



Benemérita Universidad
Autónoma de Puebla

Facultad de Ingeniería
Colegio de Geofísica

*“Análisis de oscilaciones y ondas: un enfoque
en el campo de la geofísica”*

T E S I S

PARA OBTENER EL GRADO DE:
Licenciatura en Ingeniería Geofísica

P R E S E N T A:

Evelyn Patricia Bolaños Cázares

Director:

M.I Raúl Vázquez Sánchez

Puebla, Pue.

Marzo 2024



Oficio No. SAC/0491/2024

**C. Evelyn Patricia Bolaños Cázares -201626954-
Pasante de la Licenciatura en Ingeniería
Geofísica
Presente.**

En atención al Tema de Tesis que puso Usted a consideración de la Coordinación de Área y de esta Secretaría Académica en coordinación con la Dirección de ésta Facultad de Ingeniería, dentro del marco de Titulación por Examen Profesional, como medio de Titulación se dio revisión y se ha autorizado el tema denominado:

“ANÁLISIS DE OSCILACIONES Y ONDAS: UN ENFOQUE EN EL CAMPO DE LA GEOFÍSICA”

Por lo anterior hago de su conocimiento que se asigna como Asesor de tema al Dr. Raúl Vázquez Sánchez.

Sin más por el momento, le envío la seguridad de mi consideración más distinguida.

Atentamente

“Pensar bien para vivir mejor”
H. Puebla de Z. a 20 de febrero de 2024

M. I. Angel Cecilio Guerrero Zamora,
Director



M'ACGZ/M'VGL/barv
C.c.p. Archivo

M. I. Angel Cecilio Guerrero Zamora
Director de la Facultad de Ingeniería
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
P r e s e n t e.

El que suscribe: Dr. Raúl Vázquez Sánchez, asesor del tema de tesis

“ANÁLISIS DE OSCILACIONES Y ONDAS: UN ENFOQUE EN EL CAMPO DE LA GEOFÍSICA”

Presentada por la C. Evelyn Patricia Bolaños Cázares -201626954-, pasante del Colegio de Ingeniería Geofísica, y en atención al oficio No. SAC/0491/2024 con fecha de emisión 20 de febrero de 2024, me permito informar a Usted que después de haber revisado cuidadosamente el contenido temático, metodología, redacción y ortografía de la tesis correspondiente, no tengo inconveniente en autorizar la impresión del mismo.

Sin otro particular, le reitero la seguridad de mi más atenta y distinguida consideración.

Atentamente
“Pensar bien, para vivir mejor”
H. Puebla de Z. a 21 de febrero de 2024



Dr. Raúl Vázquez Sánchez
Asesor de Tema

Agradecimientos

Le agradezco a Dios por haberme guiado a lo largo de mi carrera universitaria y por brindarme fortaleza para poder concluir esta etapa de mi vida.

A mis padres, Rubén y Patricia, les doy gracias por apoyarme y nunca dejarme sola en ningún momento, ustedes siempre serán una de mis motivaciones más grandes de toda mi vida. Gracias mamá por siempre estar ahí para mí desde que llegue a tu vida y gracias papá por siempre protegerme. A mi hermana, Marifer, gracias por ser mi compañera desde que somos niñas, eres uno de los regalos más grandes que Dios me dio.

A Yocundo, gracias por ser mi compañero de vida y mi amor de todos los días, gracias por impulsarme y motivarme cada día, me has dado el regalo más hermoso, que es Marcelo. Mi Marcelo, gracias porque llegaste en el momento indicado, esto es por y para ti.

Le quiero dar gracias a mis abuelitos, Rubén y Esther, por todo su amor, su cariño y sus oraciones, aunque no los veo tanto como quisiera, siempre están presentes en mi corazón en todo momento.

Le doy gracias al maestro Raúl, por ser mi asesor, gracias por toda la paciencia y el apoyo que me brindó en todo el proceso de este trabajo. Gracias por todas sus enseñanzas y sobre todo por siempre defender las injusticias que se presentaron en el camino.

Por último, Alexia, gracias por ser mi mejor amiga desde la secundaria, eres como una hermana para mí, gracias por las altas y las bajas, por creer en mí y por toda tu amistad incondicional. Mafer, como tú lo mencionaste, “gracias por esta aventura llamada universidad”, fuiste la mejor compañía en cada clase, gracias por ser mi compañera de todos los días durante casi 5 años y por siempre estar ahí para mí. También gracias a Edgar y Aarón por ser grandes amigos.

Dedicatoria

*A mis padres, Rubén y Patricia,
por ser mí sostén de toda la vida.*

*A Yocundo y Marcelo,
por ser el regalo más hermoso
que me dio la geofísica.*

*A Marifer, por ser mi alegría
de todos los días.*

Índice

Resumen	I
Abstract	II
Capítulo 1. Introducción	3
1.1 Planteamiento del problema	3
1.2 Justificación.....	4
1.3 Objetivos	6
1.3.1 Objetivo General	6
1.3.2 Objetivos Específicos.....	6
Capítulo 2. Marco Teórico	7
2.1 Momento lineal.....	7
2.2 Segunda ley de Newton; concepto de fuerza.....	7
2.3 Composición de fuerzas concurrentes	8
2.4 Torque de una fuerza.....	9
2.5 Momento angular	10
2.6 Ecuación de movimiento de la rotación de un cuerpo rígido	11
2.7 Ecuaciones diferenciales, planteamiento y definiciones.	12
2.8 Ecuaciones lineales homogéneas.....	14
2.9 Ecuaciones lineales homogéneas de segundo orden con coeficientes constantes.....	14
2.10 Ecuaciones lineales no homogéneas de segundo orden	19
2.11 Funciones de varias variables.....	19
2.12 Derivadas parciales de la función de varias variables.....	20
2.13 Funciones periódicas	21
2.14 Series de Fourier.....	22
2.15 Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (EDP).	23
Capítulo 3. Metodología	24
3.1 Etapa 1. Propuesta de la guía de estudio	24
3.1.1 Documentación bibliográfica.....	24
3.1.2 Elección de temas.....	24
3.1.3 Análisis de los sistemas oscilatorios y ondulatorios.....	24

3.1.4 Discusión relación con la geofísica	25
3.2 Etapa 2. Interacción con estudiantes	26
3.2.1 Selección de estudiantes	26
3.2.2 Evaluación inicial a estudiantes	26
3.2.3 Análisis de los resultados de los estudiantes.....	27
Capítulo 4. Resultados	29
4.1. Propuesta de la guía de estudio.....	29
4.1.1 Análisis del movimiento oscilatorio	29
4.1.1.1 Movimiento armónico simple	30
4.1.1.2 Interpretación del movimiento armónico simple a partir de un análisis gráfico.....	34
4.1.1.3 Desplazamiento, velocidad y aceleración.....	35
4.1.1.4 Energía del movimiento armónico simple	38
4.1.1.5 Péndulo simple	40
4.1.1.6 Péndulo físico	41
4.1.1.7 Composición de movimientos armónicos: superposición	43
4.1.1.8 Figuras de Lissajous.....	56
4.1.1.9 Oscilaciones amortiguadas.....	57
4.1.1.10 Oscilaciones forzadas: resonancia	63
4.1.2 Análisis del movimiento ondulatorio.....	76
4.1.2.1 Ondas viajeras.....	76
4.1.2.2 Reflexión de ondas viajeras.....	129
4.1.3 Relación con la geofísica	170
4.1.3.1 Sismología.....	170
4.1.3.2 Prospección sísmica.....	172
4.1.3.3 Análisis de señales geofísicas.....	174
4.1.3.4 Ingeniería sísmica	177
4.2 Análisis de las evaluaciones	180
Capítulo 5. Conclusiones	189
Bibliografía	191
Anexos	194

Índice de figuras

Figura 2.1. Fuerzas coplanares. (Modificado de Alonso & Finn, 1967).	9
Figura 2.2. Torque de una fuerza (Modificado de Alonso y Finn, 1967).	9
Figura 2.3. Función periódica.	21
Figura 3.1. Aplicación del cuestionario diagnóstico a estudiantes de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.	26
Figura 4.1. Representación de un movimiento oscilatorio.	29
Figura 4.2. Sistema masa resorte. (Modificado de Reyes, S. 1976).	30
Figura 4.3. Parámetros de un movimiento armónico simple.	34
Figura 4.4. Movimiento circular uniforme. (Modificado de Reyes, S. 1976).	34
Figura 4.5. Gráficos de desplazamiento, velocidad y aceleración en función del tiempo en el movimiento armónico simple.	36
Figura 4.6. Péndulo simple. (Modificado de Reyes, S. 1976).	40
Figura 4.7. Péndulo compuesto. (Modificado de Reyes, S. 1976).	41
Figura 4.8. Superposición de dos movimientos armónicos simples en fase. (Modificado de Alonso y Finn, 1967).	44
Figura 4.9. Composición de dos movimientos armónicos simples en oposición. (Modificado de Alonso y Finn, 1967).	45
Figura 4.10. Composición de dos movimientos armónicos simples en cuadratura. (Modificado de Alonso y Finn, 1967).	46
Figura 4.11. Superposición de dos movimientos armónicos simples con igual dirección, diferente frecuencia e igual amplitud. (Modificado de Alonso y Finn, 1967).	47
Figura 4.12. Superposición de dos movimientos armónicos simples en fase. (Modificado de Reyes, S. 1976).	52
Figura 4.13. Superposición de dos movimientos armónicos simples en oposición. (Modificado de Reyes, S. 1976).	53
Figura 4.14. Superposición de dos movimientos armónicos simples con direcciones perpendiculares en cuadratura. (Modificado de Reyes, S. 1976).	54
Figura 4.15. Superposición de dos movimientos armónicos simples en cuadratura con la misma amplitud. (Modificado de Reyes, S. 1976).	55
Figura 4.16. Diferentes trayectorias para una superposición con diferentes fases selectas. (Modificado de Reyes, S. 1976).	55
Figura 4.17. Figuras de Lissajous con diferentes relaciones de frecuencia.	56
Figura 4.18. Sistema masa resorte con una fuerza viscosa. (Modificado de Reyes, S. 1976).	57
Figura 4.19. Movimiento armónico simple sobreamortiguado. (Modificado de Reyes, S. 1976).	60
Figura 4.20. Movimiento armónico simple críticamente amortiguado. (Modificado de Reyes, S. 1976).	61

Figura 4.21. Movimiento armónico simple subamortiguado. (Modificado de Reyes, S. 1976).	63
Figura 4.22. Sistema masa resorte con una fuerza viscosa y una fuerza externa. (Modificado de Reyes, S. 1976).	63
Figura 4.23. Relación amplitud vs frecuencia con diferentes amortiguamientos. (Modificado de Reyes, S. 1976).	74
Figura 4.24. Clasificación de amortiguamientos.	75
Figura 4.25. Cuerda perturbada por un agente externo. (Modificado de Reyes, S. 1976).	77
Figura 4.26. Gráficas de la relación de las variables espacial y temporal. (Modificado de Reyes, S. 1976).	78
Figura 4.27. Propagación de un pulso de onda. (Modificado de Izquierdo, C. 2013).	79
Figura 4.28. Elemento Δx de una cuerda. (Modificado de Reyes, S. 1976).	83
Figura 4.29. Movimiento adquirido por una cuerda perturbada con un movimiento armónico simple. (Modificado de Ferreira, C. 2015).	95
Figura 4.30. Sentido de propagación de la onda. (Modificado de Reyes, S. 1976).	101
Figura 4.31. Parámetros del movimiento ondulatorio.	102
Figura 4.32. Segmento a analizar de una cuerda. (Modificado de Reyes, S. 1976).	103
Figura 4.33. Cilindro con un émbolo en estado de equilibrio que posteriormente es perturbado. (Modificado de Reyes, S. 1976).	109
Figura 4.34. Desfase de la onda de presión y la onda de elongación. (Modificado de Reyes, S. 1976).	115
Figura 4.35. Onda en diferentes instantes de tiempo. (Modificada de Reyes, S. 1976).	117
Figura 4.36. Ondas que se propagan en un medio dispersivo con su resultante (línea punteada). (Modificado de Reyes, S. 1976).	119
Figura 4.37. Características de los medios dispersivos. (Fuente: Reyes, S. 1976).	121
Figura 4.38. Superposición de dos ondas que producen un batimiento. (Modificado de Reyes, S. 1976).	123
Figura 4.39. Batimiento. (Modificado de Reyes, S. 1976).	125
Figura 4.40. Representación del efecto Doppler. (Fuente: Reyes, S. 1976).	126
Figura 4.41. Ejemplos de discontinuidades. (Modificado de Reyes, S. 1976).	129
Figura 4.42. Dos cuerdas unidas con distintas densidades lineales. (Fuente: Reyes, S. 1976).	130
Figura 4.43. Posibles pendientes que se pueden presentar en la cuerda. (Fuente: Reyes, S. 1976).	131
Figura 4.44. Diagrama de cuerpo libre. (Modificado de Reyes, S. 1976).	131

Figura 4.45. Esquema de propagación de las ondas incidente, reflejada y transmitida. (Fuente: Reyes, S. 1976).	134
Figura 4.46. Sistema resultante. (Modificado de Reyes, S. 1976).	141
Figura 4.47. Pared, medio que se considera completamente rígido. (Fuente: Reyes, S. 1976).	144
Figura 4.48. Composición de una onda estacionaria. (Modificado de Reyes, S. 1976).	146
Figura 4.49. Onda estacionaria en diferentes instantes de tiempo. (Modificado de Reyes, S. 1976).	147
Figura 4.50. Discontinuidades con extremo libre en una cuerda. (Fuente: Reyes, S. 1976).	149
Figura 4.51. Onda estacionaria en un extremo libre de una cuerda. (Modificado de Reyes, S. 1976).	152
Figura 4.52. Extremo abierto de un tubo. (Fuente: Reyes, S. 1976).	153
Figura 4.53. Extremo cerrado de un tubo. (Fuente: Reyes, S. 1976).	155
Figura 4.54. Cuerda fija por ambos extremos. (Fuente: Reyes, S. 1976).	156
Figura 4.55. Armónicos de una cuerda fija por ambos extremos. Fuente: Reyes, S. 1976).	169
Figura 4.56. Ondas que se propagan en la Tierra (Modificado de Griem, 1998).	170
Figura 4.57. Estudio de prospección sísmica (Modificado de Cosillo, s.f).	172
Figura 4.58. a) Señal sinusoidal periódica. B) Señal exponencial.	175
Figura 4.59. Periodos de resonancia con los que pueden colapsar ciertas edificaciones.	178
Figura 4.60. Gráfica de las respuestas de la pregunta uno.	181
Figura 4.61. Gráfica de las respuestas de la pregunta dos.	182
Figura 4.62. Gráfica de las respuestas de la pregunta tres.	183
Figura 4.63. Gráfica de las respuestas de la pregunta cuatro.	184
Figura 4.64. Gráfica de las respuestas de la pregunta cinco.	185
Figura 4.65. Gráfica de las respuestas de la pregunta seis.	186
Figura 4.66. Gráfica de las respuestas de la pregunta siete.	187
Figura 4.67. Gráfica de las respuestas de la pregunta ocho.	188

Resumen

La teoría de oscilaciones y ondas es importante en el campo de la geofísica, dado que muestra distintas formas particulares de movimiento que describen fenómenos en este campo. Por este motivo, es importante que el estudiante comprenda los conceptos físicos y matemáticos para que pueda aplicarlos en un ámbito teórico y práctico. Sin embargo, en ocasiones, al estudiante le es difícil comprender la parte teórica, por tal motivo, el presente trabajo consiste en la propuesta de una guía de estudio de la teoría de oscilaciones y ondas en la cual, se realizó un análisis de las ecuaciones, las cuales permiten conocer y calcular la evolución de dicho movimiento. Dicho análisis se correlacionó con la interpretación física correspondiente y se basó en teoremas de ecuaciones diferenciales, mecánica clásica y matemáticas elementales, debido a que los temas mencionados son parte fundamental para un excelente trabajo en el campo de la geofísica. El contenido de este trabajo está compuesto de dos etapas: la primera se basa en el análisis de los sistemas oscilatorios, los cuales son estudiados a través del movimiento armónico simple, superposición de movimientos armónicos, oscilaciones amortiguadas y forzadas, además del análisis de los sistemas ondulatorios que son estudiados por medio de las ondas viajeras y reflexión de ondas viajeras. En la segunda etapa, se hizo una interacción con estudiantes y sus conocimientos del área de oscilaciones y ondas y su relación con la geofísica, en donde se les aplicó un cuestionario diagnóstico, en el cual, los resultados fueron fatales.

Abstract

The theory of oscillations and waves is important in the field of geophysics, since it shows different forms of movement that describe phenomena in this field. It is important that the student understands the physical and mathematical concepts so that they can apply them in a theoretical and practical field. However, sometimes it is difficult for the student to understand the theoretical part, so this work consists of the proposal of a study guide of the theory of oscillations and waves in which, an analysis of the equations was made. These equations allow to know and calculate the evolution of this movement. The analysis was correlated with the corresponding physical interpretation and will be based on theorems of differential equations, classical mechanics and elementary mathematics, because these subjects are a fundamental part for an excellent work in the field of geophysics. The content of this work is composed of two stages: the first one is based on the analysis of oscillatory systems, which are studied through simple harmonic motion, superposition of harmonic motions, damped and forced oscillations. The analysis of wave systems, which are studied by means of traveling waves and reflection of traveling waves. Meanwhile, in the second stage there was an interaction with students and their knowledge of the area of oscillations and waves and their relationship with geophysics, where a diagnostic questionnaire was applied to them, in which the results were fatal.

Capítulo 1. Introducción

La observación de un fenómeno da una idea de las leyes naturales que describen el comportamiento de este. Para caracterizarlo se necesitan medir algunas cantidades físicas y calcular otras a partir de ellas, lo que hace necesario un conocimiento de las matemáticas y la física para comprender y modelar dicho fenómeno, por lo tanto, esto ayuda a un mejor entendimiento en el campo de la geofísica, ya que uno de los objetivos de esta tesis es el análisis de la teoría de oscilaciones y ondas. Dentro del campo de la geofísica, el análisis de fenómenos que ocurren en la Tierra permite describir el comportamiento de ella a partir de la medición y el cálculo de magnitudes físicas que definen propiedades espacio-temporales, que dan una idea de la dinámica interna de la Tierra.

Este conocimiento se extiende a áreas como la astronomía, cuestiones atmosféricas y espaciales, cálculo estructural, entre otros.

Esto exige conocer las propiedades mecánicas, físicas y químicas de un sistema, las cuales, de alguna manera, definen el comportamiento de él (sistema). Existe una forma de movimiento mecánico que en ocasiones las características que tiene el sistema en un instante determinado se repiten en otros instantes, lo cual se conoce como movimiento oscilatorio. Dentro de los movimientos oscilatorios, hay un tipo en particular en el cual las condiciones iniciales del sistema se recuperan en un tiempo (periodo). Tales movimientos oscilatorios se denominan movimientos periódicos y se analizan mediante el llamado movimiento armónico simple que caracteriza la relación entre el agente estimulante y la respuesta que brinda el sistema.

1.1 Planteamiento del problema

La mayoría de las veces al estudiante le es difícil comprender la correlación de las estructuras matemáticas con su conceptualización física. Es importante que se tenga un buen entendimiento de estos conceptos físicos y matemáticos, ya que

comprenderlos ayuda a un mejor entendimiento de la geofísica, en este caso enfocándose en el análisis de la teoría de oscilaciones y ondas.

1.2 Justificación

En la geofísica existen varias líneas de investigación englobadas en geofísica teórica y geofísica aplicada que permiten estudiar los diferentes problemas que surgen en el planeta Tierra. Considerando el crecimiento y demanda de profesionales en ciencias de la Tierra, es necesario contar con una nueva línea de investigación que se enfoque en elaborar metodologías de enseñanza, fuentes documentales, guías de estudio, etc. que se utilicen como herramientas complementarias principalmente para los alumnos y si está en su disposición, que también puedan hacer uso de estos los maestros.

Siendo este el caso, la propuesta de una guía de estudio para los estudiantes enfocada en el análisis físico-matemático de la teoría de oscilaciones y ondas.

Es importante que exista el desarrollo de estos materiales bibliográficos dirigidos principalmente a los estudiantes, para que estos tengan distintas alternativas de fuentes documentales que les permitan estudiar y entender mejor las materias básicas, formativas y optativas de su plan de estudio.

El buen entendimiento de los conceptos físicos y matemáticos es importante para que el estudiante pueda abordar, resolver y explicar diversos problemas en la geofísica. Comprender correctamente la parte teórica lleva al estudiante a tener un panorama amplio de los diversos fenómenos que se estudian en esta ciencia y de esta manera poder darles un buen planteamiento, explicación o solución dependiendo del objetivo requerido.

Actualmente, en la mayoría de los casos de estudio en la geofísica, se usan equipos especializados para la medición de distintas cantidades físicas, y así se pueden calcular otras a partir de estas, sin embargo, como estudiantes, a veces se pasa por alto el significado físico y matemático de estas cantidades, y no se conoce la correlación de sus estructuras matemáticas y su conceptualización física, las cuales

son importantes para poder aplicarlas a una interpretación ante cualquier fenómeno que se presente.

En el presente trabajo se realizó un análisis matemático del movimiento oscilatorio y ondulatorio, con la finalidad de comprender la importancia de correlacionar el campo teórico (abstracto) con la concretización física.

Por lo tanto, el análisis que se obtuvo será propuesto como una guía de estudio para que sea de utilidad para que los estudiantes puedan encontrar una bibliografía enfocada en el análisis de ecuaciones matemáticas con su sentido físico del campo de oscilaciones y ondas, la cual puede ser una herramienta para todos aquellos estudiantes que necesiten y deseen aprender de estos temas.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo General

Proponer una guía de estudio donde se analice y revise la teoría de oscilaciones y ondas mecánicas partiendo de conceptos fundamentales de matemáticas y física, para que el estudiante pueda utilizarla como una herramienta complementaria para su formación académica.

1.3.2 Objetivos Específicos

- Analizar la teoría matemática y física de oscilaciones y ondas mediante la bibliografía consultada para realizar una revisión de las ecuaciones relacionadas con esta.
- Proponer el análisis y revisión de la teoría de oscilaciones y ondas como una guía para que sea una herramienta de estudio para los alumnos.
- Conocer la relación de la teoría de oscilaciones y ondas con aplicaciones en la geofísica.
- Aplicar un cuestionario diagnóstico para determinar si la guía podría ser útil para la trayectoria académica de los estudiantes.

Capítulo 2. Marco Teórico

2.1 Momento lineal

El momento lineal de una partícula se expresa como el producto de la masa por su velocidad. Definido por:

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad (2.1)$$

Es un concepto físico de mucha importancia porque combina los dos elementos que caracterizan el estado dinámico de una partícula: su masa y su velocidad. ($\vec{p}$ Tiene la misma dirección que $\vec{v}$) (Alonso & Finn, 1967).

Toda partícula en la naturaleza interacciona con su medio. Si por alguna razón una partícula experimenta un cambio en su estado de movimiento se dice que interacciona con su medio. Este cambio puede ser descrito con la segunda ley de Newton.

2.2 Segunda ley de Newton; concepto de fuerza

Se define la variación con respecto al tiempo del movimiento de una partícula con el nombre de “fuerza”, es decir:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (2.2)$$

La fuerza es un concepto matemático el cual, por definición, es igual a la variación del momento lineal con respecto al tiempo, cuyo valor a su vez depende de la interacción con otras partículas. Por consiguiente, físicamente, se puede considerar la fuerza como la expresión de una interacción. La expresión 2.2 es la segunda ley de Newton (Alonso & Finn, 1967).

Si se recuerda la definición del movimiento, se puede escribir la ecuación 2.2 de la forma

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} \quad (2.3)$$

Si m es constante,

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (2.4)$$

O

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad (2.5)$$

De acuerdo con Alonso & Finn (1967), si la fuerza es constante la ecuación 2.4 dice que el movimiento es uniformemente acelerado. Esto sucede con cuerpos que caen cerca de la superficie terrestre: todos los cuerpos caen hacia la tierra con la misma aceleración $\vec{g}$, y, por consiguiente, la fuerza de atracción gravitacional de la tierra, llamado *peso*, es constante, que está definido por:

$$\vec{W} = m\vec{g}$$

Un sistema puede interactuar con “n” fuerzas, si se realiza la suma vectorial de cada fuerza presente en dicha interacción, da como resultado una fuerza resultante, lo cual es importante para analizar y describir el comportamiento del sistema.

2.3 Composición de fuerzas concurrentes

Si las fuerzas son concurrentes (es decir, si están aplicadas en el mismo punto), su resultante es el vector suma. Por lo tanto, la resultante $\vec{R}$ de varias fuerzas concurrentes $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots$ es

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots = \sum \vec{F}_i \quad (2.6)$$

Si las fuerzas son coplanares, por ejemplo, en el plano XY (figura 2.1), se tiene que $\vec{R} = \hat{\mu}_x R_x + \hat{\mu}_y R_y$, donde

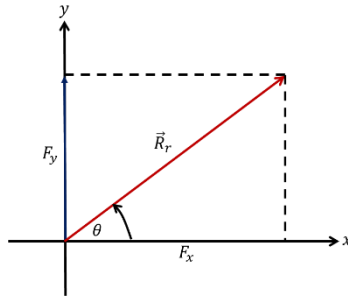


Figura 2.1. Fuerzas coplanares.
(Modificado de Alonso & Finn, 1967).

$$R_x = \sum F_{ix} = \sum F_i \cos \theta_i$$

(2.7)

$$R_y = \sum F_{iy} = \sum F_i \sin \theta_i$$

La magnitud de $\vec{R}$ es $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$ y su dirección están dadas por el ángulo θ mediante la relación $\theta = \tan^{-1} \frac{R_x}{R_y}$. Se debe suponer que la resultante $\vec{R}$ es físicamente equivalente a las componentes $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots$ (Alonso & Finn, 1967).

Como se ha visto en los temas anteriores, la dinámica es importante para conocer la relación que tiene el movimiento de un cuerpo y sus causas, causas que provocan un cambio en el estado físico del cuerpo o en su estado de movimiento, sin embargo, hay ocasiones en las que no se puede estudiar un cuerpo como una partícula, por consecuencia es importante el estudio de la dinámica rotacional.

2.4 Torque de una fuerza

Según Alonso & Finn (1967) se considera una fuerza $\vec{F}$ que actúa en un cuerpo C que puede rotar alrededor del punto O (Figura 2.2). Si la fuerza no pasa por O , el efecto total será la rotación del cuerpo alrededor de O . La efectividad de la rotación de $\vec{F}$ aumenta

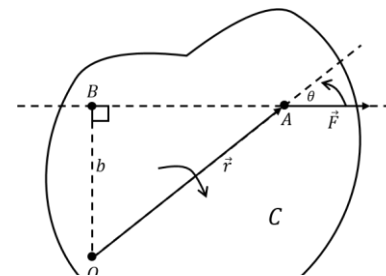


Figura 2.2. Torque de una fuerza
(Modificado de Alonso y Finn, 1967).

con la distancia perpendicular (denominado brazo de palanca) $b = OB$ desde O a la línea de acción de la fuerza. Por lo tanto, se define una cantidad física τ que se llamará torque o momento de fuerza, de acuerdo con la relación (notación escalar)

$$\tau = Fb \quad (2.7)$$

Dada la figura 2.2 se observa que $b = r \sin \theta$, por tanto

$$\tau = Fr \sin \theta \quad (2.8)$$

Tomando en cuenta que la magnitud del producto vectorial $\vec{A} \times \vec{B}$ está dada por

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = AB \sin \theta$$

Se llega a la conclusión que el torque de una fuerza puede considerarse como una cantidad vectorial dada por el producto vectorial

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (2.9)$$

Existe una relación entre el momento angular y el torque $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ de la fuerza aplicada. Por otro lado, el torque se puede escribir como la variación del momento angular respecto al tiempo, es decir

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau} \quad (2.10)$$

2.5 Momento angular

El momento angular con respecto a un punto O de un cuerpo de masa m que se mueve con velocidad $\vec{v}$ (y por consiguiente con movimiento $\vec{p} = m\vec{v}$) está definido por el producto vectorial (Alonso & Finn, 1967):

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \quad (2.10)$$

O

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v} \quad (2.11)$$

El momento angular es entonces un vector perpendicular al plano determinado por $\vec{r}$ y $\vec{v}$.

Por otra parte, el momento angular de un sistema de partículas

$$\frac{d\vec{L}_R}{dt} = \vec{\tau}_{ext}. \quad (2.13)$$

En esta ecuación $\vec{L}_R = \sum_i \vec{L}_i$ es el momento angular total de las partículas y $\vec{\tau}_{ext}$ es el torque total ejercido por fuerzas externas, la ecuación 2.13 es considerada como la ley fundamental de la dinámica de rotación (Alonso & Finn, 1967).

Ahora, se considera el momento angular para un cuerpo rígido que, rota alrededor de un eje, que es una relación vectorial dada por

$$\vec{L} = I\vec{\omega} \quad (2.14)$$

En la cual I es el momento principal de inercia correspondiente y $\vec{\omega}$ es la velocidad angular (Alonso & Finn, 1967).

2.6 Ecuación de movimiento de la rotación de un cuerpo rígido

La ecuación 2.13 establece una relación entre el momento angular total de un sistema de partículas y el torque total de las fuerzas aplicadas a las partículas cuando tanto el torque como el momento angular se calculan con respecto a un punto en reposo en un sistema inercial. Esto es

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau} \quad (2.15)$$

Donde $\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i$ es el momento angular total y $\vec{\tau} = \sum_i \vec{\tau}_i$ es el torque total debido a las fuerzas externas. Esta ecuación se cumple también para un cuerpo rígido, el cual es un caso especial de un sistema de partículas. La ecuación 2.15 constituye así la ecuación básica para discutir el movimiento de rotación de un cuerpo rígido (Alonso & Finn, 1967).

Para un cuerpo rígido que rota alrededor de un eje principal que tiene un punto fijo en un sistema inercial, de acuerdo con la ecuación 2.14, el torque externo $\vec{\tau}$ debe ser el torque con respecto al punto fijo sobre el eje principal. Luego la ecuación 2.15 se transforma en

$$\frac{d(I\vec{\omega})}{dt} = \vec{\tau} \quad (2.16)$$

Si el eje permanece fijo con respecto al cuerpo rígido, el momento de inercia permanece constante. Entonces

$$I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\tau} \quad (2.17)$$

O

$$I\vec{\alpha} = \vec{\tau} \quad (2.18)$$

Donde $\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$ es la aceleración angular del cuerpo rígido. La comparación de las ecuaciones 2.16, 2.17 y 2.18 con las ecuaciones 2.3, 2.4 y 2.5 sugiere una gran similitud entre la rotación de un cuerpo rígido con respecto a un eje principal y el movimiento de una partícula. La masa m es reemplazada por el momento de inercia I , la velocidad $\vec{v}$ por la velocidad angular $\vec{\omega}$, la aceleración $\vec{a}$ por la aceleración angular $\vec{\alpha}$, y la fuerza $\vec{F}$ por el torque $\vec{\tau}$ (Alonso & Finn, 1967).

Lo anterior, es importante, para el análisis del equilibrio dinámico de los sistemas (partícula, cuerpo rígido).

2.7 Ecuaciones diferenciales, planteamiento y definiciones.

Las leyes de la naturaleza se expresan mediante estructuras matemáticas, dichas estructuras se llaman ecuaciones diferenciales las cuales permiten modelar los fenómenos físicos de la naturaleza.

Se supone que la función $y = f(x)$ expresa cuantitativamente un fenómeno. Al estudiar este fenómeno es imposible establecer directamente el carácter de la dependencia entre y y x ; sin embargo, se puede establecer una dependencia entre

las magnitudes x , y y las derivadas de y con respecto a x : y' , y'' , ..., y^n , es decir, se puede escribir una ecuación diferencial (Piskunov, 1983).

De la dependencia obtenida entre x, y y las derivadas es preciso deducir la dependencia directa entre y y x , es decir, hallar $y = f(x)$, o como suele decirse, integrar una ecuación diferencial (Piskunov, 1983).

Una estructura que establece una relación entre la variable independiente x , la función buscada $y = f(x)$ y sus derivadas y' , y'' , ..., y^n se llama ecuación diferencial. Una ecuación diferencial se puede escribir simbólicamente en la forma siguiente:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})$$

O

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) \quad (2.19)$$

Si la función buscada $y = f(x)$ es la de una sola variable independiente, la ecuación diferencial se llama ordinaria. A la par con las ecuaciones diferenciales ordinarias, en el análisis matemático se estudian también las ecuaciones en derivadas parciales. Las ecuaciones que establecen una relación entre la función desconocida z , dependiente de dos o varias variables $x, y, \dots$, las propias variables $x, y, \dots$, y las derivadas parciales de z : $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, etc., se llaman ecuaciones en derivadas parciales. Por ejemplo, la ecuación $x \frac{\partial z}{\partial x} = y \frac{\partial z}{\partial y}$ será en derivadas parciales con la función desconocida $z(x, y)$ (Piskunov, 1983).

La teoría de las ecuaciones diferenciales es necesaria para realizar un análisis matemático, específicamente los temas mostrados a continuación son las ecuaciones diferenciales y métodos de solución a estas que son requeridos en el análisis.

2.8 Ecuaciones lineales homogéneas

Una ecuación lineal diferencial de n -ésimo orden se llama lineal si es de primer orden respecto a la función desconocida y y sus derivadas $y, \dots, y^{n-1}, y^n$, es decir, si esta ecuación tiene la forma

$$a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \dots + a_n y = f(x) \quad (2.20)$$

Donde $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ y $f(x)$ son funciones dadas de x o constantes; además $a_0 \neq 0$ para todos los valores de x , en el dominio de definición de la ecuación anterior. En adelante supongamos que las funciones $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ y $f(x)$ son continuas para todos los valores de x y que el coeficiente $a_0 = 1$ (si a_0 es distinto de la unidad, es suficiente dividir por él todos los términos de la ecuación). La función $f(x)$, se llama segundo miembro de la ecuación (Piskunov, 1983).

Si $f(x) \neq 0$, la ecuación se llama lineal no homogénea, o ecuación con segundo miembro. Si $f(x) = 0$, la ecuación tiene la forma:

$$y^n + a_1 y^{n-1} + \dots + a_n y = 0 \quad (2.21)$$

Y se llama lineal homogénea, o ecuación sin segundo miembro (el primer miembro de esta ecuación es una función homogénea de primer orden respecto a $y, y', y'', \dots, y^n$) (Piskunov, 1983).

2.9 Ecuaciones lineales homogéneas de segundo orden con coeficientes constantes

De acuerdo con Piskunov (1983), sea la ecuación lineal homogénea de segundo orden

$$y'' + py' + qy = 0 \quad (2.22)$$

Donde p y q son números constantes reales. Para hallar la integral general de esta ecuación es suficiente encontrar dos soluciones particulares linealmente independientes. Se buscan soluciones de la forma

$$y = e^{kx}, \quad \text{donde } k = \text{constante}; \quad (2.23)$$

Entonces,

$$y' = ke^{kx}$$

$$y'' = k^2 e^{kx}$$

Introduciendo las expresiones obtenidas de las derivadas de la ecuación 2.22, se halla:

$$e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0$$

Como $e^{kx} \neq 0$, resulta que

$$k^2 + pk + q = 0 \quad (2.24)$$

Por consiguiente, si k satisface a la ecuación 2.24, e^{kx} será solución de la ecuación 2.22. La expresión 2.24 se llama ecuación característica respecto a la ecuación 2.22.

La ecuación característica es una ecuación de segundo orden que tiene dos raíces, las cuales se designan por k_1 y k_2 . Entonces

$$k_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}; \quad k_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Son posibles los casos siguientes:

1. k_1 y k_2 son números reales y distintos ($k_1 \neq k_2$);
2. k_1 y k_2 son números complejos
3. k_1 y k_2 son números reales e iguales ($k_1 = k_2$)

Si se examina cada paso por separado:

1. Las raíces de la ecuación característica son reales y distintas: $k_1 \neq k_2$. En este caso las soluciones particulares serán las funciones

$$y_1 = e^{k_1 x}$$

$$y_2 = e^{k_2 x}$$

Estas soluciones son linealmente independientes, puesto que

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{e^{k_2 x}}{e^{k_1 x}} = e^{(k_2 - k_1)x} \neq cte$$

Por lo tanto, la integral general tiene la forma

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} \quad (2.25)$$

2. Las raíces de la ecuación característica son complejas. Puesto que las raíces complejas son conjugadas en pares, se introducen las designaciones:

$$k_1 = \alpha + i\beta,$$

$$k_2 = \alpha - i\beta$$

Donde:

$$\alpha = -\frac{p}{2}; \quad \beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$$

Las soluciones particulares se pueden escribir de la forma:

$$x_1 = e^{(\alpha + i\beta)y}, \quad (2.26')$$

$$x_2 = e^{(\alpha - i\beta)y} \quad (2.26'')$$

Estas son funciones complejas de un argumento real, que satisfacen la ecuación diferencial 2.22. Es evidente, que si alguna función compleja del argumento real

$$y = u(x) + iv(x) \quad (2.27)$$

Satisface la ecuación 2.22, a esta ecuación satisfacen también las funciones $u(x)$ y $v(x)$. En efecto introduciendo la expresión 2.27 en la ecuación 2.22 tenemos:

$$[u(x) + iv(x)]'' + p[u(x) + iv(x)]' + q[u(x) + iv(x)] \equiv 0$$

ó

$$(u'' + pu' + qu) + i(v'' + pv' + qv) \equiv 0$$

Pero una función compleja es nula solamente en el caso en que las partes real e imaginaria son iguales a cero, es decir,

$$u'' + pu' + qu = 0$$

$$v'' + pv' + qv = 0$$

Se ha demostrado que $u(x)$ y $v(x)$ son soluciones de la ecuación dada. Se escriben las soluciones complejas 2.26 en la forma de una suma de las partes real e imaginaria:

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x + i e^{\alpha x} \sin \beta x$$

$$y_2 = e^{\alpha x} \cos \beta x - i e^{\alpha x} \sin \beta x$$

Según lo demostrado las funciones reales siguientes serían las soluciones particulares de la ecuación 2.22:

$$\tilde{y}_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x \quad (2.28')$$

$$\tilde{y}_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x \quad (2.28'')$$

Las funciones $\tilde{y}_1$ e $\tilde{y}_2$ son linealmente independientes, puesto que

$$\frac{\tilde{y}_1}{\tilde{y}_2} = \frac{e^{\alpha x} \cos \beta x}{e^{\alpha x} \sin \beta x} = \cot \beta x \neq \text{const.}$$

Por tanto, la solución general de la ecuación 2.22 en el caso en que las raíces de la ecuación característica son complejas toma la forma:

$$y = A\tilde{y}_1 + B\tilde{y}_2 = Ae^{\alpha x} \cos \beta x + Be^{\alpha x} \sin \beta x$$

ó

$$y = e^{\alpha x} (A \cos \beta x + B \sin \beta x) \quad (2.29)$$

Donde A y B son las constantes arbitrarias.

3. Las raíces de la ecuación característica son reales e iguales, es decir $k_1 = k_2$. Una de las soluciones particulares, a saber, $y_1 = e^{k_1 x}$, se obtiene en virtud de los razonamientos precedentes. Es preciso encontrar la segunda solución

particular, linealmente independiente de la primera (la función e^{k_2x} es idénticamente igual a e^{k_1x} , por lo que no puede considerarse como segunda solución particular).

Se busca la segunda solución particular en la forma:

$$y_2 = xu(x)e^{k_1x}, \quad (2.30)$$

Donde $u(x)$ es una función desconocida a determinar. Si se deriva se encuentra:

$$y_2' = u'e^{k_1x} + k_1ue^{k_1x} = e^{k_1x}(u' + k_1u),$$

$$y_2'' = u''e^{k_1x} + 2k_1u'e^{k_1x} + k_1^2ue^{k_1x} = e^{k_1x}(u'' + 2k_1u' + k_1^2u).$$

Se sustituyen las expresiones de las derivadas de la ecuación 2.22, se obtiene:

$$e^{k_1x}[u'' + (2k_1 + p)u' + (k_1^2 + pk_1 + q)u] = 0.$$

Como k_1 es una raíz múltiple de la ecuación característica, se tiene que:

$$k_1^2 + pk_1 + q = 0 \quad (2.31)$$

Además, $k_1 = k_2 = -\frac{p}{2}$ ó $2k_1 = -p$, $2k_1 + p = 0$.

Por tanto, para hallar $u(x)$, hace falta resolver la ecuación $e^{k_1x}u'' = 0$ ó $u'' = 0$. Integrando obtenemos: $u = Ax + B$. En particular se puede poner $A = 1, B = 0$; entonces, $u = x$. Así, en calidad de segunda solución particular se puede tomar:

$$y_2 = xe^{k_1x}. \quad (2.32)$$

Esta ecuación es linealmente independiente de la primera, puesto que

$$\frac{y_2}{y_1} = x \neq \text{const.}$$

Por lo tanto, como integral general se puede tomar la función:

$$y = C_1e^{k_1x} + C_2xe^{k_1x} = e^{k_1x}(C_1 + C_2x) \quad (2.33)$$

2.10 Ecuaciones lineales no homogéneas de segundo orden

Sea una ecuación lineal no homogénea de segundo orden

$$y'' + a_1y' + a_2y = f(x) \quad (2.34)$$

La estructura de la solución general de la ecuación 2.34 se determinará por el teorema siguiente:

La solución general de la ecuación no homogénea 2.34 se representa como suma de cualquier solución particular y^* de esta ecuación y de la solución general $\bar{y}$ de la ecuación homogénea correspondiente (Piskunov, 1983).

$$\bar{y}'' + a_1\bar{y}' + a_2\bar{y} = 0 \quad (2.35)$$

2.11 Funciones de varias variables

La dinámica de los fenómenos de la naturaleza no depende únicamente de una sola variable. Estas son funciones de varias variables, en estas la variable dependiente estará regida por más de una variable independiente (Piskunov, 1983).

De acuerdo con Piskunov (1983) si a cada par (x, y) de valores de dos variables x e y , independientes una de otras, tomado de ciertas de cierto campo D de su variación, les corresponde un valor determinado de la magnitud z es una función de dos variables independientes x e y , definida en el campo D . En forma simbólica una función de dos variables se representa así:

$$z = f(x, y), \quad (2.36')$$

$$z = F(x, y), \quad etc. \quad (2.36'')$$

La definición de función de dos variables puede extenderse fácilmente al caso de tres y más variables (Piskunov, 1983).

Si a todo conjunto estudiado de valores de las variables $x, y, z, \dots, u, t$, corresponde un valor determinado de la variable w , entonces esta última es función de las variables independientes $x, y, z, \dots, u, t$, o $w = F(x, y, z, \dots, u, t)$ o $w = f(x, y, z, \dots, u, t)$, etc. (Piskunov, 1983).

2.12 Derivadas parciales de la función de varias variables

El límite de la razón del incremento parcial $\Delta_x z$ con respecto a x , en relación con el incremento Δx , cuando Δx tiende a cero se llama derivada parcial respecto a x de la función $z = f(x, y)$ (Piskunov, 1983).

De acuerdo con Piskunov (1983), la derivada parcial respecto a x de la función $z = f(x, y)$ se designa por uno de los símbolos siguientes,

$$z'_x; \quad f'_x(x, y); \quad \frac{\partial z}{\partial x}; \quad \frac{\partial f}{\partial x}.$$

De tal modo según la definición:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \quad (2.37)$$

Análogamente, la derivada parcial con respecto a y de la función $z = f(x, y)$ se determina como el límite de la razón del incremento parcial de la función $\Delta_y z$ con respecto a y , en relación con el incremento Δy , cuando Δy tiende a cero. La derivada parcial con respecto a y se designa por uno de los símbolos siguientes,

$$z'_y; \quad f'_y(x, y); \quad \frac{\partial z}{\partial y}; \quad \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Así,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \quad (2.38)$$

Se observa que $\Delta_x z$ se calcula manteniéndose y invariable y $\Delta_y z$, manteniéndose x invariable; se llama derivada parcial de la función $z = f(x, y)$, respecto a x , a la derivada de esta función respecto a x , calculada en la suposición de que y es constante. Se llama derivada parcial de la función $z = f(x, y)$, respecto a y , a la derivada de esta función respecto a y , calculada en la suposición de que x es constante (Piskunov, 1983).

De la definición formulada se deduce que las reglas para calcular las derivadas parciales son las mismas que se utilizan para calcular la derivada de las funciones de una variable; es preciso, solamente, tener en cuenta, respecto a qué variable se busca la derivada (Piskunov, 1983).

Las derivadas parciales de una función de cualquier número de variables se hallan de manera análoga. Por ejemplo, si se tiene la función u de cuatro variables x, y, z, t :

$$u = f(x, y, z, t),$$

Entonces:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z, t) - f(x, y, z, t)}{\Delta x}, \quad (2.39')$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y, z, t) - f(x, y, z, t)}{\Delta y}, \text{ etc.} \quad (2.39'')$$

Si se tiene un conjunto de sistemas y existe la posibilidad que algunos desarrollen algo que se llama movimiento periódico, (repiten sus características iniciales en intervalos regulares de tiempo). Dentro de este trabajo, se estudian los sistemas que cumplen con este tipo de movimiento. Para su análisis se hace uso de funciones periódicas.

2.13 Funciones periódicas

Una función periódica se puede definir como una función para la cual

$$f(t) = f(t + T) \quad (2.40)$$

Para todo valor de t . La constante mínima T que satisface la relación 2.40 se llama período de la función.

Mediante de 2.40, se obtiene,

$$f(t) = f(t + nT), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.41)$$

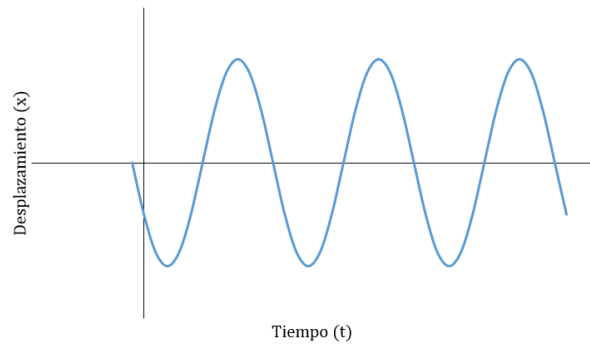


Figura 2.3. Función periódica.

La figura 2.3 muestra un ejemplo de una función periódica. Las funciones periódicas son tratadas mediante la teoría de Fourier (Hsu, 1973).

2.14 Series de Fourier

Una serie de Fourier es la representación de una función como una serie de constantes multiplicadas por seno y/o coseno de diferentes frecuencias. (O'Neil, 2008).

Sea la función $f(t)$ una función periódica de periodo T , la cual se puede representar por la serie trigonométrica

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos w_0 t + a_2 \cos 2w_0 t + \dots + b_1 \sin w_0 t + b_2 \sin 2w_0 t + \dots$$

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nw_0 t + b_n \sin nw_0 t) \quad (2.42)$$

Donde $w_0 = \frac{2\pi}{T}$

Una serie como la representada por la ecuación 2.42 se llama serie trigonométrica de Fourier, estas permiten conocer el comportamiento de los armónicos. Esta serie también se puede representar de la siguiente forma,

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(nw_0 t - \theta_n) \quad (2.43)$$

Según la ecuación 2.43, es evidente que la representación en series de Fourier de una función periódica representa la función periódica como la suma de componentes sinusoidales que tienen diferentes frecuencias. La componente sinusoidal de frecuencia $w_n = nw_0$ se denomina la n -ésima armónica de la función periódica. La primera armónica comúnmente se conoce como la componente fundamental porque tiene el mismo periodo de la función y $w_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T}$ se conoce como la frecuencia angular fundamental. Los coeficientes C_n y los θ_n se conocen como amplitudes armónicas y ángulos de fase. (Hsu, 1973)

Sean los coeficientes de Fourier:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(nw_0 t) dt \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.44)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sen(nw_0 t) dt \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.45)$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt \quad (2.46)$$

2.15 Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (EDP).

La mayoría de las leyes de la física están expresadas en términos de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (EDP), es decir, esas leyes describen fenómenos físicos relacionados con derivadas en función del espacio y tiempo. Las derivadas que están presentes en esas ecuaciones representan variaciones. Por lo tanto, se tienen ecuaciones en derivadas parciales con alguna cantidad desconocida que se desea encontrar (Farlow, 1993).

Una ecuación diferencial parcial es una ecuación que contiene derivadas parciales. En contraste con las ecuaciones diferenciales ordinarias, donde la función desconocida depende solo de una variable. En las EDP, la función desconocida depende de varias variables,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.47)$$

La función desconocida u siempre depende de más de una variable. La variable u es la variable dependiente, mientras las que se diferencian con respecto a, son llamadas variables independientes. Por ejemplo en la ecuación 2.47 la variable dependiente $u(x, t)$ es una función de dos variables independientes x y t (Farlow, 1993)

Capítulo 3. Metodología

3.1 Etapa 1. Propuesta de la guía de estudio

3.1.1 Documentación bibliográfica

Inicialmente se buscaron diversas fuentes bibliográficas de oscilaciones y ondas mecánicas, para poder hacer la elección de los temas y formar la base de la guía a desarrollar. De igual manera, se utilizaron bibliografías de libros de matemáticas y física para la resolución de distintos ejemplos.

3.1.2 Elección de temas

La elección de temas se realizó con base en el plan de estudios de ingeniería geofísica y también en el libro “*Oscilaciones y ondas mecánicas*” del autor Sergio Reyes publicado en el año de 1976. Los temas elegidos se trabajarán en dos partes, de la siguiente manera:

- I. Análisis de los sistemas oscilatorios
 - Vibraciones armónicas simples
 - Velocidad y aceleración del movimiento armónico simple
 - Péndulo matemático y físico
 - Composición de movimientos armónicos
 - Oscilaciones amortiguadas
 - Oscilaciones forzadas y resonancia
- II. Análisis de los sistemas ondulatorios
 - Ondas viajeras
 - Reflexión de ondas viajeras

3.1.3 Análisis de los sistemas oscilatorios y ondulatorios

La revisión y el análisis se realizaron con base en el libro *Oscilaciones y ondas mecánicas* del autor Sergio Reyes (1976). Para cada uno de los temas seleccionados se realizará lo siguiente:

1. Determinar qué sistema se usará para estudiar cierto movimiento, tales como, sistema masa-resorte, péndulo, cuerda vibrante.
2. A partir del sistema utilizado, analizar el planteamiento, usando las leyes y teoremas matemáticos y físicos que son necesarios, para poder obtener la ecuación del movimiento.
3. A partir de la ecuación obtenida, analizar la solución de la ecuación del sistema, con base en las leyes y teoremas matemáticos y físicos que son necesarios para obtener la solución.
4. Una vez obtenida la ecuación del movimiento y su solución, explicar los conceptos y parámetros relacionados del sistema.

Cabe mencionar que hubo subtemas derivados de los temas principales y que los sistemas elegidos y el seguimiento del análisis son con base en la bibliografía de oscilaciones y ondas mencionada anteriormente.

3.1.4 Discusión relación con la geofísica

Finalmente, se realizó una discusión de cómo están relacionados la teoría de oscilaciones y ondas con aplicaciones en la geofísica.

3.2 Etapa 2. Interacción con estudiantes

3.2.1 Selección de estudiantes

Para realizar una prueba que determine si la guía puede ser de utilidad para los estudiantes, se seleccionó una cantidad de 30 alumnos de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla que se encuentran cursando entre el 5° y 9° semestre de ingeniería geofísica.

3.2.2 Evaluación inicial a estudiantes

Para conocer qué tanto han comprendido acerca de estos temas se les aplicó un cuestionario diagnóstico de oscilaciones y ondas.



Figura 3.1. Aplicación del cuestionario diagnóstico a estudiantes de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.

El cuestionario diagnóstico contó con 8 preguntas, 1 de opción múltiple y 7 abiertas, Se eligieron dichas preguntas dado que son básicas en el área de oscilaciones y ondas. Los estudiantes no tenían conocimiento de la aplicación del cuestionario diagnóstico y se les dio un tiempo aproximado de 15 a 20 minutos para contestar las preguntas.

Las preguntas fueron las siguientes:

1.- ¿Cuál es la ecuación de la onda?

a) $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$

b) $y(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$

c) $y(t) = A \sin(\omega t + \phi)$

d) $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = v \frac{\partial y}{\partial t}$

2.- ¿Existe alguna diferencia entre el movimiento oscilatorio y el movimiento ondulatorio? Argumenta tu respuesta.

3.- ¿Qué define el estado de movimiento de un MAS (Movimiento Armónico Simple)?

4.- ¿Qué es la frecuencia angular y qué representa?

5.- ¿Qué representa la fase en un movimiento ondulatorio?

6.- ¿Qué son los armónicos y que representan?

7.- ¿Qué es la velocidad de fase y velocidad de grupo?

8.- ¿Encuentras alguna relación entre estos conceptos y la aplicación en la ingeniería geofísica? Si tu respuesta es “Sí” menciona un ejemplo.

3.2.3 Análisis de los resultados de los estudiantes

Para el análisis de las evaluaciones se realizó lo siguiente:

1. Revisión del cuestionario diagnóstico.

2. A partir de las respuestas de los estudiantes se realizó un análisis de cada pregunta, identificando las diferencias y similitudes entre respuestas asimismo comparando con las respuestas correctas.
3. Finalmente se realizaron algunas gráficas que muestran de manera general el resultado de cada una de las preguntas.

Capítulo 4. Resultados

4.1. Propuesta de la guía de estudio

4.1.1 Análisis del movimiento oscilatorio

Dentro de las distintas formas de movimiento, existe un tipo de movimiento mecánico en el cual las características que presenta un sistema en un instante determinado de tiempo se repiten en instantes posteriores, la propia naturaleza brinda varios ejemplos con los cuáles se analizarán estos movimientos.

Si se supone un columpio, el cual está representado en la figura 4.1, en este caso el columpio se verá afectado por un agente externo el cual será una persona, la cual lleva el columpio a la posición (a) y lo suelta sin realizar algún otro movimiento, la trayectoria del columpio describirá un movimiento de vaivén, este movimiento se realizará alrededor de su posición de equilibrio (c) pasando además por distintas posiciones hasta que finalmente se detendrá.

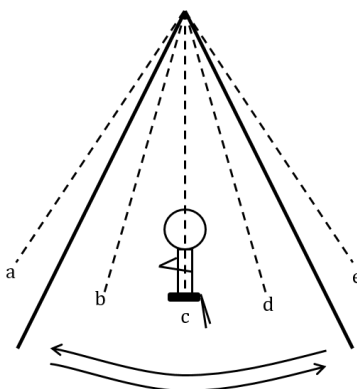


Figura 4.1. Representación de un movimiento oscilatorio.

Cuando un cuerpo realiza un movimiento de vaivén alrededor de un punto fijo de manera tal que sus características se repiten a través del tiempo, diremos que está animado de un movimiento oscilatorio. (Reyes, S., 1987).

Por lo tanto, un movimiento oscilatorio se describe como un movimiento periódico que se mueve alrededor de una posición de equilibrio. Un sistema se encuentra en un movimiento periódico cuando sus características iniciales se repiten en intervalos de tiempo regulares.

4.1.1.1 Movimiento armónico simple

Dentro de los movimientos oscilatorios y periódicos se estudiará el movimiento armónico simple, para estudiar este movimiento se analizará un sistema masa-resorte representado en la figura 4.2

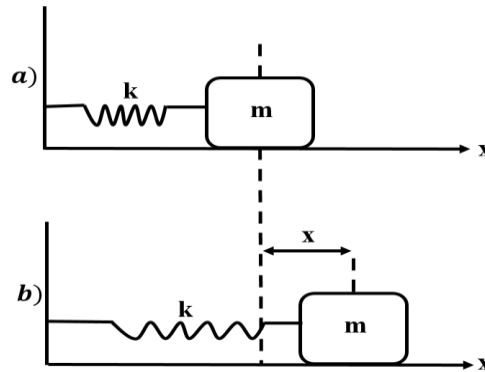


Figura 4.2. Sistema masa resorte. (Modificado de Reyes, S. 1976).

En la figura 4.2 la masa se estira a una distancia x a partir de su posición de equilibrio, se supondrá que la superficie en la que se encuentra el sistema es lisa y libre de fricción. A partir de la nueva posición se suelta el bloque de masa, debido a la fuerza recuperadora elástica que se ejerce en sentido contrario al desplazamiento, el bloque adquirirá una velocidad que hará regresar al bloque de masa a su posición de equilibrio, sin embargo, este continuará moviéndose debido a la energía cinética adquirida, así de esta manera comprimiendo el resorte, el cual va almacenando energía potencial en función del movimiento del bloque de masa. Una vez comprimido el resorte, se iniciará de nuevo un movimiento, pero en sentido contrario repitiéndose de forma periódica.

Para analizar el movimiento, se aplica la segunda Ley de Newton

$$\sum F_x = ma_x \quad (4.1)$$

De acuerdo a la figura 4.2 se puede reescribir como,

$$-kx = m \frac{d^2x}{dt^2} \quad (4.2)$$

Debido a que

$$\sum F_x = -kx \quad y \quad a_x = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Si se reagrupa la ecuación 4.2 se obtiene

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \quad (4.3)$$

La ecuación anterior es la ecuación diferencial del sistema masa-resorte. Se puede concluir que cualquier sistema físico que tenga una ecuación diferencial del tipo:

$$a \frac{d^2x}{dt^2} + bx = 0 \quad (4.4)$$

Dónde a y b son parámetros que dependen del sistema, x es la variable analizada y t es el tiempo, por lo tanto, se dice que tiene un comportamiento armónico simple, entonces el movimiento de un sistema masa resorte es un movimiento armónico simple.

Si se divide la ecuación 4.3 entre la masa, se puede reescribir la ecuación como

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \quad (4.5)$$

Si $w^2 = \frac{k}{m}$, la ecuación 4.5 se transforma en

$$\frac{d^2x}{dt^2} + w^2x = 0 \quad (4.6)$$

La ecuación 4.6 es una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden que se escribe de la siguiente forma

$$x'' + w^2x = 0 \quad (4.7)$$

Para hallar la integral general de esta ecuación es suficiente encontrar dos soluciones particulares linealmente independientes, de la forma

$$x = e^{kt}, \quad \text{donde } k = \text{constante};$$

Entonces,

$$x' = ke^{kt} = kx; \quad x'' = k^2e^{kt} = k^2x$$

Se introducen las expresiones obtenidas en las derivadas en la ecuación 4.7

$$\begin{aligned} k^2e^{kt} + w^2e^{kt} &= 0 \\ e^{kt}(k^2 + w^2) &= 0 \end{aligned} \tag{4.8}$$

Dado que $e^{kx} \neq 0$, resulta que

$$k^2 + w^2 = 0 \tag{4.9}$$

$$k = \pm\sqrt{-w^2}$$

$$k_1 = iw \quad y \quad k_2 = -iw$$

Puesto que las raíces complejas son conjugadas en pares, se introducen las designaciones:

$$k_1 = \alpha + i\beta; \quad k_2 = \alpha - i\beta$$

Las soluciones particulares se pueden escribir de la forma:

$$x_1 = e^{(\alpha+i\beta)t}; \quad x_2 = e^{(\alpha-i\beta)t}$$

Ya que las raíces de la ecuación característica son complejas, la solución general de la ecuación 4.7 toma la forma:

$$x = e^{\alpha x}(B\cos\beta t + iA\sin\beta t)$$

Por lo tanto, la solución es

$$\begin{aligned} x &= e^0(B\cos(wt) + iA\sin(wt)) \\ x &= B\cos(wt) + iA\sin(wt) \end{aligned} \tag{4.10}$$

Debido a que las raíces de la ecuación 4.10 son imaginarias puras, entonces la solución es

$$x = A\sin(wt + \varphi_0) \tag{4.11}$$

Donde A y φ_0 , son dos constantes independientes, amplitud y fase inicial, respectivamente, las cuales se evalúan a partir de las condiciones iniciales. El parámetro $w = \sqrt{\frac{k}{m}}$ es lo que se denomina frecuencia angular del sistema. Por lo tanto, cualquier sistema con una ecuación de la forma 4.4 tendrá una solución del tipo 4.11. Además, se puede notar que la solución es periódica. Cuyo periodo de movimiento será el tiempo mínimo T al cabo del cual en el sistema se repiten las condiciones iniciales de posición, velocidad y aceleración. Esto equivale a un cambio en la fase de 2π radianes (Reyes, 1976).

Por otro lado, la fase en cualquier instante se define como

$$\varphi = wt + \varphi_0 \quad (4.12)$$

En términos de lo anterior, se puede calcular el valor de T en términos de la fase, es decir

$$[w(t + T) + \varphi] = (wt + \varphi) + 2\pi$$

$$[w(t + T) + \varphi] - (wt + \varphi) = 2\pi$$

$$[w(t + T) + \varphi] - wt - \varphi = 2\pi$$

$$[w(t + T)] - wt - \varphi = 2\pi$$

$$wt + wT - wt - \varphi = 2\pi$$

$$wT = 2\pi$$

$$T = \frac{2\pi}{w} \quad (4.13)$$

En términos del periodo la frecuencia es

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (4.14)$$

Pero $w = \sqrt{\frac{k}{m}}$, por lo tanto

$$w = 2\pi f \quad (4.15)$$

La ecuación 4.15 relaciona los valores de la frecuencia angular y la frecuencia en un movimiento armónico simple.

Los parámetros fundamentales de un movimiento armónico simple son la frecuencia, frecuencia angular, periodo, fase y amplitud (figura 4.3).

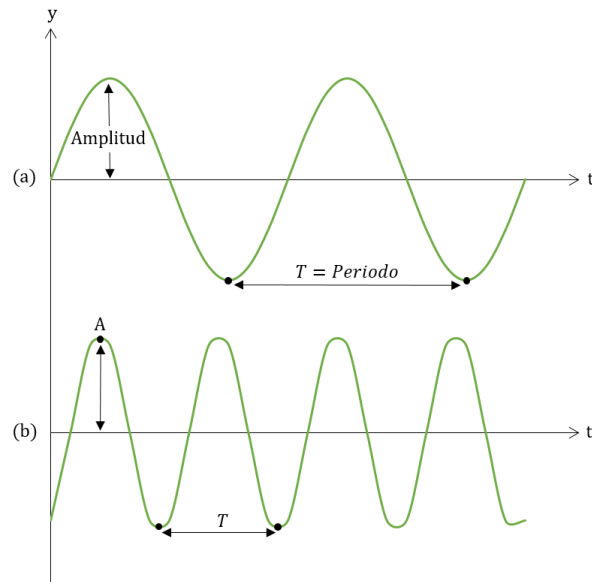


Figura 4.3. Parámetros de un movimiento armónico simple.

4.1.1.2 Interpretación del movimiento armónico simple a partir de un análisis gráfico

La figura 4.4 representa un punto M que describe un movimiento circular uniforme con velocidad angular ω en una trayectoria de radio A .

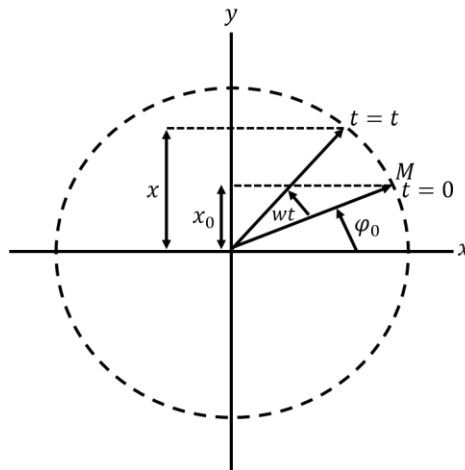


Figura 4.4. Movimiento circular uniforme.
(Modificado de Reyes, S. 1976).

En $t = 0$ el punto M se encuentra con un ángulo inicial φ_0 , si dicho punto se mueve con una velocidad angular constante w , el movimiento realizado a partir de $t = 0$ a un tiempo posterior forma un ángulo wt , por lo tanto, el punto M ahora describirá un ángulo de la forma $wt + \varphi_0$ con relación al eje x . Conforme el punto M se va moviendo sobre la circunferencia, su proyección x con respecto al eje Y sube y baja realizando un movimiento oscilatorio alrededor del origen.

Por lo tanto, la posición x en un instante t en la proyección del eje Y , será descrita por:

$$x = A \text{sen}(wt + \varphi_0) \quad (4.16)$$

Se puede concluir que la proyección de un punto que describe un movimiento circular uniforme realiza un movimiento armónico simple.

También se puede definir que la *frecuencia angular* es la velocidad con la que debe moverse un punto sobre una circunferencia, de forma tal, que la proyección del mismo realice un movimiento armónico simple (Reyes, 1976).

4.1.1.3 Desplazamiento, velocidad y aceleración

A partir de la ecuación 4.16 se puede hallar la velocidad en cualquier instante, se sabe que

$$\begin{aligned} v &= \frac{dx}{dt} \\ v &= A \frac{d}{dt} \text{sen}(wt + \varphi_0) \\ v &= Aw \cos(wt + \varphi_0) \end{aligned} \quad (4.17)$$

Para la aceleración se sabe:

$$\begin{aligned} a &= \frac{dv}{dt} \\ a &= Aw \frac{d}{dt} \cos(wt + \varphi_0) \\ a &= Aw [-\text{sen}(wt + \varphi_0)]w \end{aligned}$$

$$a = -Aw^2 \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (4.18)$$

La velocidad y la aceleración son funciones periódicas. Dado que los valores de seno y coseno oscilan entre ± 1 los valores extremos de la velocidad y aceleración son,

$$v = \pm \omega A, \quad a = \pm \omega^2 A$$

Por lo tanto, los valores máximos de velocidad y aceleración son los siguientes

$$v_{\text{máx}} = \omega A$$

$$a_{\text{máx}} = \omega^2 A$$

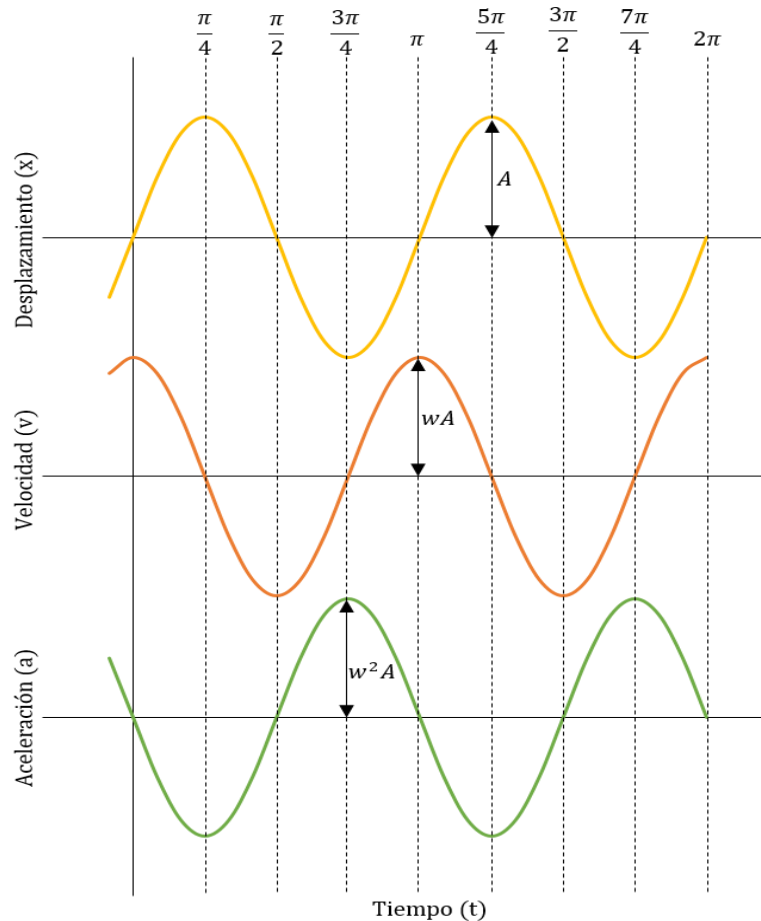


Figura 4.5. Gráficos de desplazamiento, velocidad y aceleración en función del tiempo en el movimiento armónico simple.

En la figura 4.5 se observan los gráficos de desplazamiento, velocidad y aceleración en función del tiempo, se puede observar que la gráfica de velocidad y la gráfica de desplazamiento está desfasada un ángulo de $\frac{\pi}{2}$, debido a esto, cuando el desplazamiento alcanza su máxima amplitud la velocidad es igual a cero; por otra parte la gráfica de aceleración está desfasada un ángulo de π de la gráfica de desplazamiento, entonces para este caso cuando el desplazamiento es máximo, la aceleración también es máxima pero en sentido contrario; también hay que tomar en cuenta que cuando el desplazamiento es cero la velocidad es máxima y la aceleración de igual manera que el desplazamiento es igual a cero.

Si $t = 0$ puede existir un desplazamiento inicial como una velocidad inicial, por lo tanto, la amplitud del sistema dependerá de ambas, por lo tanto a continuación se analizará dicha dependencia.

Se tiene que:

$$x = A \sin(\omega t + \varphi_0), \quad v = A \omega \cos(\omega t + \varphi_0)$$

Para $t = 0$

$$x = A \sin(\varphi_0), \quad v = A \omega \cos(\varphi_0)$$

Se pueden reescribir como:

$$\frac{x_0}{A} = \sin(\varphi_0), \quad \frac{v_0}{\omega A} = \cos(\varphi_0)$$

Si se suma y eleva al cuadrado

$$\frac{x_0^2}{A^2} + \frac{v_0^2}{A^2 \omega^2} = \sin^2(\varphi_0) + \cos^2(\varphi_0)$$

$$\frac{x_0^2}{A^2} + \frac{v_0^2}{A^2 \omega^2} = 1$$

$$\frac{1}{A^2} \left(x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2} \right) = 1$$

$$x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2} = A^2$$

$$A^2 = x_0^2 + \left(\frac{v_0}{w}\right)^2$$

$$A^2 = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{w}\right)^2} \quad (4.20)$$

4.1.1.4 Energía del movimiento armónico simple

Se sabe que la ecuación diferencial que rige a un movimiento armónico simple para un sistema masa resorte es el siguiente

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

Si se usa la regla de la cadena, entonces:

$$m \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

$$mv \frac{dv}{dx} + kx = 0$$

Si se integra,

$$\int mv \, dv + \int kx \, dx = 0$$

$$m \int v \, dv + k \int x \, dx = 0$$

Se obtiene lo siguiente,

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = C = E_T \quad (4.21)$$

La ecuación 4.21 representa el principio de conservación de la energía, la energía cinética más la energía potencial es igual a una constante que es equivalente a la energía total.

Se tiene que,

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2, \quad E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

Y

$$x = A \sin(\omega t + \varphi_0), \quad v = \omega A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

Si se reescriben las ecuaciones quedan como,

$$E_c = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0)$$

$$E_p = \frac{1}{2} k A^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0)$$

Por lo tanto, la energía total es la suma de la energía cinética y potencial

$$E_T = E_c + E_p$$

$$E_T = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0) + \frac{1}{2} k A^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0)$$

Pero $\omega^2 = \frac{k}{m}$

$$E_T = \frac{1}{2} m \frac{k}{m} A^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0) + \frac{1}{2} k A^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0)$$

$$E_T = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0) + \frac{1}{2} k A^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0)$$

$$E_T = \frac{1}{2} k A^2 [\sin^2(\omega t + \varphi_0) + \cos^2(\omega t + \varphi_0)]$$

$$E_T = \frac{1}{2} k A^2 \tag{4.22}$$

La ecuación 4.22 es la energía total para un sistema armónico simple.

4.1.1.5 Péndulo simple

El péndulo simple es otro ejemplo del movimiento armónico simple. Un péndulo simple se define como una partícula de masa m suspendida de un punto fijo por una cuerda de longitud l y de masa despreciable. Si se desplaza el péndulo un ángulo θ empezará a oscilar alrededor de su posición de equilibrio.

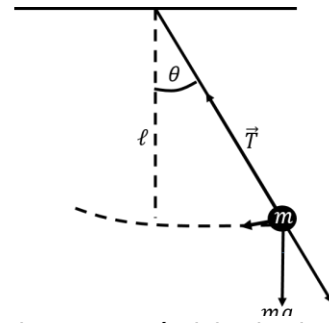


Figura 4.6. Péndulo simple.
(Modificado de Reyes, S. 1976).

Para determinar la ecuación del movimiento, se parte de la segunda ley de Newton

$$F_T = ma_T \quad (4.23)$$

De acuerdo con la figura 4.6 se tiene que

$$\sum F_T = -mg \sin \theta \quad (4.24)$$

También se considera que

$$a_T = \frac{d^2 s}{dt^2} \quad (4.25)$$

Por lo tanto, se sustituye 4.24 y 4.25 en 4.23

$$-mg \sin \theta = m \frac{d^2 s}{dt^2}$$

Donde $s = l\theta$, que es la longitud del arco de circunferencia que recorre el péndulo

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} + mg \sin \theta = 0$$

$$m \frac{d^2 l\theta}{dt^2} + mg \sin \theta = 0$$

$$ml \frac{d^2 \theta}{dt^2} + mg \sin \theta = 0 \quad (4.26)$$

Si se divide 4.26 entre l

$$m \frac{d^2\theta}{dt^2} + m \frac{g}{l} \sin\theta = 0 \quad (4.26)$$

Un péndulo simple no realiza un movimiento armónico simple ya que la ecuación no es del tipo de un sistema que realiza un movimiento armónico simple, además la fuerza recuperadora no es proporcional al desplazamiento sino al seno del ángulo. Sin embargo, si el ángulo θ es lo suficientemente pequeño, se puede reemplazar el valor de $\sin\theta$ simplemente por el de θ expresado en radianes, por lo que la ecuación queda como,

$$m \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mg\theta}{l} = 0 \quad (4.27)$$

La ecuación 4.27 si corresponde a la de un movimiento armónico simple, por lo tanto un péndulo simple realiza oscilaciones armónicas simples para ángulos pequeños.

De la ecuación 4.27 y en comparación con los parámetros del sistema masa resorte se puede inferir lo siguiente

$$k = \frac{mg}{l}, \quad w = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad f = \frac{1}{2\pi} w, \quad T = \frac{1}{f}$$

Que son la constante recuperadora, frecuencia angular, frecuencia y periodo respectivamente.

4.1.1.6 Péndulo físico

Las condiciones del péndulo simple no son las que se encuentran normalmente ya que los cuerpos físicos no forman lo que es una partícula, sino que estos ocupan un volumen en el espacio. Un péndulo físico es cualquier cuerpo rígido que puede oscilar libremente alrededor de un eje horizontal bajo la acción de la gravedad.

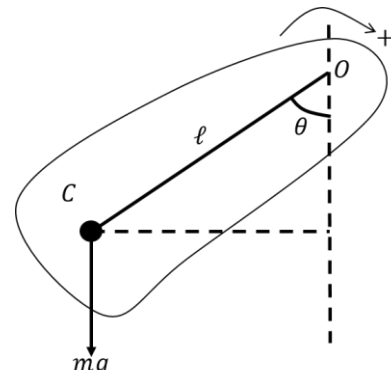


Figura 4.7. Péndulo compuesto.
(Modificado de Reyes, S. 1976).

Partiendo de las ecuaciones de la dinámica de rotación, con la forma rotacional de la segunda Ley de Newton

$$\sum \tau = I\alpha \quad (4.28)$$

El cuerpo se modela como un cuerpo rígido bajo un momento de torsión neto, en donde I es el momento de inercia con respecto a O y α es la aceleración angular.

El torque se considera como

$$\tau = Fr \sin \theta$$

De acuerdo con la figura 4.7

$$\tau = -mgl \sin \theta \quad (4.29)$$

La aceleración angular se considera como

$$\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (4.30)$$

Por lo tanto, si se sustituye 4.29 y 4.30 en 4.28

$$\begin{aligned} -mgl \sin \theta &= I \frac{d^2\theta}{dt^2} \\ I \frac{d^2\theta}{dt^2} + mgl \sin \theta &= 0 \end{aligned} \quad (4.31)$$

De igual manera que en el péndulo simple, se considera que el péndulo físico realiza oscilaciones para ángulos pequeños, por lo tanto

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} + mgl\theta = 0 \quad (4.32)$$

De esta manera sí cumple con la ecuación de un movimiento armónico simple.

De la ecuación anterior y en comparación con los parámetros del sistema masa resorte y péndulo simple se puede inferir lo siguiente:

$$k = mgl, \quad w = \sqrt{\frac{k}{I}}, \quad f = \frac{1}{2\pi}w, \quad T = \frac{1}{f}$$

Que son la constante recuperadora, frecuencia angular, frecuencia y periodo respectivamente.

4.1.1.7 Composición de movimientos armónicos: superposición

Se considerará ahora a la acción conjunta de dos movimientos armónicos conocido como superposición o interferencia, se tomará en cuenta dos movimientos armónicos simples

$$x_1 = A_1 \cos(wt + \varphi_1) \quad (4.33)$$

$$x_2 = A_2 \cos(wt + \varphi_2) \quad (4.34)$$

El desplazamiento resultante de ambos será

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \cos(wt + \varphi_1) + A_2 \cos(wt + \varphi_2) \quad (4.35)$$

En el cual los movimientos tienen la misma frecuencia. La ecuación 4.35 puede escribirse como

$$x = A \cos(wt + \varphi) \quad (4.36)$$

Por lo tanto, la amplitud resultante se puede calcular como

$$A = \sqrt{A_1^2 A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \quad (4.37)$$

Se tiene en cuenta la ley de adición de vectores, se tiene que

$$A \cos \varphi = A_1 \cos(\varphi_1) + A_2 \cos(\varphi_2)$$

$$A \sin \varphi = A_1 \sin(\varphi_1) + A_2 \sin(\varphi_2)$$

Si se divide se puede obtener la fase inicial

$$\tan \varphi = \frac{A_1 \sin(\varphi_1) + A_2 \sin(\varphi_2)}{A_1 \cos(\varphi_1) + A_2 \cos(\varphi_2)} \quad (4.38)$$

Igual dirección, igual frecuencia

Caso 1

$$\text{Si } \varphi_2 - \varphi_1 = 2n\pi, \quad n = 0, 1, 2 \dots$$

Entonces

$$\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = 1 \quad (4.39)$$

Es decir,

$$\varphi_2 = \varphi_1 \therefore \varphi_2 - \varphi_1 = 0$$

Sus movimientos están en fase y las ecuaciones se reducen a

$$A = A_1 + A_2, \quad \varphi = \varphi_1 \quad (4.40)$$

Cuando los movimientos tienen una diferencia de fases igual a un número par de veces π , la amplitud resultante es la suma de las amplitudes de cada una de las componentes, por lo tanto, los dos movimientos armónicos simples interfieren constructivamente ya que las amplitudes se suman.

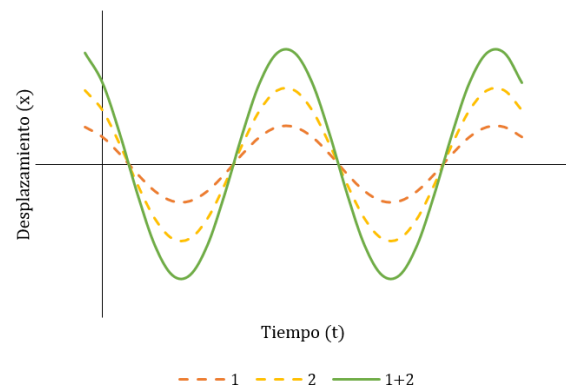


Figura 4.8. Superposición de dos movimientos armónicos simples en fase. (Modificado de Alonso y Finn, 1967).

Caso 2

$$\text{Si } \varphi_2 - \varphi_1 = (2n + 1)\pi, \quad n = 0, 1, 2 \dots$$

Entonces

$$\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = -1 \quad (4.41)$$

Es decir,

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \pi \therefore \varphi = \pi$$

Sus movimientos están en oposición y las ecuaciones se reducen a

$$A = |A_1 - A_2|, \quad \varphi = \varphi_1 \quad (4.42)$$

Cuando los movimientos tienen una diferencia de fases igual a un número impar de veces π , la amplitud resultante es igual al módulo de la diferencia de las amplitudes de las componentes, por lo tanto, los dos movimientos armónicos simples interfieren atenuándose ya que las amplitudes se restan.

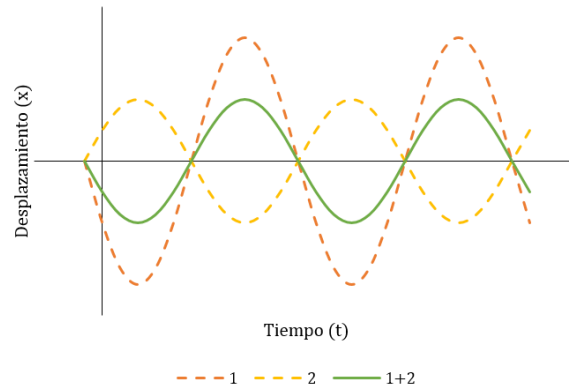


Figura 4.9. Composición de dos movimientos armónicos simples en oposición. (Modificado de Alonso y Finn, 1967).

Caso 3

$$\text{Si } \varphi_2 - \varphi_1 = (2n + 1) \frac{\pi}{2}, \quad n = 0, 1, 2 \dots$$

Entonces

$$\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = 0 \quad (4.43)$$

Es decir,

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{2} \therefore \varphi = \frac{\pi}{2}$$

Sus movimientos están en cuadratura y las ecuaciones se reducen a

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}, \quad \varphi = \varphi_1 + \arctan \frac{A_2}{A_1} \quad (4.44)$$

Cuando los movimientos tienen una diferencia de fases igual a un número impar de veces $\frac{\pi}{2}$, la amplitud resultante es igual a la raíz de las dos amplitudes al cuadrado, por lo tanto, los dos movimientos armónicos simples están en cuadratura esto quiere decir que cuando un movimiento alcanza su valor máximo el otro se encuentra en cero.

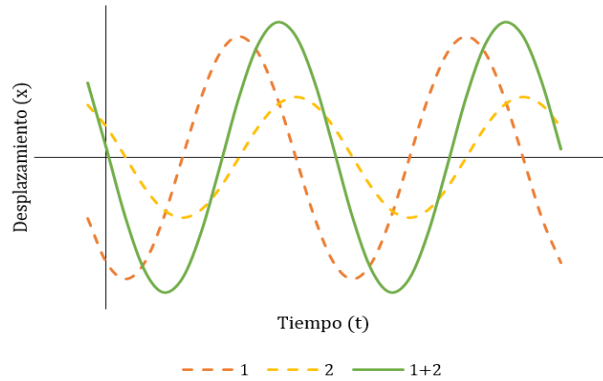


Figura 4.10. Composición de dos movimientos armónicos simples en cuadratura. (Modificado de Alonso y Finn, 1967).

Igual dirección, diferente frecuencia

Se considerará $\varphi_1 = 0$ y $\varphi_2 = 0$, por lo tanto, los movimientos quedan como

$$x_1 = A_1 \text{sen} w_1 t \quad y \quad x_2 = A_2 \text{sen} w_2 t \quad (4.45)$$

De acuerdo con Alonso & Fin (1967), entonces ahora el ángulo de fase es $w_1 t - w_2 t = (w_1 - w_2)t$ y el ángulo no es constante ya que las frecuencias son distintas, de tal manera que x no tiene longitud constante ni rota con una w constante, por lo tanto, el movimiento resultante no es armónico simple, sin embargo, la amplitud es la siguiente

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(w_1 - w_2)t} \quad (4.46)$$

Oscila entre $A_1 + A_2$ cuando $(w_1 - w_2)t = 2n\pi$ y entre $A = |A_1 - A_2|$ cuando $(w_1 - w_2)t = (2n + 1)\pi$, por lo tanto, se dice que la amplitud es modulada.

La frecuencia de la oscilación se puede expresar como

$$v = \frac{w_1 - w_2}{2\pi} \quad (4.47)$$

Si $A_1 = A_2$, entonces se tiene lo siguiente

$$x = x_1 + x_2 = A_1(\text{sen}w_1t + \text{sen}w_2t)$$

Se utiliza la suma de senos

$$2A_1 \cos \frac{1}{2}(w_1 - w_2)t \text{ sen} \frac{1}{2}(w_1 + w_2)t$$

El movimiento es oscilatorio con frecuencia $\frac{1}{2}(w_1 + w_2)t$ y amplitud

$$A = 2A_1 \cos \frac{1}{2}(w_1 - w_2)t \quad (4.48)$$

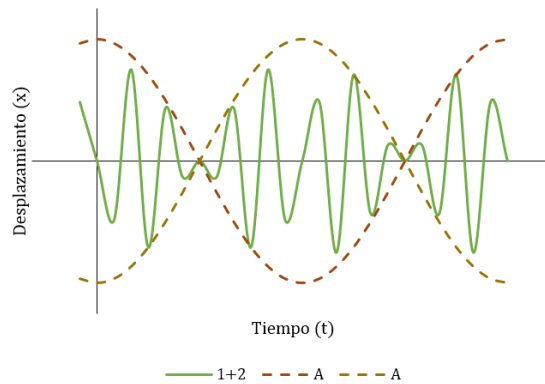


Figura 4.11. Superposición de dos movimientos armónicos simples con igual dirección, diferente frecuencia e igual amplitud. (Modificado de Alonso y Finn, 1967).

Direcciones perpendiculares

Ahora se considerará la superposición de dos movimientos armónicos simples, pero ahora en direcciones perpendiculares.

Se suponen dos movimientos

$$x = A_1 \cos(wt + \varphi_1), \quad y = A_2 \cos(wt + \varphi_2) \quad (4.49)$$

El objetivo es determinar la trayectoria del cuerpo, se elimina de las ecuaciones el parámetro t para obtener una ecuación en las variables x y y que represente la ecuación de la trayectoria.

Se toma a consideración la siguiente relación trigonométrica

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

Por lo tanto, se escriben las ecuaciones 4.49 de la forma

$$\frac{x}{A_1} = \cos\omega t \cos\varphi_1 - \sin\omega t \sin\varphi_1 \quad (4.50)$$

$$\frac{y}{A_2} = \cos\omega t \cos\varphi_2 - \sin\omega t \sin\varphi_2 \quad (4.51)$$

Se multiplica 4.50 por $\cos\varphi_2$ y 4.51 por $\cos\varphi_1$, primero con la ecuación 4.50

$$\frac{x}{A_1} \cos\varphi_2 = (\cos\omega t \cos\varphi_1 - \sin\omega t \sin\varphi_1) \cos\varphi_2$$

$$\frac{x}{A_1} \cos\varphi_2 = (\cos\omega t \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\omega t \sin\varphi_1 \cos\varphi_2) \quad (4.52)$$

Ahora con la ecuación 4.51

$$\frac{y}{A_2} \cos\varphi_1 = (\cos\omega t \cos\varphi_2 - \sin\omega t \sin\varphi_2) \cos\varphi_1$$

$$\frac{y}{A_2} \cos\varphi_1 = (\cos\omega t \cos\varphi_2 \cos\varphi_1 - \sin\omega t \sin\varphi_2 \cos\varphi_1) \quad (4.53)$$

Se restan las ecuaciones 4.52 y 4.53

$$\frac{x}{A_1} \cos\varphi_2 - \frac{y}{A_2} \cos\varphi_1 = [(\cos\omega t \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\omega t \sin\varphi_1 \cos\varphi_2) - (\cos\omega t \cos\varphi_2 \cos\varphi_1 - \sin\omega t \sin\varphi_2 \cos\varphi_1)]$$

$$\frac{x}{A_1} \cos\varphi_2 - \frac{y}{A_2} \cos\varphi_1 = [(\cos\omega t \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\omega t \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 - \cos\omega t \cos\varphi_2 \cos\varphi_1 + \sin\omega t \sin\varphi_2 \cos\varphi_1)]$$

$$\frac{x}{A_1} \cos\varphi_2 - \frac{y}{A_2} \cos\varphi_1 = (\sin\omega t \sin\varphi_2 \cos\varphi_1 - \sin\omega t \sin\varphi_1 \cos\varphi_2)$$

$$\frac{x}{A_1} \cos\varphi_2 - \frac{y}{A_2} \cos\varphi_1 = \sin\omega t (\sin\varphi_2 \cos\varphi_1 - \sin\varphi_1 \cos\varphi_2) \quad (4.54)$$

Se toma en consideración la siguiente identidad trigonométrica

$$\text{sen}(\alpha \pm \beta) = \text{sen}\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\text{sen}\beta$$

Por lo tanto se tiene que

$$\frac{x}{A_1}\cos\varphi_2 - \frac{y}{A_2}\cos\varphi_1 = \text{sen}wt \text{sen}(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (4.55)$$

Ahora se multiplica 4.50 por $\text{sen}\varphi_2$ y 4.51 por $\text{sen}\varphi_1$, primero con la ecuación 4.50

$$\begin{aligned} \frac{x}{A_1}\text{sen}\varphi_2 &= (\coswt\cos\varphi_1 - \text{sen}wt\text{sen}\varphi_1)\text{sen}\varphi_2 \\ \frac{x}{A_1}\text{sen}\varphi_2 &= (\coswt\cos\varphi_1\text{sen}\varphi_2 - \text{sen}wt\text{sen}\varphi_1\text{sen}\varphi_2) \end{aligned} \quad (4.56)$$

Ahora con la ecuación 4.51

$$\begin{aligned} \frac{y}{A_2}\text{sen}\varphi_1 &= (\coswt\cos\varphi_2 - \text{sen}wt\text{sen}\varphi_2)\text{sen}\varphi_1 \\ \frac{y}{A_2}\text{sen}\varphi_1 &= (\coswt\cos\varphi_2\text{sen}\varphi_1 - \text{sen}wt\text{sen}\varphi_2\text{sen}\varphi_1) \end{aligned} \quad (4.57)$$

Se restan las ecuaciones 4.56 y 4.57

$$\begin{aligned} \frac{x}{A_1}\text{sen}\varphi_2 - \frac{y}{A_2}\text{sen}\varphi_1 &= [(\coswt\cos\varphi_1\text{sen}\varphi_2 - \text{sen}wt\text{sen}\varphi_1\text{sen}\varphi_2) - (\coswt\cos\varphi_2\text{sen}\varphi_1 - \text{sen}wt\text{sen}\varphi_2\text{sen}\varphi_1)] \\ \frac{x}{A_1}\text{sen}\varphi_2 - \frac{y}{A_2}\text{sen}\varphi_1 &= [(\coswt\cos\varphi_1\text{sen}\varphi_2 - \text{sen}wt\text{sen}\varphi_1\text{sen}\varphi_2 - \coswt\cos\varphi_2\text{sen}\varphi_1 + \text{sen}wt\text{sen}\varphi_2\text{sen}\varphi_1)] \\ \frac{x}{A_1}\text{sen}\varphi_2 - \frac{y}{A_2}\text{sen}\varphi_1 &= (\coswt\cos\varphi_1\text{sen}\varphi_2 - \coswt\cos\varphi_2\text{sen}\varphi_1) \\ \frac{x}{A_1}\text{sen}\varphi_2 - \frac{y}{A_2}\text{sen}\varphi_1 &= \coswt(\cos\varphi_1\text{sen}\varphi_2 - \cos\varphi_2\text{sen}\varphi_1) \end{aligned} \quad (4.58)$$

Se toma en consideración la siguiente identidad trigonométrica

$$\text{sen}(\alpha \pm \beta) = \text{sen}\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\text{sen}\beta$$

Por lo tanto, se tiene que

$$\frac{x}{A_1}\text{sen}\varphi_2 - \frac{y}{A_2}\text{sen}\varphi_1 = \coswt \text{sen}(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (4.59)$$

Ahora se eleva al cuadrado y se suma miembro a miembro las ecuaciones 4.55 y 4.59, de esta forma se encontrará la ecuación de la trayectoria.

Se elevan al cuadrado ambas ecuaciones, primero con la ecuación 4.55

$$\left(\frac{x}{A_1} \cos \varphi_2 - \frac{y}{A_2} \cos \varphi_1\right)^2 = (\text{sen} wt \text{sen}(\varphi_2 - \varphi_1))^2$$

$$\frac{x^2}{A_1^2} \cos^2 \varphi_2 - \frac{2xy}{A_1 A_2} \cos \varphi_2 \cos \varphi_1 + \frac{y^2}{A_2^2} \cos^2 \varphi_1 = \text{sen}^2 wt \text{sen}^2(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (4.60)$$

Ahora con la ecuación 4.59

$$\left(\frac{x}{A_1} \text{sen} \varphi_2 - \frac{y}{A_2} \text{sen} \varphi_1\right)^2 = (\cos wt \text{sen}(\varphi_2 - \varphi_1))^2$$

$$\frac{x^2}{A_1^2} \text{sen}^2 \varphi_2 - \frac{2xy}{A_1 A_2} \text{sen} \varphi_2 \text{sen} \varphi_1 + \frac{y^2}{A_2^2} \text{sen}^2 \varphi_1 = \cos^2 wt \text{sen}^2(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (4.61)$$

Se suman las ecuaciones 4.60 y 4.61

$$\left[\frac{x^2}{A_1^2} \text{sen}^2 \varphi_2 + \frac{x^2}{A_1^2} \cos^2 \varphi_2\right] - \left[\frac{2xy}{A_1 A_2} \text{sen} \varphi_2 \text{sen} \varphi_1 + \frac{2xy}{A_1 A_2} \cos \varphi_2 \cos \varphi_1\right] + \left[\frac{y^2}{A_2^2} \text{sen}^2 \varphi_1 + \frac{y^2}{A_2^2} \cos^2 \varphi_1\right]$$

$$= [\text{sen}^2 wt \text{sen}^2(\varphi_2 - \varphi_1) + \cos^2 wt \text{sen}^2(\varphi_2 - \varphi_1)]$$

$$\frac{x^2}{A_1^2} [\text{sen}^2 \varphi_2 + \cos^2 \varphi_2] - \frac{2xy}{A_1 A_2} [\text{sen} \varphi_2 \text{sen} \varphi_1 + \cos \varphi_2 \cos \varphi_1] + \frac{y^2}{A_2^2} [\text{sen}^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_1]$$

$$= \text{sen}^2(\varphi_2 - \varphi_1) [\text{sen}^2 wt + \cos^2 wt]$$

Se utilizan las siguientes identidades trigonométricas

$$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos(\alpha \mp \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \text{sen} \alpha \text{sen} \beta$$

Finalmente, se obtiene la ecuación de la trayectoria,

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \text{sen}^2(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (4.62)$$

La ecuación 4.62 corresponde a la ecuación de la elipse, la cual es la ecuación de la trayectoria de una superposición con direcciones perpendiculares.

Los parámetros de la elipse dependerán del valor de las fases y la diferencia entre ellas. Por lo tanto, se analizarán los siguientes casos especiales.

Caso 1

Si $\varphi_2 - \varphi_1 = 2n\pi$, $n = 0, 1, 2 \dots$

La ecuación 4.62 se reduce

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2} = 0 \quad (4.63)$$

Que equivale a

$$\left(\frac{x}{A_1} - \frac{y}{A_2} \right)^2 = 0 \quad (4.64)$$

De donde se puede obtener

$$y = \frac{A_2}{A_1} x \quad (4.65)$$

Se cumple que

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \pm 2n\pi$$

$$\varphi_2 = \varphi_1 + 2n\pi$$

Se sustituye en las ecuaciones de los movimientos

$$x = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1), \quad y = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

Si $\varphi_2 = \varphi_1 + 2n\pi$

$$y = A_2 \cos(\omega t + \varphi_1 + 2n\pi)$$

$$y = A_2 \cos(\omega t + \varphi_1) \quad (4.66)$$

Los movimientos están en fase y la trayectoria será una línea recta con pendiente positiva.

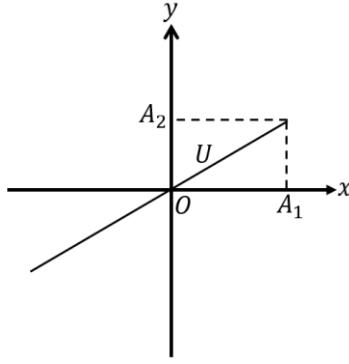


Figura 4.12. Superposición de dos movimientos armónicos simples en fase. (Modificado de Reyes, S. 1976).

Caso 2

Si $\varphi_2 - \varphi_1 = (2n + 1)\pi$, $n = 0, 1, 2 \dots$

La ecuación 4.62 se reduce

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} + \frac{2xy}{A_1 A_2} = 0 \quad (4.67)$$

Que equivale a

$$\left(\frac{x}{A_1} + \frac{y}{A_2} \right)^2 = 0 \quad (4.68)$$

De donde se puede obtener

$$y = -\frac{A_2}{A_1} x \quad (4.69)$$

Se cumple que

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \pm(2n + 1)\pi$$

$$\varphi_2 = \varphi_1 + (2n + 1)\pi$$

Sustituyendo en las ecuaciones de los movimientos

$$x = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1), \quad y = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

Si $\varphi_2 = \varphi_1 + (2n + 1)\pi$

$$y = A_2 \cos(\omega t + \varphi_1 + (2n + 1)\pi)$$

$$y = A_2 \cos(\omega t + \varphi_1 + \pi) \quad (4.70)$$

Los movimientos están en oposición y la trayectoria es una línea recta, pero con pendiente negativa.

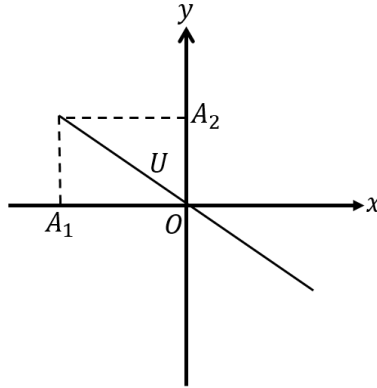


Figura 4.13. Superposición de dos movimientos armónicos simples en oposición. (Modificado de Reyes, S. 1976).

Si la $\varphi = 2n\pi$ ó $(2n + 1)\pi$, la interferencia de los movimientos armónicos simples perpendiculares con la misma frecuencia da lugar a una polarización rectilínea (Alonso y Finn, 1967).

Caso 3

$$\text{Si } \varphi_2 - \varphi_1 = (2n + 1)\frac{\pi}{2}, \quad n = 0, 1, 2 \dots$$

El movimiento está en cuadratura por lo tanto la ecuación 4.62 se reduce

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1 \quad (4.71)$$

En este caso la trayectoria es una elipse. La forma de la elipse se determinará mediante la relación de A_1 y A_2 .

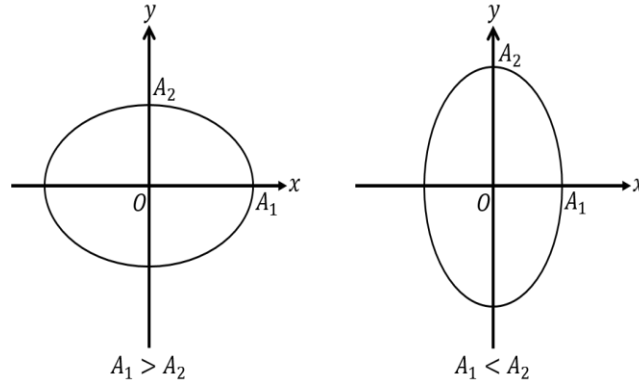


Figura 4.14. Superposición de dos movimientos armónicos simples con direcciones perpendiculares en cuadratura. (Modificado de Reyes, S. 1976).

De acuerdo con Reyes, S. (1967), el sentido del movimiento está determinado por el signo de la diferencia de la fase:

- a) Si $\varphi_2 - \varphi_1 > 0$ se mueve a favor de las manecillas del reloj
- b) Si $\varphi_2 - \varphi_1 < 0$ se mueve en contra de las manecillas del reloj

Cuando la diferencia de fase es igual a $\pi/2$, la interferencia de dos movimientos armónicos simples con la misma frecuencia y direcciones perpendiculares la trayectoria da lugar a una polarización elíptica con los ejes paralelos a las direcciones de los dos movimientos (Alonso & Finn, 1967).

Caso 4

Si $\varphi_2 - \varphi_1 = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$, $n = 0, 1, 2 \dots$ y además $A_1 = A_2 = A$

La ecuación 4.62 se reduce

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 0 \quad (4.72)$$

Pero $A_1 = A_2 = A$

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{A^2} = 1$$

$$\frac{1}{A^2}(x^2 + y^2) = 1$$

$$x^2 + y^2 = A^2 \quad (4.73)$$

Para este caso la trayectoria es la ecuación de la circunferencia, el cual, de la misma manera del caso anterior, el sentido del movimiento está determinado por la diferencia de la fase. De acuerdo con Alonso & Finn (1967), se concluye que si $A_1 = A_2$, la elipse se transforma en un círculo y da lugar a la polarización circular.

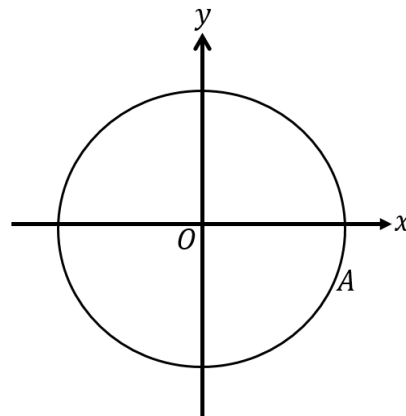


Figura 4.15. Superposición de dos movimientos armónicos simples en cuadratura con la misma amplitud. (Modificado de Reyes, S. 1976).

Caso 5

Si $\varphi_2 - \varphi_1 =$ Otro valor diferente de los casos anteriores, la forma de la ecuación no tendrá alguna simplificación y para estos casos la relación de la amplitud es independiente a la trayectoria que sigue la forma de una elipse rotada dependiendo la diferencia de las fases.

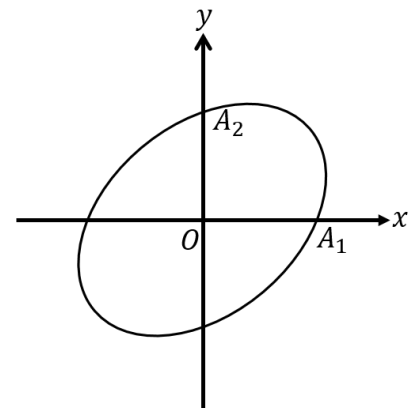


Figura 4.16. Diferentes trayectorias para una superposición con diferentes fases selectas. (Modificado de Reyes, S. 1976).

4.1.1.8 Figuras de Lissajous

En los casos anteriores se analizó la superposición de movimientos armónicos simples con direcciones perpendiculares, amplitudes diferentes con la misma frecuencia, sin embargo, existen casos especiales en los cuales se tienen direcciones perpendiculares, amplitudes, frecuencias y fases diferentes. La trayectoria de este movimiento es más compleja que los casos que se han estudiado, estas figuras con dichas trayectorias reciben el nombre de figuras de Lissajous. Estas figuras cumplen con una relación de frecuencias $\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)$ para tener cierta trayectoria dada, de la cual, en la relación hay que determinar una frecuencia desconocida. En la figura 4.17 se pueden observar estas figuras con diferentes relaciones de frecuencia y con la misma amplitud.

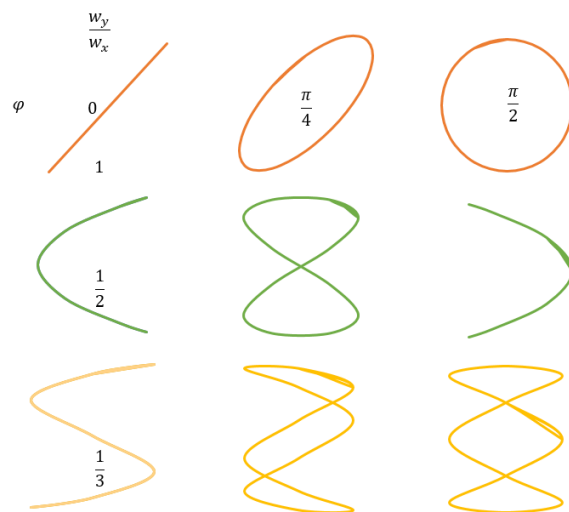


Figura 4.17. Figuras de Lissajous con diferentes relaciones de frecuencia.

4.1.1.9 Oscilaciones amortiguadas

Se analizaron los movimientos sin tomar en cuenta el amortiguamiento que estos pudieran llegar a tener. Un movimiento armónico en la práctica es imposible que no tenga un agente disipativo, el agente disipativo hará que la energía disminuya hasta que el movimiento se detenga totalmente siempre y cuando no se le vuelva a suministrar energía.

Para definir la ecuación de un movimiento armónico simple con amortiguamiento se considerará un agente disipativo de tipo viscoso el cual será proporcional a la velocidad del cuerpo en cada instante.

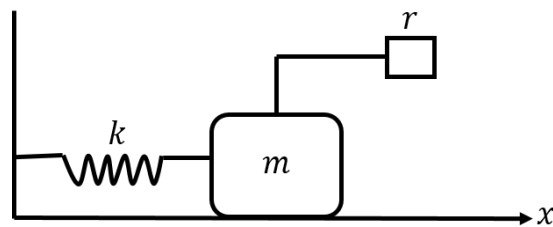


Figura 4.18. Sistema masa resorte con una fuerza viscosa. (Modificado de Reyes, S. 1976).

Al momento de desplazar el cuerpo de su posición de reposo las fuerzas que actúan son las siguientes:

$$\text{Ambas son contrarias al movimiento} \begin{cases} \text{Fuerza elástica} = -kx \\ \text{Fuerza viscosa} = -rv \end{cases}$$

Se parte desde la segunda ley de Newton

$$\begin{aligned} \sum F_x &= ma_x \\ -kx - rv &= ma_x \end{aligned} \tag{4.74}$$

Se sabe que

$$v = \frac{dx}{dt}, \quad a = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Por lo tanto, se reescribe la ecuación 4.74 como

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + r \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (4.75)$$

La ecuación 4.75 representa la ecuación diferencial de un movimiento armónico simple con amortiguamiento mediante un agente disipativo de tipo viscoso. La cual es una ecuación diferencial lineal de segundo orden homogénea que se escribe de la siguiente forma

$$mx'' + rx' + kx = 0 \quad (4.76)$$

Si se divide entre la masa, se reescribe la ecuación 4.76 como

$$x'' + \frac{r}{m}x' + \frac{k}{m}x = 0 \quad (4.77)$$

Para hallar la integral general de la ecuación 4.77 es suficiente encontrar dos soluciones particulares linealmente independientes. Se buscan soluciones de la forma

$$x = e^{kt}, \quad \text{donde } k = \text{constante};$$

Entonces,

$$x' = ke^{kt} = kx; \quad x'' = k^2e^{kt} = k^2x$$

Se introducen las expresiones obtenidas en las derivadas en la ecuación 4.77

$$k^2e^{kt} + \frac{r}{m}ke^{kt} + \frac{k}{m}e^{kt} = 0$$

$$e^{kt} \left(k^2 + \frac{r}{m}k + \frac{k}{m} \right) = 0$$

Dado que $e^{kt} \neq 0$, resulta que

$$k^2 + \frac{r}{m}k + \frac{k}{m} = 0 \quad (4.78)$$

La ecuación auxiliar o característica es una ecuación de segundo orden que tiene dos raíces, las cuales se designan por k_1 y k_2 . Entonces

$$k_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}; \quad k_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Evaluando las raíces se obtiene lo siguiente

$$k = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Se toma en cuenta que $p = \frac{r}{m}$ y $q = \frac{k}{m}$

$$k = -\frac{\frac{r}{m}}{2} \pm \sqrt{\frac{\left(\frac{r}{m}\right)^2}{4} - \frac{k}{m}}$$

$$k = -\frac{r}{2m} \pm \sqrt{\frac{\frac{r^2}{m^2}}{4} - \frac{k}{m}}$$

$$k = -\frac{r}{2m} \pm \sqrt{\frac{r^2}{4m^2} - \frac{k}{m}} \quad (4.79)$$

Son posibles los casos siguientes:

Caso 1

k_1 y k_2 son números reales y distintos ($k_1 \neq k_2$);

En este caso las soluciones particulares serán las funciones

$$x_1 = e^{k_1 t}; \quad x_2 = e^{k_2 t}$$

Estas soluciones son linealmente independientes, puesto que

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{e^{k_2 t}}{e^{k_1 t}} = e^{(k_2 - k_1)t} \neq \text{constante}$$

Por lo tanto, la solución general tiene la forma

$$x = C_1 e^{k_1 t} + C_2 e^{k_2 t}$$

En el caso de un movimiento armónico simple con un agente disipativo,

Si $\frac{r^2}{4m^2} > \frac{k}{m}$ lo cual equivale a $r^2 > 4mk$

Para este caso se obtendrán dos raíces reales y desiguales. Las raíces serán negativas y por lo tanto la solución será la suma de dos exponenciales decrecientes y por ese motivo será decreciente, en este caso el sistema no presenta oscilaciones y regresa lentamente a su posición de equilibrio. Los sistemas que cumplen esta condición se les llama sobreamortiguados. Para estos casos la solución será:

$$x = C_1 e^{k_1 t} + C_2 e^{k_2 t} \quad (4.80)$$

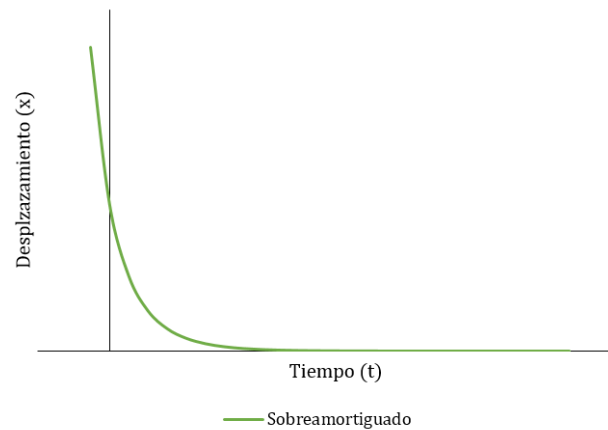


Figura 4.19. Movimiento armónico simple sobreamortiguado. (Modificado de Reyes, S. 1976).

Caso 2

k_1 y k_2 son números reales e iguales ($k_1 = k_2$)

Una de las soluciones particulares, a saber, $x_1 = e^{k_1 t}$, se obtiene con base en los casos precedentes, es preciso encontrar la segunda solución particular, linealmente independiente de la primera (la función $e^{k_1 t}$ es idénticamente igual a $e^{k_2 t}$, por lo que no puede considerarse como segunda solución particular).

La segunda solución particular se puede tomar

$$x_2 = x e^{k_1 t}$$

Esta ecuación es linealmente independiente de la primera, puesto que

$$\frac{y_2}{y_1} = t \neq \text{constante}$$

Por lo tanto, la solución general se puede tomar la función:

$$x = C_1 e^{k_1 t} + C_2 t e^{k_1 t} = e^{k_1 t} (C_1 + C_2 t)$$

En el caso de un movimiento armónico simple con un agente disipativo,

Si $\frac{r^2}{4m^2} = \frac{k}{m}$ lo cual equivale a $r^2 = 4mk$

Para este caso se obtendrán dos raíces reales e iguales. Algo similar al caso anterior, las raíces serán negativas y por lo tanto la solución será la suma de dos exponenciales decrecientes y por ese motivo será decreciente, en este caso el sistema tampoco presenta oscilaciones y regresa más rápido a su posición de equilibrio a diferencia del sobreamortiguado. Los sistemas que cumplen esta condición se les llaman críticamente amortiguados. Para estos casos la solución será:

$$x = C_1 e^{k_1 t} + C_2 t e^{k_1 t} \quad (4.81)$$

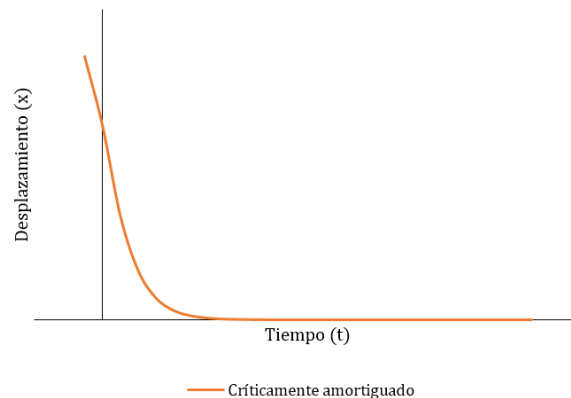


Figura 4.20. Movimiento armónico simple críticamente amortiguado. (Modificado de Reyes, S. 1976).

Caso 3

k_1 y k_2 son números complejos

Puesto que las raíces complejas son conjugadas en pares, se introducen las designaciones:

$$k_1 = \alpha + i\beta; \quad k_2 = \alpha - i\beta$$

Dónde:

$$\alpha = -\frac{p}{2}; \quad \beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$$

Las soluciones particulares se pueden escribir de la forma:

$$x_1 = e^{(\alpha+i\beta)t}; \quad x_2 = e^{(\alpha-i\beta)t}$$

Por tanto, la solución general en el caso en que las raíces sean complejas toma la forma:

$$x = e^{\alpha t}(B\cos\beta t + iA\sin\beta t)$$

En el caso de un movimiento armónico simple con un agente disipativo si

Si $\frac{r^2}{4m^2} < \frac{k}{m}$ lo cual equivale a $r^2 < 4mk$

Se obtendrán dos raíces complejas y desiguales que adquieren la siguiente forma:

Se toma en cuenta que $p = \frac{r}{m}$ y $q = \frac{k}{m}$

$$k = -\frac{r}{2m} \pm i \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{r^2}{4m^2}} \quad (4.82)$$

Por lo tanto, la solución será de la siguiente forma

$$x = e^{\alpha t}(B\cos\beta t + iA\sin\beta t)$$

Dado que las raíces de la ecuación 4.82 son imaginarias puras, entonces la solución es

$$x = Ae^{\alpha t}\sin(\beta t + \varphi_0) \quad (4.83)$$

En la cual A y φ_0 se obtienen tomando en cuenta las condiciones iniciales, a diferencia de los casos anteriores en este si habrá oscilaciones, ya que estos sistemas regresan a la posición de equilibrio en forma oscilatoria.

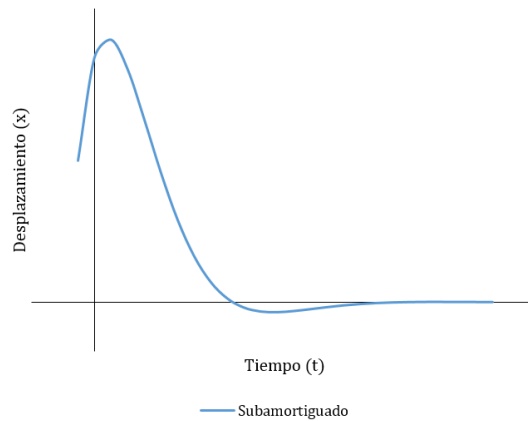


Figura 4.21. Movimiento armónico simple subamortiguado. (Modificado de Reyes, S. 1976).

4.1.1.10 Oscilaciones forzadas: resonancia

Cuando los sistemas físicos reales oscilan, siempre cuentan con un agente disipativo que eventualmente hace que el movimiento se amortigüe, para que el sistema siga en constante movimiento es necesario que se le suministre energía mediante un agente externo.

El tipo de movimiento oscilatorio que se produce cuando hay un agente externo encargado de suministrar energía al sistema, se denomina movimiento oscilatorio forzado (Reyes, S. 1976).

El agente externo que actúa sobre el sistema se considerará de forma sinusoidal, es decir que además de todas las fuerzas que ya se toman en consideración ahora también se tomará en cuenta una fuerza sinusoidal de la forma:

$$F = F_o \text{sen } \omega t$$

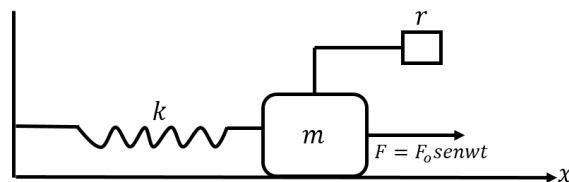


Figura 4.22. Sistema masa resorte con una fuerza viscosa y una fuerza externa. (Modificado de Reyes, S. 1976).

Se considera un sistema como el de la figura 4.22 el cual se desplaza de su posición de equilibrio mediante un agente externo, para obtener la ecuación que rige el movimiento se parte de la segunda Ley de Newton,

$$\sum F_x = ma_x$$

$$-kx - rv + F_o \text{sen } wt = ma_x \quad (4.84)$$

Se sabe que

$$v = \frac{dx}{dt}, \quad a = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Por lo tanto, se reescribe la ecuación 4.84 como

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + r \frac{dx}{dt} + kx = F_o \text{sen } wt \quad (4.85)$$

La ecuación 4.85 es la ecuación diferencial de un movimiento armónico forzado con un agente externo del tipo sinusoidal.

Para obtener la solución de la ecuación se deben de tomar en cuenta ciertas consideraciones. Primeramente, que los sistemas físicos reales no responden de manera inmediata al estímulo dado, ya que, existe un tiempo de adaptación. Este tiempo se denomina periodo transitorio, en los sistemas reales con una selección adecuada de los parámetros se puede lograr que los efectos de este periodo, es decir, la respuesta transitoria, tenga un efecto apreciable durante poco tiempo; además de la respuesta transitoria, el sistema oscilará dependiendo el agente externo ya que el sistema se verá “forzado” a moverse de acuerdo como lo “determine” el agente. Esta respuesta se denomina estable y es en definitiva con la que va a oscilar el sistema.

La respuesta total de un sistema oscilatorio forzado se puede considerar como la superposición de una respuesta transitoria que representa la adaptación del sistema al estímulo y una respuesta estable determinada por el agente externo que es en definitiva con la que va a oscilar el sistema. (Reyes, S., 1976).

Por lo tanto, la solución de la ecuación diferencial reflejará la respuesta transitoria y estable, es decir la solución tiene dos partes:

$$x = \text{respuesta transitoria} + \text{respuesta estable}$$

Según la teoría de las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden no homogéneas, la solución se da de la siguiente manera:

De acuerdo con Piskunov (1983), sea una ecuación lineal no homogénea de segundo orden,

$$y'' + a_1y' + a_2y = f(x)$$

La estructura de la solución general de tal ecuación se determinará por el teorema siguiente:

La solución general de la ecuación no homogénea se representa como la suma de cualquier solución particular (x^*) de esta ecuación y de la solución general $\bar{x}$ de la ecuación homogénea correspondiente, es decir,

$$x = \text{solución general de la ecuación homogénea} \\ + \text{solución particular de la ecuación no homogénea}$$

La primera parte se identificará como la respuesta transitoria y la segunda parte como la respuesta estable. Por lo tanto, la respuesta transitoria será la solución general de la ecuación homogénea y la respuesta estable será una solución particular de la ecuación no homogénea.

Como se ha visto en casos anteriores la solución general de la ecuación homogénea puede ser de la forma $C_1e^{k_1t} + C_2e^{k_2t}$, $C_1e^{k_1t} + C_2te^{k_2t}$ o $Ae^{\alpha t}\sin(\omega t + \varphi_0)$ y la solución particular de la no homogénea de acuerdo con el estímulo será de forma sinusoidal.

Entonces la solución de un movimiento armónico forzado será

$$x = \text{respuesta transitoria} + \text{respuesta estable}$$

Dependiendo de los parámetros r, m y k la respuesta transitoria puede ser subamortiguada, sobreamortiguada o críticamente amortiguada. Y la respuesta estable se puede calcular de la siguiente manera:

La ecuación 4.85 se puede reescribir de la siguiente forma

$$mx'' + rx' + kx = F_o \text{sen } wt \quad (4.86)$$

La ecuación 4.86 es una ecuación diferencial de segundo orden no homogénea, que se resuelve al buscar una solución particular de la forma

$$x^* = M \cos wt + N \text{sen } wt \quad (4.87)$$

Posteriormente, se obtiene la primera y segunda derivada de la ecuación 4.87

$$x^{*'} = -Mw \text{sen } wt + Nw \cos wt \quad (4.88)$$

$$x^{*''} = -Mw^2 \cos wt - Nw^2 \text{sen } wt \quad (4.89)$$

Se introducen las ecuaciones 4.87, 4.88 y 4.89 en la ecuación 4.86

$$m(-Mw^2 \cos wt - Nw^2 \text{sen } wt) + r(-Mw \text{sen } wt + Nw \cos wt) + k(M \cos wt + N \text{sen } wt) = F_o \text{sen } wt$$

$$-Mw^2 m \cos wt - Nw^2 m \text{sen } wt - Mrw \text{sen } wt + Nr w \cos wt + Mk \cos wt + Nk \text{sen } wt = F_o \text{sen } wt \quad (4.90)$$

De acuerdo con la ecuación 4.90, se construye un sistema de ecuaciones

$$-Mw^2 m + Nr w + Mk = 0 \quad (4.91)$$

$$-Nw^2 m - Mrw + Nk = F_o \quad (4.92)$$

A partir de las ecuaciones 4.91 y 4.92 se pueden encontrar los valores de M y N.

Para encontrar el valor de M, se parte la ecuación 4.91

$$M(k - w^2 m) = -Nr w$$

$$M = \frac{-Nr w}{(k - w^2 m)} \quad (4.93)$$

Ahora, para el valor de N, se parte de la ecuación 4.92

$$N(k - w^2m) = F_o + Mrw$$

$$N = \frac{F_o + Mrw}{(k - w^2m)} \quad (4.94)$$

Se sustituye la ecuación 4.93 en la ecuación 4.94

$$N = \frac{F_o + \left[\frac{-Nr w}{(k - w^2m)} \right] r w}{(k - w^2m)}$$

Se realizan las operaciones correspondientes

$$N = \frac{\frac{F_o(k - w^2m) - Nr w(r w)}{(k - w^2m)}}{(k - w^2m)}$$

$$N = \frac{F_o(k - w^2m) - Nr^2w^2}{(k - w^2m)^2}$$

$$N(k - w^2m)^2 + Nr^2w^2 = F_o(k - w^2m)$$

$$N[(k - w^2m)^2 + r^2w^2] = F_o(k - w^2m)$$

Por lo tanto el valor de N es el siguiente

$$N = \frac{F_o(k - w^2m)}{[(k - w^2m)^2 + r^2w^2]} \quad (4.95)$$

Ahora, para obtener el valor de M se sustituye la ecuación 4.94 en 4.93

$$M = \frac{- \left[\frac{F_o + Mrw}{(k - w^2m)} \right] r w}{(k - w^2m)}$$

$$M = \frac{\frac{-F_o r w - Mr^2w^2}{(k - w^2m)}}{(k - w^2m)}$$

$$M = \frac{-F_o r w - Mr^2w^2}{(k - w^2m)^2}$$

$$M(k - w^2m)^2 = -F_o r w - M r^2 w^2$$

$$M(k - w^2m)^2 + M r^2 w^2 = -F_o r w$$

$$M[(k - w^2m)^2 + r^2 w^2] = -F_o r w$$

$$M = \frac{-F_o r w}{[(k - w^2m)^2 + r^2 w^2]} \quad (4.96)$$

Los valores de M y N corresponden a la ecuación 4.87, los cuales se pueden reescribir como

$$M = A \operatorname{sen} \varphi, \quad N = A \cos \varphi$$

Donde,

$$A = \sqrt{M^2 + N^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{M}{N}$$

Para obtener A se sustituyen los valores de M y N

$$A = \sqrt{\left[\frac{-F_o r w}{[(k - w^2m)^2 + r^2 w^2]} \right]^2 + \left[\frac{F_o (k - w^2m)}{[(k - w^2m)^2 + r^2 w^2]} \right]^2}$$

$$A = \sqrt{\frac{F_o^2 r^2 w^2}{[(k - w^2m)^2 + r^2 w^2]^2} + \frac{F_o^2 (k - w^2m)^2}{[(k - w^2m)^2 + r^2 w^2]^2}}$$

$$A = \sqrt{\frac{F_o^2 r^2 w^2 + F_o^2 (k - w^2m)^2}{[(k - w^2m)^2 + r^2 w^2]^2}}$$

$$A = \sqrt{\frac{F_o^2 [r^2 w^2 + (k - w^2m)^2]}{[(k - w^2m)^2 + r^2 w^2][(k - w^2m)^2 + r^2 w^2]}}$$

$$A = \frac{F_o}{\sqrt{[(k - w^2m)^2 + r^2 w^2]}} \quad (4.97)$$

La ecuación 4.97 se puede reescribir como

$$\begin{aligned}
A &= \frac{F_o}{\sqrt{\frac{w^2}{w^2} [(k - w^2 m)^2 + r^2 w^2]}} \\
A &= \frac{F_o}{\sqrt{w^2 \left[\left(\frac{k^2}{w^2} - 2 \frac{k w^2 m}{w^2} + \frac{w^4 m^2}{w^2} \right) + \frac{r^2 w^2}{w^2} \right]}} \\
A &= \frac{F_o}{\sqrt{w^2 \left[\left(\frac{k^2}{w^2} - 2 k m + w^2 m^2 \right) + r^2 \right]}} \\
A &= \frac{F_o}{w \sqrt{\left(\frac{k}{w} - w m \right)^2 + r^2}} \tag{4.98}
\end{aligned}$$

Para obtener $tg\varphi$

$$\begin{aligned}
tg\varphi &= \frac{\frac{-F_o r w}{[(k - w^2 m)^2 + r^2 w^2]}}{\frac{F_o (k - w^2 m)}{[(k - w^2 m)^2 + r^2 w^2]}} \\
tg\varphi &= \frac{-F_o r w [(k - w^2 m)^2 + r^2 w^2]}{F_o (k - w^2 m) [(k - w^2 m)^2 + r^2 w^2]} \\
tg\varphi &= \frac{-F_o r w}{F_o (k - w^2 m)} \\
tg\varphi &= \frac{-r w}{(k - w^2 m)} \tag{4.99}
\end{aligned}$$

La ecuación 4.99 se puede reescribir como

$$tg\varphi = \frac{r}{\frac{k}{w} - w m}$$

La solución particular de la ecuación no homogénea se puede escribir como

$$x^* = A \operatorname{sen} \varphi \cos wt + A \cos \varphi \operatorname{sen} wt = A \operatorname{sen} (wt + \varphi)$$

Por lo tanto,

$$x^* = \frac{F_0}{w \sqrt{\left(\frac{k}{w} - wm\right)^2 + r^2}} \text{sen}(wt + \varphi) \quad (4.100)$$

La ecuación 4.100 es la respuesta estable del sistema. De acuerdo con Piskunov (1983), la respuesta transitoria (representa las oscilaciones amortiguadas) disminuye al aumentar t , por lo tanto, eventualmente la respuesta estable adquiere el valor principal, que es el que determina las oscilaciones forzadas. La frecuencia w de estas oscilaciones es igual a la frecuencia de la fuerza externa; la amplitud de las oscilaciones forzadas es tanto mayor, cuanto menor es r , y cuanto más se acerque w^2 a k . En los siguientes cálculos solo se tomará en cuenta la respuesta estable ya que se considerará que la respuesta transitoria desaparece rápidamente.

Un punto por considerar es la relación que existe entre la amplitud de la respuesta estable y la frecuencia, se puede verificar que existe una dependencia funcional por medio de la ecuación 4.98.

$$A = \frac{F_0}{w \sqrt{\left(\frac{k}{w} - wm\right)^2 + r^2}}$$

A continuación, se realizará un análisis de la amplitud y la frecuencia con base en la ecuación 4.98 que consiste en determinar los máximos y mínimos de la amplitud, para este caso se trabajará con el denominador de la expresión al cuadrado.

El denominador al cuadrado es

$$g(w) = w^2 \left[r^2 + \left(\frac{k}{w} - wm \right)^2 \right]$$

Que desarrollándose es igual a

$$g(w) = w^2 r^2 + w^2 \left(\frac{k^2}{w^2} - 2mk + w^2 m^2 \right)$$

$$g(w) = w^2 r^2 + k^2 - 2mkw^2 + w^4 m^2$$

Posteriormente se procede a hallar los máximos y mínimos, primero se encontrará la primera derivada

$$\begin{aligned} g'(w) &= 2wr^2 - 4mkw + 4w^3m^2 \\ g'(w) &= 2w(r^2 - 2mk + 2w^2m^2) \end{aligned} \quad (4.101)$$

Se considera que $f'(x) = 0$

$$g'(w) = 2w(r^2 - 2mk + 2w^2m^2) = 0$$

Se obtiene que

$$\begin{aligned} 2w &= 0 \\ w_1 &= 0 \end{aligned} \quad (4.102)$$

Y también que

$$\begin{aligned} r^2 - 2mk + 2w^2m^2 &= 0 \\ 2w^2m^2 &= 2mk - r^2 \\ w^2 &= \frac{2mk}{2m^2} - \frac{r^2}{2m^2} \\ w_2 &= \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{r^2}{2m^2}} \end{aligned} \quad (4.103)$$

Según Reyes (1976), la amplitud de la respuesta estable de un sistema oscilatorio forzado puede ser máxima o mínima (puntos críticos) para los valores de w que se muestran en las expresiones 4.102 y 4.103, por lo que se realizará la segunda derivada para conocer si son máximos o mínimos,

$$\begin{aligned} g''(w) &= 2r^2 - 4mk + 12w^2m^2 \\ g''(w) &= 2(r^2 - 2mk + 6w^2m^2) \end{aligned} \quad (4.104)$$

Los puntos críticos se evalúan en la segunda derivada y de acuerdo con el signo se determinará si es un máximo o mínimo.

Se sabe que $w_1 = 0$

$$g''(w_1) = 2(r^2 - 2mk + 6(0)^2m^2)$$

$$g''(w_1) = 2(r^2 - 2mk) \quad (4.105)$$

De acuerdo con Reyes (1976), se pueden presentar dos casos:

- a) $r^2 - 2mk < 0 \therefore g''(w) < 0$, entonces $g(w)$ tiene un valor máximo $\therefore$ la amplitud es mínima
- b) $r^2 - 2mk > 0 \therefore g''(w) > 0$, entonces $g(w)$ tiene un valor mínimo $\therefore$ la amplitud es máxima

Por otro lado, se sabe que

$$w_2 = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{r^2}{2m^2}}$$

$$g''(w_2) = 2 \left[r^2 - 2mk + 6m^2 \left(\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{r^2}{2m^2}} \right)^2 \right]$$

$$g''(w_2) = 2 \left[r^2 - 2mk + 6m^2 \left(\frac{k}{m} - \frac{r^2}{2m^2} \right) \right]$$

$$g''(w_2) = 2 \left[r^2 - 2mk + \left(\frac{6m^2k}{m} - \frac{6m^2r^2}{2m^2} \right) \right]$$

$$g''(w_2) = 2[r^2 - 2mk + 6mk - 3r^2]$$

$$g''(w_2) = 2(-2r^2 + 4mk)$$

$$g''(w_2) = -4(r^2 + 2mk) \quad (4.106)$$

De acuerdo con Reyes (1976), se pueden presentar dos casos:

- a) $r^2 - 2mk < 0 \therefore g''(w) > 0$, entonces $g(w)$ tiene un valor mínimo $\therefore$ la amplitud es máxima
- b) $r^2 - 2mk > 0$, esta condición es imposible ya que w_2 se haría imaginaria

Ahora se realizará un análisis en el que $w = 0$ y $w \rightarrow \infty$

Tomando en cuenta la amplitud

$$A = \frac{F_0}{w \sqrt{r^2 + \left(\frac{k}{w} - wm\right)^2}}$$

Si $w \rightarrow 0$ el término $\frac{k}{w}$ del denominador se hace muy grande, por lo tanto, los términos wm y r^2 pueden despreciarse por lo que

$$A = \frac{F_0}{k}, \quad \text{si } w \rightarrow 0 \quad (4.107)$$

Por otra parte, si w es muy grande, el término wm se hace muy grande y $\frac{k}{w}$ y r^2 pueden despreciarse por lo que

$$A = \frac{F_0}{w^2 m} \quad (4.108)$$

$$\therefore A \rightarrow 0 \quad \text{si } w \rightarrow \infty$$

De lo anterior se puede decir que si un sistema que presenta un movimiento armónico simple forzado con amortiguamiento se cumple que $r^2 < 2mk$ existe una frecuencia característica del sistema (Reyes, 1976).

$$w = w_r = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{r^2}{2m^2}} \quad (4.109)$$

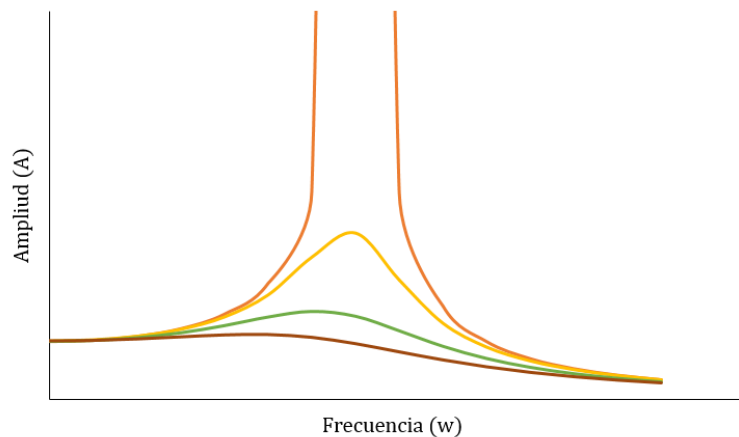
La ecuación 4.109 se denomina frecuencia de resonancia, para este caso se alcanza la amplitud máxima de las oscilaciones cuando la frecuencia del agente externo coincide con dicha frecuencia.

El fenómeno por el cual la amplitud de las oscilaciones de un sistema alcanza un valor máximo se denomina resonancia y la frecuencia a la cual ocurre se denomina frecuencia de resonancia (Reyes, 1976).

Por lo tanto, para que un sistema que presenta un movimiento armónico simple forzado con un agente externo sinusoidal y con amortiguamiento viscoso produzca resonancia es necesario y suficiente que

- a) $r^2 < 2mk$
- b) La frecuencia del agente externo sea igual a la frecuencia de resonancia del sistema.

De la ecuación de la amplitud (4.98) también se puede analizar la disminución que experimenta la frecuencia con el aumento de r . Si $r = 0$, $w_r = \sqrt{\frac{k}{m}}$ y la amplitud se hace infinita y se observa que el amortiguamiento ya no está presente, por lo que si no existe algún tipo de amortiguamiento es evidente que si se sigue suministrando energía la amplitud crecerá indefinidamente, esto se puede observar en la figura 4.23. Cuando $w_r = w$ se puede observar que mientras el amortiguamiento incrementa la amplitud decrece, sin embargo, cuando $r = 0$ la amplitud crece indefinidamente.



*Figura 4.23. Relación amplitud vs frecuencia con diferentes amortiguamientos.
(Modificado de Reyes, S. 1976).*

Por otra parte, de acuerdo con Reyes (1976), si se analiza la respuesta transitoria teniendo en cuenta la resonancia o no del sistema se puede concluir lo siguiente:

Para que se produzca resonancia se tiene que cumplir la siguiente condición

$$r^2 < 2mk$$

De igual manera se cumple que

$$r^2 < 4mk$$

Por lo tanto, según Reyes (1976), se concluye que los sistemas que presentan resonancia tienen una respuesta transitoria de tipo subamortiguada. Sin embargo el recíproco no es cierto ya que no todos los sistemas que tienen su respuesta transitoria subamortiguada pueden entrar en resonancia.

Entonces un sistema no resonante, para el cual

$$r^2 > 2mk$$

Puede presentar una respuesta transitoria subamortiguada, sobreamortiguada o críticamente amortiguada.

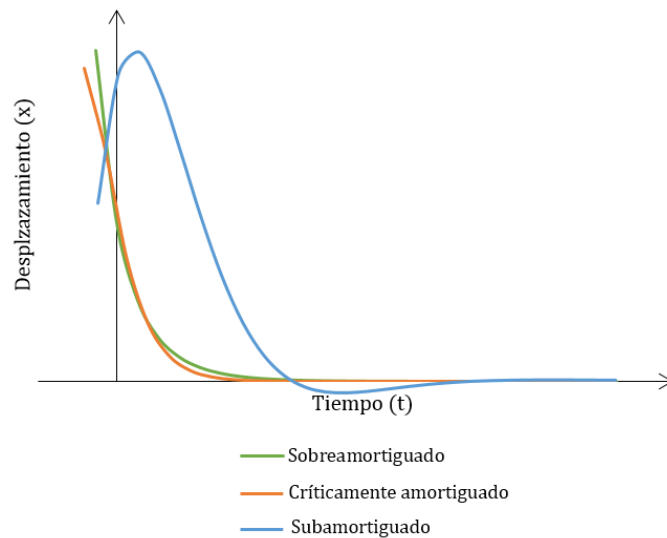


Figura 4.24. Clasificación de amortiguamientos.

4.1.2 Análisis del movimiento ondulatorio

4.1.2.1 Ondas viajeras

Dentro de las distintas formas de movimiento que presenta la materia, una de las más comunes y frecuentes que ocurre en la naturaleza es el movimiento ondulatorio.

Cuando en un medio material se produce una perturbación a través de un agente externo, la región perturbada adquiere cierto estado de movimiento, pero este estado de movimiento no se observa en los puntos posteriores que no fueron perturbados, sino que se observa en instantes posteriores un movimiento similar al de los puntos perturbados. Si se sigue suministrando energía a los puntos iniciales mediante un agente externo, a medida que transcurre el tiempo, son mayores los puntos de zonas posteriores que van adquiriendo un movimiento análogo a los puntos perturbados, por lo tanto, lo que sucede es una propagación continua de energía en un medio material y a esto se le conoce como movimiento ondulatorio (Reyes, 1976).

En un movimiento ondulatorio se debe considerar lo siguiente:

- Para que se propague la energía de un medio a otro es necesario la existencia de un medio material.
- La energía que tarda en propagarse de un punto a otro demora un tiempo finito que se conoce como tiempo de propagación.

Hay muchos ejemplos del movimiento ondulatorio que se encuentran en la naturaleza como: ondas en una cuerda, el sonido, la luz, rayos x, ondas de radio, entre otros; el mecanismo físico puede ser distinto para cada uno de los ejemplos mencionados ya que todos tienen una característica en común: son situaciones físicas producidas en un punto del espacio, que se propagan a través de este y se reciben en otro punto del espacio.

En todos los casos de un movimiento ondulatorio no se propaga materia a través del medio, sino que la materia se mueve alrededor de sus posiciones de equilibrio.

Esta materia al moverse transmite energía a las zonas vecinas; lo que se propaga a través del medio es energía y momento.

De acuerdo con Reyes (1976), el movimiento ondulatorio se puede clasificar de acuerdo con la forma de moverse la materia en relación con la dirección en que se propaga la energía:

- Transversales: Los puntos materiales se mueven perpendicularmente a la dirección de la propagación de energía
- Longitudinales: Los puntos materiales se mueven en la misma dirección de propagación de energía.

También se pueden clasificar de acuerdo con la naturaleza del medio de propagación:

- Ondas mecánicas: Son todas las formas de movimiento ondulatorio que se pueden establecer al perturbar un medio elástico, el medio puede ser gas, sólido o líquido.
- Ondas electromagnéticas: Los elementos materiales que participan en el movimiento ondulatorio son los campos eléctricos y magnéticos.

En este caso únicamente se estudiarán las ondas mecánicas.

Para comenzar a introducir algunos conceptos importantes, de acuerdo con Reyes (1976), se supondrá una cuerda lo suficientemente grande, tal que uno de sus extremos es perturbado por un agente externo, por consecuencia, la cuerda comenzará a oscilar, tal como se muestra en la figura 4.25.

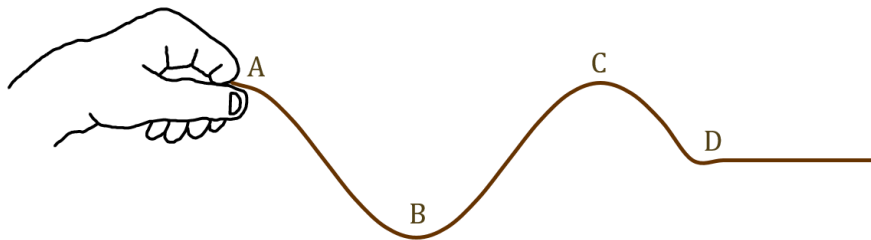


Figura 4.25. Cuerda perturbada por un agente externo. (Modificado de Reyes, S. 1976)

En un instante inicial solo se perturba el punto A, en instantes posteriores se empiezan a mover el punto B, y C, se puede observar que en el instante en el que se encuentra la figura 4.25 el punto D aún no comienza a moverse, sin embargo, en instantes posteriores comenzará a hacerlo, así como otros puntos de la cuerda.

Si se desea conocer a detalle la evolución del espacio y tiempo del movimiento ondulatorio tomando como ejemplo una cuerda se debe conocer la posición y de cualquier punto x de esta sin embargo esta posición varía con el tiempo t . Por otra parte, si se analizan distintos puntos x de la cuerda en un instante determinado t , este estará en distintas posiciones y en función a sus posiciones de equilibrio. Esto se puede observar en la figura 4.26.

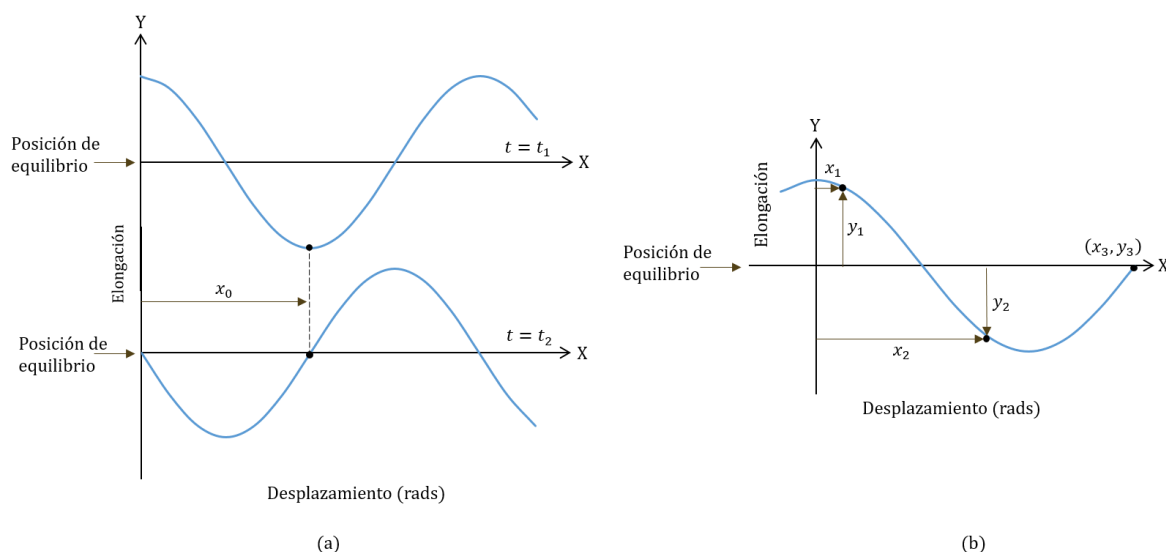


Figura 4.26. Gráficas de la relación de las variables espacial y temporal. (Modificado de Reyes, S. 1976).

Por lo tanto, la función matemática que expresa un movimiento ondulatorio debe ser una función de dos variables independientes, una variable espacial x y una variable temporal t , es decir

$$y = f(x, t)$$

Propagación de una onda

Se considera un medio el cual ha sido perturbado, por consiguiente, se genera un pulso de onda descrito por la función $f(x_0)$ que se propaga a una velocidad

constante, en un instante posterior t , se encuentra a una distancia x , es decir el pulso se ha desplazado una distancia Δx , por lo que la función $f(x_0)$ tendrá una forma diferente. Esto se puede observar en la figura 4.27.

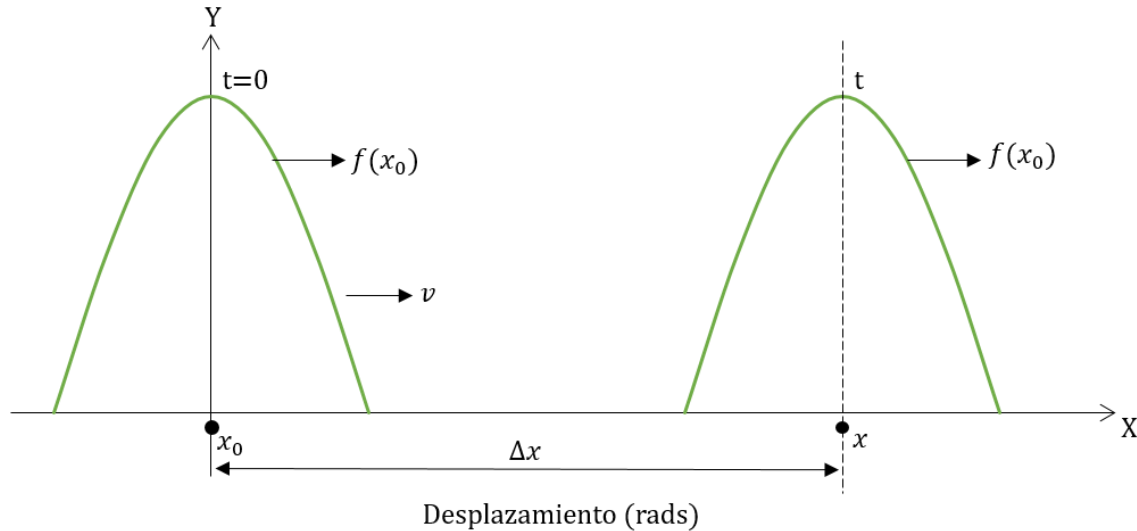


Figura 4.27. Propagación de un pulso de onda. (Modificado de Izquierdo, C. 2013).

Por lo tanto, el desplazamiento es igual al producto de la velocidad por el tiempo que tardó el pulso de x_0 a x , es decir,

$$\Delta x = vt$$

Se recuerda que el desplazamiento es igual a la posición final menos la posición inicial,

$$x - x_0 = vt$$

Si

$$-x_0 = vt - x$$

$$x_0 = x - vt$$

Por lo tanto $f(x_0)$ en un instante t posterior, tomará la siguiente forma

$$y = f(x - vt) \quad (4.110)$$

Un pulso de onda que se propaga hacia la derecha con una velocidad constante. Una expresión de la forma,

$$y(x, t) = f(x - vt) \quad (4.111)$$

Describe un movimiento ondulatorio, en donde $y(x, t)$ puede representar diferentes cantidades físicas dependiendo del medio en donde se propague la onda, por ejemplo, elongación, si se propaga en una cuerda; presión, en el caso de un cilindro con un gas, etc.

Si se desea conocer la ecuación diferencial, se parte de la expresión 4.111. Debido a que la expresión 4.111 tiene propiedades espaciales y temporales se usarán derivadas parciales.

Si se parte de lo anterior, usando regla de la cadena:

$$y = f(x - vt)$$

$$u = x - vt$$

Se tiene que para la variable espacial

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial f(u)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial f(u)}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x}$$

Pero

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial f(u)}{\partial x} \quad (4.112)$$

Ahora, si se obtiene la segunda derivada

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f(u)}{\partial x} \right)$$

Utilizando la regla de la cadena

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial f(u)}{\partial x} \right) \frac{\partial u}{\partial x}$$

Pero

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f(u)}{\partial u^2} \quad (4.113)$$

Ahora con la variable temporal

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial f(u)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial f(u)}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial t}$$

Pero

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -v$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -v \frac{\partial f(u)}{\partial t} \quad (4.114)$$

Posteriormente, con la segunda derivada

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)$$

Pero,

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -v \frac{\partial f(u)}{\partial t}$$

Entonces

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -v \frac{\partial f(u)}{\partial t}$$

Se usa nuevamente la regla de la cadena

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial u} \left(-v \frac{\partial f(u)}{\partial t} \right) \frac{\partial u}{\partial t}$$

Pero

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -v$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial u} \left(-v \frac{\partial f(u)}{\partial t} \right) - v \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= v^2 \frac{\partial^2 f(u)}{\partial u^2} \end{aligned} \quad (4.115)$$

Se puede escribir como

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \frac{1}{v^2} = \frac{\partial^2 f(u)}{\partial u^2} \quad (4.116)$$

De acuerdo con la expresión 4.113 y 4.116 se tiene que

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (4.117)$$

La ecuación 4.117 se conoce como la ecuación de la onda en una dimensión.

Ecuación de la cuerda vibrante. Caso transversal

Otro de los ejemplos con los que se puede analizar el movimiento ondulatorio es con una cuerda vibrante, por lo tanto, se determinará la ecuación y solución para este sistema. Para esto se analizará el movimiento a través de un elemento Δx de una cuerda, la cual presenta un movimiento ondulatorio.

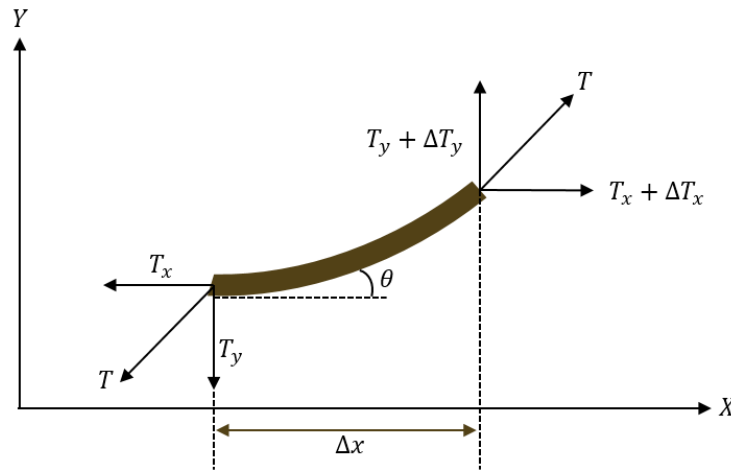


Figura 4.28. Elemento Δx de una cuerda. (Modificado de Reyes, S. 1976).

Primeramente, se tomarán en cuenta algunas consideraciones: se supondrá un ángulo θ pequeño, se despreciará el movimiento en el eje x y la densidad lineal de masa de la cuerda permanecerá constante en todo tiempo.

Partiendo de la segunda ley de Newton en el eje y

$$\sum F_y = ma_y$$

De acuerdo con la figura 4.28 se puede reescribir como

$$-T_y(x) + T_y(x + \Delta x) = ma_y \quad (4.118)$$

Pero $T_y = T \sin \theta$

$$-T \sin \theta(x) + T \sin \theta(x + \Delta x) = ma_y \quad (4.119)$$

Pero si se considera el ángulo lo suficientemente pequeño, se puede decir que

$$\sin \theta \approx \tan \theta$$

Se considera que $\tan\theta$ es la pendiente, es decir

$$\tan\theta = \frac{\partial y}{\partial x}$$

Se introducen las parciales ya que y también varía en el tiempo y la ecuación 4.119 se reescribe como

$$T \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} - T \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_x = ma_y \quad (4.120)$$

Al tratarse de una cuerda, se introducirá el parámetro llamado densidad lineal

$$\mu = \frac{m}{L}$$

Entonces se considera la masa como,

$$m = \mu \Delta x$$

Y, también se sabe que

$$a_y = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Por lo tanto, la ecuación 4.120 puede reescribirse como

$$T \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} - T \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_x = \mu \Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (4.121)$$

Si se divide entre Δx , se obtiene lo siguiente

$$\frac{T \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} - T \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_x}{\Delta x} = \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Si al lado izquierdo de la igualdad se le aplica el límite cuando Δx tiende a cero

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{T \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} - T \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_x}{\Delta x} = \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$T \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_x}{\Delta x} = \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Se obtiene lo siguiente

$$T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (4.122)$$

Si se compara con la ecuación 4.117

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

La ecuación 4.122 es la ecuación de la onda para una cuerda vibrante, donde $\frac{\mu}{T}$ es la velocidad.

Para la solución de esta ecuación son importantes las condiciones de frontera y las condiciones iniciales para que sea una solución única y satisfaga los requerimientos físicos planteados.

Las condiciones iniciales son aquellas que se presentan cuando el tiempo es igual a cero ($t = 0$), en este caso, como se encuentran los parámetros que definen el estado de movimiento de la cuerda cuando no ha transcurrido un instante de tiempo, por ejemplo, la posición y la velocidad. Estas condiciones pueden tomar la siguiente forma (las condiciones que se mostrarán son para el caso de la ecuación de la onda de una cuerda):

$$y(x, 0) = 0 \quad (4.123)$$

$$\frac{dy}{dt}(x, 0) = 0 \quad (4.124)$$

Las expresiones 4.123 y 4.124 son condiciones iniciales de un problema en particular, en este caso, la ecuación de la cuerda, en las cuales, se tienen dos variables, la variable espacial y temporal. En la expresión 4.123 indica que en un $t = 0$, la posición es igual a cero; en la expresión 4.124 indica que en un $t = 0$, la

velocidad es igual a cero. Las condiciones iniciales nos dan una idea de la energía inicial de un sistema. Cabe mencionar que estas condiciones varían dependiendo del problema planteado.

Por otra parte, las condiciones de frontera o de contorno (acotamientos) definen las condiciones físicas que se presentan en los extremos dependiendo del objeto de estudio, en el caso de la cuerda, si los extremos son fijos o libres, o también si la cuerda es finita, semi infinita o infinita. Por ejemplo:

$$y(0, t) = 0 \quad (4.125)$$

$$y(L, t) = 0 \quad (4.126)$$

Las expresiones 4.125 y 4.126 son condiciones de frontera para un problema específico de la ecuación de la cuerda, en este caso, la expresión 4.125 indica que en todo instante de tiempo, en $x = 0$, el primer extremo se encuentra fijo, ya que no presenta movimiento; en la expresión 4.126 indica que en $x = L$, el otro extremo de la cuerda también se encuentra fijo, ya que al ser igual a cero no presenta movimiento. También, se puede concluir que la cuerda varía de 0 a L por lo que se considera una cuerda finita.

Por lo tanto para la resolución de un “problema” y con el objetivo de obtener una solución única de un determinado sistema se deben de plantear: 1) la ecuación diferencial, 2) las condiciones iniciales y 3) las condiciones de frontera.

Para la solución de la ecuación 4.122 se tomará en cuenta lo siguiente:

Se considera una cuerda semi infinita tal que en el instante inicial la cuerda no tiene ninguna elongación inicial y se encuentra en reposo mientras que en su extremo para todo instante se establece un movimiento armónico simple de frecuencia w y amplitud A , tal que en el instante inicial dicho extremo comienza a moverse hacia abajo. (Reyes, S. 1976).

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$y(x, 0) = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = 0$$

$$y(0, t) = -A \sin \omega t$$

$$0 \ll x \ll \infty$$

$$t > 0$$

Se considera que $\frac{\mu}{T} = \frac{1}{c^2}$, es la velocidad, entonces se puede reescribir la ecuación 4.122 como

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (4.127)$$

Que es una ecuación diferencial en derivadas parciales, para su resolución se usará el método de Fourier o separación de variables que consiste en encontrar una solución de la forma

$$y(x, t) = X(x)T(t)$$

La ecuación 4.127 se reescribe como

$$X''(x)T(t) = \frac{1}{c^2} X(x)T''(t)$$

Ahora, como indica el nombre del método de solución, se realiza la separación de variables

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{c^2} \frac{T''(t)}{T(t)}$$

Ahora el lado izquierdo de la igualdad depende solo de x y el lado derecho de t . Debido a que x y t son independientes se igualan ambas ecuaciones a una constante de separación $-\lambda$.

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = -\lambda$$

Por lo tanto,

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

$$X'' = -\lambda X$$

$$X'' + \lambda X = 0 \quad (4.128)$$

Por otra parte,

$$\frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = -\lambda$$

$$T'' = -\lambda c^2 T$$

$$T'' + \lambda c^2 T = 0 \quad (4.129)$$

Las ecuaciones 4.128 y 4.129 son ecuaciones diferenciales ordinarias que ahora se pueden resolver de una forma más sencilla.

En cada uno de estos problemas, un número λ para el cual la ecuación diferencial de Sturm-Liouville tiene solución no trivial se llama un valor propio del problema. La solución no trivial correspondiente se llama una función propia asociada con este valor propio. La función cero no puede ser una función propia. Sin embargo, cualquier múltiplo constante distinto de cero de una función propia asociada con un valor propio particular también es una función propia para este valor propio. En los modelos matemáticos de los problemas en física e ingeniería, los valores propios usualmente tienen algún significado físico. Por ejemplo, en el estudio del movimiento de ondas los valores propios son frecuencias fundamentales de vibración del sistema (O'Neil, P. 2008).

Se consideran las condiciones iniciales,

$$y(x, 0) = X(x)T(0) = 0$$

Se tiene un producto de dos funciones, en donde, cualquiera de ellas podría ser cero, sin embargo, si $X(0) = 0$, no se cumpliría la condición de frontera, y por lo tanto no sería una solución para el problema planteado por lo que la función que tiene que ser cero es T .

$$T(0) = 0$$

En la segunda condición inicial, ocurre algo similar, se tiene el producto de dos funciones, por lo que la función X no puede ser cero, ya que no cumpliría la condición de frontera del problema, por lo que la función T' es la que tiene que ser cero.

$$\frac{dy}{dt}(x, 0) = X(x)T'(0) = 0$$

$$T'(0) = 0$$

De las condiciones anteriores se puede observar que no hay velocidad inicial ni desplazamiento, por lo que se puede deducir que la cuerda permanece en reposo en $t = 0$. Debido a esto, al considerar los tres casos del problema de Sturm-Liouville, en el cual se buscarán los valores propios, o bien, las funciones propias correspondientes, se obtiene lo siguiente:

Caso I, $\lambda = 0$

$$T'' + \lambda T c^2 = 0$$

$$T'' + (0)T c^2 = 0$$

$$T'' = 0$$

Al integrar se recuerda que, la integración es el proceso inverso de la derivada por lo que la derivada de segundo orden se reduce a una derivada de primer orden, y en este caso, la integral indefinida de cero es igual a una constante.

$$\int T'' = 0$$

$$T' = A$$

Al volver a integrar la derivada de primer orden se reduce a una función, y la integral indefinida de una constante es la siguiente

$$\int k \, dx = kx + c$$

Por lo tanto,

$$\int T' = A$$

$$T = At + B$$

Se evalúa la primera condición inicial, $y(x, 0) = 0$

$$T(0) = A(0) + B$$

$$T(0) = B \quad \therefore$$

$$B = 0$$

Se evalúa la segunda condición inicial, $\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = 0$

$$T' = At + B$$

$$T' = A + B$$

$$T'(0) = A + B = 0$$

Pero,

$$B = 0 \quad \therefore$$

$$T'(0) = A = 0$$

Por lo tanto A y B son iguales a cero, por lo que se considera una solución trivial, y en este caso lo que se busca son soluciones no triviales para poder determinar las funciones propias del problema. Además, que, la solución, es el producto de dos funciones $y(x, t) = X(x)T(t)$, por lo que si $T(t) = 0$ el producto de esas funciones sería cero.

Caso II, $\lambda = -\lambda = -k^2$

$$T'' + \lambda T c^2 = 0$$

$$T'' - k^2 T c^2 = 0 \quad (4.130)$$

La ecuación 4.130 es una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden.

$$y'' + py' + qy = 0 \quad (4.131)$$

Donde p y q son números constantes reales. En donde se buscan soluciones particulares de la forma exponencial de la siguiente forma

$$t = e^{kx}, \text{ donde } k = \text{constante}$$

Entonces,

$$t' = ke^{kx} = kx \quad (4.132)$$

$$t'' = k^2 e^{kx} = k^2 x \quad (4.133)$$

Las ecuaciones 4.132 y 4.133 se sustituyen en la ecuación 4.130

$$k^2 e^{kx} - k^2 c^2 e^{kx} = 0$$

$$e^{kx}(k^2 - k^2 c^2) = 0$$

Dado que $e^{kx} \neq 0$, resulta que

$$k^2 - k^2 c^2 = 0 \quad (4.134)$$

Ahora se evalúan las raíces

$$k = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

De la ecuación 4.134 se observa que

$$p = 0 \text{ y } q = -k^2 c^2$$

Por lo tanto

$$k = -\frac{0}{2} \pm \sqrt{\frac{0^2}{4} - (-k^2 c^2)}$$

$$k = \pm \sqrt{k^2 c^2} \quad \therefore$$

$$k_1 = k^2 c^2, \quad k_2 = -k^2 c^2$$

De los tres casos posibles, k_1 y k_2 son números reales y distintos ($k_1 \neq k_2$). Por lo tanto, se tiene una solución de la forma

$$T(t) = Ae^{k_1 t} + Be^{-k_1 t} \quad (4.135)$$

Ahora, si se evalúa la condición de frontera, $y(x, 0) = 0$

$$T(0) = Ae^{k(0)c} + Be^{-k(0)c}$$

$$T(0) = Ae^0 + Be^0$$

$$T(0) = A + B$$

$$A = -B \quad (4.136)$$

Si se sustituye 4.136 en 4.135

$$T(t) = -Be^{k_1 t} + Be^{-k_1 t}$$

Pero si,

$$\frac{e^{-t} + e^t}{2} = \sinh(t)$$

$$T(t) = 2B\sinh(k_1 t)$$

Ahora, con la condición inicial, $\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = 0$

$$T(t) = 2B\sinh(k_1 t)$$

$$T'(t) = 2Bk_1 \cosh(k_1 t)$$

$$T'(0) = 2Bk_1 \cosh[(k_1)0]$$

Pero,

$$\cosh(0) = 1 \quad \therefore$$

$$T'(0) = 2Bk_1 = 0$$

Para este caso B tiene que ser cero, por lo que se concluye que es una solución trivial y que este problema no tiene valores propios negativos.

Caso III, $\lambda > 0 = k^2$

$$T'' + \lambda T c^2 = 0 \quad (4.137)$$

La ecuación 4.137 es una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden.

$$y'' + py' + qy = 0 \quad (4.138)$$

Donde p y q son números constantes reales. En donde se buscan soluciones particulares de la forma exponencial de la siguiente forma

$$t = e^{kx}, \text{ donde } k = \text{constante}$$

Entonces,

$$t' = k e^{kx} = kx \quad (4.139)$$

$$t'' = k^2 e^{kx} = k^2 x \quad (4.140)$$

Las ecuaciones 4.139 y 4.140 se sustituyen en la ecuación 4.137

$$k^2 e^{kx} + k^2 c^2 e^{kx} = 0$$

$$e^{kx}(k^2 + k^2 c^2) = 0$$

Dado que $e^{kx} \neq 0$, resulta que

$$k^2 + k^2 c^2 = 0 \quad (4.141)$$

Ahora se evalúan las raíces

$$k = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

De la ecuación 4.141 se observa que

$$p = 0 \text{ y } q = k^2 c^2$$

Por lo tanto

$$k = -\frac{0}{2} \pm \sqrt{\frac{0^2}{4} - k^2 c^2}$$

$$k = \pm \sqrt{-k^2 c^2} \quad \therefore$$

$$k_1 = k^2 c^2 i, \quad k_2 = -k^2 c^2 i$$

De los tres casos posibles, k_1 y k_2 son números complejos. Por lo tanto, se tiene una solución de la forma

$$T(t) = A \cos(kct) + B \sin(kct) \quad (4.142)$$

Se evalúa la primera condición inicial, $y(x, 0) = 0$

$$T(0) = A \cos[(kc)0] + B \sin[(kc)0]$$

Pero,

$$\cos(0) = 1$$

$$\sin(0) = 0$$

Por lo tanto,

$$T(0) = A$$

$$T(0) = A = 0$$

Ahora, la segunda condición inicial, $\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = 0$

$$T'(t) = -Akc \sin(kct) + Bkc \cos(kct) = 0$$

$$T'(0) = -Akc \sin[(kc)0] + Bkc \cos[(kc)0] = 0$$

$$T'(0) = Bkc = 0$$

$$\therefore B = 0$$

O bien, si $A = 0$

$$T(t) = (0)\cos(kct) + B\sin(kct)$$

$$T(t) = B\sin(kct)$$

$$T'(t) = Bkc \cos(kct)$$

$$T'(0) = Bkc \cos[(kc)0]$$

$$T'(0) = Bkc$$

$$T'(0) = Bkc = 0$$

$$\therefore B = 0$$

Se concluye que en los tres casos se tienen soluciones triviales, por lo que la solución planteada inicialmente toma la siguiente forma

$$y(x, t) = X(x)T(t)$$

$$y(x, t) = [X(x)](0) \quad \therefore$$

$$y(x, t) = 0$$

Por lo tanto, la solución planteada no satisface las condiciones iniciales, por lo que se planteará otra solución.

De acuerdo con el problema planteado, en $t = 0$, según las condiciones iniciales, la cuerda se encuentra en reposo. En un instante inicial, en donde, $x = 0$, la cuerda se

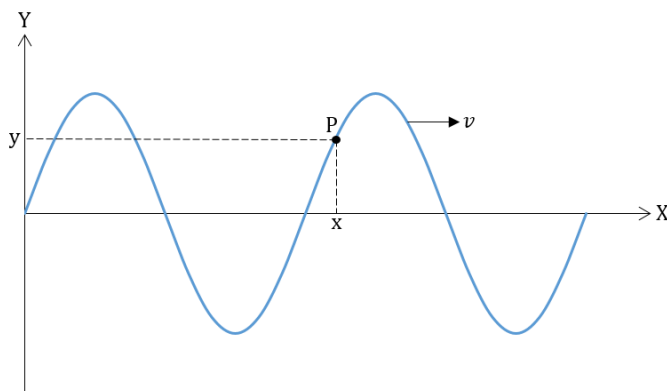


Figura 4.29. Movimiento adquirido por una cuerda perturbada con un movimiento armónico simple. (Modificado de Ferreira, C. 2015).

perturba y adquiere un movimiento armónico simple, $-A \sin wt$, y posteriormente en todo instante de tiempo cada punto de la cuerda va adquiriendo ese movimiento. Al momento de perturbar la cuerda no todos los puntos de esta adquieren el movimiento de

forma inmediata, sino que se encontrarán desfasados cierto instante de tiempo debido a que la onda viaja a una velocidad constante.

Si se observa la figura 4.29, se representa el movimiento descrito anteriormente, ahora, si se toma un punto cualquiera de la gráfica a una distancia x del origen, se puede observar que lleva cierto desfase con respecto al punto del origen y puntos

vecinos, ese desfase es el tiempo que tarda en recorrer la onda la distancia x . Debido a que la velocidad es constante, esta se puede expresar como

$$c = \frac{x}{t}$$

Donde x es la distancia del origen al punto de estudio y t es el desfase de tiempo que existe entre el origen y el punto de estudio. Por lo tanto, el tiempo de desfase se puede expresar como

$$t_d = \frac{x}{c} \quad (4.143)$$

De acuerdo con la condición de frontera, se sabe que, en todo instante de tiempo, cuando $x = 0$, se tiene un movimiento armónico simple

$$y(x, 0) = -A \operatorname{sen}(wt) \quad (4.144)$$

Por otra parte, la ecuación de un punto cualquiera P en cierto instante de tiempo será la siguiente

$$y(x, t') = -A \operatorname{sen}(wt') \quad (4.145)$$

Donde t' representa cualquier instante de tiempo. Sin embargo, se sabe que el punto P oscila de la misma forma que el punto en el origen, pero con un desfase de tiempo, que se puede expresar como

$$t' = t - t_d \quad (4.146)$$

Donde t_d es el tiempo desfasado y se expresa como la ecuación 4.143. Por lo que se puede sustituir en 4.146.

$$t' = t - \frac{x}{c}$$

Por lo que si se desea conocer la posición y de un punto x en cualquier instante de tiempo, se parte de la ecuación 4.145, la ecuación será la siguiente

$$y(x, t) = -A \operatorname{sen} \left[w \left(t - \frac{x}{c} \right) \right]$$

Que se puede expresar como

$$y = -A \operatorname{sen}\left(wt - \frac{w}{c}x\right)$$

Pero,

$$k = \frac{w}{c}$$

Por lo tanto,

$$y = -A \operatorname{sen}(wt - kx) \quad (4.147)$$

La ecuación 4.147 se puede reescribir como

$$y = A \operatorname{sen}(kx - wt) \quad (4.148)$$

Por lo tanto, cualquier punto $y = f(x, t)$ nos dará la posición de un punto x en cualquier instante t .

Para determinar que la ecuación 4.148 es solución del problema planteado, se debe de verificar si satisface la ecuación diferencial, condiciones iniciales y de frontera.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (4.149)$$

De la ecuación 4.148 se obtiene lo siguiente

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -Aw \cos(kx - wt)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -Aw^2 \operatorname{sen}(kx - wt)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = Ak \cos(kx - wt) \quad (4.150)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -Ak^2 \operatorname{sen}(kx - wt)$$

Sustituyendo en la ecuación 4.149

$$-Ak^2 \operatorname{sen}(kx - wt) = -\frac{\mu}{T} Aw^2 \operatorname{sen}(kx - wt)$$

Que se reduce a

$$k^2 = \frac{-\frac{\mu}{T}Aw^2\text{sen}(kx - wt)}{-A\text{sen}(kx - wt)}$$

$$k^2 = \frac{\mu}{T}w^2$$

$$\frac{k^2}{w^2} = \frac{\mu}{T}$$

O bien,

$$\frac{w^2}{k^2} = \frac{T}{\mu}$$

$$\frac{w}{k} = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Pero,

$$k = \frac{w}{c}$$

Por lo tanto,

$$c = \frac{w}{k}$$

$$c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Ahora, para las condiciones iniciales se tiene que

$$y(x, 0) = 0$$

$$y(x, 0) = A\text{sen}[kx - w(0)]$$

$$y(x, 0) = A\text{sen}(kx)$$

Que, evaluando la condición de frontera en tiempos negativos $t = -\frac{x}{c}$, la ecuación 4.144 se puede reescribir como

$$y(x, 0) = -A \sin w \left(-\frac{x}{c} \right)$$

Sin embargo, el problema indica que $t = 0$, es decir, que es el instante en el que empieza a perturbarse, por lo que no tiene sentido plantear soluciones para tiempos anteriores, por lo que

$$y(x, 0) = 0$$

Asimismo, la segunda condición inicial,

$$\left. \frac{\partial y}{\partial t} \right|_{t=0} = 0$$

En este caso, solo se tiene una condición de frontera debido a que es una cuerda semi-infinita,

$$y(0, t) = -A \sin(wt)$$

Por lo que

$$y(0, t) = A \sin(kx - wt)$$

$$y(0, t) = A \sin[k(0) - wt]$$

$$y(0, t) = A \sin(-wt)$$

$$y(0, t) = -A \sin(wt)$$

Por lo tanto, debido a que la ecuación diferencial, las condiciones de iniciales y de frontera satisfacen a la solución

$$y(x, t) = A \sin(kx - wt) \quad (4.151)$$

Se puede concluir que la ecuación 4.151 es la solución de la ecuación de la cuerda vibrante con sus respectivas condiciones planteadas y con una velocidad de propagación:

$$c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

La cual depende de las características del medio. Cabe mencionar que es importante que esta velocidad de propagación, no se confunda con la velocidad de vibración de un punto de la cuerda, que es obtenida a partir de la ecuación 4.150.

$$v = \frac{\partial y}{\partial t} = -Aw \cos(kx - wt)$$

Por lo tanto, la solución de la ecuación de una onda viajera con las condiciones iniciales y de fronteras planteadas es

$$y = f(x, t) = A \sin(kx \pm wt) \quad (4.152)$$

O bien,

$$y = f(x, t) = A \cos(kx \pm wt)$$

Se debe recordar que esta solución de la ecuación de la onda es para una cuerda semi-infinita que en un $t = 0$ se encuentra en reposo, es decir, no tiene desplazamiento ni velocidad inicial; y que, en un instante inicial, cuando $x = 0$, se perturba con un movimiento armónico simple que posteriormente en todo instante de tiempo, la cuerda adquirirá ese movimiento. Por lo que se concluye que la solución de la ecuación de la onda depende de las condiciones iniciales y condiciones de frontera.

De acuerdo con Stewart (2012) el sentido de propagación está determinado por una constante $\pm c$

(1) $y = f(x - c)$, se desplaza la gráfica de $y = f(x)$ c unidades a la derecha

(2) $y = f(x + c)$, se desplaza la gráfica de $y = f(x)$ c unidades a la izquierda

Por lo tanto, si la solución tiene la forma del enunciado uno, $A \sin(kx - wt)$ el sentido de propagación es de izquierda a derecha como se muestra en la figura 4.30 a) y, si la solución tiene la forma del enunciado dos, $A \sin(kx + wt)$ la onda se propaga de derecha a izquierda como se observa en la figura 4.30 b).

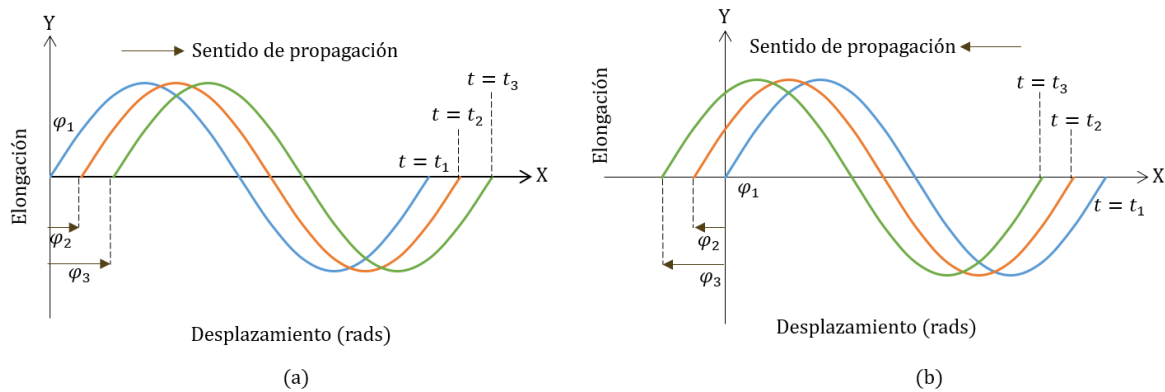


Figura 4.30. Sentido de propagación de la onda. (Modificado de Reyes, S. 1976).

Como se ha visto hasta ahora, se ha estudiado el caso particular, de una cuerda que se perturba con un movimiento armónico simple. Como consecuencia, cada punto de la cuerda oscila con un movimiento armónico simple alrededor de su posición de equilibrio. Por este motivo los parámetros fundamentales de una onda son similares a los de un movimiento armónico simple. De acuerdo con Reyes (1976) los parámetros son los siguientes:

Amplitud (A): Es la máxima elongación que puede alcanzar un punto de la cuerda

Frecuencia angular (ω): Es la frecuencia con la que oscila un punto que fue perturbado.

Frecuencia (f): Número de oscilaciones por unidad de tiempo

Constante de propagación (k): Constante que al ser multiplicada por una distancia se convierte en radianes.

Periodo (T): El tiempo que tarda la onda en realizar un ciclo. (Una oscilación completa).

Fase ($kx \pm \omega t$): Posición angular que en cada posición x y tiempo t define la función $y = f(x, t)$.

Longitud de onda (λ): Es la distancia que recorre la onda en un periodo. Ya que la onda avanza con una velocidad c , la longitud de onda se expresa como

$$\lambda = cT$$

O bien,

$$\lambda = \frac{c}{f}$$

La longitud de onda también se puede expresar como la distancia que hay entre dos puntos de la onda que se encuentren en fase (figura 4.31).

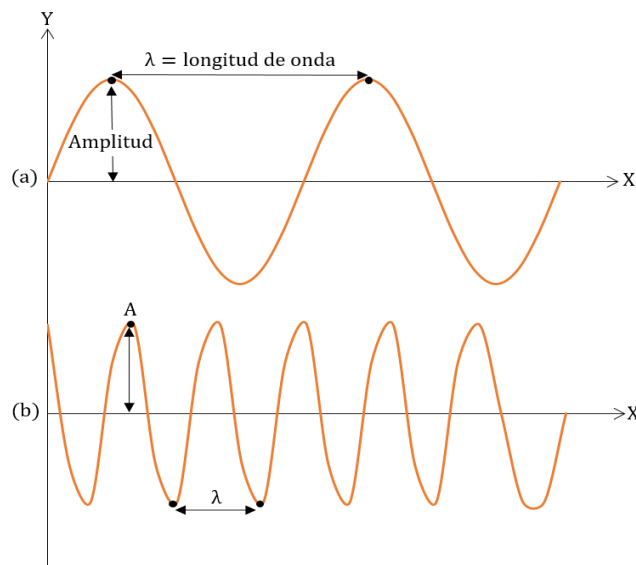


Figura 4.31. Parámetros del movimiento ondulatorio.

Transmisión de energía

Al perturbar un punto de la cuerda, puntos posteriores realizarán cierto trabajo, ya que se aplica una fuerza y por lo tanto existe un desplazamiento, en este caso, estos puntos tienen un desplazamiento vertical, que indican que existe una fuerza vertical que se encarga de realizar el trabajo, por lo que la tensión en el eje y tiene un papel muy importante.

Se analizará a partir de un segmento de una cuerda como se muestra en la figura 4.32.

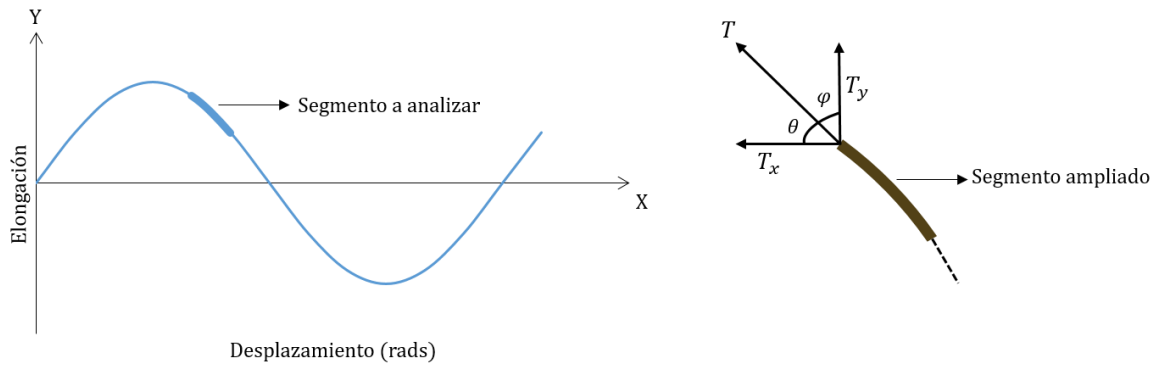


Figura 4.32. Segmento a analizar de una cuerda. (Modificado de Reyes, S. 1976).

Se supondrá que el segmento a analizar es lo suficientemente pequeño para considerarlo una partícula. La potencia que se suministra está dada por la siguiente ecuación,

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Que se puede reescribir como

$$P = \vec{T} \cdot \vec{v} \quad (4.153)$$

De acuerdo con el producto punto de dos vectores, la ecuación 4.153 se escribe como

$$P = Tvcos\varphi \quad (4.154)$$

De acuerdo con la figura 4.32

$$T_y = Tsen\theta \quad (4.155)$$

$$T_x = Tcos\varphi \quad (4.156)$$

Debido a que θ y φ son ángulos complementarios

$$\theta + \varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore cos\varphi = sen\theta$$

Por lo que la ecuación 4.154 puede reescribirse como

$$P = Tv \text{sen} \theta \quad (4.157)$$

El ángulo se considerará lo suficientemente pequeño, por lo que

$$\text{sen} \theta \approx \tan \theta$$

Se sabe que

$$\tan \theta = \frac{\text{sen} \theta}{\cos \theta} \quad (4.158)$$

Que es la pendiente, entonces, la expresión 4.158 se puede reescribir como

$$\tan \theta = \frac{\partial y}{\partial x} \quad (4.159)$$

Entonces, la ecuación 4.157 se reescribe como

$$P = -Tvtg\theta \quad (4.160)$$

Pero también,

$$v = \frac{\partial y}{\partial t}$$

Por lo tanto, la ecuación 4.160 se puede reescribir como

$$P = -T \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial t} \quad (4.161)$$

De la solución de la ecuación de la onda se tiene que

$$y(x, t) = A \text{sen}(kx - \omega t)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = Ak \cos(kx - \omega t)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -A\omega \cos(kx - \omega t)$$

Nuevamente, se reescribe la ecuación 4.161 y se considera que $\theta = (kx - \omega t)$

$$P = -T Ak \cos \theta (-A\omega \cos \theta)$$

$$P = Tk\omega A^2 \cos^2 \theta \quad (4.162)$$

Por lo tanto, la potencia instantánea se escribe como

$$P = TkwA^2\cos^2(kx - wt) \quad (4.163)$$

Para reescribir la potencia de otra forma, se considera que

$$v = \frac{w}{k} \therefore k = \frac{w}{v}$$

Entonces,

$$P = T \frac{w}{v} w A^2 \cos^2 \theta$$

$$P = T \frac{w^2}{v} A^2 \cos^2 \theta$$

Pero también, la velocidad se considera como

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

O bien,

$$\frac{1}{v} = \sqrt{\frac{\mu}{T}}$$

Se reescribe la ecuación 4.163

$$P = T \frac{1}{v} w^2 A^2 \cos^2 \theta$$

$$P = T \sqrt{\frac{\mu}{T}} w^2 A^2 \cos^2 \theta$$

$$P = \sqrt{\frac{T^2 \mu}{T}} w^2 A^2 \cos^2 \theta$$

$$P = \sqrt{T\mu} w^2 A^2 \cos^2 \theta$$

$$P = \sqrt{T\mu} w^2 A^2 \cos^2(kx - wt) \quad (4.164)$$

La ecuación 4.164 es la potencia instantánea.

Ahora, para obtener la potencia media

$$P_{media} = \frac{P_{max}}{2}$$

La potencia máxima se da cuando $\cos\theta = 1$

$$P_{max} = TkwA^2$$

Por lo tanto,

$$P_{media} = \frac{TkwA^2}{2} = \frac{1}{2}TkwA^2 \quad (4.165)$$

Por otra parte, si se utiliza la definición del valor medio

$$f(c)(b-a) = \int_a^b f(x)dx$$

$$f(c) = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x)dx \quad (4.166)$$

De acuerdo con las ecuaciones 4.165 y 4.166, se obtiene lo siguiente

$$P_{media} = \frac{1}{T-0} \int_0^T TkwA^2 \cos^2(kx - wt) dt$$

$$P_{media} = TkwA^2 \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(kx - wt) dt \quad (4.167)$$

Usando la identidad trigonométrica

$$\cos^2\theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\theta)$$

Se reescribe la ecuación 4.167

$$P_{media} = TkwA^2 \frac{1}{T} \int_0^T \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2(kx - wt) dt \right] \quad (4.168)$$

$$\frac{1}{T} \left[\int_0^T \frac{1}{2} dt + \int_0^T \frac{1}{2} \cos(2kx - 2wt) dt \right] \quad (4.169)$$

Si se resuelve la primera integral de 4.169 se obtiene que

$$\frac{1}{2}t \Big|_0^T \quad (4.170)$$

Ahora la segunda integral de 4.169

$$\int_0^T \frac{1}{2} \cos(2kx - 2wt) dt \quad (4.171)$$

Por sustitución se tiene que

$$u = 2kx - 2wt$$

$$\frac{du}{dt} = -2w$$

$$dt = \frac{du}{-2w}$$

Por lo tanto, se obtiene

$$\frac{1}{2} \int_0^T \frac{1}{2} \cos(u) \frac{du}{-2w}$$

$$\frac{1}{2} \frac{1}{-2w} \int_0^T \frac{1}{2} \cos(u) du$$

$$-\frac{1}{4w} \sin(u) \Big|_0^T$$

Pero $u = 2kx - 2wt$

$$-\frac{1}{4w} \sin(2kx - 2wt) \Big|_0^T \quad (4.172)$$

Por la siguiente identidad trigonométrica

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta$$

La ecuación 4.172 se reescribe como

$$-\frac{1}{4w} [\cos(2kx) \sin(2wt) - \sin(2kx) \cos(2wt)]$$

Por lo tanto, se tiene que

$$\frac{1}{2}t \Big|_0^T - \frac{1}{4w} [\cos(2kx) \operatorname{sen}(2wt) - \operatorname{sen}(2kx) \cos(2wt)] \Big|_0^T$$

Se recuerda que $T = 2\pi$

$$\left[\frac{1}{2}(2\pi) - \frac{1}{2}(0) \right] - \left[-\frac{1}{4w} [\cos(2kx) \operatorname{sen}(2w2\pi) - \operatorname{sen}(2kx) \cos(2w2\pi)] \right] \\ - \left[-\frac{1}{4w} [\cos(2kx) \operatorname{sen}[(2w)0] - \operatorname{sen}(2kx) \cos[(2w)0]] \right]$$

Debido a que w se considera una constante se puede tomar en cuenta que

$$\operatorname{sen} 2\pi = 0, \cos 2\pi = 1$$

Por lo tanto

$$\frac{1}{2}t \Big|_0^T - \frac{1}{4w} \operatorname{sen}(2kx - 2wt) \Big|_0^T = [\pi] - \left[\frac{1}{4w} \operatorname{sen}(2kx) - \frac{1}{4w} \operatorname{sen}(2kx) \right]$$

$$\frac{1}{2}t \Big|_0^T - \frac{1}{4w} \operatorname{sen}(2kx - 2wt) \Big|_0^T = [\pi] - [0]$$

$$\frac{1}{2}t \Big|_0^T - \frac{1}{4w} \operatorname{sen}(2kx - 2wt) \Big|_0^T = \pi \quad (4.173)$$

De acuerdo con la ecuación 4.169

$$\frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(kx - wt) dt = \frac{1}{T} (\pi)$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(kx - wt) dt = \frac{1}{2\pi} (\pi)$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(kx - wt) dt = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto, según la ecuación 4.168 la potencia media es

$$P_{media} = \frac{1}{2} TkwA^2 \quad (4.174)$$

Ecuación de la onda. Caso longitudinal

En el caso anterior de la cuerda vibrante, se analizó la propagación de las ondas para el caso transversal, es decir cuando la materia se mueve en dirección perpendicular en la que se propaga la energía, ahora, se analizará el caso de un fluido en un tubo con un émbolo, para poder comprender el caso longitudinal de la propagación de las ondas.

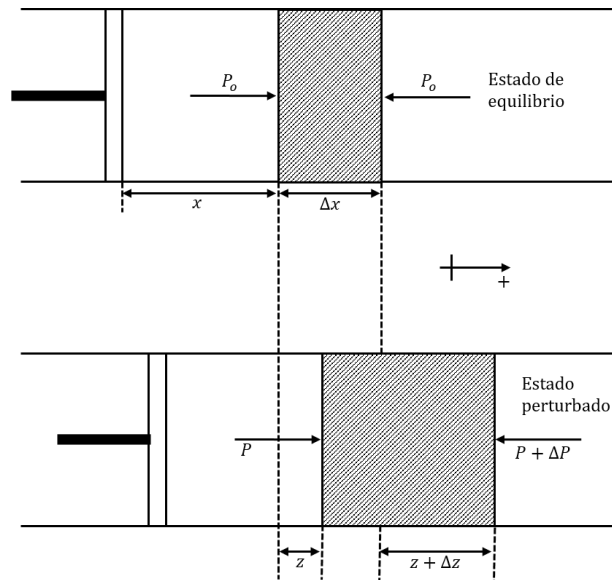


Figura 4.33. Cilindro con un émbolo en estado de equilibrio que posteriormente es perturbado. (Modificado de Reyes, S. 1976).

En la figura 4.33 se tiene un cilindro con un émbolo que en su interior tiene un gas con una densidad ρ , un módulo de compresibilidad β y en su estado de equilibrio el gas tiene una presión uniforme P_o .

Si mediante un agente externo, se empuja el émbolo hacia la derecha, los fragmentos de gas cercanos al émbolo comenzarán a moverse hacia la misma dirección en la que se perturbó el sistema, a su vez los fragmentos que ya han sido perturbados comenzarán a perturbar otros fragmentos del gas dentro del cilindro, hasta que, en cierto instante de tiempo, debido al estímulo inicial, todos los fragmentos de gas se encontrarán en movimiento. Es decir que existe un movimiento ondulatorio que se propaga en la misma dirección del desplazamiento de las partículas (Reyes, 1976).

Al moverse el émbolo a la derecha, la parte izquierda de la sección gaseosa se desplazó a una distancia z y el lado derecho de la sección se desplazó una distancia $z + \Delta z$. También hay que recordar que al ser perturbado el gas, la presión no es la misma que cuando el cilindro estaba en un estado de equilibrio. En general, al perturbar el émbolo existirán variaciones del gas, las cuales están relacionadas con el desplazamiento de esas variaciones, por lo que se puede estudiar el movimiento ondulatorio en un caso longitudinal desde el punto de vista de la variación de la posición y la variación de la presión (Reyes, 1976).

Para la ecuación diferencial, se tiene que considerar lo siguiente

$$p = P - P_o = \text{Exceso de presión del lado izquierdo} \quad (4.175)$$

$$p' = P + \Delta P - P_o = \text{Exceso de presión del lado derecho} \quad (4.176)$$

$$\Delta p = p - p' = P + \Delta P - P_o - P + P_o = \Delta P \quad (4.177)$$

Si se aplica la segunda ley de Newton en el eje x se tiene que

$$\sum F_x = \Delta m a_x \quad (4.178)$$

Donde Δm es la masa de la sección gaseosa. Por otra parte, se sabe que,

$$P = \frac{F}{A}$$

$$F = PA$$

Por lo tanto, la fuerza será expresada como

$$F_x = [P - (P + \Delta P)]A \quad (4.179)$$

Donde A es la sección transversal del pistón. Ahora, si se sustituye 4.179 en 4.178

$$[P - (P + \Delta P)]A = \Delta m a_x$$

$$(P - P - \Delta P)A = \Delta m a_x$$

$$-\Delta P A = \Delta m a_x \quad (4.180)$$

Pero, se sabe que de la expresión 4.177 que

$$\Delta P = \Delta p \quad (4.181)$$

Y también que la densidad es igual a

$$\rho = \frac{m}{v} \quad (4.182)$$

Donde el volumen de la ecuación 4.182 se puede reescribir como

$$\rho = \frac{m}{A\Delta x} \quad (4.183)$$

De la ecuación 4.183, la masa se puede expresar como

$$m = \rho A \Delta x \quad (4.184)$$

Y la aceleración,

$$a_x = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \quad (4.185)$$

Ahora, se reescribe la ecuación 4.180 de acuerdo con las expresiones 4.181, 4.184 y 4.185

$$-\Delta p A = \rho A \Delta x \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \quad (4.186)$$

Las propiedades elásticas del volumen del gas van a estar caracterizadas por el módulo de compresibilidad

$$\beta = -\frac{p}{\frac{\Delta V}{V}} \quad (4.187)$$

Donde:

$p = \text{esfuerzo}(\text{exceso de presión})$

$\Delta V = \text{deformación volumétrica}$

$V = \text{volumen}$

De la definición de 4.187 resulta que

$$\beta = -\frac{pV}{\Delta V}$$

$$p = -\beta \frac{\Delta V}{V} \quad (4.188)$$

Para este caso,

$$V = A\Delta x \quad (4.189)$$

$$\Delta V = A\Delta z \quad (4.190)$$

Por lo tanto, si se sustituye en 4.189 y 4.190 en 4.188

$$p = -\beta \frac{A\Delta z}{A\Delta x}$$

$$p = -\beta \frac{\Delta z}{\Delta x}$$

Si se considera un elemento de volumen lo suficientemente pequeño

$$p = -\beta \frac{\partial z}{\partial x} \quad (4.191)$$

Donde se utilizan derivadas parciales debido a que

$$z = f(x, t)$$

Como se mencionó anteriormente, se puede estudiar este caso desde el punto de vista de la variación de la posición y la presión, ya que ambos están relacionados, estas pueden relacionarse de la siguiente forma, obteniendo el diferencial de la ecuación 4.191 con respecto a x

$$\frac{\partial p}{\partial x} \Delta x = -\beta \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Delta x \quad (4.192)$$

Cabe mencionar que

$$\Delta p = \frac{\partial p}{\partial x} \Delta x$$

Si se sustituye 4.192 en 4.186 se obtiene que

$$A \beta \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Delta x = \rho A \Delta x \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

$$\beta \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \rho \frac{A \Delta x}{A \Delta x} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

$$\beta \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\rho}{\beta} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

O bien,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\beta}{\rho} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \quad (4.193)$$

La ecuación 4.193 es la ecuación diferencial que describe el movimiento ondulatorio longitudinal en un gas, la cual tiene una estructura similar a la ecuación de la cuerda 4.122. Por lo tanto, la solución de la ecuación 4.193 dependerá de las condiciones iniciales y de frontera que imponga el sistema.

Para la solución de la ecuación 4.193 se tomará en cuenta lo siguiente:

Se considera un pistón lo suficientemente largo por un extremo (semi-infinito) estando las partículas del gas en sus posiciones de equilibrio y en reposo para el instante inicial, de forma tal que en este mismo instante el émbolo comienza a moverse hacia la izquierda con movimiento armónico simple (Reyes, 1976).

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\beta}{\rho} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

$$z(x, 0) = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial t}(x, 0) = 0$$

$$z = (0, t) = -Z \sin wt$$

$$0 \ll x \ll \infty$$

$$t > 0$$

En este caso, si se compara con el de la cuerda vibrante, se puede observar que las condiciones tanto iniciales como de frontera son las mismas. Por lo tanto, la solución de la ecuación de la onda de elongación para el caso longitudinal con las condiciones anteriormente planteadas toma la siguiente forma

$$z(x, t) = Z \text{ sen } (kx - wt) \quad (4.194)$$

Donde $k = \frac{w}{c}$ es la constante de propagación y la velocidad, $c = \sqrt{\frac{\beta}{\rho}}$, la cual depende de las propiedades del medio. La ecuación 4.194 es la solución de la onda viajera de elongación en un caso longitudinal; como se mencionó anteriormente existe una relación entre las variaciones de presión y posición, la relación que estas tienen se puede dar a partir de la expresión

$$p = -\beta \frac{\partial z}{\partial x} \quad (4.195)$$

Se toma en cuenta la ecuación 4.194

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= Z \text{ sen } (kx - wt) \\ \frac{\partial z}{\partial x} &= kZ \cos (kx - wt) \end{aligned} \quad (4.196)$$

Se sustituye 4.196 en 4.195

$$p = -k\beta z \cos(kx - wt) \quad (4.197)$$

Dónde

$$p_{\text{máx}} = -k\beta z$$

La ecuación 4.197 se puede reescribir como

$$p = p_{\text{máx}} \cos(kx - wt) \quad (4.198)$$

Se puede observar que la ecuación 4.194 y 4.198 tienen un desfase de 90° . Es decir, cuando la onda de elongación se encuentra en un punto máximo, la onda de

presión se encuentra en un punto mínimo y viceversa. Esto se puede observar en la figura 4.34.

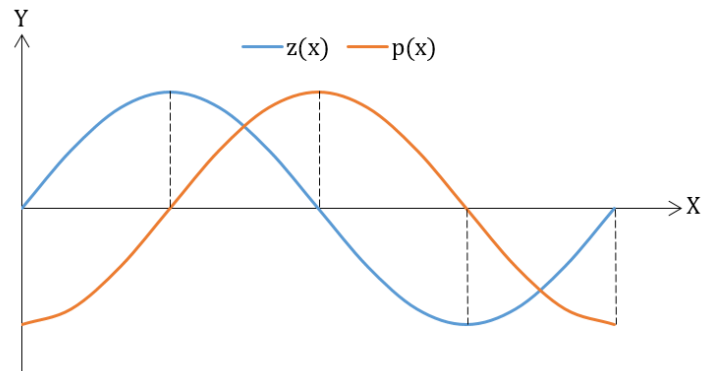


Figura 4.34. Desfase de la onda de presión y la onda de elongación. (Modificado de Reyes, S. 1976).

Transmisión de energía

De una manera similar al caso de la cuerda, al aplicar una fuerza se produce un desplazamiento, por lo que se estudiará el trabajo que ejerce una parte del gas sobre la otra. Si se considera dividir el cilindro en dos partes, en donde la parte izquierda será representada como la fuerza, y la parte derecha estará aislada y es la que será perturbada debido a la presión que el lado izquierdo ejerce sobre el lado derecho. A esto se le conoce como exceso de presión con relación a la del equilibrio ya que este exceso, es lo que produce el movimiento (Reyes, 1976). Por lo tanto, la potencia ejercida del fluido en un eje horizontal es

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad (4.199)$$

Pero,

$$F = pA \quad (4.200)$$

Donde,

$$p = -p_{m\acute{a}x} \cos(kx - \omega t) \quad (4.201)$$

Si se sustituye 4.201 en 4.200

$$F = -p_{m\acute{a}x} A \cos(kx - \omega t) \quad (4.202)$$

Por otra parte, se tiene que

$$v = \frac{\partial z}{\partial t} = -Zw \cos(kx - wt) \quad (4.203)$$

Por lo que sustituyendo 4.202 y 4.203 en 4.199

$$P = p_{\text{máx}} AZw \cos^2(kx - wt) \quad (4.204)$$

Pero, si se considera que

$$p_{\text{máx}} = kBZ$$

$$Z = \frac{p_{\text{máx}}}{kB}$$

La ecuación 4.204 se reescribe como

$$P = A \frac{p_{\text{máx}}^2}{kB} w \cos(kx - wt) \quad (4.205)$$

Tomando en cuenta que

$$c = \frac{w}{k}, \quad c^2 = \frac{\beta}{\rho}$$

Ahora, la ecuación 4.205 se reescribe como

$$P = Ap_{\text{máx}}^2 \frac{w}{k} \frac{1}{\frac{\rho\beta}{\rho}} \cos^2(kx - wt)$$

$$P = A \frac{p_{\text{máx}}^2 c}{\rho c^2} \cos^2(kx - wt)$$

$$P = A \frac{p_{\text{máx}}^2}{\rho c} \cos^2(kx - wt) \quad (4.206)$$

Finalmente, la expresión 4.206 es la ecuación que describe la potencia.

Ahora, si se desea obtener la potencia media, siguiendo el procedimiento de la página 106 del subtema “Transmisión de energía”, se concluye que

$$P_{\text{media}} = \frac{1}{2} A \frac{p_{\text{máx}}^2}{\rho c} \quad (4.207)$$

Velocidad de fase y de grupo

Velocidad de fase

La velocidad de fase es lo que se ha denominado velocidad de propagación. Si se observa en la imagen 4.35 es una onda representada en diferentes instantes de tiempo. Si se toma un punto P , se puede notar que en cada una de las posiciones tienen la misma fase en los distintos instantes de tiempo. La velocidad con la que avanza ese punto P es la velocidad de fase que a su vez también es conocida como la velocidad de propagación de la onda.

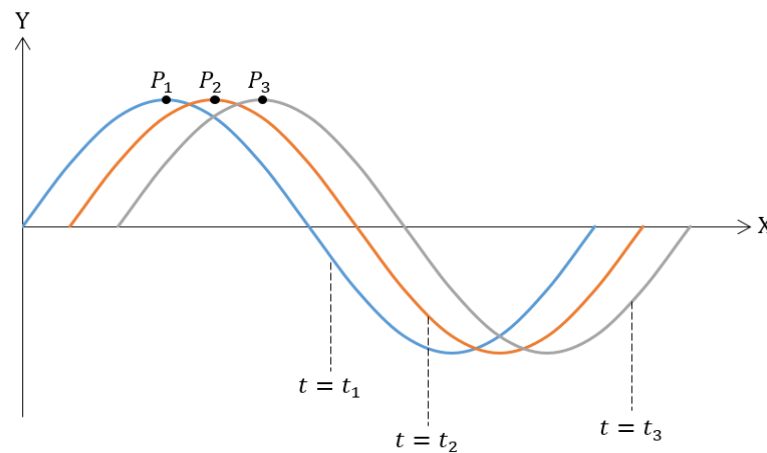


Figura 4.35. Onda en diferentes instantes de tiempo. (Modificada de Reyes, S. 1976).

Si se considera una onda de la forma

$$y = A \sin(kx - \omega t)$$

Donde, la fase se considera constante

$$kx - \omega t = \text{constante} \quad (4.208)$$

Si se deriva 4.208 con respecto al tiempo

$$k \frac{dx}{dt} - \omega = 0$$

$$k \frac{dx}{dt} - \omega = 0$$

$$k \frac{dx}{dt} = w$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{w}{k} \therefore$$

$$v_f = \frac{w}{k} \quad (4.209)$$

Se concluye que la expresión 4.209 es la velocidad de fase.

Velocidad de grupo

Para poder conocer qué es la velocidad de grupo, se introducen dos conceptos muy importantes: armónico y dispersión.

Normalmente, en la práctica, los agentes externos que perturban a un sistema no presentan ni producen en el sistema una forma sinusoidal, sino que presentan formas complejas, por lo tanto, el movimiento (o la onda) producido tendrá también una forma compleja. Sin embargo, bajo determinadas condiciones, se puede demostrar que una función matemática se puede representar como la suma infinita de sinusoidales con distintas frecuencias, amplitudes y fases iniciales. Por lo tanto, si se tiene una determinada función de una variable U se puede demostrar que

$$f(U) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \text{sen}(w_n U + \varphi_n)$$

En donde para cada valor de la variable “n”, se obtendrá una amplitud A_n , una frecuencia w_n y una fase inicial φ_n , que definen una de las sinusoidales de la suma. Cada una de estas sinusoidales recibe el nombre de armónicos y la senoide de menor frecuencia se denomina “frecuencia fundamental”.

Por otra parte, se denomina dispersión al fenómeno en el que se observa una dependencia entre la velocidad de propagación de las ondas con respecto a la frecuencia de las mismas, a su vez, los medios que producen este fenómeno se les conoce como medios dispersivos.

Cuando una onda se propaga en un medio dispersivo, ocurre como consecuencia el fenómeno de dispersión, por lo que cada uno de sus armónicos se propaga a una velocidad de fase diferente (ya que tienen diferentes frecuencias). Estas ondas que viajan a diferentes velocidades en un medio dispersivo se componen formando grupos, que viajan a una velocidad distinta que, a cada una de las velocidades de fase de cada armónico, esta velocidad se le conoce como velocidad de grupo. La energía que transporta una onda no se propaga a la velocidad de fase de cada uno de los armónicos, sino que se propaga a la velocidad de grupo.

Para comprender mejor lo que es la velocidad de grupo se analizará el siguiente ejemplo. De acuerdo con Reyes (1976), se supone que se tienen dos ondas que se propagan en un medio dispersivo. Una onda tiene una velocidad de fase v_f y una longitud de onda λ , mientras que la segunda onda tiene una velocidad de fase $v_f + \Delta v_f$ y una longitud de onda $\lambda + \Delta\lambda$. Esto se puede observar en la figura 4.36, en la cual también se puede observar la resultante de la composición de ambos movimientos.

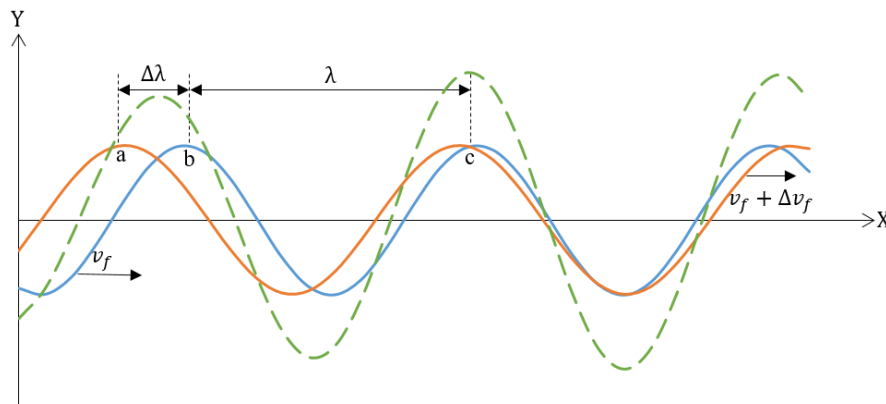


Figura 4.36. Ondas que se propagan en un medio dispersivo con su resultante (línea punteada). (Modificado de Reyes, S. 1976).

De acuerdo con la figura 4.36, la onda resultante (línea punteada de color verde) se le conoce como grupo, y la velocidad con la que viaja esta onda se le conoce como velocidad de grupo.

En la resultante se observa un punto de máxima amplitud donde las dos ondas se refuerzan. Esta resultante es la que recibe el nombre de grupo y la velocidad con que avance ese punto de máxima será la velocidad del grupo. El punto a que pertenece a la onda más rápida tardará un cierto tiempo en alcanzar el punto b de la onda más lenta, cuando esto suceda, el máximo estará en el punto b y no en el punto c como está ahora (Reyes, 1976). Ese intervalo de tiempo será

$$\Delta t = \frac{\Delta \lambda}{\Delta v_f} \quad (4.210)$$

La distancia recorrida por el grupo

$$\Delta x_g = \Delta x_f - \lambda \quad (4.211)$$

Donde x_f es el punto de fase constante, entonces

$$\Delta x_g = \Delta v_g \Delta t \quad (4.212)$$

$$\Delta x_f = \Delta v_f \Delta t \quad (4.213)$$

Si se sustituyen las ecuaciones 4.212 y 4.213 en la ecuación 4.211

$$\Delta v_g \Delta t = \Delta v_f \Delta t - \lambda$$

En donde,

$$v_g = \frac{v_f \Delta t - \lambda}{\Delta t}$$

$$v_g = v_f - \frac{\lambda}{\Delta t}$$

Pero se sabe que

$$\Delta t = \frac{\Delta \lambda}{\Delta v_f}$$

Por lo tanto

$$v_g = v_f - \frac{\lambda}{\frac{\Delta \lambda}{\Delta v_f}}$$

$$v_g = v_f - \frac{\Delta v_f \lambda}{\Delta \lambda}$$

$$v_g = v_f - \lambda \frac{\Delta v_f}{\Delta \lambda} \quad (4.214)$$

La ecuación 4.214 se puede reescribir como

$$v_g = v_f - \lambda \frac{dv_f}{d\lambda} \quad (4.215)$$

De acuerdo con Reyes (1976), se puede concluir que

$$\text{Si } \frac{dv_f}{d\lambda} < 0 \rightarrow v_g > v_f = \text{Dispersión anómala}$$

$$\text{Si } \frac{dv_f}{d\lambda} > 0 \rightarrow v_g < v_f = \text{Dispersión normal}$$

Esto se puede observar en la figura 4.37

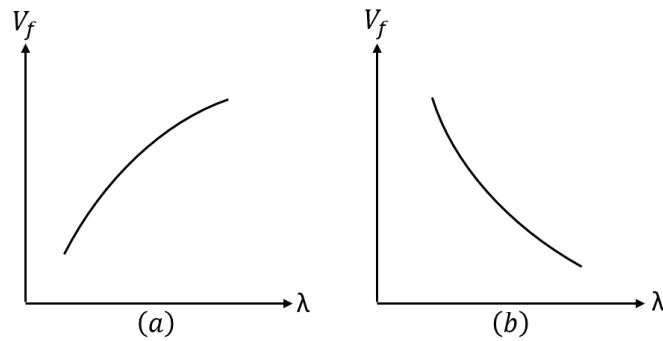


Figura 4.37. Características de los medios dispersivos.
(Fuente: Reyes, S. 1976).

Se toma en cuenta que

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

La ecuación 4.215 se puede expresar como

$$v_g = v_f - \frac{2\pi}{k} \frac{dv_f}{d\left(\frac{2\pi}{k}\right)}$$

$$v_g = v_f \frac{dk}{dk} - \frac{1}{k} \frac{dv_f}{d\left(\frac{1}{k}\right)} \quad (4.216)$$

Pero

$$d\left(\frac{1}{k}\right) = -1k^{-1-1}dk$$

$$d\left(\frac{1}{k}\right) = -k^{-2}dk$$

$$d\left(\frac{1}{k}\right) = -\frac{1}{k^2}dk \quad (4.217)$$

Se sustituye 4.217 en 4.216

$$v_g = v_f \frac{dk}{dk} - \frac{1}{k} \frac{dv_f}{-\frac{1}{k^2}}$$

$$v_g = v_f \frac{dk}{dk} - \frac{1}{k} \frac{k^2 dv_f}{dk}$$

$$v_g = v_f \frac{dk}{dk} - \frac{k^2}{k} \frac{dv_f}{dk}$$

$$v_g = v_f \frac{dk}{dk} - k \frac{dv_f}{dk}$$

$$v_g = (v_f k) \frac{d}{dk} \quad (4.218)$$

Pero

$$v_f = \frac{w}{k} \therefore w = v_f k$$

Por lo tanto,

$$v_g = \frac{dw}{dk} \quad (4.219)$$

La expresión 4.219 es la definición de la velocidad de grupo.

Si no existe dispersión, esto implica que

$$\frac{dv_f}{d\lambda} = 0$$

Por lo que

$$v_g = v_f - \lambda \frac{dv_f}{d\lambda}$$

$$v_g = v_f - \lambda(0)$$

$$v_g = v_f \quad (4.220)$$

Se concluye que, si la velocidad de grupo y la velocidad de fase son iguales, no existe dispersión.

Batimientos

Cuando dos ondas de frecuencia ligeramente distinta que se propagan en una misma dirección se superponen, el resultado de la composición de ambos movimientos se puede calcular sumando cada uno de estos. Como resultado se obtiene un movimiento en el que la amplitud aumenta y disminuye periódicamente. A este fenómeno se le conoce como batimientos o pulsaciones.

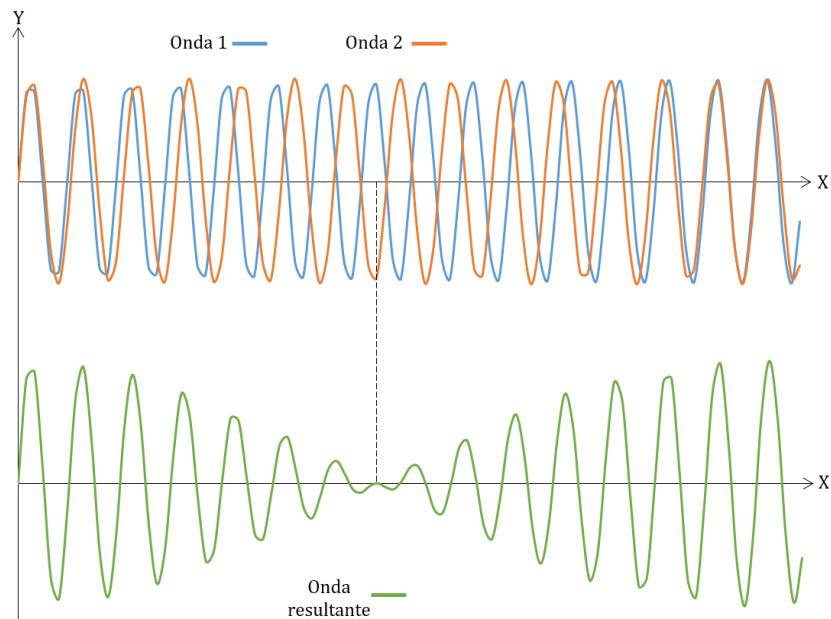


Figura 4.38. Superposición de dos ondas que producen un batimiento.
(Modificado de Reyes, S. 1976).

De acuerdo con Reyes (1976), se puede estudiar matemáticamente los batimientos si se consideran dos ondas sonoras (expresadas a través de la presión) cuyas ecuaciones son las siguientes:

$$p_1 = p_o \cos(k_1 x - w_1 t)$$

$$p_2 = p_o \cos(k_2 x - w_2 t)$$

Se considera la superposición cuando $x = 0$,

$$p_1 = p_o \cos(w_1 t) \quad (4.221)$$

$$p_2 = p_o \cos(w_2 t) \quad (4.222)$$

Si se suman las ecuaciones 4.221 y 4.222, $p_1 + p_2$, se tiene como resultado

$$p_o \cos(w_1 t) + p_o \cos(w_2 t) \quad (4.223)$$

Considerando la suma de cosenos

$$\cos(A) + \cos(B) = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

Se reescribe la ecuación 4.223

$$p = 2p_o \cos\left(\frac{w_1 - w_2}{2}t\right) \cos\left(\frac{w_1 + w_2}{2}t\right) \quad (4.224)$$

Que también se puede expresar como

$$p = 2p_o \cos 2\pi\left(\frac{f_1 - f_2}{2}\right)t \cos 2\pi\left(\frac{f_1 + f_2}{2}\right)t \quad (4.225)$$

La ecuación 4.225 es el producto de cosenos, por lo que se puede considerar que

$$p = A \cos 2\pi\left(\frac{f_1 + f_2}{2}\right)t$$

Donde

$$A = 2p_o \cos 2\pi\left(\frac{f_1 - f_2}{2}\right)t$$

Esto quiere decir que la ecuación 4.225 es una cosinusoide de frecuencia $\frac{f_1+f_2}{2}$, cuya amplitud varía a una cosinusoide de frecuencia $\frac{f_1-f_2}{2}$. Esto se puede observar en la figura 4.39, ya que la línea punteada (menor frecuencia) determina la amplitud de la línea continua (mayor frecuencia).

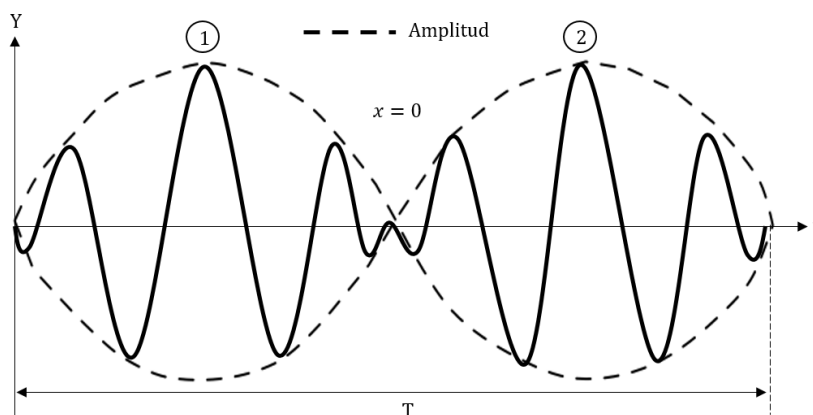


Figura 4.39. Batimiento. (Modificado de Reyes, S. 1976).

También en un periodo T de la función coseno de menor frecuencia existirán dos máximos en la amplitud resultante. Por lo que en un segundo lo que ocurre en un periodo T se repetirá $\frac{f_1-f_2}{2}$ veces. Por lo que en un segundo la amplitud alcanzará un valor máximo un número de veces dado por:

$$2\left(\frac{f_1-f_2}{2}\right) = f_1 - f_2 \quad (4.226)$$

De acuerdo con Reyes (1976), se puede concluir que:

Si dos ondas de frecuencia f_1 y f_2 se superponen en un mismo punto en el espacio, el número de batimientos por segundos resulta ser:

$$\text{Número de batimientos} = f_2 - f_1$$

El fenómeno de batimiento también se puede encontrar en el apartado 4.1.1.7 del estudio del movimiento oscilatorio.

Efecto Doppler

Cuando una fuente o un observador se encuentran en movimiento relativo, el tono percibido por el observador no es el mismo que cuando la fuente o el observador están en reposo o cuando uno de ellos está en movimiento.

Se recuerda que el tono es una cualidad del sonido que determina si el sonido para determinar si un sonido es grave o agudo, está variación del tono depende de la frecuencia de las ondas.

De acuerdo con Reyes (1976), el efecto Doppler se define como la variación del tono de un sonido (que depende de la frecuencia) que percibe el observador, causado por el movimiento relativo entre la fuente sonora y el observador.

Sin embargo, el efecto Doppler no sólo se produce en el sonido sino para cualquier caso en el que exista una onda con un movimiento relativo entre la fuente y el observador. Por lo que de manera general el efecto Doppler se define como el cambio de la frecuencia de una onda causado por el movimiento relativo entre la fuente de la onda y el receptor.

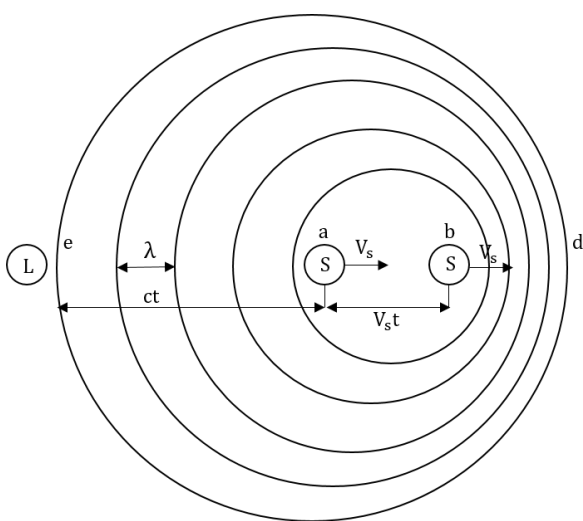


Figura 4.40. Representación del efecto Doppler. (Fuente: Reyes, S. 1976).

Para determinar algunos parámetros, se considerará la figura 4.40 en la que se encuentra un observador L con una velocidad v_L , el cual se encuentra a la izquierda del foco S que tiene una velocidad v_S , para este caso, estableciendo un sistema de referencia, las velocidades v_L y v_S , se encuentran en la misma dirección, coinciden con la recta que los une y se considera un sentido positivo de v_L a v_S , por lo que también las velocidades serán positivas

Según la figura 4.40 en el instante $t = 0$ la fuente se encuentra en el punto a y en un instante posterior se desplaza al punto b . La circunferencia exterior representa el frente de onda en el instante $t = t$. El centro de este frente de onda se encuentra en el punto a y todos sus puntos se propagan hacia afuera en el sentido de del radio a una velocidad c (Reyes, 1976). Por lo tanto, de la figura 4.40 se pueden plantear las siguientes relaciones:

$$bd = ct - v_s t = t(c - v_s) \quad (4.227)$$

$$eb = ct + v_s t = t(c + v_s) \quad (4.228)$$

En un tiempo t el número de ondas emitidas por la fuente será $f_s t$ donde f_s es su frecuencia. Por el efecto del movimiento, en el espacio bd las ondas se comprimen, y en el espacio eb las ondas se dilatan. Por lo que existe una variación en la longitud de onda detrás y delante de la fuente.

Se sabe que

$$\lambda = \frac{v}{f}$$

La longitud de la onda delante de la fuente

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{t(c - v_s)}{f_s t} = \frac{c - v_s}{f_s} \\ \lambda_1 &= \frac{c - v_s}{f_s} \end{aligned} \quad (4.229)$$

La longitud de onda detrás de la fuente

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= \frac{t(c + v_s)}{f_s t} = \frac{c + v_s}{f_s} \\ \lambda_2 &= \frac{c + v_s}{f_s} \end{aligned} \quad (4.230)$$

Por otra parte, con relación al observador, la velocidad de las ondas que se acercan él tendrán una velocidad de $c + v_L$. Tomando en cuenta que $c = \lambda f$, para este caso, la frecuencia que percibe el observador f_L , la longitud de onda será la calculada

detrás de la fuente y la velocidad relativa de la onda respecto al observador $c + v_L$ se puede plantear lo siguiente

$$\begin{aligned}c &= \lambda f \\c + v_L &= \frac{c + v_s}{f_s} \cdot f_L \\ \frac{c + v_L}{f_L} &= \frac{c + v_s}{f_s} \quad (4.231)\end{aligned}$$

La expresión 4.231 relaciona la frecuencia que percibe el observador con la frecuencia que emite la fuente: explicar la relación y esta relación es válida para otros casos, siempre que se apliquen las mismas condiciones entre el observador y la fuente.

4.1.2.2 Reflexión de ondas viajeras

Reflexión y transmisión en una discontinuidad

Se ha analizado la propagación de las ondas con las mismas propiedades en cada punto del medio, conocidos como medios infinitos, sin embargo, esto no existe en la práctica, ya que realmente los medios son finitos y las propiedades del medio pueden cambiar en diferentes partes del medio.

En un medio existen zonas con diferentes propiedades, la parte en la cual cambian esas propiedades se le conoce como discontinuidad, ejemplos en ondas transversales son la unión de dos cuerdas con diferente densidad lineal de masa, una cuerda atada a una pared, el extremo libre en una cuerda, entre otros. Por otra parte, ejemplos en ondas longitudinales en un fluido son el cambio de densidad de un fluido, su módulo de compresibilidad o que exista una frontera (recipiente). Estos ejemplos se pueden observar en la figura 4.41.

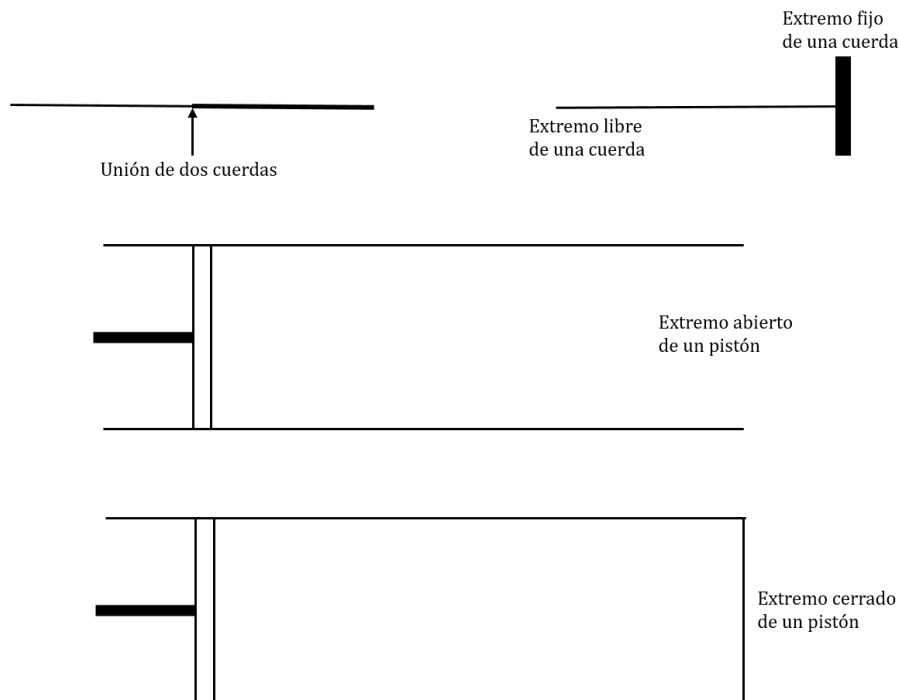


Figura 4.41. Ejemplos de discontinuidades. (Modificado de Reyes, S. 1976).

El objetivo es analizar la propagación de ondas cuando se presenta una discontinuidad. Inicialmente se analizan las condiciones de frontera en la discontinuidad. Para esto se tomará como ejemplo una cuerda.

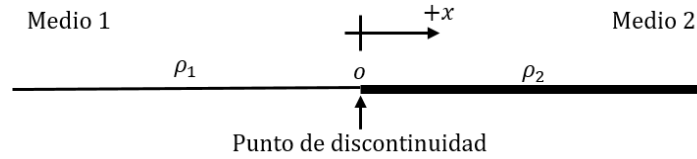


Figura 4.42. Dos cuerdas unidas con distintas densidades lineales. (Fuente: Reyes, S. 1976).

En la figura 4.42 se puede observar una cuerda en la cual se propaga una onda, esta cuerda está formada por la unión de dos cuerdas con diferente densidad lineal de masa. ¿Qué sucede si se propaga una onda de izquierda a derecha? Es decir, del medio uno al medio dos. Al llegar la onda al punto de discontinuidad ¿transmite energía al medio dos ocasionando un movimiento ondulatorio? (Reyes, 1976).

Se debe recordar que, al ser medios distintos, sus propiedades son diferentes, por lo tanto, la velocidad de propagación es diferente en cada medio. Ahora, el punto de discontinuidad al estar en la frontera de ambos medios tendrá el efecto de dos ondas, este efecto produce un movimiento único en el punto de discontinuidad.

Es incongruente que por los efectos de la onda en el medio uno el punto de discontinuidad oscile de una forma diferente a la que oscilaría cuando la onda se propaga en el medio dos. Esta condición se expresa matemáticamente de la siguiente forma:

$$y_1|_{x=0} = y_2|_{x=0} \quad (4.232)$$

Se plantea la igualdad de ambas elongaciones, es decir, de las elongaciones producidas en el medio uno y en el medio dos, y se toma como sistema de referencia el punto de discontinuidad. Esto significa que la elongación en el punto de discontinuidad será la misma cuando la onda se propaga en el medio uno y que cuando se propaga en el medio dos.

Ahora, se analiza la pendiente en el punto de discontinuidad ($x = 0$). En el cual se pueden dar dos posibilidades, la primera es que existan dos pendientes y la segunda, que exista únicamente una pendiente. Esto se observa en la figura 4.43.

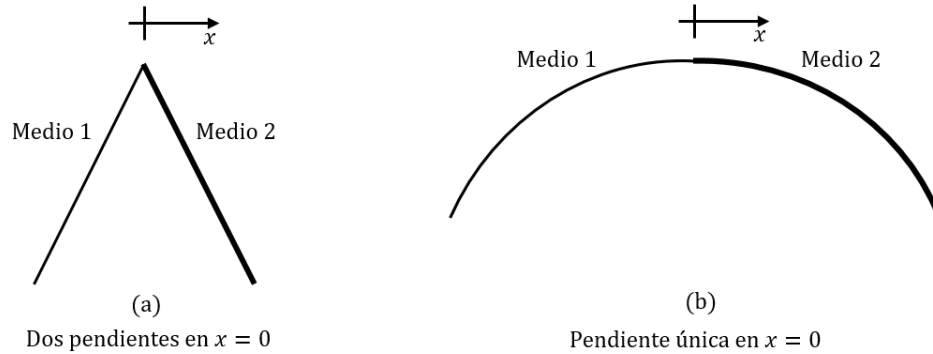


Figura 4.43. Posibles pendientes que se pueden presentar en la cuerda.
(Fuente: Reyes, S. 1976).

Con respecto al primer caso, en donde existen dos pendientes, se toma un elemento infinitesimal de masa dm alrededor del punto ($x = 0$), dibujando el diagrama de

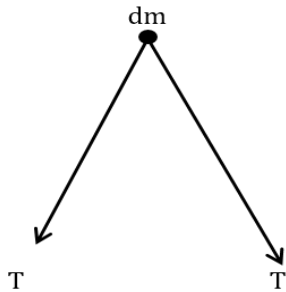


Figura 4.44. Diagrama de cuerpo libre. (Modificado de Reyes, S. 1976).

cuerpo libre se observa que sobre dm actúan dos tensiones (Figura 4.44), por lo que la resultante será finita lo que provoca una aceleración infinita al actuar sobre el elemento infinitesimal de masa, lo cual desde el punto de vista físico no es válido, por lo tanto, en $x = 0$ la pendiente debe de ser única, es decir, la pendiente de la izquierda y de la derecha debe de ser la misma en $x = 0$. (Reyes, 1976).

Matemáticamente se expresa como:

$$\left. \frac{\partial y_1}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial y_2}{\partial x} \right|_{x=0} \quad (4.233)$$

Se concluye que las expresiones 4.232 y 4.233 son las condiciones de frontera de un punto de discontinuidad de una cuerda.

Hasta este punto, solo se han asumido dos ondas, la que se propaga en el medio uno, que se le conoce como “onda incidente” y la que se propaga en el medio dos, que será la “onda transmitida”, pero ¿Son suficiente una onda incidente y una onda transmitida para satisfacer las condiciones de frontera en la discontinuidad? (Reyes, 1976).

Para poder contestar la pregunta anterior se asume que las ecuaciones de la onda incidente y transmitida son las siguientes:

$$y_i = Y_i \text{sen}(k_i x - w_i t) \quad (4.234)$$

$$y_t = Y_t \text{sen}(k_t x - w_t t) \quad (4.235)$$

Si se aplica la primera condición de frontera

$$y_i|_{x=0} = y_t|_{x=0}$$

$$Y_i \text{sen}(w_i t) = Y_t \text{sen}(w_t t) \quad (4.236)$$

De acuerdo a la igualdad 4.236

$$Y_i = Y_t$$

$$w_i = w_t \quad (4.237)$$

De la segunda condición de frontera

$$\left. \frac{\partial y_i}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial y_t}{\partial x} \right|_{x=0}$$

Se realizan las derivadas parciales de 4.234 y 4.235

$$\frac{\partial y_i}{\partial x} = Y_i k_i \cos(k_i x - w_i t)$$

$$\frac{\partial y_t}{\partial x} = Y_t k_t \cos(k_t x - w_t t)$$

Ahora, cuando $x = 0$

$$\left. \frac{\partial y_i}{\partial x} \right|_{x=0} = Y_i k_i \cos(w_i t)$$

$$\left. \frac{\partial y_t}{\partial x} \right|_{x=0} = Y_t k_t \cos(w_t t)$$

De la segunda condición de frontera se tiene que

$$Y_i k_i \cos(w_i t) = Y_t k_t \cos(w_t t) \quad (4.238)$$

De acuerdo con la igualdad 4.238

$$Y_i k_i = Y_t k_t \quad (4.239)$$

Pero, según 4.239

$$\begin{aligned} Y_i &= Y_t \\ k_i &= k_t \end{aligned} \quad (4.240)$$

Se utiliza la definición de la constante de propagación

$$k = \frac{w}{c}$$

Por lo que la igualdad 4.240 se transforma en

$$\frac{w_i}{c_i} = \frac{w_t}{c_t}$$

Según 4.237

$$w_i = w_t$$

Por lo tanto

$$c_i = c_t \quad (4.241)$$

Donde c_i es la velocidad de propagación del medio uno y c_t , la velocidad de propagación del medio dos, se recuerda que ya se mencionó anteriormente que, si se tienen medios con distintas propiedades, por ende, la velocidad de propagación es distinta en cada medio, lo cual es contradictorio con la expresión 4.241. Por lo tanto, esto responde a la pregunta anterior teniendo como respuesta que:

De acuerdo con Reyes (1976), una onda incidente y una onda transmitida no son suficientes para satisfacer las condiciones de frontera en el punto de discontinuidad.

Cuando una onda se encuentra con una discontinuidad en el medio no toda la energía se transmite al otro medio, sino que hay una parte que se refleja en el primer medio. Por tal motivo se asumirán tres ondas en vez de dos:

Cuando una onda incidente se propaga a través de una discontinuidad una parte de la energía se transmite al medio dos y otra parte de la energía se refleja en el medio uno.

Las ecuaciones de las ondas incidente, transmitida y reflejada son las siguientes:

$$y_i = Y_i \text{sen}(k_i x - w_i t) \quad (4.242)$$

$$y_t = Y_t \text{sen}(k_t x - w_t t) \quad (4.243)$$

$$y_r = Y_r \text{sen}(k_r x - w_r t) \quad (4.244)$$

El signo positivo de la ecuación de la onda reflejada indica que se propaga en sentido contrario a la onda incidente.

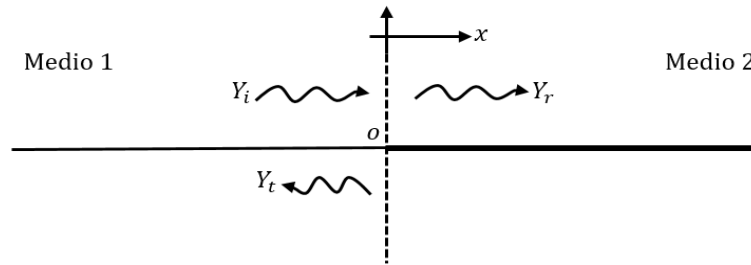


Figura 4.45. Esquema de propagación de las ondas incidente, reflejada y transmitida. (Fuente: Reyes, S. 1976).

Con lo que ya se definió anteriormente, se realiza nuevamente otra pregunta, ¿son suficientes una onda incidente, transmitida y reflejada para satisfacer las condiciones de frontera en un punto de discontinuidad? (Reyes, 1976).

Se aplican nuevamente las condiciones de frontera, pero ahora considerando las tres ondas. Ahora, la elongación del medio uno (lado izquierdo), será la suma de la onda incidente y la reflejada, mientras que en el medio dos (lado derecho) será únicamente por la onda transmitida.

Con la primera condición de frontera se tiene que

$$y_i|_{x=0} + y_r|_{x=0} = y_t|_{x=0} \quad (4.245)$$

Y, tomando en cuenta las ecuaciones 4.242, 4.243 y 4.244

$$y_i|_{x=0} = Y_i \text{sen}(k_i(0) - w_i t) = Y_i \text{sen}(-w_i t)$$

$$y_r|_{x=0} = Y_r \sin(k_r(0) - w_r t) = Y_r \sin(w_r t)$$

$$y_t|_{x=0} = Y_t \sin(k_t(0) - w_t t) = Y_t \sin(-w_t t)$$

Por lo tanto, la expresión 4.245 toma la forma

$$-Y_i \sin(w_i t) + Y_r \sin(w_r t) = -Y_t \sin(w_t t) \quad (4.246)$$

Y, con la segunda condición de frontera

$$\left. \frac{\partial y_i}{\partial x} \right|_{x=0} + \left. \frac{\partial y_r}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial y_t}{\partial x} \right|_{x=0} \quad (4.247)$$

Se realizan las derivadas parciales de 4.242, 4.243 y 4.244

$$\frac{\partial y_i}{\partial x} = Y_i k_i \cos(k_i x - w_i t)$$

$$\frac{\partial y_r}{\partial x} = Y_r k_r \cos(k_r x + w_r t)$$

$$\frac{\partial y_t}{\partial x} = Y_t k_t \cos(k_t x - w_t t)$$

Ahora, cuando $x = 0$

$$\left. \frac{\partial y_i}{\partial x} \right|_{x=0} = Y_i k_i \cos(w_i t)$$

$$\left. \frac{\partial y_r}{\partial x} \right|_{x=0} = Y_r k_r \cos(w_r t)$$

$$\left. \frac{\partial y_t}{\partial x} \right|_{x=0} = Y_t k_t \cos(w_t t)$$

Por lo que la expresión 4.247 toma la forma

$$Y_i k_i \cos(w_i t) + Y_r k_r \cos(w_r t) = Y_t k_t \cos(w_t t) \quad (4.248)$$

La frecuencia de una onda depende del agente externo, y no cuando se encuentra con una discontinuidad, por lo tanto

$$w_i = w_r = w_t = w \quad (4.249)$$

Tomando en cuenta la relación 4.249, las ecuaciones 4.246 y 4.248 se transforman en

$$(Y_i - Y_r)sen(wt) = Y_t sen(wt) \quad (4.250)$$

$$(Y_i k_i + Y_r k_r)cos(wt) = Y_t k_t cos(wt) \quad (4.251)$$

Para que se cumpla 4.250 y 4.251, debe suceder que

$$Y_i - Y_r = Y_t \quad (4.252)$$

$$Y_i k_i + Y_r k_r = Y_t k_t \quad (4.253)$$

Si se divide la ecuación 4.253 entre w

$$Y_i \frac{k_i}{w} + Y_r \frac{k_r}{w} = Y_t \frac{k_t}{w} \quad (4.254)$$

Pero se debe recordar que

$$\frac{k}{w} = \frac{1}{c}$$

Que es el inverso de la velocidad, por lo tanto

$$\frac{k_i}{w} = \frac{1}{c_1} \quad (4.255)$$

La expresión 4.255 es el inverso de la velocidad en el medio uno de la onda incidente, por lo que se debe cumplir lo siguiente

$$\frac{k_r}{w} = \frac{1}{c_1}$$

Que el inverso de la velocidad de la onda incidente sea igual que el de la onda reflejada, debido a que ambas se propagan en el mismo medio y por consecuencia tiene que ser la misma, por lo que también se concluye que

$$k_i = k_r \neq k_t$$

Debido a que k_t se propaga en el medio dos.

Entonces, la ecuación 4.254 se puede expresar como

$$Y_i \frac{1}{c_1} + Y_r \frac{1}{c_1} = Y_t \frac{1}{c_2}$$

$$\frac{Y_i}{c_1} + \frac{Y_r}{c_1} = \frac{Y_t}{c_2}$$

Pero, según 4.252

$$Y_i - Y_r = Y_t$$

Por lo tanto

$$\frac{Y_i}{c_1} + \frac{Y_r}{c_1} = \frac{Y_i - Y_r}{c_2}$$

$$\frac{Y_i}{c_1} + \frac{Y_r}{c_1} = \frac{Y_i}{c_2} - \frac{Y_r}{c_2}$$

Se agrupan los términos

$$\frac{Y_i}{c_1} - \frac{Y_i}{c_2} = -\frac{Y_r}{c_1} - \frac{Y_r}{c_2}$$

$$Y_i \left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2} \right) = Y_r \left(-\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2} \right)$$

Se resuelven las fracciones dentro del paréntesis

$$Y_i \left(\frac{c_1 - c_2}{c_1 c_2} \right) = Y_r \left(\frac{c_1 + c_2}{c_1 c_2} \right)$$

$$Y_i \frac{\left(\frac{c_1 - c_2}{c_1 c_2} \right)}{\left(\frac{c_1 + c_2}{c_1 c_2} \right)} = Y_r$$

$$Y_r = Y_i \frac{\left(\frac{c_1 - c_2}{c_1 c_2} \right)}{\left(\frac{c_1 + c_2}{c_1 c_2} \right)}$$

$$Y_r = Y_i \frac{c_1 - c_2 (c_1 c_2)}{c_1 + c_2 (c_1 c_2)}$$

$$Y_r = Y_i \frac{c_1 - c_2}{c_1 + c_2} \quad (4.256)$$

Ahora, a diferencia del caso anterior, en vez de sustituir Y_t , se sustituye Y_r

$$Y_i - Y_r = Y_t$$

$$-Y_r = Y_t - Y_i$$

$$Y_r = Y_i - Y_t$$

Por lo tanto, la ecuación 4.252 se expresa como

$$\frac{Y_i}{c_1} + \frac{Y_i - Y_t}{c_1} = \frac{Y_t}{c_2}$$

Se agrupan los términos

$$\frac{Y_i}{c_1} + \frac{Y_i}{c_1} - \frac{Y_t}{c_1} = \frac{Y_t}{c_2}$$

$$\frac{Y_i}{c_1} + \frac{Y_i}{c_1} = \frac{Y_t}{c_2} + \frac{Y_t}{c_1}$$

$$2 \frac{Y_i}{c_1} = Y_t \left(\frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_1} \right)$$

Se resuelven las fracciones

$$2 \frac{Y_i}{c_1} = Y_t \left(\frac{c_1 + c_2}{c_1 c_2} \right)$$

$$\frac{\frac{2Y_i}{c_1}}{\frac{c_1 + c_2}{c_1 c_2}} = Y_t$$

$$Y_t = \frac{\frac{2Y_i}{c_1}}{\frac{c_1 + c_2}{c_1 c_2}}$$

$$Y_t = \frac{2Y_i c_1 c_2}{c_1 (c_1 + c_2)}$$

$$Y_t = \frac{2Y_i c_2}{c_1 + c_2}$$

O también se puede expresar como

$$Y_t = \frac{2c_2}{c_1 + c_2} Y_i \quad (4.257)$$

Por lo que las ecuaciones 4.256 y 4.257 expresan la relación que existe entre las amplitudes de la onda reflejada y transmitida con la onda incidente.

Por otra parte, para el caso en el que $c_1 = c_2$, se toman en cuenta las ecuaciones 4.256 y 4.257.

$$Y_r = Y_i \frac{c_1 - c_1}{c_1 + c_1}$$

$$Y_r = Y_i \frac{0}{2c_1}$$

$$Y_r = Y_i \frac{0}{2c_1}$$

$$Y_r = Y_i \frac{0}{2c_1}$$

$$Y_r = Y_i(0)$$

$$Y_r = 0 \quad (4.258)$$

Ahora,

$$Y_t = \frac{2c_1}{c_1 + c_1} Y_i$$

$$Y_t = \frac{2c_1}{2c_1} Y_i$$

$$Y_t = (1)Y_i$$

$$Y_t = Y_i \quad (4.259)$$

De acuerdo con las expresiones 4.258 y 4.259 si la velocidad es la misma, no existe onda reflejada, por lo que se concluye que no hay alguna discontinuidad en el medio.

Una vez obtenidos los resultados anteriores se puede dar una respuesta a la pregunta formulada anteriormente:

De acuerdo con Reyes (1976), una onda incidente, una onda transmitida y una onda reflejada son suficientes para satisfacer las condiciones de frontera en el punto de discontinuidad.

Del análisis realizado anteriormente, también se puede decir que, de acuerdo con el principio de superposición, la amplitud resultante del medio uno será la suma de las amplitudes de la onda incidente y reflejada, y en el medio dos será únicamente la amplitud de la onda transmitida.

Por último, se realizará un ejemplo acerca de cómo se distribuyen las potencias en cada una de las ondas vistas en los ejemplos anteriores.

De acuerdo con la figura 4.45 se supondrá una onda incidente, que se propaga de izquierda a derecha tiene una ecuación dada por:

$$y_i = Y_i \text{sen}(k_i x - \omega t)$$

De igual manera se supondrá que los medios uno y dos son tales que en ellos se cumple que:

$$c_2 = 2c_1$$

Si se utilizan las relaciones 4.256 y 4.257, y sustituyendo que $c_2 = 2c_1$, se obtiene que

$$Y_t = \frac{2 \cdot 2c_1}{c_1 + 2c_1} Y_i$$

$$Y_t = \frac{4c_1}{3c_1} Y_i$$

$$Y_t = \frac{4}{3}Y_i \quad (4.260)$$

Por otra parte

$$Y_r = \frac{c_1 - 2c_2}{c_1 + 2c_2}Y_i$$

$$Y_r = \frac{-c_1}{3c_2}Y_i$$

$$Y_r = -\frac{1}{3}Y_i \quad (4.261)$$

Por lo tanto, las ecuaciones de la onda reflejada y transmitida toman la siguiente forma

$$Y_t = \frac{4}{3}Y_i \sin(k_t x - \omega t)$$

$$Y_r = -\frac{1}{3}Y_i \sin(k_r x - \omega t)$$

Tomando en cuenta que $k_r = k_i$

$$Y_r = -\frac{1}{3}Y_i \sin(k_i x - \omega t)$$

La forma del sistema se puede observar en la figura 4.46

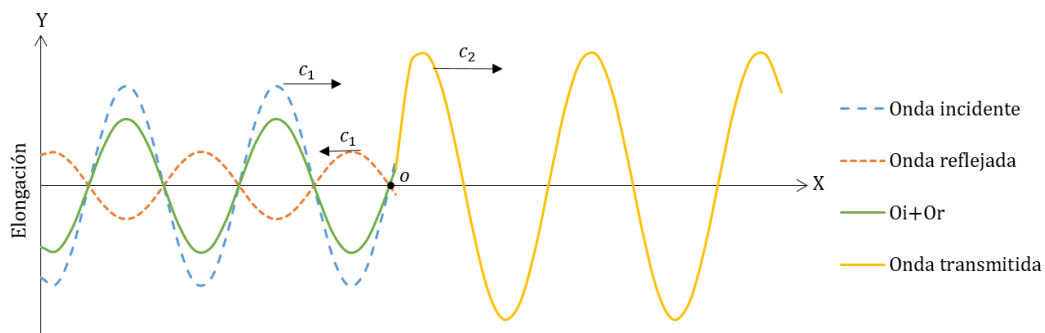


Figura 4.46. Sistema resultante. (Modificado de Reyes, S. 1976).

De acuerdo con la ecuación de la potencia media

$$P_{media} = \frac{1}{2}T\omega kA^2$$

La potencia media que se transporta de izquierda a derecha de la onda incidente, donde se toma en cuenta que $k = \frac{w}{c_1}$

$$P_i = \frac{1}{2} T w \frac{w}{c_1} Y_i^2$$

$$P_i = \frac{1}{2} T w^2 \frac{Y_i^2}{c_1}$$

La potencia media que se transporta de izquierda a derecha por la onda transmitida es,

$$P_t = \frac{1}{2} T w \frac{w}{c_2} Y_t^2$$

$$P_t = \frac{1}{2} T w^2 \frac{Y_t^2}{c_2} \quad (4.262)$$

Pero, se recuerda que la amplitud de acuerdo con la ecuación 4.260 es $\frac{4}{3} Y_i$ y que $2c_1 = c_2$. Si se realizan las operaciones algebraicas correspondientes, se tiene que

$$Y_t^2 = \left(\frac{4}{3} Y_i \right)^2$$

$$Y_t^2 = \frac{16}{9} Y_i^2 \quad (4.263)$$

Se sustituye 4.263 en 4.262

$$P_t = \frac{1}{2} T w^2 \frac{\frac{16}{9} Y_i^2}{2c_1}$$

$$P_t = \frac{1}{2} T w^2 \frac{16 Y_i^2}{18 c_1} \quad (4.264)$$

Por lo tanto, la ecuación 4.264 se puede expresar como

$$P_t = \frac{1}{2} T w^2 \frac{8 Y_i^2}{9 c_1} \quad (4.265)$$

La potencia media que se transporta de derecha a izquierda por la onda reflejada es,

$$P_r = \frac{1}{2} T w \frac{w}{c_1} Y_r^2$$

$$P_r = \frac{1}{2} T w^2 \frac{Y_r^2}{c_1} \quad (4.266)$$

Pero, se recuerda que la amplitud de acuerdo con la ecuación 4.261 es $-\frac{1}{3} Y_i$. Si se realizan las operaciones algebraicas correspondientes, se tiene que

$$Y_r^2 = \left(-\frac{1}{3} Y_i \right)^2$$

$$Y_r^2 = \frac{1}{9} Y_i^2 \quad (4.267)$$

Si se sustituye la ecuación 4.267 en 4.266

$$P_r = \frac{1}{2} T w^2 \frac{1}{9} \frac{Y_i^2}{c_1} \quad (4.268)$$

Por lo tanto, la ecuación 4.268 se puede expresar como

$$P_r = \frac{1}{2} T w^2 \frac{1}{9} \frac{Y_i^2}{c_1} \quad (4.269)$$

Ahora, la potencia neta transmitida de izquierda a derecha en el medio uno es la siguiente

$$P_i - P_r = \frac{1}{2} T w^2 \left(\frac{Y_i^2}{c_1} - \frac{1}{9} \frac{Y_i^2}{c_1} \right)$$

$$P_i - P_r = \frac{1}{2} T w^2 \frac{8}{9} \frac{Y_i^2}{c_1} \quad (4.270)$$

Se puede observar que el resultado de la potencia neta es igual a la potencia de la onda transmitida, esto es debido a que no existen agentes disipativos y por lo tanto la energía se conserva.

Reflexión de un extremo fijo y en uno libre: onda estacionaria

Reflexión en un extremo fijo

Ahora, se realizarán análisis de casos de límites de discontinuidades que se encuentran en la práctica, por ejemplo, un extremo fijo, el cual es el caso de una cuerda que se encuentra atada a una pared. Desde el punto de vista físico se puede decir lo siguiente:

- No hay onda transmitida, esto debido a que la pared se considera un medio completamente rígido por lo que no oscila, es decir, desde el punto de vista matemático, una pared rígida es un medio con densidad lineal infinita.
- Toda la potencia de la onda incidente la tomará la onda reflejada por lo que tendrán la misma amplitud.
- Si la unión de la cuerda a la pared está fija, en todo instante de tiempo se supondrá que los efectos incidente y reflejada (en la unión de la cuerda y la pared) se anularán.

En un medio que presenta las características mencionadas anteriormente, en donde,

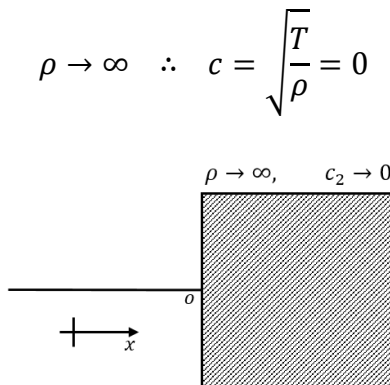


Figura 4.47. Pared, medio que se considera completamente rígido. (Fuente: Reyes, S. 1976).

Si se hace uso de las ecuaciones 4.256 y 4.257

$$Y_r = Y_i \frac{c_1 - c_2}{c_1 + c_2} \qquad Y_t = \frac{2c_2}{c_1 + c_2} Y_i$$

Pero, se toma en cuenta que $c_2 = 0$

$$Y_r = Y_i \frac{c_1 - (0)}{c_1 + (0)} \quad Y_t = \frac{2(0)}{c_1 + (0)} Y_i$$

$$Y_r = Y_i \frac{c_1}{c_1} \quad Y_t = \frac{0}{c_1} Y_i$$

$$Y_r = Y_i \quad Y_t = 0$$

Se supondrá que en el medio uno, la cuerda avanza hacia la derecha, por lo que ecuación de onda incidente es

$$y_i = Y \sin(kx - \omega t) \quad (4.271)$$

La ecuación de la onda reflejada será

$$y_r = Y \sin(kx + \omega t) \quad (4.272)$$

El punto O (el punto de discontinuidad), que se encuentra en $x = 0$, será en virtud de la onda incidente

$$y_i = -Y \sin \omega t = Y \sin(\omega t + 180^\circ)$$

Y la onda reflejada en ese mismo punto

$$y_r = Y \sin \omega t$$

Si se suman las amplitudes la componente resultante será nula en el punto de discontinuidad en todo instante de tiempo, por lo que se concluye que:

Una onda incidente que avanza en una cuerda, al encontrarse un extremo fijo, se refleja de modo que la onda reflejada tiene la fase invertida con relación a la onda incidente (una inversión de fase de una onda con respecto a la otra, significa que entre las fases de cada una de ellas hay una diferencia de 180°) (Reyes, 1976).

La elongación (amplitud) resultante y , en cualquier punto e instante de tiempo es

$$y = y_i + y_r$$

En donde y_i y y_r , son las ecuaciones 4.271 y 4.272

$$y = Y[\text{sen}(kx - wt) + \text{sen}(kx + wt)] \quad (4.273)$$

De acuerdo con la siguiente identidad trigonométrica de la función seno

$$\text{sen}(a + b) + \text{sen}(a - b) = 2\text{sen}(a)\cos(b)$$

Por lo que la ecuación 4.273 se puede expresar como

$$y = 2Y\text{sen}(kx) \cos(wt) \quad (4.274)$$

La ecuación 4.274 es la onda resultante de la superposición de la onda incidente y la onda reflejada, la cual se conoce como onda estacionaria. Las características de la onda estacionaria son diferentes a las de la onda viajera.

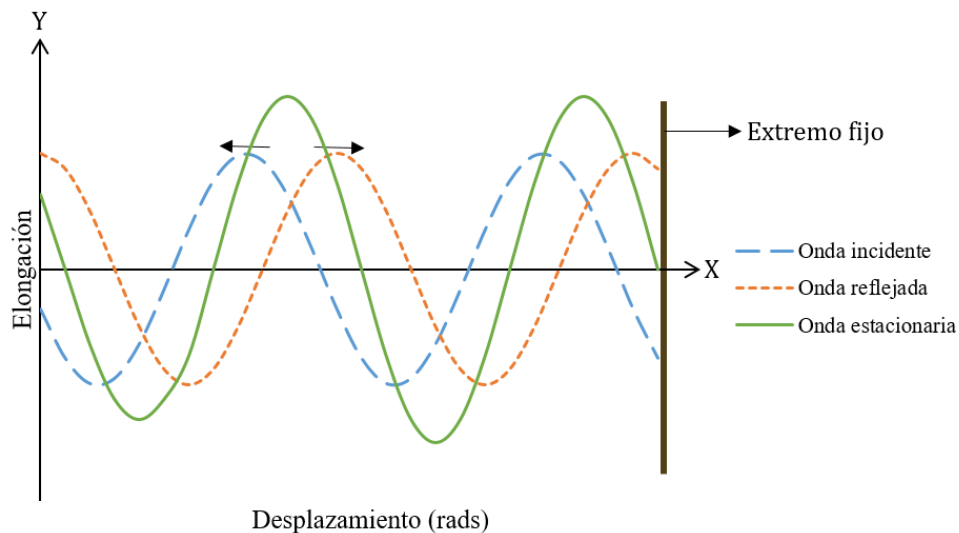


Figura 4.48. Composición de una onda estacionaria. (Modificado de Reyes, S. 1976).

En la figura 4.48 se puede observar que la onda de trazos representa la onda incidente propagándose a la derecha y la onda punteada representa a la onda reflejada propagándose a la izquierda, la línea continua de color verde es la onda resultante.

Cuando en un mismo medio se superponen dos ondas viajeras (una incidente y una reflejada) de igual frecuencia y amplitud, viajando en sentidos contrarios, la onda resultante es una onda estacionaria (Reyes, 1976).

La ecuación 4.274 se puede reescribir como

$$y = [2Y\cos(wt)]\text{sen}(kx) \quad (4.275)$$

Donde $[2Y\cos(wt)]$ es la amplitud que varía con el tiempo de la senoide $\text{sen}(kx)$. En la figura 4.49 se puede observar la gráfica de la ecuación 4.275 en distintos instantes de tiempo.

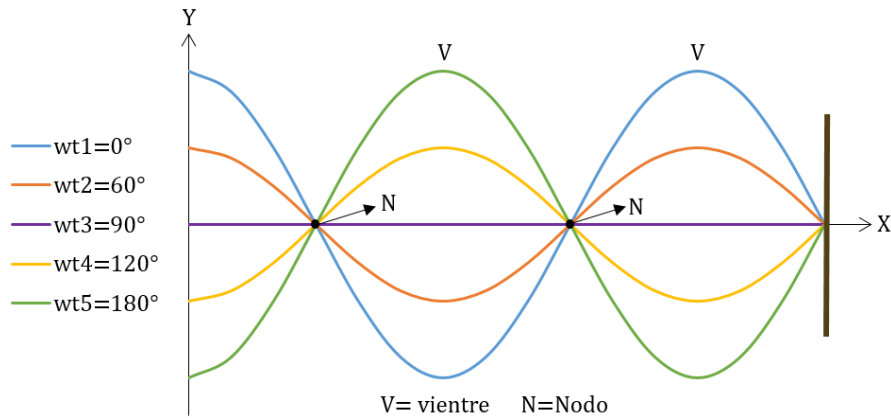


Figura 4.49. Onda estacionaria en diferentes instantes de tiempo. (Modificado de Reyes, S. 1976).

En la figura 4.49 que la onda no avanza, únicamente cambia de amplitud conforme transcurre el tiempo, por tal motivo recibe el nombre de onda estacionaria.

Todos los puntos en los cuales $\text{sen}(kx) = 0$ estarán en reposo, es decir los que corresponden a

$$kx = n\pi, \quad n = 0,1,2,3,..$$

Donde

$$x = \frac{n\pi}{k} \quad (4.276)$$

Se toma en cuenta que

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Por lo tanto 4.276 se puede expresar como

$$x = \frac{n\pi}{\frac{2\pi}{\lambda}}$$

$$x = \frac{n\lambda}{2} \quad n = 0,1,2,3,.. \quad (4.277)$$

Estos puntos se les conoce como nodos, y por otra parte, existen puntos de elongación máxima que reciben el nombre de antinodos o vientres, y ocurren cuando

$$\text{sen}(kx) = \pm 1$$

Es decir,

$$kx = (2n + 1) \frac{\pi}{2} \quad n = \pm 0,1,2,3,.. \quad (4.278)$$

Donde si

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

La ecuación 4.278 se expresa como

$$\frac{2\pi}{\lambda}x = (2n + 1) \frac{\pi}{2}$$

$$x = (2n + 1) \frac{\pi}{2} \frac{\lambda}{2\pi}$$

$$x = (2n + 1) \frac{\lambda}{4} \quad (4.279)$$

Entre un nodo y otro, así como entre un vientre y otro, existe una distancia de media longitud de onda. También se puede observar que cuando se superponen una onda incidente y una onda reflejada, en los vientres las amplitudes se refuerzan y en los nodos las amplitudes se destruyen.

Reflexión en un extremo libre

Otro tipo de discontinuidad en una cuerda con el que se puede encontrar una onda en propagación es un extremo libre, el cual puede ser diferentes formas como:

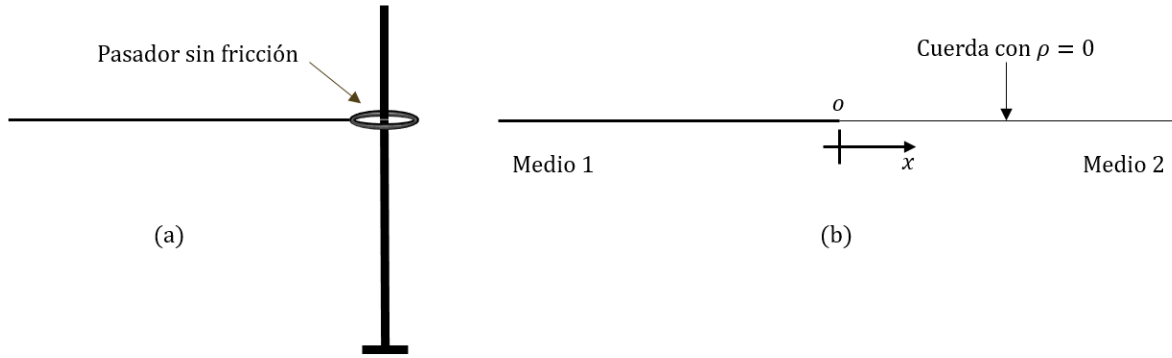


Figura 4.50. Discontinuidades con extremo libre en una cuerda. (Fuente: Reyes, S. 1976).

El inciso a) de la figura 4.50 muestra una condición de frontera que puede realizarse atando una cuerda través de una “argolla o pasador” a un eje vertical sin fricción y el inciso b) muestra la unión de dos cuerdas, con diferentes densidades lineales de masa, una en particular muy fina, para considerarla despreciable, $\rho = 0$.

Para el siguiente ejemplo, se considerará uno como el b), en el cual la primera cuerda tiene una $\rho = finita$ y la segunda cuerda tiene una $\rho = 0$. Por lo tanto,

$$\rho_2 = 0 \quad \therefore \quad c_2 = \infty$$

Se hallarán las relaciones entre la amplitud y las ondas incidente, reflejada y transmitida.

Se tienen las ecuaciones 4.256 y 4.257

$$Y_r = Y_i \frac{c_1 - c_2}{c_1 + c_2}$$

$$Y_t = \frac{2c_2}{c_1 + c_2} Y_i$$

Debido a que $c_2 \rightarrow \infty$ se divide el numerador y denominador entre c_2 para poder evaluarlas. Primero con la amplitud de la onda reflejada,

$$Y_r = Y_i \frac{\frac{c_1}{c_2} - \frac{c_2}{c_2}}{\frac{c_1}{c_2} + \frac{c_2}{c_2}}$$

$$Y_r = Y_i \frac{\frac{c_1}{c_2} - 1}{\frac{c_1}{c_2} + 1}$$

Por otra parte, con la amplitud de la onda transmitida,

$$Y_t = \frac{\frac{2c_2}{c_1 + c_2}}{\frac{c_1}{c_2} + 1} Y_i$$

$$Y_t = \frac{2}{\frac{c_1}{c_2} + 1} Y_i$$

Si $c_2 \rightarrow \infty$

$$Y_r = Y_i \frac{\frac{c_1}{\infty} - 1}{\frac{c_1}{\infty} + 1}$$

$$Y_t = \frac{2}{\frac{c_1}{\infty} + 1} Y_i$$

. Por lo que las ecuaciones 4.256 y 4.257 quedan como

$$Y_r = Y_i \frac{-1}{1}$$

$$Y_r = -Y_i \quad (4.280)$$

$$Y_t = \frac{2}{1} Y_i$$

$$Y_t = 2Y_i \quad (4.281)$$

Si se toma en cuenta que la onda avanza hacia la derecha con la ecuación

$$y_i = Y_i \text{sen}(kx - wt) \quad (4.282)$$

La onda reflejada tendrá la siguiente forma

$$y_r = Y_r \text{sen}(kx + wt) \quad (4.283)$$

Si se toma en cuenta la expresión 4.280, la ecuación 4.283 se reescribe como

$$y_r = -Y_i \text{sen}(kx - wt) \quad (4.284)$$

El movimiento en el punto de discontinuidad, $x = 0$, para la onda incidente será

$$\begin{aligned} y_i|_{x=0} &= Y_i \text{sen}[k(0) - wt] \\ y_i|_{x=0} &= -Y_i \text{sen}(wt) \end{aligned} \quad (4.285)$$

Para la onda reflejada, de acuerdo con la expresión 4.284 se tiene que

$$y_r = -Y_i \text{sen}(kx + wt)$$

El movimiento en $x = 0$ para la onda reflejada será

$$\begin{aligned} y_r|_{x=0} &= -Y_i \text{sen}[k(0) + wt] \\ y_r|_{x=0} &= -Y_i \text{sen}(wt) \end{aligned} \quad (4.286)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} y|_{x=0} &= y_i|_{x=0} + y_r|_{x=0} \\ y|_{x=0} &= -Y_i \text{sen}(wt) - Y_i \text{sen}(wt) \\ y|_{x=0} &= -2Y_i \text{sen}(wt) \end{aligned} \quad (4.287)$$

Se concluye que las ondas al reflejarse en un extremo libre lo hacen con la misma fase por lo que se refuerzan, es decir, se superponen en esos puntos (punto de discontinuidad). Esto se puede observar en la figura 4.51.

Sin embargo, un medio con $\rho = 0$, es una consideración teórica ya que en la práctica esto no se considera de esa forma debido a que si $\rho = 0 \rightarrow c_2 = \infty$ en $t=0$, por lo que la cuerda del medio dos está en movimiento todo el tiempo.

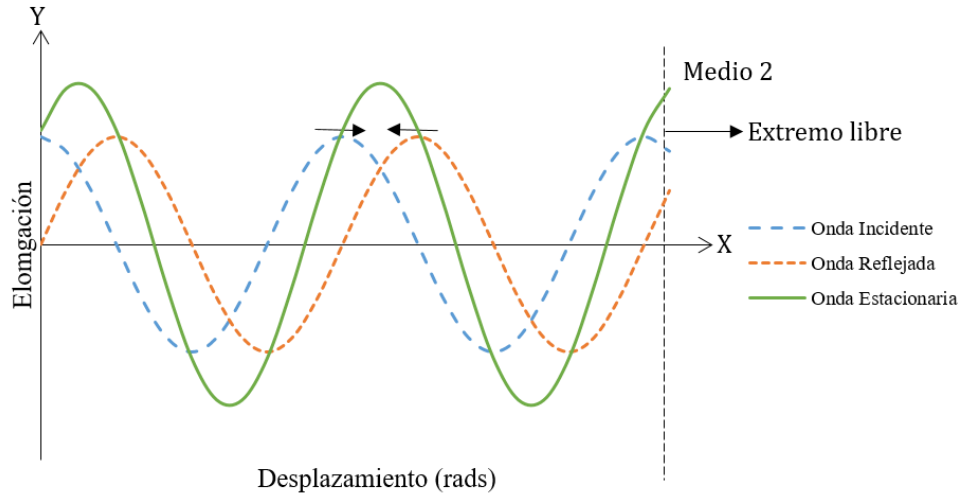


Figura 4.51. Onda estacionaria en un extremo libre de una cuerda. (Modificado de Reyes, S. 1976).

Ahora, la elongación resultante de la cuerda en el medio uno será de acuerdo al principio de superposición

$$y = y_r + y_i$$

$$y = Y[\text{sen}(kx + wt) - \text{sen}(kx - wt)] \quad (4.288)$$

De acuerdo con la identidad trigonométrica

$$\text{sen}(a + b) - \text{sen}(a - b) = 2 \cos(a) \text{sen}(b)$$

La ecuación 4.288 se reescribe como

$$y = 2Y \cos(kx) \text{sen}(wt) \quad (4.289)$$

Que, también, se puede reescribir como

$$y = [2Y \text{sen}(wt)] \cos(kx) \quad (4.290)$$

En el caso del extremo libre, la onda incidente y reflejada se superponen para formar una onda estacionaria cosinusoidal con una amplitud que varía $2Y \text{sen}(wt)$. Cuando $x = 0$ hay un vientre al contrario en el caso del extremo fijo.

Reflexión de ondas compresivas. Extremo abierto y extremo cerrado: onda estacionaria.

Caso del extremo abierto

Al igual que en el caso de las ondas transversales, las ondas longitudinales se reflejan cuando se encuentran con una discontinuidad y su propagación depende del tipo de esta. Las discontinuidades pueden ser un tubo con extremo abierto o cerrado, o el cambio de densidad de un medio a otro.

Para este caso se analizará de forma descriptiva un tubo con extremo abierto y cerrado, en este caso se puede analizar con ondas de presión y ondas de elongación.

En el primer caso se tendrá el extremo abierto de un tubo y una onda que se propaga de izquierda a derecha, al llegar a la discontinuidad, el extremo derecho al ser abierto presenta un cambio de características en el medio, por lo tanto, habrá una reflexión.

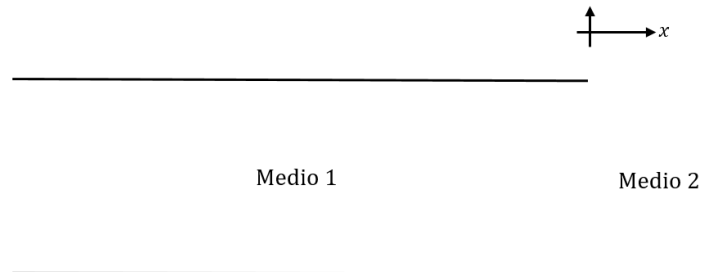


Figura 4.52. Extremo abierto de un tubo. (Fuente: Reyes, S. 1976).

En el caso de la presión, en el punto de discontinuidad, está fijada por el medio exterior, por lo que no habrá variaciones, por lo que, la onda incidente y reflejada en $x = 0$ deben estar en oposición de fases por lo que se generará un nodo de presión. En el caso de ondas de elongación, en $x = 0$ las partículas oscilan ligeramente, por lo que las ondas incidente y reflejada interfieren, por lo tanto, de acuerdo con los principios de superposición se refuerzan (se suman) y se presentará un vientre de elongación.

De acuerdo con Reyes (1976), se concluye que, en una onda de presión la onda incidente y la onda reflejada están en oposición de tal modo que existe un nodo en el punto $x = 0$ en todo el tiempo, se recuerda que la presión depende del medio exterior; este caso hace analogía con una onda transversal que se propaga en una cuerda fija. Por otra parte, en una onda de elongación el punto $x = 0$ oscila libremente por lo que las ondas incidentes y reflejadas interfieren constructivamente produciéndose un valle o un vientre de elongación; este caso hace analogía a una onda transversal que se propaga en una cuerda con extremo fijo.

En los demás puntos del tubo habrá superposición de las ondas reflejada y transmitida y debido a que no hay onda transmitida las amplitudes de las ondas serán iguales, por lo que darán como resultado una onda estacionaria. Ya que hay un vientre de elongación, la ecuación de la onda estacionaria de elongación tiene la forma,

$$z = Z\cos(kx)\sin(\omega t)$$

Se toma en cuenta la relación entre la elongación y presión

$$p = -\beta \frac{\partial z}{\partial x}$$

Por lo que la ecuación de la onda estacionaria de presión será

$$p = \beta k Z \sin(kx) \cos(\omega t) \quad (4.291)$$

Al hacer una comparación entre la ecuación de la onda de elongación y la de presión muestra que cuando $\cos(kx) = 0$ el $\sin(kx) = \pm 1$, esto quiere decir que al presentarse un nodo de elongación, en la onda de presión se presenta un vientre de presión, y viceversa.

Caso del extremo cerrado

Se analiza el caso de un extremo cerrado de un tubo, en donde, la onda avanza de izquierda a derecha, por lo que al llegar al punto de discontinuidad habrá reflexión por el cambio de las características del medio.

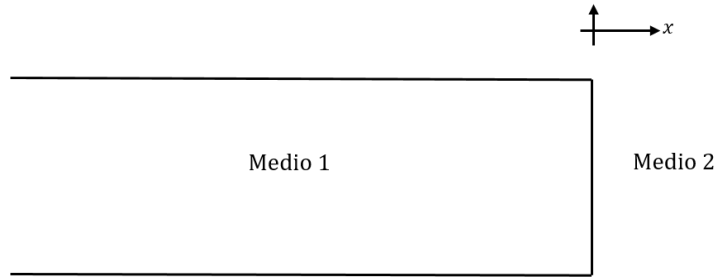


Figura 4.53. Extremo cerrado de un tubo. (Fuente: Reyes, S. 1976).

Para el caso de la onda de elongación, debido a que el extremo del tubo está cerrado, las partículas en ese punto no oscilan, por lo que la onda incidente y la onda reflejada están en oposición de fase, por lo tanto, se presenta un nodo de elongación. Al igual que en el caso anterior, no hay onda transmitida en el segundo medio.

Por otra parte, en el caso de la onda de presión, en $x = 0$ la presión sí varía, a diferencia del caso contrario que era nula, por lo que en ese punto se toman valores máximos de ambas ondas (incidente y reflejada) por lo que interfieren formando un vientre de presión.

De acuerdo con Reyes (1976), se concluye que en las ondas de elongación en $x = 0$ (punto de discontinuidad), las ondas incidente y reflejada están en oposición de fase, por lo que se forma un nodo de elongación; este caso hace analogía al de una onda que se propaga en una cuerda con un extremo fijo. Por otra parte, en la onda de presión, la presión varía en el punto de discontinuidad, tomando un valor máximo, por lo que se generará un vientre de presión; este caso hace analogía al de una onda que se propaga en una cuerda con un extremo libre.

Al igual que en el caso del tubo con el extremo abierto, en los demás puntos del tubo las partículas se superponen, tomando en cuenta que no hay onda transmitida, las amplitudes de las ondas incidente y reflejada serán las mismas, por lo que al superponerse darán como resultado una onda estacionaria. La ecuación de la onda estacionaria de elongación será

$$z = Z \sin(kx) \cos(\omega t)$$

Se toma en cuenta la relación entre la elongación y presión

$$p = -\beta \frac{\partial z}{\partial x}$$

Por lo que la ecuación de la onda estacionaria de presión será

$$p = -\beta k Z \cos(kx) \cos(\omega t) \quad (4.292)$$

Al hacer una comparación entre la ecuación de la onda de elongación y la de presión muestra que cuando $\cos(kx) = \pm 1$ el $\sin(kx) = 0$, esto quiere decir al presentarse un nodo de elongación, en la onda de presión se presenta un vientre de presión, y viceversa.

Modos normales y frecuencias propias en una cuerda

Hasta ahora, se ha analizado la reflexión en un extremo libre con determinadas características asumiendo la existencia de la onda en un medio y sin tomar en cuenta las características del otro extremo; en la práctica existen medios finitos, por lo que se necesita analizar las características de reflexión en ambos extremos, por ejemplo, una cuerda fija, pero ahora, fija en ambos extremos.

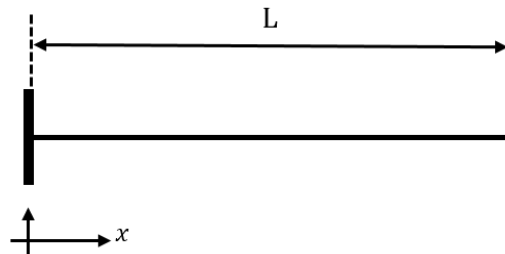


Figura 4.54. Cuerda fija por ambos extremos. (Fuente: Reyes, S. 1976).

En $t = 0$ se perturba la cuerda, adquiere cierta elongación y se deja libre. Es de interés conocer el tipo de movimiento posterior que se presenta en la cuerda, lo que desde el punto de vista matemático se plantea resolver la ecuación diferencial de la cuerda con determinadas condiciones de frontera y condiciones iniciales. Por lo tanto, se plantea el siguiente problema, (Reyes, 1976).

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T}{\mu} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (4.293)$$

$$y(x, 0) = Y \text{sen } kx$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = 0$$

$$y(0, t) = 0$$

$$y(L, t) = 0$$

$$0 \ll x \ll L$$

$$t > 0$$

Se considera que $\frac{T}{\mu} = c^2$, que es la velocidad, entonces se puede reescribir la ecuación 4.293 como

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \frac{1}{c^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

El método de Fourier o separación de variables consiste en encontrar una solución de la forma

$$y(x, t) = X(x)T(t)$$

$$\frac{\partial^2 XT}{\partial t^2} \frac{1}{c^2} = \frac{\partial^2 XT}{\partial x^2}$$

$$XT'' \frac{1}{c^2} = X''T$$

$$\frac{T''}{Tc^2} = \frac{X''}{X}$$

Se iguala a la constante de separación

$$\frac{T''}{Tc^2} = \frac{X''}{X} = -\lambda$$

Por lo tanto, para la variable temporal

$$\begin{aligned}\frac{T''}{Tc^2} &= -\lambda \\ T'' &= -\lambda Tc^2 \\ T'' + \lambda Tc^2 &= 0\end{aligned}\tag{4.294}$$

Ahora, para la variable espacial

$$\begin{aligned}\frac{X''}{X} &= -\lambda \\ X'' &= -\lambda X \\ X'' + \lambda X &= 0\end{aligned}\tag{4.295}$$

Las ecuaciones 4.294 y 4.295 son ecuaciones diferenciales ordinarias que ahora se pueden resolver de una forma más simple. Inicialmente se evaluarán las condiciones de frontera para X .

$$\begin{aligned}y(0, t) &= 0 \\ y(0, t) = X(0)T(t) &= 0\end{aligned}$$

La condición anterior (primera condición de frontera) se cumple sólo si

$$X(0) = 0 \text{ si } T(t) \neq 0$$

Debido a que si $T(0) = 0$ no se cumpliría una de las condiciones iniciales, la cual dice que, $y(x, 0) = Y \sin kx$, por lo que no sería una solución para el problema planteado, por lo tanto, la condición de frontera puede satisfacerse sólo si

$$X(0) = 0$$

Lo mismo sucede con la segunda condición de frontera

$$\begin{aligned}y(L, t) &= 0 \\ y(L, t) = X(L)T(t) &= 0 \\ X(L) &= 0\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$X(0) = X(L) = 0 \quad (4.296)$$

De acuerdo con el teorema de Sturm-Luville

Caso I, $\lambda = 0$

$$X'' + \lambda X = 0$$

$$X'' + (0)X = 0$$

$$X'' = 0$$

Al integrar se obtiene que

$$\int X'' = 0$$

$$X' = A$$

Se vuelve a integrar

$$\int X' = A$$

$$X = Ax + B$$

Se evalúa la condición de frontera, $y(0, t) = 0$

$$X(0) = A(0) + B$$

$$X(0) = B \quad \therefore$$

$$B = 0$$

Se evalúa la segunda condición de frontera, $y(L, t) = 0$

$$X(L) = A(L) + B = 0$$

Pero,

$$B = 0 \quad \therefore$$

$$X(L) = A(L) + 0 = 0$$

$$X(L) = AL = 0$$

$$X(L) = A = \frac{0}{L} = 0$$

$$\therefore A = 0$$

Por lo tanto $X(x) = Ax + B$ es la solución trivial, debido a que A y B son iguales a cero.

Caso II, $\lambda = -\lambda = -k^2$

$$X'' + \lambda X = 0$$

$$X'' - k^2 X = 0 \quad (4.297)$$

La ecuación 4.297 es una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden.

$$y'' + py' + qy = 0 \quad (4.298)$$

Donde p y q son números constantes reales. En donde se buscan soluciones particulares de la forma exponencial de la siguiente forma

$$x = e^{kt}, \text{ donde } k = \text{constante}$$

Entonces,

$$x' = ke^{kt} = kt \quad (4.299)$$

$$x'' = k^2 e^{kt} = k^2 t \quad (4.300)$$

Las ecuaciones 4.299 y 4.300 se sustituyen en la ecuación 4.297

$$k^2 e^{kt} - k^2 e^{kt} = 0$$

$$e^{kt}(k^2 - k^2) = 0$$

Dado que $e^{kt} \neq 0$, resulta que

$$k^2 - k^2 = 0 \quad (4.301)$$

Ahora se evalúan las raíces

$$k = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

De la ecuación 4.301 se observa que

$$p = 0 \quad y \quad q = -k^2$$

Por lo tanto

$$k = -\frac{0}{2} \pm \sqrt{\frac{0^2}{4} - (-k^2)}$$

$$k = \pm \sqrt{k^2} \quad \therefore$$

$$k_1 = k^2, \quad k_2 = -k^2$$

De los tres casos posibles, k_1 y k_2 son números reales y distintos ($k_1 \neq k_2$). Por lo tanto, se tiene una solución general de la forma

$$X(x) = Ae^{kx} + Be^{-kx} \quad (4.302)$$

Si se evalúa la condición de frontera, $y(0, t) = 0$

$$X(0) = Ae^{k(0)} + Be^{-k(0)}$$

$$X(0) = Ae^0 + Be^0$$

$$X(0) = A + B$$

$$A = -B \quad (4.303)$$

Si se sustituye 4.303 en 4.302

$$X(x) = -Be^{kx} + Be^{-kx}$$

Pero si,

$$\frac{e^{-x} + e^x}{2} = \sinh(kx)$$

$$X(x) = 2B\sinh(kx) \quad (4.304)$$

La expresión 4.304 es un producto de dos funciones, y para que sea igual a cero, al menos una de ellas tiene que ser cero, en este caso se debe recordar que

$$\sinh(x) = 0 \text{ solo si } x = 0$$

Ahora, con la condición de frontera, $y(L, t) = 0$

$$X(L) = 2B\sinh(kL) = 0$$

Si $kL > 0 \rightarrow \sinh(kL) > 0$, donde $B = 0$, lo que lleva a una solución trivial, y se repite lo mismo que en el caso I.

Caso III, $\lambda > 0 = k^2$

$$X'' + \lambda X = 0$$

$$X'' + k^2 X = 0 \quad (4.305)$$

La ecuación 4.305 es una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden.

$$y'' + py' + qy = 0 \quad (4.306)$$

Donde p y q son números constantes reales. En donde se buscan soluciones particulares de la forma exponencial de la siguiente forma

$$x = e^{kt}, \text{ donde } k = \text{constante}$$

Entonces,

$$x' = re^{kt} = kt \quad (4.307)$$

$$x'' = r^2 e^{kt} = k^2 t \quad (4.308)$$

Las ecuaciones 4.307 y 4.308 se sustituyen en la ecuación 4.305

$$k^2 e^{kt} + k^2 e^{kt} = 0$$

$$e^{kx}(k^2 + k^2) = 0$$

Dado que $e^{kt} \neq 0$, resulta que

$$k^2 + k^2 = 0 \quad (4.309)$$

Ahora se evalúan las raíces

$$k = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

De la ecuación 4.309 se observa que

$$p = 0 \quad y \quad q = k^2$$

Por lo tanto

$$k = -\frac{0}{2} \pm \sqrt{\frac{0^2}{4} - k^2}$$

$$k = \pm \sqrt{-k^2} \quad \therefore$$

$$k_1 = ki, \quad k_2 = -ki$$

De los tres casos posibles, k_1 y k_2 son números complejos. Por lo tanto, se tiene una solución general de la forma

$$X(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx) \quad (4.310)$$

Se evalúa la condición de frontera, $y(0, t) = 0$

$$X(0) = A \cos[k(0)] + B \sin[k(0)]$$

$$X(0) = A \quad \therefore \quad A = 0$$

Ahora, se evalúa la condición de frontera, $y(L, t) = 0$

Se recuerda que $A = 0$

$$X(x) = (0) \cos(kx) + B \sin(kx)$$

$$X(x) = B \sin(kx)$$

$$X(L) = B \sin[k(L)] = 0 \quad (4.311)$$

Para que se cumpla la expresión 4.311 se requiere que $B \neq 0$ para evitar la solución trivial como en el caso II, entonces k se debe elegir tal que $\text{sen}(kL) = 0$, se debe recordar que

$$\sin \theta = 0 \text{ solo si } \theta = n\pi$$

Por lo tanto kL debe de ser un número entero positivo múltiplo de π

$$kL = n\pi$$

$$k = \frac{n\pi}{L} \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

Se tiene en cuenta que $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

$$\frac{2\pi}{\lambda} L = n\pi$$

$$2\pi L = n\pi\lambda$$

$$L = \frac{n\pi\lambda}{2\pi}$$

$$L = \frac{n\lambda}{2}$$

Por lo tanto, cada uno de esos números es un valor propio y corresponden a cada n , por lo que las funciones propias son

$$X_n(x) = C_n \text{sen}(kx)$$

$$X_n(x) = C_n \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (4.312)$$

Donde $C \neq 0$

Ahora para la variable temporal T

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = X(x)T'(0) = 0$$

Del producto de las dos funciones, T' tiene que ser cero, debido a que X no puede ser cero, ya que no se podría cumplir la condición $y(x, 0) = Y \text{ sen } kx$, por lo tanto

$$T'(0) = 0$$

Debido a que λ solo puede ser solución en el caso III

Caso III, $\lambda > 0 = k^2$

$$T'' + \lambda T c^2 = 0 \quad (4.313)$$

Tiene una solución general de la forma, el procedimiento se puede observar en el caso de la variable espacial

$$T(t) = A \cos(kct) + B \sin(kct) \quad (4.314)$$

Se evalúa la condición de frontera, $\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = 0$

$$T'(t) = -Akc \sin(kct) + Bkc \cos(kct) = 0$$

$$T'(0) = -Akc \sin[kc(0)] + Bkc \cos[kc(0)] = 0$$

$$T'(0) = Bkc = 0$$

En este caso, ya que se habla de valores propios positivos k no puede ser cero, y la velocidad c tampoco ya que, si fuera cero, la ecuación planteada inicialmente se convertiría en otro tipo de ecuación diferencial más sencilla de resolver.

$$\therefore B = 0 \quad (4.315)$$

Sustituyendo 4.315 en 4.314

$$T(t) = A \cos(kct) + (0) \sin(kct)$$

$$T(t) = A \cos(kct), \quad kL = n\pi \quad (4.316)$$

Se tiene que encontrar una solución de la forma

$$y(x, t) = X(x)T(t)$$

De acuerdo con los resultados de 4.312 y 4.316

$$y(x, t) = A \sin(kx) B \cos(kct)$$

$$y(x, t) = C_n \sin(kx) \cos(kct)$$

O bien,

$$y_n(x, t) = C_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \quad (4.317)$$

La ecuación 4.317 satisface tres condiciones, pero, aún no se cumple la condición,

$$y(x, 0) = Y \operatorname{sen}(kx)$$

Para que se cumpla la condición se necesita una combinación lineal infinita mediante una serie de Fourier

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right)$$

Se tienen una cantidad infinita de constantes y se van a determinar para que se cumpla la condición

$$y(x, 0) = Y \operatorname{sen}(kx)$$

$$y(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi c0}{L}\right)$$

$$y(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sen}(n\pi x) = Y \operatorname{sen}(kx)$$

Serie de Fourier en senos para $f(x) = Y \operatorname{sen} kx$ en $0 \leq x \leq L$

$$C_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen}(kx) dx$$

Si se resuelve la integral y bajo las condiciones anteriores la ecuación 4.317 es solución de las condiciones de contorno planteadas siempre que en la L de la cuerda quepa un número entero n de semi-longitud de onda. Ya que la elongación inicial depende de k , esta puede tomar distintos valores ya que

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

De acuerdo con Reyes (1976), se concluye que puede haber distintas elongaciones iniciales que satisfagan el problema. Las elongaciones iniciales tendrán la forma

$$y = Y \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x$$

Habrá soluciones infinitas siendo la solución general

$$y(x, t) = Y_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right) \cos(\omega t), \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

Donde,

$$\omega = kc$$

$$y(x, t) = Y_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right) \cos(kct) \quad (4.318)$$

La ecuación 4.318 puede reescribirse como

$$y(x, t) = Y_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right) \cos \left(\frac{n\pi c}{L} t \right) \quad (4.319)$$

Y_n puede depender del valor de n considerado.

Para obtener el valor de la frecuencia f

$$\omega = 2\pi f \quad (4.320)$$

Y

$$\omega = \frac{n\pi c}{L} \quad (4.321)$$

Si se igualan las ecuaciones 4.320 y 4.321

$$2\pi f = \frac{n\pi c}{L}$$

$$f = \frac{n\pi c}{2\pi L}$$

$$f = \frac{nc}{2L}$$

O bien,

$$f = n \frac{c}{2L} \quad (4.322)$$

Por lo tanto, de los análisis anteriores se concluye que:

Una cuerda fija por los dos extremos puede oscilar de infinitas maneras diferentes de acuerdo con la elongación inicial. Cada una de estas maneras de oscilar recibe el nombre de modo normal de oscilación y la frecuencia asociada a cada modo se denomina frecuencia propia. Los modos normales, en este caso, vienen expresados por la ecuación 4.319 y las frecuencias propias por 4.320 donde en ambos casos $n = 1, 2, 3, 4, \dots$. El modo de menor frecuencia que se puede establecer en un sistema dado se denomina modo fundamental y la frecuencia de este modo frecuencia fundamental (Reyes, 1976).

En general, los modos que pueden establecerse en un sistema dado reciben el nombre de armónicos. El modo fundamental se denomina primer armónico ($n = 1$), el que le sigue en orden creciente de frecuencia, segundo armónico ($n = 2$), es decir, frecuencia doble a la del fundamental, el siguiente tercer armónico ($n = 3$) y así sucesivamente (Reyes, 1976).

Cuando una cuerda fija por ambos extremos, con las condiciones anteriores se estimula de una forma arbitraria no correspondiente a los modos normales o armónicos, oscilará de una manera que se puede considerar una superposición de cada uno de los modos normales. Como se vio anteriormente una función se puede descomponer como una suma infinita de sinusoides de diferentes frecuencias, por lo tanto, la solución general del problema planteado cuando el estímulo es de una forma arbitraria será una superposición de los armónicos del sistema.

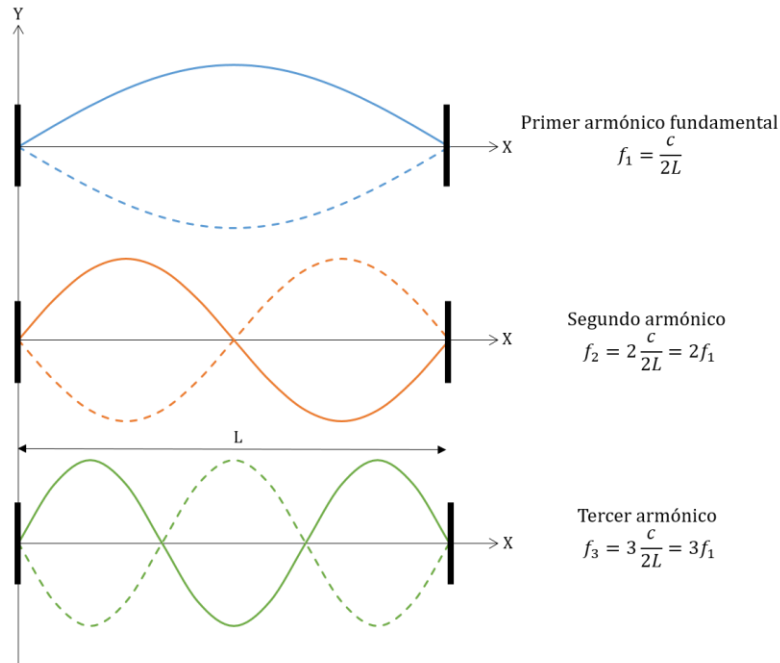


Figura 4.55. Armónicos de una cuerda fija por ambos extremos.
 Fuente: Reyes, S. 1976).

Si se tiene en cuenta el valor de la velocidad en una cuerda,

$$f = \frac{c}{2L}$$

$$f = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

De acuerdo con Reyes (1976), se concluye que en el sistema que se estudió anteriormente tiene frecuencias infinitas de oscilación al contrario de otros como un sistema masa-resorte. Los sistemas que presentan este tipo de condición si son estimulados o perturbados de una forma arbitraria responden con una superposición de los modos normales.

4.1.3 Relación con la geofísica

La teoría de oscilaciones y ondas es indispensable para la formación de ingenieros geofísicos debido a que proporciona las bases para el buen entendimiento de la geofísica aplicada en distintas áreas que se muestran a continuación.

4.1.3.1 Sismología

La sismología es la ciencia que estudia la dinámica interna de la Tierra a través de las ondas sísmicas que son producidas por una fuente natural (sismos) o artificial (explosiones, martillos, entre otros), las cuales se propagan por la Tierra y son grabadas por un receptor (Stein & Wysession, 2003). Estas ondas contienen información de la fuente y el medio, por tal motivo, la sismología es la principal herramienta para estudiar el interior de la Tierra.

Para el estudio de la sismología es importante tener claro, la teoría de oscilaciones y ondas. Aunque esta ciencia está enfocada en las ondas sísmicas, los conceptos son similares a otros tipos de ondas, debido a sistemas como el de una cuerda dan lugar a ondas similares a las ondas sísmicas en la Tierra, ya que, al deformar la cuerda, esta causa desplazamientos en función del espacio y tiempo que satisfacen la ecuación de la onda (Stein & Wysession, 2003).

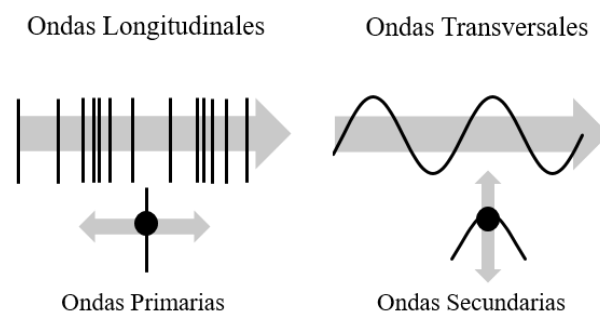


Figura 4.56. Ondas que se propagan en la Tierra (Modificado de Griem, 1998).

En cuanto a la velocidad de propagación de la onda, esta depende de las propiedades del medio de la cuerda, de una forma similar sucede con las ondas en la Tierra, así como también, las ondas responden a cambios en las propiedades físicas de la cuerda de manera análoga a lo que ocurre con las ondas en la Tierra. (Stein & Wysession, 2003). Debido a lo anterior es importante conocer la velocidad de propagación de las ondas dado que de este modo se aprende acerca de las propiedades del medio.

La Tierra no es un medio continuo, ya que sus propiedades físicas varían, por este motivo se considera el sistema de una cuerda con distintas propiedades, en donde se introducen los conceptos de onda incidente, reflejada y transmitida. Stein & Wysession (2003) mencionan que el hecho de que las distintas amplitudes de las ondas cambian al ser reflejadas o transmitidas en sus puntos de discontinuidad en donde las propiedades de la cuerda cambian, lo cual ilustra un concepto importante de las ondas sísmicas en la Tierra.

También se puede obtener información a través de las ondas estacionarias, las cuáles su función matemática se expresa mediante la suma infinita de distintas amplitudes, frecuencias y fases iniciales, cada una de estas sinusoides recibe el nombre de modos normales o armónicos, todo esto, usando el análisis de Fourier. Para este caso se buscan soluciones que se conocen como funciones propias a las que se les asocia un valor propio λ , en este caso esos valores propios representan frecuencias fundamentales. De acuerdo con Stein & Wysession (2003) en el caso de la sismología, estos valores propios (frecuencias) representan los modos normales de la Tierra los cuales son utilizados para estudiar las propiedades del medio, que es la estructura interna de la Tierra, y las funciones propias (desplazamiento) para estudiar la fuente, que, normalmente es un sismo.

Tanto los modos normales como la onda viajera son dos formas de conocer cómo evoluciona el movimiento. Al comparar ambos, en la onda viajera, se miden los tiempos de viaje y posteriormente se obtienen las velocidades, por otra parte, en los modos normales, se miden las frecuencias y después se infieren las velocidades. (Stein & Wysession, 2003).

Como se mencionó en un inicio, las ondas sísmicas también pueden ser generadas por fuentes artificiales, estos métodos son utilizados en la geofísica con una finalidad en específico, dependiendo del objetivo de estudio, lo que se conoce como prospección sísmica.

4.1.3.2 Prospección sísmica

La prospección sísmica estudia la propagación de ondas elásticas generadas por fuentes superficiales para obtener información del subsuelo en función del objetivo del estudio. Oscilaciones y ondas es una de las principales teorías que fundamentan a estos métodos, debido a que introduce el estudio de la propagación de ondas y los conceptos de las ondas incidente, reflejada y transmitida (refractada), además de los principios básicos de la sismología, pero con fuentes artificiales y profundidades más acotadas. De manera general, se perturba el medio con una

fente artificial (explosiones, martillos, etc.) y las ondas que se propagan en el medio, son captadas por receptores que miden los tiempos de viaje de

la fuente al receptor, que al ser procesados estos datos se pueden obtener las características del medio, como, la velocidad, así como también rasgos geológicos del subsuelo.

Los métodos sísmicos se pueden dividir en:

Sísmica de reflexión: El método sísmico de reflexión se basa en las reflexiones del frente de ondas sísmicas sobre las distintas interfaces del subsuelo. Estas interfaces (reflectores) responden, al igual que en la refracción, a contrastes de impedancia que posteriormente se relacionarán con las distintas capas geológicas. El tratamiento de los datos en sísmica de reflexión es más laborioso y delicado que el procesado de la sísmica de refracción (Procesado de sísmica de reflexión superficial, s.f.).

Sísmica de refracción: El método se basa en la medición del tiempo de viaje de las ondas refractadas críticamente en las interfaces entre las capas con diferentes propiedades físicas; fundamentalmente por contraste entre impedancias acústicas.

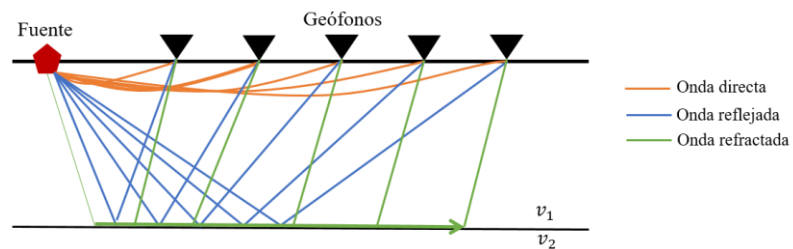


Figura 4.57. Estudio de prospección sísmica (Modificado de Cosillo, s.f.).

La sismica de refracción brinda información de velocidades y profundidades en las cuales se propagan las ondas. (Procesado de sismica de reflexión superficial, s.f.)

Además de la sismica de refracción y reflexión existen otros métodos sísmicos, estos pueden ser de fuente activa o pasiva. Las fuentes activas son producidas por fuentes controladas (explosiones, martillo y una placa, entre otros), existen métodos tales como, SASW (Análisis espectral de ondas superficiales), MASW (Análisis espectral de ondas superficiales multicanal). Las fuentes pasivas son generadas por ruido ambiental o fuentes que no son controladas (sismos, paso de vehículos, fuentes activas cercanas, entre otros), existen métodos tales como, ReMi (Refracción por microtemores), SPAC (Método de autocorrelación espacial), interferometría sísmica.

Una parte importante del tratamiento de los datos de los métodos anteriores es la obtención de las curvas de dispersión, pero, para comprenderlo mejor, se definirá el término dispersión. En la guía se define la dispersión como un fenómeno en el que se observa una dependencia entre la velocidad de propagación de las ondas con respecto a la frecuencia de las mismas, a su vez, los medios que producen este fenómeno se les conoce como medios dispersivos. Por lo tanto, cuando una onda se propaga en un medio dispersivo, cada una de sus armónicos se propaga a una velocidad de fase diferente debido a las distintas frecuencias que estas presentan.

La representación gráfica de esta dependencia (velocidad de fase y frecuencia) se denomina curva de dispersión, cuya forma más habitual consiste en una representación bidimensional de la velocidad de fase frente a la frecuencia. (Córdoba, 2011). La dispersión de ondas superficiales está unido a las características del subsuelo, ya que diferentes frecuencias implican diferentes espesores de estratos de suelo y, consecuentemente, diferentes velocidades de propagación (Abdel et al, 2013).

Las curvas de dispersión brindan información preliminar del subsuelo, tales como:

- Si en la representación gráfica de las curvas de dispersión estas presentan un cambio de pendiente, da un indicativo de que podría existir un cambio de estrato.
- Si hay frecuencias altas, la velocidad de fase está relacionada con estratos superficiales, por otra parte, si hay frecuencias bajas, la velocidad de fase está relacionada con estratos profundos.
- La velocidad de fase es representativa de la rigidez del material.
- Si la longitud de onda aumenta, el movimiento de las ondas se extiende a profundidades mayores.

Las curvas de dispersión es solo una parte del tratamiento de los datos, ya que la finalidad es obtener un perfil de velocidades o una tomografía del subsuelo a partir de estas curvas.

4.1.3.3 Análisis de señales geofísicas

Las señales pueden describir una amplia variedad de fenómenos físicos. Se le llama señal a cualquier observable que en su variación espacial, temporal o respecto de cualquier otra cantidad, sea capaz de contener o transportar información, estas, se representan matemáticamente como funciones con una o más variables independientes (Oppenheim et al, 1998). En la geofísica, normalmente se estudia en términos de una solo variable independiente ya sea con respecto a la posición o el tiempo, aunque es más común que esa variable independiente sea el tiempo, sin embargo, el tiempo no puede ser representado en ciertas aplicaciones específicas, por ejemplo, las señales que representan variaciones de cantidades físicas con respecto a la profundidad como densidad, porosidad, y resistividad eléctrica, son usadas en geofísica para estudiar la estructura interna de la Tierra (Oppenheim et al, 1998).

Es importante que el estudiante comprenda que en el análisis de señales geofísicas se encuentran con frecuencia señales periódicas, exponenciales y sinusoidales. Una señal periódica es aquella en la que sus características se repiten en determinados instantes fijos de tiempo, tal como se vio en el análisis del movimiento oscilatorio. Las señales exponenciales pueden ser crecientes o decrecientes, estas

pueden describir distintos fenómenos físicos, un ejemplo de ello, una exponencial decreciente puede representar sistemas mecánicos con amortiguamiento. Las señales sinusoidales son aquellas en las que su comportamiento es descrito por una función seno, estas describen los movimientos oscilatorio y ondulatorio, tal como se ha estudiado en el análisis.

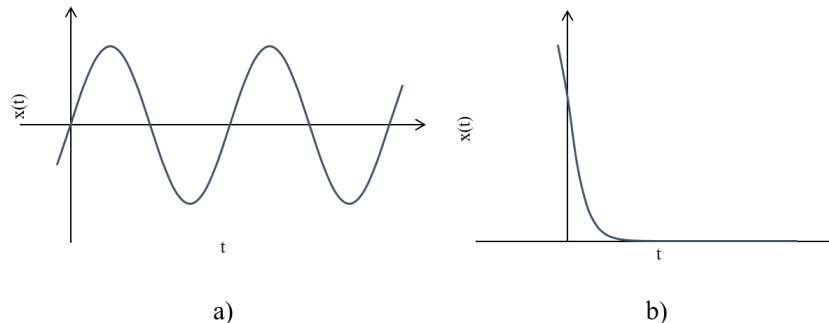


Figura 4.58. a) Señal sinusoidal periódica. B) Señal exponencial.

Las señales sinusoidales multiplicadas por las exponenciales decrecientes se conocen como sinusoidales amortiguadas, estas pueden encontrarse en sistemas mecánicos que tienen fuerzas de amortiguamiento como de restauración, estos sistemas tienen mecanismos que se disipan energía con oscilaciones que decaen con el tiempo (Oppenheim et al, 1998).

Señales sísmicas

Como se menciona anteriormente, normalmente las señales se estudian con respecto al tiempo, las señales más estudiadas en la geofísica son las señales sísmicas.

Las señales sísmicas son el registro cuantitativo del movimiento sísmico, esta contiene parámetros sísmicos de importancia como la amplitud, el contenido de frecuencias y la duración del evento. Dentro de la amplitud los tres parámetros importantes que se miden son el desplazamiento, la velocidad y la aceleración, estos tres últimos son muy importantes dado que describen el estado del movimiento de un sistema (Párraga, 2020).

Otro parámetro importante es la frecuencia ya que las señales generadas durante un movimiento sísmico tienen una amplia gama de frecuencias. El contenido de frecuencia describe la distribución de la amplitud del movimiento a lo largo de diferentes frecuencias. Durante un sismo, múltiples ondas son transmitidas, el contenido de frecuencia puede variar según las propiedades del medio donde viajan, además, influye en los efectos del movimiento (Párraga, 2020).

Se debe de recordar que una señal sísmica no es periódica ni presenta movimientos armónicos simples, estas señales tienen una forma compleja, sin embargo, estas pueden llegar a expresarse como la suma infinita de sinusoides con diferentes amplitudes, frecuencias y fases iniciales, donde, cada una de estas sinusoides son conocidas como armónicos, de esta forma, pueden estudiarse con la teoría del análisis de Fourier.

Series de Fourier

Las series de Fourier son una herramienta muy útil en el estudio de señales para diferentes ramas de ciencia e ingeniería. Su uso es más adecuado cuando se trabaja con señales continuas y periódicas. El matemático francés Fourier demostró que cualquier función periódica que cumpla ciertas condiciones puede ser expresada como la suma de una serie de sinusoides de diferente amplitud, frecuencia y fase.

Transformada de Fourier

Como se mencionó anteriormente, uno de los parámetros de estudio más importante en el análisis de señales es la frecuencia, debido a esto, la transformada de Fourier es una herramienta matemática que transforma una señal en el dominio del tiempo al dominio de la frecuencia.

Espectro de Fourier

El gráfico de amplitudes contra frecuencias recibe el nombre de espectro de amplitudes de Fourier y el gráfico de fase contra frecuencias recibe el nombre de espectro de fases de Fourier, cuando se obtienen ambos, se dice que se obtiene el espectro de frecuencias, o bien, el espectro de Fourier. El análisis de los espectros

de amplitudes y fase de la serie trigonométrica de Fourier permite estudiar la influencia de cada armónico en la composición de la función periódica.

El espectro de amplitudes da una distribución relativa de amplitudes con relación a cada una de las armónicas y permite conocer las frecuencias dominantes de una señal determinando su correspondiente frecuencia. Se puede utilizar para calcular las frecuencias dominantes para las señales sísmicas a nivel de roca y suelo, amplificación de ondas incidentes, efectos en las irregularidades topográficas, estudios de la interacción suelo estructura (Flores y Lozano, 2007).

De la interpretación del espectro de Fourier, se puede deducir cuales son los períodos más importantes del terremoto (que son los que lo van a caracterizar), sin más que identificar en qué lugares se alcanzan los picos de amplitud. Además, se puede ver cuál es la frecuencia o periodo predominante de un registro, que es aquel para el cual el espectro de Fourier de la aceleración alcanza su valor máximo (Universidad de Alicante, 2007).

Por lo tanto, el espectro de Fourier (frecuencias) nos da una amplia información acerca del contenido de frecuencias de una señal.

4.1.3.4 Ingeniería sísmica

En ingeniería sísmica, la investigación está dirigida principalmente a la caracterización de propiedades dinámicas de los suelos, así como a cuantificar el efecto que podrían tener terremotos particulares en las edificaciones antes que ocurra un evento sísmico (UNAN, s.f.). La ingeniería sísmica es una rama de la sismología, así como también la ingeniería civil. También, la exploración sísmica es muy importante por lo que de igual manera está relacionada con la geofísica aplicada. Es relevante comprender que si en un futuro, un ingeniero geofísico desea dedicarse a esta área es indispensable tener conocimiento de las bases teóricas como son las oscilaciones y ondas. Un tema que se abordó en la guía de estudio fueron los sistemas que presentan amortiguamiento y el fenómeno de resonancia, que, una aplicación significativa de estos es en la ingeniería sísmica.

Amortiguamiento y resonancia

En la práctica, todos los sistemas presentan amortiguamiento. El amortiguamiento disipa la energía que se le suministró al sistema, en el caso de la ingeniería sísmica, se puede relacionar de la siguiente manera: un edificio como el sistema, y un agente externo que suministra energía como un sismo, ahora bien, uno de los objetivos principales de la ingeniería sísmica es evitar el fenómeno de resonancia en la estructura.

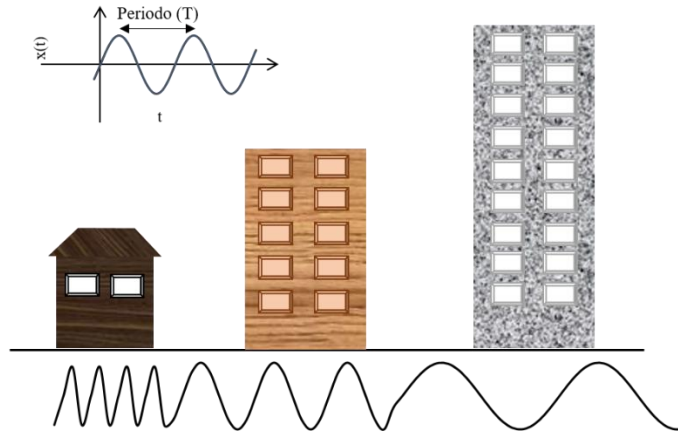


Figura 4.59. Periodos de resonancia con los que pueden colapsar ciertas edificaciones

La resonancia es aquel fenómeno en el cual se alcanza la amplitud máxima de las oscilaciones, esto debido a que la frecuencia del agente externo es igual a la frecuencia del sistema, por lo que, si esto ocurre en una estructura, la consecuencia más grande es que esta colapse. Por lo cual, es importante que se realicen diversos estudios para poder evitar este tipo de situaciones. Por mencionar un ejemplo, en el cual están involucrados los conceptos fundamentales de oscilaciones y ondas uno de ellos es conocido como espectro de respuesta.

Espectro de respuesta

Un espectro de respuesta representa la respuesta máxima de un oscilador de un solo grado de libertad con una masa unitaria con frecuencia y amortiguamiento, cuando se somete a una perturbación sísmica. Dicha respuesta puede presentarse en términos de desplazamiento, velocidad y aceleración en función del periodo. Este espectro es útil para caracterizar los movimientos del suelo y sus efectos sobre las estructuras (Universidad de Alicante, 2007).

Ahora bien, en la ingeniería geofísica no se analizan estructuras, sin embargo, la ingeniería sísmica es una rama en la que se puede especializar un ingeniero geofísico debido a todo el conocimiento que este tiene de la parte sísmica.

4.2 Análisis de las evaluaciones

Se aplicaron un total de 30 cuestionarios diagnósticos, es decir, 30 estudiantes participaron en la realización de estos. Las respuestas se evaluaron de la siguiente manera:

La primera pregunta fue abierta, por lo que las respuestas únicamente se consideraron si estaban correctas o incorrectas.

De la pregunta dos a la siete, se utilizó el siguiente criterio:

- Bien: si la respuesta fue contestada correctamente.
- Regular: si el estudiante tenía una idea de la respuesta, pero no logró concretarla.
- Malo: si la respuesta fue contestada incorrectamente.

En la pregunta ocho únicamente se recopilaron los ejemplos que escribieron los alumnos.

Cabe mencionar que se darán a conocer las respuestas de cada pregunta, sin embargo, las respuestas de los estudiantes no tienen que ser idénticas a las que se mencionan a continuación (a excepción de la pregunta 1), pero deben de tener una idea correcta de las respuestas.

Pregunta 1: ¿Cuál es la ecuación de la onda?

Respuesta: $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$

De las cuatro posibles respuestas que había, 19 de los 30 estudiantes contestaron que la ecuación de la onda era $y(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$, o también, $y(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$, que estas son soluciones a la ecuación de la onda y del movimiento armónico simple, por lo tanto, se puede observar que la mayoría no conocen, o bien, confunden las estructuras matemáticas de la teoría de oscilaciones y ondas.

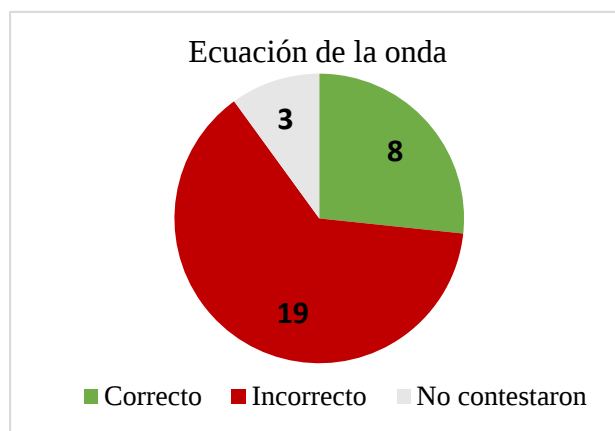


Figura 4.60. Gráfica de las respuestas de la pregunta uno.

Pregunta 2: ¿Existe alguna diferencia entre el movimiento oscilatorio y el movimiento ondulatorio? Argumenta tu respuesta.

El movimiento oscilatorio es un movimiento de vaivén alrededor de una posición de equilibrio, en el cual sus características se repiten a través del tiempo. Por otra parte, el movimiento ondulatorio se genera cuando se perturba un cuerpo, por lo que la región perturbada adquiere cierto estado de movimiento, aunque este movimiento no se observa en puntos vecinos que no fueron perturbados, se empezará a observar en instantes posteriores. Ambos movimientos se estudian a través de movimientos periódicos senoidales y cosenoidales por lo que ambos tienen parámetros de frecuencia, periodo, amplitud, fase, entre otros. Son movimientos diferentes, sin embargo existe una relación entre ambos, esto se puede observar con el ejemplo de una cuerda, ya que al perturbarla mediante un agente externo, esta empieza a adquirir cierto estado de movimiento, cada punto de la cuerda empieza a oscilar alrededor de su posición de equilibrio, recordando que en instantes posteriores puntos vecinos de la cuerda empezarán a adquirir el mismo estado de movimiento que el de la región perturbada generando un movimiento ondulatorio, en donde, también se encuentra presente en cada punto de la cuerda un movimiento oscilatorio.

De los 30 estudiantes, 19 contestaron que sí y 4 que no, el resto no contestaron la pregunta. Los que contestaron que sí, únicamente 2 tuvieron una respuesta regular, a continuación, se muestran algunas respuestas:

- Que las oscilaciones son movimientos de vaivén y semicirculares y que en el movimiento ondulatorio son longitudinales y transversales.
- El sentido en el que oscila la onda.
- El oscilatorio es en 2D y el ondulatorio en 3D.
- El periodo.
- El oscilatorio se asocia a oscilaciones y el ondulatorio a ondas.
- Que en el oscilatorio las vibraciones son de izquierda a derecha y en el ondulatorio las vibraciones son de atrás hacia adelante.
- La frecuencia.
- El movimiento oscilatorio es vertical y el movimiento ondulatorio horizontal.
- El movimiento oscilatorio es en forma circular y el movimiento ondulatorio es en forma de sube y baja.
- Que cambian de dirección.

Los que contestaron que no argumentaron su respuesta de la siguiente manera:

- Ambos movimientos cumplen la misma frecuencia.
- Son lo mismo.
- El oscilatorio representa el mismo movimiento que una onda.
- Ambos movimientos están relacionados entre sí.

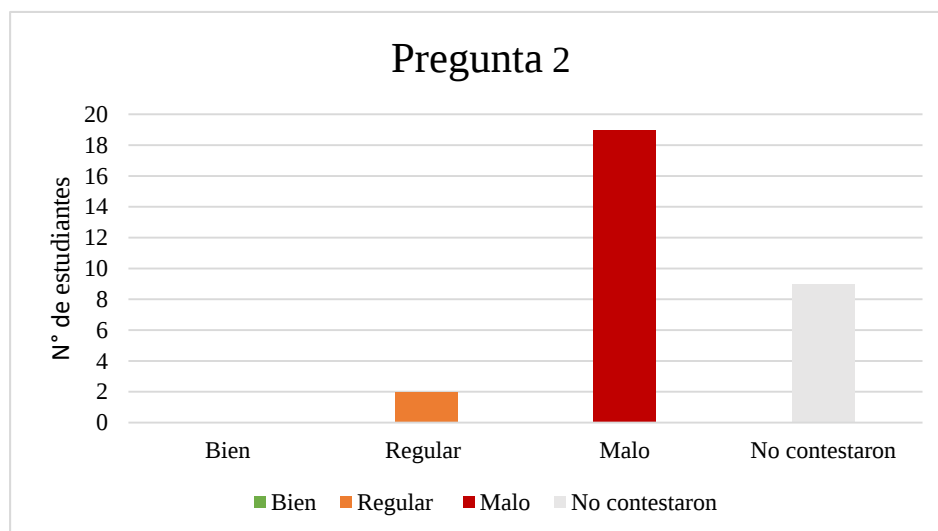


Figura 4.61. Gráfica de las respuestas de la pregunta dos.

Pregunta 3: ¿Qué define el estado de movimiento de un MAS (Movimiento Armónico Simple)?

Se recuerda que, en la mecánica clásica, el estado del movimiento de una partícula queda determinado por la posición, la velocidad y la aceleración. El movimiento armónico simple parte de la segunda Ley de Newton, por lo que su estado de movimiento queda definido por la posición, velocidad y aceleración.

De los 30 estudiantes que realizaron el cuestionario, solo un estudiante contestó bien la pregunta, otros dos tuvieron una respuesta regular y el resto de los estudiantes no tenían conocimiento de la respuesta, algunas de las contestaciones de los 28 estudiantes restantes fueron las siguientes:

- Periodo, amplitud y fase.
- Su masa.
- La ecuación del movimiento.
- Las funciones seno y coseno.
- La frecuencia.
- Si se encuentra en reposo.
- El tiempo.

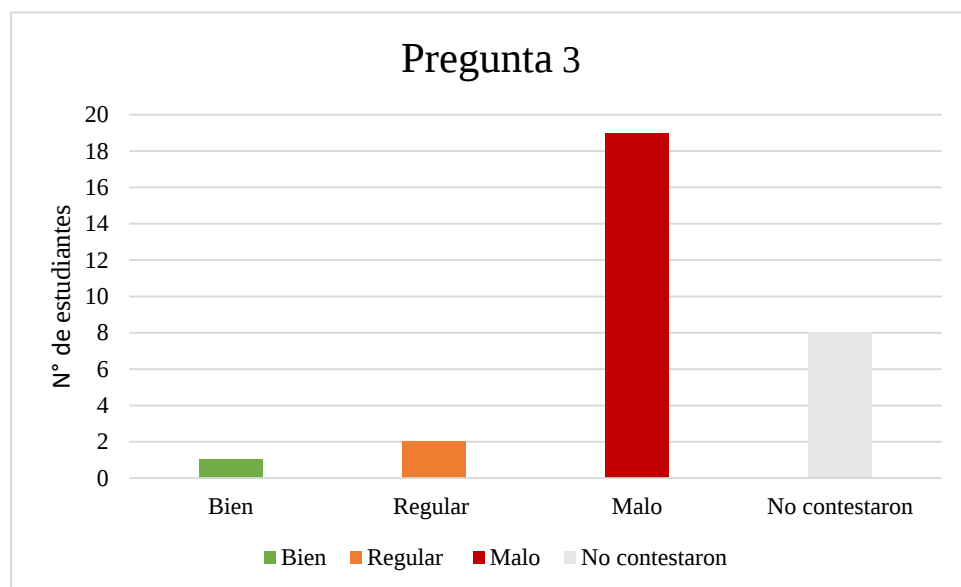


Figura 4.62. Gráfica de las respuestas de la pregunta tres.

Pregunta 4: ¿Qué es la frecuencia angular y qué representa?

La frecuencia angular es la velocidad angular con la que debe moverse un punto sobre una circunferencia, de forma tal que la proyección del mismo realiza un movimiento armónico simple.

Únicamente 3 de los 30 estudiantes tuvieron una respuesta regular, algunas de las respuestas se muestran a continuación:

- Se representa con la w y es el ángulo de fase.
- Es el número de vueltas que hace en un tiempo.
- Es el número de oscilaciones que se llevan a cabo en un cierto ciclo.
- La periodicidad con que ocurre el movimiento.
- El número de veces que recorre un ángulo en una unidad de tiempo.
- La separación de la partícula al respecto al punto de equilibrio.
- La frecuencia con la que una onda se mueve.
- El número de tiempo que tarda en completar un ciclo.

Se puede observar que los estudiantes confunden principalmente el concepto de frecuencia angular con el del periodo y la frecuencia.

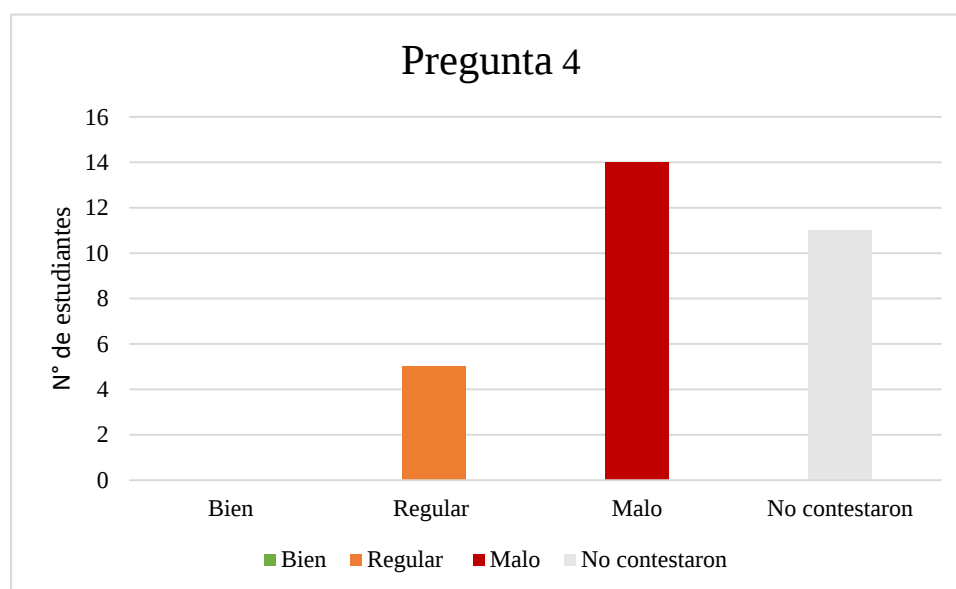


Figura 4.63. Gráfica de las respuestas de la pregunta cuatro.

Pregunta 5: ¿Qué representa la fase en un movimiento ondulatorio?

La fase representa una posición angular que en cada posición x y tiempo t define la función $y = f(x, t)$.

Esta pregunta fue contestada de manera incorrecta por los 30 estudiantes, solamente 2 tenían una idea del concepto de la fase, pero no lograron concretar su idea. Algunas de las respuestas fueron las siguientes:

- Se expresa con la letra phi.
- El tiempo que tarda pasar de un punto A a un punto B.
- Representa el tiempo que tarda en completar un ciclo de onda.
- El punto donde comienza la medición.
- El desfase.
- Consiste en oscilaciones que se propagan en un espacio.

También se puede observar que se confunde el concepto de fase con el periodo.

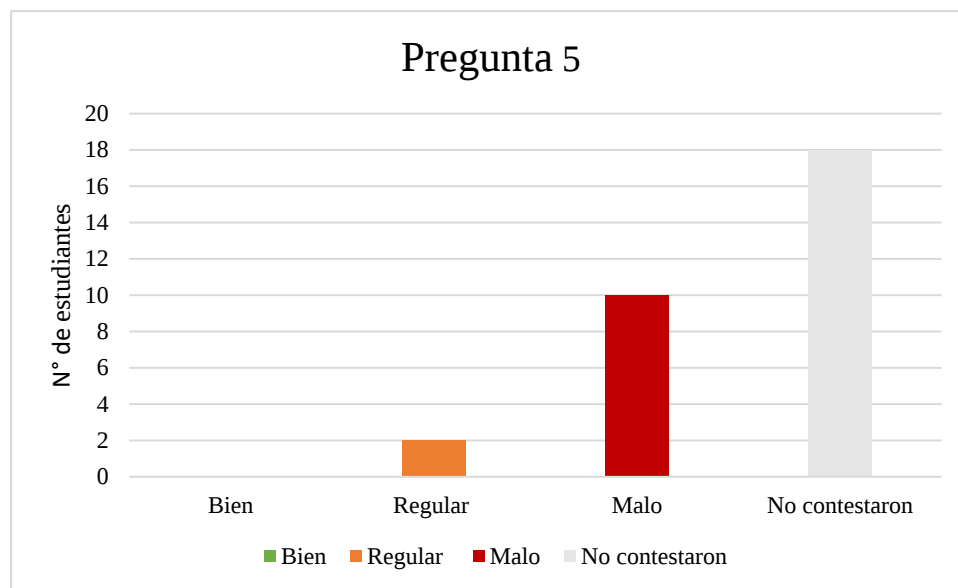


Figura 4.64. Gráfica de las respuestas de la pregunta cinco.

Pregunta 6: ¿Qué son los armónicos y que representan?

Bajo ciertas y determinadas condiciones se puede demostrar que una función matemática se puede expresar mediante una suma infinita de sinusoides con diferentes amplitudes, frecuencias y fases iniciales, por lo que se obtendrá una amplitud A_n , una frecuencia w_n y una fase φ_n que definen cada una de las sinusoides, cada una de estas sinusoides recibe el nombre de armónico.

Ninguno de los estudiantes contestó correctamente la pregunta. Algunas de las respuestas fueron las siguientes:

- Son aquellas que mantienen una misma frecuencia haciendo que la onda mantenga siempre la misma amplitud.
- Ondas que mantienen su fase y frecuencia.
- Movimientos sencillos sobre la propagación de las ondas.
- Seno y coseno.
- Los armónicos son los movimientos que toma una oscilación y estos los podemos representar en una gráfica.
- Los armónicos son un tipo de onda generada por el sonido tienen su fase constante y la frecuencia constante.

Se puede notar que varias respuestas de los estudiantes dicen que los armónicos mantienen su frecuencia y fase constante, que es todo lo contrario, dado que estos tienen amplitudes, frecuencias y fase distintas.

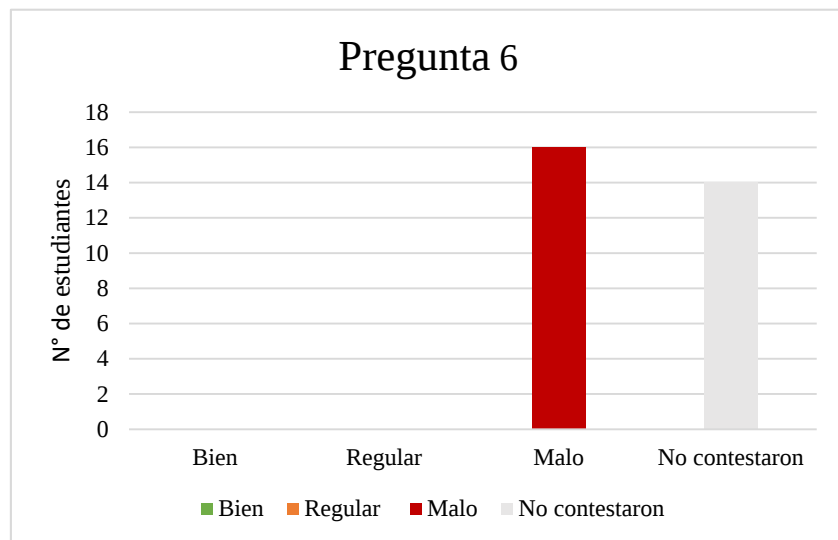


Figura 4.65. Gráfica de las respuestas de la pregunta seis.

Pregunta 7: ¿Qué es la velocidad de fase y velocidad de grupo?

La velocidad de fase es la velocidad de propagación de la onda y la velocidad de grupo se presenta cuando una onda se propaga en un medio dispersivo cada una de sus armónicos se propaga a una velocidad de fase diferente, estas ondas viajando a diferentes velocidades se componen formando grupos, los cuales viajan como un todo a una velocidad diferente a la velocidad de cada una de las componentes y que se denomina velocidad de grupo.

De los 30 estudiantes únicamente 2 respondieron correctamente al concepto de la velocidad de fase, de la velocidad de grupo todas las respuestas fueron incorrectas. Algunas de las contestaciones se muestran a continuación:

- La velocidad de fase es la velocidad con la que se propaga la onda en un medio, la otra no recuerdo.
- La velocidad con la que se lleva a cabo las oscilaciones.
- Tiene que ver con el tiempo de fase.
- La velocidad de fase es de un solo objeto o partícula y la velocidad de grupo es cuando hay varias.
- Velocidad con la que cambia o efectúa el avance de la onda.

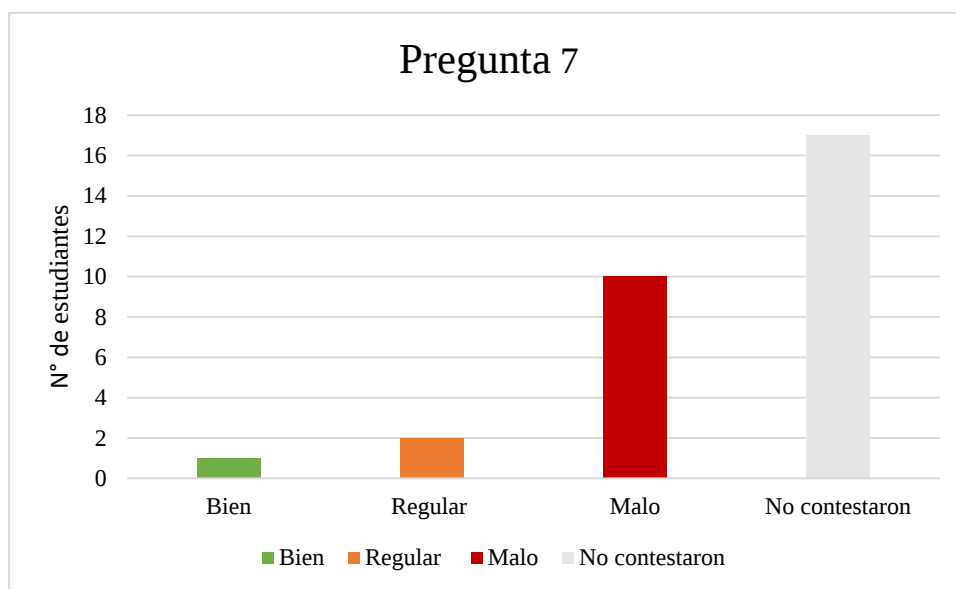


Figura 4.66. Gráfica de las respuestas de la pregunta siete.

Pregunta 8: ¿Encuentras alguna relación entre estos conceptos y la aplicación en la ingeniería geofísica? Si tu respuesta es “Si” menciona un ejemplo.

La teoría de oscilaciones y ondas es indispensable para el campo de la geofísica debido a que nos proporciona las bases para el buen entendimiento de la geofísica aplicada en áreas como: sismología, prospección sísmica, análisis de señales, ingeniería sísmica.

Para esta pregunta, 20 de 30 estudiantes contestaron que sí existe relación, los 10 estudiantes restantes no contestaron la pregunta. Los ejemplos que mencionaron se muestran en la siguiente gráfica:

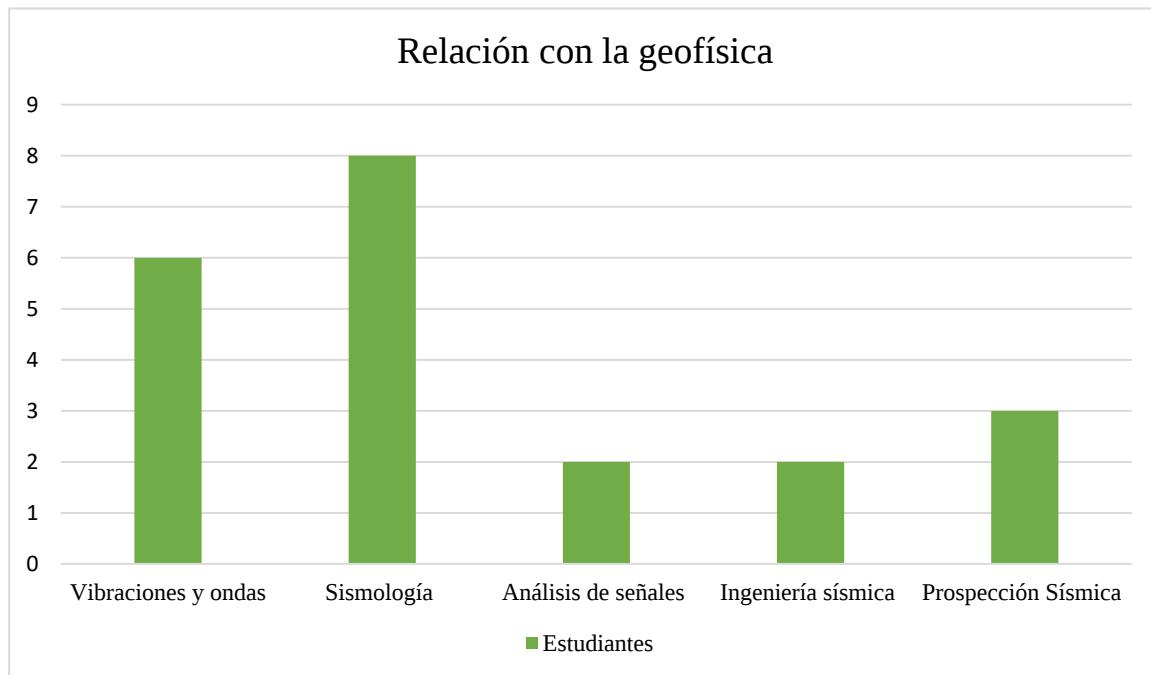


Figura 4.67. Gráfica de las respuestas de la pregunta ocho.

Capítulo 5. Conclusiones

La teoría de oscilaciones y ondas es una de las teorías que sustenta al campo de la geofísica, la cual es fundamental para comprender diversos fenómenos que son objeto de estudio de este campo. Con base en los resultados y el análisis de este trabajo se llegaron a las siguientes conclusiones:

- Existe una gran variedad de herramientas a disposición del estudiante para su formación académica. Depende de él elegir cuál herramienta le ayuda a obtener los mejores resultados en su área de estudio. Por lo tanto, se propuso una guía de estudio enfocada en el análisis y revisión de oscilaciones y ondas, donde se puede encontrar la parte matemática y física explicada detalladamente. En ocasiones, los libros omiten detalles que dan por hecho que se conocen y que la mayoría de los estudiantes desconocen o no se dan el tiempo de estudiar.
- Mediante diversas fuentes bibliográficas relacionadas a los temas de oscilaciones y ondas, mecánica clásica, cálculo diferencial e integral, entre otras, se logró obtener un análisis y revisión de las estructuras matemáticas que rigen a la teoría de oscilaciones y ondas, en el cual, se estudiaron dos movimientos importantes: el movimiento oscilatorio y ondulatorio.
- El análisis del movimiento oscilatorio y ondulatorio permitió proponer una guía de estudio de oscilaciones y ondas, en la cual, se pueden encontrar los sistemas que describen a estos movimientos junto con sus estructuras matemáticas y su conceptualización física.
- La teoría de oscilaciones y ondas tiene una amplia relación con el campo de la geofísica, principalmente porque es la base teórica de diferentes ramas de la geofísica como la sismología, prospección sísmica, análisis de señales, ingeniería sísmica, por lo tanto, es indispensable comprenderla para tener un conocimiento completo de todas estas áreas.

- De acuerdo con el análisis de los resultados del cuestionario diagnóstico que se les aplicó a los estudiantes, la mayoría de estos, no tienen el conocimiento suficiente del campo de las oscilaciones y ondas, por lo que la guía propuesta puede ser útil para su trayectoria académica, haciendo énfasis en que la guía por sí sola no garantiza la comprensión de los temas correspondientes, sino que además se requiere interés por parte del estudiante para obtener buenos resultados en el estudio de esta área.
- El comportamiento de la evolución espacio-temporal de los sistemas a través de los modelos matemáticos es una primera aproximación, ya que bajo la complejidad de los que exigen soluciones numéricas ha conllevado al desarrollo de algoritmos y se hace necesario el uso un sistema de cómputo para el cálculo y simulación del comportamiento de dichos sistemas, tal es el ejemplo de la ingeniería geofísica, ya que se hace uso de equipo especializado para la medición de cantidades físicas y de programas que ayudan a obtener el modelo requerido, sin embargo para poder comprender los fenómenos en la geofísica y darles una interpretación es importante comprender las estructuras matemáticas y su conceptualización física ya que nos permiten conocer el papel que desempeñan en la ingeniería.

Bibliografía

Alonso, M; Finn, E. (1967). Física: Campos y ondas. Volumen II. Fondo Educativo Interamericano.

Alonso, M; Finn, E. (1967). Física: Mecánica. Volumen I. Fondo Educativo Interamericano.

Cavada, J. (2000). Guía de prospección sísmica por refracción. Universidad Central de Venezuela. <https://www.geocities.ws/geofisicaucv/Archivos/refracc4.pdf>

Córdoba, S. (2011). Método espectral para vibraciones de barras. (Tesis de Licenciatura). Universidad de Sevilla.

Crawford, Jr. (1977). Ondas, Berkeley Physics Course. Editorial Reverté.

Farfán, J. (2020). Estudio de la dispersión de ondas superficiales a partir del ruido sísmico ambiental en el norte del Golfo de California. (Tesis de maestría). Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California.

Farlow, S. (1993). Partial differential equations for scientists and engineers. New York, USA: Dover publications, inc.

Flórez, C; Lozano, C. (2007). Análisis y tratamiento de señales de fuentes sismogénicas de campo cercano a San José de Cúcuta, Colombia.

Giancoli, C. Douglas. (2006). Física. Principios con aplicaciones. Volumen 1. Sexta edición, México. Pearson Educación.

Giner, J. (2007). Sismología e Ingeniería Sísmica. Universidad de Alicante. <https://rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/19945/5/practica5.pdf>

Griem, W. (2020). Métodos geofísicos – sismología. Apuntes de geología. <https://www.geovirtual2.cl/geologiageneral/ggcap01c.htm>

Hartog, D. (1964). Mecánica de las vibraciones. México, D.F. Compañía editorial continental, S. A.

Hsu, H. (1973). Análisis de Fourier. Michigan, Estados Unidos: Fondo Educativo Interamericano.

Jiménez, C. (2007). Procesamiento digital de señales sísmicas con MATLAB. Revista de Investigación de Física. Instituto Geofísico del Perú.

Kádomtsev, R. (1984). Ondas a nuestro alrededor. Colección Física al alcance de todos, Moscú, Rusia: Mir Moscú.

Martínez, P. (2008). Prospección geofísica. Métodos sísmicos. Universidad Politécnica de Cartagena. https://www.researchgate.net/profile/Pedro-Martinez-Pagan/publication/342601022_Prospeccion_Geofisica_2_Metodos_Sismicos_Principios_Basicos_Sismica_de_Refraccion/links/5efcaa4145851550508123b0/Prospeccion-Geofisica-2-Metodos-Sismicos-Principios-Basicos-Sismica-de-Refraccion.pdf

O'Neil, P. (2008). Matemáticas avanzadas para ingeniería. México, D.F. Cengage Learning.

Oppenheim, A; Willsky A; Hamid, S. (1998). Signals and systems. (2nd Edition). Prentice Hall.

Párraga, J. (2020). Análisis del espectro de Fourier de registros sísmicos en función del ángulo de orientación del sensor. (Tesis de Licenciatura). Universidad Católica de Santiago Guayaquil.

Piskunov, N. (1983). Cálculo diferencial e integral I. Moscú, Rusia: Mir Moscú.

Piskunov, N. (1983). Cálculo diferencial e integral II. Moscú, Rusia: Mir Moscú.

Rebollo, R. (s.f). Análisis de señales geofísicas. Señales y sistemas. Universidad Nacional de la Plata, Argentina. <http://carina.fcaglp.unlp.edu.ar/senales/teorias/Clase01.pdf>

Reyes, S. (1976). Oscilaciones y ondas mecánicas. La Habana, Cuba: Pueblo y educación.

Rivas, R. (2016). Efecto en la curva de dispersión a través del método MASW, al realizar variaciones en el peso de la fuente activa y el tipo placa. (Tesis de Licenciatura). Universidad del Bio-Bio.

Robles, A; Jiménez, J. (2017). Metodología para realizar estudios de microzonificación sísmica. Secretaria de Gobernación. https://www1.cenapred.unam.mx/COORDINACION_ADMINISTRATIVA/SRM/FRACCION_XLI_A/50.pdf

Stein, S; Wysession, M. (2003). An introduction to seismology, earthquakes and earth structure. Blackwell publishing.

Universidad de Córdoba. (s.f). Espectro de Fourier. https://www.uco.es/grupos/giie/cirweb/teoria/tema_13/tema_13_05.pdf

Universidad de Sevilla. (s.f). Curvas de dispersión. <https://biblus.us.es/bibing/proyectos/abreproy/4908/fichero/Cap%C3%ADtulo+3%252FCap%C3%ADtulo3.pdf>

Universidad Politécnica de Catalunya. (s.f). Procesado de sísmica de reflexión superficial. <https://upcommons.upc.edu/bitstream/handle/2099.1/3404/41205-7.pdf>

Anexos

Anexo I. Ejemplos de cuestionarios contestados por los estudiantes



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ingeniería

Colegio: Ingeniería Geofísica

Cuestionario Diagnóstico de Oscilaciones y Ondas

Año de ingreso a la universidad: 2020

1.- ¿Cuál es la ecuación de la onda?
a) $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$

b) $y(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$

c) $y(t) = A \sin(\omega t + \phi)$

d) $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = v \frac{\partial y}{\partial t}$

2.- ¿Existe alguna diferencia entre el movimiento oscilatorio y el movimiento ondulatorio? Argumenta tu respuesta. No, son lo mismo.

3.- ¿Qué define el estado de movimiento de un MAS (Movimiento Armónico Simple)? su frecuencia y fase constantes

4.- ¿Qué es la frecuencia angular y qué representa?
velocidad angular

5.- ¿Qué representa la fase en un movimiento ondulatorio?

representa el tiempo que tarda en completar un ciclo de onda

6.- ¿Qué son los armónicos y que representan?

Ondas que mantienen su fase y frecuencia



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ingeniería

Colegio: Ingeniería Geofísica

Cuestionario Diagnóstico de Oscilaciones y Ondas

Año de ingreso a la universidad: 20169A058

1.- ¿Cuál es la ecuación de la onda?

a) $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$

(b) $y(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$

c) $y(t) = A \sin(\omega t + \phi)$

d) $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = v \frac{\partial y}{\partial t}$

2.- ¿Existe alguna diferencia entre el movimiento oscilatorio y el movimiento ondulatorio? Argumenta tu respuesta.

No reverdo

3.- ¿Qué define el estado de movimiento de un MAS (Movimiento Armónico Simple)?

Movimiento de pendulo

4.- ¿Qué es la frecuencia angular y qué representa?

la periodicidad con que ocurre el movimiento

5.- ¿Qué representa la fase en un movimiento ondulatorio?

6.- ¿Qué son los armónicos y que representan?



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ingeniería

Colegio: Ingeniería Geofísica

Cuestionario Diagnóstico de Oscilaciones y Ondas

Año de ingreso a la universidad: 2020

1.- ¿Cuál es la ecuación de la onda?

a) $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$

b) $y(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$

c) $y(t) = A \sin(\omega t + \phi)$

d) $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = v \frac{\partial y}{\partial t}$

2.- ¿Existe alguna diferencia entre el movimiento oscilatorio y el movimiento ondulatorio? Argumenta tu respuesta.

El movimiento oscilatorio viene a partir de oscilaciones, en algunos casos, es periódico; el ondulatorio se asocia a ondas donde es armónico (se asocia a perturbaciones).

3.- ¿Qué define el estado de movimiento de un MAS (Movimiento Armónico Simple)?

Un MAS es un movimiento que se compone por las funciones Seno y Coseno.

4.- ¿Qué es la frecuencia angular y qué representa?

Representada por ω , es el número de vueltas en un movimiento.

5.- ¿Qué representa la fase en un movimiento ondulatorio?

El avance de la onda o cambio, avance de la onda en un gráfico.

6.- ¿Qué son los armónicos y qué representan?

7.- ¿Qué es la velocidad de fase y velocidad de grupo?

Velocidad con la que cambia o efectúa el avance la onda, de grupo, ...

8.- ¿Encuentras alguna relación entre estos conceptos y la aplicación en la ingeniería geofísica? Si tu respuesta es "Sí" menciona un ejemplo.

Sí, en la prospección sísmica, al hacer estudios de campo para determinar composición del suelo.



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ingeniería

Colegio: Ingeniería Geofísica

Cuestionario Diagnóstico de Oscilaciones y Ondas

Año de ingreso a la universidad: 2020

1.- ¿Cuál es la ecuación de la onda?

a) $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$

b) $y(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$

c) $y(t) = A \sin(\omega t + \phi)$

d) $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = v \frac{\partial y}{\partial t}$

2.- ¿Existe alguna diferencia entre el movimiento oscilatorio y el movimiento ondulatorio? Argumenta tu respuesta.

Si

3.- ¿Qué define el estado de movimiento de un MAS (Movimiento Armónico Simple)?

su masa y si hay un cuerpo empujándolo

4.- ¿Qué es la frecuencia angular y qué representa?

la frecuencia con la que una onda se mueve

5.- ¿Qué representa la fase en un movimiento ondulatorio?

En que plano se encuentra

6.- ¿Qué son los armónicos y que representan?

7.- ¿Qué es la velocidad de fase y velocidad de grupo?

8.- ¿Encuentras alguna relación entre estos conceptos y la aplicación en la ingeniería geofísica? Si tu respuesta es "Si" menciona un ejemplo.



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ingeniería

Colegio: Ingeniería Geofísica

Cuestionario Diagnóstico de Oscilaciones y Ondas

Año de ingreso a la universidad: 2021

1.- ¿Cuál es la ecuación de la onda?

a) $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$

b) $y(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$

c) $y(t) = A \sin(\omega t + \phi)$

d) $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = v \frac{\partial y}{\partial t}$

2.- ¿Existe alguna diferencia entre el movimiento oscilatorio y el movimiento ondulatorio? Argumenta tu respuesta.

3.- ¿Qué define el estado de movimiento de un MAS (Movimiento Armónico Simple)?

describe una partícula sometida a una fuerza restauradora proporcional a su desplazamiento

4.- ¿Qué es la frecuencia angular y qué representa?

se define como el ángulo girado por una unidad de tiempo

5.- ¿Qué representa la fase en un movimiento ondulatorio?

6.- ¿Qué son los armónicos y que representan?

7.- ¿Qué es la velocidad de fase y velocidad de grupo?

8.- ¿Encuentras alguna relación entre estos conceptos y la aplicación en la ingeniería geofísica? Si tu respuesta es "Si" menciona un ejemplo.



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ingeniería

Colegio: Ingeniería Geofísica

Cuestionario Diagnóstico de Oscilaciones y Ondas

Año de ingreso a la universidad: 2020

1.- ¿Cuál es la ecuación de la onda?

a) $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$

b) $y(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$

☒ c) $y(t) = A \sin(\omega t + \phi)$

d) $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = v \frac{\partial y}{\partial t}$

2.- ¿Existe alguna diferencia entre el movimiento oscilatorio y el movimiento ondulatorio? Argumenta tu respuesta.

3.- ¿Qué define el estado de movimiento de un MAS (Movimiento Armónico Simple)?

4.- ¿Qué es la frecuencia angular y qué representa?

5.- ¿Qué representa la fase en un movimiento ondulatorio?

6.- ¿Qué son los armónicos y que representan?

son movimientos con una misma frecuencia y secuencia

7.- ¿Qué es la velocidad de fase y velocidad de grupo?

8.- ¿Encuentras alguna relación entre estos conceptos y la aplicación en la ingeniería geofísica? Si tu respuesta es "Sí" menciona un ejemplo.

Sí, para sismología con el movimiento de las ondas sísmicas



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ingeniería

Colegio: Ingeniería Geofísica

Cuestionario Diagnóstico de Oscilaciones y Ondas

Año de ingreso a la universidad: 2020

1.- ¿Cuál es la ecuación de la onda?
$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

b) $y(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$

c) $y(t) = A \sin(\omega t + \phi)$

d) $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = v \frac{\partial y}{\partial t}$

2.- ¿Existe alguna diferencia entre el movimiento oscilatorio y el movimiento ondulatorio? Argumenta tu respuesta.

En el movimiento oscilatorio puede cambiar de dirección, es decir, puede ir en línea recta o en diagonal... y el mov. ondulatorio solo se producen ondas en línea recta

3.- ¿Qué define el estado de movimiento de un MAS (Movimiento Armónico Simple)?

Si este entra en reposo o en un tiempo determinado

4.- ¿Qué es la frecuencia angular y qué representa?

Tiempo entre cada oscilación

5.- ¿Qué representa la fase en un movimiento ondulatorio?

6.- ¿Qué son los armónicos y que representan?

Los armónicos son los movimientos que forma una oscilación y estos los podemos representar en una gráfica

7.- ¿Qué es la velocidad de fase y velocidad de grupo?

8.- ¿Encuentras alguna relación entre estos conceptos y la aplicación en la ingeniería geofísica? Si tu respuesta es "Sí" menciona un ejemplo.

Sí, porque es la base para todo sismo.