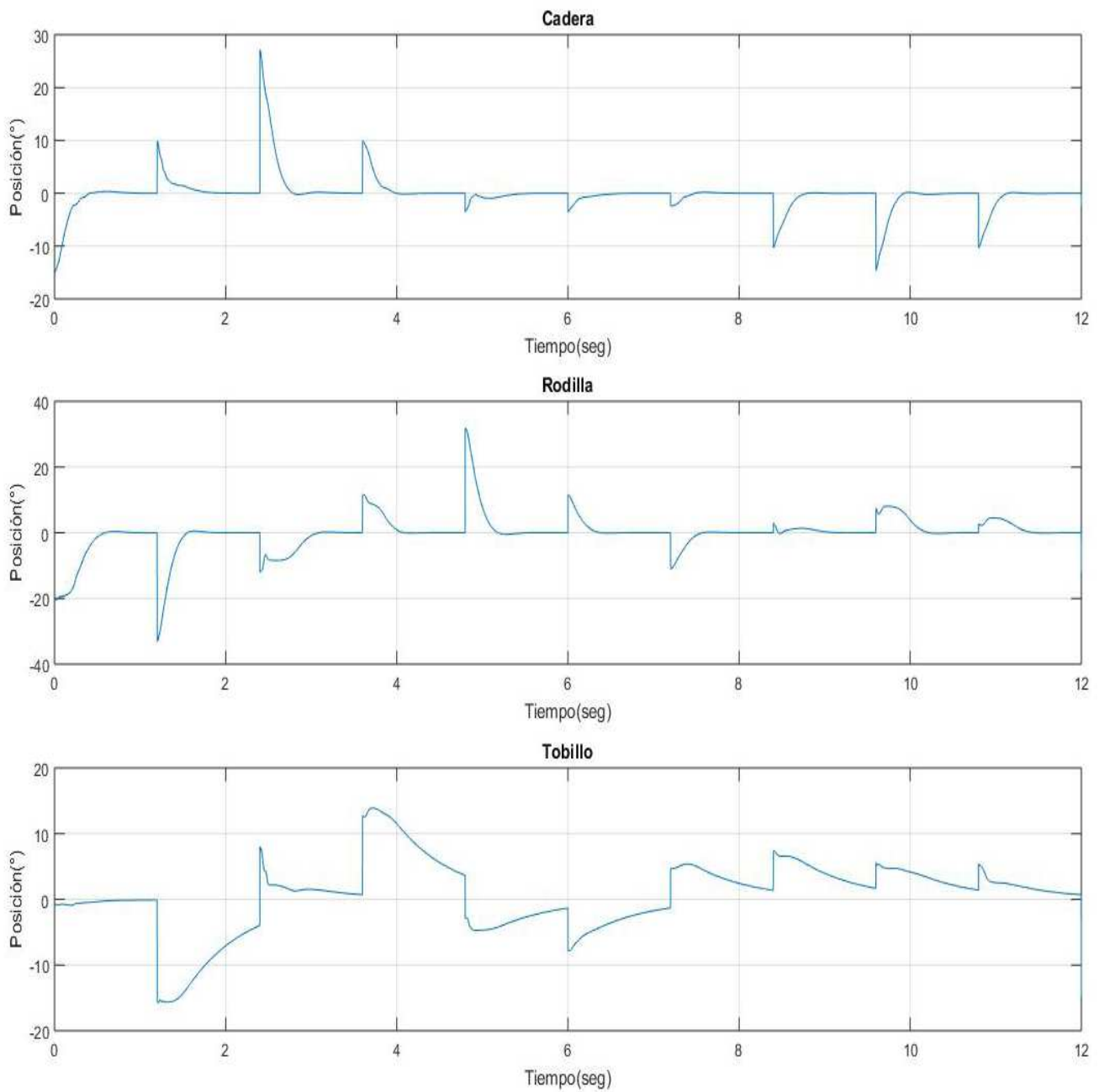


Figura 5.51: Errores de posición, Pierna Izquierda.

Torque de los controladores:

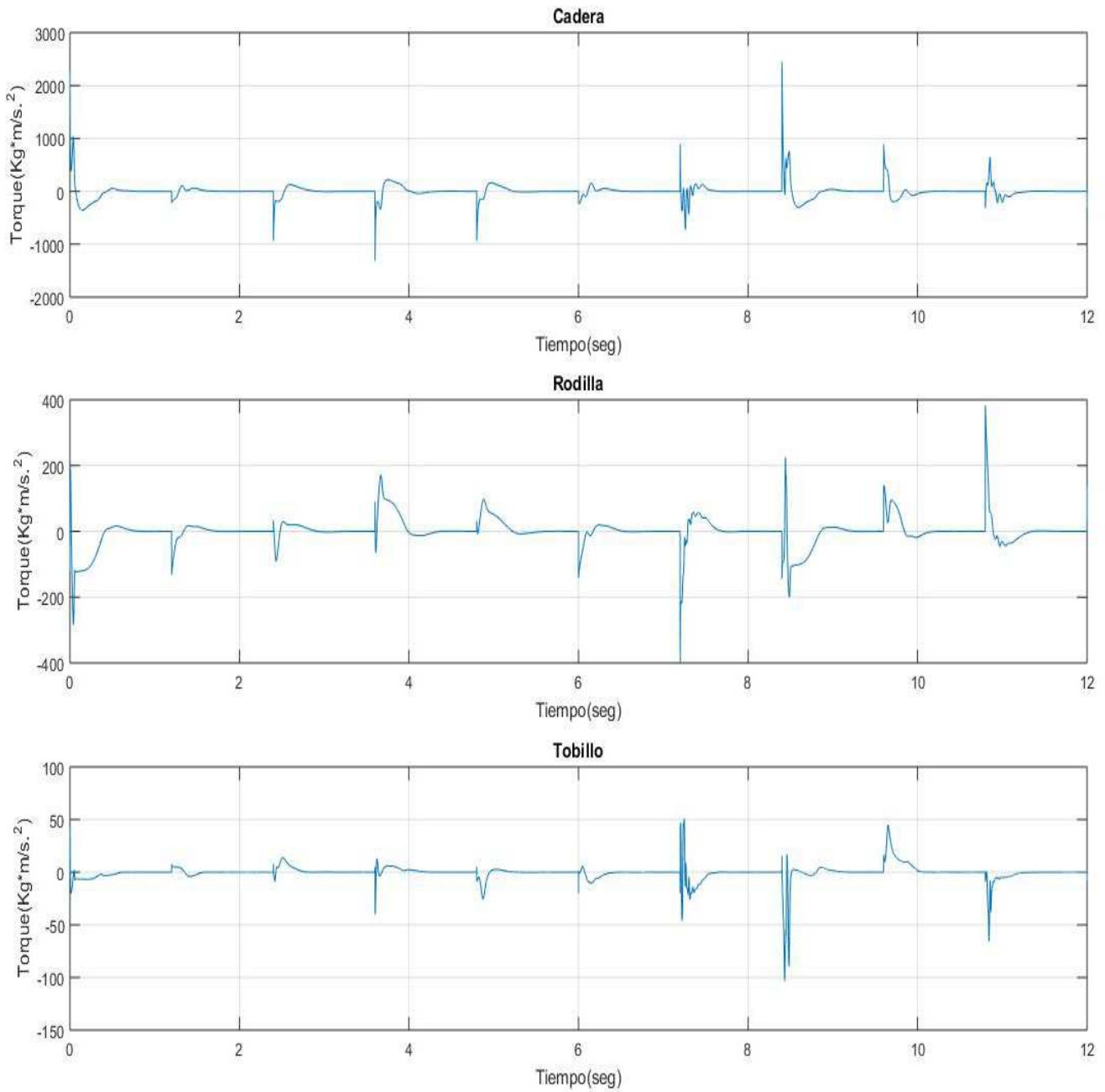


Figura 5.52: Torques en las articulaciones, Pierna Derecha.

Torque de los controladores:

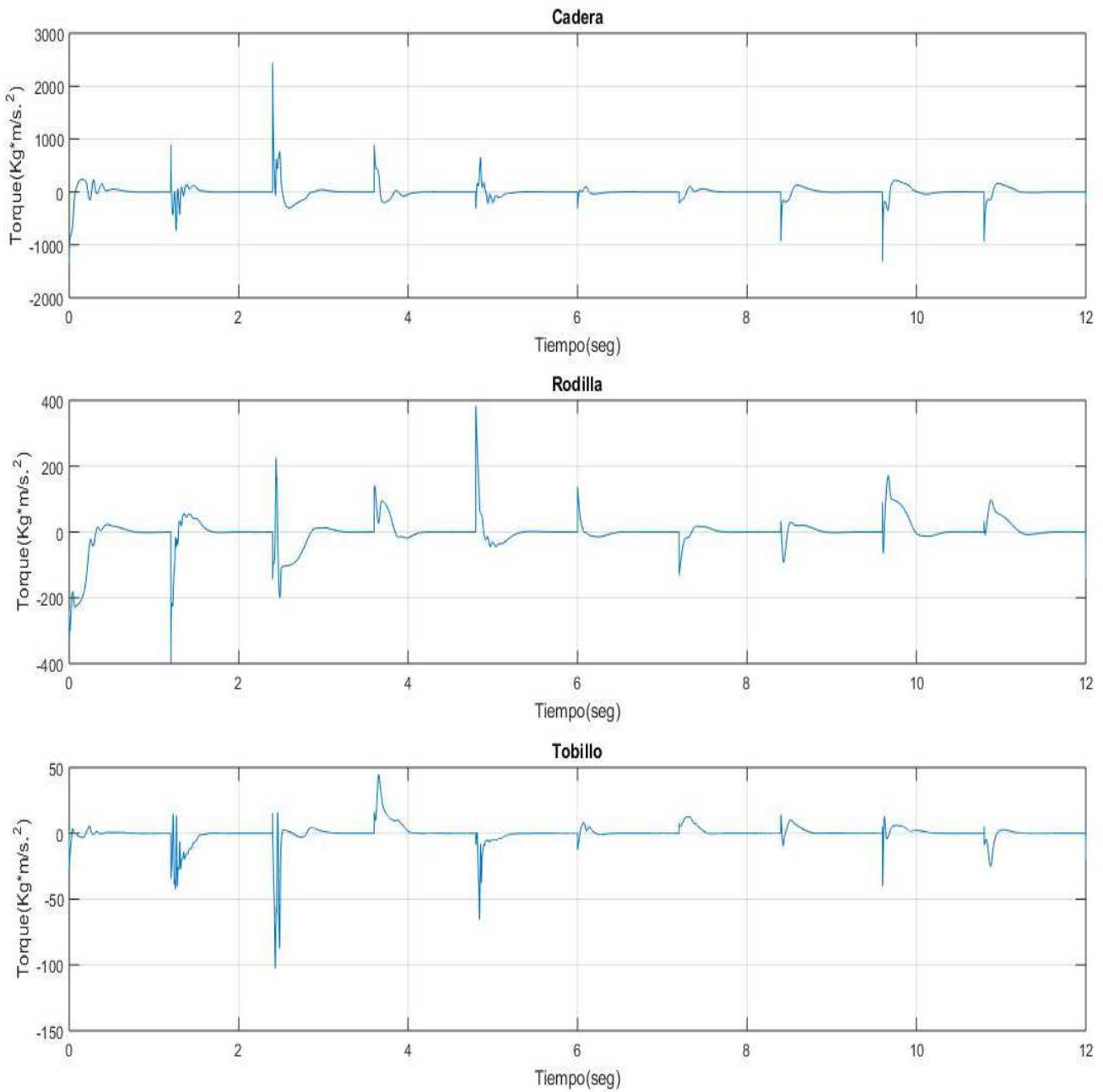


Figura 5.53: Torques en las articulaciones, Pierna Izquierda.

Patrones en xy de las articulaciones, SPD y SPI

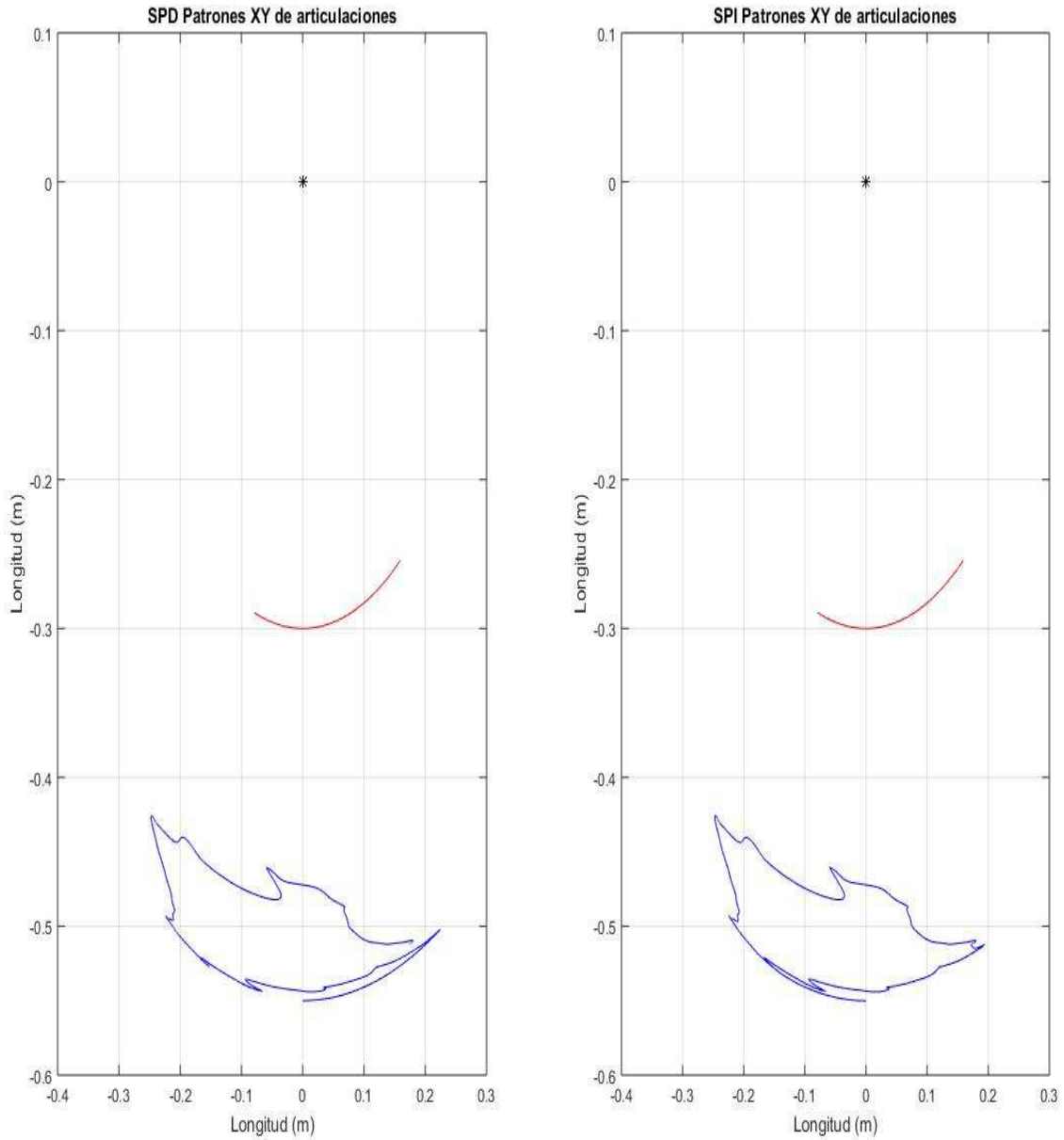


Figura 5.54: Patrones en xy de las articulaciones, SPD y SPI.

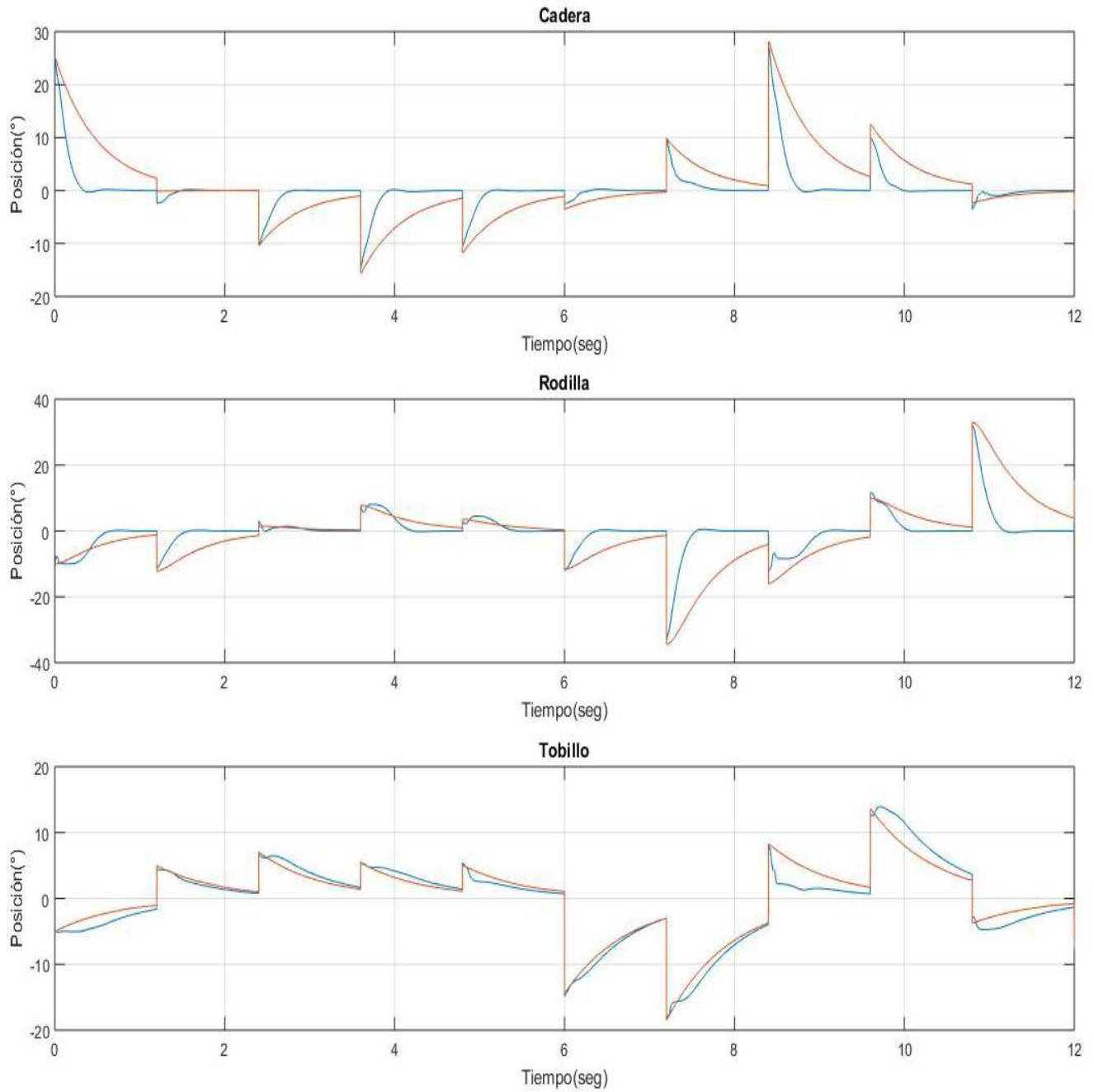


Figura 5.56: Comparativa de errores de posición entre modelos, en SPD y SPI.

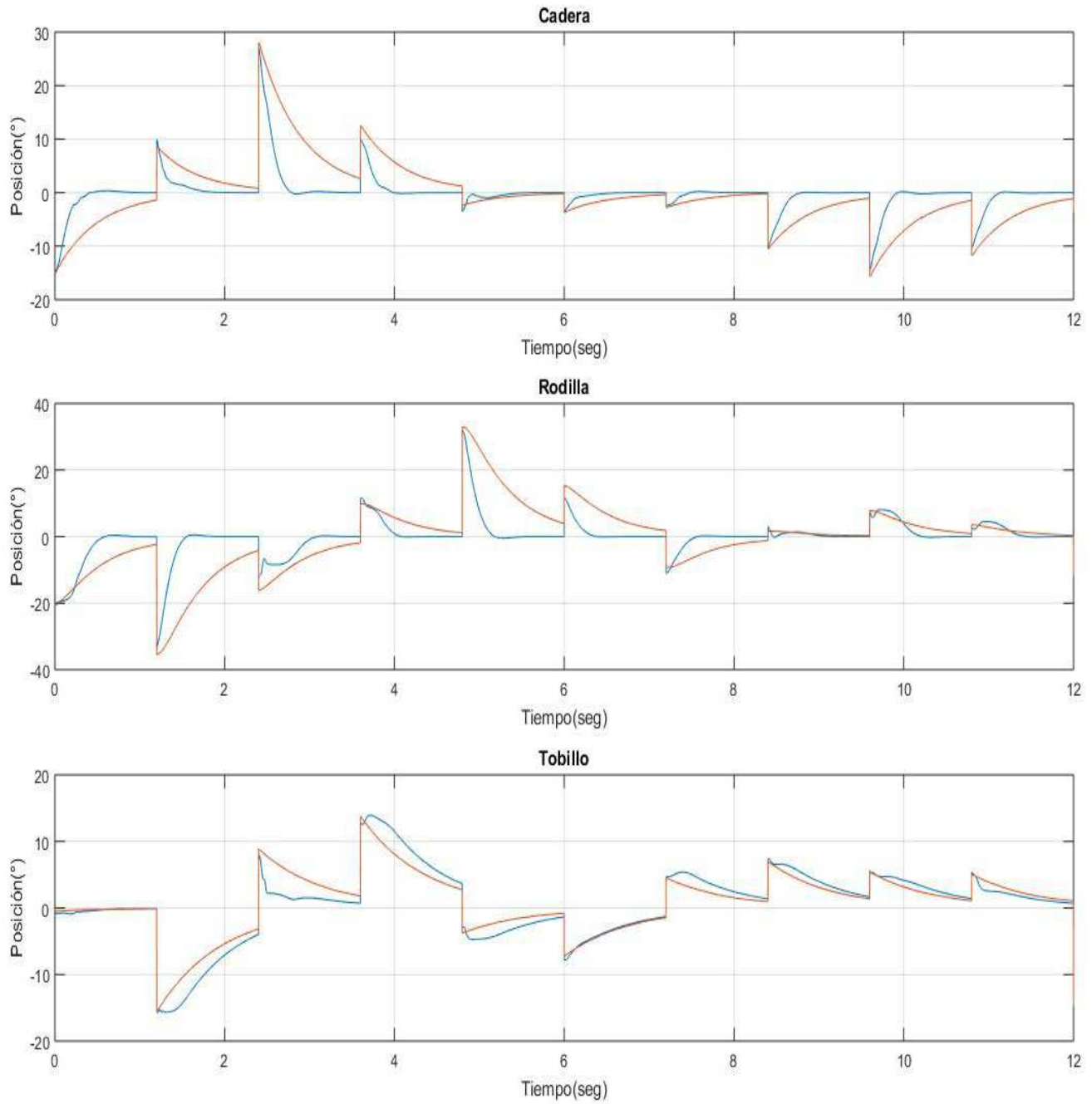


Figura 5.57: Comparativa de errores de posición entre modelos, en SPD y SPI.

Conclusiones

Los conceptos de robótica con un alto grado de dominio y trayectoria de sus aplicaciones que logran ser acoplados para su uso en el desarrollo de tecnología y herramientas de investigación en la área de la salud, históricamente ha demostrado ser un campo de conocimientos con un futuro prometedor y con una alta demanda para la generación de conocimientos de ingeniería orientados a la solución de problemas médicos.

De acuerdo al planteamiento y objetivo, se cumple con la simulación de los movimientos de las articulaciones de la cadera, rodilla y tobillo en el plano sagital durante la marcha humana con una aproximación significativa. La simulación de este sistema orientado a la recreación de movimientos específicos ayudo a comprender conceptos de robótica y de control, así como una breve introducción de la biomecánica humana y la importancia de la aplicación de la ingeniería en los campos de la salud. La implementación de la solución de la tesis desde una perspectiva de robótica de manipuladores con una ley de control con solidas bases teóricas de estabilidad en sistemas rígidos aseguro obtener el movimiento deseado. El uso de polinomios de quinto orden demuestra ser una técnica con una solución sencilla para el trazo de trayectorias deseadas, con una ligera desventaja de curvatura que suele existir durante el trazado, esta puede ser omitida si la exactitud en la generación de trayectoria deseada de entrada no fuera fundamental para la tarea a realizar por el robot.

Para trabajos futuros, durante el desarrollo y el análisis de la tesis, se pudo reflexionar posibles mejoras para acercar esta simulación a un modelo real y como posible base de referencia de estudio para trabajos con una temática similar. Estas mejorías podrían ser, abarcar una solucionar desde el punto de desarrollo de un diseño mecánico específico y análisis de materiales para el desarrollo de un prototipo físico viable, el análisis del sistema con la interacción con su entorno y quizás con la interacción de variables ambientales proporcionadas por el cuerpo humano, la aplicación de varios tipos de control dependiendo de las variables a controlar, y el uso de otras técnicas de generación de trayectorias deseadas si es que se quisiera generar una trayectoria de entrada exactamente al sistema original.

Entender cómo funciona un sistema robótico y la tarea a ejecutar es importante al momento de tratar de desarrollar simulaciones. Un simulador no tiene un impacto directo a la sociedad en su momento, pero puede considerarse como el inicio del camino para el desarrollo de tecnología para las futuras y quizás las actúales generaciones, por lo que se espera que este trabajo aporte ser una breve guía de desarrollo de simulación de sistemas robóticos con el uso de los software específicos mencionados durante la tesis, y como posible referencia de motivación para futuros trabajos relacionados al tema realizados por alumnos de la facultad.

Apéndice A

Preliminares matemáticos

Se presentan las herramientas matemáticas básicas que son empleadas en los capítulos anteriores con el propósito de analizar diversos esquemas de control para robots manipuladores [21].

En este texto se emplean los siguientes símbolos matemáticos de abreviación [21]:

- \forall “para todo”
- \exists “existe”
- \in “perteneciente a”
- \implies “implica”
- \iff “equivalente a” o “si y sólo si”

También se usan las siguientes abreviaciones de locuciones latinas:

- i. e. *id est* “esto es”
- e. g. *exempli gratia* “por ejemplo”

Las nociones básicas de álgebra lineal son el punto de partida en el desarrollo de una serie de herramientas que son útiles en los capítulos anteriores [21].

A.1. Notaciones y definiciones

Se presenta algunas notaciones y definiciones que son empleadas a lo largo del texto. Básicamente se resumen algunos conceptos sobre vectores y matrices [21].

El conjunto de los *números reales* se denota por el símbolo \mathbb{R} . Los números reales son expresados por letras itálicas minúsculas y ocasionalmente por letras griegas minúsculas [21].

El conjunto de los números reales no negativos \mathbb{R}_+ se define como [21]:

$$\mathbb{R}_+ = \{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha \in [0, \infty)\}$$

El valor absoluto de un número real $x \in \mathbb{R}$ se denota $|x|$ [21].

A.1.1. Vectores

Se denotará por \mathbb{R}^n el espacio euclidiano real de dimensión n , es decir, el conjunto de todos los vectores x de dimensión n formados por n -adas de números reales en forma de columna [21]:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n]^T,$$

donde $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ son las coordenadas o los elementos componentes del vector x y el superíndice T denota transposición. Los vectores son denotados mediante letras minúsculas en negrita tanto itálicas como griegas [21].

Producto de vectores

El *producto interno* de dos vectores $x, y \in \mathbb{R}^n$ es definido como [21]:

$$x^T y = \sum_{i=1}^n x_i y_i = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Puede verificarse fácilmente que el producto interno de vectores satisface las siguientes propiedades [21]:

- $x^T y = y^T x$, para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$.
- $x^T (y + z) = x^T y + x^T z$, para todo $x, y, z \in \mathbb{R}^n$.

Norma Euclidiana

La *norma euclidiana* $\|x\|$ de un vector $x \in \mathbb{R}^n$ se define como [21]:

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \sqrt{x^T x},$$

donde sólo se considera la parte positiva de la raíz cuadrada. Es inmediato comprobar que la norma euclidiana satisface las siguientes propiedades [21]:

- $\|x\| = 0$ si y sólo si $x = 0 \in \mathbb{R}^n$.
- $\|x\| > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ con $x \neq 0 \in \mathbb{R}^n$
- $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ y $x \in \mathbb{R}^n$
- $\|x\| - \|y\| \leq \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$.
- $|x^T y| \leq \|x\| \|y\|$, para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ (desigualdad de Schwarz).

A.1.2. Matrices

Se denotará por $\mathbb{R}^{n \times m}$ al conjunto de *matrices* A de dimensión $n \times m$ formadas por arreglos de números reales ordenados por n renglones y m columnas [21]:

$$A = \{a_{ij}\} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}.$$

Un vector $x \in \mathbb{R}^n$ puede ser interpretado como una matriz particular perteneciente a $\mathbb{R}^{n \times 1} = \mathbb{R}^n$. Las matrices son denotadas mediante letras itálicas mayúsculas y ocasionalmente por letras griegas mayúsculas [21].

La matriz transpuesta $A^T = \{a_{ji}\} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ se obtiene intercambiando los renglones y las columnas de $A = \{a_{ij}\} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ [21].

Producto de matrices

Considérense las matrices $A \in \mathbb{R}^{m \times p}$ y $B \in \mathbb{R}^{p \times n}$. El producto de las matrices A y B denotado por $C = AB \in \mathbb{R}^{m \times n}$ se define como [21]:

$$\begin{aligned} C = \{c_{ij}\} &= AB \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pn} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^p a_{1k}b_{k1} & \sum_{k=1}^p a_{1k}b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^p a_{1k}b_{kn} \\ \sum_{k=1}^p a_{2k}b_{k1} & \sum_{k=1}^p a_{2k}b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^p a_{2k}b_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^p a_{mk}b_{k1} & \sum_{k=1}^p a_{mk}b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^p a_{mk}b_{kn} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Puede verificarse fácilmente que el producto de matrices satisface las siguientes propiedades [21]:

- $(AB)^T = B^T A^T$, para toda $A \in \mathbb{R}^{m \times p}$ y $B \in \mathbb{R}^{p \times n}$.
- $AB \neq BA$, en general.
- $A(B + C) = AB + AC$, para toda $A \in \mathbb{R}^{m \times p}$, $B \in \mathbb{R}^{p \times n}$ y $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$.
- $ABC = A(BC) = (AB)C$, para toda $A \in \mathbb{R}^{m \times p}$, $B \in \mathbb{R}^{p \times n}$ y $C \in \mathbb{R}^{n \times r}$.

De acuerdo con la definición de producto de matrices, la expresión $x^T Ay$ donde $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ y $y \in \mathbb{R}^m$ viene dada por [21]:

$$\begin{aligned} x^T Ay &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} x_i y_j \end{aligned}$$

Matrices particulares

Una matriz A es *cuadrada* si $n = m$. Una matriz cuadrada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es *simétrica* si ésta es igual a su transpuesta, esto es, si $A = A^T$, mientras que es *antisimétrica* si $A = -A^T$ [21].

Una propiedad de las matrices antisimétricas $A = -A^T$ es [21]:

$$x^T Ax = 0, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^n.$$

Una matriz cuadrada $A = \{a_{ij}\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es *diagonal* si $a_{ij} = 0$ para todo $i \neq j$. Se denotará por $\text{diag}\{a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a una matriz diagonal, i.e. [21]:

$$\text{diag}\{a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}\} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Consecuentemente cualquier matriz diagonal es también una matriz simétrica. En el caso particular donde $a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn} = a$, la matriz diagonal correspondiente se denotará por $\text{diag}\{a\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dos matrices diagonales de particular utilidad son las siguientes. La matriz *identidad* de dimensión n se define como [21]:

$$I = \text{diag}\{1\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

La matriz *nula* de dimensión n se define como $0 = \text{diag}\{0\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ [21].

Una matriz cuadrada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es *singular* si su determinante es nulo, i.e., si $\det[A] = 0$, en caso contrario es *no singular*. Una característica de una matriz singular es que ésta no tiene inversa [21].

Una matriz cuadrada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, sin ser necesariamente simétrica, es *definida positiva*¹⁰ si [21]:

$$x^T A x > 0, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^n, \text{ con } x \neq 0 \in \mathbb{R}^n.$$

La definición de matriz definida positiva recién establecida no requiere que ésta sea simétrica. Es necesario resaltar que normalmente la mayoría de los textos presentan dicha definición sólo para matrices simétricas. No obstante, para los fines de este texto, la definición dada como tal resulta suficiente [21].

Se emplea la notación $A > 0$ para indicar que la matriz A es definida positiva¹¹. Cualquier matriz simétrica y definida positiva $A = A^T > 0$ es no singular; por tanto su inversa A^{-1} existe. Más aún, $A = A^T > 0$ si y sólo si $A^{-1} = (A^{-1})^T > 0$ [21].

Puede demostrarse que la suma de dos matrices definidas positivas también resulta en una matriz definida positiva. El producto de matrices simétricas definidas positivas $A = A^T > 0$ y $B = B^T > 0$, no resulta en general simétrico ni tampoco definido positivo, sin embargo, la matriz resultante es no singular [21].

Una matriz cuadrada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, no necesariamente simétrica, es *semidefinida positiva* si [21]:

$$x^T A x \geq 0, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^n.$$

Se emplea la notación $A \geq 0$ para indicar que la matriz A es semidifinida positiva [21].

Una matriz cuadrada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es *definida negativa* si $-A$ es definida positiva mientras que es *semidefinida negativa* si $-A$ es semidefinida positiva [21].

Valores propios

Para cada matriz cuadrada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ existe n valores propios (números complejos en general) denotados por $\lambda_1 \{A\}, \lambda_2 \{A\}, \dots, \lambda_n \{A\}$. Los valores propios de la matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ satisfacen [21]:

$$\det [\lambda_i \{A\} I - A] = 0, \text{ para } i = 1, 2, \dots, n$$

donde $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz identidad de dimensión n [21].

¹⁰Sea P una matriz cuadrada de dimensión n . Defínase:

$$A = \{a_{ij}\} = \frac{P + P^T}{2}.$$

El teorema de Sylvester establece lo siguiente. La matriz P es definida positiva si y sólo si:

$$\det [a_{11}] > 0, \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} > 0, \dots, \det [A] > 0.$$

¹¹Es importante subrayar que $A > 0$ significa que la matriz A es definida positiva y no debe interpretarse como “ A mayor que 0 ”, siendo esto último carente de sentido.

Para el caso de una matriz simétrica $A = A^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, sus valores propios son tales que [21]:

- $\lambda_1 \{A\}, \lambda_2 \{A\}, \dots, \lambda_n \{A\}$ son números reales.
- Denotando los valores propios máximo y mínimo de A por $\lambda_{\text{Max}} \{A\}$ y $\lambda_{\text{min}} \{A\}$ respectivamente, el teorema de Rayleigh-Ritz establece que para todo $x \in \mathbb{R}^n$ se tiene:

$$\lambda_{\text{Max}} \{A\} \|x\|^2 \geq x^T A x \geq \lambda_{\text{min}} \{A\} \|x\|^2.$$

Una matriz cuadrada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es definida positiva si y sólo si los valores propios de $A + A^T$ son positivos, i.e., $\lambda_i \{A + A^T\} > 0$ para $i = 1, 2, \dots, n$. Más aún, una matriz simétrica $A = A^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es definida positiva si y sólo si $\lambda_i \{A\} > 0$ para $i = 1, 2, \dots, n$ [21].

Norma espectral

La *norma espectral* $\|A\|$ de una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ se define como¹² [21]:

$$\|A\| = \sqrt{\lambda_{\text{Max}} \{A^T A\}},$$

donde $\lambda_{\text{Max}} \{A^T A\}$ denota el valor propio máximo de la matriz simétrica $A^T A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ [21].

En el caso particular de matrices simétricas $A = A^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, se tiene que [21]:

- $\|A\| = \max_i |\lambda_i \{A\}|$.
- $\|A^{-1}\| = \frac{1}{\min_i |\lambda_i \{A\}|}$.

En las expresiones anteriores el valor absoluto resulta redundante si A es simétrica y definida positiva: $A = A^T > 0$ [21].

La norma espectral satisface las siguientes propiedades [21]:

- $\|A\| = 0$ si y sólo si $A = 0 \in \mathbb{R}^{n \times m}$.
- $\|A\| > 0$, para todo $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ con $A \neq 0 \in \mathbb{R}^{n \times m}$.
- $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$, para todo $A, B \in \mathbb{R}^{n \times m}$.
- $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ y $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$.
- $\|A^T B\| \leq \|A\| \|B\|$, para todo $A, B \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

¹²Es importante notar que el símbolo para la norma euclidiana de un vector y la norma espectral de una matriz es el mismo. El lector deberá ser cuidadoso para no confundirlas. La distinción entre ellas viene dada exclusivamente por su argumento, i.e., un vector o una matriz.

Un resultado importante es el siguiente. Considérese la matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ y el vector $x \in \mathbb{R}^m$. La norma euclidiana del vector Ax satisface [21]:

$$\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|,$$

donde $\|A\|$ denota la norma espectral de la matriz A , mientras que $\|x\|$ denota la norma euclidiana del vector x . Aún más, siendo $y \in \mathbb{R}^n$, el valor absoluto de $y^T Ax$ satisface [21]:

$$|y^T Ax| \leq \|A\| \|y\| \|x\|.$$

A.1.3. Espacios de funciones

Una clase particular de espacios vectoriales son los denominados espacios L_p^n (pronúnciese “le-pe-ene”). Los elementos o vectores de los espacios L_p^n son funciones con propiedades particulares [21].

Los espacios lineales denominados L_2^n y L_∞^n , que se definirán posteriormente, son particularmente empleados en el análisis de sistemas dinámicos interconectados en la metodología denominada: enfoque entrada-salida. Esta metodología involucra la noción de operadores, que caracterizan el comportamiento de las diversas partes del sistema dinámico interconectado [21].

A continuación se presenta una serie de conceptos y definiciones sobre espacios de funciones [21].

Una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es una *función continua* si [21]:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Una condición necesaria para que una función sea continua es que éste definida en todo punto $x \in \mathbb{R}^n$. También se deduce que no es necesario que una función continua tenga derivada en todo su dominio de definición. Tal es el caso, por ejemplo, de la función continua $f(x) = |x|$, cuya derivada con respecto a x en el punto $x = 0 \in \mathbb{R}$ no está definida. Sin embargo, si una función tiene derivada en todo punto, entonces la función es continua [21].

El *espacio* L_2^n consiste en el conjunto de todas las funciones continuas $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ tales que [21]:

$$\int_0^\infty f(t)^T f(t) dt = \int_0^\infty \|f(t)\|^2 dt < \infty.$$

Dicho de otro modo, una función f pertenece al espacio L_2^n ($f \in L_2^n$) si la integral del cuadrado de su norma euclidiana está acotada superiormente [21].

El *espacio* L_∞^n consiste en el conjunto de todas las funciones continuas $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ tales que sus normas euclidianas sean acotadas, es decir [21],

$$\sup_{t \geq 0} \|f(t)\| < \infty.$$

Los símbolos L_2 y L_∞ sirven para denotar a los espacios L_2^1 y L_∞^1 respectivamente. Una función continua f perteneciente al espacio L_2^n puede no tener un límite asintótico. A continuación, se presenta las condiciones suficientes sobre funciones pertenecientes al espacio L_2^n para que éstas tiendan asintóticamente a cero [21].

Lema 1. *Considérese una función continua $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$. Supóngase que la función f satisface las siguientes hipótesis [21]:*

- $f, \dot{f} = \frac{d}{dt}f \in L_\infty^n$.
- $f \in L_2^n$.

Entonces, necesariamente, se tiene que: $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0 \in \mathbb{R}^n$ [21]. ■

Demostración. La prueba se hará por contradicción siguiendo los pasos correspondientes a la demostración del lema de Barbalat¹³. En particular se verá que si $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) \neq 0$, luego la hipótesis $f \in L_2^n$ resulta vulnerada [21].

Primeramente, considérese la función continua $f(t)^T f(t) = \|f(t)\|^2$. Su derivada temporal $2f(t)^T \dot{f}(t)$ está acotada (pertenece a L_∞) ya que por hipótesis $f, \dot{f} \in L_\infty^n$. Por lo tanto, de acuerdo con el teorema del valor medio, existe una constante finita $k > 0$ para la cual [21]:

$$|\|f(t)\|^2 - \|f(t_1)\|^2| \leq k|t - t_1| \quad \forall t, t_1 \in \mathbb{R}_+. \quad (\text{A.1})$$

Ahora bien, nótese que:

$$\|f(t)\|^2 = \|f(t)\|^2 + \|f(t_1)\|^2 - \|f(t_1)\|^2$$

para todo $t, t_1 \in \mathbb{R}_+$. Luego resulta que la siguiente desigualdad es válida [21]:

$$\begin{aligned} \|f(t)\|^2 &\geq \|f(t_1)\|^2 - |\|f(t)\|^2 - \|f(t_1)\|^2| \\ &\geq \|f(t_1)\|^2 - k|t - t_1| \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

para todo $t, t_1 \in \mathbb{R}_+$ y donde se ha usado (A.1) [21].

¹³Véase, e.g., Narendra, K., Annaswamy, A., 1989, *Stable adaptive systems*, Prentice Hall, pág. 85.

Ahora supóngase que bajo las hipótesis del lema su conclusión resulta falsa, i.e, $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) \neq 0$. Esto significa que existe un número $t_1 \in \mathbb{R}_+$ tan grande como se quiera y una constante $\varepsilon > 0$ para los cuales [21]:

$$\|f(t_1)\| > \varepsilon.$$

De aquí en adelante t_1 denotará un número con las características anteriores. Luego entonces, la desigualdad (A.2) permite llegar a [21]:

$$\|f(t)\|^2 \geq \varepsilon - k|t - t_1|.$$

Ahora intégrese la desigualdad anterior desde t_1 hasta $t_1 + \frac{\varepsilon}{k}$, i.e. [21],

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_1 + \frac{\varepsilon}{k}} \|f(\tau)\|^2 d\tau &\geq \int_{t_1}^{t_1 + \frac{\varepsilon}{k}} \varepsilon d\tau - \int_{t_1}^{t_1 + \frac{\varepsilon}{k}} k|\tau - t_1| d\tau, \\ &= \frac{\varepsilon^2}{k} - k \left[\frac{\varepsilon^2}{2k^2} \right] = \frac{\varepsilon^2}{2k}. \end{aligned}$$

Naturalmente como siempre existiría un número t_1 arbitrariamente grande y uno correspondiente $\varepsilon > 0$, luego [21]

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^\tau \|f(\tau)\|^2 d\tau$$

no convergería. Por lo tanto, se tendría $f \notin L_2^n$ lo cual contradice la hipótesis de que $f \in L_2^n$ y en consecuencia debe ser cierto que $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$ [21].

Lema 2. *Considérense las funciones continuas y diferenciables $x : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$, $z : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$. Defínase la función $V : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ dada por [21]:*

$$V(t, x, z, h) = \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}^T P(t) \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + h(t) \geq 0$$

donde $P(t) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{(n+m) \times (n+m)}$ es una matriz simétrica definida positiva para cada $t \in \mathbb{R}_+$. Si la derivada de V con respecto al tiempo [21]:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, x, z, h) &= \frac{\partial V(t, x, z, h)}{\partial t} + \frac{\partial V(t, x, z, h)^T}{\partial x} \frac{dx}{dt} \\ &\quad + \frac{\partial V(t, x, z, h)^T}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial V(t, x, z, h)}{\partial h} \frac{dh}{dt} \end{aligned}$$

satisface

$$\dot{V}(t, x, z, h) = - \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \leq 0$$

donde $Q = Q^T > 0$, entonces

1. $x \in L_\infty^n, z \in L_\infty^m$ y $h \in L_\infty$.
2. $x \in L_2^n$.

Si además $\dot{x} \in L_\infty^n$, entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ [21]. ■

Demostración. Como $V(t, x, z, h) \geq 0$ y $\dot{V}(t, x, z, h) \leq 0$ entonces se tiene que [21]:

$$V(0, x(0), z(0), h(0)) \geq V(t, x(t), z(t), h(t)) \geq 0 \quad \forall t \geq 0.$$

Debido a que todos los términos de V son positivos, y como V está acotada entre 0 y $V(0, x(0), z(0), h(0))$, estos términos están en consecuencia acotados. Queda demostrado el punto 1 [21].

Para demostrar 2), considérese la expresión de $\dot{V}(t, x, z, h)$ [21]:

$$\dot{V}(t, x, z, h) = -x^T Q x.$$

Integrando entre 0 y $T (\in \mathbb{R}_+)$ se obtiene [21]:

$$V(T, x(T), z(T), h(T)) - V(0, x(0), z(0), h(0)) = - \int_0^T x(\tau)^T Q x(\tau) d\tau$$

la cual empleando $V(0, x(0), z(0), h(0)) \geq V(T, x(T), z(T), h(T))$ conduce a la desigualdad [21]:

$$V(0, x(0), z(0), h(0)) \geq \int_0^T x(\tau)^T Q x(\tau) d\tau.$$

Por otro lado, usando el teorema de Rayleigh-Ritz: $x^T K x \geq \lambda_{\min} \{K\} x^T x$ donde K es cualquier matriz simétrica y $\lambda_{\min} \{K\}$ denota el valor propio mínimo de K , se tiene [21]:

$$\frac{V(0, x(0), z(0), h(0))}{\lambda_{\min} \{Q\}} \geq \int_0^T x(\tau)^T x(\tau) d\tau$$

donde $\lambda_{\min} \{Q\} > 0$ porque $Q = Q^T$ es por hipótesis una matriz definida positiva. El lado izquierdo de la última desigualdad es finito, lo cual significa que $x \in L_2^n$ [21].

Finalmente, como $x \in L_2^n$ y por hipótesis $\dot{x} \in L_\infty^n$, del Lema A.1 se concluye que $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ [21].

Considérese ahora un sistema dinámico lineal descrito por las siguientes ecuaciones [21]:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bx \\ y &= Cx\end{aligned}$$

donde $x \in \mathbb{R}^m$ es el estado del sistema, $u \in \mathbb{R}^n$ es la entrada, $y \in \mathbb{R}^n$ es la salida y $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $C \in \mathbb{R}^{n \times m}$ son matrices con coeficientes reales constantes. La matriz de transferencia $H(s)$ del sistema se define como $H(s) = C(sI - A)^{-1}B$ donde $s \in \mathbb{C}$ [21].

El siguiente resultado permite obtener conclusiones sobre la pertenencia de y e \dot{y} a L_2^n o L_∞^n dependiendo de si u pertenece a L_2^n o a L_∞^n [21].

Lema 3. *Considérese la matriz cuadrada de dimensión n , $H(s) \in \mathbb{R}^{n \times n}(s)$ cuyos elementos son funciones racionales estrictamente propias de la variable compleja s . Supóngase que los denominadores de sus elementos tienen todas sus raíces en el semiplano complejo izquierdo [21].*

- Si $u \in L_2^n$ entonces $y \in L_2^n \cap L_\infty^n$, $\dot{y} \in L_2^n$ e $y(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$.
- Si $u \in L_\infty^n$ entonces $y \in L_\infty^n$, $\dot{y} \in L_\infty^n$.

■

A modo de ilustración del lema anterior, considérese la siguiente ecuación diferencial [21]:

$$\dot{x} + Ax = u$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ y $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz constante definida positiva. Si $u \in L_2^n$, entonces del Lema A.3 se concluye que $x \in L_2^n \cap L_\infty^n$, $\dot{x} \in L_2^n$ y $x(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$ [21].

Finalmente, se presenta el siguiente corolario cuya demostración es inmediata del Lema A.3 [21].

Corolario A.1 *Considérese la hipótesis del Lema A.3 sobre la matriz de transferencia $H(s) \in \mathbb{R}^{n \times n}(s)$. Denótese por u e y sus entradas y salidas, respectivamente. Si $u \in L_2^n \cap L_\infty^n$, entonces [21]:*

- $y \in L_2^n \cap L_\infty^n$.
- $\dot{y} \in L_2^n \cap L_\infty^n$.
- $y(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$

A.1.4. Puntos fijos

A continuación se presentan algunos conceptos y teoremas básicos sobre puntos fijos. La importancia de estos conceptos radica en la potencialidad de su empleo en la determinación de la existencia y unicidad de soluciones para una clase particular de ecuaciones. Estos teoremas serán empleados posteriormente para garantizar la existencia, y eventual unicidad, de equilibrios de las ecuaciones diferenciales que caracterizan el comportamiento, en malla cerrada, de los sistemas de control de robots. Primeramente se presenta la definición de punto fijo, que a pesar de su simplicidad, resulta ser de gran aplicación [21].

Considérese una función continua $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. El vector $x^* \in \mathbb{R}^n$ es un *punto fijo* de $f(x)$ si [21]:

$$f(x^*) = x^*.$$

De acuerdo con la definición anterior, si x^* es un punto fijo de la función $f(x)$, entonces obviamente x^* es solución de $f(x) - x = 0$ y también de $x - f(x) = 0$ [21].

Algunas funciones tienen uno o más puntos fijos, pero también hay funciones que no los presentan. La función $f(x) = \text{sen}(x)$ tiene como único punto fijo $x^* = 0$, mientras que la función $f(x) = x^3$ tiene tres puntos fijos: $x^* = 1$, $x^* = 0$ y $x^* = -1$. Sin embargo, $f(x) = e^x$ no tiene punto fijo alguno [21].

Considérese ahora la siguiente función continua [21]:

$$f : \mathbb{R}^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} \mapsto f(x, \theta),$$

donde $\theta \in \Omega$ se ve como un parámetro y siendo $\Omega \subset \mathbb{R}^m$. Luego $x^* \in \mathbb{R}^n$ es un punto fijo de $f(x, \theta)$ para cualquier $\theta \in \Omega$ si [21]:

$$f(x^*, \theta) = x^* \quad \forall \theta \in \Omega.$$

A continuación, se presenta una versión del teorema de contracción de mapas que provee una condición suficiente para la existencia y unicidad de puntos fijos [21].

Teorema 6 (Contracción de mapas). Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^m$. Considérese la siguiente función continua [21]:

$$f : \mathbb{R}^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} \mapsto f(x, \theta).$$

Supóngase que existe una constante no negativa k tal que para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ y $\theta \in \Omega$ se tiene que [21]:

$$\|f(x, \theta) - f(y, \theta)\| \leq k\|x - y\|.$$

Si la constante k es estrictamente menor que la unidad, entonces dado cualquier $\theta \in \Omega$, se tiene que la función $f(x, \theta)$ posee un único punto fijo $x^* \in \mathbb{R}^n$ [21].

Además el punto fijo x^* puede ser determinado como [21]:

$$x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x(n, \theta)$$

donde $x(n, \theta) = f(x(n-1, \theta))$ y con $x(0, \theta) \in \mathbb{R}^n$ arbitrario [21].

■

Una interpretación importante del teorema de contracción de mapas es la siguiente. Supóngase que la función $f(x, \theta)$ satisface la condición del teorema, entonces $f(x, \theta) - x = 0$ tiene solución en x y ésta, además, es la única. Como ilustración de lo anterior, considérese la función $h(x, \theta)$ [21]:

$$\begin{aligned} h(x, \theta) &= k_p x - mgl \operatorname{sen}(\theta - x) \\ &= -k_p [f(x, \theta) - x] \end{aligned}$$

con $k_p > 0$, $mgl > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$ y

$$f(x, \theta) = \frac{mgl}{k_p} \operatorname{sen}(\theta - x).$$

El problema planteado consiste en determinar las condiciones sobre k_p y mgl para que $h(x, 0) = 0$ tenga una única solución en x . Para resolver este planteamiento, se emplea el teorema de contracción de mapas. Nótese que [21]:

$$\begin{aligned} |f(z, \theta) - f(y, \theta)| &= \left| \frac{mgl}{k_p} [\operatorname{sen}(\theta - z) - \operatorname{sen}(\theta - y)] \right| \\ &\leq \frac{mgl}{k_p} |z - y| \end{aligned}$$

para todo $z, y \in \mathbb{R}$, por lo que, si $1 > mgl/k_p \geq 0$, entonces $f(x, \theta)$ tendrá un único punto fijo, y en consecuencia $h(x, \theta) = 0$ tendrá una única solución en x [21].

Apéndice B

Modelado de motor DC controlado por armadura

En secciones anteriores se obtuvo el siguiente conjunto de ecuaciones que describen el movimiento de n grados de la libertad de un robot [24]:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q}) + g(q) = \tau \quad (\text{B.1})$$

Es importante entender exactamente lo que representa esta ecuación. La Ecuación (B.1) representa la dinámica de una cadena interconectada de cuerpos rígidos ideales, suponiendo que hay una fuerza generalizada τ actuando en las articulaciones. Podemos suponer que el k -ésimo componente, τ_k del vector de fuerza generalizada τ es un torque sobre el eje z_{k-1} de la articulación si la articulación k es de revolución y es una fuerza a lo largo del eje z_{k-1} de la articulación si la articulación k es prismática. Esta fuerza generalizada es producida por un accionador, que puede ser eléctrico, hidráulico o neumático. La Ecuación (B.1) para los manipuladores sencillos, no obstante, es una idealización, y hay un número de efectos dinámicos que no están incluidos en (B.1). Por ejemplo, la fricción en las articulaciones no se contabiliza de estas ecuaciones y puede ser significativa para algunos manipuladores. Además, no hay cuerpo físico que es completamente rígido. Un análisis más detallado de dinámica del robot sería incluir diversas fuentes de flexibilidad, tales como deformación elástica de rodamientos y engranajes, la deflexión de los enlaces debajo de la carga y las vibraciones. En esta sección se está interesado en la dinámica de los actuadores que producen la fuerza generalizada τ . Tratamos sólo la dinámica de motores de C.C. de imanes permanentes, ya que estos son comunes para su uso en los robots actuales [24].

Un motor de corriente continua, básicamente, funciona según el principio de un conductor que transporta corriente en un campo magnético experimenta una fuerza $F = i \times \phi$, donde ϕ es el flujo magnético y i es la corriente en el conductor. El motor en sí consta de un estator fijo y un rotor móvil que gira dentro del estator, como se muestra en la figura B.1 [24].

El modelo matemático del motor de corriente continua requiere de dos ecuaciones, una ecuación mecánica y otra eléctrica. Estas ecuaciones están acopladas y se basan en las leyes de la dinámica y de Kirchhoff, respectivamente. Por una parte, la ecuación mecánica modela principalmente el movimiento del rotor, y por otra parte la ecuación eléctrica modela lo que ocurre en el circuito eléctrico del inducido [43].

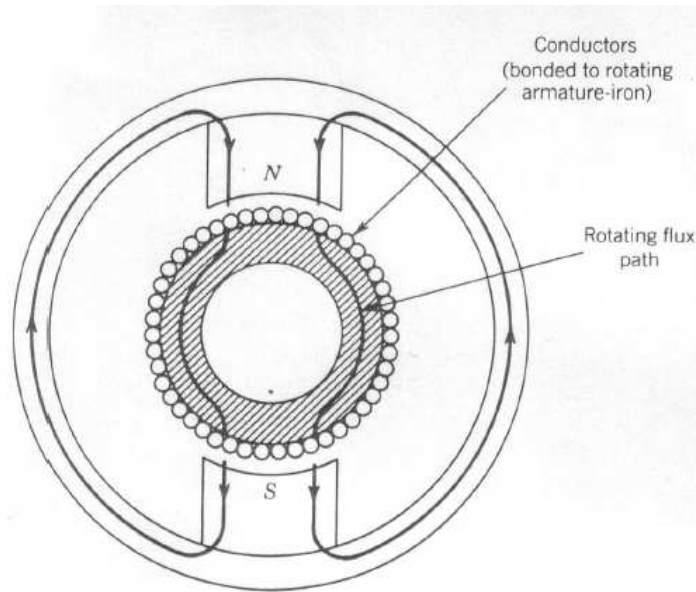


Figura B.1: Sección transversal de un motor DC de imán permanente

Si el estator produce un flujo magnético radial ϕ y la corriente en el rotor (también llamada la armadura) es i entonces habrá un par sobre el rotor haciéndola girar. La magnitud de este par es [24]:

$$\tau_m = K_1 \phi i_a \quad (\text{B.2})$$

donde τ_m es el par motor (N-m), ϕ es el flujo magnético (Webers), i_a es la corriente del inducido (amperios), y K_1 es una constante física. Además, cada vez que un conductor se mueve en un campo magnético, un voltaje V_b se genera entre sus terminales que es proporcional a la velocidad del conductor en el campo. Esta tensión, llamada fuerza contra-electromotriz, tenderá a oponerse a la circulación de corriente en el conductor [24].

Por lo tanto, además del par τ_m en (B.2), tenemos la relación fuerza contra-electromotriz [24]:

$$V_b = K_2 \phi \omega(t) \quad (\text{B.3})$$

donde V_b indica la fuerza contra-electromotriz (voltios), $\omega(t)$ es la velocidad angular del rotor (rad/s), y K_2 es una constante de proporcionalidad [24].

Los motores de c.c. pueden ser clasificados de acuerdo a la manera en la que el campo magnético se produce y la armadura está diseñada. Aquí se discuten sólo los llamados motores de imanes permanentes cuyo estator consta de un imán permanente. En este caso podemos tomar el flujo, ϕ , como una constante debido a que la corriente de campo es constante. El par sobre el rotor se controla a continuación mediante el control de la corriente del inducido, i_a [2] [24,44]. Considere el diagrama esquemático de la figura B.2.

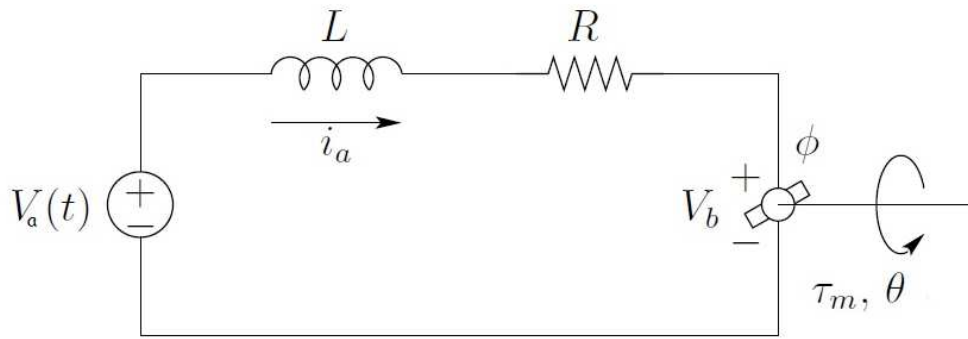


Figura B.2: Diagrama del circuito para un motor de c.c. controlado por armadura

Nótese que para un flujo constante el par es directamente proporcional a la corriente de armadura, de modo que el par desarrollado por el motor es [44]:

$$\tau_m = K_t i_a(t) \quad (\text{B.4})$$

donde K_t es una constante de par motriz ($N * m / amp$). Nótese también que si el signo de la corriente $i_a(t)$ se invierte, también se invierte el signo del par τ_m , lo que se manifiesta en la inversión del sentido de rotación del eje del motor [44].

Cuando la armadura está girando, se induce en ella una tensión proporcional al producto del flujo por la velocidad angular. Para un flujo constante la tensión inducida V_b es directamente proporcional a la velocidad angular $\frac{d\theta(t)}{dt} = \omega(t)$, de (B.3) tenemos [44]:

$$V_b = K_b \omega(t) \quad (\text{B.5})$$

donde V_b es la fuerza contra-electromotriz y K_b es una constante de fuerza contra-electromotriz [44].

La velocidad de un motor de c.c. controlado por armadura, se controla mediante la tensión V_a de la armadura. (La tensión de armadura V_a es la salida de un amplificador de potencia, que no aparece en el diagrama). La ecuación diferencial del circuito de armadura es [44]

$$V_a = V_R + V_L + V_b \quad (\text{B.6})$$

$$V_a = R i_a(t) + L \frac{d i_a(t)}{dt} + K_b \omega(t) \quad (\text{B.7})$$

La corriente de armadura produce el torque que se aplica a la inercia y la fricción; por tanto [44]

$$\tau_m = \tau_J + \tau_B \quad (\text{B.8})$$

$$K_t i_a(t) = J \frac{d\omega(t)}{dt} + B \omega(t) \quad (\text{B.9})$$

Suponiendo que todas las condiciones iniciales son cero, y tomando las transformadas de Laplace de las ecuaciones (B.7) y (B.9), se obtiene las siguientes ecuaciones [44]:

$$V_a(s) = RI_a(s) + LsI_a(s) + K_b\Omega(s) \quad (\text{B.10})$$

$$K_t I_a(s) = Js\Omega(s) + B\Omega(s) \quad (\text{B.11})$$

de (B.10)

$$V_a(s) = (sL + R) I_a(s) + K_b\Omega(s) \quad (\text{B.12})$$

$$I_a(s) = \frac{V_a(s) - K_b\Omega(s)}{sL + R} \quad (\text{B.13})$$

de (B.11)

$$K_t I_a(s) = (Js + B) \Omega(s) \quad (\text{B.14})$$

$$\Omega(s) = \frac{K_t I_a(s)}{Js + B} \quad (\text{B.15})$$

Considerando a $V_a(s)$ como la entrada y $\Omega(s)$ como la salida, es posible construir un diagrama de bloques a partir de las ecuaciones (B.13) y (B.15) [44].

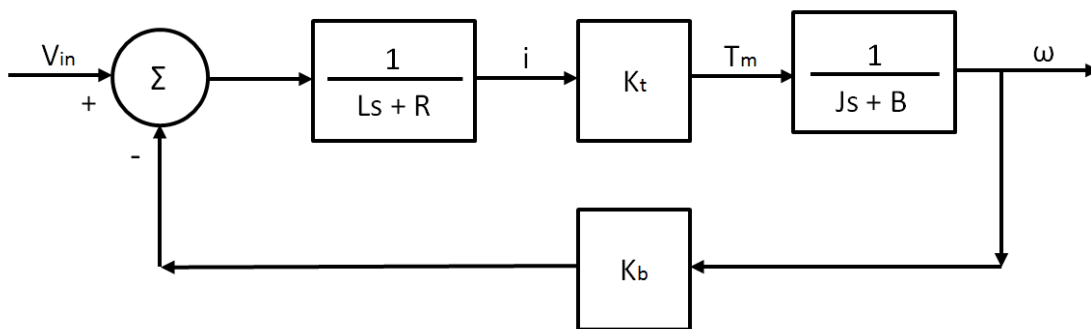


Figura B.3: Diagrama de bloques para un sistema de motor D.C.

Del esquema se desprende que existe una realimentación interna en el motor que tiende a garantizar la estabilidad del funcionamiento. Su causa es que la fuerza contra-electromotriz del motor se opone con mayor fuerza a medida de que aumente la velocidad angular del rotor [45].

Sustituyendo (B.13) en (B.15), se obtiene la función de transferencia del motor:

$$\begin{aligned}\Omega(s) &= \frac{K_t}{Js + B} \left(\frac{V_a(s)}{sL + R} - \frac{K_b \Omega(s)}{sL + R} \right) \\ \Omega(s) + \frac{K_t K_b}{(Js + B)(sL + R)} \Omega(s) &= \frac{K_t V_a(s)}{(Js + B)(sL + R)} \\ \Omega(s) \left(\frac{(Js + B)(sL + R) + K_t K_b}{(Js + B)(sL + R)} \right) &= \frac{K_t V_a(s)}{(Js + B)(sL + R)} \\ \frac{\Omega(s)}{V_a(s)} &= \frac{K_t}{(Js + B)(sL + R) + K_t K_b}\end{aligned}\quad (B.16)$$

B.1. Relación entre K_t y K_b

La mayor parte de la potencia eléctrica dada al motor es convertida en potencia mecánica. La potencia útil será la corriente de la armadura por la fuerza contra-electromotriz del motor. Esta será convertida en par mecánico por velocidad angular. Empleando las expresiones (B.4) y (B.5) se demuestra que las constantes del motor son idénticas, aunque a veces, los fabricantes suelen dar el valor de k_b invertido y en rpm por voltio [45]:

$$P_m = i_a(t) V_b = \tau_m \omega(t) \quad (B.17)$$

$$i_a(t) k_b \omega(t) = K_t i_a(t) \omega(t) \quad (B.18)$$

Por lo tanto

$$K_b = K_t \left[\frac{Nm}{A} \right] \equiv \left[\frac{Vs}{rad} \right] \quad (B.19)$$

B.2. Curvas del par-motor

Una de las curvas típicas de los motores, con independencia de la tecnología, es la relación entre la velocidad angular y el par motor. Las gráficas muestran curvas de comportamiento en el régimen permanente. Para el caso de los motores de c.c. de imanes permanente, según la ecuación (B.7), la corriente continua de frecuencia nula por la armadura es [45]:

$$i_a(t) = \frac{V_a - K_b \omega(t)}{R} \quad (B.20)$$

Mientras el par mecánico en el régimen estacionario valdrá a partir de la ecuación (B.4):

$$\begin{aligned}\tau_m &= K_t i_a(t) \\ &= K_t \left(\frac{V_a - K_b \omega(t)}{R} \right)\end{aligned}\quad (B.21)$$

La familia de curvas estará parametrizada a partir de la tensión dada al motor. Para un nivel de tensión determinada, la curva será una recta de pendiente negativa. A medida de que aumente la velocidad del motor disminuirá el par mecánico. La tangente de cada curva es idéntica, mostrando una familia de rectas paralelas [45]:

$$\frac{d\tau_m}{d\omega(t)} = -\frac{K_i K_b}{R} \quad (\text{B.22})$$

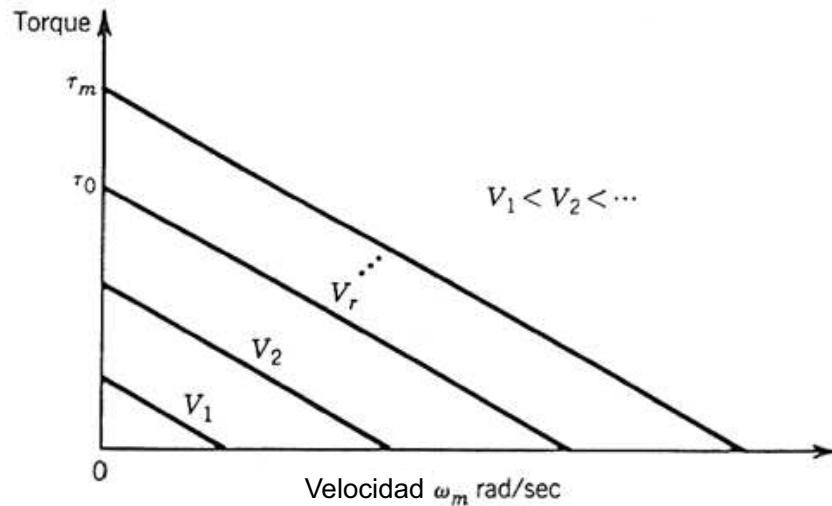


Figura B.4: Curvas características par-velocidad del motor cc

Un exceso de par mecánico dará al traste con la linealidad del comportamiento como consecuencia de una saturación en el circuito magnético [45].

B.2.1. Condiciones en estado estable

El torque máximo en el motor es dado cuando la velocidad angular del mismo tiende ser a cero, por lo tanto a partir de la ecuación (B.21), el torque máximo está definido como [46]:

$$\tau_{m\text{máx}} = \frac{K_t V_a}{R} \quad (\text{B.23})$$

En caso contrario, cuando el torque del motor tiende a ser cero se obtiene la velocidad angular máxima, a partir de la ecuación (B.21), que está dada por [46]:

$$\omega_{\text{máx}}(t) = \frac{V_a}{K_b} \quad (\text{B.24})$$

B.3. Motor conectado a un eslabón

Retomando la discusión referente a la Figura (B.5) que consiste de un motor dc en serie con un tren de engranes con proporción $r : 1$ y conectado a un eslabón del manipulador. La proporción de engranes r típicamente tiene valores en el rango de 20 a 200 o más [21,24].

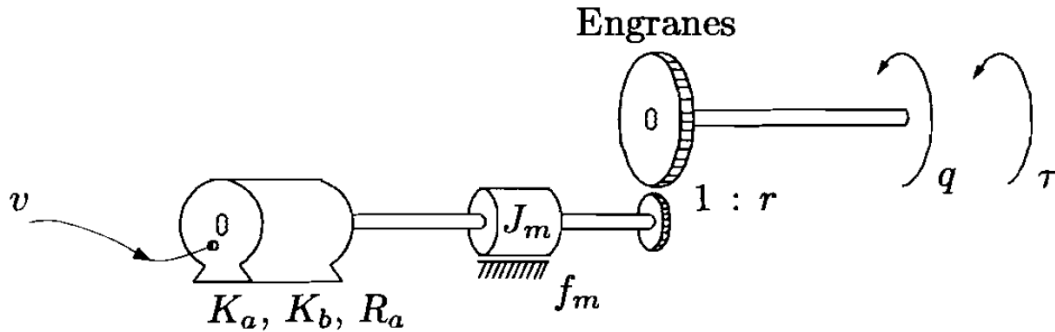


Figura B.5: Motor DC

El modelado matemático idealizado que caracteriza el comportamiento de un motor dc con imán permanente controlado con la armadura se describe típicamente por el conjunto de ecuaciones (B.4)-(B.7); y tomando como referencia la Figura (B.5) son [21]:

$$\tau_m = K_a i_a, \quad (B.25)$$

$$v = R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + e_b, \quad (B.26)$$

$$e_b = K_b \dot{q}_m, \quad (B.27)$$

$$q_m = r q, \quad (B.28)$$

La ecuación de movimiento de este sistema es entonces [21]:

$$J_m \ddot{q}_m = \tau_m - f_m(\dot{q}_m) - \frac{\tau}{r}. \quad (B.29)$$

donde τ es el par neto aplicado después del juego de engranes sobre el eje de la carga, J_m es la inercia del rotor y $f_m(\dot{q}_m)$ es el par introducido por la fricción del rotor con sus soportes [21].

Desde un punto de vista de sistemas dinámicos, el motor de dc puede verse como un dispositivo cuya entrada es el voltaje v y su salida es el par τ que se aplica después de la caja de engranes. Eventualmente, la derivada temporal $\dot{\tau}$ del par τ , puede también considerarse como salida [21].

El modelo dinámico que relaciona el voltaje v con el par τ se obtiene de la siguiente manera. Primeramente se procede a reemplazar i_a de (B.25) y e_b de (B.27) en (B.26) [21]:

$$v = \frac{R_a}{K_a} \tau_m + L_a \frac{d\tau}{dt} + K_b \dot{q}_m. \quad (B.30)$$

Ahora, sacando la derivada con respecto al tiempo en ambos lados de la Ecuación (B.25) se obtiene $\frac{di_a}{dt} = \dot{\tau}_m/K_a$ la cual al ser reemplazada en (B.30) da [21]:

$$v = \frac{R_a}{K_a} \tau_m + \frac{L_a}{K_a} \dot{\tau}_m + K_b \dot{q}_m. \quad (B.31)$$

Por otro lado, de (B.29) se obtiene τ_m [21]:

$$\tau_m = J_m \ddot{q}_m + f_m(\dot{q}_m) + \frac{\tau}{r} \quad (B.32)$$

siendo su derivada temporal

$$\dot{\tau}_m = J_m \frac{d}{dt} \dot{q}_m + \frac{\partial f_m(\dot{q}_m)}{\partial \dot{q}_m} \ddot{q}_m + \frac{\dot{\tau}}{r}, \quad (B.33)$$

las cuales se sustituyen en (B.31) [21]:

$$v = \frac{R_a}{K_a} \left[J_m \ddot{q}_m + f_m(\dot{q}_m) + \frac{\tau}{r} \right] + \frac{L_a}{K_a} \left[J_m \frac{d}{dt} \dot{q}_m + \frac{\partial f_m(\dot{q}_m)}{\partial \dot{q}_m} \ddot{q}_m + \frac{\dot{\tau}}{r} \right] + K_b \dot{q}_m. \quad (B.34)$$

Finalmente, haciendo uso de la relación $q_m = r\dot{q}$, la ecuación anterior puede escribirse como [21]:

$$\frac{K_a}{rR_a} v = \frac{L_a J_m}{R_a} \frac{d}{dt} \ddot{q} + \left[J_m + \frac{L_a}{R_a} \frac{\partial f_m(r\dot{q})}{\partial (r\dot{q})} \right] \ddot{q} + \frac{1}{r} f_m(r\dot{q}) + \frac{K_a K_b}{R_a} \dot{q} + \frac{\tau}{r^2} + \frac{L_a}{r^2 R_a} \dot{\tau}, \quad (B.35)$$

la cual puede expresarse también en términos del vector de estado $[q \ \dot{q} \ \ddot{q}]$ [21]:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \\ L_a \ddot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \ddot{q} \\ \frac{1}{J_m} \left[\frac{K_a}{r} v - \left[R_a J_m + L_a \frac{\partial f_m(r\dot{q})}{\partial (r\dot{q})} \right] \ddot{q} + g(\dot{q}, \tau, \dot{\tau}) \right] \end{bmatrix} \quad (B.36)$$

donde

$$g(\dot{q}, \tau, \dot{\tau}) = -\frac{R_a}{r} f_m(r\dot{q}) - K_a K_b \dot{q} - R_a \frac{\tau}{r^2} - L_a \frac{\dot{\tau}}{r^2}. \quad (B.37)$$

La Ecuación (B.36) representa una ecuación diferencial de tercer orden La ecuación será adicionalmente no lineal si el término de fricción $f_m(\cdot)$ es una función no lineal de su argumento. La presencia de la inductancia de armadura L_a en forma multiplicativa de $\frac{d}{dt} \ddot{q}$, puede originar que la ecuación sea del tipo denominado ecuación diferencial perturbada singularmente para valores "pequeños" de ella [21].

B.3.1. Inductancia de armadura despreciable ($L_a = 0$)

En muchas aplicaciones, tradicionalmente la inductancia de armadura L_a es despreciable ($L_a \approx 0$). Considerando pues que $L_a = 0$, la Ecuación (B.35) toma la forma [21]:

$$J_m \ddot{q} + \frac{1}{r} f_m(r\dot{q}) + \frac{K_a K_b}{R_a} \dot{q} + \frac{\tau}{r^2} = \frac{K_a}{r R_a} v \quad (\text{B.38})$$

o equivalentemente en términos del vector de estado $[q \ \dot{q}]$ [21]:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \frac{1}{J_m} \left[\frac{K_a}{r R_a} v - \frac{f_m(r\dot{q})}{r} - \frac{K_a K_b}{R_a} \dot{q} - \frac{\tau}{r^2} \right] \end{bmatrix}. \quad (\text{B.39})$$

Esta importante ecuación relaciona el voltaje v aplicado a la armadura del motor, con el par τ aplicado a la carga en términos de su posición, velocidad y aceleración angular [21].

B.3.2. Modelo del motor con fricción lineal

A pesar de la extrema complejidad de los fenómenos de fricción, tradicionalmente se emplean modelos lineales para caracterizar su comportamiento [21]:

$$f_m(\dot{q}_m) = f_m \dot{q}_m \quad (\text{B.40})$$

donde f_m es una constante positiva. Este modelo de fricción es conocido como *fricción viscosa* y f_m es el parámetro o coeficiente de fricción viscosa [21].

Considerando el modelo lineal anterior para los pares de fricción, la Ecuación (B.38), que relaciona el voltaje v aplicado a la armadura del motor con el par τ ejercido sobre la carga, toma la forma [21]:

$$J_m \ddot{q} + \left[f_m + \frac{K_a K_b}{R_a} \right] \dot{q} + \frac{\tau}{r^2} = \frac{K_a}{r R_a} v. \quad (\text{B.41})$$

o en términos del ángulo del motor q_m , (B.41) queda definido como [24]:

$$J_m \ddot{q}_m + \left[f_m + \frac{K_a K_b}{R_a} \right] \dot{q}_m = \frac{K_a}{R_a} v - \frac{\tau}{r} \quad (\text{B.42})$$

el diagrama de bloques correspondiente al sistema de orden reducido (B.42) es mostrado en la Figura (B.6) [24].

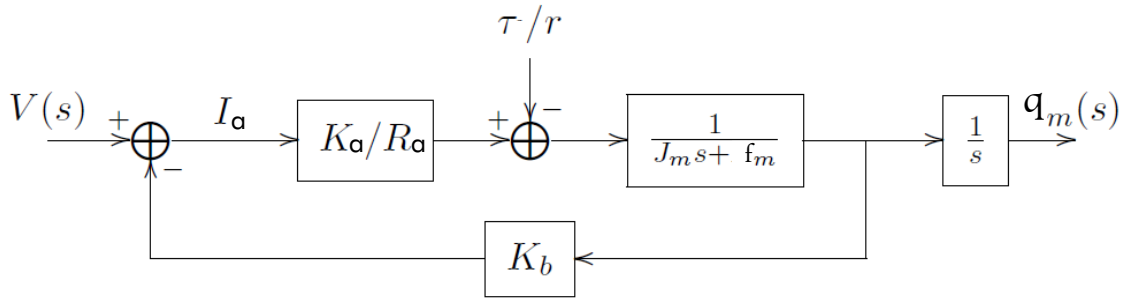


Figura B.6: Diagrama de bloques para sistema de orden reducido

Si la salida del tren de engranes esta directamente acoplada al eslabón, entonces las variables del eslabón y el motor están relacionadas por:

$$\mathbf{q}_{m_k} = r_k \mathbf{q}_k \quad ; \quad k = 1, \dots, n \quad (\text{B.43})$$

Sin embargo, en manipuladores que incorporan otro tipo de accionamiento mecánico como poleas, cadenas, bandas, etc., \mathbf{q}_{m_k} no necesita ser igual a $r_k \mathbf{q}_k$. Una forma más general que incorpora la transformación dinámica entre el espacio de las variables de la articulación y las variables del actuador es:

$$\mathbf{q}_k = f_k(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n) \quad ; \quad \boldsymbol{\tau} = f_k(\boldsymbol{\tau}_1, \dots, \boldsymbol{\tau}_n) \quad (\text{B.44})$$

donde $\mathbf{q}_k = \mathbf{q}_{m_k}/r_k$.

Apéndice C

Esquemáticos de piezas del sistema bípedo

Las unidades de medición de los eslabones que componen al sistema bípedo se encuentran en milímetros y son las mismas tanto para la pierna derecha e izquierda.

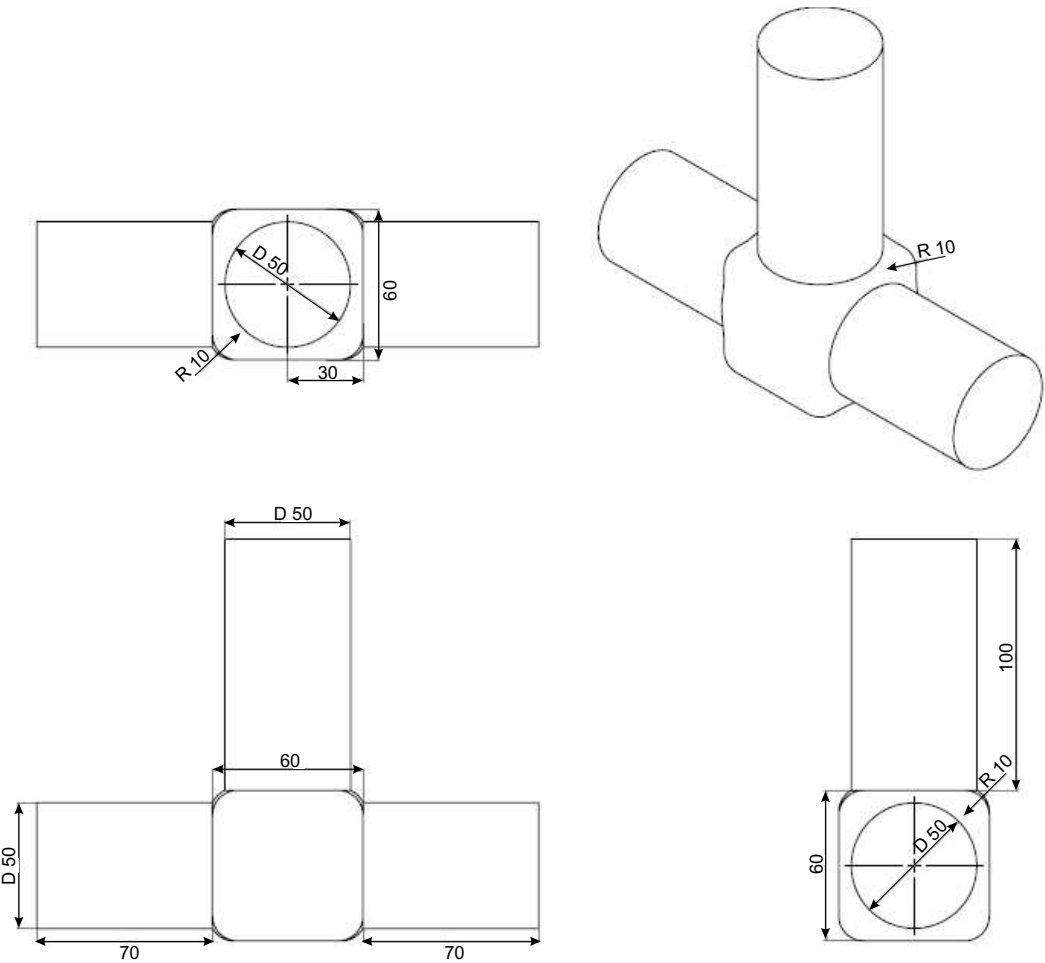


Figura C.1: Dimensiones del eslabón cadera.

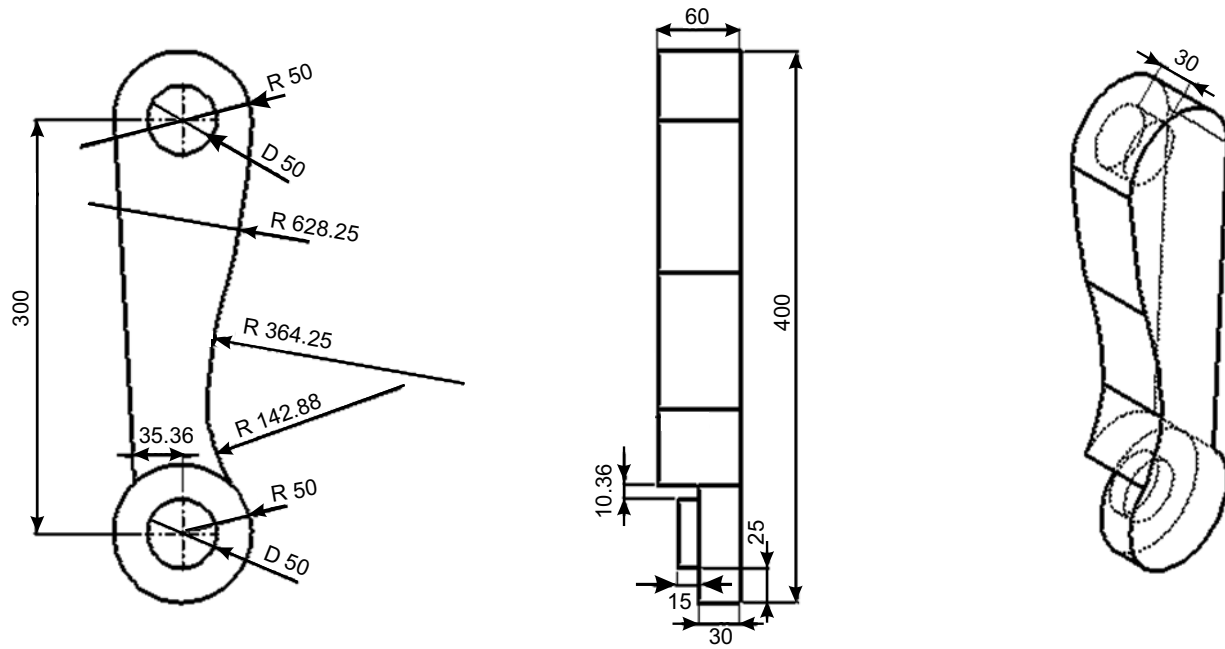


Figura C.2: Dimensiones del eslabón muslo derecho.

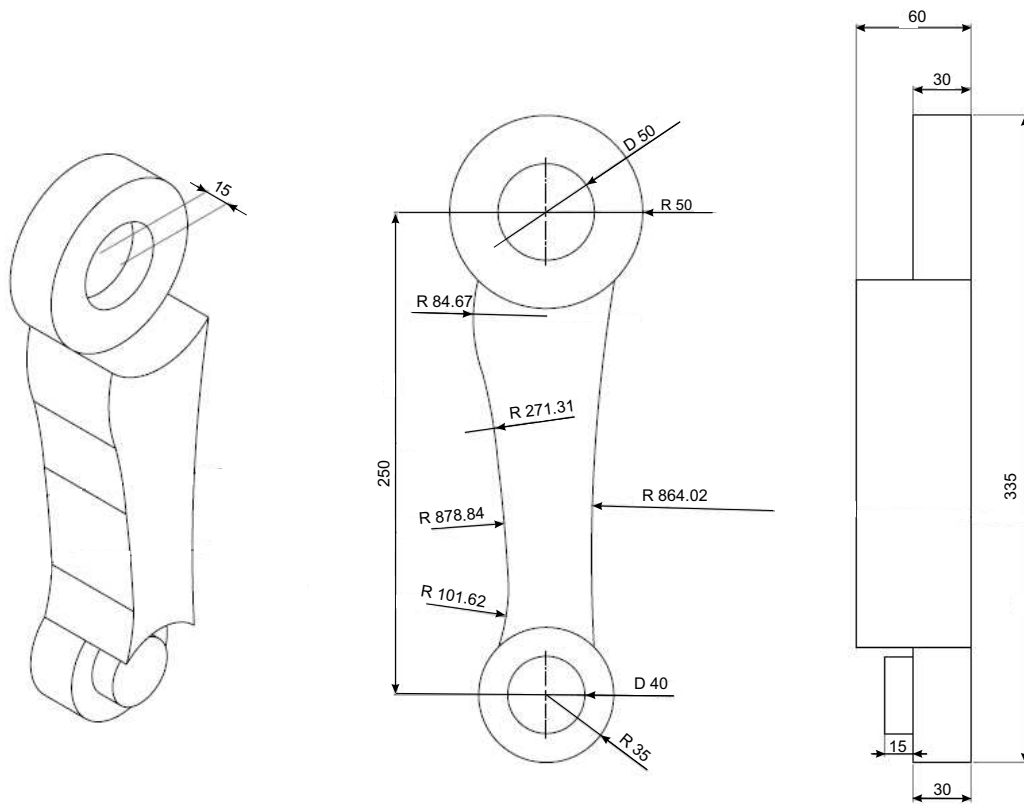


Figura C.3: Dimensiones del eslabón pantorrilla derecha.

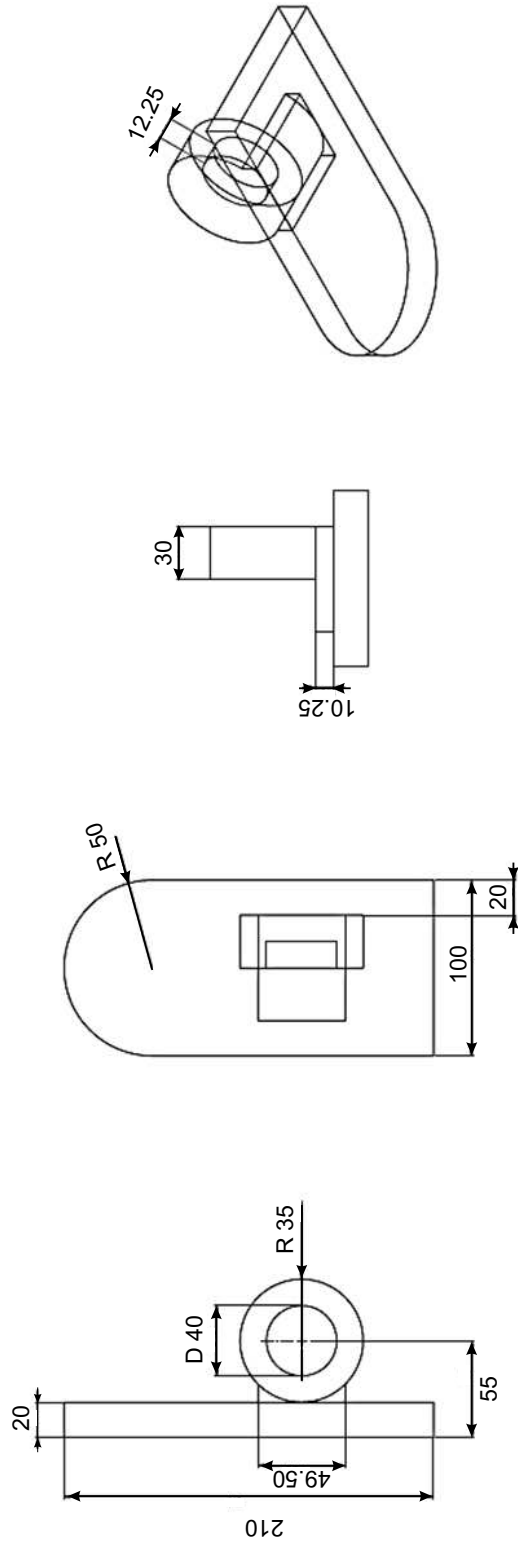


Figura C.4: Dimensiones del eslabón pie derecho.

Apéndice D

Especificaciones de motores de D.C.

Specifications		
	52 Watts	67 Watts
Type	82 850 0	82 830 5
Voltage	24 V	24 V
Part numbers	82 850 002	82 830 502
No-load characteristics		
Speed of rotation (rpm)	4050	3660
Absorbed power (W)	7.44	12
Absorbed current (A)	0.31	0.5
Nominal characteristics		
Speed (rpm)	3200	2770
Torque (mN.m)	100	170
Usable power (W)	33.5	50
Absorbed power (W)	52	72
Absorbed current (A)	2.15	3
Gearbox case temperature rise (°C)	54	50
Efficiency (%)	64	69.4
General characteristics		
Insulation class (conforming to IEC 85)	F (155 °C)	F (155 °C)
Protection (IEC 529) Terminal	IP20	IP20
Max. output (W)	52	67
Start torque (mN.m)	490	700
Starting current (A)	9.6	11.8
Resistance (Ω)	2.5	2.03
Inductance (mH)	2.5	4.68
Torque constant (Nm/A)	0.052	0.0619
Electrical time constant (ms)	1	2.3
Mechanical time constant (ms)	13	33
Thermal time constant (min)	21	18
Inertia (g.cm ²)	140	500
Weight (g)	640	840
No of segments	8	12
Service life (h)	3000	4000
Sintered bronze bearings	✓	✓
Wires length (mm)	200	200

Figura D.1: Hoja de especificaciones de los motores en el simulador

Motenergy, Inc	Product Information ME1003	Rev:	
		Date:	05/03/11
		Check By:	JF

Motor Electrical Parameters

Electrical Parameter	Unit	Parameter
Operating Voltage Range	VDC	0 minimum to 96 maximum
Rated Continuous Current	ADC	200
Peak Current	ADC	500 (10 sec) 400 (30 sec), 300 (1 minute)
No Load Current (I_{NL})	ADC	6 amps typical at neutral timing
Peak Stalled Current	Ams	500
Voltage Constant	V/RPM	0.02
Armature Resistance (L-L)	Ohm	0.01
Turns	Turns	1
Inductance	uH	93 at 120 Hz
Torque Constant	Nm/A	0.2
Maximum Continuous Power	KW	16 (96V), 14.3 (84V), 12.6 (72V)
Macimum Case Temperature	F	250

Motor Mechanical Parameters

Mechanical Parameter	Unit	Parameter
Rated Speed	RPM	3000 (at 72 VDC)
Maximum Speed	RPM	5000
Rated Torque	Lb-in	39 (200 amps)
Continuous Stalled Torque	Lb-in	20 (100 amps)
Peak Torque	Nm	98 (at 500 amps)
Operating Ambient Temperature	C	-40 to 40 (for these ratings)
Armature Inertia	kg.cm ²	268
Motor Winding Insulation	Class	F
Max. Winding Operating Temperature	C	155
Shaft Configuration		See Drawing
Face Mounting Details		See Drawing
Tightening Torque for Terminals		See Drawing
Weight	lb	39
Direction of Rotation	I	Bi-directional fan (CCW Timed)
Storage Temperature	C	-30 to 150
Materials of Construction		Standard
Number of Brushes		16

Figura D.2: Hoja de especificaciones de los motores en el simulador

Apéndice E

Congresos y publicaciones

Congresos asistidos como conferencista:

1. Sandra Cuatlahuahue Formacio, Pablo Sánchez Sánchez. *Simulador basado en un sistema bípedo simple*. Primer Encuentro Nacional de Matemáticas Aplicadas en la Computación y en la Electrónica (ENMATCE). Puebla, Puebla, México. 11-13 de junio de 2014.
2. Sandra Cuatlahuahue Formacio, Pablo Sánchez Sánchez. *Simulador basado en un sistema bípedo simple*. Semana Nacional de Ingeniería Electrónica (SENIE). Celaya, Guanajuato, México. 22-24 de octubre del 2014.
3. Sandra Cuatlahuahue Formacio, Pablo Sánchez Sánchez. *Simulador basado en un sistema bípedo simple*. Congreso Nacional de Mecatrónica (MECAMEX). Juriquilla, Querétaro, México. 30 de octubre al 1 de noviembre del 2014.
4. Sandra Cuatlahuahue Formacio, Pablo Sánchez Sánchez. *Simulador basado en un sistema bípedo simple*. Congreso Mexicano de Robótica (CoMRob). Mazatlán, Sinaloa, México. 6-8 de noviembre del 2014.
5. Sandra Cuatlahuahue Formacio, Pablo Sánchez Sánchez. *Simulador basado en un sistema bípedo simple*. Congreso Internacional en Ciencias Computacionales (CiComp). Ensenada, Baja California, México. 5-7 de noviembre del 2014.

Publicación en revista electrónica:

1. Sandra Cuatlahuahue Formacio, Pablo Sánchez Sánchez. Simulator based on a simple biped system, *Research in computing science*, ISSN 1870-4069, Instituto Politécnico Nacional (IPN), Vol. 80, 2014, pp. 17-29.

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla



Facultad de Ciencias de la Computación

Otorga la presente



CONSTANCIA

A: Sandra C. Formacio

Por su participación como ponente invitado en la conferencia titulada:

SIMULADOR BASADO EN UN SISTEMA BÍPEDO SIMPLE

Durante el Primer Encuentro Nacional de Matemáticas Aplicadas a la Ciencias de la Computación y la Electrónica (ENMATCE), celebrado en la Facultad de Ciencias de la Computación los días 11, 12 y 13 de junio del 2014.

H. Puebla de Z. a 12 de junio del 2014

Marcos González Flores
Director de la FCC

Roberto Contreras Juárez
Comité Organizador





SENE 2014

X SEMANA NACIONAL DE INGENIERÍA ELECTRÓNICA



La Universidad Autónoma Metropolitana Azcapotzalco a través de la División de Ciencias Básicas e Ingeniería y el Instituto Tecnológico de Celaya

Otorgan la presente
CONSTANCIA

a:

Sandra Cuatlahuahue Formacio

Por haber participado como expositor del artículo titulado:

Simulador Basado en un Sistema Bípedo Simple

Presentado en la X Semana Nacional de Ingeniería Electrónica
Del 22 al 24 de Octubre en la Ciudad de Celaya, Guanajuato


Dr. Luis Enrique Noreña Frahco
Director de la División de CBI
Universidad Autónoma Metropolitana-Azcapotzalco


Dr. Miguel Magos Rivera
Presidente del Comité Organizador
Senie 2014

Celaya, Guanajuato a 24 de octubre de 2014


SECRETARÍA DE
EDUCACIÓN PÚBLICA
INSTITUTO TECNOLÓGICO
DE CELAYA
DIRECCIÓN

M.E.D. Ignacio López Valdeolinos
Director
Instituto Tecnológico de Celaya



**ASOCIACION MEXICANA DE
MECATRONICA A.C.**

**LE OTORGA EL
PRESENTE**



RECONOCIMIENTO

EN EL MARCO DE SU

13° Congreso Nacional de Mecatrónica

A:

Sandra Cuatlahue Formacio y Pablo Sánchez Sánchez

POR SU BRILLANTE PRESENTACIÓN DEL ARTÍCULO

“Simulador Basado en un Sistema Bípodo Simple”

Del 30 de Octubre al 1 de Noviembre de 2014, Querétaro, Qro.



DR. JUAN MANUEL RAMOS ARREGUÍN
Presidente de la Asociación

XVI Congreso Mexicano de Robótica

Mazatlán, Sinaloa del 6, 7 y 8 de Noviembre



La Asociación Mexicana de Robótica e Industria
Otorga el presente



Reconocimiento

A: Sandra Cuatlahue-Formacio

Por su participación como CONFERENCISTA con el tema:
SIMULADOR BASADO EN UN SISTEMA BIPEDO SIMPLE

en el XVI Congreso Mexicano de Robótica
celebrado en Mazatlán, Sinaloa
del 6 al 8 de noviembre de 2014



Carillo

Dra. Karla Anhel Camarillo Gómez
Presidenta de la AMRob

U. Zaldivar

Dr. Ulises Zaldivar Colado
Presidente del
Comité Organizador

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA
FACULTAD DE CIENCIAS

OTORGA EL PRESENTE

RECONOCIMIENTO

A: **Sandra Cuatlahuahue-Formacio**

Por haber presentado el artículo

Simulador basado en un sistema bípedo simple

en el marco del 7mo. Congreso Internacional en Ciencias Computacionales,
celebrado del 5 al 7 de noviembre de 2014.



Dr. Juan Crisóstomo Tapia Mercado
Director de la Facultad de Ciencias

Ensenada, Baja California, México.



M.C. Evelyn Martínez
Coordinador General, CiComp 2014



7^{mo} CiComp 2014
Congreso Internacional en Ciencias Computacionales



Bibliografía

- [1] **Peter Guang Yi Lu**; *Mechanical Engineering Challenges in Humanoid Robotics*, Massachusetts, U.S.A., M.I.T., 2011.
- [2] **Shuuji Kajita, Bernard Espiau**, *Legged Robots*; en **B. Siliciano and O. Khatib**, *Handbook of robotics*, Springer, 2008.
- [3] **Xiong Yang, Haojian Lu, Toshi Fukuda, Yajing Shen**, *State of the art: bipedal robots for lower limb rehabilitation*; en **MDPI**, *Applied Sciences*, Vol.7, 2017.
- [4] **Vukobratovic Miomir, Borovac Branislav**; *Zero-Moment Point Thirty five years of its life*, Serbia and Montenegro, 2004.
- [5] MIT Leg Laboratory
<http://www.ai.mit.edu/projects/leglab/>
- [6] Boston Dynamics Company
<http://www.bostondynamics.com/atlas>
- [7] HONDA Company
<http://world.honda.com/ASIM/history/>
- [8] **Iván Rodríguez**, *Entrenamiento robótico como medio de rehabilitación para la marcha*; en *Evidencia Médica e Investigación en Salud*, Vol.5, Núm. 2, Abril-Junio 2012, pp 46-54.
- [9] **H.F. Machiel Van der Loos, David J. Reinkensmeyer**, *Rehabilitation and Health Care Robotics*; en **B. Siliciano and O. Khatib**, *Handbook of robotics*, Springer, 2008.
- [10] **Marcin Kaczmarek, Grzegorz Granosik**, *Rehabilitation Robot RRH1*; en *The Archive of Mechanical Engineering*, Vol.83, Núm. 1, 2011.
- [11] **M. Bayón y J. Martínez** (2008), *Plasticidad cerebral inducida por algunas terapias aplicadas en el paciente con ictus* [Versión electrónica]; *Rehabilitación*, Marzo, Volumen 42, No. 02, España.
- [12] **Nieto Sampedro Manuel** (2003), *Plasticidad neuronal* [Versión electrónica]; *Mente y cerebro. Investigación y ciencia*, Julio/Septiembre, No.4, España.
- [13] **Pi-Ying Cheng and Po-Ying Lai**; *Comparison of Exoskeleton Robots and End-Effector Robots on Training Methods and Gait Biomechanics*, ICIRA 2013, Part I, Springer, 2013.
- [14] **Juan Manuel Guzmán González**, *Presente y futuro de la rehabilitación en México*; en *Cirugía y cirujanos*, Vol.84, Núm. 2, 2016, pp 93-95.

- [15] **SEDESOL, Secretaría de desarrollo social**, *Diagnóstico sobre la situación de las personas con discapacidad en México*, México, Mayo 2016.
- [16] **CONACYT**, *Rehabilitación asistida por robots*
<http://conacytprensa.mx/>
- [17] **UNAM**, *Crean exoesqueleto para auxiliar a discapacitados*
<http://www.gaceta.unam.mx/>
- [18] **IPN**, *Equipo Médico desarrollado por el IPN contribuirá a que personas parapléjicas recobren movilidad*
<http://www.unamglobal.unam.mx>
- [19] **Barrientos A., Peñín L. F., Balaguer C., Aracil R.**; *Fundamentos de robótica*, Madrid, España, 1997.
- [20] **K. S. Fu, R. C. González, C. S. G. Lee**; *Robótica: Control, detección, visión e inteligencia*, U. S. A., 1987.
- [21] **Kelly Rafael, S. V.**; *Control de movimiento de robots manipuladores*, Praga, F. R. Borovy, 2003.
- [22] **S. Zemansky, Y. Freedman**; *Física universitaria*, Madrid, España, Pearson Educación, 1999.
- [23] **Aníbal Ollero Baturone**; *Robótica: Manipuladores y robots móviles*, España, Alfaomega, 2007.
- [24] **Mark W. Spong, Seth Hutchinson and M. Vidyasagar**; *Robot Dynamics and control*, 2da Edición, 2004.
- [25] **Margareta Nordin y Víctor H. Frankel**; *Biomecánica básica del sistema musculoesquelético*, McGraw Hill, España, 2004.
- [26] **Tomohide Naniwa, Suguru Arimoto y Vicente-Parra Vega**; *A model-based adaptive control scheme for coordinated control of multiple manipulators*, Tokyo, Japón.
- [27] **Balasubramanian Esakki y S. Riyaz Ahmed**; *Dynamics and control of collaborative robot manipulators*, International Conference on Smart Technologies and Management for Computing Communication, Controls, Energy and Materials (ICSTM), 6-8 Mayo, 2015, India, pp 590-595.
- [28] **Balasubramanian Esakki, Rama B. Bhat and Chun-Yi Su**; *Robust control of collaborative manipulators - flexible object system*, International Journal of Advanced robotics systems, Vol. 10, 2013, pp. 257.
- [29] **Holly Moore**; (n.d.) *Matlab para ingenieros*, Prentice Hall.
- [30] **Pablo Sánchez Sánchez, A Michua Camarillo y F. Reyes Córtes**; *Metodología de diseño para un simulador dedicado a un pendubot*, MECAMEX, Desarrollo sustentable y transporte, 2007.
- [31] **Pablo Sánchez Sánchez**; *Control cartesiano de robots manipuladores*, FCE BUAP, México, 2005.
- [32] **Miguel Ataurima Arellano**; *Matlab y simulink para ingeniería, nivel 1*, 2013.

- [33] MathWorks®
<http://es.mathworks.com/>
- [34] **Viliam Fedák, František Ďurovský and Róbert Üveges**; *Analysis of robotic system motion in SimMechanics and MATLAB GUI Environment*, MATLAB Applications for the Practical Engineer, INTECH, 2014.
- [35] **Aurora Itzel Ventura Sepúlveda**; *Análisis y diseño de un estabilizador difuso para un robot humanoide utilizando los brazos como medio de control*, Instituto Politécnico Nacional, 2012.
- [36] **Santiago David Vaca Jiménez**; *Diseño y simulación de un robot manipulador industrial tipo PUMA capaz de levantar pesos de hasta 20 kg.*, Escuela Politécnica Nacional, 2012.
- [37] **Matlab**; *Creating Graphical User Interfaces*, MathWorks, 2015.
- [38] SolidWorks®
<http://www.solidworks.es/>
- [39] Gabinete técnico de patronaje y antropometría aplicada
<http://www.comocubriruncuerpo.org/>
- [40] **David Le Vay**; *Anatomía y fisiología humana*, 2da. Edición, Paidotribo.
- [41] **V. Bu**; *Anatomía humana*, Tomo I, 5ta. Edición, Mir Moscu.
- [42] **Kenneth S. Saladin**; *Anatomía y fisiología: la unidad entre forma y función*, 6ta. Edición, McGraw Hill.
- [43] **Freile, M.J.**; *Maquinas eléctricas*, 5ta Edición, McGraw Hill, España, 2003.
- [44] **Katsuhiko Ogata**; *Ingeniería de control moderna*, 2da Edición, Prentice Hall.
- [45] **Carlos Platero Dueñas**; *(Apuntes) Modelado matemático de los sistemas dinámicos*, Universidad Politécnica de Madrid, España, 2008. Obtenida el 24 de mayo de 2014, de <http://www.elai.upm.es/webantigua/>
- [46] **Kevin Craig**; (n.d.) *Brushed Direct-Current Motors*. Obtenida el 24 de mayo de 2014, de <http://multimechatronics.com/>
- [47] **Cervantes Viramontes J. Manuel, García Sánchez M. Ángel, Escalera López José de Jesús, Torre Cosío Verónica, García Sánchez Eduardo**; *Metodología para el proceso de simulación MEPPS*; en **Universidad Autónoma de Zacatecas**, *Revista electrónica de ingeniería y tecnologías*, Vol.10, No.3, Zacatecas, México, 2017.
- [48] **Herrera O. Javier, Becerra L. Abraham**, *Diseño general de las etapas de simulación de procesos con énfasis en el análisis de entrada*; en **12th Latin American and Caribbean Conference for engineering and technology**, *Excellence in engineering to enhance a country's productivity*, Guayaquil, Ecuador, Julio 2014.
- [49] **Cámara Jesús**, *Análisis de la marcha: sus fases y variables espacio-temporales*; en *Entramado*, ISSN: 1900-3803, Universidad Libre Colombia, Vol. 7, No. 1, 2011, Págs. 160-173.

-
- [50] **Adalbert Ibrahim Kapandji**; *Fisiología articular*, 6ta. Edición, Tomo 2, Panamericana, 2010.
- [51] **Zhiming Ji, Yazan Manna**, *Synthesis of a pattern generation mechanism for gait rehabilitation*; en *Journal of medical devices*, September, Vol. 2, 2008.
- [52] **Rafael M. Crespo, Diego Torricelli, Joel Carlos Huegel, Jose Luis Gordillo, Jose Luis Pons and Rogelio Soto**, *An adaptable human-like gait pattern generator derived from a lower limb exoskeleton*; en *Frontiers in robotic and A.I.*, May, Vol. 6, article 36, 2019.
- [53] **Michael R. Tucker, Jeremy Oliver, Anna Pagel, Hannes Bleuler, Mohamed Bouri, Oliver Lamercy, Jose del R. Millán, Robert Riener, Heike Vallery and Roger Gassert**, *Control strategies for active lower extremity prosthetics and orthotics: a review*; en *Journal of neuroengineering and rehabilitation*, Switzerland, 2015.