BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

EXTENSIONES DE LOS TEOREMAS DE MONTEL Y DE PICARD Y SU APLICACIÓN EN DINÁMICA HOLOMORFA

TESIS

PRESENTADA PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRÍA EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA:

GABRIEL MARTÍNEZ RAMOS

DIRECTORAS DE TESIS:

DRA. PATRICIA DOMÍNGUEZ SOTO
DRA. LAURA ANGÉLICA CANO CORDERO

PUEBLA, PUEBLA.
AGOSTO 2023

Para aquellos que rechazaron la oportunidad de rendirse:
los resilientes.

Agradecimientos

"He llegado hasta aquí, guiaré este texto
hasta los confines del mundo."
Gol D. Roger - Eiichiro Oda.

En estas líneas expreso mi gratitud a aquellos que me acompañaron en esta aventura.

Considero las creencias espirituales como una elección: agradezco a Dios y a la vida por permitirme vivir esta etapa de mi vida, por los buenos y los malos momentos, por las experiencias que necesite para aprender y fortalecer el punto de equilibrio de mi estabilidad emocional, y porque no estoy solo.

Agradezco a mi madre por su esfuerzo, las mañanas de desvelo y los consejos que consideré innecesarios pero que hacían falta para mi crecimiento profesional, por enseñarme a sobrevivir y por mostrarme el camino de la resiliencia ante la adversidad. A mi padre, que en paz descanse, quien me enseñó a sonreír ante la adversidad y a disfrutar de la vida: vivir a mi manera. A mis hermanos Oscar, Ricardo y Miguel y a mi primo Juan por su paciencia, su tolerancia, su consejo y su apoyo en cada momento que lo necesité.

Agradezco a la Dra. Paty, por su humildad, su tolerancia y apoyo moral, que siempre me daba palabras de aliento para seguir adelante, alegraba con sus historias mis días y me animaba a continuar con mis estudios. Agradezco a mis profesores, a los miembros del comité tutorial, a mis compañeros y a la facultad por permitirme realizar mis estudios de maestría, por las recomendaciones y su disponibilidad cuando no entendía algún tema de clase.

Agradezco a mis amigos, aunque la lista es muy larga y no puedo mencionarlos a todos, pero saben que los aprecio y les agradezco por estar en los buenos momentos y por compartir conmigo metas y sueños. Agradezco a aquellos que ya no están, los que ya no frecuento pero formaron parte importante por dejarme grandes enseñanzas.

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CO-

NACYT) por el apoyo brindado para la realización de mis estudios de maestría y el desarrollo de este trabajo.

Y por último pero menos importante, y sin menos preciar, a mí por la resiliencia, por la fuerza de espíritu cada vez que lo intenté y fallé, por decidir vivir esta etapa y por no dejar de estudiar las matemáticas que tanto amo.

Índice general

Introducción

En 1878, Émile Picard (1856-1941) presentó su Teorema Pequeño el cual establece que toda función entera no constante toma todos los valores finitos de $\mathbb{C}$, a lo sumo con una única excepción posible. Este resultado fue demostrado por Picard en su artículo titulado *Sur une propriété des fonctions entières*, donde utilizó la Función Modular Elíptica. Ese mismo año, en su artículo *Sur les fonctions analytiques uniformes dans le voisinage d'un point singulier essentiel*, Picard publicó su Teorema Grande, que describe el comportamiento de una función alrededor de una singularidad esencial. El enunciado de este teorema es el siguiente:

Teorema 1 (Grande de Picard, [16]). *Sean G un dominio de $\mathbb{C}$ y $z_0 \in G$. Si $f : G\backslash\{z_0\} \to \mathbb{C}$ es una función holomorfa que tiene una singularidad esencial aislada en z_0, entonces en toda vecindad agujereada de z_0 la función f toma cualquier valor de $\mathbb{C}$ un número infinito de veces, a lo más una posible excepción.*

La prueba del Teorema 2.13 también dependía de la Función Modular Elíptica. En su época el Teorema Grande de Picard fue una gran revelación y de gran relevancia para la investigación en la teoría de funciones complejas. En gran parte de los trabajos relacionados con la teoría de Picard, diferentes matemáticos, se dedicaron a la generalización de este teorema o al descubrimiento de pruebas elementales, generando un gran número de artículos por parte de prominentes matemáticos tales como Borel, Schottky, Landou, Paul Léavy, Constantin Carathéodory y Ernst Lindelöf, véase [1].

Fue hasta 1907, cuando el joven matemático francés Paul Montel (1876-1975), en su doctorado, desarrolló su famosa teoría de familias normales, donde estudió la convergencia de familias de funciones complejas. Esta teoría resultó ser muy poderosa, porque en las primeras décadas del siglo XX Montel la aplicó para estudiar una variedad de tópicos sobre la teoría de las funciones complejas, como: convergencia de sucesiones y series de funciones, los teoremas de Picard y el Teorema de la Aplicación Conforme de Riemann.

En 1912, Montel publica un *Criterio Fundamental de Normalidad*, que se enuncia a continuación.

Teorema 2 (Montel o Criterio Fundamental de Normalidad, [16]). *Si $\mathcal{F}$ es una familia de funciones holomorfas sobre un dominio $G \subset \mathbb{C}$ a $\mathbb{C}$ que omite dos (o mas) valores fijos a y b en $\mathbb{C}$, entonces $\mathcal{F}$ es normal en G.*

Este criterio también es conocido por algunos autores como Teorema de Montel o segundo Teorema de Montel y para su demostración también se utiliza la Función Modular Elíptica. Montel se dá cuenta de esta relación y utiliza su Criterio Fundamental de Normalidad para probar el Teorema Pequeño de Picard, en ese mismo año. Mientras que en 1916 Montel lo utilizó para demostrar el Teorema Grande de Picard, considerando a estos resultados como una de las aplicaciones más importantes de su teoría de las familias normales, véase [16].

Por otro lado, en 1917, los trabajos de Pierre Fatou (1878-1929) y Gaston Julia (1893-1978) sobre iteración de funciones racionales, fueron el cimiento del estudio de la teoría global de la iteración, donde la teoría de familias normales de Montel juega un papel importante porque se utiliza esta teoría para dividir al plano complejo $\mathbb{C}$ en dos conjuntos de comportamiento dinámico distinto: el conjunto estable e inestable, hoy conocidos como los conjuntos de Fatou y Julia. Una manera de estudiar el comportamiento dinámico del conjunto de Julia era calcular las iteraciones de una función analítica, pero en aquella época hacer los cálculos era algo extenuante porque a largo plazo los cálculos eran abrumadores; sin embargo, mediante el uso de familias normales, los cálculos se reducen y se obtiene una mejor comprensión de la dinámica.

Por otra parte, si consideramos la clase de funciones trascendentes enteras, que son funciones holomorfas de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$ con una única singularidad esencial en ∞, el Teorema de Montel y el Teorema Grande de Picard se aplican. Lo mismo ocurre cuando consideramos la clase de funciones trascendentes meromorfas, que son funciones meromorfas con al menos un polo no omitido y donde ∞ es una singularidad esencial.

De manera natural nos hacemos las siguientes preguntas:

(a) ¿Existen funciones con más de una singularidad esencial asilada?

(b) ¿Es posible extender los teoremas de Montel y Picard para este tipo de funciones?

(c) ¿Qué consecuencias tienen los teoremas de Montel y Picard para este tipo de funciones en la teoría de Dinámica Holomorfa?

El objetivo principal de esta tesis es estudiar la extensión de los Teoremas 1 y 2 para funciones con más de una singularidad esencial. También estudiaremos algunas aplicaciones de estos dos teoremas en Dinámica Holomorfa.

1 | Superficies de Riemann

En este capítulo, estudiaremos algunos conceptos básicos de Variable Compleja y Superficies de Riemann que nos serán de utilidad para esta tesis. Para profundizar en los temas, se sugiere al lector consultar las siguientes referencias [17], [12] y [13] .

SECCIÓN 1.1 Preliminares

En esta sección, se estudiarán algunas propiedades de las funciones holomorfas del Análisis Complejo. Para una compresión más detallada del tema se recomienda revisar [10], [6] y [8] .

Una función de variable compleja es una función $f: G \to H$, donde G y H son subconjuntos de $\mathbb{C}$, G representa el dominio y H el codominio de f. El dominio G es un conjunto abierto y conexo en $\mathbb{C}$, considerando la topología euclidiana de $\mathbb{C}$, véase Apéndice A.

Observación 1.1. En la literatura, el término *dominio* se utiliza en el sentido de un conjunto abierto y conexo en el plano complejo $\mathbb{C}$. Por está razón, salvo que se indique lo contrario, cuando hablemos de dominio lo haremos en sentido de la topología de $\mathbb{C}$.

Definición 1.1. [10]**.** Sean G un subconjunto en $\mathbb{C}$ y $f: G \to \mathbb{C}$ una función de variable compleja, decimos que f es *continua* en $z_0 \in G$ si para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para cada $z \in G$ tal que $|z - z_0| < \delta$, tenemos que $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$.

Decimos que f es continua en G si f es continua en cada punto z de G.

Definición 1.2.[10]**.** Sea G un conjunto abierto en $\mathbb{C}$. Una función de variable compleja $f: G \to \mathbb{C}$ es *diferenciable*, en el sentido complejo,

en $z_0 \in G$ si
$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$
existe, y se denota por $f'(z_0)$.

Proposición 1.1. [6]**.** *Si $f: G \to \mathbb{C}$ es una función de variable compleja que es diferenciable en un abierto G de $\mathbb{C}$, entonces f es continua en G.*

Definición 1.3. [6]**.** Sean G un conjunto abierto en $\mathbb{C}$ y $f: G \to \mathbb{C}$ una función de variable compleja, decimos que f es *holomorfa* en G si f es diferenciable en cada punto de G. Si $G = \mathbb{C}$, decimos que f es *entera*, es decir, que f es holomorfa en todo $\mathbb{C}$.

Toda función de variable compleja $f: G \to \mathbb{C}$ puede escribirse como:
$$f(x,y) = u(x,y) + i\,v(x,y),$$
donde $z = x + iy \in G$ y las funciones $u(x,y)$ y $v(x,y)$ son la parte real y parte imaginaria de f, respectivamente. La *matriz Jacobiana* de f se define como la matriz de las derivadas parciales dadas por:
$$Df(x,y) := \begin{bmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{bmatrix},$$
en cada punto $(x,y) \in G$. Del Análisis Real, se sabe que f es diferenciable si, y sólo si tiene derivadas parciales continuas, es decir f es $\mathcal{C}^1$. Para el caso de las funciones holomorfas se necesita una condición adicional. Los siguientes dos resultados relacionan las funciones holomorfas con las derivadas parciales.

Teorema 1.1 (de Cauchy-Riemann, [6])**.** *Sean G un conjunto abierto en $\mathbb{C}$ y $f: G \to \mathbb{C}$ una función holomorfa. Entonces, si $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$, se tiene*
$$\partial_x u = \partial_y v \quad y \quad \partial_y u = -\partial_x v. \tag{1.1}$$
Las Ecuaciones (1.1) *son llamadas* Ecuaciones de Cauchy-Riemann.

El Teorema de Cauchy-Riemann establece que si una función de variable compleja $f: G \to \mathbb{C}$ es holomorfa en G, entonces las derivadas parciales de f existen y satisfacen las Ecuaciones de Cauchy-Riemann (Ecuaciones (1.1)) en cada valor de G; sin embargo, el recíproco de este resultado es falso. Para que el recíproco sea verdadero se debe agregar la hipótesis de que las derivadas parciales sean continuas y que satisfagan las ecuaciones de Cauchy-Riemann. A continuación, enunciamos el siguiente resultado:

Teorema 1.2. [6]**.** *Sean G un conjunto abierto en $\mathbb{C}$ y $f\colon G \to \mathbb{C}$. La función $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ es holomorfa en G si las cuatro derivadas parciales $\partial_x u$, $\partial_y u$, $\partial_x v$, $\partial_y v$ existen, son continuas y satisfacen las Ecuaciones de Cauchy-Riemann (*Ecuaciones (1.1)*) en cada punto de G.*

Si f es holomorfa en G, entonces para cada $z = x + i\,y \in G$ podemos escribir la derivada de f en $z := x + i\,y$ como:

$$f'(z) = \partial_x u + i\partial_x v = \partial_y v - i\partial_y u.$$

Una *sucesión de funciones de variable compleja* sobre un subconjunto G de $\mathbb{C}$ es una función que asigna a cada $n \in \mathbb{N}$ una función de variable compleja $f_n\colon G \to \mathbb{C}$. Denotamos a esta sucesión, salvo que se diga lo contrario, por f_n.

Definición 1.4. [10]**.** Sea $f\colon G \to \mathbb{C}$ una función de variable compleja definida en un subconjunto G de $\mathbb{C}$, decimos que una sucesión de funciones de variable compleja f_n es *puntualmente convergente* a la función f en G si para cada $z \in G$ y dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_n(z) - f(z)| < \epsilon,$$

para todo $n \geq N$.

Una sucesión f_n es *uniformemente convergente* a f en G si para cada para $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_n(z) - f(z)| < \epsilon,$$

para todo $n \geq N$ y todo $z \in G$.

Una *serie de funciones de variable compleja* se define como la suma infinita

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) = f_0(z) + f_1(z) + \cdots + f_n(z) + \cdots .$$

Para cada entero $N = 0, 1, \ldots$, la suma $S_N := \sum_{n=0}^{N} f_n$ es llamada la *N-ésima suma parcial* o *suma parcial*. Si la correspondiente sucesión S_N de sumas parciales converge uniformemente a una función f en G, entonces decimos que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ converge uniformemente a f en G y escribimos

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) = \lim_{n\to\infty} \sum_{n=0}^{N} f_n(z) = f(z).$$

Definición 1.5. [6]**.** Sea a_n una sucesión de números complejos y $z_0 \in \mathbb{C}$. La serie de funciones

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

es llamada *serie de potencias*.

El siguiente resultado enuncia condiciones para que una serie de potencias sea convergente.

Teorema 1.3. [6]**.** *Si* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ *es una serie de potencias, entonces existe un número* $R \geq 0$*, posiblemente* $+\infty$*, llamado* radio de convergencia*, tal que:*

(a) la serie converge, si $|z - z_0| < R$*,*

(b) la serie diverge, si $|z - z_0| > 0$*.*

Además, la convergencia es uniforme sobre cada disco cerrado en el disco abierto $D(z_0, R) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$*.*

Definición 1.6. [6]**.** Sea G un conjunto abierto de $\mathbb{C}$.Una función de variable compleja $f : G \to \mathbb{C}$ es *analítica* en G si para cualquier $z_0 \in G$, existe $R > 0$ con $D(z_0, R) \subset G$ y una serie de potencias (centrada en z_0) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ que converge uniformemente a f en $D(z_0, R)$. Esto es, para cada $z \in D(z_0, R)$ se tiene que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

En consecuencia, se obtiene que las funciones analíticas en un conjunto abierto G son holomorfas en G. Además, el recíproco de este resultado también es verdadero, véase a continuación, el siguiente resultado:

Teorema 1.4.[14]**.** *Sea* G *un subconjunto abierto de* $\mathbb{C}$*. Entonces, una función* f *es analítica en* G *si, y sólo si* f *es holomorfa en* G*.*

De ahora en adelante, salvo que se diga lo contrario, las palabras *holomorfa* y *analítica* se usarán indistintamente.

Teorema 1.5 (Principio del módulo máximo, [3])**.** *Si el módulo* $|f|$ *de una función holomorfa* f *sobre un dominio* $G \subset \mathbb{C}$ *alcanza un máximo local en algún punto* $z_0 \in G$*, entonces* f *es contante en* G*.*

Recordemos que un conjunto es compacto K en $\mathbb{C}$ si es un conjunto cerrado y acotado, véase Apéndice A. Además, por el Principio el Módulo Máximo, el módulo de una función holomorfa alcanza su máximo en la frontera de K. De este modo definimos la convergencia uniforme en compactos como se enuncia a continuación:

Definición 1.7. [16] Sea f_n una sucesión de funciones complejas y f una función compleja definidas en G, donde G es un subconjunto de $\mathbb{C}$. Decimos que f_n *converge uniformemente en compactos de* G a f si f_n converge uniformemente a f en cada compacto K contenido en G. Esto es, si para cada $\epsilon > 0$ y para todo $K \subset G$ compacto, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sup_{z\in K} |f_n(z) - f(z)| < \epsilon, \qquad \text{para cada } n \geq N.$$

Al igual que en la convergencia uniforme, la convergencia uniforme en compactos es estable en funciones continuas, esto es: *si f_n es una sucesión de funciones de variable compleja continuas en un conjunto abierto G de $\mathbb{C}$ que converge uniformemente en compactos a una función de variable compleja f en G, entonces f es continua en G.*

Es claro que la convergencia uniforme de funciones de variable compleja implica la convergencia uniforme en compactos y que la convergencia uniforme en compactos implica la convergencia puntual. Sin embargo, la convergencia puntual no basta para convergencia uniforme en compactos, veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo. Consideremos para cada $n \in \mathbb{N}$, la función $f_n(z) := (1 + |z|)^n$ definida en el disco unitario $\mathbb{D} := D(0, 1)$. La sucesión converge puntualmente a la función $f(0) = 1$ y $f(z) = 0$ para $0 < |z| < 1$. Como f no es continua en $\mathbb{D}$, la sucesión f_n no converge uniformemente en compactos en $\mathbb{D}$.

Además, la convergencia uniforme en compactos no basta para la convergencia uniforme, veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo. Consideremos para cada $n \in \mathbb{N}$ la función $f_n(z) = z^n$ definida sobre el disco unitario $\mathbb{D}$. Veamos la que sucesión f_n converge uniformemente en compactos a la función constante $f \equiv 0$. En efecto, sea $K subset \mathbb{D}$ compacto. Luego, existe $r \in (0, 1)$ tal que $K \in D(0, r)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\sup_{z\in K} |f_n(z)| \leq \sup_{z\in D(0,r)} |f_n(z)| = r^n.$$

Por tanto, como $r < 1$, tenemos que $\lim_{n\to\infty} \sup_{z\in K} |f_n(z)| = 0$. Sin embargo, para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $\sup_{z\in\mathbb{D}} |f_n(z)| = 1$, la sucesión f_n no converge uniformemente a 0 en $\mathbb{D}$.

De esta manera tenemos el siguiente diagrama de convergencias.

Conv. uniforme $\Longrightarrow$ Conv. uniforme en compactos $\Longrightarrow$ Conv. puntual

El siguiente ejemplo muestra que la correspondiente sucesión de derivadas de una sucesión de funciones holomorfas que converge uniformemente a una función holomorfa en un conjunto no necesariamente converge uniformemente a la derivada de la función límite.

Ejemplo. Consideremos para cada $n \in \mathbb{N}$ la función $f_n(z) = \frac{z^{n+1}}{n+1}$ definida sobre el disco unitario $\mathbb{D}$. La sucesión f_n converge uniformemente a la función $f \equiv 0$. En efecto, tenemos, para cada $n \in \mathbb{N}$,xdz que $\sup_{z\in\mathbb{D}}|f_n(z)| \leq \frac{1}{n+1}$. Luego, $\lim_{n\to\infty} \sup_{z\in\mathbb{D}}|f_n(z)| = 0$.

Por otro lado, por el ejemplo anterior, tenemos que la correspondiente sucesión de derivadas $f_n'(z) = z^n$, con $z \in \mathbb{D}$, no converge uniformemente a $f' \equiv 0$ en $\mathbb{D}$, pero sí converge uniformemente en compactos a $f' \equiv 0$.

Como se observa en el ejemplo anterior, aunque tengamos estabilidad con respecto a la holomorfia con la convergencia uniforme para funciones holomorfas no se garantiza la convergencia uniforme de la sucesión de derivadas. Sin embargo, la convergencia uniforme en compactos nos garantiza la estabilidad con respecto a la holomorfia y su derivada. Veamos el siguiente resultado.

Teorema 1.6 (Convergencia de Weierstrass, [16]). *Sean G un dominio de $\mathbb{C}$ y f_n una sucesión de funciones holomorfas en G. Si f_n converge uniformemente en compactos de G a una función f, entonces f es holomorfa en G. Además, la sucesión $f_n^{(k)}$ converge a $f^{(k)}$ (derivada de orden k) uniformemente en compactos de G, para todo $k \in \mathbb{N}$.*

Por el Teorema 1.4, si f es una función holomorfa en $G \subset \mathbb{C}$, entonces f puede expresarse como una serie de potencias uniformemente convergente alrededor de un punto $z_0 \in G$. Es decir,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n. \tag{1.2}$$

La serie de la Ecuación (1.2) es llamada *serie de Taylor* o *expansión de Taylor* de f alrededor de z_0, la serie es única alrededor de z_0.

La *regla de la cadena* y el *Teorema de la función inversa* son de los resultados importantes en la teoría de las funciones holomorfas los cuales enunciamos a continuación.

Teorema 1.7 (Regla de la cadena, [10]). *Sean $f\colon G \to \mathbb{C}$ y $g\colon H \to \mathbb{C}$ funciones holomorfas en G y H, respectivamente, y supongamos que $f(G) \subseteq H$, entonces la función $g \circ f$ también es holomorfa y*

$$\frac{d}{dz}(g \circ f) = \frac{dg}{df} \cdot \frac{df}{dz}.$$

Teorema 1.8 (de la función inversa, [10]). *Sea $f\colon G \to \mathbb{C}$ una función holomorfa en G y supongamos que $f'(z_0) \neq 0$ para algún $z_0 \in G$. Enton-*

ces existe una vecindad U de z_0 y una vecindad V de $f(z_0)$ tal que $f\colon U \to V$ es invertible y su inversa f^{-1} es holomorfa y

$$\frac{d}{dw} f^{-1}(w) = \frac{1}{\frac{d}{dz} f(z)}; \qquad w = f(z) \text{ con } z \in U.$$

Este teorema nos permita enunciar la siguiente definición.

Definición 1.8. [10]**.** Sean U, V abiertos en $\mathbb{C}$. Una función holomorfa biyectiva $f\colon U \to V$ con inversa holomorfa es llamada *conforme o biholomorfismo*.

Teorema 1.9 (Aplicación Conforme de Riemann, [8])**.** *Si G un conjunto simplemente conexo y no vacío de $\mathbb{C}$ que no es $\mathbb{C}$, entonces existe una función conforme de G al disco unitario abierto $\mathbb{D}$.*

Teorema 1.10 (Liouville, [8])**.** *Sea $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función entera y acotada, entonces f es constante.*

Teorema 1.11 (Aplicación abierta, [8])**.** *Si f es una función holomorfa no constante en un dominio $G \subset \mathbb{C}$, entonces $f(G)$ es abierto.*

La idea de *Extensión Analítica* o *Continuación Analítica* de una función holomorfa consiste en extender el dominio de la función de tal manera que sea holomorfa en ese nuevo dominio. Una manera de definir a las Superficies de Riemann es por este método.

Teorema 1.12 (Principio de identidad, [10])**.** *Sean f y g dos funciones holomorfas en un dominio G. Si el conjunto $\{z \in G\colon\ f(z) = g(z)\}$ tiene puntos de acumulación. Entonces, $f = g$ en G.*

Colorario 1.12.1. [10]**.** *Sean G y H dominios de $\mathbb{C}$, $f\colon G \to \mathbb{C}$ y $g\colon H \to \mathbb{C}$ funciones holomorfas en G y H respectivamente. Supongamos que $G \cap H \neq \emptyset$ y $f = g$ en $G \cap H$. Definimos $h\colon G \cup H \to \mathbb{C}$ por*

$$h(z) := \begin{cases} f(z) & \text{si } z \in G, \\ g(z) & \text{si } z \in H. \end{cases}$$

Entonces h es holomorfa en $G \cup H$ y es la única función holomorfa sobre $G \cup H$ que es igual a f en G y a g en H. Decimos que h es una extension analítica *de f o de g.*

Teorema 1.13 (Principio de Monondromía, [10])**.** *Sean G un dominio simplemente conexo y $f\colon G \to \mathbb{C}$ una función holomorfa en una vecindad de z_0, donde z_0 es un valor fijo en G. Supongamos que f se puede extender analíticamente a lo largo de cualquier curva que una a z_0 a otro punto de $z \in G$. Entonces, se define una continuación analítica univaluada de f en G.*

Un *punto singular* o *singularidad* de una función $f\colon G \to \mathbb{C}$ es un punto $z_0 \in G$ donde la función f no es holomorfa.

Definición 1.9. [3]. Sea G un dominio en $\mathbb{C}$ y $z_0 \in \mathbb{C}$. Una función $f: G \to \mathbb{C}$ tiene *singularidad aislada* en z_0 si existe $R > 0$ tal f está definida y es holomorfa en el disco agujereado $D(z_0, R)\backslash\{z_0\}$.

Las series de Taylor nos permiten encontrar una expresión en series de potencias convergentes, alrededor de z_0, para $f(z)$ cuando f es holomorfa en todo un disco alrededor de z_0. Sin embargo, no se aplica a funciones como $\frac{1}{z}$ o $\frac{e^z}{z^2}$ alrededor de $z = 0$ porque éstas no son holomorfas en $z = 0$. Para este tipo de funciones existe otra expresión llamada *expansión de Laurent*. Veamos el siguiente resultado.

Teorema 1.14 (Expansión de Laurent, [10]). *Sean $r_1 \geq 0$, $r_2 > r_1$ y $z_0 \in \mathbb{C}$ y considere la región $A = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - z_0| < r_2\}$. Se admite que $r_1 = 0$ o $r_2 = \infty$ (o ambos). Sea f holomorfa en la región A. Entonces, podemos escribir*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n},$$

donde ambas series en el lado derecho de la ecuación, convergen absolutamente en A y uniformemente en cualquier conjunto de forma $B(z_0, \rho_1, \rho_2) = \{z \in \mathbb{C} : \rho_1 \leq |z - z_0| \leq \rho_2\}$ donde $r_1 < \rho_1 < \rho_2 < r_2$. Si γ es un círculo alrededor de z_0 con radio r, con $r_1 < r < r_2$, entonces los coeficientes están dados por:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

y

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(\zeta)(\zeta - z_0)^{n-1} d\zeta \qquad n = 1, 2, \ldots$$

La serie para f en la Ecuación (1.14), es llamada *serie de Laurent* o *expansión de Laurent* alrededor de z_0 en el anillo A. La parte $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty}$ se conoce como *parte analítica* de la serie de Laurent, y al resto se le conoce como *parte principal*.

Cualquier expansión convergente puntualmente de f de esta forma es igual a la expansión de Laurent; en otras palabras, la expansión de Laurent es única. Además, si z_0 es una singularidad aislada de f, entonces su expansión de Laurent es de la forma

$$f(z) = \cdots + \frac{b_n}{(z - z_0)^n} + \cdots + \frac{b_1}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z0) + \cdots + a_n(z - z_0)^n + \cdots \quad (1.3)$$

Definición 1.10. [3]. Sea z_0 una singularidad aislada de f y consideremos la expanción de Laurent de f dada por la Ecuación (1.3). Decimos que:

(a) z_0 es una *singularidad removible* si, y sólo si para cualquier $n \in \mathbb{N}$, $b_n = 0$.

(b) z_0 es un *polo* de orden m si, y sólo si $b_m \neq 0$ y $b_n = 0$ para cualquier $n < m$.

(c) z_0 es una *singularidad esencial* si, y sólo si $b_n \neq 0$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Hay otras maneras de determinar la clase de singularidad aislada de una función. Sea f una función holomorfa en un dominio G con una singularidad aislada en z_0.

(1) z_0 es una *singularidad removible* si se satisface alguna de las siguientes propiedades:

   (a) f es acotada en una $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$, para algún $r > 0$.

   (b) $\lim_{z \to z_0} f(z)$ existe.

   (c) $\lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = 0$.

(2) z_0 es un *polo de orden n* si podemos encontrar un $n \in \mathbb{N}$ tal que se satisfaga alguna de siguientes condiciones:

   (a) Existe una constante $M > 0$ tal que

$$|f(z)| \leq \frac{M}{|z - z_0|^n}.$$

   (b) $\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^n f(z) = c$, para algún $c \neq 0$.

   (c) $\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^{n+1} f(z) = 0$.

   (d) $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = +\infty$.

   Si $n = 1$ entonces z_0 es llamado *polo simple*.

(3) z_0 es una *singularidad esencial* de f si z_0 no es removible ni es polo, o bien, si se satisface alguna de las siguientes condiciones:

   (a) La expansión de Laurent de $f(z)$ contiene una infinidad de términos en su parte principal.

   (b) Existe una sucesión z_n convergente a z_0 tal que

$$\lim_{n \to \infty} (z - z_0)^m f(z_n) = 0, \qquad \text{para cada } m \in \mathbb{N}.$$

   (c) Existen $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ y dos sucesiones z_n, z'_n convergentes a z_0 tales que

$$\lim_{n \to \infty} f(z_n) = w_1 \quad \text{y} \quad \lim_{n \to \infty} f(z'_n) = w_2.$$

   (d) $\lim_{z \to z_0} f(z)$ no existe en $\mathbb{C}$.

Teorema 1.15 (De la Singularidad Aislada, [8]). *Si G un dominio en $\mathbb{C}$, $z_0 \in G$ y $f\colon G\backslash\{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorfa y acotada en $G\backslash\{z_0\}$, entonces z_0 es removible y existe $\widetilde{f}$ holomorfa en G tal que $\widetilde{f}_{\restriction G\backslash\{z_0\}} = f$ y $\widetilde{f}(z_0) = \lim_{z\to z_0} f(z)$.*

Definición 1.11. [8] **.** Una *función meromorfa* en un abierto G de $\mathbb{C}$ es una función $f\colon G\backslash P \to \mathbb{C}$ holomorfa sobre el complemento de un conjunto discreto P de G tal que para cada $p \in P$, $|f(z)| \to \infty$ cuando $z \to p$. Cada punto $p \in P$ es llamado polo de f. Denotamos al conjunto de funciones meromorfas por $\mathscr{M}(G)$.

Ejemplos.

(a) La función $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$ tiene polos en -1 y 1, entonces f es meromorfa en $\mathbb{C}\backslash\{-1,1\}$.

(b) La función $g(z) = \tan(z)$ tiene polos en $\frac{2k-1}{2}\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, entonces g es meromorfa en $\mathbb{C}\backslash\{\frac{2k-1}{2}\pi :\ k \in \mathbb{Z}\}$.

(c) La función $h(z) = \frac{e^z}{z^2}$ tiene un polo de orden 2 en 0, entonces h es meromorfa en $\mathbb{C}\backslash\{0\}$.

Para el caso de funciones con singularidad esencial aislada tenemos los siguientes ejemplos.

Ejemplos.

(a) La función $f(z) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{z^2+1}\right)$ tiene singularidades esenciales aisladas en -1 y 1.

(b) La función $g(z) = e^{\frac{1}{z^2+1}}$ tiene singularidades esenciales aisladas en -1 y 1.

(c) La función $h(z) = 2 + \frac{1}{z-1} e^{\frac{1}{z-1}}$ tiene una singularidad esencial aislada en 1.

Teorema 1.16 (Casorati-Weierstrass, [8]). *Si $f\colon G \to \mathbb{C}$ es una función con una singularidad esencial aislada en $z_0 \in G$, entonces para cualquier $r > 0$, se tiene que*

$$\overline{f(D(z_0,r)\backslash\{z_0\})} = \mathbb{C}.$$

Véase [10] y [8] para profundizar más sobre el concepto de singularidad aislada.

SECCIÓN 1.2
Superficies de Riemann

Recordemos que un espacio topológico $(X,\mathfrak{T})$ es un *espacio de Hausdorff* (T_2) si dados $x,y \in X$, con $x \neq y$, existen $U,V \in \mathfrak{T}$ tales que $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.

Sean $(X,\mathfrak{T}_X)$ y $(Y,\mathfrak{T}_Y)$ espacios topológicos y $f\colon X \to Y$ una función biyectiva. Decimos que f es un *homeomorfismo* entre los espacios topológicos X e Y si tanto f como su inversa son continuas. Se dice que los espacios topológicos X e Y son *homeomorfos* si existe un homeomorfismo entre ellos y denotamos $X \cong Y$.

Definición 1.12 (Carta compleja, [12])**.** Sea $(X,\mathfrak{T})$ un espacio topológico. Una *carta compleja* en X es homeomorfismo $z_\alpha\colon U_\alpha \to V_\alpha$ de un conjunto abierto $U_\alpha \subseteq X$ en un conjunto abierto $V_\alpha \subseteq \mathbb{C}$.

Ejemplos.

(a) Sean $U_\alpha = X := \mathbb{R}^2$, $V_\alpha = \mathbb{C}$ y $z_\alpha(x,y) = x + iy$, z_α es una carta compleja en $\mathbb{R}^2$.

(b) Consideremos a $U_\alpha = V_\alpha = \mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ el disco unitario en $\mathbb{C}$. Sea $z_\alpha = \mathrm{id}_{\mathbb{D}}\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ la función identidad en $\mathbb{D}$, $\mathrm{id}_{\mathbb{D}}$ es una carta compleja en $\mathbb{D}$.

(c) Sea
$$\mathbb{S}^2 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Definimos $z_N\colon U_N \to \mathbb{C}$ y $z_S\colon U_S \to \mathbb{C}$ como:
$$z_N(u,v,w) := \frac{u+iv}{1-w}.$$
y
$$z_S(u,v,w) := \frac{u-iv}{1+w},$$
donde $U_N := \mathbb{S}^2 \setminus \{(0,0,1)\}$ y $U_S := \mathbb{S}^2 \setminus \{(0,0,-1)\}$. Obsérvese que z_N es la proyección estereográfica sin incluir el polo norte de la esfera y z_S es la proyección estereográfica sin incluir el polo sur de la esfera, esta última se obtiene componiendo a z_N con una rotación R. Como z_N es un homeomorfismo y R es lineal biyectivo, entonces R es homeomorfismo. Se sigue que z_S es un homeomorfismo. Así, z_N y z_S son cartas complejas en $\mathbb{S}^2$.

Definición 1.13 (Atlas holomorfo, [17])**.** Sea X un espacio topológico de Hausdorff, definimos

(a) Dos cartas complejas $z_\alpha\colon U_\alpha \to V_\alpha$ y $z_\beta\colon U_\beta \to V_\beta$ en X son *holomorficamente compatibles* (o simplemente *compatibles*) si las transformaciones de coordenadas

$$z_\alpha \circ z_\beta^{-1}\colon z_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to z_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \tag{1.1}$$

y

$$z_\beta \circ z_\alpha^{-1}\colon z_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to z_\beta[U_\alpha \cap U_\beta] \tag{1.2}$$

son holomorfas; estos es, la transformación $z_\alpha \circ z_\beta^{-1}$ es conforme, véase Figura 1.1. A éste mapeo se le llama *mapeo de transición* o *cambio de coordenadas*.

(b) Una familia de cartas complejas compatibles

$$\mathcal{H} = \{z_\alpha\colon U_\alpha \to V_\alpha\}_{\alpha\in A}$$

que cubren a X (i.e. que satisface $X = \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha$) es llamado *atlas complejo* o *atlas holomorfo* en X.

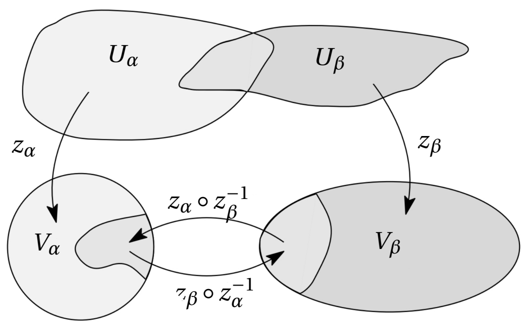

Figura 1.1: Cartas complejas holomorficamente compatibles.

Para demostrar que dos cartas son compatibles basta mostrar que la primea composición $z_\beta \circ z_\alpha^{-1}$ es holomorfa con derivada no nula en $z_\alpha(U_1 \cap U_2)$ y aplicar el Teorema de la Función Inversa se obtiene que la segunda composición también es holomorfa.

Ejemplos.

(a) Consideremos a $X = \mathbb{C}$ y $z_\alpha = \mathrm{id}_\mathbb{C}$ la función identidad en $\mathbb{C}$. Entonces, $\{\mathrm{id}_\mathbb{C}\}$ es un atlas holomorfo en $\mathbb{C}$.

(b) Consideremos a $X = \mathbb{S}^2$ con la familia de cartas complejas $\mathcal{H} = \{z_N, z_S\}$ y sea $z = x + iy \in \mathbb{C}$, por ser z_N la proyección estereográfica, tenemos que

$$z_N^{-1}(z) = \left(\frac{z+\overline{z}}{|z|^2+1}, \frac{-i(z+\overline{z})}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right)$$

Luego,

$$z_S \circ z_N^{-1}(z) = \frac{1}{z}$$

para cada $z \in z_N(U_N \cap U_S) = \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Como $z_s \circ z_N^{-1}$ es holomorfa y con derivada no nula en $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, por el teorema de la función inversa para funciones holomorfas, $z_N \circ z_S^{-1}$ existe y es holomorfa en $z_S(U_N \cap U_S)$. Por lo tanto, $\{z_N, z_S\}$ es un atlas holomorfo en X.

(c) Si $\mathcal{H} = \{z_\alpha \colon U_\alpha \to V_\alpha\}$ es un atlas complejo en un espacio de Hausdorff X y sea $Y \subseteq X$ abierto, entonces la colección de *subcartas* $\mathcal{H}_Y := \{z_{\alpha\restriction_Y} \colon Y \cap U_\alpha \to z_\alpha(Y \cap U_i)\}$ es un atlas en Y. En efecto, es claro que para cada $\alpha \in A$, $z_{\alpha\restriction_Y}$ es homeomorfismo y $Y = \bigcup_{\alpha\in A}(Y \cap U_\alpha)$. Luego, sean $z_{\alpha\restriction_Y}$ y $z_{\beta_{\restriction_Y}}$ dos cartas holomorfas de Y. Tenemos que $z_{\alpha\restriction_Y} = z_\alpha \circ \mathrm{id}_Y$ y $z_{\beta_{\restriction_Y}} = z_\beta \circ \mathrm{id}_Y$, donde $\mathrm{id}_Y \colon Y \to Y$ es la función identidad en Y. Luego, si $z \in z_\beta(Y \cap U_1 \cap U_2)$, entonces

$$z_{\alpha\restriction_Y} \circ z_{\beta_{\restriction_Y}}^{-1}(z) = (z_\alpha \circ \mathrm{id}_Y) \circ (\mathrm{id}_Y \circ z_\beta^{-1})(z) = z_\alpha \circ z_\beta^{-1}(z)$$

De donde, $z_{\alpha\restriction_Y} \circ z_{\beta_{\restriction_Y}}^{-1}$ es holomorfa en $z_\beta(Y \cap U_\alpha \cap U_\beta)$. Análogamente, tenemos que $z_{\beta_{\restriction_Y}} \circ z_{\alpha_{\restriction_Y}}^{-1}$ es holomorfa en $z_\alpha(Y \cap U_1 \cap U_2)$.

Puede suceder que dos atlas diferentes definen las mismas nociones del análisis complejo, es decir, que localmente definen la misma estructura compleja. Para que esto ocurra, cada carta compleja de un atlas es compatible con todas las cartas del otro. Esto nos permite definir una relación de equivalencia en atlas.

Definición 1.14. [12]**.** Dos atlas holomorfos $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ de X son equivalentes si su unión es también un atlas holomorfo.

Si consideramos la relación de inclusión de conjuntos tendremos una relación de orden para la familia de atlases holomorfos de X. De acuerdo con el Lemma de Zorn, todo atlas holomorfo está contenido en un único atlas holomorfo maximal. Así, podemos concluir que dos atlases holomorfos son equivalentes si están contenidos en el mismo atlas holomorfo maximal.

Definición 1.15.[12]**.** Una *estructura compleja* en X es un atlas complejo maximal en X, o equivalentemente, un clase de equivalencia de atlases complejos en X.

Nótese que todo atlas complejo esta determinado por una única estructura compleja.

Definición 1.16. [13] **.** Sea X un espacio de Hausdorff y R una estructura compleja en X. El par (X,R), el cual es solo denotado por X, es llamado *variedad compleja*.

Definición 1.17 (Superficie de Riemann,[12])**.** Una *superficie de Riemann* X es un espacio de Hausdorff conexo equipado con una estructura compleja R.

Equivalente, una Superficie de Riemann es una variedad compleja 1-dimensional conexa. Si una superficie de Riemann no es compacta (X un espacio compacto), es llamada *superficie de Riemann abierta*.

Ejemplos. (a) $\mathbb{C} := \mathbb{R}^2$ con $\mathcal{H} := \{z_\alpha\colon (x,y) \mapsto x+iy\}$ es una superficie de Riemann abierta. A esta superficie de Riemann se le conoce como *plano afín* o *plano complejo*.

(b) $\widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{S}^2$ con $\mathcal{H} := \{z_N, z_S\}$ es una superficie de Riemann compacta.

(c) $\mathbb{D}$ el disco unitario en $\mathbb{C}$ y $\mathcal{H} := \{\mathrm{id}_{\mathbb{D}}\}$ es una superficie de Riemann compacta.

(d) Cualquier abierto conexo de una superficie de Riemann es una superficie de Riemann.

(e) (Toro complejo) Sean $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$, $\mathbb{R}$-independientes. Un lattice en $\mathbb{C}$ es un subgrupo de la forma

$$\Gamma := \mathbb{Z}w_1 + \mathbb{Z}w_2 = \{nw_1 + mw_2 : \ n, m \in \mathbb{Z}\}.$$

El conjunto Γ es un subgrupo discreto aditivo con la aditividad de $\mathbb{C}$, el espacio cociente

$$X = X_\Gamma := {}^{\mathbb{C}}\!/_{\Gamma}$$

está bien definido. Denotemos a la proyección canónica dada por $\pi\colon \mathbb{C} \to X$. Esto es, X es el conjunto de clases de equivalencias $z+\Gamma$ y π asigna a cada complejo su respectiva clase de equivalencias.

Sean $\alpha \in A$ y U_α es un conjunto abierto en $\mathbb{C}$ tal que $U_\alpha \cap (U_\alpha + w) = \emptyset$ para cada $w \in \Gamma\backslash\{0\}$, se tiene que π mapea homeomorficamente a U_α en $V_\alpha = \pi(U_\alpha) \subset X$ abierto. Definimos

$$z_\alpha := \pi^{-1}_{\restriction U_\alpha} : V_\alpha \to U_\alpha.$$

Los mapeos z_α son homeomorfismos y la colección $\mathcal{H} := \{z_\alpha\}_{\alpha\in A}$ es un atlas holomorfo sobre X.

(f) (Gráficas de funciones holomorfas). Sea G un conjunto abierto de $\mathbb{C}$ y $f\colon G \to \mathbb{C}$ una función holomorfa en G. Definimos

$$S_f := \{(z,w) \in G \times \mathbb{C} : \ w = f(z)\} \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}.$$

Equipamos a S_f con la topología relativa: $U \subseteq S_f$ es abierto si, y sólo si hay un subconjunto abierto V de $G \times \mathbb{C}$ tal que $U = V \cap S_f$.

Denotamos por $p_1\colon \mathbb{C}\times\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la proyección $p_1(z,w) = z$. Definimos las cartas complejas de S_f como sigue: Si $V_\alpha \subseteq G \times \mathbb{C}$ es abierto y $U_\alpha = V_\alpha \cap S_f$, entonces $z_\alpha\colon U_\alpha \to \mathbb{C}$ es definida por la restricción de p_1 a U. Definimos $\mathcal{H}$ como el conjunto de todos los mapeos z_α. Asi, S_f con $\mathcal{H}$ es una superficie de Riemann.

A esta Superficie de Riemann se le llama *gráfica* de f. Esta definición se puede extender a $\mathbb{C}^n$, véase [17].

Los conceptos de superficie de Riemann y 2-variedad topológica están estrechamente relacionados. De hecho, la definición de superficie de Riemann implica que la superficie es una 2-variedad topológica, es decir, es un espacio topológico localmente homeomorfo a un espacio euclidiano de dimensión 2. Esto significa que cerca de cada punto en la superficie, existe un entorno que es homeomorfo a un disco en $\mathbb{R}^2$.

En el caso de las variedades la propiedad de conexidad y la conexidad poligonal son conceptos equivalentes, por lo tanto, toda superficie de Riemann es un espacio poligonalmente conexo. Es importante destacar que las funciones holomorfas entre subconjuntos del plano complejo preservan la orientación en el plano, lo que implica que localmente los ángulos son preservados por estas funciones. En consecuencia, las nociones de sentido “horario” y “antihorario” en círculos pequeños se preservan.

En una superficie de Riemann, la orientación se puede entender como la consistencia local de la elección del sentido horario en el plano. Al inducir una orientación local en cada punto de la superficie de Riemann mediante la “pull back” de la orientación a través de alguna carta compleja que contenga ese punto, esta orientación está bien definida e independiente de la elección de la carta compleja. Además, esta orientación local induce una orientación global en la superficie de Riemann, por lo que todas las superficies de Riemann son orientables (véase [17]).

El número de agujeros que tenga la superficie, conocido como *género* g, determina su topología. Si $g = 0$, la superficie no tiene agujeros y es topológicamente equivalente a la esfera. Si $g = 1$, la superficie tiene un agujero y es topológicamente equivalente a $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

SECCIÓN 1.3 Funciones holomorfas entre superficies de Riemann

En este apartado estudiaremos el concepto de función holomorfa entre superficies de Riemann y sus propiedades. Para definir este concepto, seguiremos el mismo enfoque del concepto de diferenciabilidad de superficies topológicas en geometría diferencial. Las definiciones y resultados de esta sección pueden revisarse en y [17], [11], [12] y [13] .

Definición 1.18. [12]**.** Sean X, Y superficies de Riemann, $p \in X$ un punto y $f\colon X \to Y$ una función. Decimos que f es *holomorfa* en p si existen dos cartas $z_\alpha\colon U_\alpha \to V_\alpha$ y $w_\alpha\colon U'_\alpha \to V'_\alpha$, donde $V_\alpha, V'_\alpha \subset \mathbb{C}$ abiertos, $U_\alpha \subset X$ abierto con $p \in U_\alpha$ y $U'_\alpha \subset Y$ abierto con $f(p) \in U'_\alpha$, tales que $w_\alpha \circ f \circ z_\alpha^{-1}\colon V_\alpha \to V'_\alpha$ es holomorfa en $z_\alpha(p)$. Decimos que f es holomorfa en X si lo es en cada punto de X.

En otras palabras un función entre superficies de Riemann es holomorfa si lo es al componer con cartas, véase la Figura 1.2.

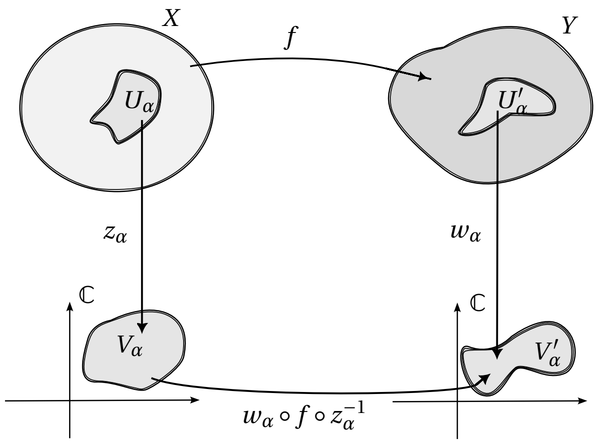

Figura 1.2: Esquema de una función holomorfa entre superficies de Riemann.

A continuación se enuncian ejemplos de funciones holomorfas entre superficies de Riemann.

Ejemplos.

(a) Toda carta compleja es holomorfa en su dominio.

(b) En particular, si $X = G$ un dominio en $Y = \mathbb{C}$ y $f\colon X \to Y$ una función holomorfa en X, en el sentido de la Teoría de la Variable Compleja Clásica, f es holomorfa en el sentido de la Definición 1.18.

(c) Sean X una superficie de Riemann, $Y = \mathbb{C}$ y $f, g\colon X \to Y$ son funciones holomorfas. Entonces:

  (i) $f \pm g$ es holomorfa.

  (ii) fg es holomorfas.

  (iii) Sea $Z(g) := \{x \in X : g(x) = 0\}$ el conjunto de valores nulos de g. Si $X \setminus Z(g)$ es un dominio en X, entonces f/g es holomorfa donde g no se anula.

(d) Sean X, Y, Z superficies de Riemann, $f\colon X \to Y$ y $g\colon Y \to Z$ funciones holomorfas tales que $f[X] \subseteq Y$, entonces $g \circ f$ es una función holomorfa en X.

(e) Si $X = \mathbb{D}, Y = \mathbb{C}$ y $Z = \widehat{\mathbb{C}}$, existe una inclusión natural $X \to Y \to Z$. Cada una de ellas es holomorfa. Del Principio del Módulo Máximo se tiene que cualquier función holomorfa $f\colon Z \to Y$ es constante. También, del Teorema de Liouville, ocurre que toda función holomorfa $g\colon Y \to X$ debe ser constante.

(f) Sea $X := \widehat{\mathbb{C}}$ y $f\colon X \to X$ una función. Para que f sea holomorfa en ∞ consideramos el diagrama de la Figura 1.3. Vía proyección estereográfica $\widetilde{z_N}\colon \mathbb{S}^2 \to \widehat{\mathbb{C}}$, tenemos que $\mathbb{S}^2$ y $\widehat{\mathbb{C}}$ son homeomorfas.

$$\begin{tikzcd}
\widehat{\mathbb{C}} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\widetilde{z_N}^{-1}"'] & \widehat{\mathbb{C}} \\
\mathbb{S}^2 \arrow[d, "z_S"'] & \\
\mathbb{C} \arrow[uur, "f \circ g"'] \arrow[uu, bend left=60, "g"] &
\end{tikzcd}$$

Figura 1.3: Diagrama de extensión.

Tenemos que el cambio de coordenadas $g(z) = \widetilde{z_N} \circ z_S^{-1}(z) = 1/z$ para cada $z \neq 0$ y $g(0) = \infty$. Si $f(\infty) \neq \infty$, basta con ver que la función

$f \circ g$ es holomorfa en 0. En caso contrario, basta con verificar que la función $\frac{1}{f \circ g}$ es holomorfa en 0.

En [12] una función f entre superficies de Riemann X e Y es holomorfa en un punto $p \in X$ si, y sólo si para cualquiera par de cartas $z_\alpha \colon U_\alpha \to V_\alpha$ y $w_\alpha \colon U'_\alpha \to V'_\alpha$ con $p \in U_\alpha, f(p) \in U'_\alpha$ tales que $w_\alpha \circ f \circ z_\alpha^{-1} \colon V_\alpha \to V'_\alpha$ es holomorfa en $z_\alpha(p)$. Esto significa que la definición no depende del cambio de coordenadas y que no encontraremos puntos en donde la función sea holomorfa en una carta pero en otras sean singularidades asiladas.

Por el Teorema de Monondromia, podemos construir una función holomorfa univaluada donde existan cartas compatibles y no existan problemas en la frontera donde estas se intersecan.

Del mismo modo que en el caso de las funciones holomorfas de Variable Compleja, las funciones holomorfas entre superficies de Riemann satisfacen la siguiente propiedad:

Teorema 1.17. *Sean X, Y superficies de Riemann y $f \colon X \to Y$ una función holomorfa en X. Entonces, f es continua en X.*

La prueba de este resultado se reduce a utilizar la propiedad de funciones holomorfas de Variable Compleja, porque de acuerdo con la Definición 1.18 podemos llevar a cartas, salvo cambio de coordenadas. A continuación, veamos que las funciones holomorfas satisfacen algunos resultados importantes de la funciones holomorfas de la Teoría de Variable Compleja.

Teorema 1.18 (Principio de identidad, [13])**.** *Sean X, Y superficies de Riemann y $f, g \colon X \to Y$ dos funciones holomorfas. Si el conjunto de puntos donde f y g coinciden tiene puntos de acumulación, entonces f y g coinciden en todo X.*

Recordemos que dados dos espacios topológicos X, Y, una función continua $f \colon X \to Y$ es abierta si manda conjunto abiertos de X en abiertos de Y. A continuación, tenemos uno de los resultados importantes de la Variable Compleja para funciones holomorfas entre superficies de Riemann.

Teorema 1.19 (Aplicación abierta, [12])**.** *Sean X, Y superficies de Riemann y $f \colon X \to Y$ una función holomorfa no constante, entonces la imagen $f(X)$ es abierto en Y.*

En particular, sean X una Superficie de Riemann, $Y = \mathbb{C}$ y $W \subseteq X$ un dominio. Definimos el conjunto de funciones holomorfas de W en $\mathbb{C}$, como:

$$\mathcal{H}_X(W) := \{f \colon W \to \mathbb{C} \text{ es holomorfa}\}.$$

Cuando $W = X$, escribiremos $\mathcal{H}(X)$.

Sea X es una superficie Riemann y $f\colon X \to \mathbb{C}$ una función, como $\mathbb{C}$ con la métrica euclidiana es un espacio métrico, decimos que f es acotada si, y sólo si, existe $M > 0$ tal que para cada $x \in X$, $|f(x)| \leq M$.

Teorema 1.20 (De la singularidad aislada, [13])**.** *Sean X superficies de Riemann, W un dominio de X, $p \in W$ y $f\colon W \to \mathbb{C}$ holomorfa en $W \backslash \{p\}$. Si f es acotada en un entorno de p, entonces existe $\widetilde{f}$ holomorfa en W tal que $\widetilde{f}_{\upharpoonright W} = f$.*

Teorema 1.21 (Principio del Módulo Máximo, [13])**.** *Sean X una superficie de Riemann y $f \in \mathcal{H}(X)$ y $|f|$ tiene un máximo local en algún punto $p \in X$, entonces f es constante. En particular, si X es compacto, entonces toda función holomorfa en X es constante.*

Proposición 1.2.[17]**.** *Si X, Y son superficies de Riemann, con X compacto, y $f\colon X \to Y$ una función holomorfa no constante, entonces Y es compacto y f es sobreyectiva.*

Demostración. Por ser f una función holomorfa no constante, del Teorema de la Aplicación Abierta, $f(X)$ es un abierto en Y. Luego, como f es continua y X es compacto, $f(X)$ es cerrado en Y (véase Proposición A.7). Se sigue que $f(X)$ es un conjunto cerrado-abierto en Y. Luego, como Y es conexo, tenemos que $f(X) = Y$. Por último, como Y es Hausdorff, tenemos que Y es compacto véase Proposición A.5. ■

Definición 1.19.[17]**.** Sean X una superficie de Riemann y $p \in X$.

(a) Una *vecindad agujereada* es el conjunto $U \backslash \{p\}$ de X, donde U es una vecindad de p en X.

(b) Una función $f\colon X \to \mathbb{C}$ tiene una *singularidad* en p si f no es holomorfa en p.

(c) Una función $f\colon X \to \mathbb{C}$ tiene una *singularidad asilada* en $p \in X$, si existe una vecindad U de p tal que f es bien definida y holomorfa en la vecindad agujereada $U \backslash \{p\}$

Observemos por Definición 1.19 que la definición de singularidad aislada para funciones de una variable compleja se extienden a funciones sobre superficies de Riemann como se enuncia a continuación.

Definición 1.20.[17]**.** Sean X superficie de Riemann y $f\colon U \backslash \{p\}\mathbb{C}$ una función holomorfa, con $p \in X$.

(a) Decimos que f tiene una *singularidad removible* en p si, y solo si, existe una carta $z_\alpha\colon U_\alpha \to V_\alpha$ tal que $f \circ z_\alpha^{-1}$ tiene una singularidad removible en $z_\alpha(p)$.

(b) Decimos que f tiene un *polo de orden* n en p si, y solo si, existe una carta $z_\alpha\colon U_\alpha \to V_\alpha$ tal que $f \circ z_\alpha^{-1}$ tiene un polo de orden n en $z_\alpha(p)$.

(c) Decimos que f tiene una *singularidad esencial* en p si, y solo si, existe una carta $z_\alpha\colon U_\alpha \to V_\alpha$ tal que $f \circ z_\alpha^{-1}$ tiene una singularidad esencial en $z_\alpha(p)$.

Ejemplo. Sea $X := \widehat{\mathbb{C}}$, una función $f\colon \widehat{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ tiene singularidad aislada en ∞ si, y sólo si, $f \circ g$ tiene una singularidad aislada en 0, donde $g(z) = \widetilde{z_N} \circ z_S^{-1}(z) = 1/z$ para cada $z \neq 0$ y $g(0) = \infty$, véase diagrama de la Figura 1.3. Podemos decir, que f tiene una singularidad aislada en ∞ si la función $f(1/z)$ tiene singulaidad aislada en 0. El tipo de sigularidad aislada de f depende del tipo de sigularidad que tenga $f(1/z)$.

Teorema 1.22.[12]**.** *Sean X una superficie de Riemann y $f\colon U\backslash\{p\} \to \mathbb{C}$ una función compleja holomorfa, con $p \in X$. Entonces,:*

(a) Si $|f|$ es acotada en una vecindad de p, entonces f tiene una singularidad removible en p. Más aún, existe una extensión analítica de f.

(b) Si $|f(x)|$ se aproxima a ∞ cuando $x \to p$, entonces f tiene un polo en p.

(c) Si $|f(x)|$ no tiene limite cuando $x \to p$, entonces f tiene un singularidad esencial en p.

También podemos clasificar a las singularidades utilizando una versión de la serie de Laurent mediante cartas, véase [12].

Definición 1.21.[12]**.** Una *función meromorfa* en un dominio W de una superficie de Riemann X es una función $f\colon W\backslash P \to \widehat{\mathbb{C}}$ sobre el complemento de un conjunto discreto P de W tal que para cada $p \in P$, $|f(x)| \to \infty$ cuando $x \to p$. Cada punto $p \in P$ es llamado polo de f. Denotamos al conjunto de funciones meromorfas por $\mathscr{M}(W)$.

SECCIÓN 1.4 Teorema de Uniformización

El Teorema de Uniformización es un importante resultado que permite clasificar las superficies de Riemann simplemente conexas en tres tipos conocidos: el plano complejo $\mathbb{C}$, la esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$ y el disco unitario $\mathbb{D}$. Este resultado es una extensión del Teorema del Mapeo de Riemann y tiene importantes consecuencias para el estudio y clasificación de superficies de Riemann más generales.

Para una comprensión más detallada, se recomienda al lector consultar trabajos de [17], [11] y [18].

Definición 1.22. [13] **.** Sean X, Y dos superficies de Riemann y $f\colon X \to Y$ una función holomorfa biyectiva, si f tiene inversa holomorfa decimos que f es *conforme*.

Si existe una función conforme entre superficies de Riemann X e Y, decimos que X e Y son *superficies conformes*, y denotamos, salvo se diga lo contrario, por $X \cong Y$.

La Definición 1.22 es equivalente a la definición de difeomorfismos para variedades complejas. Además, podemos definir una relación de equivalencia a traves de la conformidad entre superficies de Riemann. Clasificando las superficies de Riemann en algunas conocidas.

Es fácil ver que la esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$ no es conformemente equivalente al plano $\mathbb{C}$ o al disco unitario $\mathbb{D}$, porque $\widehat{\mathbb{C}}$ es compacto y toda función continua manda compactos en compactos, pero $\mathbb{C}$ y $\mathbb{D}$ no son compactos. El argumento para que el plano y el disco unitario no son conformes nos lo da el Teorema de Liouville, ya que si tenemos un mapeo holomorfo manda el plano complejo al disco unitario, es necesariamente constante por que la función es acotada por 1. Lo que significa que no puede existir una biyección.

Recordemos que un espacio topológico X es *simplemente conexo* si, y sólo si es conexo por caminos (poligonalmente conexo) y cualesquiera dos caminos f y g con los mismos puntos inicial y final son homotópicas. Esto es, existe una función continua h que toma $X \times [0,1]$ en X y con la siguiente propiedad: para cada $x \in X$, $h(x,0) = f(x)$ y $h(x,1) = g(x)$.

De manera informal, podemos pensar a los espacios simplemente conexos como aquellos donde cualquier curva cerrada la podemos comprimir a un punto sin salir del espacio. Otra manera de definirlo es mediante el grupo fundamental, decimos que un espacio topológico es simplemente conexo si el grupo fundamental asociado a este espacio es el grupo conformado por la identidad. Ejemplos de este tipo de espacios son el plano y la esfera de Riemann. El toro complejo no es un espacio simplemente conexo.

A continuación, enunciamos el Teorema de Uniformización.

Teorema 1.23 (Uniformización, [17])**.** *Sea X una Superficie de Riemann es simplemente conexa. Entonces, X es conforme equivalentemente a una de las siguientes:*

(a) El plano complejo $\mathbb{C}$.

(b) La esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$.

(c) El disco unitario $\mathbb{D}$.

En [11], [18] y [13] se demuestra una versión del Teorema de Uniformización donde se considera la cubierta universal de un espacio topológico.

2 Teorema de Montel y Teorema Grande de Picard

En este capítulo, enunciaremos los Teoremas de Montel y Grande de Picard para el caso de superficies de Riemann $\mathbb{C}$ y $\widehat{\mathbb{C}}$. Para enunciar el Teorema de Montel, que es un resultado de convergencia de funciones, primero estudiaremos el concepto de familia normal de funciones continuas, holomorfas y meromorfas. Luego, enunciaremos algunos resultados importantes de la Teoría de Familias Normales y el Criterio Fundamental de Normalidad para los casos de funciones holomorfas y meromorfas. Por último, enunciaremos el Teorema Grande de Picard y algunas consecuencias de este resultado para el caso de funciones trascendentes enteras y trascendentes meromorfas. Las pruebas de los resultados expuestos en este capítulo se pueden consultar en [3], [16]y [6].

SECCIÓN 2.1
Familias Normales

Sea G un dominio en $\mathbb{C}$ y f_n una sucesión de funciones holomorfas en G. Como se mencionó en la sección de preliminares, si f_n converge uniformemente en G a una función f, la sucesión de derivadas f'_n no necesariamente converge uniformemente a la derivada de la función límite f'. Sin embrago, por el Teorema de Convergencia de Weierstrass (véase Teorema 1.6), se tiene que la sucesión de derivadas converge a la derivada de la función. De este modo, la convergencia uniforme en compactos nos permite definir el concepto de familia normal.

2.1.1. Funciones continuas

Sea $\mathscr{C}(G,\mathbb{C})$ el espacio de funciones continuas de un dominio G a $\mathbb{C}$. Para dotar una métrica a $\mathscr{C}(G,\Omega)$, consideramos lo siguiente:

Si $G = \cup_{n=1}^{\infty} K_n$, donde cada K_n es compacto y $K_n \subseteq \operatorname{Int} K_{n+1}$, se define la métrica $\rho_n \colon \mathscr{C}(G,\mathbb{C}) \times \mathscr{C}(G,\mathbb{C}) \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ como:

$$\rho_n(f,g) := \sup_{z \in K_n} |f(z) - g(z)|, \tag{2.1}$$

donde $f, g \in \mathscr{C}(G,\mathbb{C})$. La función ρ_n está bien definida porque para cada $f, g \in \mathscr{C}(G,\mathbb{C})$ se cumple que $f(K_n)$ y $g(K_n)$ son compactos en $\mathbb{C}$ y, por tanto, son acotados. Así, el conjunto formado por las distancias $|f(z) - g(z)|$, para $z \in K_n$, es no vacío y acotado superiormente.

También, definimos $\rho \colon \mathscr{C}(G,\mathbb{C}) \times \mathscr{C}(G,\mathbb{C}) \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ como:

$$\rho(f,g) := \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{\rho_n(f,g)}{1 + \rho_n(f,g)}, \tag{2.2}$$

donde $f, g \in \mathscr{C}(G,\mathbb{C})$ y K_n es un compacto de G. Observemos que $t(1+t)^{-1} \leq 1$, para todo $t \geq 0$, entonces la serie en (2.2) es dominada por $\sum \left(\frac{1}{2}\right)^n$, y por tanto converge.

El siguiente resultado caracteriza a los conjuntos abiertos y la convergencia de sucesiones en $\mathscr{C}(G,\mathbb{C})$. Además, se obtiene que la convergencia de una sucesión en $(\mathscr{C}(G,\mathbb{C}), \rho)$ es equivalente a la convergencia uniforme en compactos de un abierto G.

Teorema 2.1. [3].

(a) Un conjunto $\mathscr{O} \subset \mathscr{C}(G,\mathbb{C})$ *es abierto si, y sólo si para cada* $f \in \mathscr{O}$, *existen un subconjunto compacto* K *de* G *y* $\delta > 0$ *tales que* $\{g : |f(z) - g(z)| < \delta, z \in K\} \subseteq \mathscr{O}$.

(b) Un sucesión f_n *en* $\mathscr{C}(G,\mathbb{C})$ *converge a* f *si, y sólo si* f_n *converge uniformemente en compactos a* f *en* G.

Como se mencionó en los preliminares de capítulo anterior, la convergencia uniforme en compactos preserva la continuidad de la función límite de una sucesión de funciones continuas. Más aún, se obtiene el siguiente resultado:

Proposición 2.1. [3]. $(\mathscr{C}(G,\mathbb{C}), \rho)$ *es un espacio métrico completo.*

Algunos autores nombran a la convergencia uniforme en compactos como *convergencia normal*. Definimos a las familias normales en $\mathscr{C}(G,\mathbb{C})$ como sigue.

Definición 2.1. [3]. Una familia de funciones $\mathcal{F}$ en $\mathscr{C}(G,\mathbb{C})$ es *normal* en G si toda sucesión en $\mathcal{F}$ contiene una subsucesión que converge uniformemente en compactos a una función f en G.

Recordemos que dado un espacio topológico$(X,\mathcal{T})$ y $K \subseteq X$, decimos que K es *secuencialmente compacto* si para una sucesión x_n en K, existe una subsucesión convergente a un punto de K. Además, en espacios métricos se cumple que un subconjunto K de un espacio métrico es compacto si, y sólo si es secuencialmente compacto. El siguiente resultado relaciona a las familias normales con la estructura de espacio métrico de $\mathscr{C}(G,\mathbb{C})$.

Proposición 2.2. [3]. *Una familia $\mathcal{F}$ en $\mathscr{C}(G,\mathbb{C})$ es normal en G si, y sólo si su cerradura $\overline{\mathcal{F}}$ es compacta en $\mathscr{C}(G,\mathbb{C})$.*

Una familia de funciones $\mathcal{F}$ en $\mathscr{C}(G,\mathbb{C})$ sobre un conjunto abierto G de $\mathbb{C}$ está *puntualmente acotada* si para cada $z \in G$ el conjunto $\mathcal{F}(z) := \{f(z) : f \in \mathcal{F}\}$ está acotado.

Una familia de funciones continuas $\mathcal{F}$ sobre un conjunto abierto G de $\mathbb{C}$ es *puntualmente equicontinua* si para cada $z_0 \in G$ y para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $|z - z_0| < \delta$, entonces $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$ para toda $f \in \mathcal{F}$.

Una familia de funciones $\mathcal{F}$ es *equicontinua* sobre en un subconjunto E de $G \subset \mathbb{C}$ si para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para cada $z_1, z_2 \in E$ y $|z_1 - z_2| < \delta$, entonces $|f(z_1) - f(z_2)| < \epsilon$ para toda $f \in \mathcal{F}$.

Proposición 2.3. [3]. *Una familia $\mathcal{F}$ en $\mathscr{C}(G,\mathbb{C})$ puntualmente equicontinua en G es equicontinua en compactos K de G.*

Teorema 2.2 (Arzelà-Ascoli, [3]). *Una familia de funciones $\mathcal{F}$ en $\mathscr{C}(G,\mathbb{C})$ es normal en G si, y sólo si es puntualmente acotada y es puntualmente continua en G.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{F}$ es normal. Obsérvese que para cada $z_0 \in G$ la función $\mathscr{C}(G,\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ definida por $f \mapsto f(z_0)$ es una función continua. Como $\overline{\mathcal{F}}$ es compacto en $\mathscr{C}(G,\mathbb{C})$, tenemos que el conjunto $\overline{\mathcal{F}(z_0)}$ es compacto en $\mathbb{C}$.

Por otro lado, sea $z_0 \in G$ un punto fijo y sea $\epsilon > 0$. Elegimos $R > 0$ tal que $K := \overline{D(z_0,R)} \subset G$, entonces K es compacto. Luego, la familia $\{U(f,K,\frac{\epsilon}{3}) : f \in \mathcal{F}\}$, donde $U(f,K,r) := \{g \in \mathscr{C}(G,\mathbb{C}) : p_K(g-f) < r\}$, con $p_K = \text{máx}\{|f(z)| : z \in K\}$, es una cubierta de $\overline{\mathcal{F}}$. Entonces, existen $f_1,\ldots,f_n \in \mathcal{F}$ tales que $\overline{\mathcal{F}} \subset \cup_{k=1}^{n} U(f_k,K,\frac{\epsilon}{3})$.

Como cada f_k, con $1 < k < n$, es continua para cada k, existe $0 < \delta_k < \rho$ tal que $|z - z_0| < \delta_k$, entonces $|f_k(z) - f_k(z_0)| < \epsilon/3$.

Elegimos $\delta := \text{mín}\{\delta_1,\ldots,\delta_n\}$. Si $f \in \mathcal{F}$, para $|z - z_0| < \delta$ y k es elegida tal que $f \in U(f_k,K,\frac{\epsilon}{3})$, entonces

$$|f(z) - f(z_0)| \leq |f(z) - f_k(z)| + |f_k(z) - f_k(z_0)| + |f_k(z_0) - f(z_0)| < \epsilon,$$

es decir, $\mathcal{F}$ es puntualmente continua.

Supongamos que $\mathcal{F}$ es puntualmente acotada y puntualmente equicontinua. Sea z_n una sucesión de puntos en G con parte real racional. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea

$$X_n := \overline{\{f(z_n) : f \in \mathcal{F}\}} \subset \mathbb{C}.$$

Entonces X_n es un subespacio métrico de $\mathbb{C}$. Luego, $X := \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ es un espacio métrico compacto. Para cada f in $\mathcal{F}$ definimos $\widetilde{f}$ en X por

$$\widetilde{f} := \{f(z_1), f(z_2), \ldots\}.$$

Sea f_k una sucesión de $\mathcal{F}$, entonces $\widetilde{f_k}$ es una sucesión en X. Luego, existe $\zeta \in X$ tal que $\widetilde{f_k} \to \zeta$. Tenemos que

$$\lim_{k\to\infty} f_k(z_n) = \{w_n\},$$

donde $\zeta = \{w_n\}$.

Sea K un compacto de G y sea $R > 0$ la distancia entre la frontera de G y K. Sea $K_1 := \{z : d(z,K) \leq R/2\}$, entonces K_1 es compacto y $K \subset \operatorname{Int} K_1 \subset K_1 \subset G$. Por ser $\mathcal{F}$ puntualmente equicontinua de G, entonces $\mathcal{F}$ es equicontinua en K_1. Sea $\delta > 0$ tal que $\delta < R/2$ y $|f(z) - f(z')| < \epsilon/2$, para cualquier $f \in \mathcal{F}$ donde $z, z' \in K$ tales que $|z - z'| < \delta$. Sea D la colección de puntos z_n que también son puntos en K_1.

Si $z \in K$ hay un z_n con $|z - z_n| < \delta$, pero $\delta < R/2$. Como la familia $\{D(w,\delta) : w \in D\}$ es una cubierta abierta de K. Elegimos $w_1, \ldots, w_n \in D$ tal que

$$K \subset \bigcup_{m=1}^{n} D(w_m, \delta).$$

Como $\lim_{k\to\infty} f_k(w_m)$ existe para cada $1 \leq m \leq n$, existe un entero N tal que para cada $j, k \leq N$

$$|f_k(w_m) - f_j(w_m)| < \frac{\epsilon}{3},$$

para cada $m = 1, \ldots, n$.

Para z arbitrario en K y w_i tal que $|w_i - z| < \delta$. Si k y j son suficientemente grandes, tenemos que

$$|f_k(z) - f_j(z)| \leq |f_k(z) - f_k(w_m)| + |(|f_k(w_m) - f_j(w_m)) + |f_j(w_i) - f_j(z)| < \epsilon.$$

De este modo, f_k es una sucesión de Cauchy en $\mathscr{C}(G,\mathbb{C})$, entonces existe $f \in \mathscr{C}(G,\mathbb{C})$ tal que $f_k \to f$. ■

La teoría desarrollada anteriormente se puede generalizar para el caso donde las funciones continuas tienen como codominio un espacio métrico completo (Ω, d), véase [3].

2.1.2. Funciones holomorfas

Denotemos por $\mathcal{H}(G)$ al conjunto de todas las funciones holomorfas de un dominio $G \subset \mathbb{C}$ a $\mathbb{C}$. Observemos que $\mathcal{H}(G) \subset \mathscr{C}(G, \mathbb{C})$ por lo que $\mathcal{H}(G)$ con la métrica heredada como subconjunto de $\mathscr{C}(G, \mathbb{C})$ es un subespacio métrico.

Por el Teorema de Convergencia de Weierstrass (Teorema 1.6), $\mathcal{H}(G)$ es un subespacio cerrado de $\mathscr{C}(G, \mathbb{C})$, y por lo tanto completo.

Definición 2.2. [16]. Una familia $\mathcal{F}$ en $\mathcal{H}(G)$ es *normal* en $G \subset \mathbb{C}$ si cada sucesión f_n de $\mathcal{F}$ contiene una subsucesión f_{n_k} que converge uniformemente a una función límite f en compactos de G o que converge uniformemente a ∞ en compactos de G.

Observación 2.1.

(a) La función límite f es una función holomorfa . Diremos que la sucesión f_n *diverge uniformemente en compactos* si f_n *converge uniformemente en compactos* a ∞ en G, denotamos $f_n \to \infty$. Esto es, para cada compacto K de G y constante $M > 0$, $|f_n(z)| > M$ para todo $z \in K$, para algún N (que depende de K y M) suficientemente grande. De acuerdo a esta definición, dada una sucesión f_n ambas alternativas pueden ocurrir.

(b) Para el determinar que una sucesión f_n diverja uniformemente en compactos en G tenemos la siguiente equivalencia: *cada sucesión de la forma* $\left\{\frac{1}{f_n}\right\}$ *contiene una subsucesión uniformemente convergente en compactos a la función* 0 *en* G.

(c) Como $\mathcal{H}(G)$ es un espacio completo la convergencia uniforme en compactos a ∞ de la definición debería omitirse; sin embargo, la definición de arriba nos permite una mejor comprensión del tema y una gran compatibilidad con la normalidad de familias de funciones meromorfas, que veremos más adelante.

Para ilustrar las idea de normalidad presentamos los siguientes ejemplos.

Ejemplos.

(a) Sean $L := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) < 0\}$, $R := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > 0\}$ y $\mathcal{F} := \{e^{nz} : n \in \mathbb{N}\}$. Demostraremos que la familia $\mathcal{F}$ es normal en L y R pero no en todo $\mathbb{C}$.

Prueba. En efecto, observemos que las sucesiones de los siguientes conjuntos

$$L_n := \left\{z \in \mathbb{C} : -(n+1) \leq \mathrm{Re}(z) \leq -\tfrac{1}{n+1}, |\mathrm{Im}(z)| \leq n\right\}$$

y

$$R_n := \left\{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{n+1} \leq \mathrm{Re}(z) \leq n+1, |\mathrm{Im}(z)| \leq n\right\}$$

son compactos encajados de L y R respectivamente.

Por un lado, para $\epsilon > 0$ y n, proponemos $N > \left|\frac{\log \epsilon}{\max_{z\in L_n} \mathrm{Re}(z)}\right|$, entonces para $m > N$ y $z \in L_n$ tenemos que:

$$\begin{aligned} m \max_{z\in L_n} \mathrm{Re}(z) < \log \epsilon &\implies m\,\mathrm{Re}(z) < \log \epsilon \\ &\implies e^{m\,\mathrm{Re}(z)} < \epsilon \\ &\implies |e^{mz}| < \epsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto, cada sucesión no trivial de $\mathcal{F}$ converge normalmente a 0 en L. Por ende, la familia $\mathcal{F}$ es normal en L.

Por otro lado, para $M > 0$ y n, proponemos a $N > \left|\frac{\log M}{\min_{z\in R_n} \mathrm{Re}(z)}\right|$, entonces se tiene que $|e^{mz}| > M$, para $m > N$ y $z \in R_n$. Es decir, la sucesión diverge en cada compacto de R. En consecuencia, toda sucesión no trivial es divergente en cada compacto de R. Esto es, la familia $\mathcal{F}$ es normal en R.

Para culminar la prueba, consideremos el conjunto compacto $K := \{\frac{i}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ en $\mathbb{C}$. Sea $M_0 = \frac{1}{2}$, para cada $m \in \mathbb{N}$, existe $z_m = \frac{i}{2m}$ tal que $|e^{\frac{i}{2m} m}| \geq M_0$. Es decir, la sucesión $\{e^{nz}\}$ no converge uniformemente en K. Esto es, que la familia $\mathcal{F}$ no es normal en $\mathbb{C}$. ■

(b) La familia $\mathcal{F} := \{z^n\}$ es normal en todo $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Tomamos en cuenta que dentro del disco unitario, la sucesión convergen normalmente a 0. Y por fuera converge normalmente a ∞.

Recordemos que para cada $z_0 \in \mathbb{C}$ todo disco abierto $D(z_0, r)$ es conexo. Decimos que una familia $\mathcal{F}$ es normal en $z_0 \in G$, donde G es un dominio en $\mathbb{C}$, si es normal en alguna vecindad $D(z_0, r)$ de z_0. De donde se establece que la normalidad es una propiedad local, veamos a continuación.

Afirmación 2.1. [16]**.** Una familia normal de funciones holomorfas $\mathcal{F}$ es normal en un dominio G si, y sólo si $\mathcal{F}$ es normal en cada punto de G.

Salvo que se diga lo contrario, estipularemos que una familia de funciones holomorfas $\mathcal{F}$ es normal en ∞ si la correspondiente familia $\mathcal{G} := \{g : g(z) = f(\frac{1}{z})\}$ es normal en $z = 0$. Por lo tanto, que $\mathcal{F}$ sea normal en ∞ significa que es normal en alguna vecindad de ∞, $U_p := \left\{z \in \mathbb{C} : |z| > p\right\}$, con $p > 0$. Así definimos una familia normal $\mathcal{F}$ en un dominio G en $\widehat{\mathbb{C}}$ que contiene a ∞.

2.1.3. Funciones meromorfas

Sea G un dominio en $\widehat{\mathbb{C}}$, una función $f : G \to \widehat{\mathbb{C}}$ es *meromorfa* en G si es analítica en G excepto en polos. Si $f(z) = \infty$, donde z es un polo de f en G, entonces f es continua.

El conjunto de funciones meromorfas es denotado por $\mathcal{M}(G)$ y es un subconjunto del espacio de funciones continuas $\mathscr{C}(G, \widehat{\mathbb{C}})$. Donde dotamos a $\widehat{\mathbb{C}}$ de la métrica *esférica* o *cordal* que está dada por:

$$\chi(z,w) := \begin{cases} \frac{2|z-w|}{\sqrt{1+|z|^2}\sqrt{1+|w|^2}} & \text{si } z, w \in \mathbb{C}; \\ \\ \frac{2}{1+|z^2|} & \text{si } z \in \mathbb{C}, w = \infty; \\ \\ 0 & \text{si } z = w = \infty. \end{cases} \tag{2.3}$$

Se puede probar para z y w no nulos que $\chi(z,w) = \chi\big(1/z, 1/w\big)$ y $\chi(z,0) = \chi(1/z, \infty)$.

Como se mencionó anteriormente, podemos construir el espacio de funciones continuas en G con codominio $\widehat{\mathbb{C}}$, denotado por $\mathscr{C}(G, \widehat{\mathbb{C}})$, que dotamos de la métrica ρ definida para el espacio $\mathscr{C}(G, \mathbb{C})$, cambiando la métrica euclidiana por la métrica esférica. $\mathscr{C}(G, \widehat{\mathbb{C}})$ tendrá las mismas propiedades que $\mathscr{C}(G, \mathbb{C})$, véase [3].

Para definir convergencia uniforme en compactos en el espacio $\mathscr{C}(G, \widehat{\mathbb{C}})$ sustituimos la métrica euclidiana en la Definición 1.7 por la métrica esférica.

Definición 2.3. Una sucesión de funciones f_n en $\mathscr{C}(G, \widehat{\mathbb{C}})$ converge uniformemente en compactos a f en un dominio G de $\widehat{\mathbb{C}}$, si para cada compacto $K \subset G$ y $\epsilon > 0$, existe un número positivo $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N$ implica que

$$\sup_{z \in K} \chi(f_n(z), f(z)) < \epsilon.$$

Sin embargo, a diferencia de las funciones holomorfas, las funciones meromorfas no forman un conjunto cerrado, pero al incluir ∞ sí lo es.

Teorema 2.3. [3]. *$\mathcal{M}(G) \cup \infty$ es un subespacio métrico completo de $(\mathscr{C}(G, \widehat{\mathbb{C}}), \rho)$.*

A continuación, definimos la normalidad para funciones meromorfas:

Definición 2.4. [16]. Una familia de funciones $\mathcal{F}$ en $\mathcal{M}(G)$ es *normal* en G si cada sucesión f_n de $\mathcal{F}$ contiene una subsucesión que converge uniformemente en compactos en $G \subset \widehat{\mathbb{C}}$.

La familia $\mathcal{F}$ es llamada normal en un punto $z_0 \in G$ si existe una vecindad U de z_0 tal que $\mathcal{F}$ es normal en U.

Observemos que si f_n son funciones holomorfas, entonces la función límite f es holomorfa o idénticamente a ∞, considerando la métrica esférica tenemos el siguiente resultado:

Proposición 2.4. [16]. *Una familia $\mathcal{F}$ de funciones holomorfas es normal en un dominio G de acuerdo a la Definición 2.2 si, y sólo si $\mathcal{F}$ es normal de acuerdo a la Definición 2.4.*

De este modo, como se demuestra [3], el conjunto $\mathcal{H}(G) \cup \{\infty\}$ es cerrado en $\mathscr{C}(G, \widehat{\mathbb{C}})$.

SECCIÓN 2.2 Teorema de Montel

En esta sección analizaremos algunos criterios de normalidad de funciones holomorfas y meromorfas. La teoría de familias normales desarrollada por Paul Montel (1876-1975) tiene un papel importante en el desarrollo de la Dinámica Holomorfa y en resultados relevantes del Análisis Complejo como los Teoremas de Picard.

Definición 2.5. [3]. Una familia $\mathcal{F}$ de $\mathcal{H}(G)$ es *localmente acotada* si para cada compacto K de $G \subset \mathbb{C}$, existe $M(K) > 0$ finito tal que para todo $f \in \mathcal{F}$ se tiene $|f(z)| \leq M(K)$, para toda $z \in K$, esto es, $\mathcal{F}$ es uniformemente acotado en K.

A esta clase de familias también se les conoce como familias *localmente uniformemente acotadas* en $G \subset \mathbb{C}$. Alternativamente $\mathcal{F}$ es una familia localmente acotada si, y sólo si existe un compacto K de G tal que $\sup_{z \in K}\{|f(z)| : f \in \mathcal{F}\}$ existe.

Proposición 2.5. [16]. *Toda familia localmente acotada $\mathcal{F}$ en $\mathcal{H}(G)$ es equicontinua en compactos.*

A continuación, enunciamos el Teorema de Montel.

Teorema 2.4 (Montel, [16]). *Una familia $\mathcal{F}$ en $\mathcal{H}(G)$ localmente acotada en G es normal en G.*

Demostración. Elegimos una subconjunto denso contable $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ en G. Sea f_n una sucesión cualesquiera en $\mathcal{F}$ y cosideremos la sucesión de números complejos $f_n(z_1)$. Por hipótesis, $|f_n(z_1)| < M$ para algún $M > 0$ y toda $n \in \mathbb{N}$. Por el Teorema de Bolzano-Weierstrass, esta sucesión de números complejos contiene una subsucesión convergente, digamos $f_{n_k}^{(1)}(z_1)$. Esta sucesión converge en z_1. De manera análoga, como en z_2 la sucesión $f_{n_k}^{(1)}(z_2)$ es acotada, podemos extraer la subsucesión $f_{n_k}^{(2)}(z_2)$ que es convergente en z_1 y z_2. De esta manera, podemos construir una subsucesiones $f_{n_k}^{(m)}(z_m)$ que se convergente en z_1, z_2, ..., z_m, para cada $m \in \mathbb{N}$. Considerando la sucesión diagonal $f_{n_k}^{(k)}(z_k)$ obtenemos que es convergente en todo z_n.

Procedemos a demostrar que la sucesión diagonal converge uniformemente en compactos. Renombremos $g_k := f_{n_k}^{(k)}$. Sea K un compacto de G y $\epsilon > 0$. Por ser $\mathcal{F}$ equicontinua en compactos de G, existe $\delta > 0$ tal que

$$|g_n(z) - g_n(z')| < \frac{\epsilon}{3}, \qquad \text{para cada } n \in \mathbb{N},$$

cualesquiera $z, z' \in K$ tales que $|z - z'| < \delta$. La compacidad de K implica que $K \subset \cup_{k=1}^{k_0} D(w_k, \delta)$, donde w_k son elementos de z_n. Luego, existe un natural N tal que para cada $n, m \geq N$ implica

$$|g_n(w_k) - g_m(w_k)| < \frac{\epsilon}{3},$$

para $k = 1, 2, \ldots, k_0$.

Finalmente, para cualesquiera $z \in K$, $z \in D(w_l, \delta)$ para algún $1 \leq l \leq k_0$, y tenemos que

$$|g_n(z) - g_m(z)| \leq |g_n(z) - g_n(w_l)| + |g_n(w_l) - g_m(w_l)| + |g_m(w_l) - g_m(z)| < \epsilon.$$

Concluimos que la sucesión g_n converge uniformemente en K a una función holomorfa, por ser $\mathcal{H}(G)$ completo. ■

En la definición de normalidad hay dos casos de convergencia: la primera consiste en que una familia sea normal porque toda sucesión contenga una subsucesión uniformemente convergente en compactos a una función holomorfa f en G. En este caso, diremos que la familia es *normal-analítica* en G. La segunda, si toda sucesión contiene una subsucesión divergente uniformemente en compactos en G, diremos que la familia es *normal-infinito*.

Teorema 2.5 (Montel, [3]). *Sea $\mathcal{F}$ una familia en $\mathcal{H}(G)$. $\mathcal{F}$ es normal-analítica en G si, y sólo si $\mathcal{F}$ es localmente acotada.*

Como mencionamos anteriormente, $\mathcal{H}(G)$ con la métrica heredada por el espacio de funciones continuas es un subespacio métrico, la familias normales juegan un papel importante en la estructura de este espacio métrico. Obsérvese que la Definición 2.2 se parece a la definición de los conjuntos secuencialmente compactos, si sólo se cumple la el primer caso, es decir, sea una familia normal-analítica, salvo que no se requiere que el límite de la subsucesión esté en $\mathcal{F}$. Entonces tenemos el siguiente resultado de estructura de espacio métrico de $\mathcal{H}(G)$.

Teorema 2.6. *Una familia $\mathcal{F}$ en $\mathcal{H}(G)$ es normal-analítica en G si, y sólo si tiene cerradura compacta.*

Tenemos que toda familia de funciones $\mathcal{F}$ en $\mathcal{H}(G)$ es compacta si, y sólo si es una familia cerrada en $\mathcal{H}(G)$ y localmente acotada en G. De esta manera, hemos estipulado un resultado análogo al Teorema de Heine-Borel de $\mathbb{R}^n$ para el espacio de funciones holomorfas en G.

Desde este punto de vista, de acuerdo con el Teorema de Montel, toda sucesión f_n en $\mathcal{H}(G)$ localmente acotada contiene una subsucesión convergente en $\mathcal{H}(G)$. Este último, es un análogo al Teorema de Bolzano-Weierstrass de $\mathbb{R}^n$. Por esta razón, se dice que las familias normales son una generalización del Teorema de Bolzano-Weierstrass en $\mathcal{H}(G)$.

Sin embargo, aunque concluyamos que una familia de funciones es normal su correspondiente familia de derivadas no necesariamente lo es. El siguiente ejemplo ilustra este hecho:

Ejemplo. Consideremos la familia $\mathcal{F} := \{nz : n \in \mathbb{N}\}$ la cual no es normal en ningún conjunto que contenga al origen porque si tomamos el disco unitario $D(0,1)$, entonces para cada $z \neq 0$, $nz \to \infty$ y cuando $z = 0$, $nz \to 0$. Definamos

$$\phi_n(z) := \frac{nz^2}{2} + n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Entonces, para cada $z \in U$, donde U es una vecindad del 0,

$$|\phi_n(z)| \geq n - \left|\frac{nz^2}{2}\right| \geq \frac{n}{2}$$

y así ϕ_n es normal en U, pero ϕ_n' no lo es.

El siguiente resultado proporciona las condiciones para que la correspondiente familia de derivadas de una familia normal sea normal.

Proposición 2.6. [16]**.** *Si $\mathcal{F}$ es una familia normal de funciones holomorfas en un dominio G. Si para algún $z_0 \in G$ el conjunto $\mathcal{F}(z_0) := \{f(z_0) : f \in \mathcal{F}\}$ es acotado en $\mathbb{C}$, entonces las siguientes afirmaciones son válidas:*

(a) $\mathcal{F}$ es una familia localmente acotada en G;

(b) $\mathcal{F}' := \{f' : f \in \mathcal{F}\}$ es localmente acotada y normal en G.

En 1912 Montel presentó su *Critère fondamental* para que una familia de funciones analíticas sea normal. El criterio fundamental de normalidad (FNT por sus siglas en inglés) tiene varias consecuencias de largo alcance que son de suma importancia en la teoría de funciones de variable compleja, como por ejemplo el Gran Teorema de Picard. La demostración de FNT se puede revisar en [16].

Teorema 2.7 (Montel o Criterio Fundamental de Normalidad,[16])**.** *Si $\mathcal{F}$ es una familia en $\mathcal{H}(G)$ que omite dos valores fijos a y b en $\mathbb{C}$, entonces $\mathcal{F}$ es normal en G.*

La prueba del Criterio Fundamental de Normalidad utiliza la Función Modular Elíptica, que no es objetivo de nuestro trabajo, para una comprensión más profunda del tema consultar [3], [16]y [8] .

Algunos autores mencionan al Teorema 2.7 como el Teorema de Montel o bien el segundo Teorema Fundamental de Montel. Mientras que para nosotros y uno de los objetivos de este trabajo convenimos, salvo que se diga lo contrario, por llamarlo Teorema de Montel.

Por otro lado, en discusión con la normalidad de una familia funciones meromorfas, el concepto “localmente acotado” no es relevante, pues cerca de un polo de una función meromorfa, la función es no acotada. Sin embargo, el concepto de equicontinuidad (en el caso de $G \subset \widehat{\mathbb{C}}$ y $\Omega = \widehat{\mathbb{C}}$) puede ser sustituida en la siguiente contraparte al Teorema de Montel, donde la definición de equicontinuidad para el caso de $\mathscr{C}(G, \widehat{\mathbb{C}})$ es la misma que $\mathscr{C}(G, \mathbb{C})$ cambiando la métrica euclidiana por la métrica esférica y se cumplen las mismas propiedades antes vistas, véase [3].

Teorema 2.8 (Montel, [16])**.** *Una familia $\mathcal{F}$ de funciones meromorfas en un dominio G es normal si, y sólo si $\mathcal{F}$ es equicontinua en G en $\mathscr{C}(G, \widehat{\mathbb{C}})$.*

El Criterio Fundamental de Normalidad también tiene su análogo para funciones meromorfas, veamos a continuación.

Teorema 2.9 (Montel o Criterio Fundamental de Normalidad para funciones meromorfas, [16])**.** *Si $\mathcal{F}$ una familia de funciones meromorfas en un dominio $G \subset \widehat{\mathbb{C}}$ que omite tres valores distintos $a, b, c \in \widehat{\mathbb{C}}$ a pares, entonces $\mathcal{F}$ es normal en G.*

Definición 2.6.[16]**.** Sean G un dominio en $\mathbb{C}$ y $f\colon G \to \mathbb{C}$ una función meromorfa en G. Si $z_0 \in G$ no es un polo, la derivada en la métrica cordal, llamada *derivada esférica*, está dada por

$$f^{\sharp}(z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{\chi(f(z), f(z_0))}{|z - z_0|} = \frac{|f'(z_0)|}{1 + |f(z_0)|^2}. \tag{2.4}$$

Si z_0 es un polo de f, definimos

$$f^{\sharp}(z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{|f'(z_0)|}{1 + |f(z_0)|^2}. \tag{2.5}$$

A diferencia del Teorema de Montel, donde la acotación local es un ingrediente clave, para la normalidad de una familia de funciones meromorfas es caracterizada por la condición de que la *derivada esférica* es localmente acotada.

Teorema 2.10 (Marty, [16])**.** *Una familia $\mathcal{F}$ de funciones meromorfas sobre un dominio G es normal si, y sólo si para cada compacto K de G, existe un constante C tal que la derivada esférica*

$$f^{\sharp}(z) \leq C, \qquad z \in K, f \in \mathcal{F}.$$

esto es, $\{f^{\sharp} : f \in \mathcal{F}\}$ es localmente acotada.

Aunque el Teorema de Marty es bastante util para determinar la normalidad de una familia de funciones meromorfas hay familias en la que es insuficiente este criterio, para ello se propone una versión más fuerte de este teorema que se enuncia a continuación.

Teorema 2.11 (Royden, [16])**.** *Sea $\mathcal{F}$ una familia de funciones meromorfas en un dominio G tal que para cada compacto K de G existe una función monótona creciente h_k tal que*

$$|f'(z)| \leq h_k(|f(z)|), \qquad f \in \mathcal{F}, z \in K.$$

Entonces $\mathcal{F}$ es normal in G.

SECCIÓN 2.3
Teorema Grande de Picard

El estudio de funciones holomorfas es sumamente enriquecedor, como se vio en los preliminares, es posible extender el dominio de analiticidad de una función mediante la continuación analítica y existen distintos métodos para hacerlo, véase [10]. Sin embargo, de acuerdo con el Teorema de Monondromía, sólo podemos extender analíticamente hasta encontrar singularidades esenciales aisladas, ya que cerca de ellas encontramos inestabilidad de la función.

El Teorema Grande de E. Picard fue una revelación en su momento y causó un gran interés en la investigación de la Teoría de Funciones Complejas. Montel tuvo la brillante idea de reemplazar una propiedad particular de una función por una familia de funciones que posean la misma propiedad en una sucesión de dominios.

Un valor $w \in \mathbb{C}$ es un *valor omitido* de una función $f: G \to \mathbb{C}$ si la ecuación $f(z) - w = 0$ no tiene soluciones en G. Un valor $w \in \mathbb{C}$ es un *valor excepcional de Picard* de f si la ecuación $f(z) - w = 0$ tiene un conjunto finito de soluciones, es decir, $\mathrm{Card}(f^{-1}(w)) < +\infty$.

Es claro que todo valor omitido es valor excepcional de Picard. El conjunto de valores excepcionales de Picard se denota por $\mathcal{P}(f)$.

A continuación enunciaremos el Pequeño Teorema de Picard.

Teorema 2.12 (Pequeño de Picard, [16])**.** *Si $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es una función entera que omite dos valores entonces f es constante.*

Demostración. Supongamos que f es una función entera no constante y que omite dos valores $a, b \in \mathbb{C}$. Consideremos la familia de discos $D_n := D(0, 2^n)$, con $n = 0, 1, 2, \ldots$, y definimos las funciones

$$f_n(z) = f(2^n z)$$

las cuales también son enteras. Luego, $f_n(D_1) = f(D_{n+1})$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, y se sigue que la sucesión f_n omite los valores a y b en D_1. Por el Criterio Fundamental de Normalidad, tenemos que f_n es normal en D_1. Como $f_n(0) = f(0)$, para cada $n = 0, 1, 2, \ldots$, por la Proposición 2.6 se sigue que f_n es acotada en el disco compacto $\overline{D_0} \subseteq D_1$. Concluimos que f es acotada en $\mathbb{C}$, y por ende, idénticamente constante por el Teorema de Liouville. Esto contradice que f no sea constante, por lo el resultado se sigue. ■

El Teorema 2.12 se puede enunciar de la siguiente manera: *Toda función entera no constante toma cualquier valor complejo finito, a lo más, posiblemente, una excepción.* Otros autores nombran el Teorema 2.12 como *Teorema Pequeño de Picard* o *Primer Teorema de Picard.*

El Teorema Grande de Picard es un resultado que nos estable el comportamiento de una función holomorfa cerca de una singularidad esencial aislada.

Teorema 2.13 (Grande de Picard, [16]). *Sean G un dominio en $\mathbb{C}$ y $z_0 \in G$. Si f es una función compleja que es holomorfa en $G\backslash\{z_0\}$ y tiene una singularidad esencial aislada en z_0, entonces en toda vecindad agujereada de z_0 la función f toma cualquier valor de $\mathbb{C}$ un número infinito de veces, a lo más con una posible excepción.*

Demostración. Sin perdida de generalidad, supongamos que $z_0 = 0$ es una singularidad esencial de f. Supongamos por contradicción que existen dos valores a y b los cuales f omite en un disco agujereado $D(z_0, r)\Big\backslash\{z_0\}$, con $r > 0$. Entonces la familia de funciones $\mathcal{F}$ definida por

$$f_n(z) = f\left(\frac{z}{2^n}\right), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

son holomorfas en la sucesión de anillos $A_n := \left\{z : \frac{r}{2^n} < |z| < \frac{r}{2^{n-1}}\right\}$, con $n = 1, 2, \ldots$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, f_n toma en el anillo A_1 los mismos valores que f en el anillo A_{n+1}. Por ello $\mathcal{F}$ es una sucesión de funciones holomorfas en A_1 y que no toman los valores a o b en A_1. Ya que $\mathcal{F}$ en normal en A_1 (por el Criterio Fundamental de Normalidad), existe una subsucesión f_{n_k} que converge uniformemente a una función holomorfa F en la circunferencia $C_\rho = \{z : |z| = \rho\}$, para algún $\frac{r}{2} < \rho < r$, o diverge de manera uniforme en A_1.

Si F es holomorfa en C_ρ, entonces f_{n_k} es localmente acotada en C_ρ. Es decir, que

$$|f_{n_k}(z)| \leq M, \quad |z| = \rho, \ k = 1, 2, \ldots,$$

entonces

$$|f(z)| \leq M, \quad |z| = \frac{\rho}{2^{n_k}}, \ k = 1, 2, \ldots,$$

esto es, f está acotada sobre una sucesión de círculos concéntricos que convergen al origen. Por el Principio de Módulo Máximo, $|f(z)| \leq M$ en la región formada por dos círculos concéntricos cualesquiera. Como consecuencia,

$$|f(z)| \leq M, \quad 0 < |z| \leq \frac{\rho}{2^{n_1}},$$

luego se sigue que f tiene una singularidad removible en z_0, por el Principio de la Singularidad Aislada.

Por otro lado, si f_{n_k} diverge normalmente en A_1, entonces la familia $\left\{\frac{1}{f_{n_k} - a}\right\}$ converge uniformemente en el interior de un subconjunto compacto de A_1 a la función nula. Como el caso anterior, podemos concluir que la función $g(z) = \frac{1}{f(z) - a}$ está acotada sobre una vecindad agujereada del origen, y por tanto f tiene una singularidad removible o un polo en el origen, de nuevo una contradicción.

Finalmente, si hay dos valores, digamos α y β, que son tomados solo un número finito de veces por f, entonces en alguna vecindad agujereada suficientemente pequeño del origen, f omitiría α, β y el resultado se sigue. ■

La conclusión del Teorema 2.13 enuncia que el número de puntos excepcionales de Picard para una función f con singularidad esencial es, a lo más 1. Esto implica que f no puede tener dos puntos omitidos ni dos puntos que se tomen un número finito de veces. Ni menos, un punto omitido y un punto que se tome un número finito de veces.

Recordemos que el Teorema de Casorati-Weierstrass (Teorema 1.16) enuncia que dada una familia de funciones holomorfas $\mathcal{F}$ en $G \subset \widehat{\mathbb{C}}$ con una singularidad esencial aislada en z_0 y sea $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ es una vecindad agujereada de z_0, entonces para cada $f \in \mathcal{F}$ se cumple que $f(D(z_0, r) \setminus \{z_0\})$ es denso en $\mathbb{C}$. Siendo éste una versión sencilla del Teorema Grande de Picard.

Como corolario al Teorema de Casorati-Weierstrass se enuncia que si f es una función entera, entonces $f(\mathbb{C})$ es denso en $\mathbb{C}$ (si f es un polinomio, entonces $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$). Además, se tiene que $f(\mathbb{C})$ es el plano complejo completo con una posible excepción como se enuncia en el Pequeño Teorema de Picard.

Ejemplos.

(a) La función $f(z) = e^z$ no toma el valor 0.

(b) La función $g(z) = 2 + (z^2 + 1)e^{\operatorname{sen}(z)}$ no omite ningún punto de $\mathbb{C}$ pero el valor 2 se toma dos veces.

En su artículo *Normal Families: New Perspectives*, Zalcman [19] muestra que, en el contexto de funciones meromorfas en $\mathbb{C}$, el Teorema Grande de Picard implica el Criterio Fundamental de Normalidad. Es decir, si una familia $\mathcal{F}$ de funciones meromorfas en un dominio G satisface la hipótesis del Teorema Grande de Picard, entonces la familia $\mathcal{F}$ es normal.

Del Teorema 2.13 se desglosa la siguiente consecuencia.

Colorario 2.13.1. [3]**.** *Si f tiene una singularidad aislada en z_0 y si existen dos números complejos los cuales f toma un número finito de veces en un disco agujerado $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$, entonces z_0 es un polo o una singularidad removible.*

Por otro lado, el Teorema Pequeño de Picard, Teorema 2.12, se sigue directamente del Gran Teorema de Picard y el Teorema fundamental del Álgebra, pero, de hecho, con una conclusión más fuerte.

El siguiente resultado lo nombraremos *Teorema Pequeño de Picard reforzado.*

Colorario 2.13.2 (Teorema Pequeño de Picard reforzado)**.** *Sea $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función entera no constante. Entonces, las siguientes son verdaderas:*

(a) Si f es un polinomio, entonces f toma cada valor de $\mathbb{C}$ un número finito de veces.

(b) Si f no es polinomial (trascendente), entonces f toma cualquier valor finito de $\mathbb{C}$ un número infinito de veces, a lo más, posiblemente, una excepción.

Demostración. El inciso (a) se sigue del Teorema Fundamental del Álgebra. Para probar (b), considere la función $g(z) = f(1/z)$. Ya que f no es un polinomio, g tiene una singularidad esencial en 0. El resultado se sigue del Gran Teorema de Picard. ■

Para el caso de funciones meromorfas tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.14 (Pequeño de Picad para funciones meromorfas, [6])**.** *Toda función meromorfa no constante f, toma cualquier valor complejo, a excepción, posiblemente, de dos valores.*

Demostración. Supongamos que el número de valores que omite f es mayor a dos. Sean $a, b, c \in \widehat{\mathbb{C}}$ los valores que omite f. Supongamos que $c = \infty$, entonces f es no constante y entera que no toma los valores finitos a, b. Lo que contradice al Teorema Pequeño de Picard. Si a, b y c son finitos, consideremos la función

$$g(z) := \frac{1}{f(z) - c}$$

que es una función meromorfa que no toma ∞, por lo tanto es entera. Además, g es no constante. Además, g no toma los valores finitos $\frac{1}{a-c}$ y $\frac{1}{b-c}$. Lo que contradice de nuevo al Teorema Pequeño de Picard. ■

SECCIÓN 2.4 Funciones Trascendentes

En esta sección estudiaremos dos clases de funciones importantes: las trascendentes enteras y trascendentes meromorfas. Para definir el tipo de singularidad aislada que es ∞ utilizamos las técnicas vistas en el Capítulo 1, como sigue: supongamos que $f: G \to \mathbb{C}$ es una función holomorfa en G y que, para algún $r > 0$, $U_p \backslash \{\infty\} \subseteq G$, definimos $g \colon \{z : 0 < |z| < \frac{1}{r}\} \to \mathbb{C}$ por $g(z) := f(1/z)$. Entonces decimos que:

(a) f tiene una singularidad aislada removible en ∞ si, y sólo si g tiene una singularidad removible en 0;

(b) f tiene un polo en ∞ si, y sólo si g tiene un polo en 0;

(c) f tiene una singularidad esencial aislada en ∞ si, y sólo si g tiene una singularidad esencial en 0.

Recordemos que una función $f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es entera si es holomorfa en todo $\mathbb{C}$. Entonces, tenemos lo siguientes casos:

(a) Por el Teorema de Liouville, podemos deducir que ∞ es una singularidad evitable para funciones constantes. El reciproco es evidente.

(b) f es un polinomio no constante si, y sólo si f tiene un polo en ∞.

(c) f no es polinomial (trascendente entera) si, y sólo si f tiene una singularidad esencial en ∞.

Si $f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es una función entera, podemos clasificar de la siguiente manera:

(a) f es constante si f tiene singularidad removible en ∞.

(b) f es polinomial si f tiene un polo de orden n en ∞.

(c) f es trascendente si f tiene singularidad esencial aislada en ∞.

Definición 2.7. [6]**.** Una función holomorfa $f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ se llama trascendente entera si ∞ es singularidad esencial aislada y $f(\infty)$ no esta definido.

A la clase de funciones trascendentes enteras la denotaremos por $\mathcal{E}$.

Ejemplos.

(a) $f(z) = \alpha e^z$, con $\alpha \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$.

(b) $g(z) = \alpha \cosh(\alpha z)$, con $\alpha \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$.

(c) $h(z) = \alpha \operatorname{sen}(z)$, con $\alpha \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$.

(d) $h(z) = z_0 - (z - z_0)^2 e^z$.

Por ser ∞ singularidad esencial aislada de f, usando la expansión de Laurent alrededor de ∞ podemos demostrar:

Si $f \in \mathcal{E}$, g un polinomio o una función en $\mathcal{E}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, con $\alpha \neq 0$, entonces:

(a) $\beta + f \in \mathcal{E}$;

(b) $\alpha f + \beta g \in \mathcal{E}$;

(c) $g \cdot f \in \mathcal{E}$.

Se concluye que la clase de funciones trascendentes enteras $\mathcal{E}$ es cerrado bajo la adición, el producto, el producto por escalar no nulo.

Además, es posible demostrar una versión del Teorema Grande de Picard para esta clase de funciones, veamos a continuación:

Teorema 2.15. [3]**.** *Toda función $f \in \mathcal{E}$ toma cualquier valor finito de $\mathbb{C}$ un número infinito de veces, a lo más una posible excepción.*

Demostración. Sea $g(z) = f(1/z)$ definida en una vecindad agujereada $D(0, 1/R)$, con $R > 0$, de 0. Por ser 0 singularidad esencial aislada de g, del Teorema Grande de Picard, g toma cualquier valor finito de $\mathbb{C}$ un número infinito de veces, a lo más una posible excepción. ■

Con este resultado podemos probar que $\mathcal{E}$ es cerrada bajo composición, veamos el siguiente resultado:

Proposición 2.7. [6]**.** *Si $f, g \in \mathcal{E}$, entonces $f \circ g \in \mathcal{E}$.*

Demostración. Sean f y g funciones trascendentes enteras, entonces aplicando la regla de la cadena $f \circ g$ es entera. Veamos que ∞ es una singularidad esencial de $f \circ g$.

En efecto, Sean $v, v' \notin \mathcal{P}(f)$, con $v \neq v'$. Por el Teorema Grande de Picard, hay un número infinito de soluciones $w_1, w_2, \ldots,$ para la ecuación $f(w) = v$ y un número infinito de soluciones $w_1', w_2', \ldots,$ para la ecuación $f(w') = v'$, donde $w_n \neq w_n'$. Luego, dados $w_{n_1}, w_{n_2}' \notin \mathcal{P}(g)$, para las ecuaciones $g(z) = w_{n_1}$ y $g(z) = w_{n_2}'$ existen las sucesiones $\{z_k^{(n)}\}$ y $\{z_k'^{(n)}\}$ de soluciones convergentes a ∞ tales que $\{g(z_k^{(n)})\}$ y $\{g(z_k'^{(n)})\}$ convergen a w_{n_1} y w_{n_2}', respectivamente. Así, $f(g(z_k^{(n)})) \to v$ y $f(g(z_k'^{(n)})) \to v'$ cuando $k \to \infty$. Se sigue que ∞ es una singularidad esencial de $f \circ g$. ■

Podemos caracterizar a las funciones en la clase $\mathcal{E}$ en términos de su valor excepcional de Picard.

Teorema 2.16. [7]**.** *Si $f \in \mathcal{E}$, entonces $w_0 \in \mathcal{P}(f)$ si, y sólo si existe un polinomio de grado $n \geq 0$ y una función entera no constante h tal que*

$$f(z) = w_0 + p(z)e^{h(z)}, \quad \textit{para todo } z \in \mathbb{C}.$$

Definición 2.8. [6]**.** Una función $f : \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$ se llama *trascendente meromorfa* si f es meromorfa en $\mathbb{C}$ que tiene al menos un polo no omitido y que ∞ es singularidad esencial aislada.

Denotamos por $\mathcal{M}$ a la clase de funciones meromorfas.

Ejemplos.

(a) $f(z) = \alpha \tan(z)$, con $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$;

(b) $g(z) = \alpha \operatorname{sen}(z) + \frac{\mu}{z}$, con $\alpha, \mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$;

(c) $h(z) = \alpha e^z + \frac{\mu}{z}$, con $\alpha, \mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$;

Teorema 2.17. [6]**.** *Una función $f \in \mathcal{M}$ toma cualquier valor de $\widehat{\mathbb{C}}$ un número infinito de veces, a lo más dos posibles excepciones.*

Demostración. Supongamos por contradicción que f toma tres valores distintos a, b, c en $\widehat{\mathbb{C}}$. Supongamos que $c = \infty$, entonces $g(z) = f(1/z)$ omite dos valores finitos de $\mathbb{C}$ en una vecindad agujereada $D(0, 1/R) \setminus \{0\}$, $R > 0$, de 0, donde g es holomorfa. Lo que g contradice al Teorema Grande de Picard.

Si $c \neq \infty$, consideramos la función auxiliar $g \colon \{z \in \mathbb{C} : |z| > R\} \to \mathbb{C}$, donde $R > 0$,

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - c}.$$

$g(1/z)$ tiene singularidad esencial en 0 que omite $\frac{1}{a-c}$, $\frac{1}{b-c}$ e ∞. Se concluye que $g(1/z)$ también contradice el Teorema Grande de Picard.

Para el caso en que al menos uno de los valores a, b o c se toma un número finito de veces, consideramos una vecindad suficientemente pequeña de 0 donde $f(1/z)$ omita a los tres valores. ■

Las funciones en la clase $\mathcal{M}$ se pueden caracterizar como sigue:

Proposición 2.8. [9]**.** *Si $f \in \mathcal{M}$ tiene a lo más un polo z_0 que es valor excepcional de Picard, entonces*

$$f(z) = z_0 + (z - z_0)^{-m} e^{h(z)}$$

para algún entero positivo m y una función entera h.

3 Extensión de los Teoremas de Montel y Picard

En este capitulo extenderemos el Criterio Fundamental de Normalidad y el Teorema Grande de Picard a una clase de funciones holomorfas con más de una singularidad esencial que contienen a las clases $\mathcal{E}$ y $\mathcal{M}$.

La siguiente clase de funciones fue investigada por A. Bolsch [2]. Denotemos $\mathcal{K}$ como la clase de funciones f con la siguiente propiedad: existe un conjunto compacto contable no vacío $\mathcal{B}(f) \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$ tal que f es meromorfa y no constante en $\widehat{\mathbb{C}} \backslash \mathcal{B}(f)$. Esto es,

$$\mathcal{K} := \{f : \widehat{\mathbb{C}} \backslash \mathcal{B}(f) \to \widehat{\mathbb{C}} : f \text{ es meromorfa y no constante en } \widehat{\mathbb{C}} \backslash \mathcal{B}(f)\}$$

Teorema 3.1. [2]. *Si $f \in \mathcal{K}$, entonces*

$$\mathcal{B}(f) = \overline{\{z \in \widehat{\mathbb{C}} : z \textit{ es singularidad esencial aislada de } f\}}.$$

Observaciones 3.1. (a) Si $f \in \mathcal{K}$, entonces $\widehat{\mathbb{C}} \backslash \mathcal{B}(f)$ es una superficie de Riemann.

(b) Si $f \in \mathcal{K}$ y $\mathcal{B}(f) = \emptyset$, entonces f es una función racional, porque no tiene singularidades esenciales.

(c) Si $f \in \mathcal{K}$ tal que no tiene polos y $\mathcal{B}(f) = \{\infty\}$, entonces f es trascendente entera.

(d) Si $f \in \mathcal{K}$ que tiene polos y $\mathcal{B}(f) = \{\infty\}$, entonces f es trascendente meromorfa.

Ejemplos.

(a) Sea $f(z)=e^{\tan(z)}$, veamos que el conjunto de singularidades esenciales está dado por $\{(2k-1)\pi/2 :\ k\in\mathbb{Z}\}$ porque $\tan(z)$ tiene polos en $(2k-1)\pi/2$, con $k\in\mathbb{Z}$, y al componer con la función exponencial, que es una función trascendente entera, los valores $(2k-1)\pi/2$ se convierten en singularidades esenciales. Además, ∞ es un punto de acumulación de $\{(2k-1)\pi/2 :\ k\in\mathbb{Z}\}$. Por lo tanto, $f\in\mathcal{K}$.

(b) Sea $f(z)=e^{\frac{1}{z^2+1}}$ si $z\neq -i,i$ y $f(\infty)=0$. Tenemos que f pertenece a la clase $\mathcal{K}$ porque $\frac{1}{z^2+1}$ tiene polos en $-i$ e i y al componer con la función exponencial, que es una función trascendente entera, los valores $-i$ e i se convierten en singularidades esenciales.

Sea $\mathcal{F}$ una familia de funciones en la clase $\mathcal{K}$. Denotamos al conjunto que contiene a las singularidades esenciales aisladas de la familia $\mathcal{F}$ como:

$$\mathcal{B}(\mathcal{F}) := \bigcup_{f\in\mathcal{F}} \mathcal{B}(f).$$

Además, si $G\subset\widehat{\mathbb{C}}$ un dominio tal que $G\subset\widehat{\mathbb{C}}\backslash\mathcal{B}(\mathcal{F})$, entonces $\mathcal{F}$ está contenido en el espacio de funciones meromorfas $\mathcal{M}(G)$.

Luego, en el Capítulo 2, vimos que la normalidad de una familia de funciones meromorfas es una propiedad local. Así, podemos definir la normalidad para una familia $\mathcal{F}$ de funciones meromorfas no constantes en la clase $\mathcal{K}$.

Definición 3.1. Una familia $\mathcal{F}$ es normal en un dominio $G\subset\widehat{\mathbb{C}}\backslash\mathcal{B}(\mathcal{F})$ si, y sólo si para cada $z\in G$ existe una vecindad U de z tal que $\mathcal{F}$ es normal en U.

Así, se extiende el Criterio Fundamental de Normalidad para funciones en la clase $\mathcal{K}$ como sigue.

Teorema 3.2 (Extensión del Teorema de Montel o Criterio Fundamental de Normalidad para funciones en la clase $\mathcal{K}$)**.** *Si $\mathcal{F}$ es una familia de funciones en la clase $\mathcal{K}$ bien definidas en un dominio $G\subset\widehat{\mathbb{C}}\backslash\mathcal{B}(\mathcal{F})$ y para cada $f\in\mathcal{F}$ se tiene que f omite tres valores fijos distintos a pares $a,b,c\in\widehat{\mathbb{C}}$, entonces $\mathcal{F}$ es normal en G.*

Demostración. Por ser $\mathcal{F}$ una familia de funciones en la clase $\mathcal{K}$ bien definidas en G, tenemos que $\mathcal{F}$ pertenece al espacio de funciones meromorfas $\mathcal{M}(G)$. Aplicando el Criterio Fundamental de Normalidad para funciones meromorfas en G, se sigue que $\mathcal{F}$ es normal en G. ∎

Ejemplo. Para cada $n\in\mathbb{N}$, definimos $f_n(z) = e^{\frac{1}{z^2-\frac{1}{n}}}$ si $z\neq -1/n, 1/n$ y $f(\infty)=1$. La familia $\mathcal{F} := \{f_n :\ n\in\mathbb{N}\}$ pertenece a la clase $\mathcal{K}$, porque para cada $n\in\mathbb{N}$, tenemos que $\mathcal{B}(f_n)=\{-1/n,1/n\}$ y f_n es meromorfa no constante en $\widehat{\mathbb{C}}\backslash\mathcal{B}(f_n)$.

Luego, tenemos que

$$\overline{\mathcal{B}(\mathcal{F})} = \{1/n : \ n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}\} \cup \{0\}.$$

Sea $G := \{z \in \widehat{\mathbb{C}}\backslash\overline{\mathcal{B}(\mathcal{F})} : f_n(z) \neq 1, n \in \mathbb{N}\}$. Se sigue que G es un dominio de $\widehat{\mathbb{C}}$ porque, para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $f_n(z) = 1$ si, y sólo si $z^2 = \frac{1}{n} - \frac{i}{2k\pi}$, con $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ o $z = \infty$. Es decir, $\widehat{\mathbb{C}}\backslash G$ es cerrado contable y dados dos valores z_1 y z_2 en G es posibles conectarlos mediante una curva continua que pase en medio de dos elementos de $\widehat{\mathbb{C}}\backslash G$.

Por otro lado, para cada $n \in \mathbb{N}$, f_n omite a 0 y a ∞. Por el Criterio Fundamental de Normalidad para funciones en la clase $\mathcal{K}$, se tiene que la familia $\mathcal{F}$ es normal en G.

Observemos que toda sucesión infinita no trivial de $\mathcal{F}$ converge uniformemente en compactos a la función $f(z) = e^{1/z^2}$ si $z \in G$.

Debido a que las funciones meromorfas no contantes que pertenecen a $\mathcal{K}$ son funciones que tienen un conjunto contable de singularidades esenciales podemos aplicar el Teorema Grande de Picard a cada una de estas singularidades y podemos extenderlo como se muestra en el siguiente resultado.

Teorema 3.3 (Extensión del Teorema de Picard para funciones en la clase $\mathcal{K}$, [2])**.** *Si $f \in \mathcal{K}$, entonces para cada $z \in \mathcal{B}(f)$ y U una vecindad de z, f toma cualquier valor de $\widehat{\mathbb{C}}$ en $U\backslash\mathcal{B}(f)$ un número infinito de veces, a lo más con dos posibles excepciones.*

Demostración. Si $z \in \mathcal{B}(f)$ es un punto de acumulación de singularidades esenciales aisladas, entonces existe z_0 en U que es singularidad esencial aislada de f. Luego, U es una vecindad de z_0. Si el resultado es verdadero para singularidades esenciales aisladas de f, entonces el resultado se satisface para z.

Basta probar el resultado para singularidades esenciales aisladas. Supongamos por contradicción que existe z_0 singularidad esencial aislada de f y una vecindad U_0 de z_0 tal que f toma en $U_0\backslash\mathcal{B}(f)$ cualquier valor de $\widehat{\mathbb{C}}$ y que omite tres valores $a, b, c \in \widehat{\mathbb{C}}$.

Sea V una vecindad de z_0 tal que $V \subset U_0$ y f es holomorfa en $V\backslash\{z_0\}$. Si $c = \infty$, entonces f omite dos valores finitos en $V\backslash\{z_0\}$, lo que contradice el Teorema Grande de Picard.

Si $c \neq \infty$, consideramos la función $g : V\backslash\{z_0\} \to \mathbb{C}$ dada por:

$$g(z) := \frac{1}{f(z) - c}.$$

g tiene singularidad esencial aislada en z_0 y omite los valores $\frac{1}{a-c}$, $\frac{1}{b-c}$ e ∞. Se sigue que g contradice el Teorema Grande de Picard.

Sin perdida de generalidad si f toma al menos un valor un número finito de veces de $\widehat{\mathbb{C}}$ en $V\backslash\{z_0\}$ consideramos una vecindad suficientemente pequeña de z_0 donde f omita los tres valores. ∎

Debido a que $f \in \mathcal{K}$ toma todos los valores de $\widehat{\mathbb{C}}$ un número infinito de veces salvo dos valores en una vecindad agujerada de cada singularidad esencial aislada e incluso puntos de acumulación, podemos decir que para cada $z \in \mathcal{B}(f)$ y U una vecindad de z, la imagen de $U\backslash\mathcal{B}(f)$ bajo f es un conjunto denso en $\widehat{\mathbb{C}}$, es decir, que en cada singularidad esencial e incluso puntos de acumulación se satisface la conclusión del Teorema de Casorati-Weierstrass. Esto es,

$$\overline{f(U\backslash\mathcal{B}(f))} = \widehat{\mathbb{C}}.$$

4 Aplicaciones a la Dinámica Holomorfa

En este Capítulo nos enfocaremos en el estudio de los conjuntos de Fatou y Julia de funciones f en la clase $\mathcal{K}$. Para una revisión más profunda de este tema recomendamos al lector revisar [2], [4]y [5].

Recordemos que si X un conjunto no vacío y $f\colon X \to X$ una función, definimos la *n-ésima iterada* de f, denotada por f^n, de manera inductiva como: $f^n := f \circ f^{n-1}$, para $n \geq 2$, $f^1 := f$ y $f^0 := \mathrm{id}_X$.

Consideremos la clase de funciones $\mathcal{K}$ tal que para cada $f \in \mathcal{K}$. Para definir el dominio X y la iteración de funciones en la clase $\mathcal{K}$, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 4.1 ([2]). *Si $f, g \in \mathcal{K}$, entonces $f \circ g \in \mathcal{K}$ y*

$$\mathcal{B}(f \circ g) = \mathcal{B}(g) \cup g^{-1}\left(\mathcal{B}(f)\right).$$

Demostración. Claramente $f \circ g$ es meromorfa afuera de $\mathcal{B}(g) \cup g^{-1}\left(\mathcal{B}(f)\right)$.

Luego, si U es una vecindad de $z_1 \in \mathcal{B}(g)$, entonces $g\left(U \setminus \mathcal{B}(g)\right) \setminus \mathcal{B}(f)$ es denso en $\widehat{\mathbb{C}}$ por la extensión del Teorema de Picard para funciones de la clase $\mathcal{K}$ aplicando a g. Del mismo modo, aplicando la extensión del Teorema de Picard para funciones de la clase $\mathcal{K}$, se sigue que $f\left(g\left(U \setminus \mathcal{B}(g)\right) \setminus \mathcal{B}(f)\right)$ es denso en $\widehat{\mathbb{C}}$. Por lo tanto, $f \circ g$ no es continua en z_1.

Por otro lado, si V es cualquier disco que contiene a $z_2 \in g^{-1}\left(\mathcal{B}(f)\right) \setminus \mathcal{B}(g)$, entonces $g(V \setminus \mathcal{B}(g))$ es una vecindad de $g(z_2) \in \mathcal{B}(f)$. Por la extensión del Teorema de Picard para funciones en la clase $\mathcal{K}$, tenemos que $f\left(g\left(V \setminus \mathcal{B}(g)\right) \setminus \mathcal{B}(f)\right)$ es denso en $\widehat{\mathbb{C}}$. Se sigue que $f \circ g$ no es continua en z_2. Por lo tanto, $f \circ g \in \mathcal{K}$ y $\mathcal{B}(f \circ g) = \mathcal{B}(g) \cup g^{-1}\left(\mathcal{B}(f)\right)$. ∎

Observemos que la demostración del Teorema 4.1 utiliza el Teorema de Picard para funciones en la clase $\mathcal{K}$. De este modo consideramos una aplicación de la extensión del Teorema de Picard a la dinámica holomorfa.

Definición 4.1. Un *pre-polo de orden* n de f en $\mathcal{K}$ es un valor $p \in f^{-n}(\infty)$ para algun $n \geq 2$.

Una *pre-singularidad esencial* de f en $\mathcal{K}$ es un valor $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ tal que $f(z) \in \mathcal{B}(f)$.

Sea $f^{-n}(\mathcal{B}(f)) := (f^n)^{-1}\left(\mathcal{B}(f)\right)$, del Teorema 4.1, para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos la *frontera natural* de f^n dada por:

$$\mathcal{B}_n(f) := \bigcup_{j=0}^{n-1} f^{-j}\left(\mathcal{B}(f)\right).$$

El dominio de definición de f^n es el siguiente conjunto:

$$D_n := \widehat{\mathbb{C}} \setminus B_n(f)$$

Por el Principio de Monondromía, se sigue que si $z \in D_n$, entonces la n-ésima iterada f^n define una función meromorfa univaluada en un dominio simplemente conexo suficientemente pequeño de z.

Definición 4.2. Dado $f \in \mathcal{K}$ definimos el *conjunto de Fatou* de f, denotado por $\mathcal{F}(f)$, al conjunto de valores $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ tales que la sucesión de iteradas f^n está bien definida, es meromorfa, no constante y normal en una vecindad de z.

Definimos al *conjunto de Julia* para $f \in \mathcal{K}$, denotado por $\mathcal{J}(f)$, como el complemento del conjunto de Fatou, esto es,

$$\mathcal{J}(f) := \widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{F}(f).$$

Observemos que la definición del conjunto de Fatou $\mathcal{F}(f)$, para $f \in \mathcal{K}$, utiliza el Teorema de Montel para funciones en la clase $\mathcal{K}$. Consideramos esta como una aplicación de la extensión del Teorema de Montel a la Dinámica Holomorfa.

Algunas propiedades importantes para los conjuntos de Fatou y Julia son las siguientes:

Proposición 4.1. [2]**.** *Si* $f \in \mathcal{K}$*, entonces*

(a) $\mathcal{F}(f)$ *es un conjunto abierto en* $\widehat{\mathbb{C}}$.

(b) $\mathcal{J}(f)$ *es un conjunto compacto, perfecto, infinito, no contable y no vacío en* $\widehat{\mathbb{C}}$.

Dado $f \in \mathcal{K}$, un subconjunto E de $\widehat{\mathbb{C}}$ es *invariante hacia atrás* bajo f si $f^{-1}(E) \subset E$. Decimos que es *invariante hacia adelante* bajo f si $f\left(E \backslash \mathcal{B}(f)\right) \subset E$. Se dice que E es *completamente invariante* si es tanto invariante hacia atrás como invariante hacia adelante.

Proposición 4.2. [2]. *Si $f \in \mathcal{K}$, entonces*

(a) $\mathcal{F}(f)$ y $\mathcal{J}(f)$ son conjuntos completamente invariantes.

(b) Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{F}(f^n) = \mathcal{F}(f)$ y $\mathcal{J}(f^n) = \mathcal{J}(f)$.

Conclusiones

En este trabajo de tesis Se definieron los espacios de funciones continuas, holomorfas y meromorfas. Se estudió el Teorema de Montel (Criterio de Normalidad) para cada espacio dado.

Se estudió el Teorema Grande de Picard para funciones holomorfas.

Se definió una clase de funciones $\mathcal{K}$ meromorfas no constantes afuera de un conjunto compacto contable de singularidades esenciales aisladas.

Se extendieron los teoremas de Montel y de Picard para la clase de funciones $\mathcal{K}$.

Se dieron aplicaciones las extensiones de los teoremas de Montel y Picard en la teoría de Dinámica Holomorfa.

Trabajo a Futuro

Sean X e Y dos superficies de Riemann, diferentes a $\mathbb{C}$, $\widehat{\mathbb{C}}$ y $\widehat{\mathbb{C}} \backslash \mathcal{B}(f)$, y sea $f\colon X \to Y$ una función holomorfa, se quiere investigar lo siguiente:

(a) Posibles extensiones de normalidad y del Teorema Grande de Picard para esa clase de funciones.

(b) La posible dinámica que aparece en este tipo de funciones.

A Espacios métricos y topológicos

Denotemos por $\mathbb{R}$ al conjunto de los números reales y con $\mathbb{R}^+$ al conjunto de todos los reales no negativos como es usual.

Una *métrica* o *función distancia* en un conjunto X no vacío es una función $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ que satisface los siguientes axiomas para cualesquiera $x, y, z \in X$:

(a) $d(x, y) = 0$ si, y solo si $x = y$.

(b) $d(x, y) = d(y, x)$.

(c) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Si X es un conjunto y d es una métrica en X, entonces a la pareja (X, d) se le llama un *espacio métrico*.

Ejemplos. (a) La función $d: \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}^+$ definida, para cada $z, w \in \mathbb{C}$, por:

$$d(z, w) := |z - w|$$

es una métrica en $\mathbb{C}$ llamada *métrica euclidiana o usual*. Por lo tanto, $(\mathbb{C}, d)$.

(b) Sea (X, d) un espacio métrico. La función $g: X \times X \to \mathbb{R}^+$ definida, para cada $x, y \in X$, como:

$$g(x, y) := \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \tag{A.1}$$

es también una métrica. Por lo tanto, (X, g) es un espacio métrico.

(c) Si (X, d) un espacio métrico y Y un subconjunto no vacío de X, entonces d induce una métrica para Y definida por la función $d_{\restriction Y}: Y \times Y \to \mathbb{R}^+$ dada, para cada $x, y \in Y$, como:

$$d_{\restriction Y}(x, y) := d(x, y).$$

A $d\restriction_Y$ la llamaremos *métrica relativa* respecto a (X,d) y $(Y,d\restriction_Y)$ es un *subespacio métrico* de $(X,\mathcal{T})$.

Dado un espacio métrico (X,d) es posible considerar una colección de subconjuntos que tiene particular importancia. El conjunto

$$B(x,r) := \{y \in X : d(x,y) < r\}$$

se define como *bola abierta* o *entorno abierto* con centro en x y de radio r. A partir de las bolas abiertas en (X,d) definimos los conjuntos abiertos.

Definición A.1. Un subconjunto A de un espacio métrico (X,d) es *abierto* si para cada $x \in A$ existe $r > 0$ tal que $B(x,r) \subseteq A$.

De acuerdo con el Ejemplo A(b), la métrica g depende de la métrica d, si nos preguntamos cómo son los abiertos en (X,g), la respuesta la da el siguiente lema.

Lema A.1. *Sea (X,d) un espacio métrico, si tomamos la métrica g para X, definida en el Ejemplo* A(b), *se tiene que todo abierto en (x,d) es un abierto en (X,g) e inversamente.*

Denotaremos por $\mathcal{T}_d$ al conjunto de todos lo abiertos de (X,d). Esta colección satisface las siguientes propiedades:

(a) Los subconjuntos $\emptyset$ y X pertenecen a $\mathcal{T}_d$.

(b) La intersección de dos elementos en $\mathcal{T}_d$ pertenece a $\mathcal{T}_d$.

(c) La unión de cualquier colección de subconjuntos abiertos en (X,d) es también un elemento de $\mathcal{T}_d$.

Con base a estas propiedades es posible definir un concepto más general que los espacios métricos: los espacios topológicos.

Definición A.2. Sea X un conjunto no vacío. Una *topología* en X es una familia $\mathcal{T}$ de subconjuntos de X que satisface las siguientes propiedades:

(a) El conjunto vacío $\emptyset$ y X pertenecen a $\mathcal{T}$.

(b) Si $A,B \in \mathcal{T}$, entonces $A \cap B \in \mathcal{T}$.

(c) Si $\mathbb{A} \subseteq \mathcal{T}$, entonces $\bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{T}$.

Si $\mathcal{T}$ es una topología en X, entonces la pareja $(X,\mathcal{T})$ se llama *espacio topológico* y a los elementos que pertenecen a la topología $\mathcal{T}$ reciben el nombre de *subconjuntos abiertos* de X.

Por tanto, $(X,\mathcal{T}_d)$ es un espacio topológico y a $\mathcal{T}_d$ se le llama topología inducida por la métrica d. Un concepto de gran utilidad para el análisis de las propiedades topológicas locales de un espacio es el concepto de vecindad de un punto.

Proposición A.1. *Sea* $(X,\mathcal{T})$ *un espacio topológico y dado* $Y \subset X$*, la colección*

$$\mathcal{T}_{\restriction_Y} := \{Y \cap U : U \in \mathcal{T}\}$$

es una topología en Y*. A* $\mathcal{T}_{\restriction_Y}$ *le llamaremos* topología relativa *en* Y *respecto a* $(X,\mathcal{T})$ *y* $(Y,\mathcal{T}_{\restriction_Y})$ *es un subespacio de* $(X,\mathcal{T})$*.*

De este modo todo subespacio métrico es un subespacio topológico con la topología inducida por la métrica relativa.

Definición A.3. Sea x un punto que pertenece a un espacio topológico $(X,\mathcal{T})$. Un subconjunto V de X es una *vecindad* de x en el espacio $(X,\mathcal{T})$ si existe un abierto U que satisfaga $x \in U \subseteq V$. A la colección de vecindades de x en X, lo denotamos $\mathcal{V}(x)$, se le conoce como *sistema de vecindades* de x en $(X,\mathcal{T})$.

Intuitivamente, el sistema de vecindades $\mathcal{V}(x)$ de un punto x determina el comportamiento de la topología alrededor del punto. De la definición anterior se desprende que un subconjunto abierto no vacío es una vecindad de cada uno de sus puntos. Así, podemos caracterizar a los conjuntos abiertos a partir de vecindades.

Recordemos que una *sucesión* de puntos en un espacio topológico $(X,\mathcal{T})$ es una función $x\colon \mathbb{N} \to X$. La sucesión $n \mapsto x_n$ será representada por x_n. Luego, dada una sucesión x_n en X y sea $y\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función inyectiva, definimos una *subsucesión* de x_n como la composición de $x \circ y\colon \mathbb{N} \to X$, denotamos $x \circ y(k) = x_{n_k}$. Así, escribimos a las subsucesiones como x_{n_k}.

Sea x_n una sucesión en un espacio topológico $(X,\mathcal{T})$ decimos que *converge* a un punto $x \in X$ si para cada abierto U que contiene a x, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cualquier $n \geq N$ ocurre $x_n \in U$, denotaremos $x_n \to x$. En particular, una sucesión x_n en un espacio métrico (X,d) *converge* a $x \in X$ si para todo $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n,x) < \epsilon$ si $n \geq N$. En el caso de espacios métricos se sabe que el punto x al que converge una sucesión x_n es único, por tanto podemos denotar $x := \lim_{n\to\infty} x_n$.

Definición A.4. (a) Una sucesión x_n en un espacio métrico (X,d) es de *Cauchy* si para todo $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n,x_m) < \epsilon$ para cualesquiera $n,m \geq N$.

(b) Un espacio métrico (X,d) es *completo* si toda sucesión de Cauchy es convergente en X.

Definición A.5. Un subconjunto C de un espacio topológico $(X,\mathcal{T})$ es *cerrado* si, y sólo si $X \setminus C$ es abierto.

Teorema A.1. *Si* (X,d) *es un espacio métrico completo y* $Y \subset X$*, entonces* Y *es cerrado en* X *si, sólo si* Y *es un subespacio completo con la métrica relativa a* X*.*

Definición A.6. Si $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, entonces:

(a) Dado E un subconjunto de X, se dice que $x \in X$ es *punto límite* o de *acumulación* de E si para cada vecindad V de x contiene algún punto de E diferente de X. Es decir, x es un punto de acumulación de E si $V \cap E \backslash \{x\} \neq \emptyset$ para cada $V \in \mathcal{V}(x)$.

(b) Al conjunto de puntos de acumulación se le conoce como *conjunto derivado* de E y se denota por $\operatorname{der} E$.

(c) A los puntos de E que no son de acumulación se les conoce como *puntos aislados*.

(d) Un conjunto *discreto* es un conjunto que no tiene puntos de acumulación.

En el caso de espacios métricos existe una relación estrecha entre los puntos de acumulación y las sucesiones de un conjunto, veamos a continuación:

Proposición A.2. *Sean E un subconjunto de un espacio métrico (X, d) y $x \in X$. Entonces x es un punto de acumulación de E si, y sólo si existe una sucesión no trivial en E que converge a x.*

El siguiente resultado es una consecuencia de la proposición anterior.

Colorario A.1.1. *Si E es un subconjunto cerrado de un espacio métrico (X, d) y x_n es una sucesión en E que converge al punto x, entonces $x \in E$.*

Sea sabe que dado un subconjunto E de un espacio métrico (X, d), $\operatorname{der} E$ es cerrado. Un conjunto en el que todos sus puntos son de acumulación, es decir, $E = \operatorname{der} E$, se dice que es un conjunto *perfecto*. En espacios topológicos, a los conjuntos perfectos se les define como los conjuntos que son cerrados y todos sus puntos son de acumulación porque no necesariamente el derivado de un conjunto es cerrado.

Definición A.7. Sea E un subconjunto de un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$. La *cerradura* de E es el conjunto $\operatorname{cl}(E) = \overline{E} := E \cup \operatorname{der} E$.

Definición A.8. Un subconjunto D de un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es *denso* en X si $\overline{D} = X$.

Intuitivamente, una función f definida sobre un espacio topológico X y con valores en otro espacio Y, es continua en un punto $x_0 \in X$ si manda puntos cercanos a x_0 en puntos cercanos a $f(x_0)$.

Definición A.9. Sean $(X, \mathcal{T})$ y $(Y, \mathcal{T}_Y)$ espacios topológicos, decimos que una función $f : X \to Y$ es *continua* en X si, y sólo si para cada abierto V de Y se cumple $f^{-1}(V)$ es un abierto en X.

Cuando f es continua y tiene inversa continua se dice que la función f es un *homeomorfismo* entre espacios topológicos. Si existe un homeomorfismo entre espacios topológicos X y Y, entonces se dice X y Y son homeomorfos, denotamos $X \cong Y$. Cuando dos espacios topológicos X y Y son homeomorfos, se consideran como objetos equivalentes en la clase de espacios topológicos.

Por otro lado, si X y Y son espacios métricos y $f\colon X \to Y$ es una función entre espacios métricos. Podemos caracterizar la continuidad mediante sucesiones como: *Sea $x_0 \in X$, f es continua en x_0 si, y sólo si para cada una sucesión x_n en X convergente a x_0 se satisface que la sucesión $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ en Y es convergente a $f(x_0)$.*

Definición A.10. Un espacio topológico $(X, \mathfrak{T})$ es *conexo* si los únicos subconjuntos de X en ser tanto abiertos como cerrados son $\emptyset$ y X.

Intuitivamente el concepto de conexidad es la de ser "una sola pieza". Por otro lado, algunos autores definen a los espacios conexos como aquellos espacios en los que dados dos puntos podemos unirlos mediante una poligonal, o bien, que son espacio que no es posible separarlos en dos abiertos ajenos y no vacíos.

Teorema A.2. *Si $(X, \mathfrak{T}_X)$ es un espacio conexo, $(Y, \mathfrak{T}_Y)$ un espacio topológico y $f\colon X \to Y$ es una función continua tal que $f(X) = Y$, entonces Y es conexo.*

No obstante, una función continua entre espacios topológicos $f\colon X \to Y$ induce una función continua y sobreyectiva $i\colon X \to f(X)$ dada, para cada $x \in X$, como $i(x) = f(x)$. Por tanto, si X es conexo, entonces $f(X)$ es un subconjunto conexo de Y. Sin embargo, para el caso de espacios métricos, es suficiente la continuidad, para decir que $f(X)$ es conexo.

Definición A.11. (a) Sea $(X, \mathfrak{T})$ un espacio topológico. A la familia $\{G_\alpha\}$ de subconjuntos en X se le llamará *recubrimiento* o *cubierta* de X si se satisface $X = \cup_\alpha G_\alpha$. Si además cada uno de los elementos de $\{G_\alpha\}$ es un subconjunto abierto de X, entonces a $\{G_\alpha\}$ se le llamará *cubierta abierta* de X. Por otro lado, si $\{G_\alpha\}$ es una cubierta de X y $\{F_\beta\}$ es una subcolección de $\{G_\alpha\}$, diremos que $\{F_\beta\}$ es una *subcubierta* de $\{G_\alpha\}$ si $\cup_\beta F_\beta = X$. Un recubrimiento es finito si está formado por una cantidad finita de subconjuntos de X.

(b) Se dice que un espacio topológico $(X, \mathfrak{T})$ es *compacto* si todo recubrimiento abierto de X admite un subcubierta abierta finita. Es decir, para cada cubierta abierta $\{G_\alpha\}$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $X = \cup_{k=1}^{N} G_{\alpha_k}$.

(c) Un espacio topológico $(X, \mathfrak{T})$ es *localmente compacto* si para cada $x \in X$ admite un sistema de vecindades compacta. Es decir, cada uno de los elementos del sistema es un subconjunto compacto.

La siguiente proposición nos permite caracterizar a los subconjuntos compactos de un espacio topológico. La prueba es inmediata, pues se utiliza la topología relativa de un conjunto en un espacio topológico.

Proposición A.3. *Sea K un subconjunto de un espacio topológico $(X,\mathcal{T})$. Entonces, K es compacto si, y sólo si para toda colección $\{G_\alpha\}$ de abiertos en X tal que $K\subset\cup_\alpha G_\alpha$, existe una subcolección finita de $\{G_{\alpha_k}\}_{k=1}^N$, para algún $N\in\mathbb{N}$, tal que $K\subset\cup_{k=1}^N G_{\alpha_k}$.*

Como consecuencia inmediata tenemos:

Colorario A.2.1. *Sean $(X,\mathcal{T})$ un espacio topológico y Y un subespacio de X. Un subconjunto K de Y es compacto si, y sólo si K es subconjunto compacto en X.*

Sin embargo, la compacidad no es una propiedad hereditaria pues en el caso de $\mathbb{R}$ un intervalo abierto (a,b) no es compacto y esta contenido en un espacio compacto $[a,b]$. No obstante se preserva cuando consideramos subespacios cerrados.

Proposición A.4 ([15]). *Un subconjunto cerrado K de un espacio topológico compacto $(X,\mathcal{T})$ es compacto.*

La compacidad de preserva por funciones continuas, veamos a continuación:

Proposición A.5 ([15]). *Si $(X,\mathcal{T}_X)$ es un espacio compacto, $(Y,\mathcal{T}_Y)$ un espacio topológico y existe una función continua $f\colon X\to Y$ tal que $f(X)=Y$, entonces Y es compacto.*

De acuerdo con esta proposición, para cualquier función continua $f\colon X\to Y$, consideramos $i\colon X\to f(X)$ dada, para cada $x\in X$, por $i(x)=f(x)$ y $f(X)$ con la topología relativa de Y, tenemos que i es continua y, por tanto, $f(X)$ es compacto.

Un espacio topológico $(X,\mathcal{T})$ es un *espacio de Hausdorff* (T_2) si dados $x,y\in X$, con $x\neq y$, existen $U,V\in\mathcal{T}$ tales que $x\in U$, $y\in V$ y $U\cap V=\emptyset$.

Proposición A.6. *Si X es un espacio de Hausdorff y K es subespacio compacto de X, entonces K es cerrado.*

Proposición A.7 ([15]). *Si X es un espacio compacto, Y un espacio de Hausdorff y $f\colon X\to Y$ es continua entonces f es cerrada; es decir, si C es un subconjunto cerrado en X, entonces $f(C)$ es un conjunto cerrado en Y.*

En el caso de $\mathbb{C}$ y $\mathbb{R}^n$, los conjuntos acotados juegan un papel importante ya que se puede caracterizar a los conjuntos compactos mediante ellos.

Definición A.12. Un subconjunto E de un espacio métrico (X,d) es *acotado* si existen $M>0$ y $x_0 \in X$ tales que $d(x,x_0) \le M$ para cualesquier $x \in E$.

En el caso de funciones decimos que una *función es acotada* si su conjunto imagen es acotado. Asi, decimos que una función $f\colon X \to Y$ entre espacios métricos (X,d_X) y (Y,d_Y) es acotada si y solo sí existe $y_0 \in Y$ y $M>0$ tal que para cada $x \in X$ se tiene $d_Y(f(x),y_0) \le M$.

Teorema A.3. *Si K es un subconjunto compacto de un espacio métrico (X,d), entonces K es cerrado y acotado.*

Ahora, veremos una manera de caracterizar a los conjuntos compactos de un espacio métrico en general.

Definición A.13. Sea $(X,\mathcal{T})$ un espacio topológico y $K \subseteq X$, decimos que K es *secuencialmente compacto* si dada una sucesión x_n en K, existe una subsucesión convergente a un punto de K.

Por ejemplo, en $\mathbb{R}$ con la topología usual inducida por la métrica euclidiana, el intervalo $(0,1)$ no es secuencialmente compacto pues la sucesión $\{1/n\}_{n=2}^{\infty}$ converge a 0, pero $0 \notin (0,1)$. Aunque $(0,1)$ no es secuencialmente compacto sí es relativamente compacto porque satisface las condiciones de la siguiente afirmación.

Afirmación A.1. Un subconjunto K de un espacio métrico (X,d) es relativamente compacto si, y sólo si de toda sucesión de elementos de K se puede extraer una subsucesión convergente en (X,d) (a un elemento no necesariamente en K).

Observación A.1. De acuerdo con la Afirmación A.1, todo conjunto secuencialmente compacto A en un espacio métrico (X,d) es relativamente compacto en (X,d), el reciproco no es verdadero, en general. Entonces, es inmediato que si $\overline{A}$ es secuencialmente compacto, entonces A es relativamente compacto. Por otro lado, suponemos que A es relativamente compacto y dada una sucesión a_n cualesquiera de elementos en $\overline{A}$ se toman sólo los términos de la sucesión que pertenecen a A, entonces construimos una subsucesión a_{n_k} tal que $a_{n_k} \in A$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Ya que A es relativamente compacto, existe una subsucesión de a_n convergente en (X,d). Como $A \subseteq \overline{A}$, ésa nueva subsucesión es convergente en $\overline{A}$. Por lo tanto, si A es relativamente compacto, $\overline{A}$ es secuencialmente compacto.

El siguiente resultado nos permite caracterizar a los conjuntos compactos mediante subconjuntos secuencialmente compactos de un espacio métrico.

Teorema A.4 (Heine-Borel-Lebesgue)**.** *Sea (X,d) un espacio métrico y $K \subseteq X$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) *K es compacto.*

(b) *Todo subconjunto infinito de* K*, tiene un punto de acumulación en* K.

(c) K *es secuencialmente compacto.*

Como consecuencia inmediata de la Observación A.1 el Teorema A.4, tenemos

Colorario A.4.1. *Sea* K *un subconjunto de un espacio métrico* (X, d). *Entonces,* K *es relativamente compacto si, y sólo si* $\overline{K}$ *es compacto.*

Bibliografía

[1] Alexander, Daniel S. (2013). *A History of Complex Dynamics: From Schröder to Fatou and Julia* (Aspects of Mathematics, 24). F. Vieweg & Sohn, Braunshweig/Wiesbaden.

[2] Bolsch, Andreas. (1997).*Iteration of meromorphic functions with countably many essential singularities.* [PhD Thesis, Technical University of Berlin].

[3] Conway, J. B. (1973). *Functions of One Complex Variable* . Volume I. Springer-Verlag New York.

[4] Domínguez, P., Sienra, G. & Hernández, I. (2021). *Dynamics of a family of meromorphic functions with two essential singularities which are not omitted values.* Qualitative theory of dynamical systems, 20:1-19.

[5] Domínguez, P., de Oca, M. A. M. & Sienra, G. (2022). *Extended escaping set for meromorphic functions outside a countable set of transcendental singularities.* In Annales Polonici Mathematici, volume 129, pages 25-41. Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk.

[6] Domínguez, P. & Contreras, J. E. V. (2014). *Dinámica Holomorfa, Los conjuntos de Fatou y Julia y algunas de sus propiedades de tres clases de funciones meromorfas.* Monografía, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Editorial BUAP.

[7] Ivorra, Carlos. *Funciones de variable compleja con aplicaciones a la teoría de números.* URL: https://www.uv.es/ivorra/Libros/Libros.htm.

[8] Greene, R. E. & Krantz, S. G. (2006). *Function theory of one complex variable.* Third Edition. American Mathematics Society.

[9] Hua, X. H. & Yang, C. C. (2019). *Dynamics of transcendental functions.* (Asian Mathematics Series, 1) CRC Press.

[10] Marsden, J. E. & Hoffman, M. J. (1999). *Basic Complex Analysis*. 3rd. Edition, W. H. Freeman and Company, New York.

[11] Milnor, John. (2006). *Dynamics in One Complex Variable*. (Annals of Mathematics Studies, 160). Third Edition. Princeton University Press.

[12] Miranda, Rick. (1995). *Algebraic curves and Riemann surfaces* (Vol. 5). American Mathematical Society.

[13] Napier, T. & Ramachandran, M. (2011). *An Introduction to Riemann Surfaces.* Springer Science & Business Media.

[14] Noguchi, Junjiro. (1998). *Introduction to Complex Analysis*. (Translations of Mathematical Monographs, Vol. 168). American Mathematical Society.

[15] Segura, F. C. & Mascarúa, A. T. (2012). *Elementos de topología general.* Aportaciones Matemáticas.

[16] Schiff, Joel L. (1993). *Normal Families*. Springer Science & Business Media.

[17] Varolin, Dror. (2021). *Riemman Surfaces by Way of Complex Analytic Geometry.* American Mathematical Soc., USA.

[18] Yanakiev, Petar. (2011). *The uniformization theorem and universal covers.* VIGRE at the University of Chicago.

[19] Zalcman, Lawrence. (1998). *Normal families: new perspectives*. Bulletin of the American Mathematical Society, 35(3):215-230.

Índice alfabético