



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Reconstrucción de objetos con campo de visión variable
mediante Holografía Digital

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

LICENCIADO EN FÍSICA

por

Mariana Martínez Márquez

Asesorado por

MC. Luis Alberto Rendón Delgado

Dr. Carlos Ignacio Robledo Sánchez

Puebla, Pue.
Agosto de 2024



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Reconstrucción de objetos con campo de visión variable
mediante Holografía Digital

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

LICENCIADO EN FÍSICA

por

Mariana Martínez Márquez

Asesorado por

MC. Luis Alberto Rendón Delgado

Dr. Carlos Ignacio Robledo Sánchez

Puebla, Pue.
Agosto de 2024

Título: Reconstrucción de objetos con campo de visión variable
mediante Holografía Digital

Estudiante: MARIANA MARTÍNEZ MÁRQUEZ

COMITÉ

Dr. Maximino Luis Arroyo Carrasco
Presidente

Dra. Bárbara Emma Sánchez Rinza
Secretario

Dr. Miguel Ángel Olvera Santamaría
Vocal

Dra. Areli Montes Pérez
Suplente

MC. Luis Alberto Rendón Delgado
Asesor

Dr. Carlos Ignacio Robledo Sánchez
Asesor

Índice general

Resumen	IX
Introducción	X
1. Antecedentes	1
1.1. Breve historia de la holografía	1
1.2. Holografía Digital	2
2. Marco teórico	4
2.1. Ondas de luz	4
2.2. Interferencia	7
2.2.1. Condiciones para la interferencia	9
2.3. Óptica de Fourier	14
2.3.1. La Transformada de Fourier	14
2.4. Difracción	16
2.4.1. Principio de Huygens	16
2.4.2. Teoría escalar de la difracción	17
2.4.3. Formulación de Fresnel Kirchhoff	19
2.4.4. Difracción de Fresnel	24
2.4.5. Difracción de Fraunhofer	25
2.5. Speckle	25
2.6. Holografía	27
2.6.1. Grabado de hologramas	27
2.6.2. Reconstrucción de hologramas	29
2.6.3. Formación de imágenes mediante holografía	31
2.6.4. Algunos tipos de hologramas	36
2.7. Holografía Digital	39
2.7.1. Principios generales	40
2.7.2. Reconstrucción numérica de Hologramas	43
2.7.3. Holografía digital de Fourier	46
2.7.4. Separación de Imagen Virtual, Imagen Real y Término de DC	47
2.7.5. Grabado de hologramas digitales	49
3. Metodología	52
3.1. Arreglo experimental	52
3.2. Proceso computacional	55
3.2.1. Caso 1	55
3.2.2. Caso 2	56
3.2.3. Detalles de la reconstrucción	57
3.2.4. Filtros	57

4. Resultados	61
4.1. Caso 1	61
4.2. Caso 2	70
4.2.1. Desplazamiento del objeto	70
4.2.2. Rotación de objetos	71
4.2.3. Desplazamiento de la cámara	74
4.3. Enfoque de objetos	76
5. Conclusiones	77
A. Reconstrucción de objetos a color mediante Holografía Digital	78
A.1. Resultados	78
Bibliografía	83

Índice de figuras

1.1. Uno de los primeros hologramas de D. Gabor. Arriba: el holograma. Abajo izquierda: el objeto. Abajo derecha: la imagen reconstruida, [5].	1
1.2. Grabado de un holograma.	2
2.1. Patrón de interferencia correspondiente a un interferómetro tipo Michelson, capturado en el Laboratorio de Interferometría y Holografía.	8
2.2. Interferencia de dos ondas planas.	8
2.3. Variación en el tiempo del campo eléctrico de un onda monocromática, [3].	10
2.4. Interferómetro tipo Michelson.	10
2.5. Interferómetro de Young	13
2.6. Ejemplos de pares de transformadas de Fourier, [5]	15
2.7. a) Abertura rectangular y su transformada de Fourier. b) Apertura circular y su transformada de Fourier, [5].	16
2.8. Principio de Huygens para explicar la difracción.	17
2.9. Superficie de integración. La superficie S , se muestra esférica por fines ilustrativos, aunque en la práctica no es necesario que lo sea.	18
2.10. Geometría usada para deducir la formulación de Kirchhoff.	20
2.11. Abertura iluminada.	21
2.12. Geometría de difracción.	23
2.13. Difracción a) clase Fraunhofer o de campo lejano y b) difracción de clase Fresnel o de campo cercano.	24
2.14. Patrón de Speckle	25
2.15. Formación de un patrón de speckle.	26
2.16. Izquierda: Formación de Speckle subjetivo. Derecha: Formación de Speckle objetivo.	27
2.17. Arreglo experimental típico para grabar hologramas de objetos tridimensionales, [7].	28
2.18. Reconstrucción de un holograma, [3].	29
2.19. a) Grabado del holograma de un objeto fuente puntual. b) Generación de la imagen virtual. c) Generación de la imagen real, [1]	30
2.20. Sistema de coordenadas utilizado para estudiar la formación de imágenes mediante hologramas. Arriba: grabado de hologramas. Abajo: reconstrucción de imagen, [2].	31
2.21. a) Geometrías generalizadas de grabación y b) Reconstrucción.	34
2.22. La imagen virtual y real de un holograma fuera de ángulo, [7].	36
2.23. Principio de la holografía de transformada de Fourier con referencia puntual. (a) Esquema para la adquisición de hologramas de Fourier. (b) Distribución de la muestra: objeto y apertura de referencia. D es la extensión (diámetro) del objeto, y L es la distancia entre el objeto y la referencia. (c) Patrón de difracción solo de la referencia. (d) Patrón de difracción del objeto y la referencia juntos—holograma de transformada de Fourier. (e) Distribución de la muestra (amplitud) reconstruida calculando la transformada de Fourier del holograma de transformada de Fourier, exhibiendo dos reconstrucciones centro-simétricas en la posición de la referencia.	37

2.24. Holograma arcoíris. a)Primer paso del grabado. b) Segundo paso del grabado. . . .	38
2.25. Reconstrucción de la imagen a partir de un holograma de arco iris. a) Geometría de reconstrucción. b) Tamaños de la ranura en diferentes longitudes de onda.	39
2.26. Conceptos básicos de Holografía Convencional y Holografía Digital, [5].	40
2.27. Holografía digital a)Grabado b)Reconstrucción con una onda de referencia E_R c)Reconstrucción con onda de referencia conjugada E_R^*	41
2.28. Sistema de coordenadas para la reconstrucción numérica de hologramas.	42
2.29. Reconstrucción de imagen virtual.	43
2.30. Holografía digital de Fourier sin lentes.	46
2.31. Reconstrucción de un holograma digital.	47
2.32. Holografía digital con una onda de referencia inclinada.a) Grabado b)Reconstrucción	48
2.33. Configuración de transferencia interlineal.	49
2.34. Configuración de transferencia de cuadro completo.	50
2.35. Configuración de cuadro completo.	50
3.1. Diagrama del arreglo construido, a continuación se describen detalladamente los componentes utilizados.	52
3.2. Arreglo Experimental.	53
3.3. Ondas usadas para grabar hologramas.	54
3.4. Diagrama de flujo, proceso computacional caso 1.	55
3.5. Diagrama de flujo, proceso computacional caso 2.	56
3.6. Holograma completo sin filtrar orden cero. Con ajuste de contraste.	57
3.7. Holograma completo sin filtrar orden cero. Sin ajuste de contraste.	58
3.8. Holograma completo filtrando el orden cero. Sin ajuste de contraste.	58
3.9. Orden uno de difracción recortado de la reconstrucción.	59
3.10. Orden uno de difracción recortado de la reconstrucción. Con filtro pasabajas. . . .	60
4.1. Fotografía del objeto. Caso Ajedrez.	61
4.2. Holograma capturado. Caso Ajedrez. Los anillos que se observan no son parte del patrón de interferencia holográfico, se deben a los defectos en los componentes del arreglo.d	62
4.3. Región central reconstruida. Caso Ajedrez.	62
4.4. Reconstrucción de las 4 esquinas del holograma. Caso Ajedrez.	63
4.5. Fotografía del objeto. Objetos 1.	63
4.6. Holograma capturado. Caso Objetos1.	64
4.7. Región central reconstruida. Caso Objetos1.	64
4.8. Reconstrucción de las 4 esquinas del holograma. Caso Objetos 1.	65
4.9. Fotografía del objeto. Objetos 2.	65
4.10. Holograma capturado. Caso Objetos2.	66
4.11. Región central reconstruida. Caso Objetos2.	66
4.12. Reconstrucción de las 4 esquinas del holograma. Caso Objetos 2.	67
4.13. Fotografía del objeto. Objetos 3.	67
4.14. Holograma capturado. Caso Objetos3.	68
4.15. Región central reconstruida. Caso Objetos3.	68
4.16. Reconstrucción de las 4 esquinas del holograma. Caso Objetos 3.	69
4.17. Desplazamiento horizontal de un conjunto de 3 objetos. Caso 1.	70
4.18. Desplazamiento vertical de un conjunto de 3 objetos. Caso 1.	71
4.19. Fotografía de objeto. caso rotación.	71
4.20. Dado rotando	72
4.21. Objetos rotando	73

4.22. Desplazamiento horizontal de un conjunto de 4 objetos. En las imágenes de la última fila se observa cómo el objeto no solo se desplaza a la izquierda, sino que también disminuye la definición de sus bordes hasta que prácticamente desaparece (pues el holograma ocupa un espacio muy pequeño en el sensor <i>CCD</i>).	74
4.23. Desplazamiento vertical de un conjunto de 3 objetos. Caso 2.	75
4.24. Ajedrez reconstruido con distintas distancias de propagación. Izquierda: $z = 0.48\text{ m}$, caballo enfocado. Centro: $z = 0.49\text{ m}$, peón enfocado. Derecha: $z = 0.5\text{ m}$, rey enfocado.	76
4.25. Ajedrez reconstruido con distintas distancias de propagación. Izquierda: $z = 0.58\text{ m}$, letra z enfocado. Centro: $z = 0.62\text{ m}$, muñequito enfocado. Derecha: $z = 0.67\text{ m}$, dado enfocado.	76
A.1. Diagrama de flujo de la reconstrucción a color.	78
A.2. Flor de plástico.	79
A.3. a) Hologramas de la flor capturados con los 3 diferentes láseres. b) Reconstrucción de cada Holograma. c) Cada reconstrucción asignada a un canal de color.	79
A.4. Reconstrucción a color de la flor.	79
A.5. Pony de plástico.	80
A.6. a) Hologramas del pony capturados con los 3 diferentes láseres. b) Reconstrucción de cada Holograma. c) Cada reconstrucción asignada a un canal de color.	80
A.7. Reconstrucción a color del Pony.	80
A.8. Juguete de plástico.	81
A.9. a) Hologramas del juguete capturados con los 3 diferentes láseres. b) Reconstrucción de cada Holograma. c) Cada reconstrucción asignada a un canal de color.	81
A.10. Reconstrucción a color del juguete.	81
A.11. Dado de plástico.	82
A.12. a) Hologramas del dado, capturados con los 3 diferentes láseres. b) Reconstrucción de cada Holograma. c) Cada reconstrucción asignada a un canal de color.	82
A.13. Reconstrucción a color del dado.	82

Índice de tablas

2.1. Ejemplos de pares de transformadas de Fourier, [5]	14
---	----

Resumen

El objetivo central del trabajo fue reconstruir objetos con campo de visión variable mediante Holografía Digital. Se inicia presentando una revisión detallada sobre los conceptos fundamentales de la Holografía, empezando por sus fundamentos, pasando por su historia, los tipos de hologramas y culminando con detalles prácticos de la Holografía Digital.

Se implementó, un arreglo interferométrico que permitió capturar hologramas digitales. En este arreglo se modificaron las distancias de propagación, los ángulos de iluminación y la posición del objeto para encontrar la configuración óptima de captura de los hologramas. Posteriormente se desarrolló un algoritmo en Matlab para simular la propagación de Fresnel y con ello obtener la reconstrucción de los hologramas capturados. En este paso el uso de filtros fue de gran importancia, pues ayudaron a mejorar el contraste y a disminuir el ruido.

Hasta este punto el grabado y la reconstrucción de los hologramas darían lugar a imágenes planas, no muy diferentes de las fotografías convencionales, esta limitación de la Holografía Digital fue superada segmentando un holograma y reconstruyéndolo por secciones, variando la distancia de propagación en la reconstrucción de los hologramas y formando un holograma más grande que el sensor, para después capturarlo y reconstruirlo por regiones. Cada uno de estos procedimientos se realizó por separado, logrando así reconstruir objetos con campo de visión variable mediante Holografía Digital.

Palabras clave: *Holografía, Holografía Digital, Holograma de Fresnel, Interferómetro, Reconstrucción numérica*

Introducción

Los detectores de radiación óptica responden a la intensidad de la radiación incidente, sin embargo, la intensidad no determina de manera única el campo óptico. Las técnicas interferométricas pueden utilizarse para superar la limitación de los detectores ópticos. La adición de dos campos de luz coherente produce un patrón de interferencia cuya imagen se llama holograma. La *Holografía*, es el estudio de la producción y aplicación de hologramas, se diferencia de la *Interferometría* solo en la complejidad de las ondas que se permiten interferir y en la geometría de los arreglos experimentales, [7].

Un holograma es un registro del patrón de interferencia entre un frente de onda plano o esférico llamado *haz de referencia* y un frente de onda de forma arbitraria y por lo general muy complicada que proviene del objeto cuya imagen debe ser reconstruida llamado *haz objeto*, [6].

En Holografía Digital (Digital Holography, DH por sus siglas en inglés) se reemplazan los procedimientos fotoquímicos de la holografía clásica con imágenes digitales. Aunque muchas de las propiedades destacables de la holografía han sido conocidas durante décadas, sus aplicaciones prácticas han estado limitadas debido a los procedimientos complicados y los estrictos requisitos de equipos, [5].

En la Holografía Digital, el patrón de interferencia holográfico se genera ópticamente mediante la superposición de un haz de objeto y uno de referencia, dicho patrón es muestreado digitalmente por una cámara digital y transferido a una computadora como una matriz de números. La teoría de la difracción describe por completo la propagación del campo óptico, lo que permite la reconstrucción numérica de la imagen como una matriz de números complejos que representan la amplitud y la fase del campo óptico, [5].

La Holografía Digital ofrece una serie de ventajas significativas, como la capacidad de adquirir hologramas rápidamente, la disponibilidad de información completa de amplitud y fase del campo óptico, y la versatilidad de las técnicas interferométricas y de procesamiento de imágenes, [5].

La principal limitación que se tiene en DH es que las reconstrucciones de los hologramas se despliegan únicamente como imágenes planas que no le permiten al observador variar su ángulo de visión, como se podría hacer en holografía clásica. Los hologramas digitales antes de su reconstrucción guardan mucha más información sobre el objeto de la que se despliega solo en una imagen bidimensional.

Por consiguiente, se tuvo como propósito estudiar la técnica de DH como un método para la reconstrucción de objetos con un campo de visión variable. A continuación se hará un análisis de los fundamentos de holografía clásica, para después hacer una introducción a la Holografía Digital y las reconstrucciones numéricas que esta conlleva. Dichos conceptos serán aplicados en la metodología experimental al grabar y reconstruir hologramas digitales.

Se logró reconstruir objetos con campo de visión variable aplicando, por separado, los siguientes procedimientos:

- Segmentado de un holograma.

Consiste en capturar un holograma de menor o igual tamaño que el sensor, posteriormente se recortan 5 regiones de este (4 esquinas y una central), las cuales se reconstruyeron individualmente.

- Cambio en la distancia de propagación.

Consiste en capturar un holograma y reconstruirlo variando el parámetro de la distancia de propagación (z), el cuál determina el plano de enfoque de la reconstrucción.

- Captura de diferentes regiones de un holograma.

Consiste en formar un holograma más grande que el sensor para después capturarlo por secciones y reconstruirlas por separado.

Objetivo general

Reconstruir objetos con campo de visión variable mediante Holografía Digital.

Objetivos particulares

1. Implementar un arreglo interferométrico que permita grabar hologramas digitales.
2. Capturar hologramas digitales con distintas perspectivas, tanto de la cámara como del objeto.
3. Desarrollar un algoritmo en Matlab para simular la propagación de Fresnel y con ello obtener la reconstrucción de los hologramas digitales.
4. Explorar las propiedades de los hologramas para conseguir la reconstrucción de un campo de visión variable.
5. Realizar una revisión bibliográfica sobre los diferentes tipos de holografía, tanto digital como clásica.

Capítulo 1

Antecedentes

1.1. Breve historia de la holografía

La palabra *Holograma* fue acuñada a partir de la palabra griega *holos*, que significa “entero”, por Dennis Gabor. La holografía fue inventada en 1948 por Gabor en un esfuerzo por mejorar la resolución del microscopio electrónico, donde la corrección de las aberraciones de la lente electrónica planteaba una dificultad técnica creciente. En lugar de intentar perfeccionar la lente de imagen electrónica, Gabor la eliminó por completo. Gracias a ello notó que el patrón de difracción del haz de electrones contenía información sobre la amplitud y fase de la onda de electrones. Una vez registrado el patrón de la onda, propuso que este se utilizara para sintetizar ópticamente el campo del objeto. Esto permitió el uso de óptica de luz visible para la formación de imágenes, lo cual es mucho más fácil que la óptica electrónica. Nombró este nuevo principio de imagen como *Holografía* por su capacidad para registrar todo el campo óptico, ([7], [5]).

Los primeros estudios de Gabor sobre holografía fueron influenciados por el trabajo previo de W.L. Bragg en cristalografía de rayos X, pero fue principalmente motivado por posibles aplicaciones de su nueva técnica. Gabor describió su propuesta original con dos artículos, publicados en 1949 y 1951. La holografía no resultó ser útil para la microscopía electrónica y no atrajo mucho interés hasta el descubrimiento del láser en 1960, ([7], [1]).

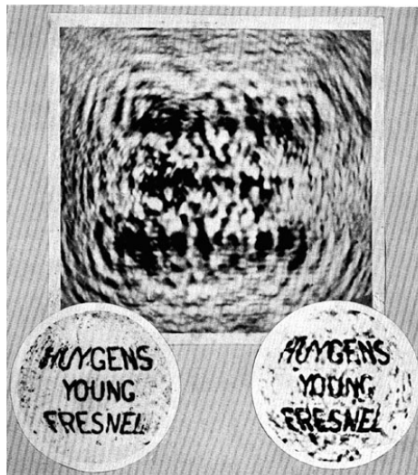


Figura 1.1: Uno de los primeros hologramas de D. Gabor. Arriba: el holograma. Abajo izquierda: el objeto. Abajo derecha: la imagen reconstruida, [5].

Aunque los experimentos de demostración de Gabor, figura 1.1, se realizaron por medios ópticos tanto para la grabación como para la reconstrucción, la falta de fuentes de luz de suficiente coherencia e intensidad impidió el progreso en la holografía óptica. Dos invenciones fueron cruciales para el desarrollo de las técnicas y aplicaciones de la holografía óptica. La primera de estas invenciones fue el láser, que al tratarse de una fuente de alta potencia y coherencia, proporcionó un contraste de interferencia de alta calidad. La segunda, debido a Emmett Leith y Juris Upatnieks (Universidad de Michigan, Ann Arbor), fue la iluminación fuera de eje con una onda de referencia

separada, eliminando así el problema de las imágenes de orden cero y las imágenes gemelas de la configuración en eje de Gabor, [5].

Finalmente en 1964, demostraron la reconstrucción holográfica de objetos sólidos tridimensionales, que se asemejan en gran medida a los objetos originales, por ejemplo, son tridimensionales y muestran un paralaje entre objetos cercanos y más distantes. Inaugurando el estudio de la holografía, [5].

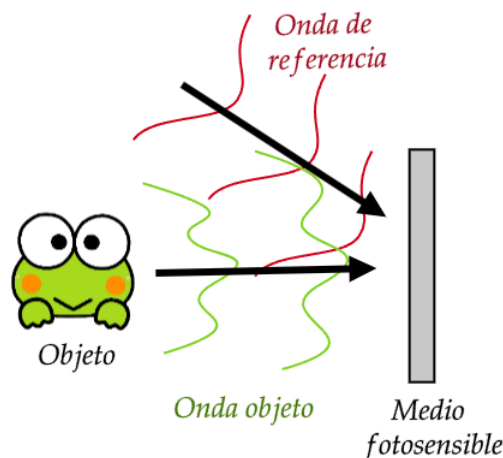


Figura 1.2: Grabado de un holograma.

Un holograma es capaz de producir una imagen tridimensional de cualquier objeto. En la figura 1.2 se muestra una configuración típica utilizada para crear un holograma. Dos ondas mutuamente coherentes. Una onda, llamada onda de referencia, ilumina el medio de grabación; la onda de referencia proporciona el sesgo necesario para grabar tanto la amplitud como la fase de la onda objeto. La segunda onda coherente ilumina el objeto de interés y la luz dispersada por el objeto crea la onda objeto. La onda objeto y la onda de referencia interfieren en el plano del holograma y un medio fotosensible registra la distribución de intensidad espacial de la interferencia. En algún momento posterior, las franjas grabadas pueden ser iluminadas por un duplicado de la onda de referencia, llamada onda de reconstrucción. El patrón de interferencia grabado difracta la onda de reconstrucción en una onda de imagen. Si un observador mira a través de la grabación, llamada holograma de transmisión, verá una imagen tridimensional del objeto original creada por la onda de imagen, [7].

1.2. Holografía Digital

En holografía clásica convencional, en el espacio real, el holograma se registra en una placa fotográfica o en cualquier otro medio cuyas propiedades de transmisión óptica o reflexión cambian en respuesta a la intensidad de la luz que incide sobre él. Tanto el registro como la reconstrucción tienen lugar en el espacio real utilizando luz real y componentes ópticos reales. Por otro lado, la propagación y difracción de la luz se describen completamente y con precisión mediante la teoría de difracción. Por lo tanto, es posible simular parte o todo el proceso holográfico mediante cálculos numéricos, [5].

En cambio, en Holografía Digital, el proceso de registro es en el espacio real, pero el holograma se captura utilizando un detector de matriz electrónica, como cámaras CCD (Dispositivo de carga acoplada, en inglés Charge-Coupled Device) o CMOS (Semiconductor complementario de óxido

metálico, en inglés Complementary Metal Oxide Semiconductor). Una vez que el holograma está grabado y disponible en forma numérica, el proceso de reproducción no se lleva a cabo físicamente, sino que se realiza mediante métodos de procesamiento numérico. Dicha reconstrucción se realiza dentro de la computadora y el resultado se muestra en el monitor o se almacena electrónicamente para su procesamiento y manipulación adicional, ([5], [4]).

El desarrollo de la tecnología informática permitió transferir tanto el proceso de grabación como el proceso de reconstrucción a la computadora. Schnars y Jüptner fueron los primeros en desarrollar la grabación directa de hologramas de Fresnel con sensores CCD. El primer nombre propuesto para esta técnica fue *Holografía directa*, enfatizando la forma directa desde la grabación óptica hasta el procesamiento numérico. Más tarde, el término *Holografía Digital* fue aceptado en la comunidad de metrología óptica para este método, [10].

Aunque este nombre a veces también se usa para la Holografía Generada por Computadora, en el presente trabajo, se utiliza como designación para la grabación digital y reconstrucción numérica de hologramas.

Algunas ventajas de la Holografía Digital son las siguientes

- En comparación con el registro fotoquímico, el registro electrónico mediante sensores CCD o CMOS es mucho más rápido, más controlable y más cercano a la sensibilidad lineal. También es más económico a largo plazo al no requerir un cuarto oscuro, suministros químicos y trabajo de procesamiento fotográfico.
- En DH, los hologramas pueden procesarse de maneras que son difíciles o inviables en el espacio real, como la superposición de múltiples hologramas iluminados con diferentes longitudes de onda.
- Utilizando una computadora personal, una transformada rápida de Fourier bidimensional de una matriz de $1,024 \times 1,024$, por ejemplo, lleva una fracción de segundo, en comparación con muchos minutos de procesamiento fotoquímico en la holografía convencional.

Ante estos beneficios, es fácil prever que la fuerza y versatilidad de las técnicas de Holografía Digital solo continuarán aumentando, ([5], [10]).

Capítulo 2

Marco teórico

2.1. Ondas de luz

La luz puede ser descrita como una onda electromagnética o como un conjunto de partículas (fotones). El modelo al que se haga referencia depende del experimento bajo investigación. Ambos modelos se contradicen entre sí, pero son necesarios para describir todo el espectro de fenómenos de la luz. Por un lado la interacción de la luz con la estructura atómica de la materia se describe mediante la óptica cuántica (la teoría que trata con fotones). En cambio la refracción, la difracción y la interferencia se describen mediante el modelo de ondas, que se basa en la teoría del electromagnetismo clásica, [4].

La interferencia y la difracción forman la base de la holografía. Por lo tanto, se utilizará el modelo ondulatorio, para describir los conceptos fundamentales de holografía. Las cantidades oscilantes son los campos eléctrico y magnético. Las amplitudes de los campos oscilan perpendicularmente a la dirección de propagación de la luz y perpendicularmente entre sí, es decir, las ondas de luz son fenómenos transversales. Las ondas de luz pueden describirse ya sea por el campo eléctrico o por el campo magnético, [4].

Para derivar la ecuación de onda, que describe la propagación de la luz, partimos de las ecuaciones de Maxwell.

- Ley de Gauss para el campo eléctrico

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.1)$$

- Ley de Gauss para el campo magnético

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.2)$$

- Ley de inducción Faraday

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.3)$$

- Ley de Ampere Maxwell

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2.4)$$

Calculando el rotacional de la ley de inducción de Faraday (2.3), se llega a

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla \times \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \quad (2.5)$$

como el rotacional depende de la posición y no del tiempo, en el lado derecho de la ecuación se puede intercambiar el orden de los operadores llegando a

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{B}) \quad (2.6)$$

utilizando la identidad $\nabla \times (\nabla \times) = \nabla(\nabla \cdot) - \nabla^2$ y la ley de Ampere-Maxwell (2.4) se obtiene

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad (2.7)$$

distribuyendo la derivada del lado derecho y sustituyendo la ley de Gauss para el campo eléctrico (2.1), entonces

$$\nabla \left(\frac{\rho}{\epsilon_0} \right) - \nabla^2 \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mu_0 \vec{J} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (2.8)$$

para el vacío con la ecuación anterior pasa a ser

$$-\nabla^2 \vec{E} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (2.9)$$

como $\frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = c$, con c la velocidad de la luz en el vacío, entonces la ecuación de onda en el vacío es

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (2.10)$$

Análogo a este proceso se puede obtener la ecuación de onda para el campo magnético, [3].

Una onda armónica plana, linealmente polarizada, descrita por

$$E(x, y, z, t) = A \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \phi_0) \quad (2.11)$$

es una solución de la ecuación de onda (2.10). $E(x, y, z, t)$ es el módulo del vector de campo eléctrico en el punto con vector de posición $\vec{r} = (x, y, z)$ en el tiempo t . La cantidad A se conoce como la amplitud. El vector de onda $\vec{k}$ describe la dirección de propagación de la onda

$$\vec{k} = k \vec{n} \quad (2.12)$$

$\vec{n}$ es un vector unitario en la dirección de propagación. Los puntos de fase igual están ubicados en planos paralelos que son perpendiculares a la dirección de propagación. El módulo de $\vec{k}$, llamado número de onda, se calcula mediante

$$|\vec{k}| \equiv k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (2.13)$$

La frecuencia angular ω se relaciona con la frecuencia de la luz mediante

$$\omega = 2\pi f \quad (2.14)$$

La frecuencia f y la longitud de onda λ están relacionadas por la velocidad de la luz c por

$$c = \lambda f \quad (2.15)$$

El término espacial variable

$$\phi = -\vec{k} \cdot \vec{r} - \phi_0 \quad (2.16)$$

es llamado *fase*, con constante de fase ϕ_0 , [10].

La longitud de onda en el vacío de la luz visible está en el rango de 400 nm (violeta) a 780 nm (rojo profundo). El rango de frecuencias correspondiente es de $7.5 \times 10^{14} \text{ Hz}$ a $3.8 \times 10^{14} \text{ Hz}$. Los sensores de luz como el ojo humano, fotodiodos, películas fotográficas o CCDs no pueden detectar

tan altas frecuencias. La única cantidad directamente medible es la intensidad. Esta es proporcional al promedio temporal del cuadrado del campo eléctrico

$$I = c\epsilon_0 \langle E^2 \rangle \quad (2.17)$$

esta expresión se obtiene de, considerar que el vector de Poynting esta dado por

$$\vec{S} = c^2\epsilon_0 \vec{E} \times \vec{B} \quad (2.18)$$

La magnitud de $\vec{S}$ es la potencia por unidad de área que cruza una superficie cuya norma es paralela a $\vec{S}$. Considerando el caso de una onda plana, armónica y linealmente polarizada que viaja a través del espacio libre en dirección $\vec{k}$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \quad (2.19)$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \quad (2.20)$$

entonces

$$\vec{S} = c^2\epsilon_0 (\vec{E}_0 \times \vec{B}_0) \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \quad (2.21)$$

El promedio temporal del vector de Poynting es

$$\langle S \rangle_T = c^2\epsilon_0 |\vec{E}_0 \times \vec{B}_0| \langle \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \rangle \quad (2.22)$$

como $\langle \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \rangle = \frac{1}{2}$ entonces

$$\langle S \rangle_T = c^2\epsilon_0 |\vec{E}_0 \times \vec{B}_0| \frac{1}{2} \quad (2.23)$$

como $|\vec{E}_0 \times \vec{B}_0| = |\vec{E}_0||\vec{B}_0| \sin(90^\circ) = E_0 B_0 = E_0 \left(\frac{E_0}{c}\right) = \frac{E_0^2}{c}$

$$\langle S \rangle_T = \frac{c^2\epsilon_0}{2} \frac{E_0^2}{c} = \frac{c\epsilon_0 E_0^2}{2} \quad (2.24)$$

como la intensidad es la energía promedio por unidad de área por unidad de tiempo

$$I \equiv \langle S \rangle_T = \frac{c\epsilon_0}{2} E_0^2 \quad (2.25)$$

Note que

$$\langle E^2 \rangle_T = \langle E_0^2 \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \rangle_T = E_0^2 \langle \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \rangle_T = \frac{E_0^2}{2} \quad (2.26)$$

De modo que

$$I = c\epsilon_0 \langle E^2 \rangle_T \quad (2.27)$$

De modo que la intensidad es proporcional al cuadrado de la amplitud del campo eléctrico, [3].

Por otro lado, el campo eléctrico puede ser escrito en forma compleja como

$$E(x, y, z) = a \operatorname{Re} \left\{ e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} - \phi_0)} \right\} \quad (2.28)$$

sin embargo, para facilitar nuestros cálculos, se puede omitir solo considerar la parte real

$$E(x, y, z) = a \left\{ e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} - \phi_0)} \right\} \quad (2.29)$$

Una ventaja de la representación compleja es la separación de los factores espacial y temporal

$$E(x, y, z, t) = ae^{(i\phi)}e^{(i\omega t)} \quad (2.30)$$

La parte espacial del campo eléctrico es llamada *Amplitud compleja*

$$A(x, y, z) = ae^{(i\phi)} \quad (2.31)$$

Las ecuaciones (2.30) y (2.31) no solo son válidas para ondas planas, sino en general para ondas tridimensionales cuya amplitud a y fase ϕ pueden ser funciones de x , y y z . En notación compleja, la intensidad se calcula ahora simplemente tomando el cuadrado del módulo de la amplitud compleja

$$I = \frac{1}{2}\epsilon_0 c |A|^2 = \frac{1}{2}\epsilon_0 c A A^* = \frac{1}{2}\epsilon_0 c a^2 \quad (2.32)$$

En muchos cálculos prácticos donde el valor absoluto de I no es de interés, el factor $\frac{1}{2}\epsilon_0 c$ puede ser omitido, lo que significa que la intensidad se calcula simplemente como $|A|^2 = I$.

2.2. Interferencia

La interferencia ocurre cuando dos ondas mutuamente coherentes, se superponen en algún lugar del espacio. Para que dos ondas sean mutuamente coherentes se debe cumplir una de las siguientes afirmaciones

1. Ambas tienen su origen en la misma fuente.
2. Son monocromáticas y tienen exactamente la misma frecuencia, como en el caso de algunos láseres, [6].

Supongamos que dos ondas salen de una fuente luminosa y recorren caminos diferentes para después reunirse nuevamente en una pantalla. Si cada onda individual descrita por $\vec{E}_i(\vec{r}, t)$ es una solución de la ecuación de onda, también lo es la superposición

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \sum \vec{E}_i(\vec{r}, t) \quad \text{con } i = 1, 2, 3, \dots \quad (2.33)$$

esto se debe a que la ecuación (2.10) es una ecuación diferencial lineal, [10].

A continuación, se considera la interferencia de dos ondas monocromáticas con frecuencias y longitudes de onda iguales. Las amplitudes complejas de las ondas son

$$A_1(x, y, z) = a_1 e^{(i\phi_1)} \quad (2.34)$$

$$A_2(x, y, z) = a_2 e^{(i\phi_2)} \quad (2.35)$$

La amplitud compleja resultante se calcula mediante la suma de las amplitudes individuales

$$A = A_1 + A_2 \quad (2.36)$$

Entonces la intensidad esta dada como

$$\begin{aligned} I &= |A_1 + A_2|^2 = (A_1 + A_2)(A_1 + A_2)^* \\ &= a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\Delta\phi) \end{aligned} \quad (2.37)$$

donde I_1 y I_2 son las intensidades individuales y el argumento del coseno es la diferencia de fase. La intensidad resultante es la suma de las intensidades individuales más el término de interferencia $2\sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta\phi$, que depende de la diferencia de fase entre las ondas, [10].

La intensidad alcanza su máximo en todos los puntos para los cuales se cumple

$$\Delta\phi = 2n\pi \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.38)$$

Esto se llama interferencia constructiva. La intensidad alcanza su mínimo cuando

$$\Delta\phi = (2n + 1)\pi \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.39)$$

Esto se llama interferencia destructiva. El número entero n es el orden de interferencia. Un patrón de interferencia, como el que se muestra en la figura 2.1, consiste en franjas oscuras y brillantes como resultado de la interferencia constructiva y destructiva, [10].

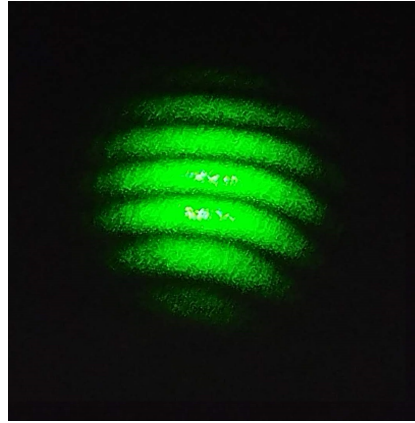


Figura 2.1: Patrón de interferencia correspondiente a un interferómetro tipo Michelson, capturado en el Laboratorio de Interferometría y Holografía.

La superposición de dos ondas planas que se cruzan bajo un ángulo θ una con respecto a la otra resulta en un patrón de interferencia con espaciado equidistante, como se muestra en la figura 2.2. El espaciado de las franjas d es la distancia desde un máximo de interferencia hasta el siguiente, y se puede calcular mediante consideraciones geométricas. La siguiente figura muestra claramente que

$$\sin \theta_1 = \frac{\Delta l_1}{d} \quad \sin \theta_2 = \frac{\Delta l_2}{d} \quad (2.40)$$

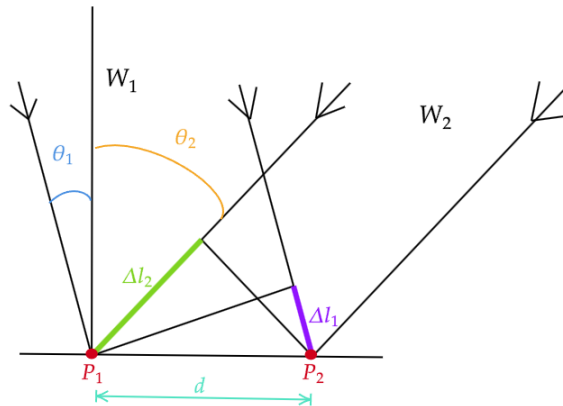


Figura 2.2: Interferencia de dos ondas planas.

Las cantidades θ_1 y θ_2 son los ángulos entre las direcciones de propagación de las frentes de onda y la vertical de la pantalla. La longitud Δl_2 es la diferencia de camino óptico entre el frente de onda W_2 y el frente de onda W_1 en la posición del máximo de interferencia P_1 (W_2 tiene que recorrer un camino más largo hasta P_1 que W_1). En el máximo más cercano, P_2 , las condiciones se invierten: ahora W_1 tiene que recorrer un camino más largo; la diferencia de camino de W_2 con respecto a W_1 es Δl_1 . La variación entre las diferencias de camino óptico entre dos máximos vecinos es, por lo tanto, $\Delta l_1 + \Delta l_2$, [10].

Esta diferencia es igual a una longitud de onda. Por lo tanto, la condición de interferencia es

$$\Delta l_1 + \Delta l_2 = \lambda \quad (2.41)$$

Combinando (2.40) y (2.41) se deduce que

$$\Delta l_1 = d \sin \theta_1 \quad y \quad \Delta l_2 = d \sin \theta_2 \quad \Rightarrow \quad d \sin \theta_1 + d \sin \theta_2 = \lambda \quad (2.42)$$

$$\Rightarrow d(\sin \theta_1 + \sin \theta_2) = \lambda \quad \Rightarrow \quad d = \frac{\lambda}{\sin \theta_1 + \sin \theta_2} \quad (2.43)$$

Usando la identidad de ángulo doble $\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ se obtiene

$$d = \frac{\lambda}{2 \sin \left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right) \cos \left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right)} \quad (2.44)$$

entonces bajo la aproximación $\cos \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \approx 1$, sea $\theta_1 + \theta_2 = \theta$, se obtiene

$$d = \frac{\lambda}{2 \sin \left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right)} \quad (2.45)$$

En lugar del espaciado entre franjas d , el patrón de interferencia también puede describirse mediante la frecuencia espacial f ,

$$f = \frac{1}{d} = \frac{2 \sin \left(\frac{\theta}{2} \right)}{\lambda} = \frac{2}{\lambda} \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \quad (2.46)$$

que es el recíproco de d , [10].

2.2.1. Condiciones para la interferencia

No todos los haces de luz pueden generar interferencia, como se mencionó anteriormente para que este fenómeno tenga lugar es necesario que se cumplan ciertas condiciones, como se describirá a continuación.

Coherencia

En general, la intensidad resultante de dos fuentes diferentes, por ejemplo, dos bombillas eléctricas dirigidas hacia una pantalla, es aditiva. En lugar de franjas oscuras y brillantes como se esperaría según la (2.37), solo se observa un brillo uniforme de acuerdo con la suma de las intensidades individuales, [3].

Para generar franjas de interferencia, las fases de las ondas individuales deben estar correlacionadas. Esta propiedad de correlación se denomina *coherencia*. Se acostumbra definir la coherencia como *La capacidad de la luz de formar franjas*, sin embargo este concepto envuelve un fenómeno mucho más complejo.

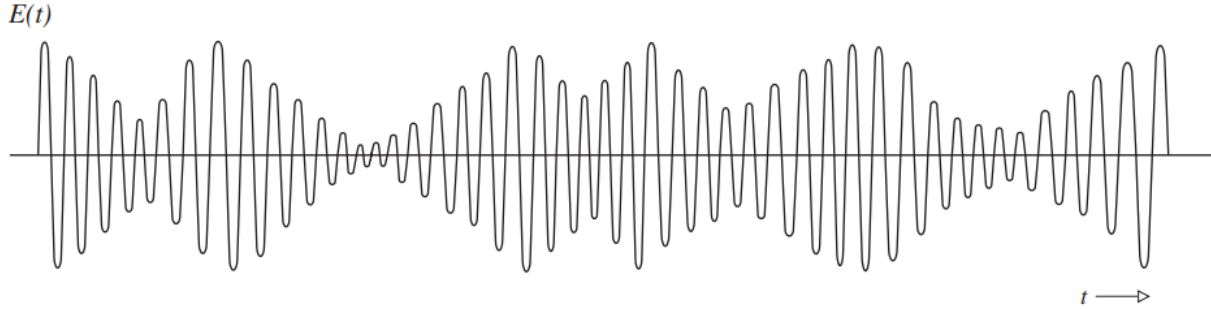


Figura 2.3: Variación en el tiempo del campo eléctrico de una onda monocromática, [3].

La perturbación de la figura 2.3 es casi sinusoidal, aunque la frecuencia varía lentamente (en comparación con la tasa de oscilación 10^{15} Hz) alrededor de algún valor medio. Además, la amplitud también fluctúa, pero esta variación también es comparativamente lenta, [3].

Usualmente se dividen los efectos de coherencia en dos clasificaciones, temporales y espaciales. La primera describe la correlación de una onda consigo misma en diferentes instantes (se relaciona directamente con el ancho de banda finito de la fuente), la segunda representa la correlación mutua de diferentes partes del mismo frente de onda (se relaciona con su extensión finita en el espacio). La coherencia espacial se utiliza habitualmente para describir efectos derivados de la extensión espacial finita de fuentes de luz ordinarias, [3].

Coherencia Temporal

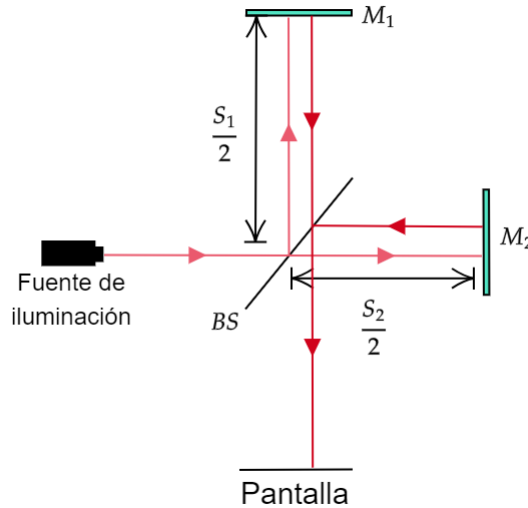


Figura 2.4: Interferómetro tipo Michelson.

El interferómetro de Michelson, figura 2.4, es un interferómetro de dos haces. La luz emitida por la fuente de luz se divide en dos ondas parciales mediante el divisor de haz, por sus siglas en inglés *BS* (Beam Splitter). Las ondas parciales viajan hacia los espejos M_1 y M_2 , respectivamente, y se reflejan de vuelta en las direcciones incidentes. Después de pasar nuevamente por el *BS*, se superponen en una pantalla. Por lo general, las ondas parciales superpuestas no son exactamente paralelas, sino que interfieren con un pequeño ángulo. Como resultado, se hace visible un patrón de interferencia bidimensional, [10].

La longitud del camino óptico desde BS hasta M_1 y de vuelta a BS es S_1 , la longitud del camino óptico desde BS hasta M_2 y de vuelta a BS es S_2 . La interferencia solo puede ocurrir si la diferencia de camino óptico $S_1 - S_2$ no supera cierta longitud L . Si la diferencia de camino óptico excede este límite, las franjas de interferencia desaparecen y en la pantalla solo se observa un brillo uniforme, [10].

La explicación cualitativa de este fenómeno es la siguiente: las franjas de interferencia solo pueden desarrollarse si las ondas superpuestas tienen una relación de fase bien definida (constante). La diferencia de fase entre las ondas emitidas por diferentes fuentes varía al azar y, por lo tanto, las ondas no interfieren. La fuente de luz emite trenes de ondas con longitud finita L . Si la diferencia de camino óptico excede esta longitud de tren de ondas, las ondas parciales no se superponen después de pasar por los diferentes caminos y la interferencia no es posible, [10].

La diferencia crítica de longitud de camino óptico, equivalentemente, la longitud de un tren de ondas se llama longitud de coherencia L . El tiempo de emisión correspondiente para el tren de ondas

$$\tau = \frac{L}{c} \quad (2.47)$$

es llamado *tiempo de coherencia*.

Según el análisis de Fourier, un tren de ondas con longitud finita L corresponde a luz con ancho espectral finito Δf

$$L = \frac{c}{\Delta f} \quad (2.48)$$

La luz con una longitud de coherencia larga es llamada altamente monocromática. La longitud de coherencia es, por lo tanto, una medida de la amplitud espectral.

Las longitudes de coherencia típicas de la luz emitida por fuentes térmicas, como bombillas eléctricas comunes, están en el rango de algunos micrómetros. Esto significa que la interferencia solo se puede observar si los brazos del interferómetro tienen longitudes casi iguales. Por otro lado, los láseres tienen longitudes de coherencia que van desde algunos milímetros (por ejemplo, un láser de diodo de modo múltiple) hasta varios cientos de metros (por ejemplo, un láser Nd:YAG de modo único estabilizado) y hasta varios cientos de kilómetros para láseres de gas especialmente estabilizados utilizados con fines de investigación.

La visibilidad

$$V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} \quad (2.49)$$

es una medida del contraste de un patrón de interferencia. I_{max} e I_{min} son un máximo y un mínimo de intensidad vecinos. Estos se calculan insertando $\Delta\phi = 0$ y $\Delta\phi = \pi$, respectivamente en la ecuación (2.37).

$$I_{max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos 0 = I_1 + I_2 + \sqrt{I_1 I_2} \quad (2.50)$$

$$I_{min} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \pi = I_1 + I_2 - \sqrt{I_1 I_2} \quad (2.51)$$

$$\Rightarrow I_{max} - I_{min} = 4\sqrt{I_1 I_2} \text{ y } I_{max} + I_{min} = 2(I_1 + I_2) \quad (2.52)$$

En el caso ideal de longitud de coherencia infinita, la visibilidad es, por lo tanto

$$V = \frac{4\sqrt{I_1 I_2}}{2(I_1 + I_2)} = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} \quad (2.53)$$

Para tener en cuenta el efecto de la longitud finita de coherencia, se introduce la coherencia propia, conocida como autocorrelación compleja $\Gamma(\tau)$ dada por

$$\Gamma(\tau) = \langle E(t + \tau)E^*(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T E(t + \tau)E^*(t) dt \quad (2.54)$$

$E(t)$ es el campo eléctrico de una onda parcial, mientras que $E(t+\tau)$ es el campo eléctrico de la otra onda parcial. Esta última está retrasada en el tiempo por τ . La ecuación (2.54) es la autocorrelación de E . La cantidad normalizada

$$\gamma = \frac{\Gamma(\tau)}{\Gamma(0)} \quad (2.55)$$

define el grado de coherencia.

Con una longitud finita de coherencia, la ecuación de interferencia (2.37) se remplaza por

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}|\gamma| \cos \Delta\phi \quad (2.56)$$

las ecuaciones (2.52) pasan a ser

$$I_{max} = I_1 + I_2 + \sqrt{I_1 I_2}|\gamma| \quad (2.57)$$

$$I_{min} = I_1 + I_2 - \sqrt{I_1 I_2}|\gamma| \quad (2.58)$$

tomando en cuenta estas ecuaciones, la visibilidad pasa a estar dada por

$$V = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2}|\gamma| \quad (2.59)$$

para dos ondas parciales con la misma intensidad, $I = I_1 = I_2$, la ecuación (2.59) se reduce a

$$V = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2}|\gamma| = \frac{2\sqrt{I^2}}{2I}|\gamma| = |\gamma| \quad (2.60)$$

$|\gamma|$ es igual a la visibilidad, por lo tanto es una medición de la capacidad de que dos ondas puedan interferir entre sí. $|\gamma| = 1$ describe la luz monocromática ideal (luz con longitud de coherencia infinita), del mismo modo $|\gamma| = 0$ le corresponde a la luz completamente incoherente. La luz parcialmente coherente es descrita por el intervalo $0 < |\gamma| < 1$, [10].

Coherencia espacial

La coherencia espacial describe la correlación mutua de diferentes partes del mismo frente de onda. Esta propiedad puede ser medida con el interferómetro de Young, como se muestra en la figura 2.5. Una fuente de luz extendida emite luz desde diferentes puntos. Se observan interferencias posibles en una pantalla. Se coloca una pantalla con dos agujeros entre la fuente de luz y la pantalla. Las franjas resultan de los rayos de luz que viajaron en diferentes direcciones hacia la pantalla, ya sea a través de la rendija superior o de la rendija inferior. El patrón de interferencia desaparece si la distancia entre los agujeros a supera el límite crítico a_k . Este límite se llama *distancia de coherencia*, [3].

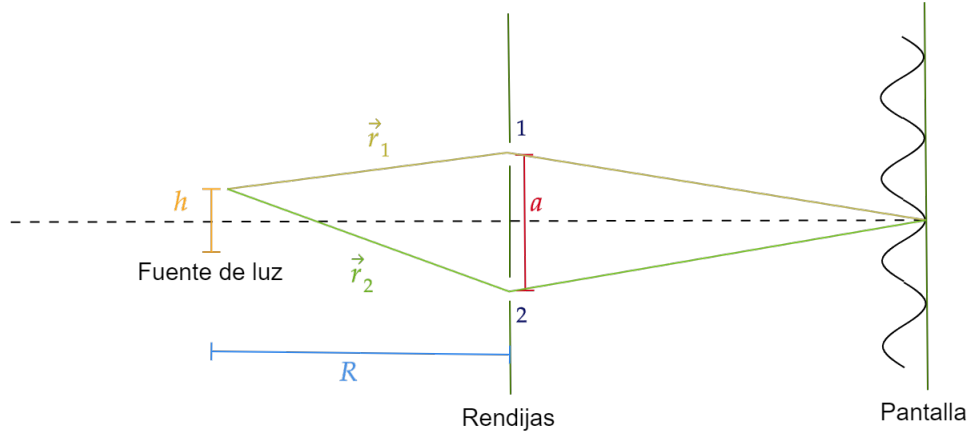


Figura 2.5: Interferómetro de Young

El fenómeno no se relaciona con la amplitud espectral de la fuente de luz, sino que se origina gracias a las ondas emitidas por diferentes fuentes puntuales secundarias de la fuente de luz extendida que se superponen en la pantalla. Puede suceder que una fuente puntual especial genere un máximo de interferencia en un punto específico de la pantalla, mientras que otra fuente puntual genere un mínimo en el mismo punto de la pantalla. Esto se debe a que la longitud del camino óptico es diferente para los rayos de luz que emergen de diferentes puntos de la fuente.

En general, las contribuciones de todas las fuentes puntuales se compensan entre sí y el contraste desaparece. Esta compensación es evitada si se cumple la siguiente condición para cada punto de la fuente de luz:

$$r_2 - r_1 < \frac{\lambda}{2} \quad (2.61)$$

Esta condición se cumple para los bordes de la fuente de luz. Las siguientes relaciones son válidas para los puntos en los bordes

$$r_1^2 = R^2 + \left(\frac{a-h}{2}\right)^2 \quad r_2^2 = R^2 + \left(\frac{a+h}{2}\right)^2 \quad (2.62)$$

h es la altura de la fuente de luz. Usando la suposición $a \ll R$ y $h \ll R$ se obtiene

$$r_2 - r_1 \approx \frac{ah}{2R} \quad (2.63)$$

entonces

$$\frac{ah}{2R} < \frac{\lambda}{2} \quad (2.64)$$

por lo tanto la distancia de coherencia es

$$\frac{a_k h}{2R} = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow a_k = \frac{\lambda R}{h} \quad (2.65)$$

En contraste con la coherencia temporal, la coherencia espacial no depende solo de las propiedades de la fuente de luz, pero si de la geometría del interferómetro.

Una fuente de luz puede generar inicialmente interferencia, lo que significa que la ecuación (2.64) se cumple. Si la distancia entre las rendijas aumenta o la distancia entre la fuente de luz y la abertura disminuye, la ecuación (2.64) se viola y el patrón de interferencia desaparece.

Para considerar la coherencia espacial, la función de autocorrelación definida en la ecuación (2.54) se extiende a

$$\Gamma(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \tau) = \langle E(\vec{r}_1, t + \tau) E^*(\vec{r}_2, t) \rangle \quad (2.66)$$

donde $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ son los vectores espaciales de las rendijas en el interferómetro de Young. Esta función es nombrada la función de correlación cruzada. La función normalizada es

$$\gamma(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \tau) = \frac{\Gamma(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \tau)}{\sqrt{\Gamma(\vec{r}_1, \vec{r}_2, 0)\Gamma(\vec{r}_2, \vec{r}_1, 0)}} \quad (2.67)$$

donde $\Gamma(\vec{r}_1, \vec{r}_2, 0)$ es la intensidad en $\vec{r}_1$ y $\Gamma(\vec{r}_2, \vec{r}_1, 0)$ es la intensidad en $\vec{r}_2$. La ecuación (2.67) describe el grado de correlación entre el campo de luz en $\vec{r}_1$ al tiempo $t + \tau$ con el campo de luz en $\vec{r}_2$ al tiempo t . La función especial $\gamma(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \tau = 0)$ es una medida de la correlación entre las amplitudes del campo en $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ al mismo tiempo y se llama grado complejo de coherencia. El módulo de la función de coherencia normalizada $|\gamma(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \tau)|$ se mide con el interferómetro de Young, [10].

2.3. Óptica de Fourier

La difracción y la óptica de Fourier son fundamentales en la teoría de la formación de imágenes holográficas y, por lo tanto, son esenciales en la descripción de los procesos y técnicas holográficas.

2.3.1. La Transformada de Fourier

Definición Unidimensional

En un sistema unidimensional (1D), según el teorema de Fourier, si $f(x)$ es una función bien comportada, entonces puede descomponerse en una superposición de funciones seno y coseno, o exponenciales complejas, de varias frecuencias espaciales. Las amplitudes de la descomposición son la transformada de Fourier de la función, por lo tanto

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk F(k) e^{ikx} = \mathcal{F}^{-1}\{F(k)\}(x) \quad (2.68)$$

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{-ikx} = \mathcal{F}\{f(x)\}(k) \quad (2.69)$$

Ejemplos de pares de transformadas de Fourier se enumeran en la Tabla 2.1 y se ilustran en la figura 2.6. Así, un par de funciones delta, ya sea par o impar, se transforma en funciones sinusoidales. Una función rectangular se transforma en una función *sinc*. Las transformadas de funciones gaussianas y de peine se transforman, respectivamente, en el mismo tipo de funciones, [5].

	$f(x)$	$\mathcal{F}\{f(x)\}(k)$
a)	$f(x) = \delta(x - x_0) + \delta(x + x_0)$	$F(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(kx_0)$
b)	$f(x) = \text{rec}\left(\frac{x}{a}\right) = \begin{cases} 1 & \text{para } x \in [-a, a] \\ 0 & \text{para otro caso} \end{cases}$	10
c)	$f(x) = e^{-\frac{x^2}{a^2}}$	$F(k) = \frac{a}{\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{4}a^2k^2}$
d)	$f(x) = e^{\frac{i}{2}\alpha x^2}$	$F(k) = \frac{i}{\alpha} e^{-\frac{ik^2}{2\alpha}}$

Tabla 2.1: Ejemplos de pares de transformadas de Fourier, [5]

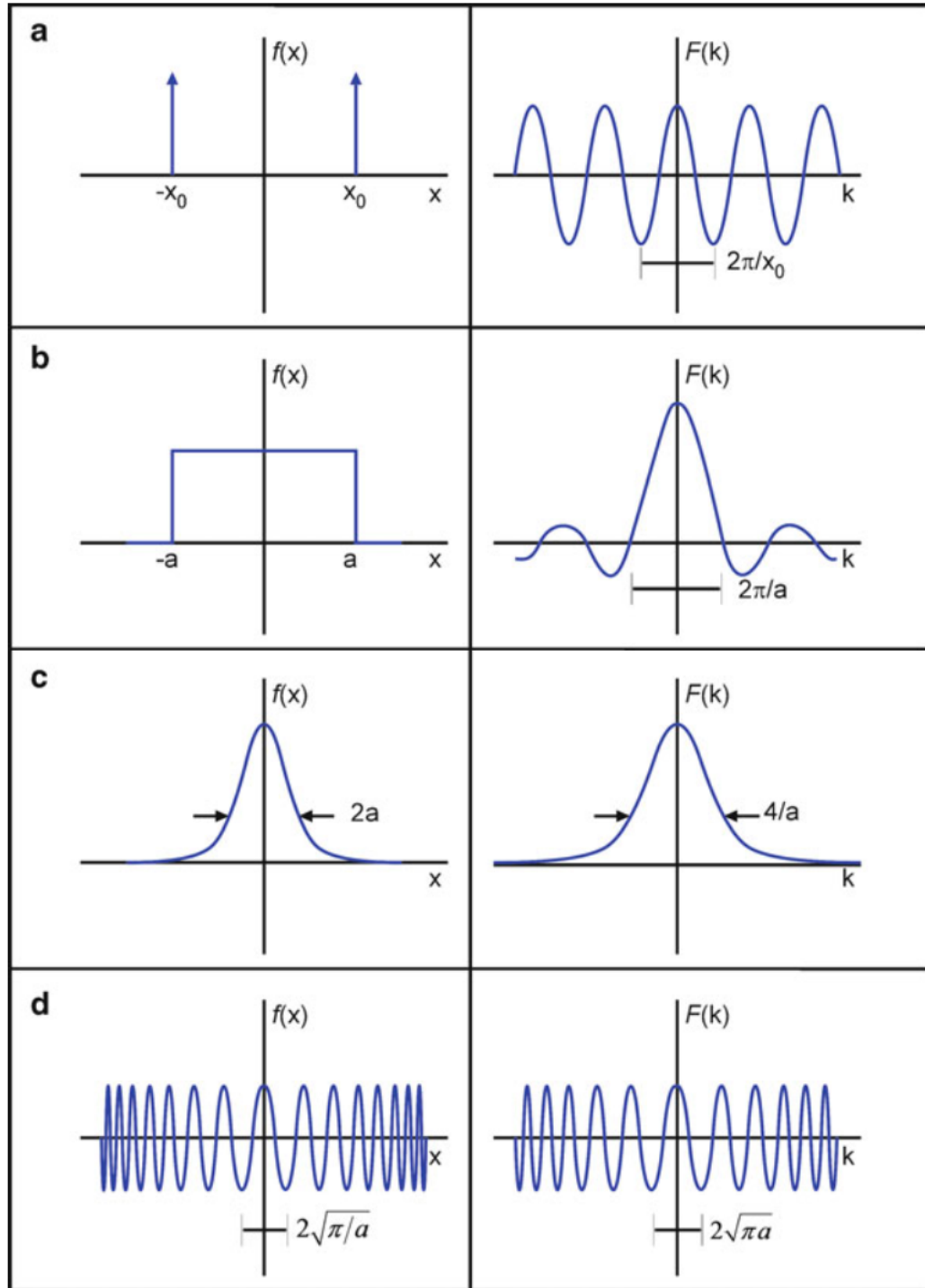


Figura 2.6: Ejemplos de pares de transformadas de Fourier, [5]

Ejemplos de pares de transformadas de Fourier se enumeran en la tabla 2.1 e se ilustran en la figura (2.6).

Para un sistema bidimensional (2D), la transformada de Fourier se expresa como

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int \int dk_x dk_y F(k_x, k_y) e^{i(k_x x + k_y y)} = \mathcal{F}^{-1}\{F(k_x, k_y)\}(x, y) \quad (2.70)$$

$$F(k_x, k_y) = \frac{1}{2\pi} \int \int dx dy f(x, y) e^{-i(k_x x + k_y y)} = \mathcal{F}\{f(x, y)\}(k_x, k_y) \quad (2.71)$$

La generalización a un sistema N -dimensional es directa, observando que el factor $\sqrt{2\pi}$ en se convierte en $(2\pi)^{\frac{N}{2}}$.

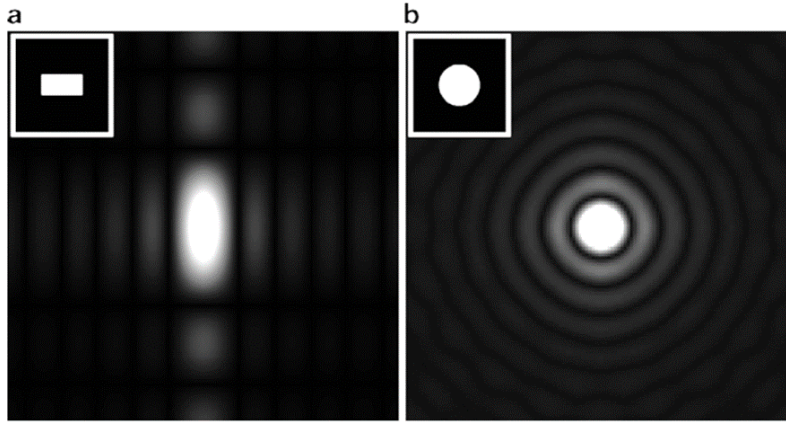


Figura 2.7: a) Abertura rectangular y su transformada de Fourier. b) Abertura circular y su transformada de Fourier, [5].

2.4. Difracción

La difracción, fue definida por Sommerfeld como cualquier desviación de los rayos de luz de un camino rectilíneo, tal que dicha desviación no pudiese ser descrita por refracción o reflexión, [1].

Un frente de onda no se puede acortar en extensión transversal mediante diafragmas sin que se esparza en varias direcciones. La difracción es causada por el confinamiento de la extensión lateral de una onda, y es más apreciable cuando ese confinamiento es de dimensiones comparables con la longitud de onda de la radiación utilizada. El fenómeno de difracción tampoco debe confundirse con el efecto de penumbra, por el cual la extensión finita de una fuente hace que la luz transmitida por una pequeña apertura se disperse a medida que se propaga alejándose de esa apertura, este último efecto no implica ninguna curvatura de los rayos de luz, ([6], [1]).

El fenómeno fue observado por primera vez en 1665 por Grimaldi, quien acuñó el término *difracción*.

2.4.1. Principio de Huygens

De acuerdo con la óptica geométrica, el haz transmitido después de atravesar un orificio, debería tener las mismas dimensiones que éste, pero cuando se tiene un orificio pequeño, lo que se observa se denominado patrón de difracción, [3].

Huygens propuso que cada punto de un frente de onda sea considerado como una nueva fuente de ondas esféricas. Las ondas secundarias, después de pasar por la abertura, se suman produciendo

un nuevo frente de onda que se aproxima a la envolvente de dichas ondas secundarias. Esta suma de las ondas secundarias es tal que en un punto sobre su envolvente se cancelan entre sí los efectos laterales quedando sólo los que tienen la dirección de propagación de la onda. Sin embargo, esta cancelación no puede ocurrir cerca de la orilla de la obstrucción, razón por la cual la onda se esparce en varias direcciones como se ve en la figura 2.8, [6].

Para complementar esta teoría Fresnel propuso que los frentes de onda secundarios no solamente se unían para formar una envolvente del frente de onda, sino que además interferirían unos con otros. Dicho de otro modo, los disturbios ópticos debidos a cada frente de onda secundario deben sumarse sobre la pantalla iluminada, tomando en cuenta su amplitud y fase en cada punto, [6].

Tomando en cuenta lo anterior, *el patrón de difracción* no sería otra cosa más que el resultado de la superposición de la luz que proviene de los emisores secundarios, que al poderse considerar emisores puntuales, actúan como fuente de ondas coherentes, dando lugar a un fenómeno de interferencia, [6].

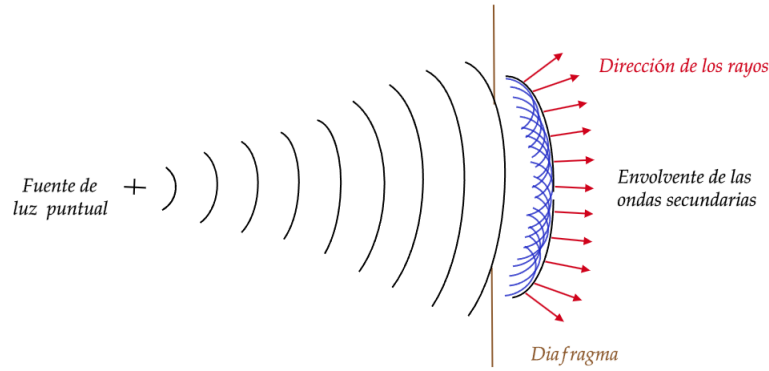


Figura 2.8: Principio de Huygens para explicar la difracción.

Es importante aclarar que el principio de Huygens-Fresnel describe el fenómeno de difracción que ocurre durante la propagación de cualquier tipo de frente de onda, ya sea de sonido, onda material o luz; pero el patrón de difracción observable sólo se forma cuando una parte del frente de onda es obstruido por una abertura o un obstáculo, [6].

2.4.2. Teoría escalar de la difracción

Una perturbación compleja U en un punto de observación en el espacio puede ser determinada con ayuda de la relación matemática conocida como *el teorema de Green*. Este teorema, se puede enunciar de la siguiente manera Sean $U(P)$ y $G(P)$ dos funciones complejas de posición, y sea S una superficie cerrada que rodea un volumen V . Si U , G y sus derivadas parciales de primer y segundo orden son funciones de una sola variable y continuas dentro y sobre S , como se muestra en la figura 2.9. Entonces se tiene

$$\iiint_{V'} (U \nabla^2 G - G \nabla^2 U) dv = \iint_{S'} \left(U \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial U}{\partial n} \right) \quad (2.72)$$

donde $\frac{\partial}{\partial n}$ representa una derivada parcial en la dirección normal exterior en cada punto sobre S .

La formulación de Kirchhoff del problema de la difracción se basa en un teorema integral que expresa la solución de la ecuación de onda -en un punto arbitrario en términos de los valores de la solución y su primera derivada en una superficie cerrada arbitraria que rodea ese punto.

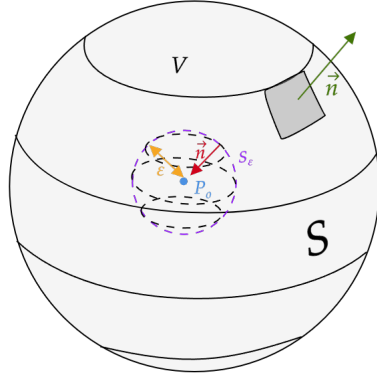


Figura 2.9: Superficie de integración. La superficie S , se muestra esférica por fines ilustrativos, aunque en la práctica no es necesario que lo sea.

Sean $U(P)$ una función que satisface la ecuación de Helmholtz, es decir $\nabla^2 U = -k^2 U$, P_0 un punto de observación y S la superficie que lo rodea. El problema consiste en expresar la perturbación óptica en P_0 en términos de sus valores sobre la superficie S .

Para obtener dicho resultado Kirchhoff considera una función auxiliar G en un punto P_1 , dada por

$$G(P_1) = \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} \quad (2.73)$$

La ecuación (2.73) corresponde a una onda esférica de amplitud unitaria, donde r_{01} es el vector que va de P_0 a P_1 .

Para que la función G sea continua en el volumen cerrado y también sus primera y segunda derivadas parciales, es necesario excluir el punto P_0 . Para ello considere una superficie esférica de radio ε que encierre al punto P_0 . Bajo esta consideración se puede aplicar el teorema al volumen que resulta de la diferencia entre el volumen inicial y el volumen encerrado por la superficie esférica y por tanto la superficie de integración esta dada por

$$S' = S + S_\varepsilon$$

Como U y G satisfacen la ecuación de Helmholtz, entonces $\nabla^2 U = -k^2 U$ y $\nabla^2 G = -k^2 G$, de donde

$$U\nabla^2 G - G\nabla^2 U = U(-k^2 G) - G(-k^2 U) = -k^2(UG - GU) = -k^2(0) = 0 \quad (2.74)$$

De modo que la expresión (2.72) se reduce a

$$\int \int_{S'} \left(U \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial U}{\partial n} \right) ds = 0 \quad (2.75)$$

De la expresión para la superficie de integración compuesta llegamos a

$$\int \int_S \left(U \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial U}{\partial n} \right) ds + \int \int_{S_\varepsilon} \left(U \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial U}{\partial n} \right) ds = 0 \quad (2.76)$$

Por definición se tiene que

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \nabla G \cdot \vec{n} = \left(\frac{\partial G}{\partial r} \hat{r} \right) \cdot \vec{n} = \frac{\partial G}{\partial r} \cos(\hat{r}, \vec{n}) = \frac{e^{ikr_{01}}}{r} \left(ik - \frac{1}{r} \right) \cos(\alpha) \quad (2.77)$$

Donde α es el ángulo entre el vector r_{01} y la normal. Luego, para el caso particular de P_1 el coseno vale -1 y esta ecuación se convierte en

$$G(P_1) = \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} \quad (2.78)$$

$$\frac{\partial G(P_1)}{\partial n} = -\frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} \left(ik - \frac{1}{r_{01}} \right) \quad (2.79)$$

Ahora, sea ε arbitrariamente pequeño, por la continuidad de U (y de sus derivadas) en P_0 nos permite escribir

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \int_{S_\varepsilon} \left(U \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial U}{\partial n} \right) ds &= 4\pi \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \left[U(P_0) \left(\frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon} \left(\frac{1}{\varepsilon} - ik \right) \right) - \left(\frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon} \right) \frac{\partial U(P_0)}{\partial n} \right] \\ &= 4\pi \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[U(P_0) \left(\varepsilon e^{ik\varepsilon} \left(\frac{1}{\varepsilon} - ik \right) \right) - \varepsilon e^{ik\varepsilon} \frac{\partial U(P_0)}{\partial n} \right] \\ &= 4\pi \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[U(P_0) e^{ik\varepsilon} - ikU(P_0) \varepsilon e^{ik\varepsilon} - \varepsilon e^{ik\varepsilon} \frac{\partial U(P_0)}{\partial n} \right] \\ &= 4\pi \left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} U(P_0) e^{ik\varepsilon} - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} ikU(P_0) \varepsilon e^{ik\varepsilon} - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon e^{ik\varepsilon} \frac{\partial U(P_0)}{\partial n} \right] \\ &= 4\pi \left[U(P_0) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} e^{ik\varepsilon} - ikU(P_0) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon e^{ik\varepsilon} - \frac{\partial U(P_0)}{\partial n} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon e^{ik\varepsilon} \right] \\ &= 4\pi \left[U(P_0)(1) - ikU(P_0)(0) - \frac{\partial U(P_0)}{\partial n}(0) \right] = 4\pi U(P_0) \end{aligned} \quad (2.80)$$

Sustituyendo el resultado en (2.76), se llega a

$$\begin{aligned} \int \int_S \left(U \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial U}{\partial n} \right) ds + (4\pi U(P_0)) ds &= 0 \Rightarrow \int \int_S \left(U \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial U}{\partial n} \right) ds = -4\pi U(P_0) \\ \Rightarrow U(P_0) &= -\frac{1}{4\pi} \int \int_S \left(U \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial U}{\partial n} \right) ds = -\frac{1}{4\pi} \int \int_S \left(U \frac{\partial}{\partial n} \left[\frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} \right] - \left[\frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} \right] \frac{\partial U}{\partial n} \right) ds \\ &= \frac{1}{4\pi} \int \int_S \left(\left[\frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} \right] \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial}{\partial n} \left[\frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} \right] \right) ds \end{aligned} \quad (2.81)$$

Por lo tanto

$$U(P_0) = \frac{1}{4\pi} \int \int_S \left(G \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial G}{\partial n} \right) ds \quad (2.82)$$

Este resultado (2.82) es conocido como el *Teorema integral de Helmholtz y Kirchhoff* ya que permite expresar el campo U en términos de los valores de frontera de la onda en una superficie cerrada que encierra al punto P_0 .

2.4.3. Formulación de Fresnel Kirchhoff

Se considera el problema de la difracción de la luz por una abertura en una pantalla opaca infinita. Como se ilustra en la figura 2.10. Una onda monocromática incide en una abertura desde la izquierda, se desea calcular el campo en el punto P_0 detrás de la abertura.

Para encontrar el campo en el punto P_0 , se aplica el teorema integral de Helmholtz y Kirchhoff. Se elige la superficie cerrada S para que conste de dos partes, como se muestra en la figura 2.10.

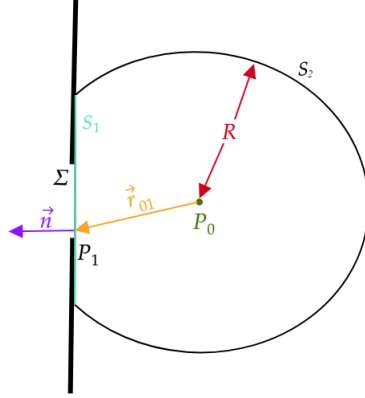


Figura 2.10: Geometría usada para deducir la formulación de Kirchhoff.

Sea una superficie plana, S_1 , situada directamente detrás de la pantalla de difracción, unida y cerrada por una gran tapa esférica, S_2 , de radio R y centrada en el punto de observación P_0 . La superficie cerrada total S es la suma de S_1 y S_2 . Por lo tanto, aplicando el teorema integral de Helmholtz Kirchhoff, ecuación (2.82)

$$U(P_0) = \frac{1}{4\pi} \left[\iint_{S_1} \left(G \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial G}{\partial n} \right) ds + \iint_{S_2} \left(G \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial G}{\partial n} \right) ds \right] \quad (2.83)$$

donde, nuevamente $G = \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}}$.

Para obtener la integral sobre S_2 , se realiza un cambio a coordenadas esféricas. De modo que

$$\begin{aligned} \iint_{S_2} \left(G \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial G}{\partial n} \right) ds &= \int_0^{\phi'} \int_0^{\theta'} \left(\frac{e^{ikR}}{R} \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{e^{ikR}}{R} \left(ik - \frac{1}{R} \right) \right) R^2 \sin \theta d\theta d\phi \\ &= \int_0^{\phi'} \int_0^{\theta'} \frac{e^{ikR}}{R} \left(\frac{\partial U}{\partial n} - U \left(ik - \frac{1}{R} \right) \right) R^2 \sin \theta d\theta d\phi \\ &= \int_0^{\phi'} \int_0^{\theta'} e^{ikR} \left(\frac{\partial U}{\partial n} - U \left(ik - \frac{1}{R} \right) \right) R \sin \theta d\theta d\phi \\ &= e^{ikR} \int_0^{\phi'} \int_0^{\theta'} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial n} - U ik \right) R \right] \sin \theta d\theta d\phi \end{aligned} \quad (2.84)$$

Suponiendo que el radio R es muy grande, entonces se cumple la condición de radiación de Sommerfeld, que nos dice que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left(\frac{\partial U}{\partial n} - ikU \right) R = 0 \quad (2.85)$$

Por lo cual

$$\iint_{S_2} \left(G \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial G}{\partial n} \right) ds = 0 \quad (2.86)$$

Entonces la mayor contribución a la integral ahora esta dada por la superficie S_1 . Dando lugar a

$$U(P_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1} \left(G \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial G}{\partial n} \right) ds \quad (2.87)$$

La pantalla es opaca, excepto por la apertura abierta Σ . Por lo tanto, la contribución principal a la integral (2.87) proviene de los puntos de S_1 ubicados dentro de la apertura Σ , donde esperaríamos que el integrando sea más grande. En consecuencia, Kirchhoff adoptó las siguientes condiciones:

1. En la superficie de la pantalla, la función U y su derivada son las mismas que en ausencia de la pantalla.
2. Sobre la porción de S_1 que esta en la sombra geométrica de la pantalla, el campo y su derivada son cero.

La superficie Σ , de la figura 2.10, es la sección de S_1 que coincide exactamente con la abertura. Entonces, bajo estas condiciones, la ecuación (2.87) pasa a ser

$$U(P_0) = \frac{1}{4\pi} \int \int_{\Sigma} \left(G \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial G}{\partial n} \right) ds \quad (2.88)$$

Una simplificación adicional de la expresión para $U(P_0)$ se obtiene al observar que la distancia r_{01} desde la apertura hasta el punto de observación suele ser de muchas longitudes de onda ópticas. Por lo tanto, dado que $k \gg \frac{1}{r_{01}}$, la ecuación (2.73) se convierte en

$$\frac{\partial G(P_1)}{\partial n} = \cos(\vec{n}, \vec{r}_{01}) \left(ik \frac{1}{r_{01}} \right) \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} \approx ik \cos(\vec{n}, \vec{r}_{01}) \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} \quad (2.89)$$

Por lo tanto la ecuación (2.88), ahora es

$$U(P_0) = \frac{1}{4\pi} \int \int_{\Sigma} \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} \left[\frac{\partial U}{\partial n} - ikU \cos(\vec{n}, \vec{r}_{01}) \right] ds \quad (2.90)$$

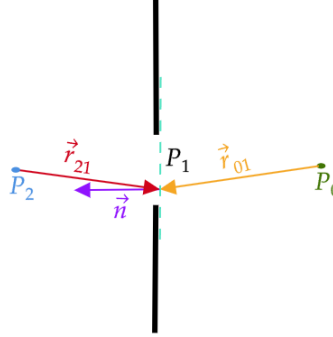


Figura 2.11: Abertura iluminada.

Si la abertura es iluminada por una onda esférica, figura 2.11, dada por

$$U(P_1) = \frac{Ae^{ikr_{21}}}{r_{21}} \quad (2.91)$$

Se llega al resultado

$$\begin{aligned} U(P_0) &= \frac{1}{4\pi} \int \int_{\Sigma} \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} \left[\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{Ae^{ikr_{21}}}{r_{21}} \right) - ik \cos(\vec{n}, \vec{r}_{01}) \left(\frac{Ae^{ikr_{21}}}{r_{21}} \right) \right] ds \\ &= \frac{Ak}{i2\pi} \int \int_{\Sigma} \frac{e^{ik(r_{21}+r_{01})}}{r_{21}r_{01}} \left[\frac{\cos(\vec{n}, \vec{r}_{01}) - \cos(\vec{n}, \vec{r}_{21})}{2} \right] ds \end{aligned} \quad (2.92)$$

Simplificando

$$U(P_0) = \frac{A}{i\lambda} \int \int_{\Sigma} \frac{e^{ik(r_{21}+r_{01})}}{r_{21}r_{01}} \left[\frac{\cos(\vec{n}, \vec{r}_{01}) - \cos(\vec{n}, \vec{r}_{21})}{2} \right] ds \quad (2.93)$$

Este resultado, es válido únicamente para una iluminación que consta de una única fuente puntual, se conoce como la *fórmula de difracción de Fresnel-Kirchhoff*.

Sea

$$U'(P_1) = \frac{1}{i\lambda} \left[\frac{Ae^{ikr_{21}}}{r_{21}} \right] \left[\frac{\cos(\vec{n}, \vec{r}_{01}) - \cos(\vec{n}, \vec{r}_{21})}{2} \right] \quad (2.94)$$

entonces la ecuación (2.93) puede escribirse como

$$U(P_0) = \int \int U'(P_1) \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} dS \quad (2.95)$$

Ahora, la ecuación (2.95) puede implicar que el campo en P_0 surge de un infinito de ficticias fuentes puntuales “secundarias” ubicadas dentro de la apertura misma. Estas fuentes secundarias tienen ciertas amplitudes y fases, descritas por $U'(P_1)$, que están relacionadas con el frente de onda y los ángulos de iluminación y observación. Fresnel asumió estas propiedades para obtener resultados precisos. Kirchhoff demostró que tales propiedades son una consecuencia natural de la naturaleza ondulatoria de la luz.

Es importante destacar que la deducción anterior se ha restringido al caso de una iluminación de apertura que consiste en una única onda esférica expansiva. Sin embargo, esta limitación puede ser eliminada mediante la teoría de Rayleigh-Sommerfeld.

Para hallar la *formula de difracción de Rayleigh-Sommerfeld* se considera una función G la cual es generada por un fuente puntual localizada en P_0 y al mismo tiempo por una segunda fuente puntual en el punto P'_0 que es la imagen de P_0 reflejada en el lado opuesto de la pantalla. Ambas fuentes emiten con la misma longitud de onda pero con una diferencia de fase de 180° . Para este caso la función G , esta dada por

$$G(P_1) = \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} - \frac{e^{ikr'_{01}}}{r'_{01}} \quad (2.96)$$

Considerando que $r_{01} \gg \lambda$, la derivada parcial respecto de la ecuación (2.96) es

$$\frac{\partial G_-(P_1)}{\partial n} = 2ik \cos(\vec{n}, \vec{r}_{01}) \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} \quad (2.97)$$

y aplicando las condiciones de contorno únicamente a la función U , se llega a

$$U_I(P_0) = \frac{1}{i\lambda} \int \int_S U(P_1) \frac{e^{ik(r_{01})}}{r_{01}} \cos(\vec{n}, \vec{r}_{01}) dS \quad (2.98)$$

considerando que la abertura es iluminada por una onda esférica que diverge desde su fuente en una posición P_2

$$U(P_1) = \frac{Ae^{ikr_{21}}}{r_{21}} \quad (2.99)$$

se obtiene

$$U_I(P_0) = \frac{A}{i\lambda} \sigma \sigma_S \frac{e^{ik(r_{21}+r_{02})}}{r_{21}r_{01}} \cos(\vec{n}, \vec{r}_{01}) dS \quad (2.100)$$

que es la *Formulación de Difracción de Rayleigh-Somerfield*.

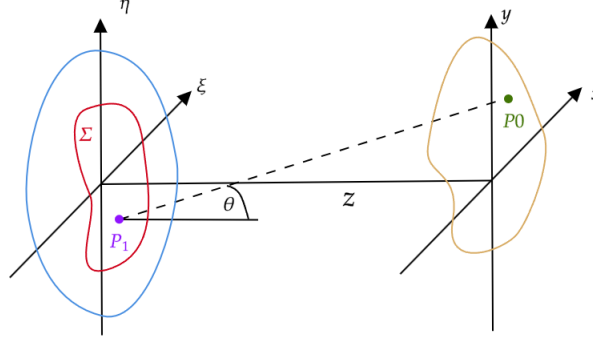


Figura 2.12: Geometría de difracción.

Si se considera una pantalla opaca colocada sobre el plano (ξ, η) , como en la figura 2.12, y es iluminada en la dirección z , la ecuación (2.98) puede reescribirse como

$$U(P_0) = \frac{1}{i\lambda} \int \int_{\Sigma} U(P_1) \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} \cos \theta dS \quad (2.101)$$

donde θ es el ángulo entre la normal $\hat{n}$ en dirección exterior y el vector $\vec{r}_{01}$ que va del punto P_0 al punto P_1 y Σ ahora representa la superficie S sobre la cual se realiza la integral.

Note que $\cos \theta = \frac{z}{r_{01}}$, entonces sustituyendo en la ecuación (2.101) y tomando las coordenadas (x, y) como (ξ, η) de los puntos P_0 y P_1 respectivamente

$$U(x, y) = \frac{z}{i\lambda} \int \int_{\Sigma} U(\xi, \eta) \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}^2} d(\xi, \eta) \quad (2.102)$$

donde la distancia r_{01} esta dada por

$$r_{01} = \sqrt{z^2 + (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$$

La relación (2.102) puede ser interpretada como la superposición lineal de ondas esféricas que divergen desde un punto (ξ, η) y es la expresión matemática del *Principio de Huygens-Fresnel*, [1].

Los fenómenos de difracción se clasifican en:

1) Difracción de Fresnel

La cual se da cuando la fuente, la pantalla o ambas se encuentran a una distancia finita de la abertura que produce la difracción.

2) Difracción de Fraunhofer

Ocurre cuando tanto la fuente como la pantalla se encuentran a una distancia infinita de la abertura, [6].

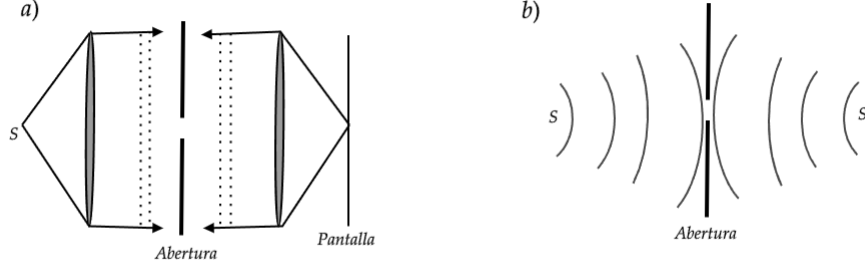


Figura 2.13: Difracción a) clase Fraunhofer o de campo lejano y b) difracción de clase Fresnel o de campo cercano.

2.4.4. Difracción de Fresnel

La difracción de tipo Fresnel o de campo cercano, ocurre cuando la fuente de iluminación y/o el punto de observación se encuentran a una distancia finita (pequeña) con respecto a la abertura. La expresión matemática que describe este tipo de difracción se obtiene a partir de las ecuaciones anteriores, se inicia reescribiendo r_{01} de la siguiente manera

$$r_{01} = z \sqrt{1 + \left(\frac{x - \xi}{z}\right)^2 + \left(\frac{y - \eta}{z}\right)^2} \quad (2.103)$$

aplicando la expansión binomial

$$\sqrt{1 + b} = 1 + \frac{1}{2}b - \frac{1}{8}b^2$$

se hace la siguiente aproximación

$$r_{01} \approx z \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x - \xi}{z}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{y - \eta}{z}\right)^2 \right]$$

al sustituir en la ecuación (2.102) nos da la expresión para el campo en (x, y)

$$U(x, y) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(\xi, \eta) e^{i\frac{k}{2z}((x-\xi)^2 + (y-\eta)^2)} d\xi d\eta \quad (2.104)$$

sea $h(x, y) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{i\frac{k}{2z}(x^2 + y^2)}$ entonces (2.104) puede escribirse como una convolución

$$U(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(\xi, \eta) h(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta$$

donde $h(x, y)$ es el kernel de la convolución. Factorizando el término $e^{i\frac{k}{2z}(x^2 + y^2)}$ se obtiene

$$U(x, y) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{i\frac{k}{2z}(x^2 + y^2)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[U(\xi, \eta) e^{i\frac{k}{2z}(\xi^2 + \eta^2)} \right] e^{-i\frac{2\pi}{\lambda z}(x\xi + y\eta)} d\xi d\eta \quad (2.105)$$

La expresión (2.105) es la *Transformada de Fourier* de un campo complejo colocado a la derecha de la abertura y una fase exponencial cuadrática (omitiendo los términos que multiplican a la integral) y es conocida como la *Integral de Difracción de Fresnel*.

2.4.5. Difracción de Fraunhofer

La difracción de Fraunhofer ocurre cuando la fuente de iluminación y el plano de observación se encuentran a una distancia z “muy grande” de la abertura de difracción, en este caso se cumple

$$z \gg \frac{k(\xi^2 + \eta^2)}{2} \quad (2.106)$$

de modo que el término de la fase cuadrática de la ecuación (2.105) es aproximadamente igual a la unidad

$$e^{i\frac{k}{2z}(\xi^2 + \eta^2)} \approx 1 \quad (2.107)$$

con lo que se obtiene la Integral de Difracción de Fraunhofer o de campo lejano

$$U(x, y) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{i\frac{k}{2z}(x^2 + y^2)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(\xi, \eta) e^{-i\frac{2\pi}{\lambda z}(x\xi + y\eta)} d\xi d\eta \quad (2.108)$$

Si nuevamente omitimos los factores de fase que multiplican a la integral, notamos que se trata de la *Transformada de Fourier* de la función $U(\xi, \eta)$ que al igual que en el caso de la ecuación (2.105) representa la distribución del campo que pasa a través de la abertura, mientras que la función $U(x, y)$ es el campo final que se genera en el punto de observación (x, y) , [1].

2.5. Speckle

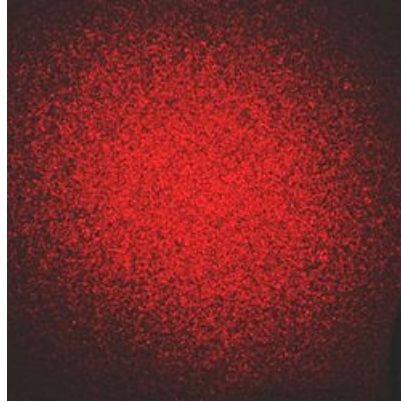


Figura 2.14: Patrón de Speckle

Una superficie rugosa iluminada con luz coherente aparece granulada para un observador. La intensidad de la luz dispersada por la superficie fluctúa de manera aleatoria en el espacio, y aparecen manchas oscuras y brillantes. Estas manchas se llaman *speckles* (moteado), formando la imagen completa llamada "speckle pattern" (patrón de moteado). En esta tesis se le llamará *Speckle*, como se muestra en la figura 2.14. Un patrón de speckle se desarrolla si las variaciones de altura de la superficie rugosa son mayores que la longitud de onda de la luz.

Los speckles resultan de la interferencia de la luz dispersada por los puntos de la superficie. Como se ve en la figura 2.15 Las fases de las ondas dispersadas por diferentes puntos de la superficie fluctúan estadísticamente debido a las variaciones de altura. Si estas ondas interfieren entre sí, se desarrolla un patrón de speckle estacionario, [5].

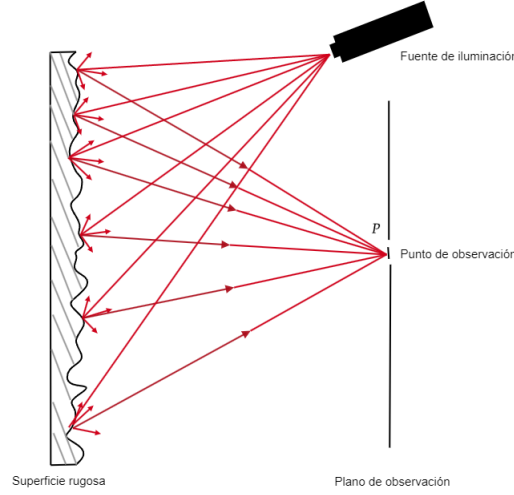


Figura 2.15: Formación de un patrón de speckle.

La función de densidad de probabilidad para la intensidad en un patrón de speckle sigue estadísticas exponenciales negativas

$$P(I)dI = \frac{1}{\langle I \rangle} e^{-\frac{I}{\langle I \rangle}} \quad (2.109)$$

$P(I)dI$ es la probabilidad de que la intensidad en cierto punto este entre I y $I + dI$. $\langle I \rangle$ es la intensidad promedio del campo de Speckle entero. El valor de speckle más probable es entonces cero, es decir, la mayoría de las motas son negras. La desviación estándar σ_I se calcula por

$$\sigma_I = \langle I \rangle \quad (2.110)$$

Esto significa que la variación está en el mismo orden que el valor promedio. Una definición del contraste es

$$V = \frac{\sigma_I}{\langle I \rangle} \quad (2.111)$$

Por lo tanto el contraste de un patrón de Speckle es siempre 1. Se puede distinguir entre la formación de Speckle objetiva y subjetiva. Un patrón de moteado objetivo se desarrolla en una pantalla ubicada a una distancia z de la superficie iluminada, como se muestra en la figura (2.16). No hay ningún sistema de imagen entre la superficie y la pantalla. El tamaño de un speckle en un patrón de moteado objetivo se puede estimar utilizando la fórmula de frecuencia espacial ecuación (2.46). Los dos puntos extremos de la superficie iluminada forman la frecuencia espacial más alta

$$f_{max} = \frac{2}{\lambda} \sin \frac{\theta_{max}}{2} \approx \frac{L}{\lambda z} \quad (2.112)$$

El recíproco de f_{max} es una medida del tamaño del speckle

$$d_{sp} = \frac{\lambda z}{L} \quad (2.113)$$

Un patrón de moteado subjetivo se desarrolla si la superficie iluminada se enfoca con un sistema de imagen, como por ejemplo, un objetivo de cámara o el ojo humano, como se muestra en la figura

2.16. En este caso, el diámetro del speckle depende del diámetro de la apertura a del sistema de imagen. El tamaño de un speckle en un patrón de moteado subjetivo puede estimarse nuevamente utilizando la frecuencia espacial

$$f_{max} = \frac{2}{\lambda} \sin \frac{\theta_{max}}{2} \approx \frac{a}{\lambda b} \quad (2.114)$$

b es la distancia de la imagen al sistema formador imagen. Entonces el tamaño de un Speckle es

$$d_{Sp} = \frac{\lambda b}{a} \quad (2.115)$$

Para este caso el tamaño del Speckle puede incrementarse cerrando la apertura del sistema formador de imagen, [5].

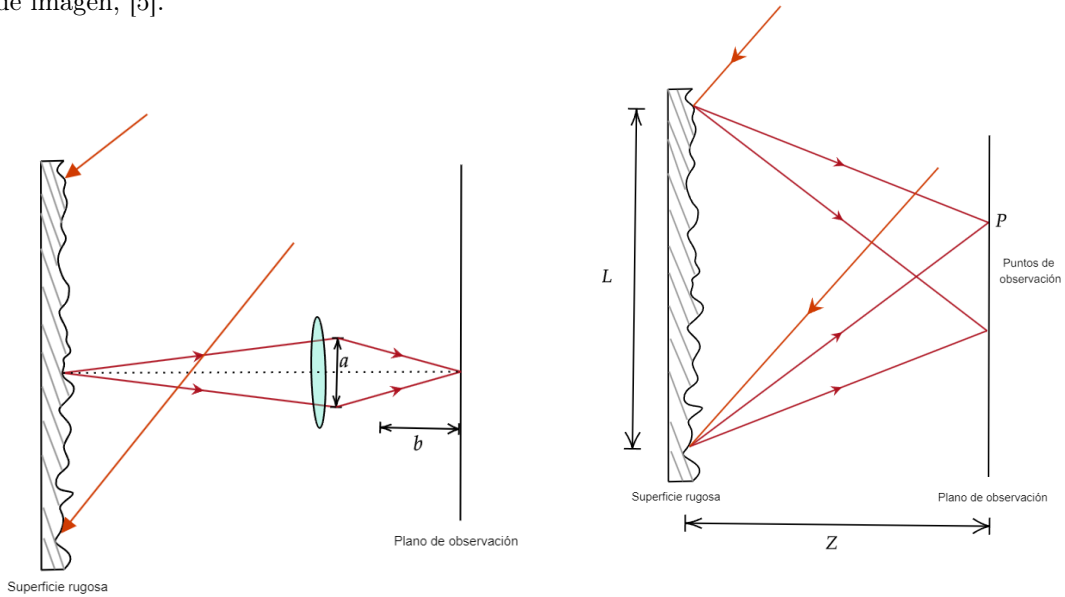


Figura 2.16: Izquierda: Formación de Speckle subjetivo. Derecha: Formación de Speckle objetivo.

2.6. Holografía

El problema fundamental abordado por la holografía es el de grabar y, posteriormente, reconstruir tanto la amplitud como la fase de una onda óptica que proviene de un objeto iluminado de manera coherente. Aunque este problema es lo suficientemente general como para ser aplicado a ondas electromagnéticas en todas las regiones del espectro, así como para ondas acústicas y sísmicas, esta tesis se centrará en el problema óptico, [1].

2.6.1. Grabado de hologramas

Como ya se mencionó el problema de reconstrucción del frente de onda consta de dos operaciones distintas: un paso de grabación o detección y un paso de reconstrucción, [1].

Enfocándose en el primer paso. Todos los medios de grabación responden solo a la intensidad de la luz. Por lo tanto, se requiere que la información de fase se convierta de alguna manera en variaciones de intensidad para poder grabarla. Una técnica estándar para lograr esta tarea es la interferometría; es decir, una segunda frente de onda, mutuamente coherente con el primero y con amplitud y fase conocidas, se añade a la frente de onda desconocido, [1].

En consecuencia, los hologramas suelen grabarse con una configuración óptica que consta de una fuente de luz (láser), espejos y lentes para guiar el haz, y un dispositivo de grabación, como una placa fotosensible. Una configuración típica se muestra en la figura 2.17. La luz con una longitud de coherencia suficiente se divide en dos ondas parciales mediante un divisor de haz (BS). La primera onda ilumina el objeto, se dispersa en la superficie del objeto y se refleja en el medio de grabación. La segunda onda, llamada *onda de referencia*, ilumina directamente el medio fotosensible. Ambas ondas interfieren, y el patrón de interferencia se graba, por ejemplo, mediante el revelado químico de la placa. El patrón de interferencia grabado se denomina *holograma*, ([4][7]).

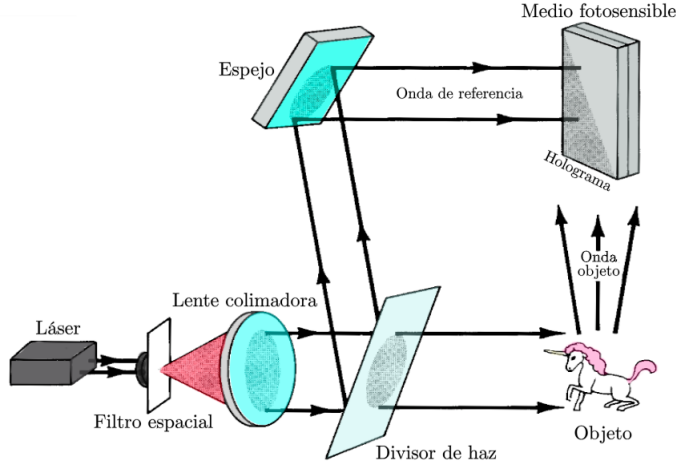


Figura 2.17: Arreglo experimental típico para grabar hologramas de objetos tridimensionales, [7].

La intensidad de la suma de dos campos complejos depende tanto de la amplitud como de la fase del campo desconocido. Basándonos en el formalismo planteado anteriormente para el fenómeno de interferencia, capítulo 2.2. Sean

$$E_O(x, y) = a_O(x, y)e^{i\phi_O(x, y)} \quad (2.116)$$

el frente de *onda objeto* y

$$E_R(x, y) = a_R(x, y)e^{i\phi_R(x, y)} \quad (2.117)$$

el frente de *onda de referencia*.

Cuando los dos frentes de onda interfieren en la superficie del medio fotosensible, la intensidad está dada por

$$\begin{aligned} I(x, y) &= |E_O(x, y) + E_R(x, y)|^2 \\ &= [E_O(x, y) + E_R(x, y)] [E_O(x, y) + E_R(x, y)]^* \\ &= E_R(x, y)E_R^*(x, y) + E_O(x, y)E_O^*(x, y) + E_O(x, y)E_R^*(x, y) + E_R(x, y)E_O^*(x, y) \\ &= |E_R(x, y)|^2 + |E_O(x, y)|^2 + 2|E_R(x, y)||E_O(x, y)|\cos(\phi_R - \phi_O) \end{aligned} \quad (2.118)$$

Mientras que los dos primeros términos de esta expresión dependen únicamente de las intensidades de las ondas individuales, el tercero depende de sus fases relativas. Así, se ha registrado información sobre tanto la amplitud como la fase de $E_O(x, y)$, ([1], [4]).

El Medio de Grabación

Se asumirá que el material utilizado para grabar el patrón de interferencia descrito anteriormente proporciona un mapeo lineal de la intensidad incidente durante el proceso de detección en

la amplitud transmitida por o la reflejada desde el material durante el proceso de reconstrucción. Por lo general, tanto la detección de luz como la modulación del frente de onda se realizan mediante película o placa fotosensible. Sin embargo, existen muchos otros materiales adecuados para la holografía, incluyendo polímeros fotosensibles, gelatina dicromada y materiales fotorefractivos. Incluso es posible detectar el patrón de interferencia electrónicamente y reconstruir el frente de onda con una computadora digital. Sin embargo, los materiales fotográficos siguen siendo el medio de grabación más importante y ampliamente utilizado. Se asume que la Función de Transferencia Modulada (Modulation Transfer Function, MTF por sus siglas en inglés) del material de grabación se extiende a frecuencias espaciales lo suficientemente altas como para grabar toda la estructura espacial incidente. Finalmente, se asume que la intensidad $|a_R|^2$ de la onda de referencia es uniforme en todo el material de grabación, en cuyo caso la transmitancia de amplitud de la película o placa desarrollada puede expresarse como

$$t_A(x, y) = t_b + \beta'(|a| + A^*a + Aa^*) \quad (2.119)$$

donde t_b es una transmitancia uniforme de "sesgo" establecida por la exposición de referencia constante, y β' es el producto de la pendiente β de la curva t_A vs. E en el punto de sesgo y el tiempo de exposición. Observa que, β' es un número negativo para una transparencia negativa y un número positivo para una transparencia positiva.

2.6.2. Reconstrucción de hologramas

Cuando la placa fotográfica se ha registrado y revelado, se ilumina de nuevo con el haz de referencia como en la figura 2.18. Los hologramas actúan como una rejilla de difracción, produciendo el haz de orden cero, el haz de orden más uno y el haz de orden menos uno.

- El orden cero de difracción es el haz iluminador que pasa a través del holograma sin difractarse.
- El orden más uno de difracción es un frente de onda idéntico al que interfirió con el de referencia cuando se registró el holograma, dando lugar a una reproducción muy fiel del objeto que la produjo.
- El orden menos uno de difracción es otro haz muy complicado que puede producir una imagen real del objeto si se enfoca en una pantalla, [6].

Si un observador mira a través de la grabación, llamada holograma de transmisión, verá una imagen tridimensional del objeto original creada por la onda de reconstrucción, [7].

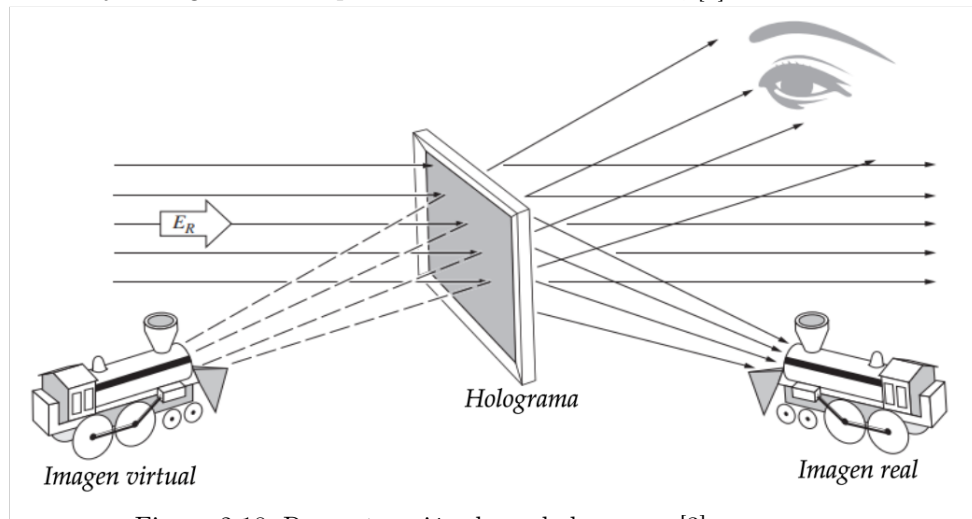


Figura 2.18: Reconstrucción de un holograma, [3].

Reconstrucción del frente de onda original

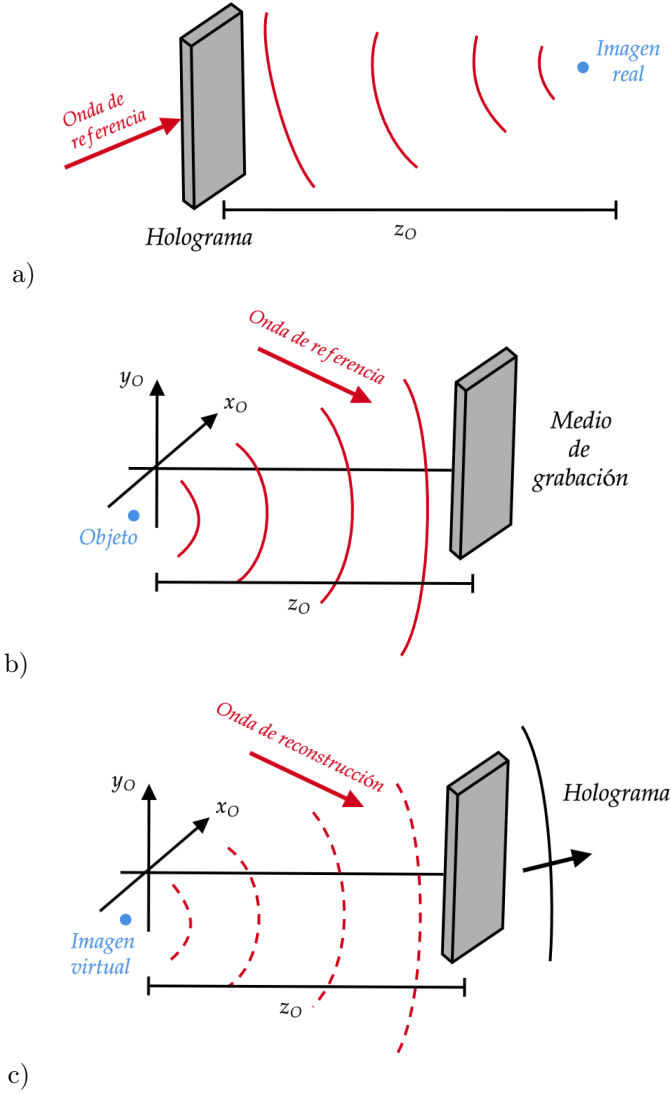


Figura 2.19: a) Grabado del holograma de un objeto fuente puntual. b) Generación de la imagen virtual. c) Generación de la imagen real, [1]

Una vez que la información de amplitud y fase sobre la onda del objeto $E_O(x, y)$ ha sido grabada, queda por reconstruir esa onda. Supongamos que el holograma es iluminado por una *onda de reconstrucción* coherente $B(x, y)$. La luz transmitida por el holograma es

$$B(x, y)t_A(x, y) = t_b B + \beta' E_O E_O^* + \beta' E_R^* B E_O + \beta' E_R B E_O^* \quad (2.120)$$

Mientras la intensidad de la onda de referencia es uniforme, la componente de la onda de referencia es, hasta una constante multiplicativa, una duplica exacta de la frente de onda original E_O . Si se desea obtener una duplica utilizable de la onda del objeto $E_O(x, y)$ (o de $E_O^*(x, y)$), se requiere algún método para separar las diversas componentes de onda de la luz transmitida, [1].

2.6.3. Formación de imágenes mediante holografía

La imagen virtual aparece en la posición del objeto original si el holograma se reconstruye con los mismos parámetros utilizados en el proceso de grabación. Sin embargo, si se cambia la longitud de onda o las coordenadas de la fuente puntual de la onda de reconstrucción con respecto a las coordenadas de la fuente puntual de la onda de referencia utilizada en el proceso de grabación, la posición de la imagen reconstruida se desplaza. El desplazamiento de coordenadas es diferente para todos los puntos, por lo que la forma del objeto reconstruido se distorsiona. La magnificación de la imagen también puede ser influenciada por los parámetros de reconstrucción, [2].

Sean (x_O, y_O, z_O) las coordenadas del punto objeto O , (x_R, y_R, z_R) las coordenadas de la fuente puntual de la onda de referencia usada para grabar el holograma y (x_p, y_p, z_p) las coordenadas de la fuente puntual de la onda de reconstrucción, [2].

La amplitud compleja en el punto $H(x_H, y_H, z_H)$ en el plano del holograma puede ser escrita como $a_O = |a_O|e^{-i\phi_O}$, donde ϕ_O es la fase de la onda en el punto relativo a este en O . En una aproximación a primer orden la fase ϕ_O para el camino óptico esta dada por la expresión

$$\phi_O = \left(\frac{\pi}{\lambda_1} \right) \left[\left(\frac{1}{z_R} \right) (x_H^2 + y_H^2 - 2x_H x_R - 2y_H y_R) \right] \quad (2.121)$$

donde λ_1 es la longitud de onda usada para grabar el holograma. Similarmente, la amplitud compleja de la onda de referencia en el punto $H(x_H, y_H, z_H)$ puede ser escrita como $a_R = |a_R|e^{-i\phi_R}$ donde

$$\phi_R = \left(\frac{\pi}{\lambda_1} \right) \left[\left(\frac{1}{z_R} \right) (x_H^2 + y_H^2 - 2x_H x_R - 2y_H y_R) \right] \quad (2.122)$$

por la ecuación (2.118) se sigue la posición y el espaciado entre las franjas de interferencia en el holograma, producido por dos ondas es determinado por la diferencia de fase $(\phi_R - \phi_O)$, [2].

Considerando que el holograma procesado es iluminado por una onda monocromática de longitud de onda λ_2 desde una fuente puntual P localizada al punto (x_P, y_P, z_P) , como se muestra en la figura 2.20 b), [2].

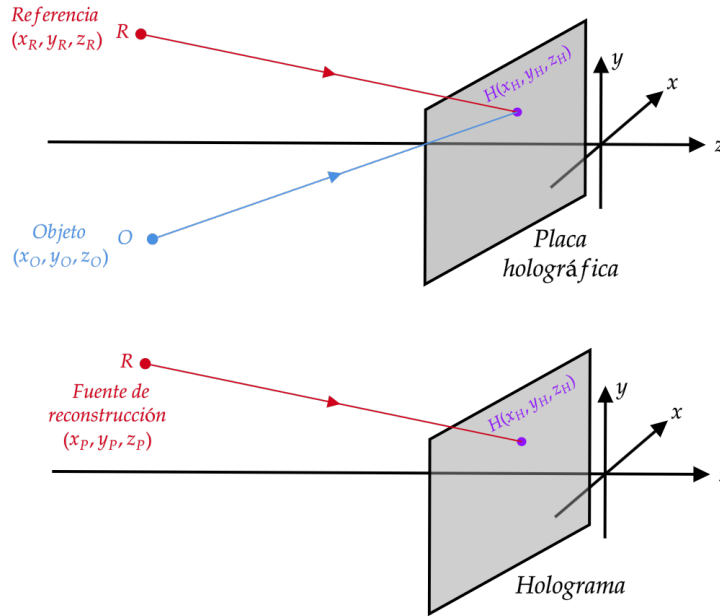


Figura 2.20: Sistema de coordenadas utilizado para estudiar la formación de imágenes mediante hologramas. Arriba: grabado de hologramas. Abajo: reconstrucción de imagen, [2].

De la misma manera, la amplitud compleja de esta onda en el punto $H(x_H, y_H, z_H)$ en el plano del holograma puede ser escrita como $a_P = |a_P|e^{-i\phi_P}$ donde

$$\phi_P = \left(\frac{\pi}{\lambda_2}\right) \left[\left(\frac{1}{z_P}\right) (x_H^2 + y_H^2 - 2x_H x_P - 2y_H y_P) \right] \quad (2.123)$$

Al tratarse de una grabación lineal, los términos en la expresión por la amplitud compleja del frente de onda que da origen a las dos imágenes reconstruidas, esta dado por

$$u_1 = a_P a_R^* a_O = |a_P| |a_R| |a_O| e^{-i(\phi_P - \phi_R + \phi_O)} \quad (2.124)$$

$$u_2 = a_P a_R a_O^* = |a_P| |a_R| |a_O| e^{-i(\phi_P + \phi_R - \phi_O)} \quad (2.125)$$

si u_1 es escrita como $u_1 = |u_1|e^{-i\phi_1}$, se sigue que la fase ϕ_1 de esta onda reconstruida en $H(x_H, y_H, z_H)$ es

$$\phi_1 = \phi_P - \phi_R + \phi_O \quad (2.126)$$

Sustituyendo los valores de ϕ_O , ϕ_R y ϕ_P y $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \mu$ entonces

$$\phi_1 = \left(\frac{\pi}{\lambda_2}\right) \left[(x_H^2 + y_H^2) \left(\frac{1}{z_P} + \frac{\mu}{z_O} - \frac{\mu x}{z_R}\right) - 2x_H \left(\frac{x_P}{z_P} + \frac{\mu x_O}{z_O} - \frac{\mu}{z_O}\right) - 2x_H \left(\frac{x_P}{z_P} + \frac{\mu x_O}{z_O} - \frac{\mu x_R}{z_R}\right) \right] \quad (2.127)$$

desde la onda representada por u_1 es producida una imagen virtual, esta debe ser una onda esférica. De acuerdo con esto debe ser posible expresa su fase en el punto $H(x_H, y_H, z_H)$ en la forma

$$\phi_1 = \left(\frac{\pi}{\lambda_2}\right) \left[\left(\frac{1}{z_1}\right) (x_H^2 + y_H^2 - 2x_H x_1 - 2y_H y_1) \right] \quad (2.128)$$

donde (x_1, y_1, z_1) son las coordenadas de esta imagen puntual, [2].

Si se igualan coeficientes de términos semejantes en (2.127) y (2.128), entonces

$$\frac{1}{z_1} = \frac{1}{z_P} + \frac{\mu}{z_O} - \frac{\mu}{z_R} \quad (2.129)$$

$$\frac{x_1}{z_1} = \frac{x_P}{z_P} + \frac{\mu x_O}{z_O} - \frac{\mu x_R}{z_R} \quad (2.130)$$

$$\frac{y_1}{z_1} = \frac{y_P}{z_P} + \frac{\mu y_O}{z_O} - \frac{\mu y_R}{z_R} \quad (2.131)$$

de la ecuación (2.129) se obtiene el valor para z_1

$$z_1 = \frac{z_P z_O z_R}{z_O z_R + \mu z_P z_R - \mu z_P z_O} \quad (2.132)$$

reduciendo la ecuación (2.130) se llega a

$$x_1 = \left(\frac{x_P}{z_P} + \frac{\mu x_O}{z_O} - \frac{\mu x_R}{z_R}\right) z_1 \quad (2.133)$$

sustituyendo el valor de (2.132)

$$x_1 = \frac{x_P z_O z_R + \mu x_O z_P z_R - \mu x_R z_O z_P}{z_O z_R + \mu z_P z_R - \mu z_P z_O} \quad (2.134)$$

ahora simplificando (2.131)

$$y_1 = z_1 \left(\frac{y_P z_O z_R + \mu y_O z_P z_R - \mu y_R z_P z_O}{z_P z_O z_R} \right) \quad (2.135)$$

sustituyendo el valor de (2.132)

$$y_1 = \frac{y_P z_O z_R + \mu y_O z_P z_R - \mu y_R z_P z_O}{z_O z_R + \mu z_P z_R - \mu z_P z_O} \quad (2.136)$$

de manera análoga se calculan las coordenadas de la imagen formada por la onda conjugada representada por u_2 , [2].

Las ecuaciones de imagen relacionan las coordenadas de un punto del objeto O con las del punto correspondiente en la imagen reconstruida. $\mu = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ denota la razón entre la longitud de onda de grabación λ_1 y la onda de reconstrucción λ_2 . Según el desarrollo anterior las coordenadas del punto en la imagen virtual reconstruida, que corresponden al punto objeto O , son

$$x_1 = \frac{x_P z_O z_R + \mu x_O z_P z_R - \mu x_R z_P z_O}{z_O z_R + \mu z_P z_R - \mu z_P z_O} \quad (2.137)$$

$$y_1 = \frac{y_P z_O z_R + \mu y_O z_P z_R - \mu y_R z_P z_O}{z_O z_R + \mu z_P z_R - \mu z_P z_O} \quad (2.138)$$

$$z_1 = \frac{z_P z_O z_R}{z_O z_R + \mu z_P z_R - \mu z_P z_O} \quad (2.139)$$

Las coordenadas de ese punto en la imagen real reconstruida, que corresponde al punto del objeto O , son

$$x_2 = \frac{x_P z_O z_R - \mu x_O z_P z_R + \mu x_R z_P z_O}{z_O z_R - \mu z_P z_R + \mu z_P z_O} \quad (2.140)$$

$$y_2 = \frac{y_P z_O z_R - \mu y_O z_P z_R + \mu y_R z_P z_O}{z_O z_R - \mu z_P z_R + \mu z_P z_O} \quad (2.141)$$

$$z_2 = \frac{z_P z_O z_R}{z_O z_R - \mu z_P z_R + \mu z_P z_O} \quad (2.142)$$

Un objeto extenso puede considerarse compuesto por varios objetos puntuales. Las coordenadas de todos los puntos de la superficie son descritas por las ecuaciones mencionadas anteriormente. Se representa la amplificación lateral de la imagen virtual completa

$$M_{lat,1} = \frac{dx_1}{dx_O} = \left[1 + z_0 \left(\frac{1}{\mu z_P} - \frac{1}{z_R} \right) \right]^{-1} \quad (2.143)$$

La amplificación lateral de la imagen real resulta en

$$M_{lat,2} = \frac{dx_2}{dx_O} = \left[1 - z_0 \left(\frac{1}{\mu z_P} + \frac{1}{z_R} \right) \right]^{-1} \quad (2.144)$$

La amplificación longitudinal de la imagen virtual está dada por

$$M_{lat,1} = \frac{dz_1}{dz_O} = \frac{1}{\mu} M_{lat,1}^2 \quad (2.145)$$

La amplificación longitudinal de la imagen real está dada por

$$M_{lat,2} = \frac{dz_2}{dz_O} = -\frac{1}{\mu} M_{lat,2}^2 \quad (2.146)$$

Dado que la imagen real se forma mediante la onda conjugada del objeto O^* , tiene la propiedad de que su profundidad está invertida. Los puntos correspondientes de la imagen virtual (que coinciden con los puntos originales del objeto) y de la imagen real se encuentran a distancias iguales del plano del holograma, pero en lados opuestos del mismo. El fondo y el primer plano de la imagen real, por lo tanto, están intercambiados. La imagen real aparece con una "perspectiva equivocada". Se le llama una imagen *pseudoscópica*, en contraste con una imagen normal u *ortoscópica*, [2].

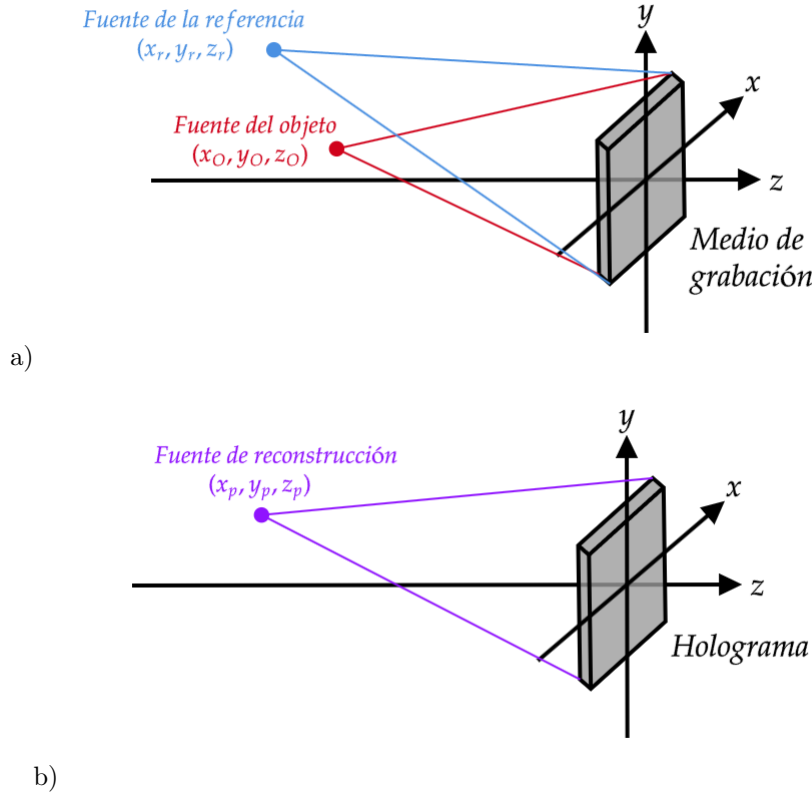


Figura 2.21: a) Geometrías generalizadas de grabación y b) Reconstrucción.

Como se ve en la figura 2.21 a), se supone que la onda de referencia es generada por una fuente puntual ubicada en las coordenadas (x_r, y_r, z_r) . Dado que el mapeo de las amplitudes del objeto en las amplitudes de la imagen es lineal, siempre y cuando el ángulo de desplazamiento de la referencia sea lo suficientemente grande para separar las imágenes gemelas entre sí y de otros términos no deseados de la luz transmitida. Es suficiente considerar una única fuente puntual de objeto ubicada en las coordenadas (x_o, y_o, z_o) , [2].

Se elige que la ubicación del centro del sistema de coordenadas, tanto z_o como z_R sean números negativos para fuentes de puntos que yacen a la izquierda del plano de grabación del holograma y son números positivos para puntos que yacen a la derecha de ese plano, [2].

Durante el paso de reconstrucción, ilustrado en la figura 2.21 b), se asume que el holograma está iluminado por una onda esférica de origen puntual en las coordenadas (x_p, y_p, z_p) , [2].

Para lograr la máxima generalidad posible, la longitud de onda de grabación se representará como λ_1 y la longitud de onda de reconstrucción como λ_2 , [2].

Se determinarán las aproximaciones paraxiales a las ubicaciones de la imagen (gemela) para una fuente puntual de objeto en las coordenadas dadas. Luego, un objeto coherente y extendido puede considerarse como una colección de muchas fuentes puntuales mutuamente coherentes, [2].

Utilizando una aproximación de fase cuadrática para las ondas esféricas involucradas, el campo total incidente en el plano de grabación puede escribirse

$$U(x, y) = Ae^{-i\frac{\pi}{\lambda_1 z_r}[(x-x_r)^2+(y-y_r)^2]} + ae^{-i\frac{\pi}{\lambda_1 z_o}[(x-x_o)^2+(y-y_o)^2]} \quad (2.147)$$

donde A y a son constantes complejas que representan las amplitudes y fases relativas de las dos ondas esféricas. La distribución de intensidad correspondiente en el patrón de interferencia entre las dos ondas es

$$I(x, y) = |A|^2 + |a|^2 + Aa^*e^{-i\frac{\pi}{\lambda_1 z_r}[(x-x_r)^2+(y-y_r)^2]} + i\frac{\pi}{\lambda_1 z_o}[(x-x_o)^2+(y-y_o)^2] + A^*ae^{i\frac{\pi}{\lambda_1 z_r}[(x-x_r)^2+(y-y_r)^2]} - i\frac{\pi}{\lambda_1 z_o}[(x-x_o)^2+(y-y_o)^2] \quad (2.148)$$

Si la transmitancia de amplitud de la transparencia desarrollada es proporcional a la exposición, entonces los dos términos importantes de la transmitancia son

$$t_3 = \beta' Aa^*e^{-i\frac{\pi}{\lambda_1 z_r}[(x-x_r)^2+(y-y_r)^2]} + i\frac{\pi}{\lambda_1 z_o}[(x-x_o)^2+(y-y_o)^2] \quad (2.149)$$

$$t_4 = \beta' A^*ae^{i\frac{\pi}{\lambda_1 z_r}[(x-x_r)^2+(y-y_r)^2]} - i\frac{\pi}{\lambda_1 z_o}[(x-x_o)^2+(y-y_o)^2] \quad (2.150)$$

El holograma es iluminado con una onda esférica, la cual, en la aproximación paraxial, se describe por

$$U_p(x, y) = Ee^{-i\frac{\pi}{\lambda_2 z_p}[(x-x_p)^2+(y-y_p)^2]} \quad (2.151)$$

Los dos frentes de onda de interés detrás de la transparencia se encuentran multiplicando las ecuaciones (2.150) y (2.151), dando como resultado

$$U_3(x, y) = t_3 Be^{-i\frac{\pi}{\lambda_2 z_p}[(x-x_p)^2+(y-y_p)^2]} \quad (2.152)$$

$$U_4(x, y) = t_4 Be^{-i\frac{\pi}{\lambda_2 z_p}[(x-x_p)^2+(y-y_p)^2]} \quad (2.153)$$

Para identificar la naturaleza de estas ondas transmitidas, se debe examinar su dependencia en (x, y) . Dado que solo se presentan términos lineales y cuadráticos en x y y , las dos expresiones U_3 y U_4 pueden considerarse aproximaciones cuadráticas de fase a ondas esféricas que abandonan el holograma. La presencia de términos lineales simplemente indica que las ondas convergen o divergen desde puntos que no yacen en el eje z , [2].

Dado que las ondas que emergen del holograma se dan por un producto de exponenciales de fase cuadrática, son representables como exponenciales de fase cuadrática en sí mismas. Por lo tanto, se puede identificar las coordenadas (x_i, y_i, z_i) de las imágenes si comparamos las ecuaciones expandidas para U_3 y U_4 con una exponencial de fase cuadrática de la forma

$$U_i = Ke^{-i\frac{\pi}{\lambda_2 z_i}[(x-x_i)^2+(y-y_i)^2]} \quad (2.154)$$

A partir de los coeficientes de los términos cuadráticos en x y y , concluimos que la distancia axial z_i de los puntos de imagen es

$$z_i = \left(\frac{1}{z_p} \pm \frac{\lambda_2}{\lambda_1 z_r} \mp \frac{\lambda_2}{\lambda_1 z_o} \right)^{-1} \quad (2.155)$$

donde el conjunto superior de signos se aplica a una onda de imagen y el conjunto inferior de signos se aplica a la otra. Cuando z_i es negativo, la imagen es virtual y se encuentra a la izquierda del holograma, mientras que cuando z_i es positivo, la imagen es real y se encuentra a la derecha del

holograma. Las coordenadas x y y de los puntos de la imagen se encuentran igualando los términos lineales en x y y con el resultado

$$x_i = \mp \frac{\lambda_2 z_i}{\lambda_1 z_O} \pm \frac{\lambda_2 z_i}{\lambda_1 z_O} x_r + \frac{z_i}{z_p} x_p \quad (2.156)$$

$$y_i = \mp \frac{\lambda_2 z_i}{\lambda_1 z_O} \pm \frac{\lambda_2 z_i}{\lambda_1 z_O} x_r + \frac{z_i}{z_p} x_p \quad (2.157)$$

Las expresiones para x_i , y_i y z_i proporcionan las relaciones fundamentales que nos permiten predecir las ubicaciones de las imágenes de fuentes puntuales creadas por el proceso holográfico. Dependiendo de la geometría, es posible que una imagen sea real y la otra virtual, o que ambas sean reales o ambas virtuales, [2].

2.6.4. Algunos tipos de hologramas

Hologramas de Fresnel

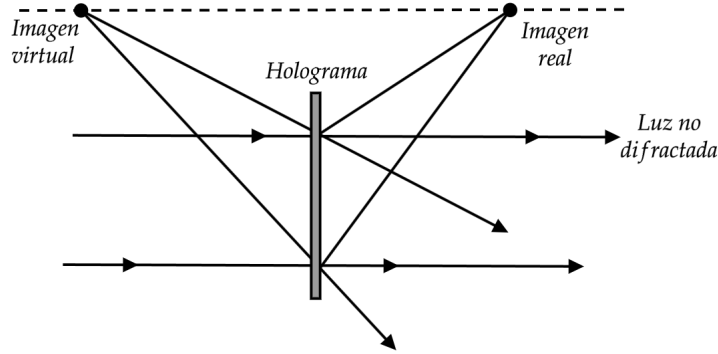


Figura 2.22: La imagen virtual y real de un holograma fuera de ángulo, [7].

Un holograma construido con una onda de referencia ubicada en una posición arbitraria, pero con el medio de grabación en el campo cercano del objeto, se llama *holograma de Fresnel*. Las imágenes reales y virtuales de un holograma de Fresnel están ubicadas simétricamente alrededor de la grabación, como se muestra en la figura 2.22. Dos configuraciones especiales de este tipo de holograma son fáciles de evaluar y permitirán la demostración de las propiedades básicas del holograma de Fresnel. Para analizar la configuración especial, reescribimos

$$Z_i = \frac{p^2 Z_s}{p^2 \left(\frac{Z_s}{Z_c} \right) \pm \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) \left[\frac{Z_s}{Z_r} - 1 \right]} \quad (2.158)$$

y

$$x_i = \frac{p^2 \left(\frac{x_c}{Z_c} \right) Z_s \pm p \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) \left[\left(\frac{x_r}{Z_r} \right) Z_s - x_s \right]}{p^2 \left(\frac{Z_s}{Z_c} \right) \pm \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) \left[\left(\frac{Z_s}{Z_r} \right) - 1 \right]} \quad (2.159)$$

donde

$$\tan \alpha_c = \frac{x_c}{Z_c} \quad \tan \alpha_r = \frac{x_r}{Z_r} \quad (2.160)$$

Las nuevas ecuaciones permiten la fácil evaluación de las coordenadas de la imagen en el límite cuando Z_i , $Z_c \rightarrow -\infty$. En estos límites, las ondas de referencia y de reconstrucción resultantes inciden en el holograma con los ángulos α_r y α_c , respectivamente, [10].

Hologramas de transformada de Fourier

La holografía de transformada de Fourier (Fourier Transform Holography, FTH por sus siglas en inglés) es una técnica sin lentes donde la onda esparcida por un objeto se superpone con la onda dispersada por una fuente de referencia posicionada en el mismo plano. La distribución del objeto se reconstruye simplemente calculando la transformada de Fourier del holograma grabado, [9].

La difracción de una referencia de características conocidas (denominada “onda de referencia”) se agrega al mismo plano que el objeto estudiado. Al arreglo del objeto y la referencia juntos se le conoce como *muestra*. El esquema típico para grabar un holograma de transformada de Fourier se muestra en la figura 1a, [9].

La FTH tiene dos características distintas:

- Un holograma de FT se adquiere en el campo lejano.
- Una onda de referencia se forma por la difracción en una referencia que se posiciona en el mismo plano que el objeto bajo estudio, figura 2.23 b).

La onda de referencia asegura que la distribución de fase de la onda difractada por una onda de objeto desconocida se capture, lo que resuelve el problema de fase y simplifica el procedimiento de reconstrucción. La onda de referencia debe cubrir toda el área del detector, como se ilustra en las figuras 2.23 c) y 2.23 d). En la forma más simple de FTH, se utiliza una única referencia puntual, la reconstrucción del objeto se obtiene en un paso, calculando la transformada de Fourier inversa del objeto del holograma grabado, como se muestra en la Figura 1e, [9].

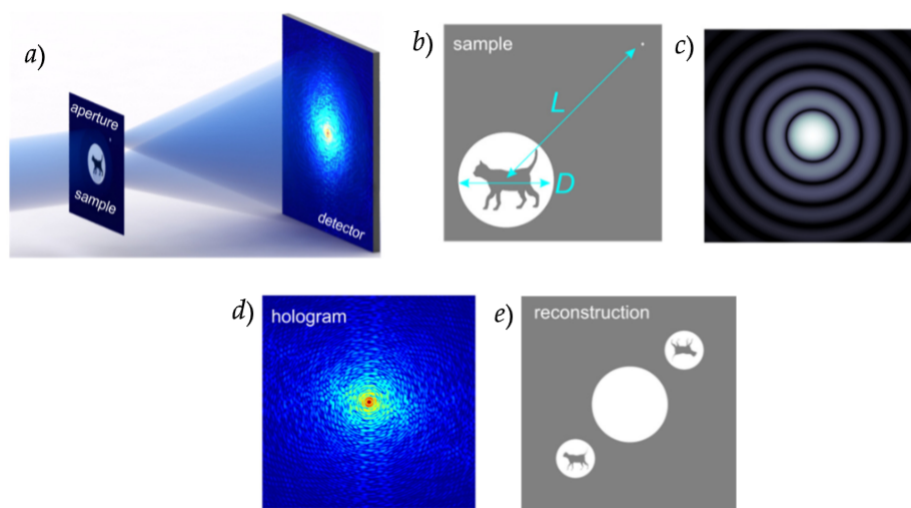


Figura 2.23: Principio de la holografía de transformada de Fourier con referencia puntual. (a) Esquema para la adquisición de hologramas de Fourier. (b) Distribución de la muestra: objeto y apertura de referencia. D es la extensión (diámetro) del objeto, y L es la distancia entre el objeto y la referencia. (c) Patrón de difracción solo de la referencia. (d) Patrón de difracción del objeto y la referencia juntos—holograma de transformada de Fourier. (e) Distribución de la muestra (amplitud) reconstruida calculando la transformada de Fourier del holograma de transformada de Fourier, exhibiendo dos reconstrucciones centro-simétricas en la posición de la referencia.

Hologramas arcoíris

Un avance importante en el campo de la holografía de visualización fue la invención del *holograma arcoíris* por S. Benton. Esta invención proporciona un método para utilizar la luz blanca

como iluminación al ver el holograma, minimizando la difusión del color en un holograma de transmisión, a expensas de renunciar a la información de paralaje en una dimensión. La capacidad de ver imágenes holográficas en luz blanca fue un paso vital hacia la adaptación de la holografía para aplicaciones de visualización. El método implica un proceso de dos pasos, en el que se crea un holograma inicial y luego se realiza un segundo holograma utilizando el primer holograma como parte del proceso.

El primer paso en el proceso es grabar un holograma de una escena tridimensional de la manera habitual, utilizando luz monocromática o casi monocromática, como se ilustra en la figura 2.24a). La luz de la fuente de referencia R_1 y la luz dispersada por el objeto O interfieren para formar la grabación holográfica H_1 . Esta grabación se procesa de manera habitual y se obtiene un holograma.

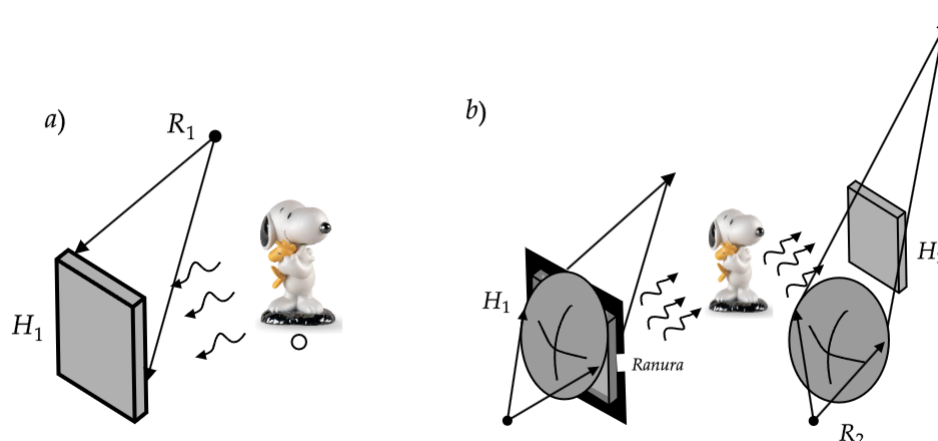


Figura 2.24: Holograma arcoíris. a) Primer paso del grabado. b) Segundo paso del grabado.

Posteriormente se ilumina este primer holograma con una onda de "anti-referencia" monocromática, es decir, una onda que duplica la onda de referencia original, excepto que la dirección de viaje está invertida, como se ilustra en la figura 2.24b). Una imagen real del objeto original es producida por el holograma H_1 , y la ubicación de esa imagen real coincide con la ubicación original del objeto. Ahora se introduce un nuevo elemento en la geometría de reconstrucción de la figura 2.24b), una estrecha rendija horizontal inmediatamente después del holograma H_1 . La luz que pasa por esta rendija reconstruye nuevamente una imagen real del objeto original, pero esta vez se elimina el paralaje vertical; la imagen que se forma es la que se habría visto desde la ubicación vertical particular de la rendija. Después de crear esta imagen real, se graba un segundo holograma H_2 , esta vez un holograma de la imagen producida por el primer holograma, utilizando una nueva onda de referencia, en particular una onda esférica convergente. Nuevamente, la luz utilizada en el proceso de grabación es monocromática, y el patrón de interferencia es entre la onda de referencia de R_2 y la luz que ha pasado a través del foco de la imagen real y ha viajado hacia el plano de grabación, como se muestra en la figura 2.24b). H_2 es el holograma final creado por este proceso, [1].

La holografía obtenida mediante el método descrito anteriormente se ilumina ahora con una onda esférica divergente, que es de hecho la onda "anti-referencia" para la onda de referencia convergente desde R_2 , como se muestra en la figura 2.25a). El holograma forma una imagen real del objeto original, pero más allá de esa imagen, más cerca del espectador, también se forma una imagen de la ranura que se introdujo cuando se grabó el holograma H_2 . Ahora, si la fuente de reconstrucción en este último paso emite luz blanca, la dispersión del holograma generará de hecho un desenfoque de imágenes tanto del objeto como de la ranura. En particular, cada banda estrecha de colores diferentes de la fuente de reconstrucción creará una imagen de la ranura en una ubicación

vertical diferente (y con una ampliación diferente), siendo la luz roja la difractada verticalmente en mayor medida y la luz azul en menor medida. Un observador ubicado en el plano de las imágenes de la ranura efectivamente mirará a través de una ranura adecuada solo para una banda de color estrecha y no interceptará luz fuera de esta banda de color. Así, la imagen parecerá libre de desenfoque de color y tendrá un color que depende exactamente de dónde se encuentren los ojos del observador en la dimensión vertical. De esta manera, las propiedades dispersivas incorporadas en el holograma H_2 se han utilizado ventajosamente para eliminar el desenfoque de color y permitir que la imagen se vea con una fuente de luz blanca. Como se muestra en la figura 2.25b), la posición de la ranura varía con el color tanto en posición vertical como en ampliación.

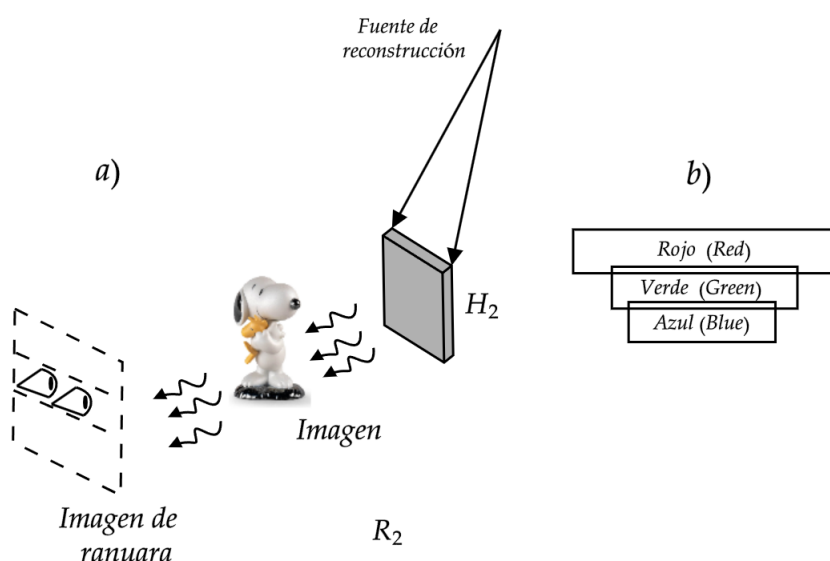
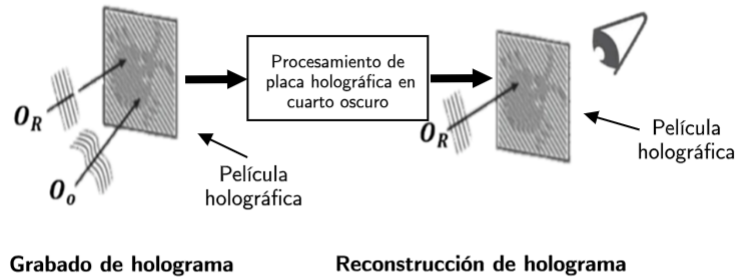


Figura 2.25: Reconstrucción de la imagen a partir de un holograma de arco iris. a) Geometría de reconstrucción. b) Tamaños de la ranura en diferentes longitudes de onda.

2.7. Holografía Digital

La figura 2.26 representa conceptos generales de la holografía convencional y digital. En la holografía convencional, en el espacio real, el holograma se registra en una placa fotográfica o cualquier otro medio cuya propiedad de transmisión óptica o reflexión cambia en respuesta a la intensidad de la luz que incide en ella. El registro y la reconstrucción tienen lugar en el espacio real utilizando luz y componentes ópticos reales. Por otro lado, la propagación y difracción de la luz están completamente y con precisión descritas por la teoría electromagnética de la difracción. Por lo tanto, es posible simular parte o todo el proceso de holografía mediante cálculos numéricos. En Holografía Digital (DH), el proceso de grabación es en el espacio real, pero el holograma se captura en una cámara electrónica, con un sensor CCD o CMOS, y se transfiere a una computadora en forma digital. La reconstrucción se realiza numéricamente por medio de un algoritmo computacional, cuyo resultado se muestra en el monitor, se almacena o se envía electrónicamente para su procesamiento y manipulación.

Holografía clásica



Holografía digital

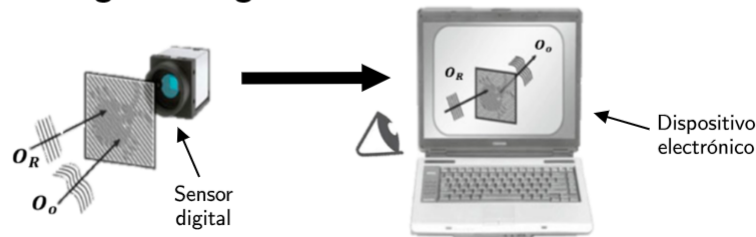


Figura 2.26: Conceptos básicos de Holografía Convencional y Holografía Digital, [5].

El procesamiento numérico de hologramas en DH conduce a una amplia gama de propiedades y capacidades únicas.

- En comparación con el registro fotoquímico, el registro electrónico mediante sensores CCD o CMOS es mucho más rápido, más controlable y más cercano a la sensibilidad lineal. También es más económico a largo plazo al no requerir un cuarto oscuro, suministros químicos y mano de obra para procesamiento fotográfico.
- En DH, los hologramas se pueden procesar de maneras que son difíciles o inviables en el espacio real, como la superposición de múltiples hologramas iluminados con diferentes longitudes de onda.
- Una de las distinciones más importantes de DH es el acceso directo a la fase del campo óptico. La holografía en el espacio real reproduce la fase del campo óptico, pero no está directamente disponible para el observador humano o detectores sensibles a la intensidad hasta que se realice otro experimento interferométrico. Por otro lado, en DH, el cálculo del campo óptico da acceso inmediato a una matriz de números complejos que incluye la información de fase.
- Un problema importante es la resolución. La resolución actual de las cámaras electrónicas, de varios micrones o más, es al menos un orden de magnitud menor que la de los medios fotográficos, y probablemente pasará algún tiempo antes de que sean comparables. Esto limita ciertos tipos de aplicaciones, como la grabación holográfica con efecto de paralaje.

2.7.1. Principios generales

El concepto de grabación de hologramas digitales se ilustra en la figura 2.27a). Una onda de referencia plana y la onda reflejada desde el objeto están interfiriendo en la superficie de un Charged Coupled Device (CCD). El holograma resultante se registra electrónicamente y se almacena. El

objeto es, en general, un cuerpo tridimensional con una superficie de reflexión difusa, ubicado a una distancia d del CCD.

En la reconstrucción óptica, la imagen virtual aparece en la posición del objeto original y la imagen real se forma a una distancia d también, pero en la dirección opuesta al CCD, como se muestra en la figura 2.27b).

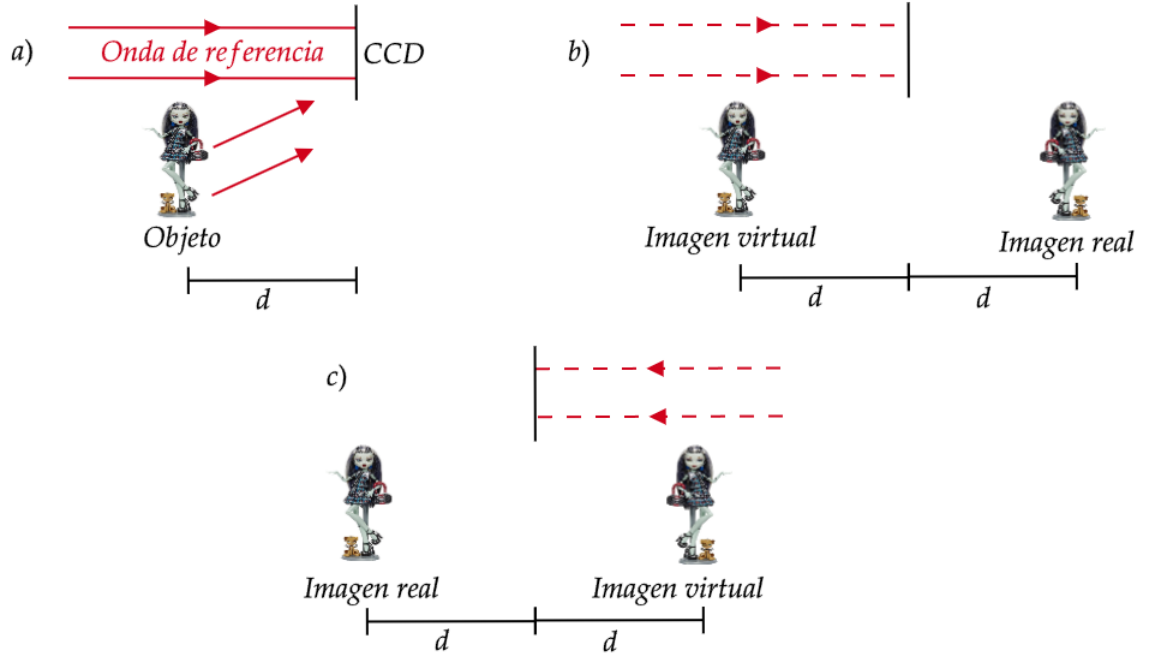


Figura 2.27: Holografía digital a)Grabado b)Reconstrucción con una onda de referencia E_R c)Reconstrucción con onda de referencia conjugada E_R^* .

La difracción de una onda de luz en una apertura (en este caso un holograma) que está montada perpendicular al haz entrante se describe mediante la integral de Fresnel-Kirchhoff, deducida en la ecuación (2.93). Una forma describir dicha integral es

$$\Gamma(\xi', \eta') = \frac{i}{\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) E_R(x, y) \frac{e^{-i \frac{2\pi}{\lambda} \rho'}}{\rho'} dx dy \quad (2.161)$$

con

$$\rho' = \sqrt{(x - \xi')^2 + (y - \eta')^2 + d^2} \quad (2.162)$$

La función $h(x, y)$ es el holograma y ρ' es la distancia entre un punto en el plano del holograma y un punto en el plano de reconstrucción. Las cantidades geométricas se explican en la figura 2.28.

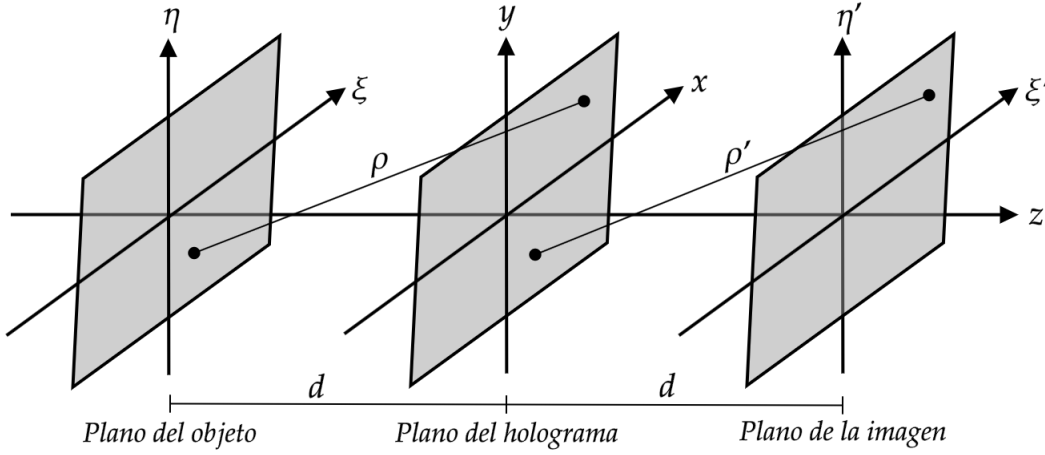


Figura 2.28: Sistema de coordenadas para la reconstrucción numérica de hologramas.

El factor de inclinación se establece en 1, porque los ángulos θ y θ' son aproximadamente 0. En esta tesis se tomara esto como una generalidad para todos los algoritmos de reconstrucción numérica.

Para una onda de referencia plana $E_R(x, y)$ se da por la amplitud real:

$$E_R = a_R + i0 = a_R \quad (2.163)$$

El patrón de difracción se calcula a una distancia d detrás del plano del CCD, es decir se reconstruye la amplitud compleja en el plano de la imagen real.

La ecuación (2.161) es la base para la reconstrucción numérica de hologramas. Debido a que el campo de onda reconstruido $\Gamma(\xi', \eta')$ es una función compleja, tanto la intensidad como la fase pueden calcularse. Una imagen real no distorsionada puede ser producida utilizando la onda de referencia conjugada para la reconstrucción. Por lo tanto, para reconstruir una imagen real no distorsionada en la Holografía Digital, es necesario insertar E_R^* en lugar de E_R en la ecuación (2.161)

$$\Gamma(\xi, \eta) = \frac{i}{\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) E_R^*(x, y) \frac{e^{-i \frac{2\pi}{\lambda} \rho}}{\rho} dx dy \quad (2.164)$$

con

$$\rho = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + d^2} \quad (2.165)$$

Este esquema de reconstrucción se muestra en la figura 2.27c). La imagen real emerge en la posición donde se encontraba el objeto durante la grabación. Cabe mencionar que para la onda de referencia plana definida en la ecuación (2.163), ambas fórmulas de reconstrucción, la ecuación (2.161) y (2.164), son equivalentes porque $E_R = E_R^* \equiv a_R$.

La disposición de la figura (2.27) con una onda de referencia plana incidiendo perpendicularmente en el CCD se utiliza a menudo en la Holografía Digital.

La reconstrucción de la imagen virtual también es posible al introducir las propiedades de imagen de una lente en el proceso de reconstrucción numérica. Esta lente corresponde a la lente del ojo de un observador que mira a través de un holograma reconstruido ópticamente. En el caso más simple, esta lente se encuentra directamente detrás del holograma, como se muestra en la figura 2.29. Las propiedades de imagen de una lente con distancia focal f se consideran mediante un factor complejo

$$L(x, y) = e^{i \frac{\pi}{\lambda f} (x^2 + y^2)} \quad (2.166)$$

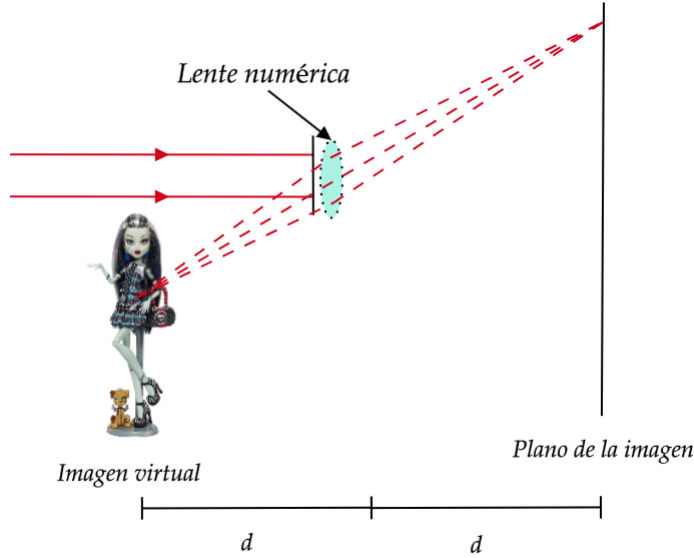


Figura 2.29: Reconstrucción de imagen virtual.

Para una ampliación de 1, debe utilizarse una distancia focal de $f = \frac{d}{2}$. La lente descrita por la ecuación (2.166) provoca aberraciones de fase, las cuales pueden corregirse multiplicando el campo de onda reconstruido por un factor.

$$P(\xi', \eta') = e^{i \frac{\pi}{\lambda f} (\xi'^2 + \eta'^2)} \quad (2.167)$$

La formula completa de reconstrucción a través de un lente virtual con $f = \frac{d}{2}$ es entonces

$$\Gamma(\xi', \eta') = \frac{i}{\lambda} P(\xi', \eta') \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) E_R(x, y) L(x, y) \frac{e^{-i \frac{2\pi}{\lambda} \rho'}}{\rho'} dx dy \quad (2.168)$$

2.7.2. Reconstrucción numérica de Hologramas

Reconstrucción por aproximación de Fresnel

Para x y y valores como para ξ y η valores, que son pequeños a comparación con la distancia d entre el plano de reconstrucción y el CCD, la expresión (2.162) se puede expandir en serie de Taylor como

$$\rho = d + \frac{(\xi - x)^2}{2d} + \frac{(\eta - y)^2}{2d} - \frac{1}{8} \frac{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2]^2}{d^3} + \dots \quad (2.169)$$

similar a lo utilizado en la sección 2.4.4.

El cuarto término puede ser despreciado si es pequeño a comparación de la longitud de onda, es decir

$$\frac{1}{8} \frac{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2]^2}{d^3} \ll \lambda \quad (2.170)$$

o dejándolo en términos de la distancia d

$$d \gg \sqrt[3]{\frac{1}{8} \frac{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2]^2}{\lambda}} \quad (2.171)$$

Entonces la distancia ρ se reduce a términos lineales y cuadráticos

$$\rho = d + \frac{(\xi - x)^2}{2d} + \frac{(\eta - y)^2}{2d} \quad (2.172)$$

Con la aproximación adicional de sustituir el denominador en (2.164) por d , se obtiene la siguiente expresión para la reconstrucción de la imagen real

$$\Gamma(\xi, \eta) = \frac{i}{\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) E_R^*(x, y) \frac{e^{-i \frac{2\pi}{\lambda} \left(d + \frac{(\xi - x)^2}{2d} + \frac{(\eta - y)^2}{2d} \right)}}{d} dx dy \quad (2.173)$$

$$= \frac{i}{\lambda} \frac{e^{-i \frac{2\pi}{\lambda} d}}{d} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) E_R^*(x, y) e^{-i \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{(\xi - x)^2}{2d} + \frac{(\eta - y)^2}{2d} \right)} dx dy \quad (2.174)$$

$$= \frac{i}{\lambda d} e^{-i \frac{2\pi}{\lambda} d} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) E_R^*(x, y) e^{-i \frac{\pi}{\lambda d} ((\xi - x)^2 + (\eta - y)^2)} dx dy \quad (2.175)$$

$$= \frac{i}{\lambda d} e^{-i \frac{2\pi}{\lambda} d} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) E_R^*(x, y) e^{-i \frac{\pi}{\lambda d} (\xi^2 - \xi x + x^2 + \eta^2 - \eta y + y^2)} dx dy \quad (2.176)$$

$$= \frac{i}{\lambda d} e^{-i \frac{2\pi}{\lambda} d} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) E_R^*(x, y) e^{-i \frac{\pi}{\lambda d} (\xi^2 + \eta^2)} e^{-i \frac{\pi}{\lambda d} (x^2 + y^2)} e^{-i \frac{\pi}{\lambda d} (-x\xi - y\eta)} dx dy \quad (2.177)$$

$$= \frac{i}{\lambda d} e^{-i \frac{2\pi}{\lambda} d} e^{-i \frac{\pi}{\lambda d} (\xi^2 + \eta^2)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) E_R^*(x, y) e^{-i \frac{\pi}{\lambda d} (x^2 + y^2)} e^{i \frac{\pi}{\lambda d} (x\xi + y\eta)} dx dy \quad (2.178)$$

esta es otra forma de deducir la aproximación de Fresnel de la ecuación (2.105). Es decir

$$\Gamma(\xi, \eta) = \frac{i}{\lambda d} e^{-i \frac{2\pi}{\lambda} d} e^{-i \frac{\pi}{\lambda d} (\xi^2 + \eta^2)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) E_R^*(x, y) e^{-i \frac{\pi}{\lambda d} (x^2 + y^2)} e^{i \frac{\pi}{\lambda d} (x\xi + y\eta)} dx dy \quad (2.179)$$

es nombrada *La aproximación de Fresnel* o *La transformada de Fresnel* debido a su similitud matemática con la Transformada de Fourier. Dicha aproximación permite la reconstrucción del campo de ondas en un plano detrás del holograma, en este caso, en el plano de la imagen real.

La intensidad se calcula mediante el cuadrado

$$I(\xi, \eta) = |\Gamma(\xi, \eta)|^2 \quad (2.180)$$

la fase se calcula por

$$\phi(\xi, \eta) = \arctan \frac{\text{Im} [\Gamma(\xi, \eta)]}{\text{Re} [\Gamma(\xi, \eta)]} \quad (2.181)$$

Re denota la parte real y Im es la parte imaginaria. La formula de reconstrucción para la imagen virtual en la aproximación de Fresnel es

$$\Gamma(\xi', \eta') = \frac{i}{\lambda d} e^{-i \frac{2\pi}{\lambda} d} e^{-i \frac{\pi}{\lambda d} (\xi'^2 + \eta'^2)} P(\xi', \eta') \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E_R(x, y) L(x, y) h(x, y) e^{-i \frac{\pi}{\lambda d} (x^2 + y^2)} e^{i \frac{2\pi}{\lambda d} (x\xi' + y\eta')} dx dy \quad (2.182)$$

$$= \frac{i}{\lambda d} e^{-i \frac{2\pi}{\lambda} d} e^{i \frac{\pi}{\lambda d} (\xi'^2 + \eta'^2)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E_R(x, y) h(x, y) e^{i \frac{\pi}{\lambda d} (x^2 + y^2)} e^{i \frac{2\pi}{\lambda d} (x\xi' + y\eta')} dx dy \quad (2.183)$$

Para la digitalización de la propagación de Fresnel se introducen los siguientes cambios de variable

$$\nu = \frac{\xi}{\lambda d} \quad \mu = \frac{\eta}{\lambda d} \quad (2.184)$$

entonces la ecuación (2.179) se convierte en

$$\Gamma(\nu, \mu) = \frac{i}{\lambda d} e^{-i \frac{2\pi}{\lambda} d} e^{-i\pi\lambda d(\nu^2 + \mu^2)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E_R^*(x, y) h(x, y) e^{-i \frac{\pi}{\lambda d} (x^2 + y^2)} e^{i2\pi(x\nu + y\mu)} dx dy \quad (2.185)$$

Una comparación de la ecuación (2.185) con la definición de la transformada de Fourier bidimensional, muestra que la aproximación de Fresnel hasta un factor de fase esférica es la transformada inversa de Fourier de la función $E_R^*(x, y) h(x, y) e^{-i \frac{\pi}{\lambda d} (x^2 + y^2)}$, es decir

$$\Gamma(\nu, \mu) = \frac{i}{\lambda d} e^{-i \frac{2\pi}{\lambda} d} e^{-i\pi\lambda d(\nu^2 + \mu^2)} \mathcal{F}^{-1} \left\{ E_R^*(x, y) h(x, y) \exp \left[-i \frac{\pi}{\lambda d} (x^2 + y^2) \right] \right\} \quad (2.186)$$

La función Γ puede ser digitalizada si la función del holograma $h(x, y)$ se muestrea en una cuadrícula rectangular de $N \times N$ puntos, con pasos Δx y Δy a lo largo de las coordenadas. Δx y Δy son las distancias entre píxeles vecinos en el CCD en dirección horizontal y vertical. Con estos valores discretos la integral (2.185) se convierten en las sumas finitas

$$\Gamma(m, n) = \frac{i}{\lambda d} e^{-i \frac{2\pi}{\lambda} d} e^{-i\pi\lambda d(m^2 \Delta \nu^2 + n^2 \Delta \mu^2)} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} E_R^*(k, l) h(k, l) e^{-i \frac{\pi}{\lambda d} (k^2 \Delta x^2 + l^2 \Delta y^2)} e^{i2\pi(k \Delta x m \Delta \nu + l \Delta y n \Delta \mu)} \quad (2.187)$$

para $m = 0, 1, \dots, N-1$ y $n = 0, 1, \dots, N-1$.

Según la teoría de la transformada de Fourier entre Δx , Δy , se tiene las siguientes relaciones

$$\Delta \nu = \frac{1}{N \Delta x} \quad \Delta \mu = \frac{1}{N \Delta y} \quad (2.188)$$

sustituyendo

$$\Delta \xi = \frac{\lambda d}{N \Delta x} \quad \Delta \eta = \frac{\lambda d}{N \Delta y} \quad (2.189)$$

Sustituyendo en la ecuación (2.187) se llega a

$$\Gamma(m, n) = \frac{i}{\lambda d} e^{-i \frac{2\pi}{\lambda} d} e^{-i\pi\lambda d \left(m^2 \left(\frac{1}{N \Delta x} \right)^2 + n^2 \left(\frac{1}{N \Delta y} \right)^2 \right)} \quad (2.190)$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} E_R^*(k, l) h(k, l) e^{-i \frac{\pi}{\lambda d} (k^2 \Delta x^2 + l^2 \Delta y^2)} e^{i2\pi \left(k \Delta x m \left(\frac{1}{N \Delta x} \right) + l \Delta y n \left(\frac{1}{N \Delta y} \right) \right)} \quad (2.191)$$

$$= \frac{i}{\lambda d} e^{-i \frac{2\pi}{\lambda} d} e^{-i\pi\lambda d \left(\left(\frac{m}{N \Delta x} \right)^2 + \left(\frac{n}{N \Delta y} \right)^2 \right)} \quad (2.192)$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} E_R^*(k, l) h(k, l) e^{-i \frac{\pi}{\lambda d} (k^2 \Delta x^2 + l^2 \Delta y^2)} e^{i2\pi \left(\left(\frac{km}{N} \right) + \left(\frac{ln}{N} \right) \right)} \quad (2.193)$$

Esta es la transformada discreta de Fresnel. La matriz Γ se calcula multiplicando $E_R^*(k, l)$ con $h(k, l)$ y $e^{-i \frac{\pi}{\lambda d} (k^2 \Delta x^2 + l^2 \Delta y^2)}$ y aplicando una transformada discreta de Fourier inversa al producto. El cálculo se realiza de manera más efectiva utilizando el algoritmo de *Transformada Rápida de Fourier* (FFT). El factor frente a la suma solo afecta la fase general y puede omitirse si solo interesa la intensidad según la ecuación (2.180). La fórmula discreta correspondiente para la reconstrucción a través de una lente virtual con $f = \frac{d}{2}$ es

$$\Gamma(m, n) = \frac{i}{\lambda d} e^{-i \frac{2\pi}{\lambda} d} e^{i\pi\lambda d \left(\left(\frac{m}{N \Delta x} \right)^2 + \left(\frac{n}{N \Delta y} \right)^2 \right)} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} E_R(k, l) h(k, l) e^{i \frac{\pi}{\lambda d} (k^2 \Delta x^2 + l^2 \Delta y^2)} e^{i2\pi \left(\left(\frac{km}{N} \right) + \left(\frac{ln}{N} \right) \right)} \quad (2.194)$$

2.7.3. Holografía digital de Fourier

La geometría especial de grabación holográfica de la figura 2.30 se denomina *Holografía de Fourier sin lentes*. También se ha implementado en la Holografía Digital.

La fuente puntual de la onda de referencia esférica se encuentra en el plano del objeto. Por lo tanto, la onda de referencia en el plano del CCD se describe de la siguiente manera

$$E_R = \frac{e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{d^2+x^2+y^2}}}{\sqrt{d^2+x^2+y^2}} \approx \frac{1}{d}e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}d}e^{-i\frac{\pi}{\lambda d}(x^2+y^2)} \quad (2.195)$$

El término $\sqrt{d^2+x^2+y^2}$ es la distancia entre la fuente puntual y el punto con coordenadas (x, y) en el plano del CCD. La aproximación en la ecuación anterior es la misma que se utiliza para derivar la transformada de Fresnel. Insertando esta expresión en la expresión para la reconstrucción de la imagen virtual nos da la siguiente ecuación

$$\Gamma(\xi, \eta) = Ce^{i\frac{\pi}{\lambda d}(\xi^2+\eta^2)}\mathcal{F}^{-1}\{h(x, y)\} \quad (2.196)$$

C es una constante compleja. Por lo tanto, un holograma de Fourier sin lente se reconstruye mediante una transformada de Fourier. No es posible enfocar en diferentes áreas dentro del volumen del objeto con la holografía de Fourier sin lente, porque la distancia de reconstrucción d no aparece en la ecuación (2.196). El factor de fase esférica $e^{-i\frac{\pi}{\lambda d}(x^2+y^2)}$ asociado con la transformada de Fresnel se elimina mediante el uso de una onda de referencia esférica con la misma curvatura.

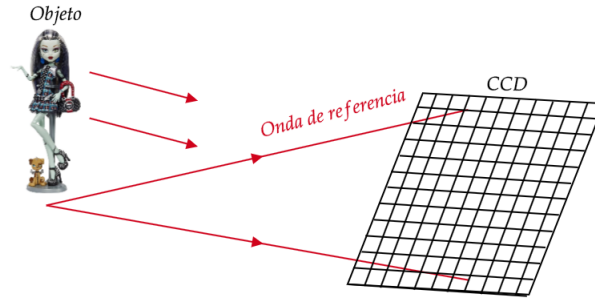


Figura 2.30: Holografía digital de Fourier sin lentes.

2.7.4. Separación de Imagen Virtual, Imagen Real y Término de DC

Eliminación del término de DC

El cuadro brillante en el centro de la figura 2.31 es la onda de reconstrucción no difractada. Este término de orden cero o término de DC perturba la imagen, ya que cubre parte del objeto que se encuentran detrás.

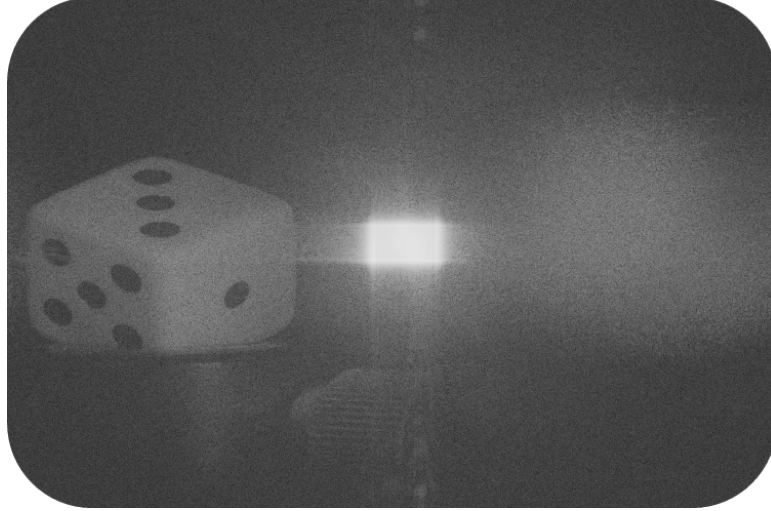


Figura 2.31: Reconstrucción de un holograma digital.

Para entender la causa de este término de DC, se considera la formación del holograma según la ecuación (2.118). La ecuación se reescribe insertando las definiciones de E_R y E_O y multiplicando los términos

$$\begin{aligned} I(x, y) &= |E_O(x, y) + E_R(x, y)|^2 \\ &= a_R^2 + a_O^2 + 2a_R a_O \cos(\phi_O - \phi_R) \end{aligned} \quad (2.197)$$

Los primeros dos términos conducen al término de DC en el proceso de reconstrucción. El tercer término varía estadísticamente entre $\pm 2a_R a_O$ de píxel a píxel en el CCD. La intensidad promedio de todos los píxeles de la matriz de hologramas es

$$I_m = \frac{1}{N^2} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} I(k\Delta x, l\Delta y) \quad (2.198)$$

Los términos $a_R^2 + a_O^2$ pueden ser suprimidos restando esta intensidad promedio I_m del holograma

$$I'(k\Delta x, l\Delta y) = I(k\Delta x, l\Delta y) - I_m(k\Delta x, l\Delta y) \quad (2.199)$$

para $k = 0, \dots, N-1$ y $l = 0, \dots, N-1$.

La reconstrucción de I' está libre del orden cero.

En lugar de restar la intensidad promedio, también es posible filtrar la matriz del holograma con un filtro paso alto de baja frecuencia de corte. La resta de la intensidad promedio del holograma antes de la reconstrucción es la idea básica de la supresión del término de corriente continua. El mismo efecto se puede lograr si se restan entre sí dos hologramas con estructuras de moteado cambiadas estocásticamente. La reconstrucción de este holograma de resta resulta en una imagen sin término de orden cero.

Separación espacial de imágenes

Con la geometría de grabado de la figura 2.27 la imagen real y la virtual se ubican en una línea. En la reconstrucción numérica se enfoca en la imagen real o en la imagen virtual. La otra imagen suele estar desenfocada debido a la distancia entre el sensor y el objeto. En consecuencia, solo una de las imágenes es visible en la reconstrucción.

Sin embargo, existen algunos casos en los que la reconstrucción podría ser perturbada por la imagen gemela desenfocada, por ejemplo, si la distancia de grabación es muy corta. Para este caso especial, podría ser útil grabar los hologramas con una referencia inclinada, como se muestra en el montaje de la figura 2.32. En esta geometría, ambas imágenes están separadas angularmente en la reconstrucción. La imagen real se desvía del eje a un ángulo aproximadamente dos veces más grande que el ángulo entre la onda de referencia y el eje. La onda de referencia inclinada se describe por

$$E_R = e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}x \sin \theta} \quad (2.200)$$

La desventaja de esta configuración son las muy altas frecuencias espaciales en el CCD en comparación con la configuración de la figura 2.27. Esto es crítico con respecto a la resolución del CCD y limita el ángulo utilizable para la onda del objeto.

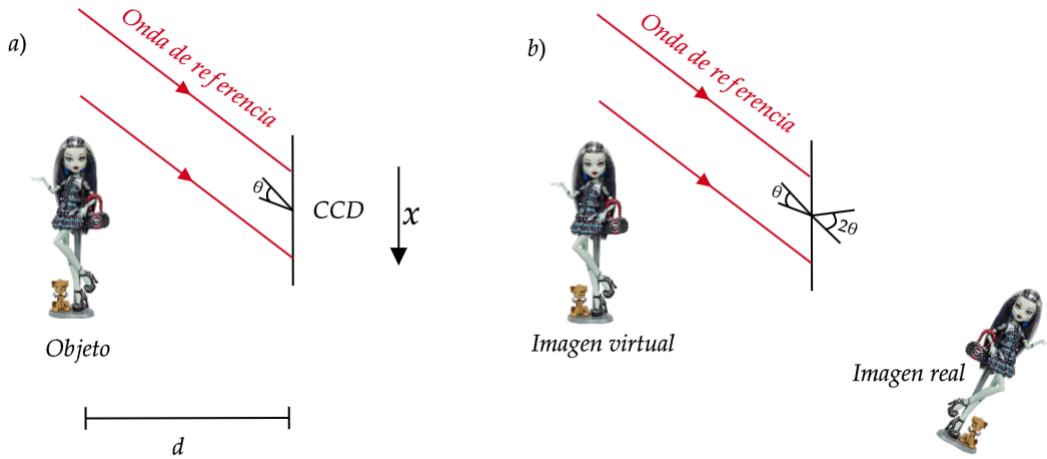


Figura 2.32: Holografía digital con una onda de referencia inclinada.a) Grabado b)Reconstrucción

2.7.5. Grabado de hologramas digitales

CCD (Charge Couple Devices)

Los Dispositivos de Carga Acoplada (CCD, por sus siglas en inglés) fueron inventados en los años sesenta del siglo pasado por investigadores de Bell Labs. Un CCD es un dispositivo eléctrico que se utiliza para crear imágenes de objetos, almacenar información o transferir carga eléctrica. La aplicación más popular hoy en día es el registro de imágenes.

Los CCD se utilizan como dispositivos de imagen en cámaras electrónicas y escáneres. Están disponibles como dispositivos de escaneo de líneas, que consisten en una sola línea de detectores de luz, y como dispositivos de escaneo de área, que consisten en una matriz rectangular de detectores de luz. Para Holografía Digital, solo la última configuración es de interés.

La imagen de CCD se realiza en un proceso de tres pasos:

1. Exposición a la luz: La luz incidente separa las cargas mediante el efecto fotoeléctrico interno. Este efecto convierte la luz en una carga electrónica en los detectores individuales llamados píxeles.
2. Transferencia de carga: La función de transferencia de carga mueve los paquetes de carga dentro del sustrato semiconductor (silicio) a las celdas de memoria.
3. Conversión de carga a voltaje y amplificación de salida: La matriz de capacitores de las celdas de memoria convierte la carga transferida en un voltaje. Un amplificador adapta el voltaje a los requisitos de salida.

Las tres configuraciones básicas de los CCD se denominan dispositivos de transferencia de fotograma completo, dispositivos de transferencia de cuadro y dispositivos de transferencia de interlínea.

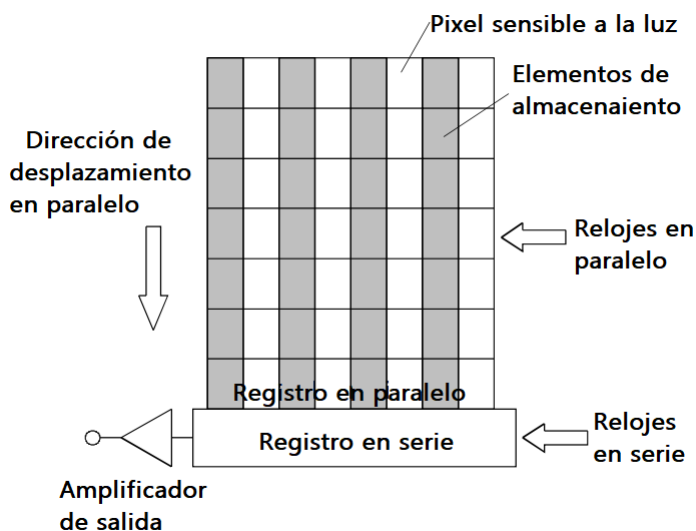


Figura 2.33: Configuración de transferencia interlineal.

Los CCD de transferencia de interlínea consisten en un patrón rayado de detectores sensibles a la luz (fotodiodos) y dispositivos de almacenamiento no sensibles a la luz o protegidos de la luz separados, como se muestra en la figura 2.33. Los paquetes de carga generados en los píxeles sensibles a la luz se desplazan a los dispositivos de almacenamiento adyacentes mediante un reloj paralelo. Después, las cargas en estos dispositivos de almacenamiento se desplazan línea por línea hacia el registro serial. Este registro serial transfiere los paquetes de carga a un convertidor de carga a voltaje con amplificador, que forma la señal de salida. La principal desventaja de los CCD

de transferencia de interlínea es su complejidad, que resulta de separar las funciones de detección de fotodetección y almacenamiento (lectura).

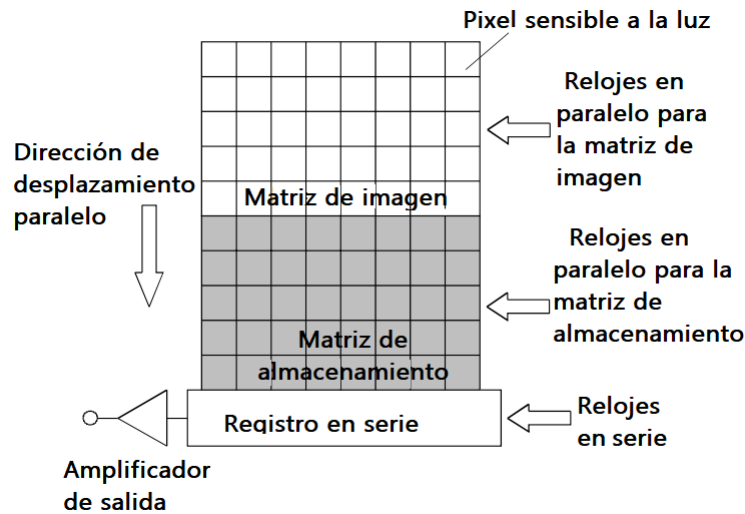


Figura 2.34: Configuración de transferencia de cuadro completo.

Los CCD de transferencia de fotograma también tienen áreas diferentes para la conversión de luz y para el almacenamiento. Sin embargo, estos elementos no están dispuestos en rayas, sino divididos en dos bloques diferentes, como se muestra en la figura 2.34. La idea es desplazar una escena capturada desde el conjunto de imágenes fotosensibles muy rápidamente al conjunto de almacenamiento. La lectura del registro de almacenamiento se realiza de manera similar al proceso de lectura de los dispositivos de transferencia de interlínea.

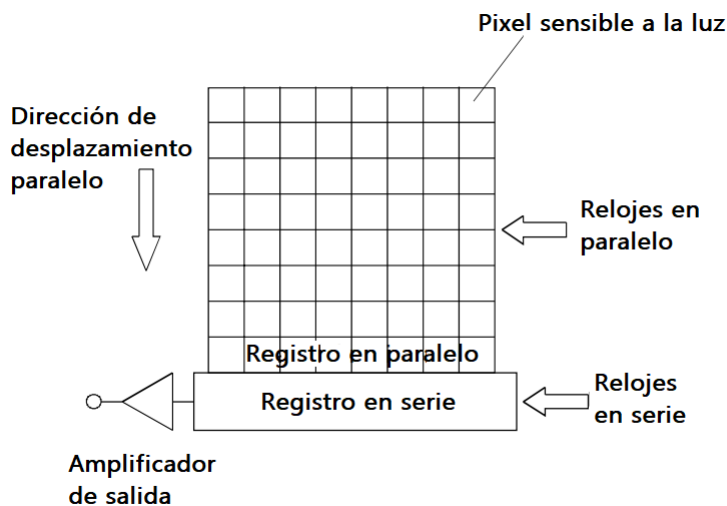


Figura 2.35: Configuración de cuadro completo.

Los CCD de fotograma completo tienen la arquitectura más simple, como se muestra en la figura (2.35). A diferencia de los dispositivos de transferencia de interlínea y de fotograma, no tienen un área de almacenamiento separada. Toda el área del sensor es sensible a la luz. Los fotones de la luz incidente se convierten en paquetes de carga. Las filas resultantes de información de imagen se desplazan en paralelo al registro serial, que posteriormente desplaza la fila de información hacia la salida como una secuencia serial de datos. El proceso se repite hasta que todas las filas se transfieren

fuera del chip. Dado que el registro paralelo se utiliza tanto para la detección de imagen como para la lectura, se necesita un obturador mecánico para preservar la integridad de la escena.

Sin embargo, los CCD de fotograma completo tienen la mayor resolución y los costos de producción son comparativamente baratos.

En principio, los tres tipos de CCD son adecuados para la Holografía Digital. Los CCD de fotograma completo tienen la ventaja de que el tiempo de exposición se puede ajustar según las demandas de una aplicación específica. Incluso se pueden lograr tiempos de exposición en el rango de segundos. Sin embargo, el obturador mecánico limita el número de hologramas que se pueden grabar por segundo (tasa de cuadros). Además, el obturador puede causar vibraciones mecánicas en la configuración, lo que deteriora la calidad del holograma.

Una ventaja de los CCD de transferencia de interlínea es que tales dispositivos están equipados con un obturador electrónico, lo que permite tasas de cuadros más altas. El tipo de cámara más adecuado depende, por lo tanto, de la aplicación holográfica específica.

Requisitos de frecuencia espacial

Un CCD utilizado para grabar hologramas debe resolver el patrón de interferencia resultante de la superposición de la onda de referencia con las ondas dispersadas de los diferentes puntos del objeto. La máxima frecuencia espacial a ser resuelta está determinada por el ángulo máximo entre estas ondas según la

$$f_{max} = \frac{2}{\lambda} \sin \frac{\theta_{max}}{2} \quad (2.201)$$

Las emulsiones fotográficas utilizadas en la holografía óptica tienen resoluciones de hasta 5000 pares de líneas por milímetro ($\frac{Lp}{mm}$). Utilizando estos materiales, se pueden grabar hologramas con ángulos de hasta 180° entre la onda de referencia y la onda del objeto. Sin embargo, la distancia entre píxeles vecinos de un CCD de alta resolución está en el orden de aproximadamente $\Delta x \approx 5 \mu m$. La frecuencia espacial máxima resoluble correspondiente, calculada por

$$f_{max} = \frac{1}{2\Delta x} \quad (2.202)$$

es ta por lo tanto en el rango de $100 \frac{Lp}{mm}$. Combinando las dos ecuaciones anteriores

$$\theta_{max} = 2 \arcsen \left(\frac{\lambda}{4\Delta x} \right) \approx \frac{\lambda}{2\Delta x} \quad (2.203)$$

donde la aproximación es válida para ángulos pequeños. La distancia entre píxeles vecinos es entonces una cantidad que limita el máximo ángulo entre las ondas de objeto y referencia.

Capítulo 3

Metodología

Como se mencionó en la sección 2.7 en Holografía Digital se tiene el objetivo de grabar hologramas espacio real y reconstruirlos en el espacio digital. En el presente capítulo se detallará el proceso para grabado y reconstrucción empleado.

3.1. Arreglo experimental

En el laboratorio de Interferometría y Holografía de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, se montó un arreglo interferométrico, como los descritos en la sección 2.2, para la captura de hologramas de Fresnel, sección 2.6.4. A continuación se presenta el diagrama esquemático del arreglo, figura 3.1.

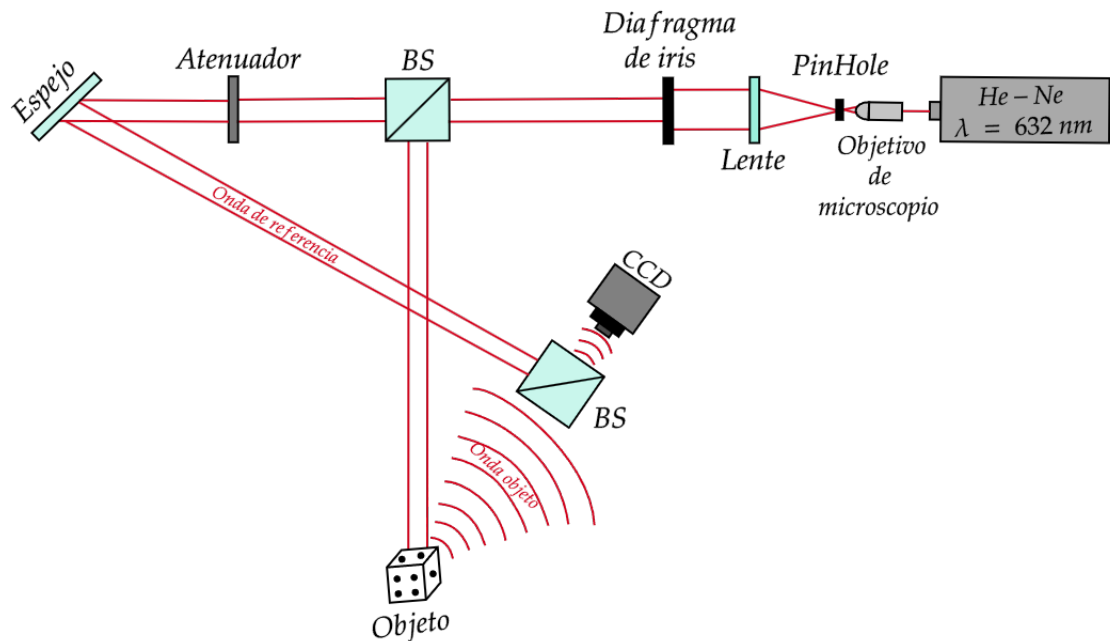


Figura 3.1: Diagrama del arreglo construido, a continuación se describen detalladamente los componentes utilizados.

Los componentes de dicho arreglo fueron:

- Láser He-Ne de longitud de onda de 632.8 nm .
- Objetivo de microscopio genérico de $10\times$ de amplificación.
- Montura de desplazamiento.

- Lente de 25 *cm* de distancia focal.
- Montura para lente de 10 *cm* de diámetro.
- Diafragma de iris genérico de 10 *cm* de radio.
- 2 cubos divisores de 2 pulgadas de lado.
- Un espejo de primera superficie de 2 pulgadas de lado.
- Atenuador de densidad variable.
- Cámara CCD marca PixeLink.
- Monturas, vástago, porta-vástagos, rieles y carritos de desplazamiento.
- PinHole de 15 μm
- Objetos muestra, para este caso figuras de plastilina, cuentas y un dado.

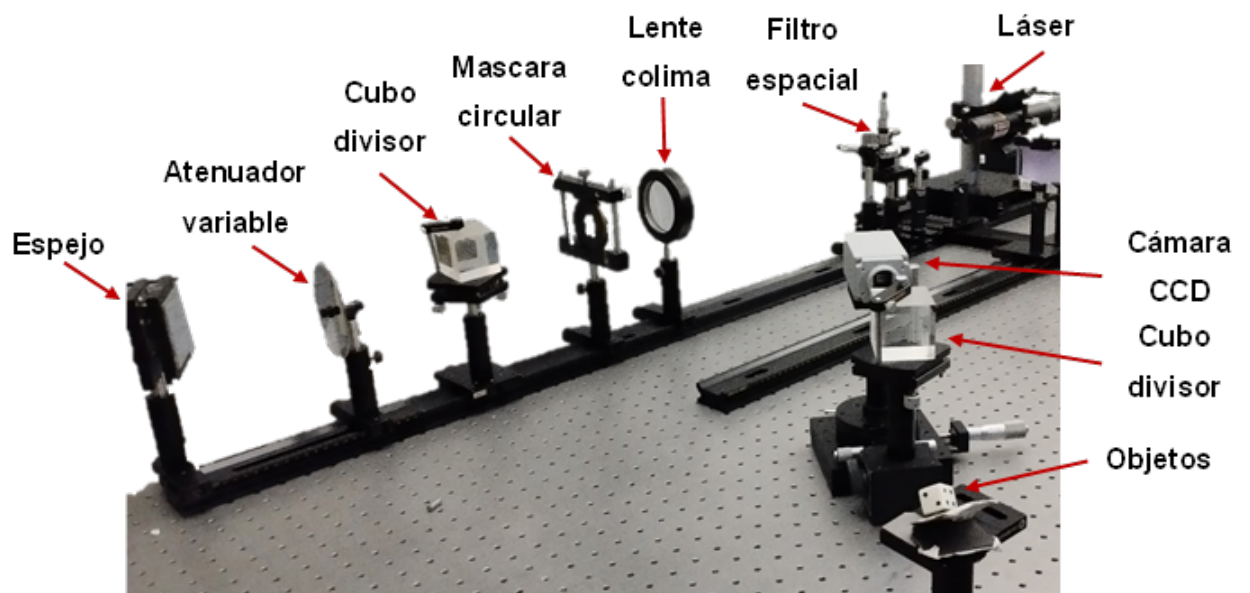


Figura 3.2: Arreglo Experimental.

Una vez montado el arreglo experimental se procedió a la captura de hologramas mediante los siguientes pasos:

1. Se colocó el objeto de estudio, como se muestra el diagrama (3.2).
2. Se encendieron el láser y la cámara.
3. A través de un monitor de computadora y con ayuda de la cámara se determinó la intensidad de la onda objeto.
4. Se colocó el atenuador en la densidad adecuada para que la intensidad de la onda de referencia fuera similar a la de la onda objeto.
5. Se capturó un conjunto de hologramas de prueba para realizar la reconstrucción en Matlab.

6. Una vez capturados los hologramas, se realizaron ajustes en la distancia de propagación y los ángulos de reflexión de los espejos (lo anterior para obtener la mejor resolución posible y una separación adecuada entre los órdenes de difracción, como se menciona en la sección (2.7.4)).
7. Una vez determinados los parámetros. Se repitió el proceso de grabado desplazando la cámara y dejando el objeto quieto. Al igual que moviendo el objeto y dejando la cámara fija.

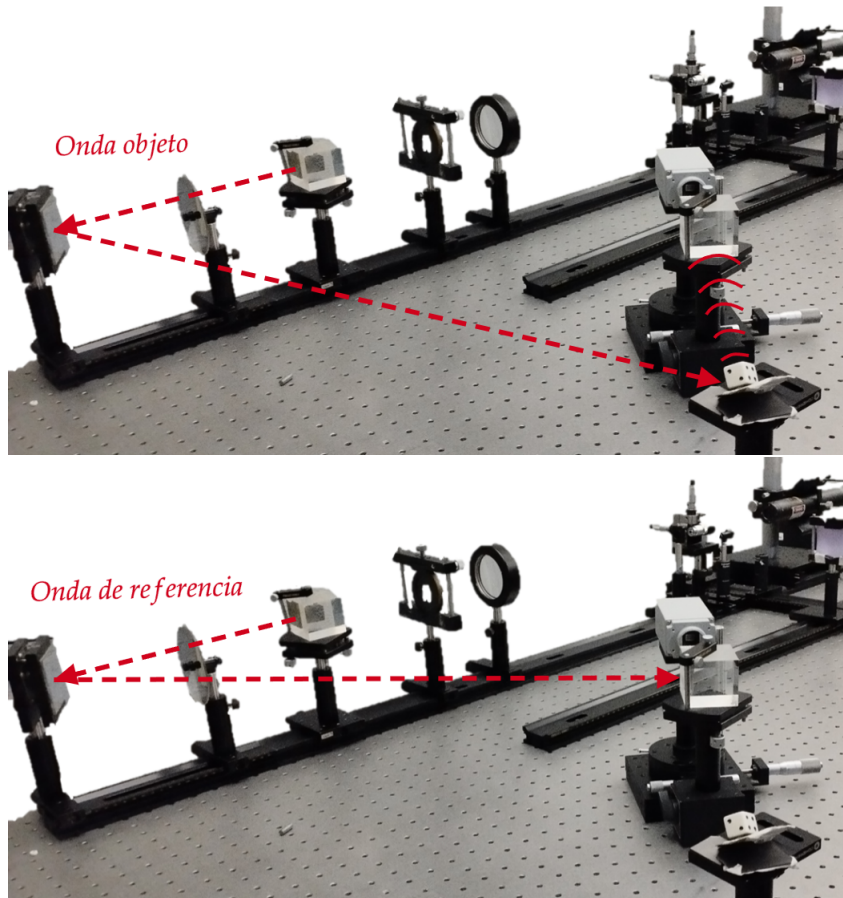


Figura 3.3: Ondas usadas para grabar hologramas.

Para lograr una correcta separación de los órdenes de difracción se optó por una configuración fuera de eje. Además debido a las características de nuestro láser se encontró que las muestras más adecuadas eran objetos blancos de superficie semirreflejante. A su vez se caracterizó el ángulo al que se debía colocar el espejo con respecto al objeto. Dependiendo de los objetos que se utilizarán como muestra se varió la distancia de propagación z (la cual como se mencionó en el apartado (2.22) es la distancia del objeto al sensor, este último encontrándose en el campo cercano del objeto).

Es importante mencionar que al tratarse de una técnica robusta, los efectos en las variaciones de iluminación de fondo, temperatura y presión, eran despreciables. De modo que las capturas se realizaron en condiciones habituales del laboratorio (temperatura y presión ambiente) con la luz encendida.

3.2. Proceso computacional

A través del arreglo descrito en la sección anterior se capturaron y procesaron hologramas mediante un código escrito en Matlab. A continuación se presentan los dos procesos realizados.

3.2.1. Caso 1

En un holograma se encuentra distribuida de manera uniforme la información grabada del objeto. Por ello a partir de cualquier sección de este (incluso si es cortado en pequeños fragmentos) la imagen del objeto se puede reconstruir. Una analogía para describir este fenómeno es describir al holograma como una ventana. A través de una ventana es posible observar lo que se encuentra del otro lado. Si se cubre una sección de esta ventana, dejando una abertura (de tamaño indistinto), es posible observar lo que se encuentra del otro lado de la ventana aunque ya no se observe a través de la ventana completa. Cabe destacar que tal y como ocurre en el caso de la ventana, cuanto más pequeña sea la sección a través de la cual se observa el objeto menores serán los detalles que se apreciarán de este mediante el holograma.

Para este caso se buscó aprovechar dicha propiedad de los hologramas. Para cumplir este objetivo se capturó un holograma (de 1200 x 1600 píxeles), el cual se cortó en 5 secciones, 4 esquinas (de 600 x 600 píxeles) y una región central (de 1200 x 1200 píxeles) que representa la sección principal del holograma. Posteriormente se realizó la reconstrucción numérica descrita en la sección (2.7.2). La cual se describe en el diagrama de flujo de la figura 3.4.

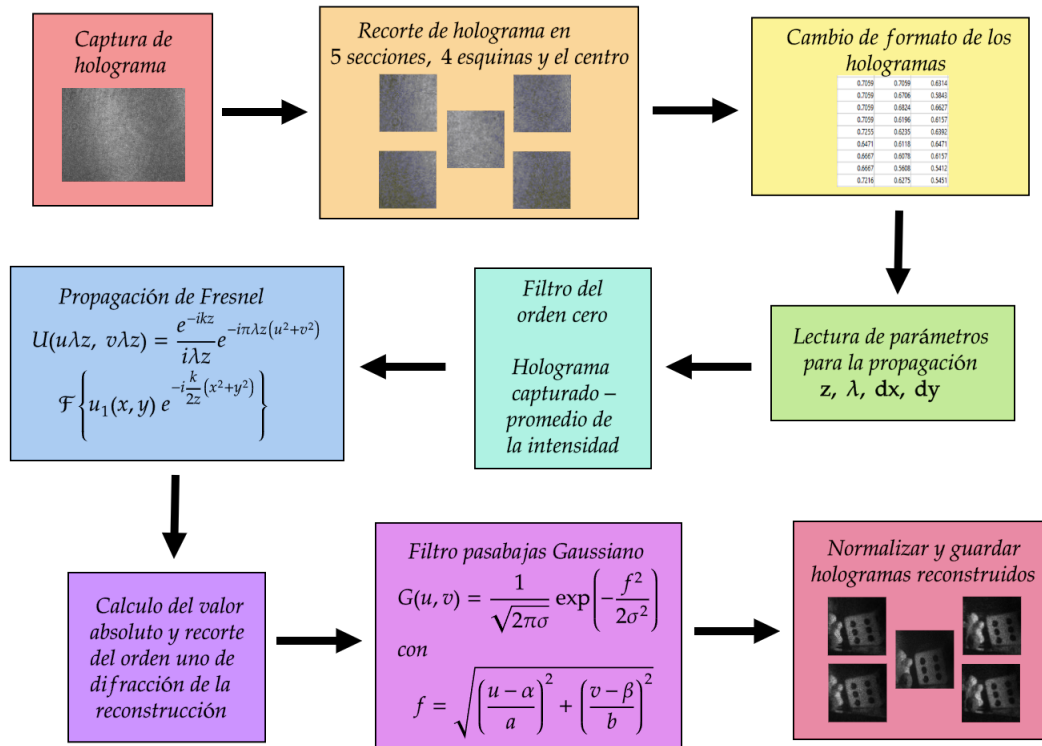


Figura 3.4: Diagrama de flujo, proceso computacional caso 1.

3.2.2. Caso 2

Para este caso se capturaron dos diferentes conjuntos de hologramas.

- En el primer conjunto el objeto muestra permanecía quieto mientras la cámara se desplazaba capturando así distintas regiones del patrón de interferencia (holograma), el cual era aproximadamente 1.5 veces el tamaño del sensor CCD utilizado para la captura de los hologramas.
- En el segundo caso la cámara se mantuvo en la misma posición mientras los objetos muestra se cambiaban de posición, mediante rotaciones o desplazamiento vertical u horizontal.

Al igual que en el caso anterior se realizó la reconstrucción numérica descrita en la sección (2.7.2). La cual se describe en el diagrama de flujo 3.5.

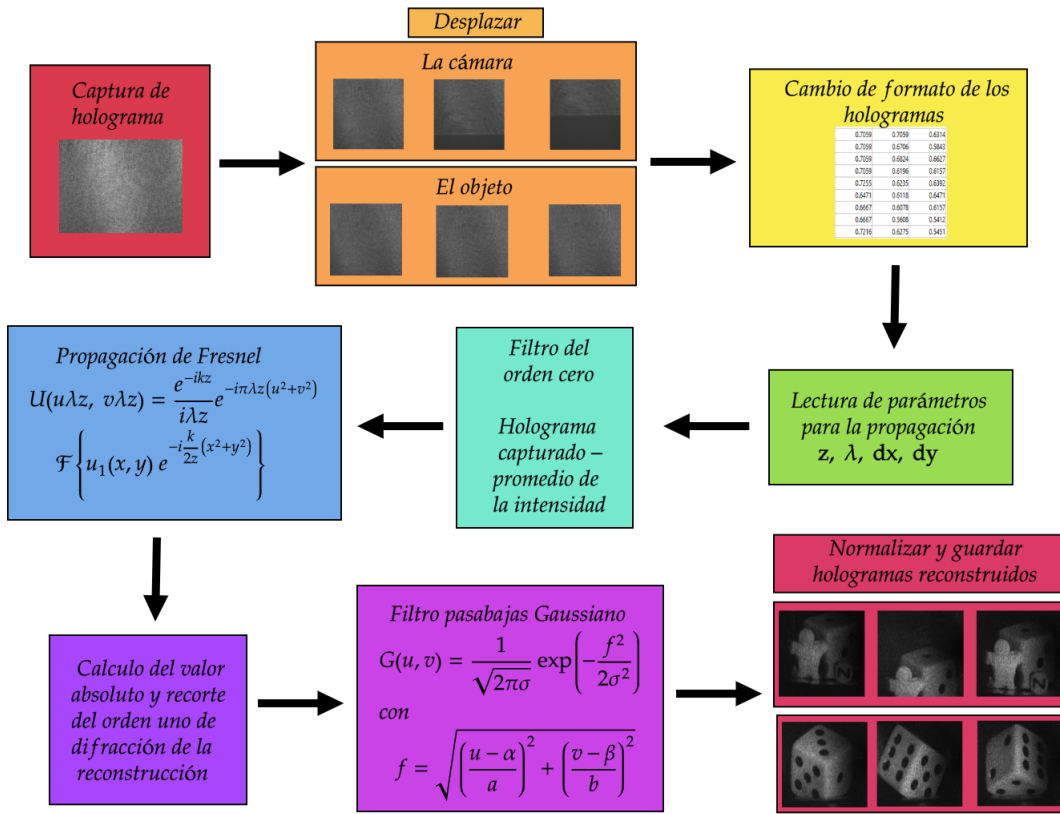


Figura 3.5: Diagrama de flujo, proceso computacional caso 2.

3.2.3. Detalles de la reconstrucción

A excepción del paso de captura, los procesos de reconstrucción de ambos caso fueron iguales.

- El cambio de formato, que se menciona en los recuadros amarillos de ambos diagramas de flujo, indica que para todos los hologramas, a cada uno de sus píxeles se le asigno un valor numérico para poder trabajar numéricamente con el campo óptico capturado.
- En el recuadro verde se habla de la lectura de parámetros. Paso en el cual la reconstrucción digital obtiene los parámetros de captura reales:
 - λ , la longitud de onda del láser con el cual se grabo el holograma.
 - z , la distancia de propagación.
 - dx y dz las dimensiones del sensor CCD en el que se capturó el holograma.

3.2.4. Filtros

Filtro del orden cero

En la sección (2.6.2) se mencionó que un holograma actúa como una rejilla de difracción. La cual al ser iluminada da origen a tres órdenes de difracción. En la siguiente imagen se observa cómo los tres órdenes no se separan adecuadamente. Aún más el orden uno no se aprecia completamente por el brillo del orden cero.

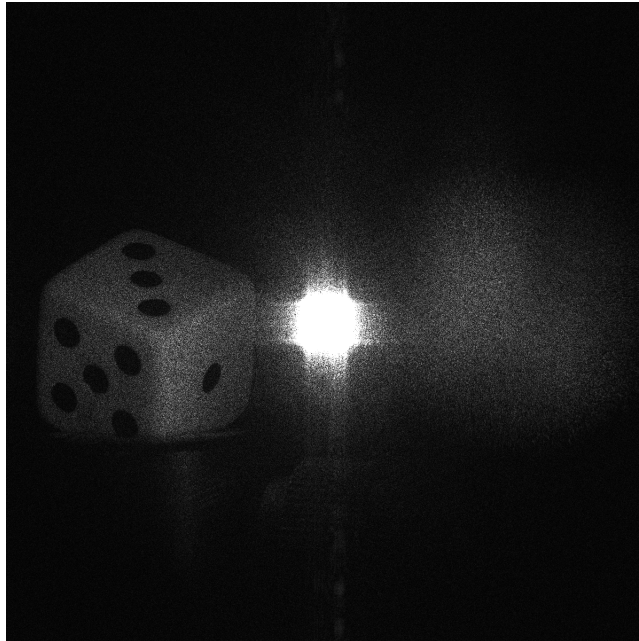


Figura 3.6: Holograma completo sin filtrar orden cero. Con ajuste de contraste.

De hecho, si no se usara un filtro de contraste el orden uno ni siquiera sería visible.

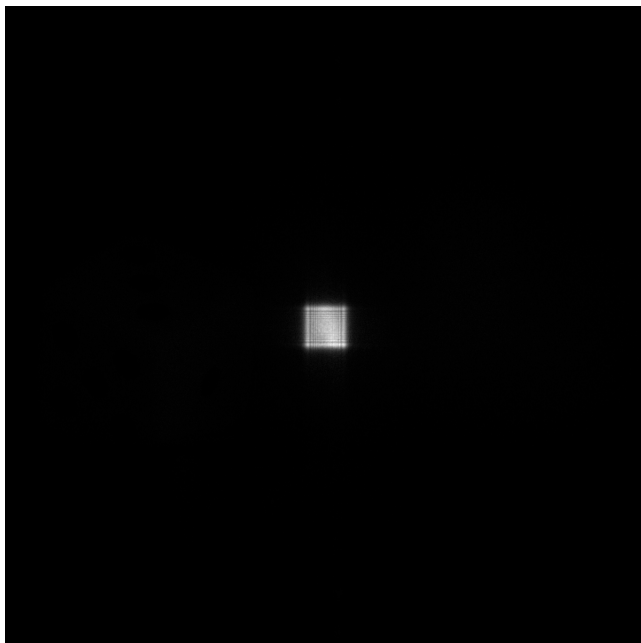


Figura 3.7: Holograma completo sin filtrar orden cero. Sin ajuste de contraste.

Como se describió en el apartado (2.7.4) es posible filtrar el orden cero restando al holograma, antes de la reconstrucción, el promedio de la intensidad del mismo. Entonces aplicando este procedimiento, en cada conjunto de 9 píxeles. La imagen resultante sin orden cero es la siguiente



Figura 3.8: Holograma completo filtrando el orden cero. Sin ajuste de contraste.

Filtro pasabajas Gaussiano

El holograma original obtenido experimentalmente tiene bajo contraste y contiene ruido de speckle. A veces, el ruido está en la región de alta frecuencia, mientras que la transformada de Fourier de la imagen revela que la mayor parte de la información está contenida en la región de baja frecuencia. Por lo tanto, al filtrar la región de alta frecuencia, se puede eliminar dicho ruido en la imagen, [8].

El filtrado pasa bajos se puede aplicar fácilmente en el dominio de la frecuencia. Al multiplicar la transformada de Fourier de la imagen por la función de transferencia del filtro y luego transformar inversamente el producto, se puede obtener la imagen filtrada.

Dado que la señal de baja frecuencia se pasa sin ninguna alteración, este proceso se llama filtrado pasa bajos. Además, la eliminación del ruido, el filtrado pasa bajos también causa borrosidad en los bordes afilados. El borramiento se debe a la atenuación del contenido de alta frecuencia, que preserva la información de los bordes. La imagen resultante se da por

$$f(x, y) = \mathcal{F}^{-1}\{F(u, v) H(u, v)\} \quad (3.1)$$

donde $H(u, v)$ representa el filtro pasabajas, u y v representan las frecuencias espaciales horizontal y vertical, respectivamente.

El filtro pasa bajos utilizado en esta función es un filtro Gaussiano. La función de transferencia Gaussiana se da por

$$G(u, v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{f^2}{2\sigma^2}} \quad (3.2)$$

donde

$$f = \sqrt{\left(\frac{u - \alpha}{a}\right)^2 + \left(\frac{v - \beta}{b}\right)^2} \quad (3.3)$$

Los valores de a y b determinan la asimetría en el filtro y α y β determinan la posición del pico central de la función de transferencia. La transformada de Fourier utiliza la transformada rápida de Fourier, o FFT por sus siglas en inglés, [8].

Se recorta el orden uno de la reconstrucción (3.8).



Figura 3.9: Orden uno de difracción recortado de la reconstrucción.

A este recorte se le aplica el filtro pasabajas descrito en esta sección para disminuir el ruido de Speckle. obteniendo así



Figura 3.10: Orden uno de difracción recortado de la reconstrucción. Con filtro pasabajas.

Capítulo 4

Resultados

Después de capturar el holograma de Fresnel de cada muestra, se realiza el proceso computacional de reconstrucción a través de los algoritmos anteriormente descritos. Con ello se recuperan distintas perspectivas de los objetos capturados.

Los resultados se presentan por separado para cada caso, mostrando una fotografía del objeto a reconstruir, el holograma completo capturado y las distintas reconstrucciones según sea el caso. Para el caso 1 se muestra el holograma completo seguido por la reconstrucción de la sección principal y las 4 secundarias. Para el caso 2 solo se presentan las reconstrucciones de cada traslación realizada, pues los hologramas que dan origen a estas reconstrucciones son (a simple vista) iguales a los que se presentan en el caso 1.

Finalmente se exponen los cambios en el enfoque a causa de variar la distancia de propagación en la reconstrucción, esto para las muestras conformadas por un conjunto de objetos distribuidos en distintos planos.

4.1. Caso 1

Los resultados del primer procedimiento fueron los siguientes.

El primer objeto de estudio fue un conjunto de piezas de ajedrez, todas de plástico y de aproximadamente 1 *cm* de altura cada una. Como se muestra en la fotografía 4.1.



Figura 4.1: Fotografía del objeto. Caso Ajedrez.

La figura 4.2 es el holograma completo del objeto de la figura 4.1 (sin procesamiento ni recortes).

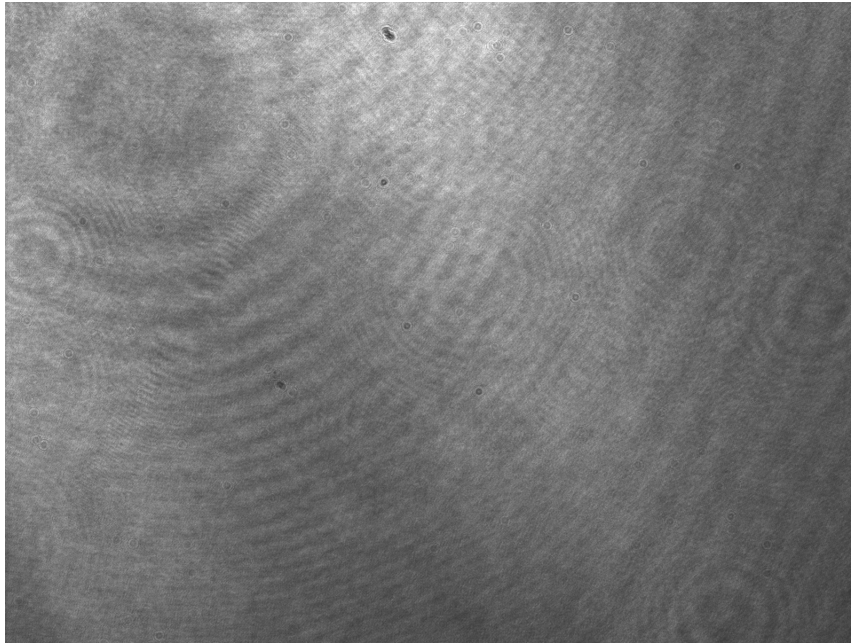


Figura 4.2: Holograma capturado. Caso Ajedrez. Los anillos que se observan no son parte del patrón de interferencia holográfico, se deben a los defectos en los componentes del arreglo.

Tras pasar por los recortes y la propagación numérica de Fresnel el holograma 4.2, da origen a las reconstrucciones de las figuras 4.3 y 4.4. Haciendo una comparación entre la fotografía 4.1 y la reconstrucción de la región central 4.3 se observa una reconstrucción fidedigna de los objetos, observados desde una distinta perspectiva. Sin embargo para el caso de los recortes de la figura 4.4, se observa un incremento en el campo de visión, pues al reconstruir distintas regiones del holograma se obtienen perspectivas que no se podrían observar tan solo con una fotografía.



Figura 4.3: Región central reconstruida. Caso Ajedrez.

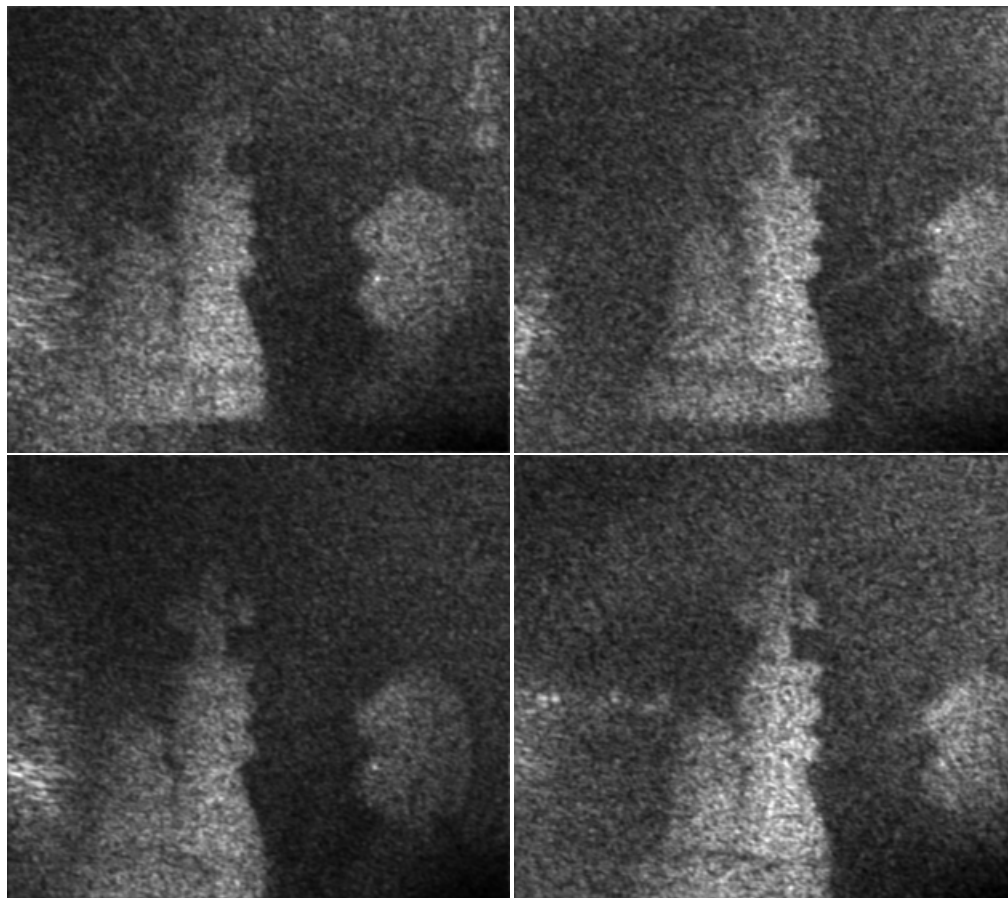


Figura 4.4: Reconstrucción de las 4 esquinas del holograma. Caso Ajedrez.

El segundo caso de estudio fue un conjunto de: un dado de plástico, una letra de plástico y un anillo de plastilina. Como se muestra en la fotografía 4.5.



Figura 4.5: Fotografía del objeto. Objetos 1.

La figura 4.6 es el holograma completo del objeto de la figura 4.5 (sin procesamiento ni recortes).

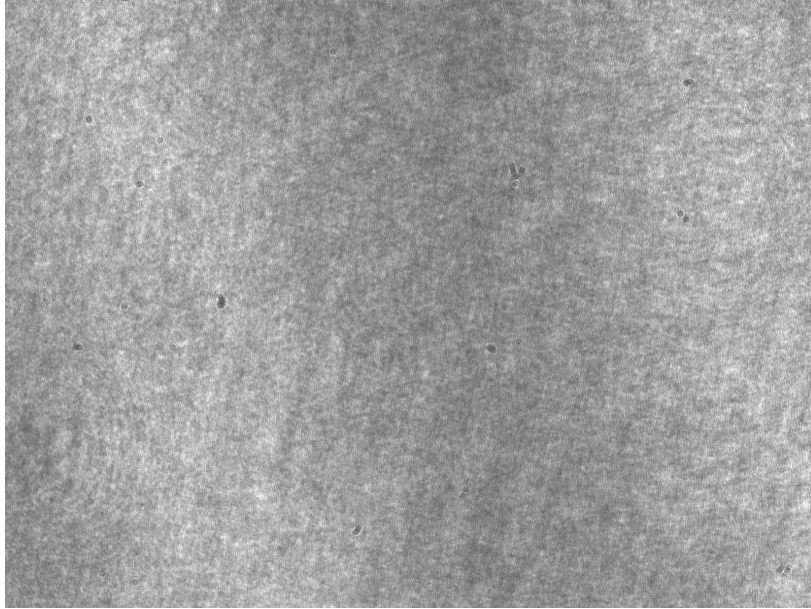


Figura 4.6: Holograma capturado. Caso Objetos1.

Como en el caso anterior tras pasar por los recortes y la propagación numérica de Fresnel el holograma 4.6, da origen a las reconstrucciones de las figuras 4.7 y 4.8. La fotografía 4.5 no representa la configuración exacta en la que se encontraban los objetos al grabar el holograma, sin embargo da una idea de cómo debe lucir la reconstrucción. En las reconstrucciones de distintas secciones del holograma, tal y como se esperaba, se pueden observar distintas regiones de los objetos reconstruidos, por ejemplo el dado en mayor o menor medida y la letra *Z* a través del anillo desde distintos ángulos.

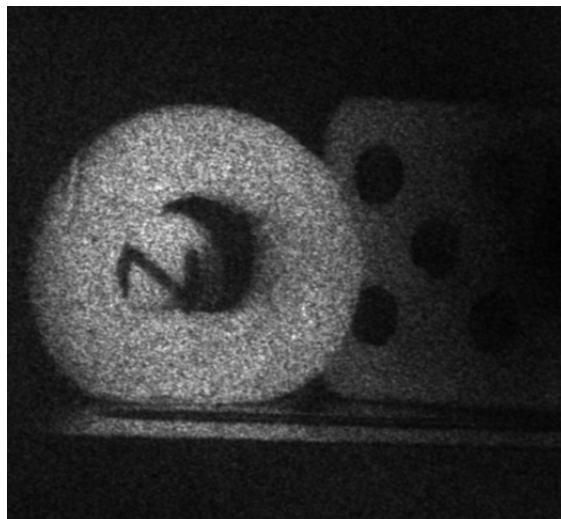


Figura 4.7: Región central reconstruida. Caso Objetos1.

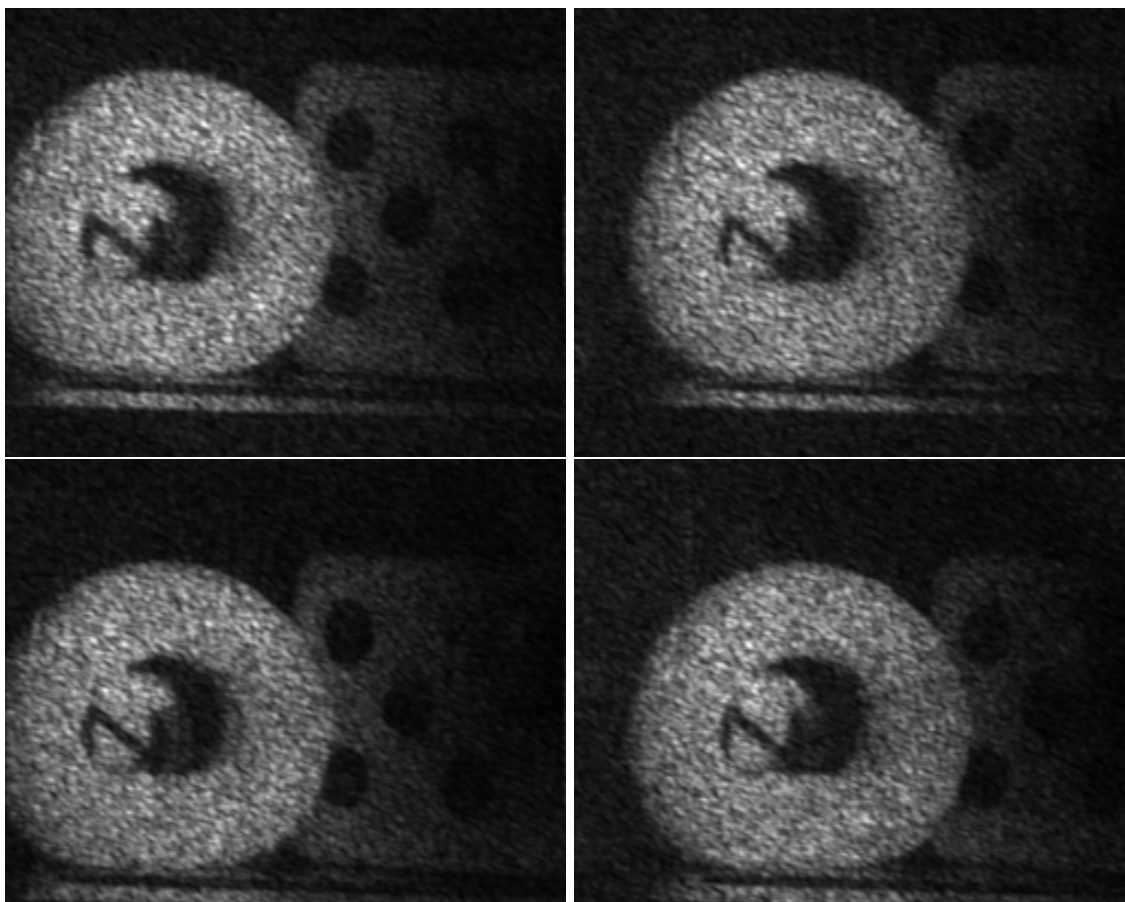


Figura 4.8: Reconstrucción de las 4 esquinas del holograma. Caso Objetos 1.

El tercer caso de estudio fue un conjunto de: un dado de plástico, una letra de plástico, un cubo y un hombre de plastilina. Como se muestra en la fotografía 4.9.



Figura 4.9: Fotografía del objeto. Objetos 2.

La figura 4.10 es el holograma completo del objeto de la figura 4.9 (sin procesamiento ni recortes).

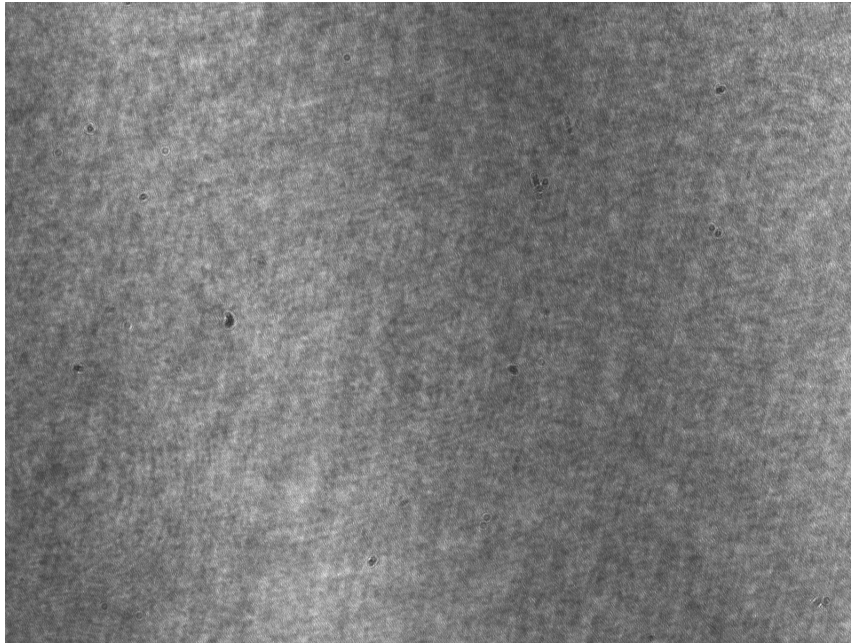


Figura 4.10: Holograma capturado. Caso Objetos2.

El holograma 4.10, da origen a las reconstrucciones de las figuras 4.11 y 4.12. En las reconstrucciones de distintas secciones del holograma, se pueden observar distintas regiones de los objetos reconstruidos, por ejemplo el dado en mayor o menor medida y se observan distintas regiones de la letra *Z*.



Figura 4.11: Región central reconstruida. Caso Objetos2.

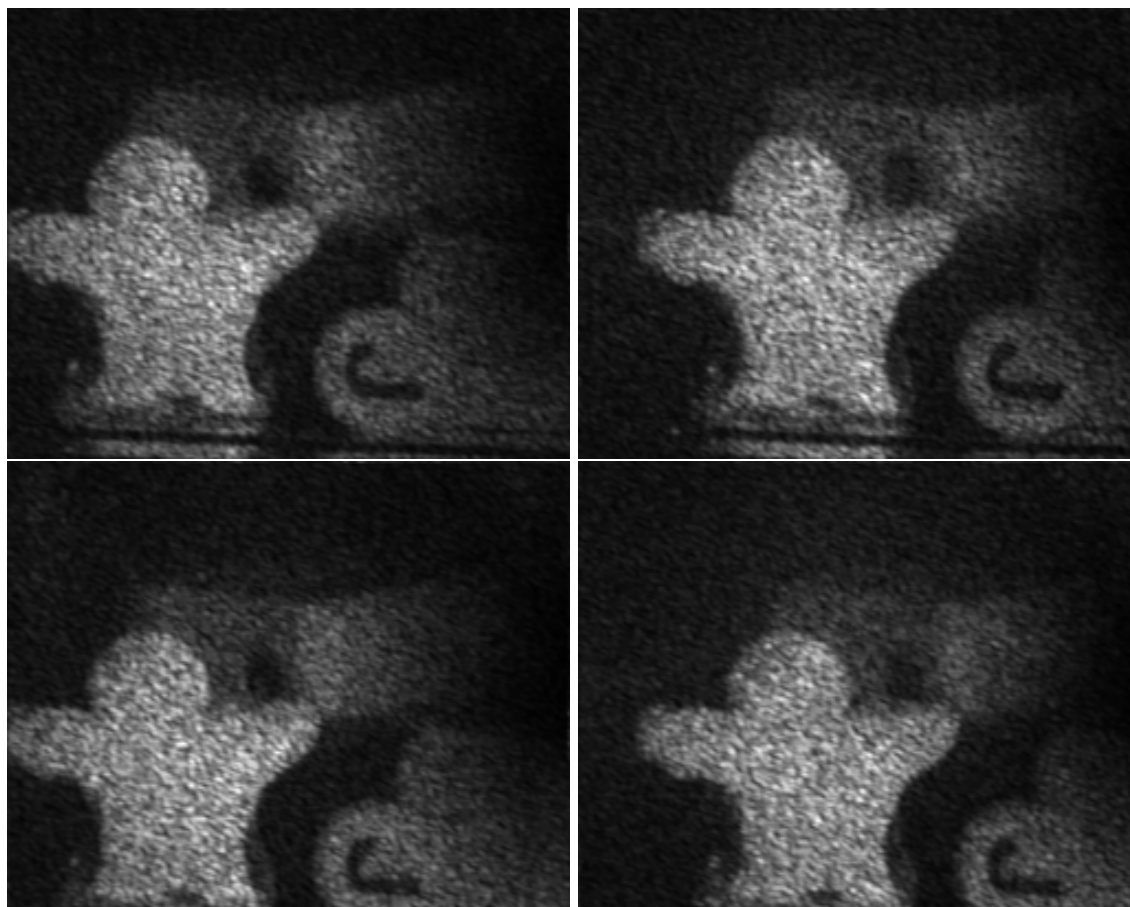


Figura 4.12: Reconstrucción de las 4 esquinas del holograma. Caso Objetos 2.

El cuarto caso de estudio fue un conjunto de: un dado de plástico, una letra de plástico y un hombre de plastilina. Como se muestra en la fotografía 4.13.



Figura 4.13: Fotografía del objeto. Objetos 3.

La figura 4.14 es el holograma completo del objeto de la figura 4.13 (sin procesamiento ni recortes).



Figura 4.14: Holograma capturado. Caso Objetos3.

El holograma 4.14origina las reconstrucciones de las figuras 4.15 y 4.16. La fotografía 4.13 no representa la configuración exacta en la que se encontraban los objetos al grabar el holograma, sin embargo da una idea de como debe lucir la reconstrucción. En las reconstrucciones de distintas secciones del holograma se pueden observar distintas regiones de los objetos reconstruidos, por ejemplo el dado y la letra *Z* en distintos ángulos.



Figura 4.15: Región central reconstruida. Caso Objetos3.

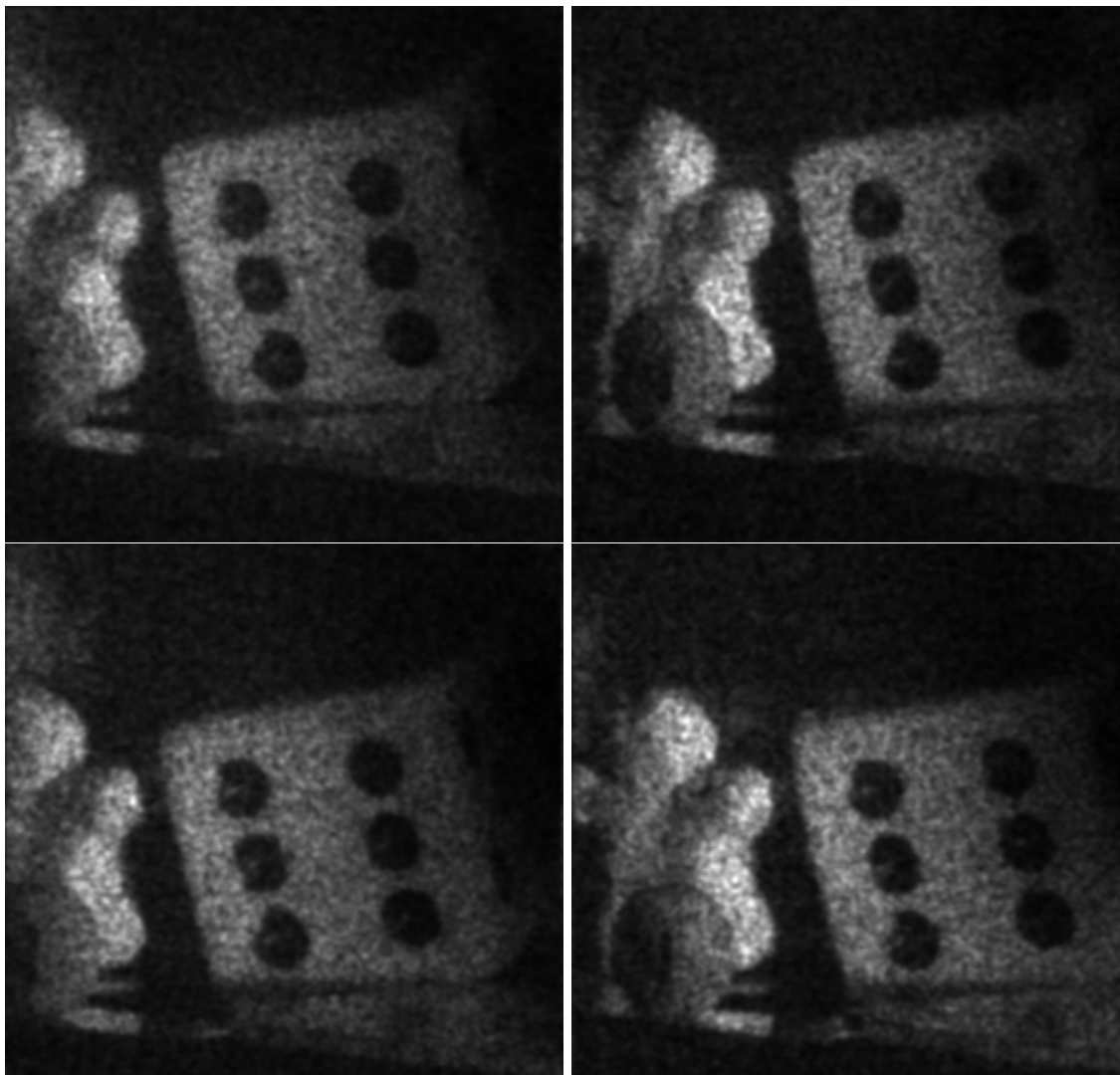


Figura 4.16: Reconstrucción de las 4 esquinas del holograma. Caso Objetos 3.

Las reconstrucciones pudieron efectuarse exitosamente a partir de recortes del holograma grabado inicialmente. Se observa que la cantidad de detalles del objeto en la reconstrucción es proporcional a la cantidad de píxeles del recorte utilizado. Pues la región central, que consta de 1200×1200 píxeles, tiene mejor definición en cada caso. A comparación de los recortes de las esquinas, de 600×600 píxeles cada una. En la reconstrucción de cada recorte, partiendo de un mismo holograma, el campo de visión varía.

4.2. Caso 2

4.2.1. Desplazamiento del objeto

Este primer caso corresponde a los objetos de la fotografía 4.13, al desplazar el objeto y capturar un holograma en cada desplazamiento se observan hologramas muy similares al 4.14.

Al cambiar de posición los objetos se obtiene una reconstrucción exitosa de las diferentes posiciones de cada uno. Ya sea desplazamientos horizontales como los de la figura 4.17 o verticales como en las reconstrucciones 4.18.

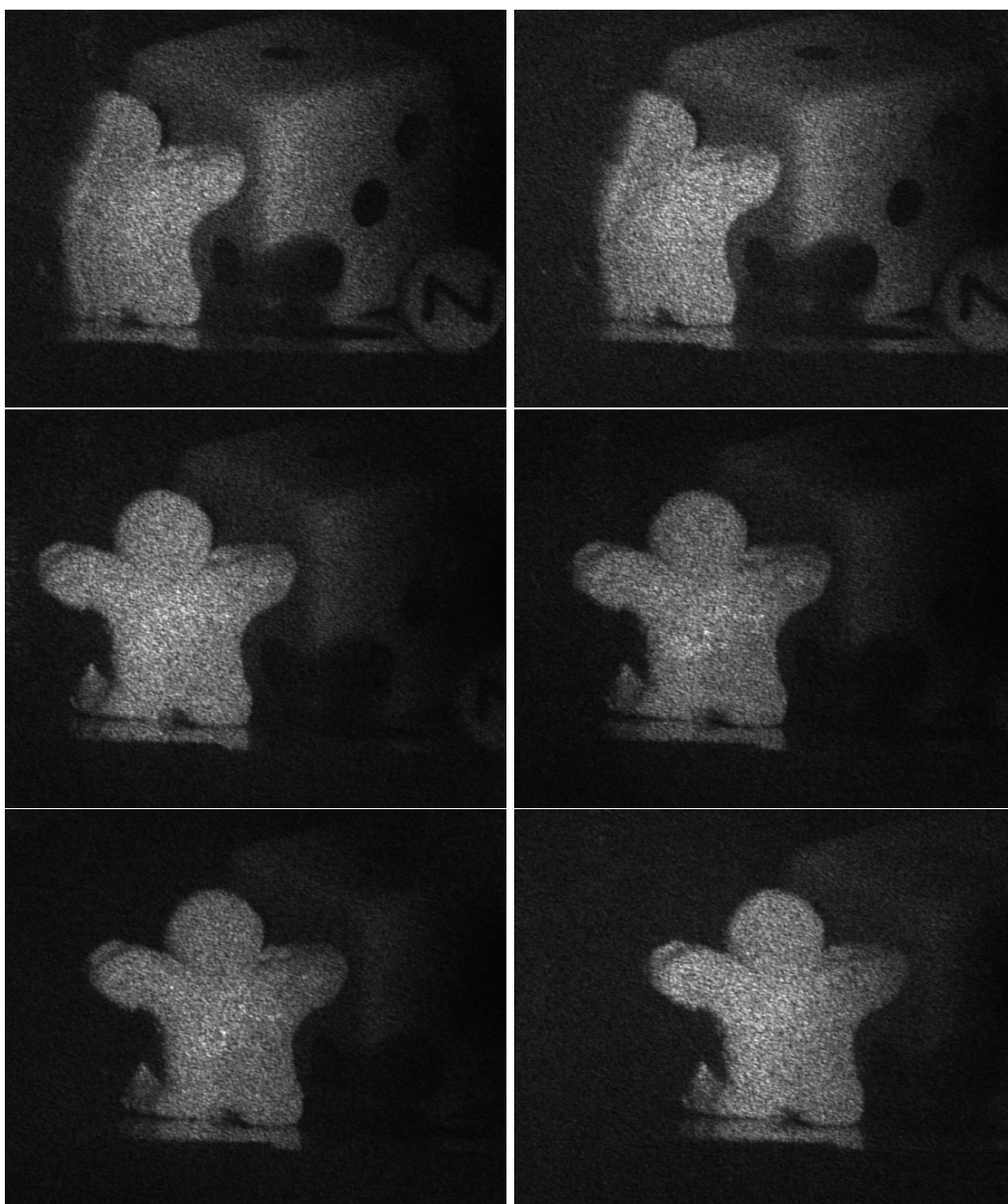


Figura 4.17: Desplazamiento horizontal de un conjunto de 3 objetos. Caso 1.

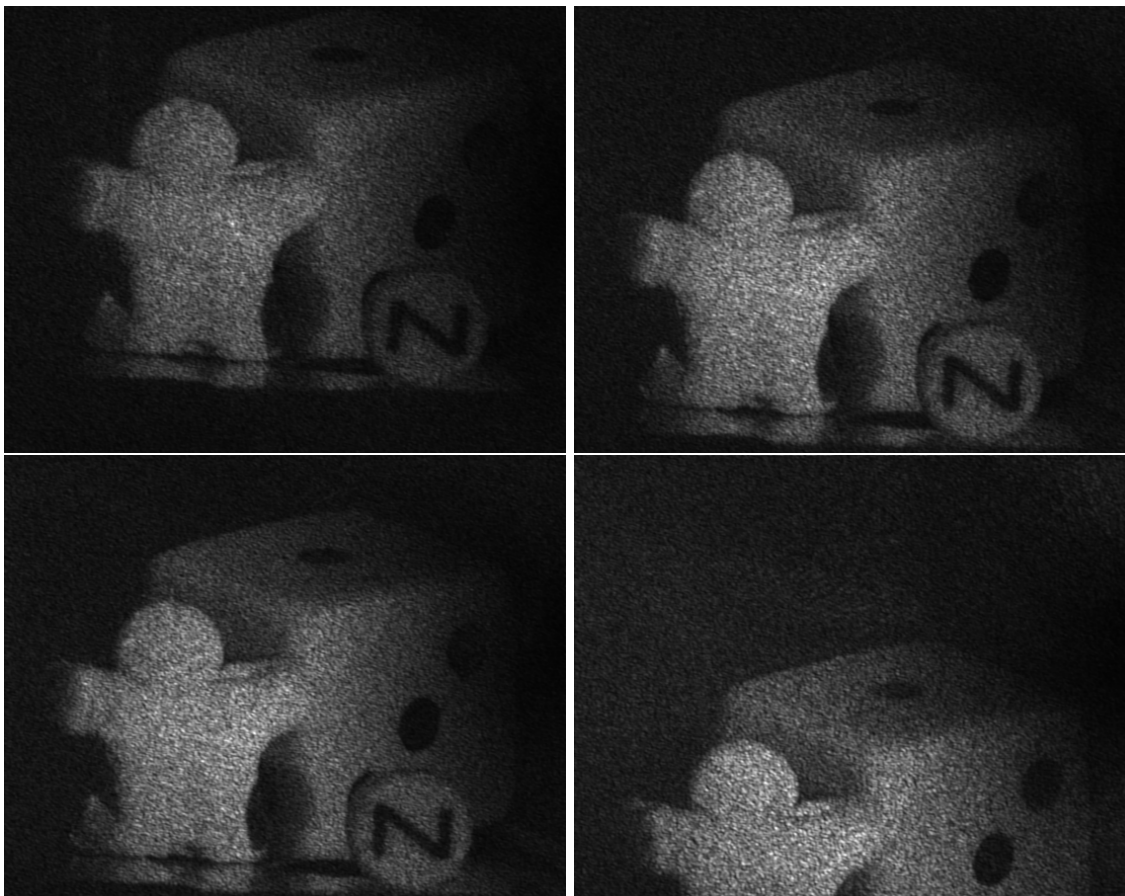


Figura 4.18: Desplazamiento vertical de un conjunto de 3 objetos. Caso 1.

4.2.2. Rotación de objetos

El objeto de estudios para el caso de rotación fue un dado de plástico de aproximadamente 1.5 cm de lado, de la fotografía 4.19.



Figura 4.19: Fotografía de objeto. caso rotación.

Para este experimento el dado se rotó y en cada rotación se reconstruyó un holograma el cual

posteriormente se reconstruyo. Las reconstrucciones de cada rotación se ilustran en la figura 4.2.2.

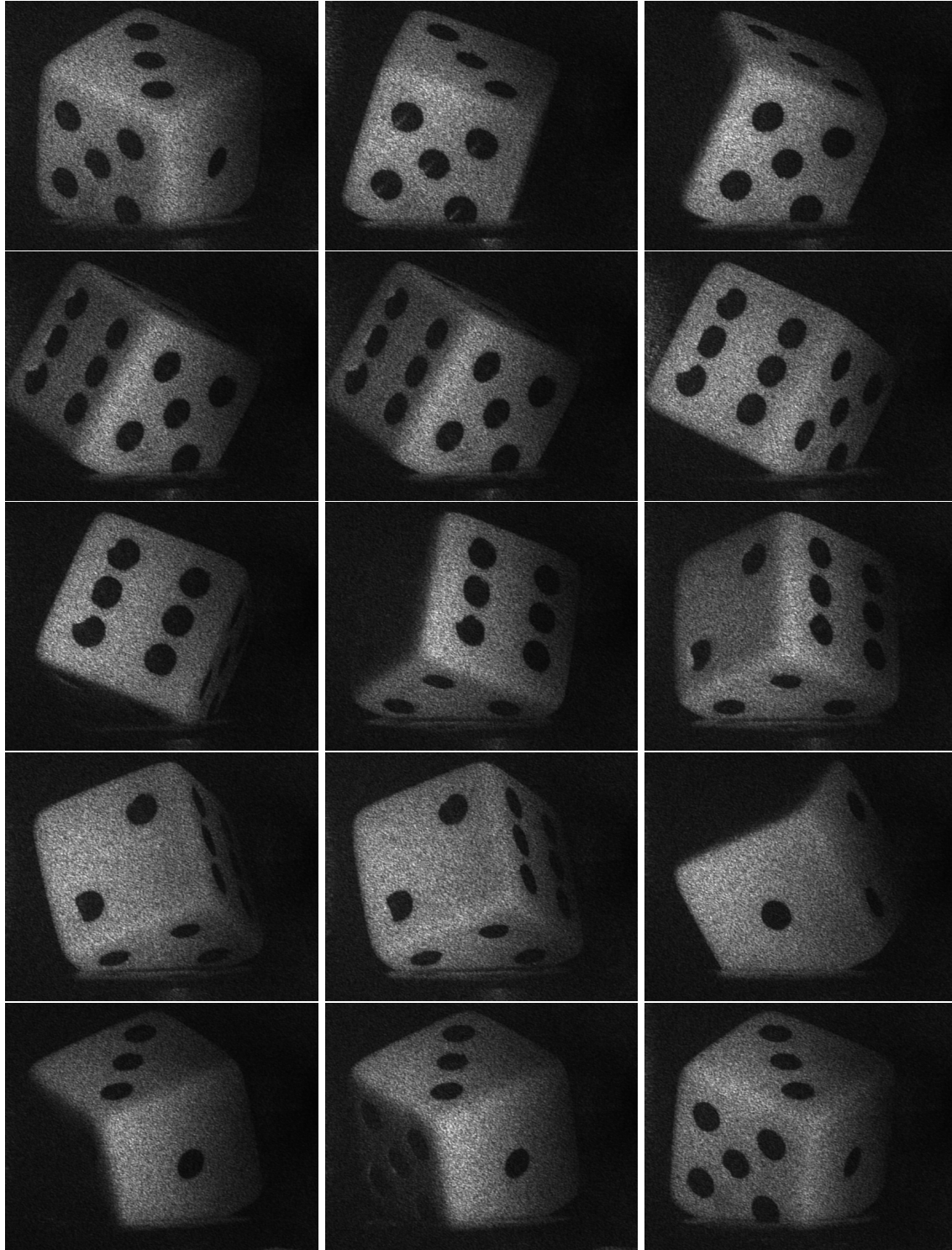


Figura 4.20: Dado rotando

En este segundo caso el conjunto de objetos que se muestra de la fotografía 4.13 se roto y en cada rotación se reconstruyo un holograma, similar al de la figura 4.14, el cual posteriormente se reconstruyo. Las reconstrucciones de cada rotación se ilustran en la figura 4.21.

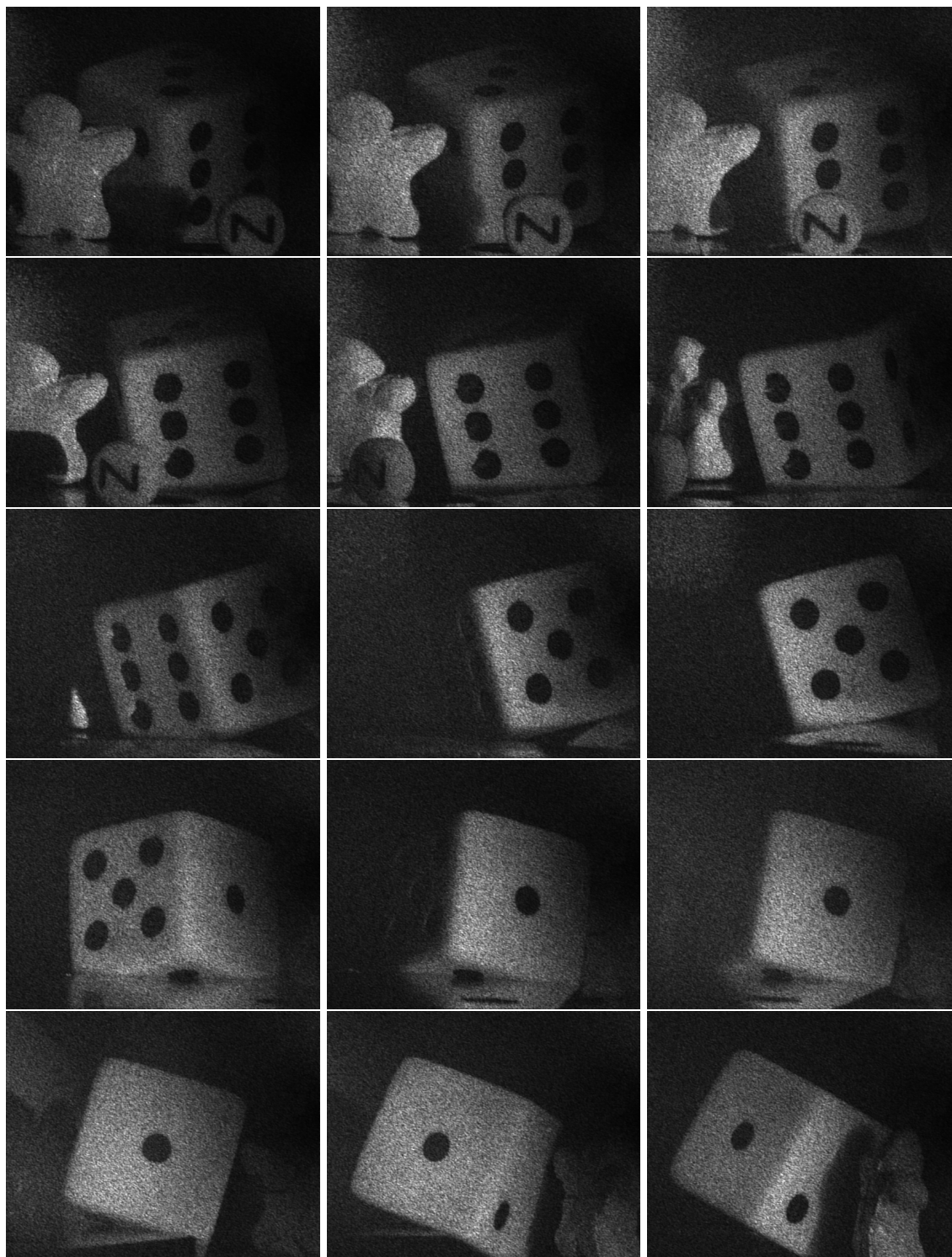


Figura 4.21: Objetos rotando

4.2.3. Desplazamiento de la cámara

Al desplazar la cámara en este caso se comprobó como al capturar distintas partes del patrón de interferencia, se pueden obtener distintas perspectivas del objeto-muestra. Y con ello obtener un campo de visión variable a través de un solo holograma.

Para este primer caso de estudio se utilizó el conjunto de objetos de la fotografía 4.9 y se capturaron diferentes secciones del holograma 4.10 (el cual no aparece completo en dicha foto).

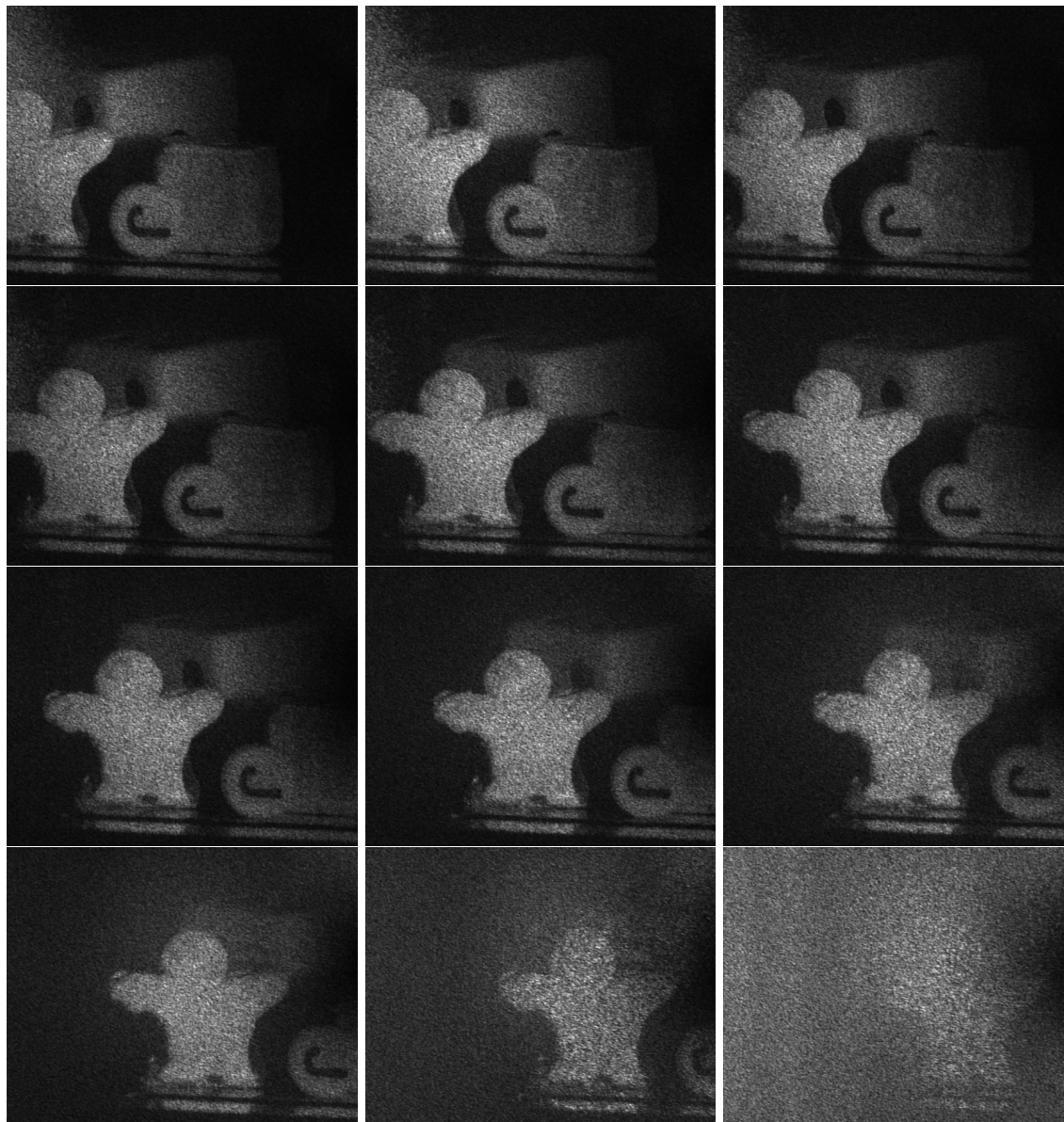


Figura 4.22: Desplazamiento horizontal de un conjunto de 4 objetos. En las imágenes de la última fila se observa cómo el objeto no solo se desplaza a la izquierda, sino que también disminuye la definición de sus bordes hasta que prácticamente desaparece (pues el holograma ocupa un espacio muy pequeño en el sensor *CCD*).

En el segundo caso se utilizó el conjunto de objetos de la fotografía 4.13 y se capturaron

diferentes secciones del holograma 4.14 (el cual no aparece completo en dicha foto).

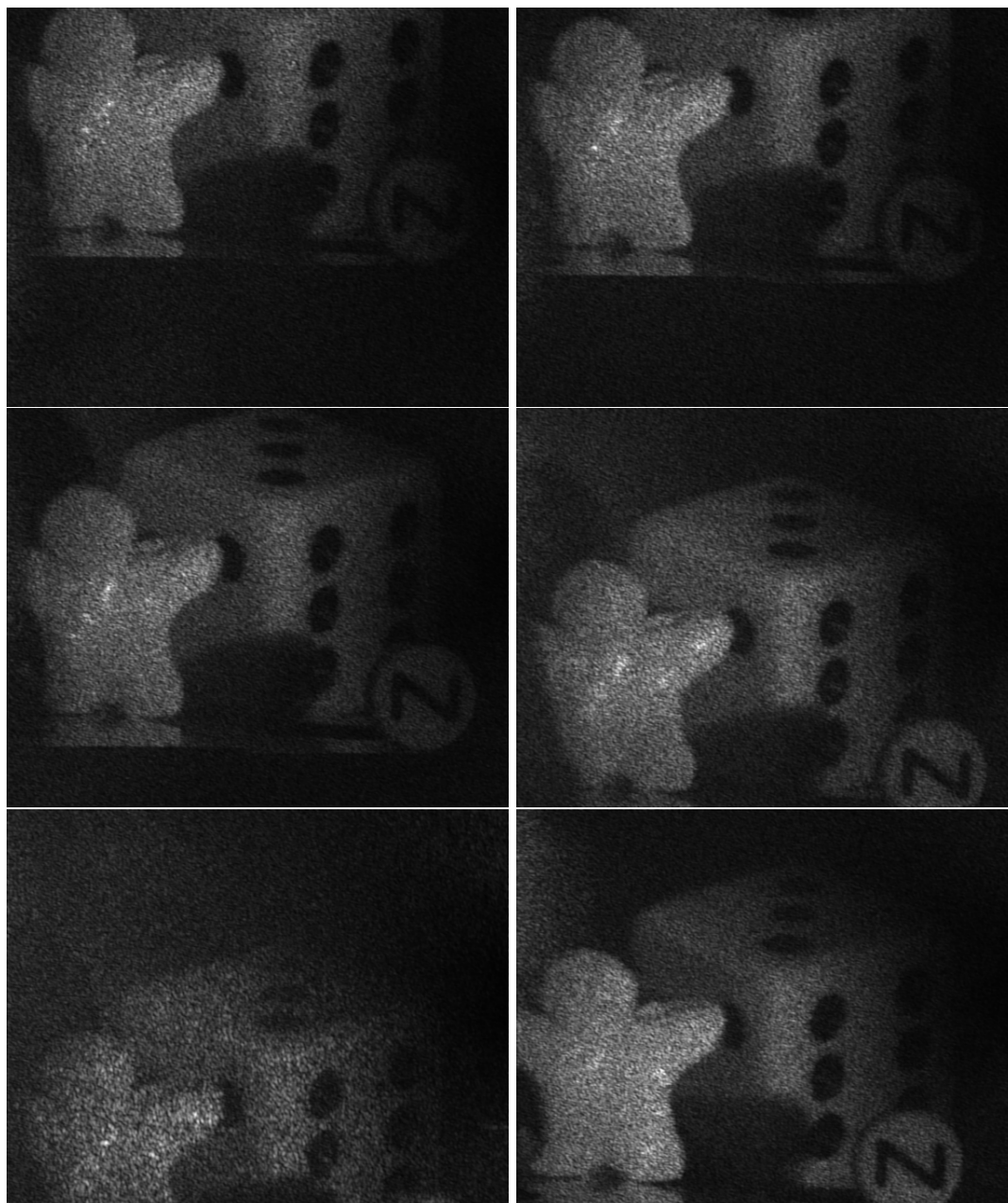


Figura 4.23: Desplazamiento vertical de un conjunto de 3 objetos. Caso 2.

En cada caso, se observa cómo al disminuir la cantidad del patrón que entra en el sensor los detalles de la reconstrucción disminuye. Sin importar la dirección en la que se desplazo la cámara este efecto aparece.

4.3. Enfoque de objetos

A diferencia de la fotografía convencional donde la distancia de enfoque de una fotografía es invariable después de su captura. En holografía es posible variar dicha distancia al modificar el valor de la distancia de propagación z en la reconstrucción numérica. Gracias a esta propiedad, es posible enfocar distintos objetos en distintas reconstrucciones del mismo holograma.

Utilizando los objetos de las fotografías 4.13 y 4.1, y los hologramas 4.14 y 4.2 respectivamente se explora esta propiedad. Pues al variar la distancia de propagación hay un diferente enfoque en cada reconstrucción, como se ilustra en las figuras 4.24 y 4.25.

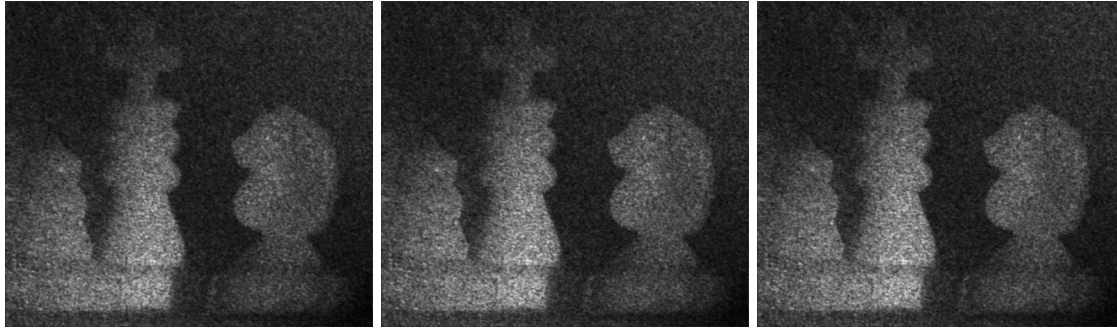


Figura 4.24: Ajedrez reconstruido con distintas distancias de propagación. Izquierda: $z = 0.48\text{ m}$, caballo enfocado. Centro: $z = 0.49\text{ m}$, peón enfocado. Derecha: $z = 0.5\text{ m}$, rey enfocado.

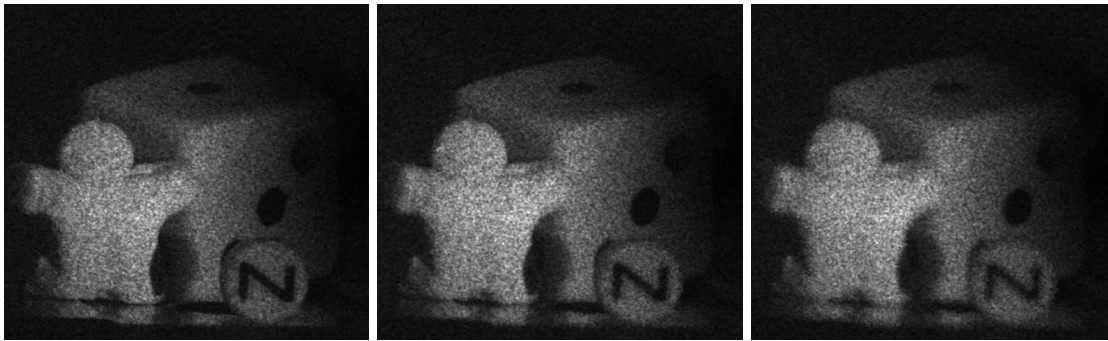


Figura 4.25: Ajedrez reconstruido con distintas distancias de propagación. Izquierda: $z = 0.58\text{ m}$, letra z enfocado. Centro: $z = 0.62\text{ m}$, muñequito enfocado. Derecha: $z = 0.67\text{ m}$, dado enfocado.

Cuando un objeto no se encuentra enfocado sus bordes se muestran difusos, en cambio cuando lo esta sus bordes se muestran solidos.

Capítulo 5

Conclusiones

Utilizando un arreglo para holografía fuera de eje se pueden grabar hologramas digitales de campo cercano de objetos con reflexión difusa. Dichos hologramas se pueden reconstruir exitosamente mediante la transformada discreta de Fresnel.

Es posible la reconstrucción de objetos con campo de visión variable mediante Holografía Digital, principalmente a través de 3 técnicas. La primera es con la captura de un solo holograma, mediante el segmentado de este mismo en sub regiones. La segunda es al formar un holograma (más grande en tamaño que el sensor) y capturarlo por secciones para su posterior reconstrucción. Y la tercera es variando las distancias de enfoque, propagación (z), con las que se reconstruye el holograma.

Modificando la distancia de propagación, los ángulos de iluminación y la posición del objeto, es posible encontrar la configuración más óptima para la reconstrucción de los hologramas. Los filtros de luz de fondo son de gran importancia en la reconstrucción, pues ayudan a disminuir la intensidad promedio de la imagen, a mejorar el contraste y a disminuir el ruido de Speckle respectivamente.

La Holografía Digital es una técnica que hereda muchas de las cualidades únicas de la holografía clásica, pero proporciona soluciones novedosas a algunos de los problemas clave que limitan sus aplicaciones y desarrollo. Al reemplazar los procedimientos fotoquímicos con imágenes electrónicas y tener acceso numérico directo al campo óptico complejo, se vuelven disponibles una amplia gama de nuevas capacidades de imagen, muchas de las cuales son difíciles o inviables en la holografía clásica.

La reconstrucción de objetos, por medio de DH, segmentando el holograma, cambiando la la distancia de propagación y capturando diferentes regiones de un holograma, permite variar la perspectiva de observación de los objetos de estudio. Esto es una limitación de la Holografía Digital. En DH, si no se aplicaran las técnicas anteriormente mencionadas, solo se reconstruiría una imagen plana y el observador no verá algo muy diferente de una fotografía convencional.

Apéndice A

Reconstrucción de objetos a color mediante Holografía Digital

RGB (sigla del inglés Red, Green, Blue; en español, Rojo, Verde, Azul, respectivamente) es un modelo de color basado en la síntesis aditiva, con el que es posible representar un color mediante la mezcla por adición de los tres colores de luz primarios.

A partir del modelo de color *RGB* se pueden grabar y reconstruir hologramas a color. Tomando como base el arreglo descrito en la sección 3.1, figura 3.1, se grabaron hologramas de diferentes objetos de colores varios. Para cada objeto se capturaron 3 hologramas a través del mismo arreglo pero cambiando el láser, holograma 1 con láser rojo, holograma 2 con láser verde y holograma 3 con láser azul. Uno por cada color del *RGB*. Además de los materiales mencionados en la sección 3.1 se utilizaron

- Un láser verde de estado sólido de $\lambda = 532 \text{ nm}$.
- Un láser azul de estado sólido de $\lambda = 448 \text{ nm}$.

El proceso de reconstrucción se realizó por medio del siguiente algoritmo (A.1).

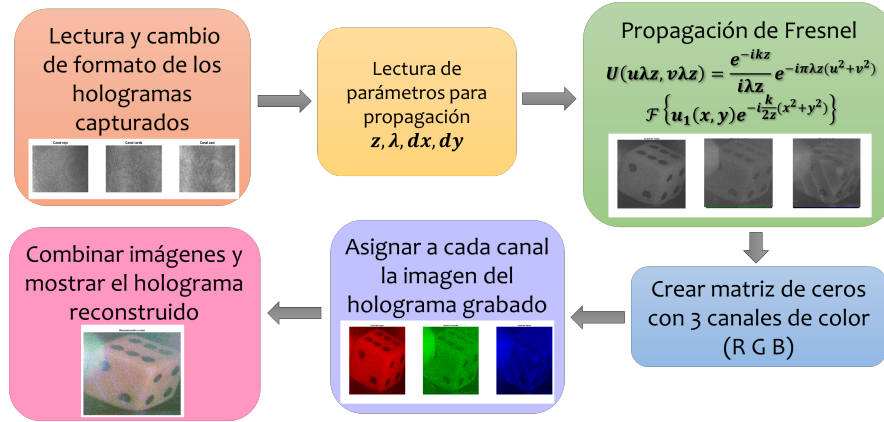


Figura A.1: Diagrama de flujo de la reconstrucción a color.

A.1. Resultados

Como resultados se presentan; una fotografía del objeto, los hologramas capturados para cada longitud de onda, los hologramas reconstruidos de cada longitud de onda asignados al color que les corresponde y la superposición de estos 3 hologramas en una figura (reconstrucción en color original).

El primer objeto es una flor de plástico.



Figura A.2: Flor de plástico.

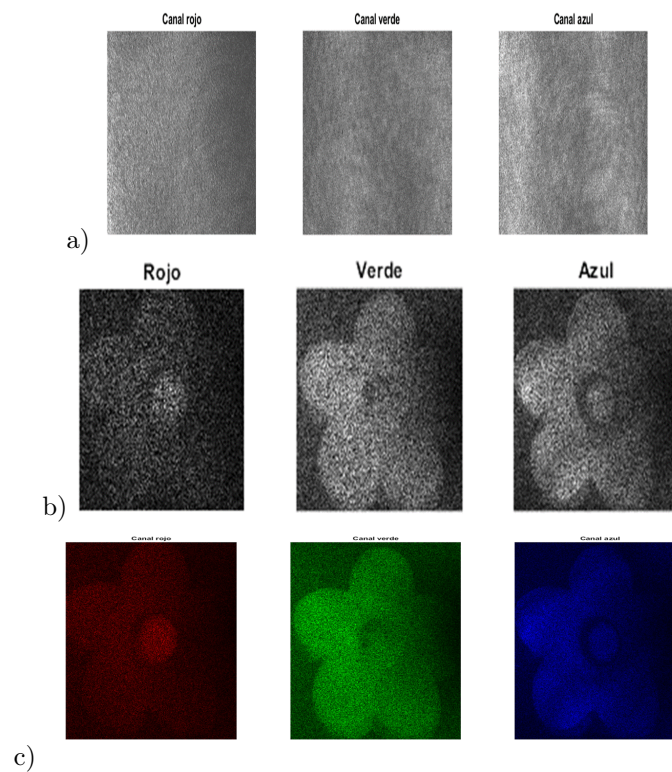


Figura A.3: a) Hologramas de la flor capturados con los 3 diferentes láseres. b) Reconstrucción de cada Holograma. c) Cada reconstrucción asignada a un canal de color.

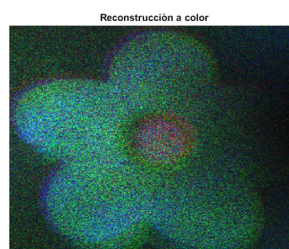


Figura A.4: Reconstrucción a color de la flor.

El segundo objeto es una figura de pony de plástico.



Figura A.5: Pony de plástico.

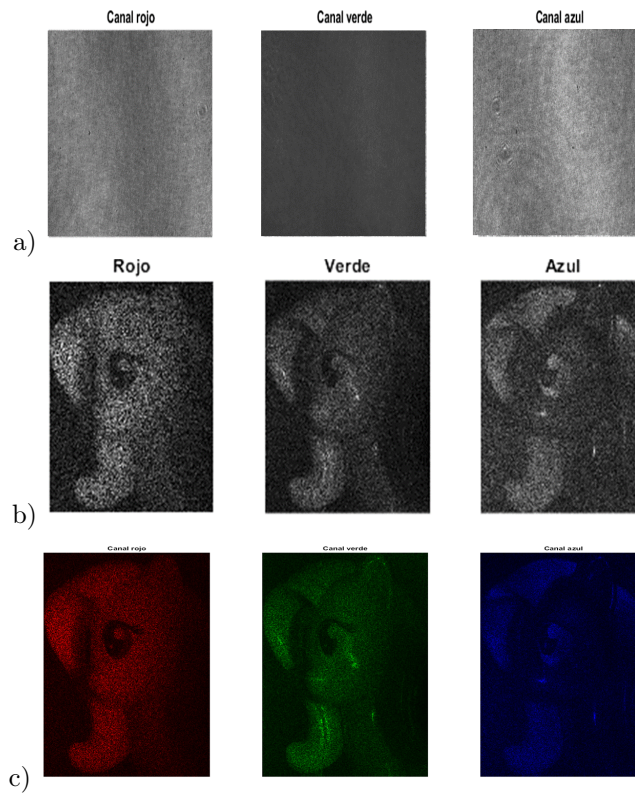


Figura A.6: a) Hologramas del pony capturados con los 3 diferentes láseres. b) Reconstrucción de cada Holograma. c) Cada reconstrucción asignada a un canal de color.

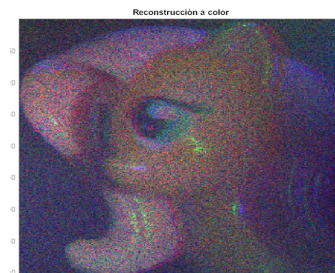


Figura A.7: Reconstrucción a color del Pony.



Figura A.8: Juguete de plástico.

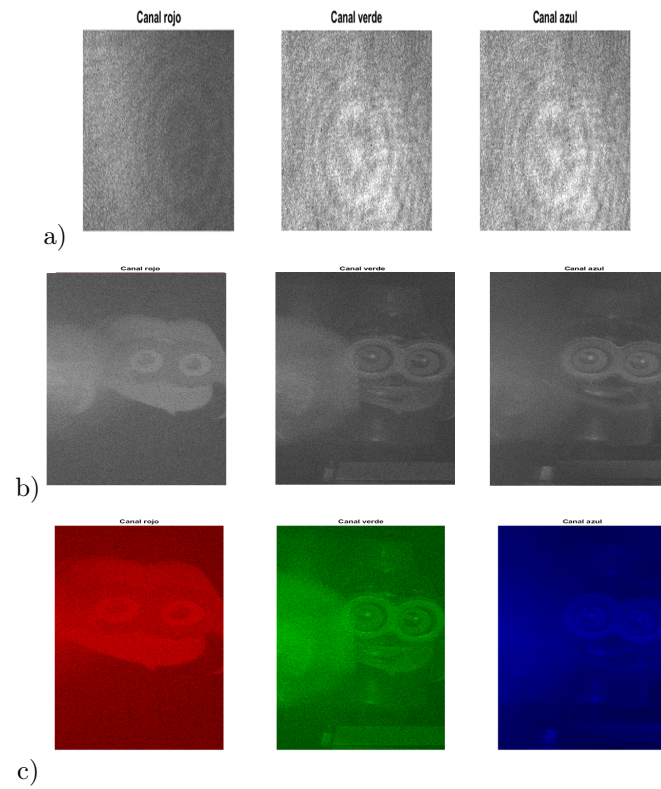


Figura A.9: a) Hologramas del juguete capturados con los 3 diferentes láseres. b) Reconstrucción de cada Holograma. c) Cada reconstrucción asignada a un canal de color.



Figura A.10: Reconstrucción a color del juguete.
El cuarto objeto es un dado de plástico.



Figura A.11: Dado de plástico.

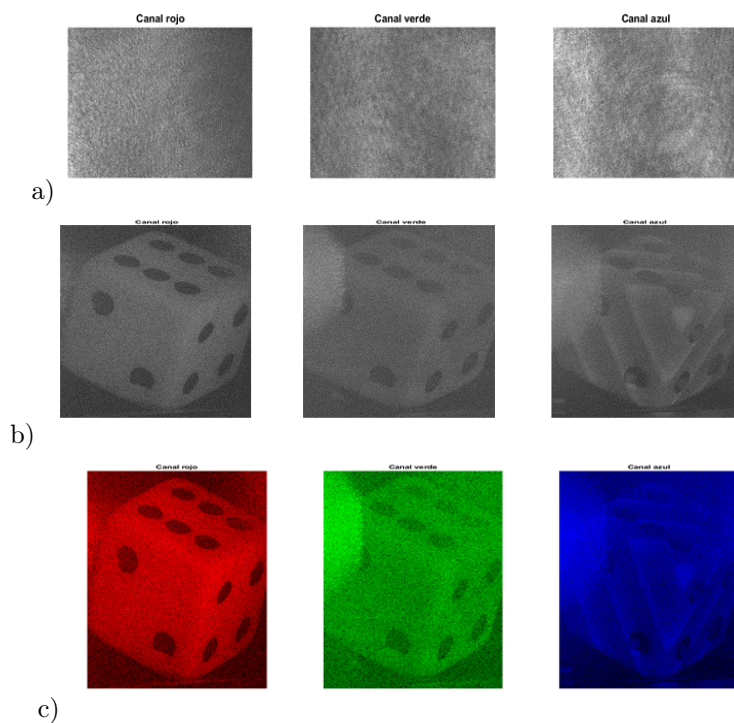


Figura A.12: a) Hologramas del dado, capturados con los 3 diferentes láseres. b) Reconstrucción de cada Holograma. c) Cada reconstrucción asignada a un canal de color.

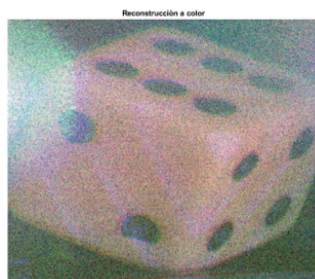


Figura A.13: Reconstrucción a color del dado.

Aunque estas reconstrucciones no difieren mucho de una foto real, pueden utilizarse en un futuro trabajo para realizar reconstrucciones con campo de visión variable, como las descritas en el presente trabajo. Además, son un medio ilustrativo para estudiar la reflexión de distintas longitudes de onda de un objeto a colores.

Bibliografía

- [1] Goodman, J. W. (2005). *Introduction to Fourier Optics*. Roberts and Company Publishers.
- [2] Hariharan, P. (1996). *Optical Holography: Principles, Techniques and Applications*. Cambridge University Press.
- [3] Hecht, E. (2017b). *Optics*. Pearson.
- [4] Khare, K., Butola, M., & Rajora, S. (2023). *Fourier Optics and computational imaging*. Springer Nature
- [5] Kim, M. K. (2011). *Digital Holographic Microscopy: Principles, Techniques, and Applications*. Springer Science & Business Media.
- [6] Malacara, D. (2015). *Óptica básica*. Fondo de Cultura Económica.
- [7] Guenther, B. D. (1990a). *Modern Optics*. Wiley.
- [8] Murukeshan, V. M., Fei, L. Y., Krishnakumar, V., Ong, L. S., & Asundi, A. (2003). *Development of Matlab filtering techniques in digital speckle pattern interferometry*. Optics And Lasers In Engineering, 39(4), 441-448.
- [9] Mustafi, S., & Latychevskaia, T. (2023). *Fourier Transform Holography: A Lensless Imaging Technique, Its Principles and Applications*. Photonics, 10(2), 153.
- [10] Schnars, U., & Jüptner, W. (2005). *Digital Holography: Digital Hologram Recording, Numerical Reconstruction, and Related Techniques*. Springer Science & Business Media.