BENEMÉRITA UNIVERSIDAD

AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

SIGNIFICADOS DEL NÚMERO REAL EN LA FORMACIÓN DOCENTE: APROXIMACIÓN A LA PROPIEDAD DE DENSIDAD A TRAVÉS DE LA REPRESENTACIÓN INTERVALAR

TESIS
PARA OBTENER EL TÍTULO DE
MAESTRA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

PRESENTA
LIC. MARIBEL FERNÁNDEZ MUÑOZ

DIRECTOR DE TESIS
DR. JOSÉ MARTÍN ESTRADA ANALCO

CO-DIRECTORA DE TESIS
DR. ESTELA DE LOURDES JUÁREZ RUIZ

PUEBLA, PUE. JUNIO, 2022

BUAP

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ACTA DE COLOQUIO DE TESIS

Siendo las 17:00 horas del día 02 de diciembre de 2021, cumpliendo con el citatorio girado por el Comité Académico de la Maestría en Educación Matemática para presentar el COLOQUIO de la tesis de MAESTRÍA de la C.

FERNÁNDEZ MUÑOZ MARIBEL

Con la tesis titulada:

"SIGNIFICADOS DEL NÚMERO REAL EN LA FORMACIÓN DOCENTE: APROXIMACIÓN A LA PROPIEDAD DE DENSIDAD A TRAVÉS DE LA REPRESENTACIÓN INTERVALAR"

Mismo que se llevó a cabo de forma virtual a través de la liga https://meet.google.com/mzp-xuxc-nib y que concluyó a las 17:45 horas, se llegó a los siguientes acuerdos:

1. Que se consideren las observaciones realizadas al manuscrito y las manifestadas en el coloquio para obtener el documento final.
2. Continuar con los trámites para la defensa de la tesis.

_____
Dr. Gabriel Kantún Montiel
PRESIDENTE

_____
Dr. Juan Carlos Macías Romero
SECRETARIO

_____
Dra. Estela de Lourdes Juárez Ruiz
VOCAL

_____
Dr. José Martín Estrada Analco
DIRECTOR DE TESIS

Facultad
de Ciencias
Físico Matemáticas

Av. San Claudio y 18 Sur, edif. FM1
Ciudad Universitaria, Col. San
Manuel, Puebla, Pue. C.P. 72570
01 (222) 229 55 00 Ext. 7550 y 7552

Este trabajo de investigación se realizó gracias al financiamiento del

Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT),

De enero de 2020 a diciembre 2021.

No. CVU: 1039364

Con amor para Doña Lili. Madre querida, eres mi guía y apoyo incondicional. Sin ti, este logro no habría sido posible.

Te quiero con todo mi corazón.

AGRADECIMIENTOS

Estimados lectores,

Me complace presentar esta tesis, que se funda como una de las cúspides de mi formación y el resultado de años de investigación y trabajo. Me gustaría expresar mi gratitud a todos aquellos que me han apoyado y guiado en este proceso.

En primer lugar, quiero expresar mi profunda gratitud a Dios por su presencia constante en mi vida y en la realización de este trabajo. A Él le debo todo lo que soy y todo lo que he logrado. Su amor, su guía y su protección han sido fundamentales en mi camino académico y en mi desarrollo personal.

También quiero agradecer a mi familia, en especial a mis padres Oscar Fernández Navia y Elba Alicia Muñoz por su paciencia y apoyo incondicional en cada paso del camino. Gracias por creer en mí y ser mi motivación constante.

Agradezco a mi amor Julio César por ser mi compañía constante, sus palabras de aliento y su paciencia infinita me han dado el impulso necesario en los momentos en los que me sentía agotada y desmotivada.

No puedo dejar de agradecer a mi director de tesis, al Dr. José Martín Estrada Analco, por su orientación, su experiencia y su paciencia en cada etapa de mi investigación. Sus comentarios y sugerencias han sido invaluables para el desarrollo de este trabajo.

También quiero agradecer a mi comité de tesis, la Dra. Estela de Lourdes Juárez Ruiz, Dr. Gabriel Kantún Montiel y a mis profesoras y profesores de la BUAP por su tiempo y su valiosa retroalimentación durante este bonito proceso. Sus preguntas y comentarios me ayudaron a mejorar mi investigación y a presentar un trabajo sólido. Espero que mi trabajo sea de utilidad para la comunidad académica y que inspire futuras investigaciones en el tema.

Por último, quisiera expresar mi agradecimiento a México ¡lindo y querido! por haberme brindado la oportunidad de conocer su gente maravillosa, su arte, su música, su gastronomía, su historia y su patrimonio cultural. La experiencia de vivir en este país ha sido verdaderamente inolvidable y ha dejado una huella imborrable en mi corazón.

Así mismo agradezco al pueblo mexicano por su hospitalidad y amabilidad durante mi estancia en el país. Me han hecho sentir bienvenida y en casa, y su cálido recibimiento ha sido fundamental para mi adaptación y bienestar.

¡Muchas gracias!

Índice

Resumen vi

INTRODUCCIÓN 8

CAPÍTULO 1. ASPECTOS GENERALES 10

1.1. Antecedentes 10

1.2. Planteamiento del problema 14

1.3. Objetivos 18

1.4. Justificación 19

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO 22

2.1. Referente Histórico-matemático: aspectos históricos y matemáticos en la construcción de los números reales y la evolución de la teoría Intervalar 22

2.1.1. Primera crisis en los fundamentos del desarrollo de las matemáticas 25

2.1.1.1. Entre medidas, llegando a los irracionales 26

2.1.1.2. Relativa, de los resultados sintetizados por Euclides 28

Platón y el Menón 427-347 a. C. 28

Euclides y la Irracionalidad 30

Calculando el área del círculo. El método de exhaución de Eudoxo. 31

La cuadratura del círculo y el método de exhaución en Arquímedes 287 a.C 31

2.1.2. Los números reales en la etapa abstracta (segunda crisis de los fundamentos) 33

2.1.3. Inicios y consolidación de la Teoría Intervalar. 35

2.2. Referente matemático: Construcciones del número real 37

2.2.1 Construcción matemática Dedekind 37

2.2.2 Preliminares 39

2.2.3. La construcción de los reales por Cantor (1845-1918). 41

2.2.4. Análisis intervalar 46

2.2.3.1. Análisis Intervalar Clásico. 47

2.2.3.2. El Sistema Numérico Intervalar 48

2.2.5. La construcción de Bachmann (1892). 50

2.3. Referente curricular 52

2.3.1. Pensamiento algebraico 53

2.3.2. Sentido numérico 54

2.4. Referente didáctico: Teoría de los significados sistémicos (TSS) 56

2.4.1. Significados históricos del número real 58
CAPÍTULO 3. MÉTODO 2
Enfoque metodológico: 2
Desarrollo metodológico: 2
CAPÍTULO 4. RESULTADOS Y ANÁLISIS 5
4.1. Entrevista clínica: análisis 5
4.2. Resultados y análisis de la implementación de la propuesta de aula 22
4.3. Conclusiones 37
REFERENCIAS 44
Anexos 47
Actividades de la propuesta de aula 47

Índice de tablas

Tabla 1. Síntesis de los significados históricos del número real 1
Tabla 2. Elementos del significado - Entrevista clínica- 19
Tabla 3. Significados en los campos de problema de la propuesta 25
Tabla 4. Procedimientos y algoritmos 30

Índice de figuras

Figura 1. Ubicación de números 8
Figura 2. Operaciones realizadas por el profesor en formación 9
Figura 3. Ejemplos de números - entrevista clínica 11
Figura 4. Tabla de conjuntos numéricos al que pertenece 12
Figura 5.Campos de problemas en la propuesta de aula. 25
Figura 6. Pasamanos - análisis 26
Figura 7. Recorrido a diezmilésimos 26
Figura 8. Proporcionalidad lineal 27
Figura 9. Reflexión con doscientos pasamanos 28
Figura 10. Reflexión sobre la etiqueta de una lata 28
Figura 11. Aproximaciones de operaciones 29
Figura 12. Reflexiones al comparar cantidades 30
Figura 13. Lenguaje numérico - respuestas del profesor en formación 32
Figura 14. Lenguaje verbal – respuestas del profesor en formación 32
Figura 15. Representación intervalar - respuestas del profesor en formación 33
Figura 16. Representación intervalar - respuestas del profesor en formación 33
Figura 17. Uso del teorema de Pitágoras 34
Figura 18. Longitud de la circunferencia 34
Figura 19. Reflexión - Método de exhaución 36
Figura 20. Múltiplos y submúltiplos de $\sqrt{2}$ 36

Resumen

La importancia del *número real* en los sistemas de enseñanza es un asunto no sólo didáctico, sino epistemológico y ontológico, por tal razón, esta investigación tiene como objetivo analizar los diferentes significados que los profesores en formación le atribuyen a este conjunto numérico y a su propiedad de densidad. Para su realización, se parte de la premisa de que el estudio de los significados, de un concepto matemático, desde el punto de vista de la educación, puede llegar a favorecer la evaluación de conocimientos.

De lo anterior, el marco teórico está establecido por cuatro referentes: en el primero (referente histórico) se realiza una aproximación histórica-epistemológica de la construcción del número real como objeto matemático, identificándose sus significados históricos; en el segundo (referente matemático), se revisan al construcciones matemáticas enmarcadas dentro de la teoría intervalar (Cantor y Bachmann); en el tercero (referente curricular) se revisan las orientaciones curriculares emanadas por el gobierno mexicano tanto para la formación docente como para la educación media y, por último, el referente didáctico donde se presentan los elementos de la Teoría de Significados Sistémicos TSS que sirve como dirección teórico-metodológica para el desarrollo del trabajo.

La investigación es un estudio de caso, de corte cualitativo, con la participación de un grupo de 5 profesores en formación. La recolección de los datos se obtiene a través de la implementación de una propuesta de aula que está orientada al uso de la representación intervalar, además de una entrevista clínica a uno de los estudiantes, la cual tiene como objetivo indagar sobre los significados personales que tenían antes de la implementación. El análisis se realiza teniendo en cuenta los elementos del significado expuestos por la TSS (campos de problemas, algoritmos y procedimientos, elementos lingüísticos, definiciones y propiedades y, conceptos relacionados) la cual da elementos para poder hacer el contraste entre los significados históricos y los significados personales.

En los resultados conseguidos durante esta investigación, se evidenció el significado heterogéneo que posee el número real (aritmético, geométrico, algebraico, formal e intervalar, estos dos últimos interconectados entre sí) de ahí que se concluye que su enseñanza no puede reducirse a uno de estos diferentes aspectos.

Palabras clave: número real, densidad, significados, representación, teoría intervalar.

Abstract

The importance of the real number in teaching systems is not only a didactic issue, but also an epistemological and ontological one, for this reason, this research aims to analyze the different meanings that teachers in training attribute to this numerical set and its property of density. For its realization, it is based on the premise that the study of the meanings, of a mathematical concept, from the point of view of education, can favor the evaluation of knowledge.

From the above, the theoretical framework is established by four references: in the first (historical reference) a historical-epistemological approach to the construction of the real number as a mathematical object is made, identifying its historical meanings; in the second (mathematical reference), the mathematical constructions framed within interval theory (Cantor and Bachmann) are reviewed; in the third (curricular reference) the curricular guidelines issued by the Mexican government are reviewed for both teacher training and secondary education and, finally, the didactic reference where the elements of the Theory of Systemic Meanings TSS are presented, which serves as theoretical-methodological direction for the development of the work.

This research is a case study, therefore, it is qualitative, made up of a group of 15 teachers in training. Data collection is obtained through the implementation of a classroom proposal that is oriented to the use of interval representation, in addition to a clinical interview with one of the students, which aims to investigate the personal meanings they had. before implementation. The analysis is carried out taking into account the elements of the meaning exposed by the TSS (fields of problems, algorithms and procedures, linguistic elements, definitions and properties and related concepts) which gives elements to be able to contrast between the historical meanings and the personal meanings.

In the results obtained during this investigation, the heterogeneous meaning that the real number has (arithmetic, geometric, algebraic, formal and interval, the latter two interconnected with each other) was evidenced, hence it is concluded that its teaching cannot be reduced to one of these different aspects.

Keywords: real number, density, meanings, representation, interval theory.

INTRODUCCIÓN

Las matemáticas son una ciencia fundamental que se aplica en diversos ámbitos de nuestra vida cotidiana, desde la resolución de problemas simples hasta la toma de decisiones complejas en el mundo científico. Dentro de esta ciencia se encuentra uno de los conceptos fundamentales, *el conjunto de los números reales,* el cual se utiliza en múltiples ramas de la disciplina, como el cálculo, la geometría, la estadística y la teoría de números. Sin embargo, a pesar de su relevancia, la comprensión de los significados del número real es una tarea compleja y desafiante que requiere de un conocimiento sólido y actualizado por parte de los profesores que son los que lo imparten.

Teniendo en cuenta que la objetivación del número real tardó más de veintidós siglos. Al investigar sobre su desarrollo histórico se observa que su consolidación trajo consigo diversos problemas y dificultades, en este sentido, para la educación matemática tiene una gran importancia pedagógica el estudio de su evolución y de su significación, en especial para el profesor en formación.

Por lo anterior, en esta tesis de maestría tiene como objetivo investigar los distintos significados del número real y su relevancia en la educación matemática; en un primer momento, se realiza una aproximación histórica-epistemológica para identificar y analizar los significados de este concepto presentes en su construcción como objeto matemático, para después analizar los significados, mediante una entrevista clínica, que los profesores en formación tenían del número real antes de la implementación y, finalmente con base en los resultados de la entrevista, se pone en marcha una propuesta de aula, elaborada por (García, 2017), encaminada a generar algunas alternativas ante el problema de representación del número real y por otra parte, el acercamiento a la propiedad de densidad, analizándose así los significados que le atribuyeron al número real después de esta implementación.

Este trabajo es un híbrido entre las líneas de historia y epistemología de las matemáticas y, didáctica de las matemáticas; donde se abordan algunos referentes teóricos desde el punto de vista histórico, matemático, didáctico y curricular, el desarrollo se da en cuatro momentos; en el primero – Capítulo 1 – se inicia con una revisión documental de las investigaciones que se han realizado relacionadas con este tópico, se exhibe la problemática, la justificación y los objetivos.

Después de las revisiones enmarcadas dentro del tema de investigación, se consolidó un marco teórico – Capítulo 2 – que está conformado por los siguientes referentes: (1) una aproximación histórica-epistemológica (desde el siglo V a. C hasta el siglo XIX), la cual sirve para caracterizar al número real como un objeto didáctico a partir de su ontología y epistemología, además, mediante la *Teoría de Significados Sistémicos* (TSS), se identifican y analizan sus significados, que con base en esto es que se determinan los significados inducidos por los programas curriculares, los presentes en la entrevista clínica y los encontrados en las manifestaciones de los normalistas al desarrollar la propuesta, (2) estudio de las construcciones matemáticas realizadas por Cantor y Bachmann ya que estas están enmarcadas dentro de la teoría intervalar, (3) estudio de la Teoría de los Significados Sistémicos (TSS) propuesta por Godino y Batanero (1998) y Godino (2002) que parte de la noción de situación-problema, diferenciando entre el *significado institucional* y el *personal*, contando con unos componentes o elementos de significado que, de acuerdo con Batanero (2005), son de utilidad en el análisis de respuestas a una tarea matemática, o bien de un proceso de enseñanza o de aprendizaje y finalmente (4) el análisis de las orientaciones curriculares vigentes para el programa de Licenciatura en Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas para las Escuelas Normales en México.

En el tercer momento – Capítulo 3 – se expone la metodología que se utilizó para el desarrollo de este trabajo, enfocado en el método cualitativo, centrado en la descripción y análisis de las experiencias de los normalistas, es un estudio de caso pues se cuenta con la participación de cinco estudiantes del tercer semestre de la Licenciatura. El desarrollo metodológico consta de las fases: *fase de Análisis epistémico-didáctico*; *fase de Análisis de los significados personales presentes en la entrevista clínica* – la cual a su vez se divide en tres etapas: de diseño, de instrucción y aplicación y, de análisis –; *fase de Experimentación* y; *fase de Discusión y Análisis.*

Por último, en el capítulo 4 se exhiben los análisis y conclusiones de la investigación, examinando cada uno de los elementos de la TSS presentes en el desarrollo de la propuesta de aula orientada a acercar, de manera intuitiva[1] a la propiedad de densidad, inscrita en la construcción de

[1] Según López (2007) "En una intuición generalmente se comprende la universalidad de un principio, de una relación, de una ley -de un invariante- a través de una realidad particular. Una intuición, entonces, no es una pura teoría. Es una teoría expresada en una representación particular usando un modelo: un paradigma, una analogía, un diagrama o una construcción". (p. 32).

los números reales como un conjunto de intervalos encajonados[2], en la cual se ven involucrados los *significados aritmético, geométrico e intervalar* del número real.

CAPÍTULO 1. ASPECTOS GENERALES

1.1.Antecedentes

García, Serrano y Díaz (1999) en su trabajo, "¿Qué hay detrás de las dificultades que presenta la comprensión del concepto de número real?", se investigan las razones que generan dificultades en la comprensión del concepto de número real desde diferentes enfoques: epistemológicos, curriculares y cognitivos. Se exploran perspectivas como el principio epistemológico presente en los estudios de Romero (1997) y Rigo (1995), así como las dimensiones curriculares y cognitivas del estudiante. El objetivo es analizar los factores que contribuyen a las dificultades en la comprensión de los números reales desde diversas perspectivas, abordando aspectos epistemológicos, curriculares y cognitivos.

En la investigación "Unidad Didáctica para la Construcción y significación del concepto de número real con los estudiantes del grado undécimo" Puerto (2011), introduce al estudiante el concepto de número real, el reconocimiento de sus propiedades para crear un sistema numérico apropiado para desarrollos matemáticos rigurosos. Mencionando que, a la hora de llevar el concepto de número real al aula de clase, algunos profesores no tienen en cuenta su complejidad, abordándolo como la unión de conjuntos ordenados (los números naturales, enteros, racionales e irracionales) lo cual dificulta al estudiante la comprensión de su significado, Puerto (2011):

> La apropiación usual del concepto de número real es escasa, entendida como la simple adjunción de un conjunto de números (a uno preexistente) cuyas propiedades, así como sus características, no son explícitas, por lo que no se identifica su necesidad, tanto en la representación de ciertas soluciones a ecuaciones polinómicas como en la cuantificación de

[2] La teoría intervalar posee un campo amplio de aplicaciones en diferentes ciencias, se establece como una alternativa ante el problema de la representación de los números reales, sin llegar a las aproximaciones de su cifras decimales o truncamiento, utilizando a los intervalos encajados de números racionales entendidos como como el conjunto de números reales comprendidos entre dos números racionales.

> la medida de ciertas magnitudes (longitudes, áreas, pesos) que llevan al concepto de continuidad numérica (p.3).

Metodológicamente se exponen aspectos disciplinares relacionados con la construcción de los números reales bajo la óptica axiomática, las cortaduras de Dedekind y las sucesiones fundamentales de Cantor, aunado a las propiedades que caracterizan a las expresiones en forma de fracción continua simple, finita o infinita para números reales; las actividades de desarrollo se respaldan de dichos contenidos desde un punto de vista teórico, consiguiendo el balance entre unos contenidos pedagógicos y didácticos. De esta forma concluye que, la posibilidad de diseñar una unidad didáctica dirigida a estudiantes de educación media que cubra las propiedades fundamentales del sistema de los números reales centrando su atención en el estudio del Cálculo, de una manera afable y sin los formalismos excesivos de libros especializados, para que el estudiante comprenda la naturaleza de los números reales.

Por otro lado, Martínez (2014) realiza una "Propuesta didáctica para abordar el concepto de número real con estudiantes de undécimo grado" con la intención de identificar las características que debe tener una unidad didáctica, para estudiantes entre 16 y 18 años puedan interpretar intuitivamente las propiedades de densidad y continuidad de los números reales. En su metodología realiza una síntesis del desarrollo histórico del concepto con los trabajos de Cantor y Dedekind, expone algunos elementos de la teoría de las fracciones continuas para enriquecer las actividades propuestas en la Unidad Didáctica e introducir otra forma de representación de los números racionales e irracionales. Sin olvidar los aspectos didácticos, y se discuten algunos aportes de la propuesta del Doctor Luis Rico y su equipo de investigación.

Por último, esta autora planteó que todo el análisis histórico-epistemológico que fundamentó la construcción de la unidad didáctica, permitió reconocer que las dificultades evidenciadas en los estudiantes a través de la experiencia y en la aplicación de la prueba no son exclusivamente ontogénicas, sino didácticas y epistemológicas, propias de la evolución del concepto y de su transposición al aula.

Calderón (2014) en su trabajo "Diferentes construcciones del número real" realizó una revisión histórica de la construcción del número real, y utilizó construcciones como la de Richard Dedekind. para plantear una propuesta didáctica que permitiera a estudiantes de grado once, diferenciar los

números Racionales de los números Irracionales. También hace un recorrido histórico y toma como campo disciplinar los referentes de las construcciones hechas por Richard Dedekind, las sucesiones de Cauchy según Georg Cantor, y las construcciones del número real a partir de intervalos encajados.

De allí que la revisión histórica que realizó para la construcción del número real permitió encontrar estrategias para la propuesta didáctica, que potenciaron en estudiantes de grado once de educación media tener argumentos matemáticos para diferenciar los números racionales de los números irracionales, y que estas construcciones de los números reales, pueden ser utilizadas como ayuda didáctica para la comprensión de conceptos como el de continuidad.

Con relación a la propiedad de densidad de los números reales, según Calderón (2014), algunos textos para grado once y para los primeros cursos de la universidad, presentan los números reales como la unión de los números racionales e irracionales, clasificándolos según sus cifras decimales y con la representación gráfica mediante la biyección de números reales y puntos sobre la recta numérica, en la que tratan de ubicar números racionales y muy pocos números irracionales. Lo anterior conduce a que los estudiantes presenten dificultades de tipo conceptual, puesto que, a través de estas representaciones, se impide que haya un análisis u observación de conceptos importantes como el de densidad.

García (2017) en su investigación "Los números reales como conjuntos de intervalos, ventajas y limitaciones de su consideración en la educación media", partiendo de la problemática asociada con la representación y aproximación a las propiedades de los números reales en la educación media, propone alternativas para que estas no estén alejadas o desarticuladas de las presentaciones formales propuestas en la Educación Superior, proponiendo así actividades encaminadas a la representación de los números reales mediante la teoría intervalar. Presentó un estudio histórico y una aproximación epistemológica en cuanto a la construcción y desarrollo de los números reales y la teoría intervalar e identificó algunas estrategias que pueden favorecer la construcción de los números reales como conjunto de intervalos encajados, realizó un análisis a priori de las actividades que propone para que el estudiante tenga un acercamiento de forma intuitiva a este concepto matemático.

El trabajo de García (2017) fue la línea base para la investigación de Escobar y Fernández (2019) debido a que de esta eligieron actividades que permitieron el desarrollo de la misma, en la que se exhibe la elección e implementación de una propuesta de aula; con el fin de acercar a estudiantes de grado 11 de la Institución Instituto Técnico de Santander de Quilichao Cauca Colombia, a la propiedad de densidad de los números reales mediante la representación intervalar. Esta elección se apoyó de una aproximación histórica y epistemológica relacionada con la construcción de los reales y sus propiedades, así como algunas de sus representaciones. Además de las orientaciones del Ministerio de Educación Nacional de Colombia, expuestos en los Lineamientos Curriculares, Estándares Básicos de Competencias, Derechos Básicos de Aprendizaje y la Matriz de Referencia; en los que se introducen el concepto de número real. Posteriormente, realizaron un análisis de los resultados obtenidos después de la implementación de la propuesta de aula; fundamentado en los planteamientos teórico-metodológicos de la TSS; finalmente determinaron algunas conclusiones y observaciones relacionadas a la enseñanza y aprendizaje de los números reales.

Con relación a la formación de profesores, Coriat y Scaglia (2000) en su investigación titulada "Representación de los números reales en la recta", tratan de justificar una conjetura sobre la complejidad comparativa de la representación de números reales en la recta geométrica frente a otro tipo de representaciones. El desarrollo lo dividen en tres partes, la primera parte aborda la naturaleza de la recta geométrica y recogen algunas interpretaciones diferentes de la recta geométrica. En la segunda parte analizan la fenomenología particular relacionada con la asignación de números reales a los puntos de la recta geométrica, para extraer algunas limitaciones de dicha asignación y, por último, en la tercera parte comparan varias representaciones de números reales con la representación en la recta geométrica, y presentan un conjunto de características distintivas para este último. Este artículo, orientado teóricamente, proviene de un trabajo de investigación más amplio dirigido a descubrir obstáculos epistemológicos relacionados con la representación de números reales en la recta geométrica.

En concordancia con las concepciones sobre números reales Mora y Torres (2004) en su tesis de Maestría "Concepciones de estudiantes de licenciatura en matemáticas sobre números reales", presentan las concepciones que tienen futuros profesores de matemáticas sobre el número real; para ello, hacen un seguimiento historiográfico del número real y una revisión de algunos textos donde

se presenta este concepto, con el fin de caracterizar las concepciones encontradas en los estudiantes a partir de sus respuestas a ciertas cuestiones relacionada con el tópico.

1.2.Planteamiento del problema

En la construcción de otros conceptos matemáticos el número real juega un papel muy importante. En muchos casos, la comprensión de las matemáticas se basa en la comprensión y manejo conceptual de este conjunto numérico. La relación de los números reales con la recta numérica facilita la comprensión de conceptos matemáticos como el límite, la continuidad y otros.

Sin una comprensión sólida de los números reales, el aprendizaje de otros conceptos matemáticos puede resultar difícil. Además, su uso se da en gran variedad de campos de la matemática desde la aritmética hasta el análisis matemático.

Aunado a lo anterior, se puede decir que son una herramienta para la resolución de problemas cotidianos, como en la medición de distancias, tiempos, velocidades, entre otros. Por lo tanto, una buena comprensión de los números reales es esencial para la vida diaria y para la educación científica en general.

Sin embargo, la enseñanza de los números reales a menudo se presenta de manera axiomática, centrándose en su estructura algebraica. Esto puede dificultar la comprensión de su naturaleza y propiedades, que son fundamentales para su comprensión, así como para la comprensión de otros conceptos matemáticos. En este sentido, es necesario abordar en la enseñanza las propiedades de los números reales, como su densidad[3], para facilitar su comprensión.

Según lo expuesto por Calderón (2014), en textos destinados a estudiantes de grado once y a los primeros cursos universitarios, los números reales se presentan como una unión de los números racionales e irracionales. Se clasifican en función de sus cifras decimales y se representan gráficamente mediante una biyección entre los números reales y los puntos de la recta numérica. Sin embargo, esta representación gráfica tiende a enfocarse principalmente en los números racionales, dejando de lado a los números irracionales. Esta forma de presentación puede generar

[3] Entre dos números reales por muy cercanos que se encuentren, siempre existe un número real

dificultades conceptuales en los estudiantes, ya que limita su capacidad de análisis y observación de conceptos como el de densidad.

Otra dificultad que presentan los estudiantes en el acercamiento a la propiedad de la densidad es que conciben el conjunto numérico de los reales desde los conocimientos construidos a partir de los números naturales. En palabras de Broitman, et al. (2003): "Dados dos números decimales, por ejemplo 4,2 y 4,3; los niños suelen afirmar que no es posible hallar otros números entre ellos. Esto es así porque –como ya mencionamos- conciben a este nuevo conjunto numérico desde los conocimientos construidos a partir de los números naturales" (p. 6).

Algunos profesores no tienen en cuenta su complejidad exponiéndolos como la unión de conjuntos ordenados (los números naturales, enteros, racionales e irracionales) lo cual hace que los estudiantes no conciban bien su significado y, que los docentes no noten las dificultades para el entendimiento del estudiantado relacionadas con la naturaleza del concepto. Puerto (2011):

> La apropiación usual del concepto de número real es escasa, entendida como la simple adjunción de un conjunto de números (a uno preexistente) cuyas propiedades, así como sus características, no son explícitas, por lo que no se identifica su necesidad, tanto en la representación de ciertas soluciones a ecuaciones polinómicas como en la cuantificación de la medida de ciertas magnitudes (longitudes, áreas, pesos) que llevan al concepto de continuidad numérica (p.3).

Durante un extenso periodo histórico, la consolidación de los números reales como entidad matemática fue un proceso complejo que se extendió por aproximadamente 22 siglos (García, 2017). La definición de los números reales, su estructura algebraica, sus relaciones de orden y su representación en el ámbito educativo presentan dificultades significativas en términos de comprensión. Por consiguiente, la enseñanza de los números reales se erige como uno de los desafíos más importantes para los profesores de matemáticas y para la educación matemática en general

Es crucial que los profesores en formación desarrollen conocimientos sólidos y consolidados que mejoren su desempeño profesional. Sin embargo, algunas investigaciones revelan que los profesores de matemáticas presentan limitaciones en cuanto a la comprensión del concepto de número real. Mora y Torres (2004) llevaron a cabo un estudio con el objetivo de determinar y

caracterizar las concepciones de 19 profesores en formación de matemáticas sobre los números reales, basándose en *sus representaciones, su desarrollo histórico y su presentación en libros de texto*. Los resultados mostraron que el 58% de los estudiantes ofrecieron una definición formal o equivalente, pero incompleta en ambos casos (4 estudiantes para la primera y 7 para la segunda). Los demás estudiantes presentaron definiciones no relacionadas con lo formal y tuvieron dificultades para expresar realmente qué es un número real, recurriendo en su mayoría a la inclusión de los conjuntos numéricos de los naturales, enteros, racionales e irracionales. En cuanto a la propiedad de la densidad, solamente dos estudiantes la reconocieron y la enunciaron explícitamente en relación con los números racionales y reales.

En este mismo orden de ideas, Hernández y Valdivé (2016) aseguran que las limitaciones conceptuales sobre el número real que se evidencian en la historia se observan en estudiantes de licenciatura de matemáticas y en los profesores de matemáticas.

Con el avance tecnológico, las calculadoras se han convertido en herramientas comunes para realizar cálculos en la vida cotidiana. Sin embargo, estas calculadoras solo manejan números digitales, como señala DI[4], SIGLA, (1999) (citado en García (2017)). El problema radica en que los números digitales no representan todos los números reales y no cumplen con todas sus propiedades.

Por otro lado, los números irracionales no pueden ser representados de manera precisa en una calculadora, ya que estas herramientas tecnológicas están diseñadas para trabajar con números racionales. Dado que no hay una correspondencia biunívoca entre los números digitales y el conjunto de los números reales, es necesario realizar aproximaciones y truncamientos de las cifras decimales infinitas. Sin embargo, estos procesos conllevan errores frecuentes, especialmente al operar con dos números reales que contienen expresiones decimales infinitas (suma, resta, multiplicación o división). Además, al realizar aproximaciones, el resultado se aleja del valor real, y este efecto se intensifica aún más en las operaciones de potenciación (García, 2017) el problema es que los números digitales no representan a todos los números reales y menos cumplen sus propiedades.

[4] Los números digitales DI, son aquellos que se pueden representar en los ordenadores según el grupo SIGLA (1999)

En el caso específico del número φ, es común no ser plenamente consciente de su verdadero significado. A menudo se tiende a afirmar que φ es igual a 1.61, lo cual es un error desde el principio, y este error puede aumentar al realizar operaciones con este número. Por ejemplo, al sumar dos veces el valor aproximado 1.61 + 1.61, se obtiene 3.22; una aproximación que difiere del valor real. Lo mismo ocurre en la multiplicación, donde (1.61) (1.61) da como resultado 2.5921, o al elevar a alguna potencia $(1.61)^n$ donde $n \epsilon N$. En todos estos casos, los resultados obtenidos son números racionales que se alejan considerablemente del valor real.

No obstante, una teoría computacional que ha sido desarrollada desde los años 1950-1960, conocida como *análisis intervalar*, ha intentado abordar esta problemática. Aunque no es posible establecer una correspondencia directa entre el conjunto de números reales (R) y los números digitales (DI) en un ordenador, el análisis intervalar propone representar los números reales mediante intervalos. Tomando como ejemplo nuevamente φ, el cual no puede ser representado de forma exacta en una calculadora o computadora sin truncar su valor, una posible representación mediante intervalos sería $\varphi \epsilon [1.61, 1.62]$. Esta representación no realiza truncamientos, aproximaciones ni excluye al número real en cuestión.

De esta manera, las dificultades mencionadas anteriormente han llevado a realizar una investigación con la siguiente pregunta problemática: ¿Cuáles son los significados que los profesores en formación atribuyen al concepto de número real y a su propiedad de densidad a través de la representación intervalar?

1.3.Objetivos

Objetivo general de la investigación

Analizar los significados que el docente en formación le atribuye al concepto de número real y su propiedad de densidad ante situaciones que implican la representación intervalar

Objetivos específicos

- Caracterizar al número real como objeto didáctico a partir de su ontología y epistemología.
- Valorar los significados del número real y la propiedad de densidad en el currículo con respecto a la formación docente.
- Contrastar los significados del número real a través de la historia y los significados que le atribuyen los profesores en formación al número a través de la implementación de la propuesta de aula.

1.4.Justificación

Autores como Balacheff (1990), Brousseau (1980), Sierpinska (1990), entre otros, consideran la idea de significado como elemento esencial en la investigación en Didáctica – relacionándola con la comprensión – en este sentido, al indagar sobre el significado de un concepto matemático, conduce a la búsqueda sobre la naturaleza del mismo, su génesis, su desarrollo, al análisis de su epistemología ya sea de manera personal o social.

Desde esta perspectiva, una opción viable para abordar las problemáticas mencionadas anteriormente es el enfoque histórico. La historia de las matemáticas ofrece una valiosa herramienta tanto para los profesores como para los estudiantes, ya que les permite comprender y dar sentido al pasado y a los eventos que dieron forma a las matemáticas tal como las conocemos en la actualidad. A través del estudio crítico de la historia, es posible construir conocimiento matemático de manera más significativa

La revista SUMA plantea que la Historia de las Matemáticas desempeña un papel fundamental en la Didáctica de la Matemática, una idea respaldada por destacados pedagogos e historiadores del siglo XX, como Poincaré, Klein, Toeplitz, Köthe, Bell, Courant, Puig Ad, Lakatos, Kline y Santaló, entre otros. La función didáctica de la historia de las matemáticas se presenta como un recurso valioso que facilita la comprensión de los conocimientos matemáticos, además de servir como una fuente de inspiración tanto para profesores como para estudiantes. La herencia histórica enriquece e integra la enseñanza al vincularla con los saberes culturales.

Por su parte Anacona (2003) menciona que:

> Aquí se parte de la premisa de que las matemáticas son, ante todo, una actividad humana; una construcción social compleja edificada durante miles de años en arduos procesos de interrelación cultural. Esto significa que las matemáticas se encuentran ineludiblemente ligadas a la historia, una historia que da cuenta de su desarrollo conceptual, sobre la base de que tal desarrollo tiene lugar en medio de complejas dinámicas sociales. (p. 32)

En resumen, la historia de las matemáticas brinda una perspectiva enriquecedora que nos permite comprender de manera más profunda los conceptos matemáticos al considerar las necesidades históricas y culturales que impulsaron su desarrollo, así como su valor utilitario.

Es relevante realizar una revisión histórica de las construcciones realizadas en relación a los números reales, como las de Cantor, que permiten aproximarse a estos números a través de la noción de límite de sucesiones de Cauchy, y la construcción de Bachman, que desempeña un papel central en el trabajo que se va a desarrollar, ya que permite verificar y demostrar matemáticamente la construcción de los números reales a partir de intervalos encajados de números racionales.

En relación a las dificultades que surgen al representar los números reales, existe una opción valiosa para su enseñanza, aproximación y operaciones: la teoría intervalar. Por lo general, al enseñar a operar con números reales, se tiende a truncar los valores, lo que implica ignorar las décimas que son importantes para obtener resultados precisos en las operaciones. La teoría intervalar puede ofrecer una solución a este problema al permitir trabajar con intervalos, lo que proporciona una mayor precisión y exactitud en los cálculos.

En cuanto a las representaciones, (Skemp, 1980; citado en Rico, 2000) señala que una forma de suplir la ausencia de un objeto es a través de sus representaciones, creando así una dualidad entre el representante y lo representado.

El uso de la representación de los números reales mediante intervalos puede brindar a los profesores en formación una mejor comprensión de la propiedad de densidad y su orden. Los intervalos facilitan la comprensión y el uso de la recta numérica, contribuyendo al desarrollo de conceptos y procedimientos fundamentales en álgebra y análisis matemático (Arce, et al., 2019)

Por lo tanto, es necesario indagar en un primer momento acerca de los significados personales que el profesor en formación le atribuye al concepto de número real y su propiedad de densidad a través de una entrevista clínica, para después implementar una propuesta de aula elaborada por García (2017) la cual ha sido rediseña, teniendo como propósito el acercamiento de los números reales a través de la representación intervalar. Al obtener los resultados de la implementación de la propuesta se analizarán los significados que le atribuyen los profesores en formación al concepto de número real y la propiedad de la densidad a través de la representación intervalar. Se considera este trabajo pertinente, ya que en el ámbito de la enseñanza de los números reales no hay gran variedad de investigaciones que estén dirigidas hacia la conceptualización del número real por parte de profesores en formación, en cuanto a la teoría intervalar, además, indagar sobre los significados, se piensa, son componentes esenciales para el punto de partida de una enseñanza que propicie un buen aprendizaje, por último se quiere hacer una confrontación entre los significados establecidos

a través de la aproximación histórica y los significados de los profesores en formación después de desarrollar la propuesta.

El desarrollo de este trabajo estará inscrito dentro de las líneas de: historia y didáctica de las matemáticas, en éste se espera proponer algunas alternativas de solución al problema de representación y aproximación a la propiedad de densidad de los números reales, para profesores en formación. Para ello se abordan algunos referentes teóricos desde el punto de vista histórico y matemático, que puedan llegar a posibilitar la toma de decisiones importantes para el rediseño de algunas actividades que conforman las tareas de una propuesta de aula, que permitirán analizar los significados que los profesores en formación le atribuyen al número real con tareas que implican la representación intervalar.

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO

El marco teórico se sustenta en diferentes elementos de referencia. En primer lugar, se aborda el contexto histórico-matemático, donde se realiza un análisis de la evolución de la teoría Intervalar y se examinan las construcciones de los números reales desarrolladas por Cantor y Bachmann, así como su relación con el análisis intervalar. A continuación, se explora el enfoque didáctico basado en la Teoría de los Significados Sistémicos (TSS), que se utilizará como herramienta de análisis. Por último, se examina el marco curricular, donde se revisan las directrices establecidas por el Gobierno de México para la formación de profesores de matemáticas.

2.1. Referente Histórico-matemático: aspectos históricos y matemáticos en la construcción de los números reales y la evolución de la teoría Intervalar

El aspecto histórico en el que se ha desarrollado el concepto de número real tiene una estrecha relación con los contenidos establecidos en las orientaciones curriculares para la formación de profesores concernientes a este concepto; en primer lugar, porque se reconoce que los números reales son consecuencia de una evolución histórica-epistemológica, hecho que nace de las recientes ideas de la filosofía de las matemáticas, en las que se expone que el cambio de las concepciones de las matemáticas conduce a que se deba considerar al conocimiento matemático como la conclusión de las prácticas de los individuos al interactuar con contextos, culturas y momentos históricos en particular. En segundo lugar, por la correspondencia que existe entre los escenarios sociales y culturales con los conceptos matemáticos, esto porque la historia de las matemáticas facilita una visión dinamizadora de sus desarrollos relacionándolos con las circunstancias sociales y culturales.

Lo anterior, sirve como punto de partida para reflexionar acerca de los diferentes significados que se le pueden atribuir a un concepto matemático y así, poder orientar su construcción en el salón de clases de una forma significativa. En este orden de ideas, se considera que para lograr un acercamiento a los diferentes significados de número real ($\mathbb{R}$), es necesario considerar las dos crisis de los fundamentos de las matemáticas que abarcan desde el siglo V a. C (magnitudes inconmensurables) hasta el siglo XX (fundamentación del análisis). Para esto, se seleccionan como referente teórico las investigaciones realizadas por algunos autores (Anacona, 2013; Guacaneme, 2012; Ferreirós, 2007; Recalde, 2011; García, 2017; Puerto, 2011; y Ruíz, 2003) que

describieron cómo, a través de la historia, se hicieron grandes contribuciones a la consolidación de este y a la aproximación de algunas de sus propiedades fundamentales como la densidad.

Se reconoce que la construcción y aceptación del número real como un concepto matemático fue un proceso que abarcó alrededor de 2500 años, desde el siglo VI a.C. hasta el siglo XX d.C. Durante este extenso periodo, surgieron problemas que marcaron distintas épocas. Según lo planteado por Recalde (2011), la formación histórica de los números reales como objeto matemático se originó a partir de actividades como el contar, medir y ordenar. No obstante, hubo dos acontecimientos de gran importancia que resultaron determinantes en la historia de las matemáticas y que se conocen como las crisis de sus fundamentos. La primera crisis se produjo en la época de los pitagóricos en el siglo V a.C. y estuvo relacionada con las magnitudes conmensurables e inconmensurables. La segunda crisis se dio en el siglo XIX con la fundamentación del análisis, donde se llevaron a cabo construcciones del número real por parte de matemáticos como Cantor y Dedekind.

Tanto en el ámbito histórico matemático como en el escolar, se considera que una de las etapas primitivas que no puede ser evitada en el desarrollo del pensamiento matemático intuitivo es la idea de la conmensurabilidad, es decir la idea de que dos segmentos tienen una parte alícuota común, ya que al presentarse la necesidad de una medida se recurre a la aproximación de longitudes. El surgimiento de las magnitudes inconmensurables selló un vuelco total en el desarrollo histórico de la Geometría Griega; acabando con la ilusión pitagórica de pensar al número como entidad del universo, destruyendo la viabilidad de medir con exactitud en la Geometría y asignándole a esta misma una orientación deductiva.

De acuerdo con Crespo (2009) en la época de los pitagóricos se anticipan los números irracionales con magnitudes inconmensurables, este hecho en la historia se conoce como la primera crisis de sus fundamentos, debido a que aparece una contradicción en la teoría perfecta y armónica que tenían los pitagóricos sobre lo que sería para entonces el concepto de número.

Los hechos precisos que llevaron al momento inicial del reconocimiento de la presencia de las magnitudes inconmensurables son inciertos; las investigaciones de las pocas fuentes históricas de la Matemática griega ocasionaron leyendas como las de Proclo, *filósofo neoplatónico*, y de algunos historiadores del siglo pasado como Boyer, Zeuthen, Waerden han creado diferentes teorías que

han sido polémicas. En uno de los pasajes de Proclo (Libro X de Los elementos de Euclides) se narra la escalofriante consecuencia del descubrimiento de las magnitudes inconmensurables, lo cual era considerado un pecado contra la divina geometría. Por su parte, Collette (1993; citado en García, 2017), menciona que un integrante de la doctrina pitagórica conocido como Hippasus de Metapontun (matemático presocrático, teórico de la música y filósofo), nacido en Grecia al sur de Italia en los años 500 a.C., halló la existencia de la inconmensurabilidad, la cual lo condujo el exilio de la escuela pitagórica, con este hallazgo se descartó la idea de medir con precisión, lo que creó un cambio en el desarrollo de la geometría griega y de toda la matemática.

En la segunda crisis, el análisis de los fundamentos de las matemáticas ha sido desde hace un siglo competencia de la lógica, Ferreirós (2007), presenta que es la misma matemática la que procura evidenciar sus bases, transformándose en una ciencia "reflexiva" que da lugar a la llamada metamatemática. La historia de la segunda crisis de los fundamentos de las matemáticas se remonta al inicio del siglo XX, tras la aparición de la paradoja de Russell, formulada por el filósofo y lógico británico Bertrand Russell en 1901. Esta paradoja desafió los pilares de la teoría de conjuntos y planteó interrogantes sobre la consistencia lógica de las matemáticas.

La paradoja de Russell afirmaba que, si consideramos el conjunto de todos los conjuntos que no se contienen a sí mismos, nos encontramos con una contradicción. Si este conjunto se contiene a sí mismo, entonces no debería contenerse a sí mismo, y viceversa. Esta paradoja puso en evidencia una tensión interna en la teoría de conjuntos y señaló la necesidad de revisar los fundamentos de las matemáticas.

A medida que se desarrollaba la investigación en el campo de los fundamentos de las matemáticas, surgieron más paradojas y preguntas que desafiaron la solidez de los sistemas formales utilizados en la disciplina.

La segunda crisis también estuvo marcada por el desarrollo de nuevas ramas de la lógica matemática. La lógica modal y la teoría de modelos jugaron un papel fundamental en el análisis de los sistemas formales y revelaron sus limitaciones e inconsistencias. Estos enfoques alternativos proporcionaron herramientas para explorar los fundamentos de las matemáticas desde diferentes perspectivas y estimularon un debate intelectual en la comunidad matemática, este fue un período histórico caracterizado por la revisión crítica de los pilares de la disciplina. Las paradojas de Russell

y Skolem, junto con el desarrollo de la lógica matemática, pusieron en tela de juicio la consistencia y la unicidad de los sistemas formales utilizados en las matemáticas.

Alrededor del año 1800, el número real era pensado como un conocimiento científico atribuido por el entorno, y por la presencia de magnitudes continuas en el mundo físico; no obstante, en el año 1900 este conjunto numérico se consideró como consecuencia del pensamiento puro. Tomando como columna vertebral a la lógica, Hilbert logra dar solidez a la construcción del conjunto de los números reales en 18 axiomas. En este sentido García (2017) comenta que: Esta nueva matemática que parecía alcanzar el propósito de una matemática consistente y sin contradicciones, que se explicaba por sí misma, tuvo sus dificultades ante las paradojas de la teoría de conjuntos y los métodos de demostración basados en el axioma de elección, es decir se presenta una crisis en los fundamentos de una matemática que pretendía ser infalible, consistente y autosuficiente (p. 37). En términos estructurales se lograron mejorías en las contribuciones que dejaron los antiguos griegos debido a las construcciones de matemáticos como Dedekind, Cantor y Hilbert, este último definió los números reales como "elementos de un conjunto dotado de estructura de cuerpo ordenado arquimediano y completo" (Ferreirós, 2007, p. 410). No obstante, el camino de un pensamiento de número real más próximo a las magnitudes continuas a una estructura abstracta y apartada de las intuiciones geométricas, que demoró alrededor de veinticinco siglos, expresa notoriamente la presencia y progreso de un obstáculo en la construcción del conjunto de los reales.

2.1.1. Primera crisis en los fundamentos del desarrollo de las matemáticas

Dos de los trabajos más relevantes de la escuela pitagórica, se transformaron en dos piedras en el zapato para la geometría griega, el mágico *Pentagrama místico* y el grandioso *Teorema de Pitágoras*, puesto que en su esencia traían consigo el profundo desequilibrio del pensamiento pitagórico.

La Matemática griega tuvo un cambio de ruta que la llevaría a convertirse en la tarea de ingeniería geométrica-deductiva configurada en *Los Elementos de Euclides*, esto porque la aparición de la inconmensurabilidad da un vuelco en la historia de la geometría, evidenciando que esto es un asunto teórico y no tanto empírico como se pensaba.

Partiendo de este punto, para poder analizar los primeros pasos de los números irracionales en la antigua geometría griega, se debe considerar que la consolidación del conjunto de los números

reales se da sobre las bases de las actividades de contar, medir y ordenar, las cuales se entretejen de manera mutua y equitativa (Recalde, 2011). Estas actividades proporcionaron los fundamentos para la comprensión de las cantidades, las magnitudes y las relaciones numéricas, lo que permitió el desarrollo y la expansión del conjunto de números para abarcar una gama más amplia de valores y situaciones matemáticas.

2.1.1.1. Entre medidas, llegando a los irracionales

La actividad de medir se manifiesta, por ejemplo, en los tres problemas iniciales de la antigua Grecia, que corresponden a la *cuadratura del círculo, la duplicación del cubo y la trisección del ángulo.* Esta actividad históricamente se pude clasificar en tres etapas:

la primera se relaciona con la escuela pitagórica (siglo V a.C.) – *etapa primaria* – en la que se establece que los números de contar eran idóneos para medir, hecho que se derribó con la aparición de las magnitudes inconmensurables. De acuerdo con Calderón (2014), los pitagóricos concebían que para cualquier par de segmentos era viable hallar una unidad de medida que los dividiera de forma exacta, es decir, eran conmensurables. El trabajo con magnitudes conmensurables dio luz a la aparición de los números racionales, cuya forma es $\frac{a}{b}, \ a, b \ \in \mathbb{Z} \ \wedge b \neq 0$, los cuales simbolizan medidas de magnitudes homogéneas.

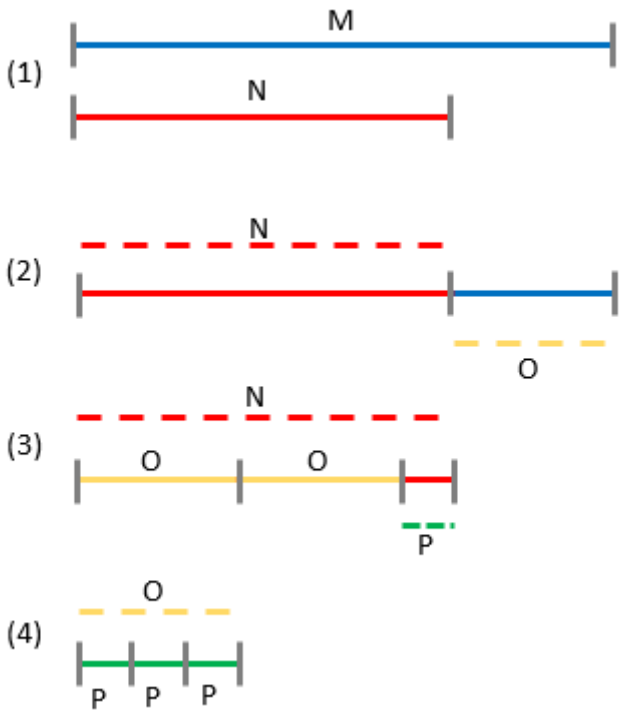


Figura 1. Medidas entre segmentos.

En la Figura 1, se puede apreciar que el segmento M es más largo que el segmento N, y que el segmento N no es un múltiplo exacto del segmento M. Al comparar el segmento M con el segmento N, se nota que hay un tramo adicional que no encaja, conocido como segmento O. Al examinar el segmento O en relación al segmento N, ocurre lo mismo que con el segmento M: hay una porción sobrante, lo que indica que O tampoco divide al segmento N de manera exacta. Ahora, si consideramos el segmento P como el residuo de la comparación entre los segmentos N y O, al compararlo nuevamente con el segmento O, se observa que P encaja exactamente tres veces en O, sin dejar partes sobrantes. Esto indica que P es un divisor de O. Al comparar P con los otros segmentos, se evidencia que P es la medida común entre ellos. Por ejemplo, P cabe diez veces en el segmento M y siete veces en el segmento N, lo que también puede expresarse como una razón de $\frac{10}{7}$. Sin embargo, hay otros segmentos que no se pueden comparar, es decir, no es posible encontrar una unidad de medida que los divida de manera exacta.

Toledo (1991) y Crespo (2009) afirman que lo acontecido en la época 500 a. C. – surgimiento de la inconmensurabilidad – asegura que los números irracionales son desde un principio asunto geométrico y no aritmético, hecho que ocasionó la división entre los conceptos de número y magnitud.

En la cosmovisión pitagórica los números tenían un papel central, establecían una correspondencia mutua – los números eran cosas y las cosas eran números –. Con esto, se puede decir que, el surgimiento de los irracionales se pudo haber dado en tres ámbitos: musical, problema de la diagonal del pentágono o el problema de la diagonal del cuadrado que es el que mayor fama tiene.

Newman (1985), indica que Eudoxo (matemático, astrónomo, médico y filósofo) nacido en Cnido en los años 408 a.C., logró dar solución a la problemática que existía de no poder realizar la comparación entre dos magnitudes, esta solución estuvo fundamentada sobre la teoría de la proporción, en el que se incluían magnitudes conmensurables e inconmensurables, no consideró las medidas, aislando al número que estaba unido a la magnitud.

En este mismo sentido, Puertas, citado por Guacaneme (2012) señala que el concepto de razón para las magnitudes conmensurables aparece en la definición 3 del libro V de Euclides: *"una razón es determinada relación con respecto a su tamaño entre dos magnitudes homogéneas"* (p.9). Esta teoría de la proporción se estableció como esbozo para la formulación de relaciones entre magnitudes, sin importar si era conmensurable e inconmensurable y sin pensarse que este método fue la guía para la constitución de los números reales, para ser más precisos este autor menciona que:

> La proporción eudoxiana que plantea un tratamiento general para las magnitudes geométricas ha sido ampliamente estudiada por los historiadores y filósofos, es esta teoría y no precisamente a la de la proporción numérica tratada en los Libros VII, VIII y IX la que se puede vincular con los trabajos sobre los números reales de Dedenkind y Frege (p.116)

2.1.1.2. Relativa, de los resultados sintetizados por Euclides

Platón y el Menón 427-347 a. C.

Como muestran algunos relatos filosóficos, Platón, discípulo de las ideas de Aristóteles y Pitágoras, inició el trabajo sobre los inconmensurables en sus famosos diálogos El "Menón o de la Virtud". Sócrates quiso conseguir que uno de sus esclavos Menón, quien no tenía una formación sólida en geometría, demostrara el Teorema de Pitágoras sin pensar como tal en el método. Sócrates le propone lo siguiente: Dado un cuadrado ABCD construir otro con el doble de área.

De la demostración, el esclavo cree que el cuadrilátero dado ABCD se basa en dos pies, por lo que su área es de cuatro pies; lo primero que planea hacer es duplicar cada lado del cuadrado y construir un AEFH más grande sobre el primer cuadrado. El tamaño del nuevo era de 16 pies, lo que significaba que no produciría el resultado deseado; al ver esto, el esclavo decidió ir hacia el otro lado y construyó otro cuadrado AKLM de tres pies ya que este sería más pequeño que el otro, pero esta forma tampoco tuvo el efecto deseado, por lo que el esclavo no pudo resolver el problema. Montesinos (1991) menciona: Este hecho muestra la complejidad de la respuesta aritmética a este problema, y hoy en día se puede concluir que ningún número entero o número racional es suficiente para resolver este problema (García, 2017).

Este problema tiene una solución sencilla en geometría, Sócrates traza las diagonales de un cuadrilátero dado y a partir de ahí construye un cuadrilátero DBIJ del doble del tamaño de la primera superficie (Fig 2).

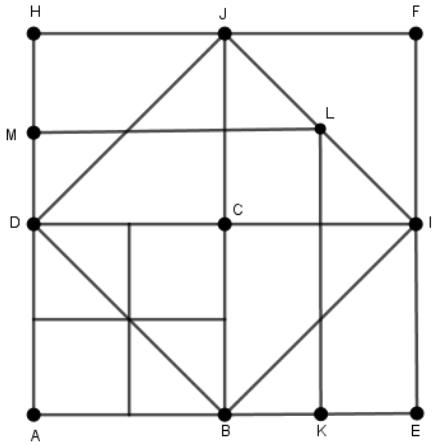


Figura 2. La duplicación del cuadrado.

(García, 2017)

A partir del siglo V a.C. la crisis de los fundamentos de las matemáticas, dio lugar a argumentos mediante la demostración por reducción al absurdo, para los que Aristóteles encontró diversas explicaciones en su obra la Metafísica, que luego se reflejaron en los Elementos de Euclides. Al respecto (Gonzáles, 2008) menciona:

> La aparición de las magnitudes inconmensurables marcó una inflexión radical en la evolución histórica de la geometría griega, ya que puso fin al sueño filosófico pitagórico acerca del número como esencia del universo, eliminó de la geometría la

> posibilidad de medir siempre con exactitud y fue lo que imprimió a la matemática griega una orientación geométrico-deductiva plasmada en la compilación enciclopédica de Los Elementos de Euclides. Los inconmensurables conducen a un trastorno lógico que estremece los cimientos de la geometría griega, ya que al invalidar todas las pruebas pitagóricas de los teoremas que utilizaban proporciones acarrean la primera crisis de fundamentos en la Historia de la Matemática (p. 103).

Euclides y la Irracionalidad

García (2017) menciona que, desde el punto de vista pedagógico, el argumento aritmético sobre la irracionalidad de $\sqrt{2}$ utilizando el método de reducción del absurdo es una forma de motivar a los profesores de matemáticas de primaria y secundaria en el aula a reelaborar el argumento de que conduce a que los estudiantes sean conscientes de la existencia teórica de algunos objetos matemáticos, como los números irracionales, porque la historia muestra claramente cómo los argumentos reducidos al absurdo se convierten en cálculos numéricos y en una importante alternativa al problema de una mala apropiación conceptual.

En este sentido, reconstruyendo en términos actuales la demostración de la irracionalidad de $\sqrt{\mathbf{2}}$**,** según González, (2008) se tiene que:

Sea $\frac{p}{q}$ una fracción irreducible tal que $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$.

Se comprueba: $\frac{p^2}{q^2} = 2;\ p^2 = 2q^2$,

de modo que p^2 (y por tanto p) es un número par;

es decir: $p = 2s$, de donde $2q^2 = p^2 = (2s)^2 = 4s^2$.

Así pues: $q^2 = 2s^2$,

de modo que q^2 (y por tanto q) es un número par;

es decir: $p = 2r$.

El carácter par de p y q contradice la hipótesis de que $\frac{p}{q}$ es una fracción irreducible.

En consecuencia, no puede existir ningún segmento cuyo cuadrado sea 2. (P. 106).

Calculando el área del círculo. El método de exhaución de Eudoxo.

El método de agotamiento, también conocido como el método de exhaución, fue desarrollado por el matemático griego Eudoxo de Cnidos en el siglo IV a.C. Este método se utilizó para calcular áreas y volúmenes de figuras irregulares y curvas mediante una aproximación sucesiva. El enfoque principal de Eudoxo fue aproximar una figura irregular mediante una serie de figuras regulares, cuyas áreas o volúmenes son más fáciles de calcular.

Este método se basaba en el principio de que, si las aproximaciones sucesivas se realizaban con un número suficientemente grande de figuras regulares, la suma de sus áreas o volúmenes se acercaría tanto como se desee al área o volumen real de la figura original.

Aunque el método de exhaución fue una importante contribución matemática en su época, no era una técnica rigurosa en términos modernos. El desarrollo del cálculo infinitesimal en los siglos posteriores proporcionó fundamentos más sólidos para el estudio de áreas y volúmenes de figuras irregulares y curvas. En resumen, el método de exhaución de Eudoxo fue un precursor del cálculo infinitesimal y consistía en aproximar figuras irregulares mediante la subdivisión en figuras regulares cada vez más pequeñas, calculando sus áreas o volúmenes y sumándolos para obtener una aproximación del área o volumen real.

Gonzales (2008), menciona que el medio para que Eudoxo pusiese fin a la crisis de los inconmensurables, era definir el área de una figura curvilínea A mediante el establecimiento de sucesiones de polígonos $\{P_{1,}P_{2,\dots,}P_{n,\dots}\}$ de tal manera que las áreas sean diferentes del área de la figura A inicial en una cantidad menor que otra prefijada, en este sentido, la diferencia puede hacerse "tan pequeña como se quiera"; presentado simbólicamente este método se tiene que "Dado $\varepsilon > o$ se debe encontrar un polígono Pn tal que la diferencia $\mathrm{a}(A) - \mathrm{a}(P_n)$ sea menor que ε para n suficientemente grande" (p.19).

La cuadratura del círculo y el método de exhaución en Arquímedes 287 a.C

El método de exhaución desarrollado por Eudoxo también fue ampliamente utilizado por otro famoso matemático griego, Arquímedes de Siracusa, quien vivió en el siglo III a.C. Arquímedes aplicó este método para resolver problemas de áreas y volúmenes en diversas figuras geométricas, es así como llevó el método de exhaución a nuevos niveles al combinarlo con su profundo

conocimiento de la geometría y el cálculo. Utilizó este método para calcular áreas de figuras planas y volúmenes de sólidos, y su enfoque ingenioso y riguroso le permitió hacer descubrimientos significativos en matemáticas y física.

Uno de los logros más destacados de Arquímedes utilizando el método de exhaución fue su cálculo del área de un círculo. Para ello, trazó un polígono regular circunscrito al círculo y otro polígono regular inscrito en el círculo. Luego, dividió cada polígono en un número cada vez mayor de triángulos isósceles y calculó el área de cada uno de estos triángulos. A medida que aumentaba el número de triángulos, las áreas resultantes se aproximaban cada vez más al área real del círculo. Mediante el método de exhaución, Arquímedes demostró que el área de un círculo es igual a πr^2, donde r es el radio del círculo.

Arquímedes también utilizó el método de exhaución para calcular volúmenes, como el volumen de una esfera y el volumen de un cono. Para ello, aproximó la figura tridimensional mediante una serie de figuras regulares inscritas y circunscritas, dividiéndolas en partes más pequeñas y calculando el volumen de cada una de ellas. Al igual que en el caso del cálculo del área del círculo, Arquímedes aumentó gradualmente el número de subdivisiones para obtener aproximaciones más precisas del volumen real.

El método de exhaución de Arquímedes sentó las bases para el posterior desarrollo del cálculo integral y tuvo una influencia duradera en el campo de las matemáticas. Sus contribuciones a través de este método demostraron su genialidad y su habilidad para combinar conceptos geométricos y matemáticos para resolver problemas desafiantes.

García y Delgado (1991) afirman que para poder hallar el área de un polígono **S** a través el método de agotamiento, se deben inscribir y circunscribir polígonos $\{\mathbf{U_n}\}$ y $\{\mathbf{L_n}\}$ de manera sucesiva duplicando continuamente los lados de los polígonos inicial, y a medida que se van duplicando van acercándose o aproximándose a **S**; presentado este método simbólicamente así:

$$\cdots < a(U_n) < a(U_{n+1}) < \cdots < a(S) < \cdots < a(L_{n+1}) < a(L_n) < \cdots$$

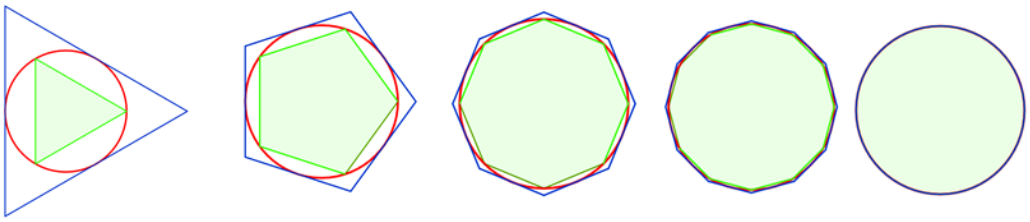


Figura 3. Método de agotamiento, inscribiendo y circunscribiendo polígonos.

De esta manera, al realizar la diferencia entre los polígonos inscritos $\{\mathbf{U_n}\}$ y circunscritos $\{\mathbf{L_n}\}$ respecto a la figura **S** se hace cada vez menor; en este sentido, este método involucra el hecho de encajar al polígono inicial, acercándose con la ayuda de superficies poligonales al área del círculo, ocasionando la noción de límite. En palabras de García y Delgado (1991).

> Si en este Euclides llega al resultado de que el área de un círculo es proporcional al cuadrado de su diámetro, en "La Medida del Círculo", Arquímedes calcula el valor – llamémosla π – de esta razón, comenzando con un hexágono (para algunos un decágono) inscrito y otro circunscrito. Doblando el número de lado obtiene polígonos de hasta 96 lados y calcula sus perímetros para buscar cotas superiores e inferiores de π:
>
> $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$. (p.306)
>
> Y expresándolo como un intervalo es 3,1442<π<3,1416

2.1.2. Los números reales en la etapa abstracta (segunda crisis de los fundamentos)

Al ubicar al número real en el ámbito de la teoría de la medida, se persigue indagar sobre el sustento conjuntista que este posee, con esto es importante tomar de nueva cuenta lo anteriormente expresado acerca de las relaciones entre las actividades de medir, ordenar y contar las cuales sirvieron como punto de partida para la consolidación de este conjunto numérico, pese a que la objetivación del continuo se instaura en la axiomatización, hay muchos desafíos que aún persisten**.**

El estudio de los fundamentos de las matemáticas ha sido desde hace un siglo competencia de la lógica, Ferreirós (2007), manifiesta que la propia matemática trata de dar cuenta de sus bases, convirtiéndose en una ciencia "reflexiva" que da lugar a la llamada metamatemática, este ha sido un fenómeno muy característico en el siglo XX.

> Durante el XIX, la matemática había dejado de ser una "ciencia de las magnitudes", sus conceptos habían alcanzado un grado de abstracción sin precedentes, sus teorías se habían desarrollado mucho en extensión y profundidad, y al hacerlo surgía a lo que se le solido llamar "matemática moderna". (Ferreirós, 2007. p. 410).

En el año1800 el número real, era concebido como un concepto científico impuesto por el entorno, y por la presencia de magnitudes continuas en el mundo físico; pero por lo contrario en el 1900 los números reales se consideraron producto del pensamiento puro. Hilbert en 18 axiomas, cuya firmeza era la lógica, garantizó la construcción del conjunto de los números reales. En palabras de García (2017):

> Esta nueva matemática que parecía alcanzar el propósito de una matemática consistente y sin contradicciones, que se explicaba por sí misma, tuvo sus dificultades ante las paradojas de la teoría de conjuntos y los métodos de demostración basados en el axioma de elección, es decir se presenta una crisis en los fundamentos de una matemática que pretendía ser infalible, consistente y autosuficiente (p. 37).

Matemáticos como Dedekind, Cantor y Hilbert, en sus construcciones mejoraron en términos estructurales los aportes teóricos que dejaron los antiguos griegos. Hilbert, define los números reales como "elementos de un conjunto dotado de estructura de cuerpo ordenado arquimediano y completo" (Ferreirós, 2007, p. 410).

Sin embargo, el paso de una concepción de número real más cercana a las magnitudes continuas a una estructura abstracta y alejada de las intuiciones geométricas, que tardó alrededor de 21 siglos, refleja claramente la presencia y superación de un obstáculo en la construcción del conjunto de los reales.

Grandes matemáticos del siglo XIX fueron pertinentes para darle firmeza y rigurosidad matemática a la consolidación de los números reales como objeto matemático, cabe mencionar que los aportes de los griegos también jugaron un papel importante en dicha construcción, pese a que sus intentos por fundamentar la aritmética fracasaron, estos se convierten en elementos fundamentales que retoman los matemáticos del siglo XIX para avanzar en la fundamentación de la aritmética.

2.1.3. Inicios y consolidación de la Teoría Intervalar.

Al definir la teoría intervalar es inevitable, en un primer momento, revisar algunos de los momentos que fueron importantes en la consolidación de esta teoría. El matemático estadounidense Wiener en sus trabajos sobre la teoría de la computación[5] en 1914, quien fue reconocido por los aportes para la cibernética, utilizó como instrumentos de medida los intervalos para calcular medidas de distancia y tiempo.

Si bien ambas áreas son campos de estudio en las matemáticas y la informática, no están directamente relacionadas entre sí. Sin embargo, la teoría Intervalar tuvo aplicación en contextos específicos de la teoría de la computación, como en el análisis de errores y la evaluación de la precisión en algoritmos numéricos.

La teoría intervalar, tuvo sus inicios en la década de 1950 y se ha consolidado como una rama importante de las matemáticas aplicadas. Su desarrollo fue impulsado por la necesidad de manejar y analizar la incertidumbre y los errores en los cálculos numéricos y en la modelización de fenómenos complejos.

Posteriormente, en la década de 1960, se realizaron importantes contribuciones por parte de otros matemáticos como George Dantzig, quien aplicó los intervalos en la resolución de problemas de optimización, y René Descartes, quien ya había introducido la noción de intervalos en su obra "La Géométrie" en el siglo XVII.

A medida que avanzaba la investigación en teoría de intervalos, se desarrollaron métodos y técnicas para realizar cálculos aritméticos y algebraicos con intervalos. Se establecieron operaciones básicas como la suma, la resta, la multiplicación y la división de intervalos, así como la resolución de sistemas de ecuaciones lineales con coeficientes intervalares.

En la década de 1970, el matemático y científico soviético Nikolai Aleksandrovich Krylov realizó importantes avances en la teoría intervalar, estableciendo bases sólidas para su consolidación. Krylov propuso una teoría matemática rigurosa basada en conjuntos de intervalos,

[5] La teoría de la computación desarrollada por el matemático Norbert Wiener en la década de 1920, se centra en la capacidad de las máquinas y los algoritmos para resolver problemas computacionales. Incluye conceptos como la computabilidad, la complejidad computacional, la teoría de lenguajes formales y la teoría de autómatas.

y desarrolló métodos para el análisis y la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales con coeficientes intervalares.

A partir de entonces, la teoría intervalar ha continuado su desarrollo y consolidación. Se ha aplicado en una amplia gama de disciplinas, incluyendo la ingeniería, la física, la economía, la inteligencia artificial y la verificación formal de sistemas. La capacidad de modelar y manejar la incertidumbre de manera rigurosa ha llevado a la utilización de la teoría intervalar en la toma de decisiones y en la estimación de errores en cálculos numéricos.

En la actualidad, la teoría intervalar se ha convertido en una herramienta fundamental en el campo de la computación científica y ha sido implementada en software especializado que permite realizar cálculos y análisis con intervalos de manera eficiente.

Algo importante que se debe notar es que, según Moore, Kearfott y Cloud (2009) el comienzo de esta teoría se da o se evidencia en el método de exhaución propuesto por Arquímedes.

Varios matemáticos y especialistas en la computación han desarrolado, como por ejemplo los creados para calcular π, su uso y el uso de ordenadores ha concedido medir lo "inmedible" o aproximarse de buena manera para evadir errores de redondeo. No fue hasta la década de 1960 que el método de intervalos se volvió objeto de investigación por parte de algunos matemáticos, lo que llevó a logros impresionantes a nivel teórico y aplicado.

Pero antes de la teoría del intervalar rigurosamente sistematizada por Moore, varios investigadores estadounidenses hicieron muchas contribuciones a ella. Esto fue seguido por un momento importante en la consolidación de esta teoría cuando el matemático Kulisz en 1962 mostró gran interés en los cálculos de intervalos desarrollados por Moore que involucraban la aritmética de intervalos y combinó la teoría en cálculos numéricos.

Después de que Europa se interesó en esta teoría y la usara, los alemanes usaron los mejores sensores para medir microdimensiones usando intervalos, Kulisz con la ayuda de algunos matemáticos integraron la teoría de intervalos con computadoras digitales y así determinaron la eficiencia de estos perfeccionando cálculos.

Este capítulo solo cubre algunos de los momentos de la historia en los que esta teoría es relevante y cómo ayuda a reducir los errores de cálculo, además de su integración en las computadoras para mejorar el rendimiento de las mismas.

Finalmente se tiene que, esta teoría permite representar con precisión un número real a través de intervalos y los aborda no como "puntos sobre la recta, sino como el límite de sucesiones de

intervalos encajados, evitando así, errores en los cálculos experimentales originados con el redondeo y el truncamiento, y que favorece la comprensión del número real en relación con el concepto de número" (García, 2017).

2.2. Referente matemático: Construcciones del número real

En este referente en un primer momento se estudian de manera sucinta algunas de las construcciones clásicas de los números reales como la Dedekind, pues es aquí donde la teoría de los números reales concibe su forma definitiva. En un segundo momento se revisan las construcciones de los números reales propuestas por: Cantor y Bachmann y la correspondencia que poseen con el análisis intervalar, posteriormente se estudia el análisis intervalar. Las construcciones de Cantor y Bachmann se revisan con un poco más de detalle, puesto que están se tienen presentes para el desarrollo de este trabajo, en este sentido Reis (2006; citado en García, 2017), menciona que utilizar sucesiones de intervalos encajados favorece la definición de la construcción expuesta por Cantor, de esta forma, se relaciona con la elaborada por el matemático alemán Bachmann, el cual, alrededor de 1892 formuló formalmente números reales y los definió como límites de secuencias de intervalos encajados.

Además de estos trabajos, se ha presenta un enfoque teórico del análisis de intervalos; porque da una representación un poco más intuitiva de los números reales y no se desvía de las teorías matemáticas propuestas. Para el estudio de las construcciones matemáticas se toma lo expuesto por García (2017):

2.2.1 Construcción matemática Dedekind

La construcción matemática de Dedekind sobre los números reales fue presentada por el matemático alemán Richard Dedekind en su obra "Stetigkeit und irrationale Zahlen" ("Continuidad y números irracionales") publicada en 1872.

La idea central de la construcción de Dedekind era basarse en la noción de un corte o partición de los números racionales para definir los números reales. Dedekind consideró que un corte divide

a los números racionales en dos conjuntos: aquellos que están por debajo del corte y aquellos que están por encima del corte. Un corte también puede incluir un número especial que divide a los conjuntos, como un "límite" o "punto de corte".

Formalmente, un corte de Dedekind es un par de conjuntos no vacíos, A y B, que satisfacen las siguientes propiedades:

1. A y B son disjuntos: ningún número racional puede pertenecer simultáneamente a ambos conjuntos.
2. Todo elemento en A es estrictamente menor que cualquier elemento en B.
3. A no tiene un elemento máximo, es decir, no hay un número racional más grande que todos los elementos de A.
4. B no tiene un elemento mínimo, es decir, no hay un número racional más pequeño que todos los elementos de B.
5. A y B juntos contienen todos los números racionales, es decir, no hay números racionales que no pertenezcan ni a A ni a B.

Una vez que se han definido los cortes de Dedekind, se pueden considerar estos pares como los números reales. El conjunto de todos los cortes de Dedekind se denota como $\mathbb{R}$

Usando esta construcción, Dedekind pudo definir las operaciones aritméticas (suma, resta, multiplicación y división) en los números reales y demostrar las propiedades fundamentales de los reales, como la ley de tricotomía (para cualquier par de números reales, uno es menor, igual o mayor que el otro) y la completitud (cada conjunto no vacío acotado superiormente tiene un supremo).

La construcción de Dedekind de los números reales es una de las varias construcciones axiomáticas de los números reales y proporciona una base sólida para el estudio y la comprensión de las propiedades y operaciones de los números reales en matemáticas.

2.2.2 Preliminares

Inicialmente, es recomendable presentar una introducción a diversos conceptos esenciales que son cruciales para el desarrollo de esta sección. Estos conceptos incluyen las relaciones de equivalencia, las particiones y las clases de equivalencia. Siguiendo la propuesta de los autores Hrbacek y Jech (1999) en su libro "Introduction to set theory" (citado por García, 2017), se sugiere seguir un orden lógico para comprender y abordar estos conceptos. Esto implica comenzar por las definiciones de producto cartesiano, relación y par ordenado, ya que proporcionan las bases necesarias para reconstruir los conceptos mencionados previamente.

En matemáticas, una relación es una conexión o asociación entre elementos de dos conjuntos diferentes. Es una forma de describir cómo los elementos de un conjunto están relacionados con los elementos de otro conjunto. Formalmente, una relación entre dos conjuntos A y B es un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$. En otras palabras, una relación R entre A y B consiste en pares ordenados (a, b) donde a pertenece a A y b pertenece a B.

Las relaciones pueden ser de diferentes tipos y tener diversas propiedades. Algunas de las relaciones más comunes incluyen:

- Relaciones de igualdad: Indican que dos elementos son iguales. Por ejemplo, la relación de igualdad en el conjunto de los números reales establece que $a = b$ si y solo si a y b representan el mismo número real.
- Relaciones de orden: Establecen un orden entre los elementos de un conjunto. Por ejemplo, la relación de "menor que" (<) en los números naturales indica que $a < b$ si a es menor que b.
- Relaciones binarias: Asocian elementos de dos conjuntos diferentes. Estas relaciones pueden ser simétricas, reflexivas, transitivas, entre otras propiedades.
- Relaciones de equivalencia: Son relaciones binarias que satisfacen las propiedades de simetría, reflexividad y transitividad. Estas relaciones agrupan elementos en clases de equivalencia, donde dos elementos están relacionados si pertenecen a la misma clase

La última relación es necesaria construir los números reales, desde Cantor, Bachman y Weiss, puesto que da pie para establecer las relaciones entre números y proporcionarles el estatus de número.

Ahora bien, a relación es fundamentada por un concepto de *par ordenado*. Así, (a, b) es un par ordenado, si es un conjunto que está formado por dos elementos a y *b*, en teoría de conjuntos el par ordenado se define:

Definición 1. Dados A y B conjuntos, y $a \in A$, $b \in B$, entonces se define el par ordenado de a y b por el conjunto:

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

Esto indica que el conjunto (a, b) tiene dos elementos $\{a\}$ y $\{a, b\}$ y a partir de ella es posible demostrar el teorema:

Teorema 1. Si $(a, b) = (c, d)$ entonces $a = c \; y \; b = d$.

A su vez, este teorema le da sentido a la definición, pues dado este, se diferencia el orden entre el objeto *a* del objeto *b*.

Relación: Una relación de *A* en *B* es un subconjunto de A × B, formalmente:

$$R \text{ es una relación de } A \text{ en } B \leftrightarrow R \subseteq A \times B.$$

De acuerdo con esta definición, una relación R se entiende como un subconjunto de los pares ordenados en $A \times B$, seleccionados por alguna correspondencia entre los elementos de A y los de B , esto es $(a,$ b$) \in R$ se puede interpretar como "*a* le corresponde *b*".

Ahora, dado $(a, b) \in R$, se denota aRb, y se lee *a* está relacionada con b, bajo una relación *R*. En el caso de que $A = B$, *R* se dice es una relación sobre *A*.

Clase de equivalencia: esta definición es esencial para poder comprender el concepto de número en general. Formalmente si R es una relación de equivalencia sobre un conjunto A, y $a \in A$, al conjunto de los elementos de A que están relacionados con a por la relación R se le denomina *la clase de equivalencia de a* y se denota de la siguiente manera:

$$[a] = \{x \in A : a \; Rx\}$$

Sí R es una relación de equivalencia sobre un conjunto A tal que $a, b \in A$ y $[a] \neq [b]$ entonces $[a] \cap [b] = \emptyset$.

Teorema 2

Una relación sobre un conjunto $A \neq \emptyset$ particiona A en sus clases de equivalencia. Conversamente, toda partición sobre A da lugar a una única relación de equivalencia, cuyas clases de equivalencia son justamente los subconjuntos de la partición.

2.2.3. La construcción de los reales por Cantor (1845-1918).

La construcción del conjunto de números reales por Cantor es conocida como la construcción de los números reales a partir de los números racionales. Fue desarrollada por el matemático alemán Georg Cantor en el siglo XIX.

La construcción de los números reales propuesta por Cantor puede resultar conceptualmente desafiante, pero no tanto desde el punto de vista técnico. Según Cantor, *los números reales son clases de equivalencia de sucesiones de Cauchy.* Para un matemático familiarizado con la teoría de conjuntos, las clases de equivalencia y las sucesiones fundamentales, la construcción no representa una dificultad significativa (Ferreirós, 1998).

Por tanto, es importante tener una definición clara de las sucesiones de Cauchy, tanto para comprender la construcción propuesta por Cantor como para abordar la definición de filtros que se desarrolla posteriormente. Estas definiciones se toman de (García, 2017).

Ahora bien, para definir los números reales ($\mathbb{R}$), Cantor parte de los números racionales, mencionando que los números reales son límites de sucesiones de racionales. Antes de hacer la construcción de $\mathbb{R}$ según Cantor, es necesario retomar de manera breve algunas definiciones, tales como, sucesiones racionales, sucesiones convergentes y las sucesiones de Cauchy.

Sucesiones racionales

Una sucesión de números racionales es una función *a:* $\mathbb{N} \to Q$. Se denota *a(n)* o como a_n y es llamado el *n- enésimo término de la sucesión*. Así mismo el conjunto de valores de la sucesión *a* se denota como $\{a(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$

Algunos ejemplos de sucesiones racionales son:

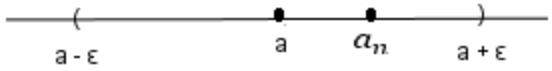
- $a_n = \frac{1}{n+1}$
- $a_n = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n$
- $a_n = (-1)^{n+1}$

Sucesión convergente

Una sucesión de números racionales $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a ***a*** o tiene un límite ***a***, la cual se denota por si para todo $\varepsilon \in \mathbb{Q}^+$, existe un número natural N tal que para todo $n > N$ implica que $|a_n - a| < \varepsilon$. Se usa como notación la siguiente,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists N\epsilon\mathbb{N} \text{ tal que } n > N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$$

Si $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene limite *a*, entonces par todo $n > N$ se tiene que $|a_n - a| < \varepsilon$ y esto es lo mismo que $a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$



Es decir, que para un ε tan pequeño como se desee, todos los términos a_n de la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ para $n > N$ están comprendidos en el intervalo $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$.

Sucesiones de Cauchy

Una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, si y solo sí, para cualquier valor racional positivo ε, existe un número entero *N*, tal que si $n, m > N$ entonces $|a_n - a_m| < \varepsilon$. Así simbólicamente:

$$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{Q}^+\ \exists\, N\ tal\ que\ \forall\, n, m > N \rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon$$

Definición 5. Si $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $y = \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones de números racionales, se definen las sucesiones sumas $x + y = \{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y multiplicación $xy = \{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, por:
$u_n = x_n + y_n$, $v_n = x_n y_n$.
Claramente, si *x*, *y* son sucesiones de números racionales, entonces también lo son $x + y$ y xy. Es un hecho importante que si x y y son sucesiones de Cauchy de números racionales, entonces $x + y$ y xy son sucesiones de Cauchy. En otras palabras, la suma y la multiplicación son operaciones binarias en el conjunto *C* de todas las sucesiones de Cauchy de números racionales.

Lema 1.

Si x, y son sucesiones de Cauchy, entonces también lo son las sucesiones suma x + y, y multiplicación xy (Hernández, 2003).

Las propiedades básicas de la suma y la multiplicación pueden ser resumidas por la afirmación que satisfacen las propiedades de los números racionales, donde los módulos de la suma

y el producto son la sucesión 0 y la sucesión 1 respectivamente. El opuesto de la sucesión de Cauchy *x* es la sucesión *–x* tal que $(-x)_n = -x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Toda sucesión racional convergente es de Cauchy, sin embargo, en el sistema de los números racionales, el recíproco no es cierto. Por ejemplo, $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ se puede probar que es de Cauchy, pero no converge en $\mathbb{Q}$.

La construcción de los números reales surgió como una solución para tratar con sucesiones y encontrar límites. Cantor estableció una asociación entre cada sucesión de Cauchy y un número real, lo que implica que hay sucesiones asociadas tanto a números racionales como a números irracionales (García, 2017). A continuación, se introduce una relación, representada por el símbolo ~, en el conjunto C que comprende todas las sucesiones de Cauchy de números racionales. Además, se presentan las siguientes definiciones, lemas y teoremas, según lo expuesto por Hernández (2003):

Definición 6. Sean $x, y \in C$, definamos una relación ~ en *C* como $x \sim y$ si y solo si para cada $\varepsilon \in \mathbb{Q}^+$, existe un $n_0 \in N$ tal que $|x_n - y_n| < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$.

Como ilustración, considere las sucesiones *x* e *y* tales que $x_n = \frac{n+2}{n+1}$ y $y_n = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Estas son sucesiones de Cauchy y claramente $x \sim y$ puesto que $x_n - y_n = \frac{1}{n+1}$. Es fácil establecer la siguiente propiedad de esta relación.

Lema 2. La relación ~ es una relación de equivalencia en *C.*

Definición 7. Una sucesión de Cauchy $x \in C$ se dice *positiva* si existen $\varepsilon \in Q^+$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que para todo $n \geq n_0$, $x_n > \varepsilon$.

Esta relación de equivalencia en las sucesiones de Cauchy es compatible con la suma y el producto en C. Y, además, todas las sucesiones positivas representan una sola clase de equivalencia. Lo anterior se presenta como sigue.

Lema 3. *Si $x, y, u, v \in C$ son tales que $x \sim u$ y $y \sim v$, entonces $x + y \sim u + v$ y $xy \sim uv$; además, si x es positiva entonces u es positiva.*

Lema 4. *La suma y la multiplicación de dos sucesiones de Cauchy positivas son sucesiones de Cauchy positivas. Además, si $x \in C$, entonces una y solo una de las siguientes proposiciones es verdadera: x es positiva, $x \sim 0$ o $-x$ es positiva.*

Lema 5. *Si $x \in C$ no es equivalente a 0 módulo ~, entonces existe $y \in C$ tal que $xy \sim 1$.*

Los Reales

Definición 8: Un *número real* es una clase de equivalencia módulo $\sim$ de sucesiones de Cauchy de números racionales.

El número real determinado por la sucesión de Cauchy *x* lo denotamos como $[x]_{\sim}$.

El conjunto de los números reales es $\mathbb{R} = C/\sim$. Un número real es llamado *positivo* si y solo si contiene una sucesión de Cauchy positiva. Si $[x]_{\sim}$ es positivo, entonces cada uno de los miembros de esta clase es una sucesión de Cauchy positiva. El conjunto de todos los números reales positivos es simbolizado por $\mathbb{R}^{+}$. Se definen las operaciones de suma y multiplicación de números reales como:

$$[x]_{\sim} + [y]_{\sim} = [x + y]_{\sim}$$
$$[x]_{\sim} \cdot [y]_{\sim} = [xy]_{\sim},$$

También se define un orden en $\mathbb{R}$ por:

$$x <_{\sim} y \; si \; y \; sólo \; si \; y - x \in \mathbb{R}^{+}.$$

Es de esperar que este orden preserva todas las propiedades de orden de los racionales, pues si $a \in \mathbb{Q}$, entonces $\{a\}_{n\in\mathbb{N}} \in C$ y en consecuencia existe un único número real $[a]_{\sim}$ que contiene a $\{a\}_{n\in\mathbb{N}}$; así la función $a \to [a]_{\sim}$ es una inyección y un isomorfismo sobre su imagen. Así entonces el orden $\leq_{\sim}$ que resulta a partir de $<_{\sim}$ es un orden total en $\mathbb{R}$. Por otro lado, esta función también preserva las operaciones de suma y multiplicación.

Los números reales correspondientes a los números racionales 0 y 1 son simbolizados por $0_{\sim}$ y $1_{\sim}$.

Teorema 3. El sistema $\langle \mathbb{R}, +, \cdot, 0_{\sim}, 1_{\sim} \rangle$ preserva las propiedades de los racionales tanto para la suma como para el producto.

La definición de la función valor absoluto se extiende a los números reales de manera similar. Como se ha ido construyendo $\mathbb{R}$, muestra que es una extensión de $\mathbb{Q}$, así las propiedades fundamentales de los números racionales se preservan en $\mathbb{R}$.

Según Hernández (2003):

Teorema 4. *Entre dos reales distintos cualesquiera hay un número racional.*

Lema 6: *si* $x, y \in C$ *y si existe* $n_0 \in N$ *talque para todo* $n \geq n_0, x_n \leq y_n$, *entonces* $[x]_{\sim} \leq [y]_{\sim}$, *es decir, no se puede garantizar la desigualdad estricta.*

El siguiente teorema es una generalización de la propiedad arquimediana del sistema de los números racionales para el sistema de los números reales.

Teorema 5. Si $x, y \in \mathbb{R}^+$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ $tal\ que\ nx > y$.

Teorema 6. *Todo subconjunto no vacío de números reales que tiene una cota superior tiene una mínima cota superior.*

Este teorema es quien proporciona la característica primordial que hace diferente al sistema de los números reales. Puede demostrarse que

$$\langle \mathbb{R}, +, \cdot, 0_{\sim}, 1_{\sim} \rangle$$

Ahora como consecuencia del teorema anterior se muestra, después de dos lemas, que toda sucesión de Cauchy de números reales tiene un límite. Una sucesión *x* de números reales es una sucesión tal que $x_n \in \mathbb{R}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Según Según Hernández, (2003) Una *sucesión de Cauchy de números reales* es una sucesión de números reales tal que para cualquier número real positivo ε existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_m - x_n| < \varepsilon$$

Para todo $m, n \geq n_0$

Ejemplo 14 Toda sucesión constante de números reales tiene un límite.

Lema 7. *El límite de una sucesión de números reales es único.*

Ejemplo 15 Toda sucesión de números reales decreciente (creciente) que está acotada inferiormente, es decir, existe $M \in \mathbb{R}$ con $M \leq x_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$ (respectivamente, superiormente: $x_n \leq M, para\ todo\ n \in \mathbb{N}$), tiene límite.

Lema 8. *Sea* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de números racionales y sea la sucesión de números reales tal que para cada* $n \in \mathbb{N}, x_n = [\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}]_{\sim}$ *es el número real correspondiente a* a_n. *Entonces x es una sucesión de Cauchy de números racionales. Además, si* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es una suceción de Cauchy de números racionales y z es el número real que ella define, entonces* $\lim_{n\to\infty} a_n = z$.

Teorema 7. *Una sucesión de números reales tiene un límite si y solo si es una sucesión de Cauchy de números reales.*

Como resultado se puede afirmar que, los números reales se pueden expresar como límites de sucesiones de Cauchy, y a su vez, estas sucesiones están relacionadas con el concepto de intervalo. Bachman utiliza la noción de intervalo como una generalización de las sucesiones de Cauchy. Por lo tanto, la construcción propuesta por Cantor es un punto de referencia fundamental para aquellos que deseen comprender la construcción más reciente (García, 2017).

Ahora bien, todas estas construcciones llevan al concepto de intervalos, lo que indica que desempeñan un papel crucial en la construcción de los números reales. A partir de estas reflexiones, se puede deducir que los intervalos juegan un papel sumamente relevante en las construcciones de los números reales

2.2.4. Análisis intervalar

El análisis intervalar es una rama del análisis matemático que se centra en el estudio de los intervalos y las propiedades de las funciones definidas en ellos. En lugar de trabajar con valores puntuales, el análisis intervalar considera conjuntos de números reales que abarcan un rango continuo de valores.

En el análisis intervalar, los intervalos son considerados como objetos básicos y se utilizan para describir conjuntos de números reales. Un intervalo se define como un conjunto de números que comprende todos los valores entre dos puntos específicos. Por ejemplo, el intervalo [a, b] representa todos los números reales que son mayores o iguales que a y menores o iguales que b.

Además, se ocupa de estudiar las propiedades de las funciones definidas en intervalos y cómo se comportan estas funciones cuando los valores de entrada son intervalos en lugar de valores puntuales. Esto implica tener en cuenta la incertidumbre asociada a los valores exactos y trabajar con estimaciones que abarcan un rango de posibilidades. Una parte importante del análisis intervalar es el cálculo de intervalos, que involucra operaciones aritméticas y cálculo diferencial en el contexto de los intervalos. Esto permite realizar estimaciones y análisis de errores en los cálculos.

El análisis intervalar tiene aplicaciones en diversos campos, como la ingeniería, las ciencias de la computación, la física y la economía, donde se deben tener en cuenta las incertidumbres y los rangos de valores posibles. También se utiliza en problemas de optimización, teoría de control y verificación de sistemas, donde es necesario garantizar que las soluciones se mantengan dentro de rangos válidos.

En el apartado histórico ya se mencionó que el análisis intervalar tiene sus orígenes en Arquímedes, aunque no fue hasta alrededor de 1960 que adquirió relevancia como tema de investigación y comenzaron a realizarse importantes contribuciones en ingeniería. Moore, quien es considerado el autor principal de esta teoría, buscó soluciones al problema de representar números

reales como la raíz cuadrada de $\sqrt{2}$ ó π, dado que estos números tienen una cantidad infinita de decimales no periódicos y los ordenadores solo pueden representar un número limitado de ellos.

Esta dificultad también se observa en el ámbito educativo, donde se intenta enseñar a los estudiantes la existencia de números de naturaleza infinita periódica o no periódica. Convencer a los estudiantes de la existencia de estos números puede resultar desafiante, ya que les resulta difícil comprender su naturaleza.

En este contexto, García (2017) centra su trabajo en el análisis intervalar, ya que, aunque esta alternativa no fue originalmente concebida para la Educación Matemática, representa una forma teóricamente válida y más intuitivamente coherente con la práctica de aproximarse a la representación de los números reales $\mathbb{R}$. De esta manera, el análisis intervalar ayuda a remediar de alguna manera los errores de aproximación y truncamiento.

Por esta razón, en este apartado se trató de hacer una descripción teórica del análisis intervalar, puesto que trata de representar a los números reales de manera similar al método que usó Cantor.

2.2.3.1. Análisis Intervalar Clásico.

Trabajar con números reales con una cantidad ilimitada de cifras decimales resulta impracticable en la vida real. Sin embargo, es posible trabajar con intervalos, los cuales capturan y sugieren la existencia de un número real cercano, aunque no lo representen de manera precisa. Estos intervalos son conocidos como escalas digitales, como menciona SIGLA/X (1999) (citado en García, 2017): "se puede plantear el problema de qué marca digital de la escala DI (1,1)[6] sería la más adecuada para representar el valor $\frac{1}{3}$. Sea cual sea el valor que se escoja, el valor representado no es exactamente el de $\frac{1}{3}$ (…)" (p.2).

En este contexto, el análisis intervalar se presenta como una alternativa para abordar el problema de representar un número real, ya que la solución consiste en atrapar dicho número entre dos valores digitales consecutivos. SIGLA/X (1999) (citado en García, 2017) plantea la necesidad de los intervalos de la siguiente manera:

La utilización del conjunto de intervalos en la recta real, I(R), permite manejar sistemas físicos con modelos numéricos sin tener que abstraerse del hecho inevitable de la indeterminación asociada a los procesos de medición y cálculo. En este sentido, los intervalos posibilitan:

[6] DI (1,1): corresponden a la escala digital con un único dígito entero y un único dígito decimal.

1. La manipulación de errores de truncamiento. Por ejemplo, el número π se puede representar como 3,14159265 · · · ∈ [3,14, 3,15].

2. El control automático de errores operacionales en el cálculo digital.

3. El manejo de errores de datos físicos que provienen de medidas experimentales. Por ejemplo, la constante gravitatoria g = 9,807 ± 0,027m/s2 ∈ [9,780, 9,834].

4. La utilización de variables de indeterminación o de variación. Por ejemplo, la temperatura de una habitación durante las 24 horas del día varía entre 18 y 25 grados, entonces T = [18, 25] (p.4)

2.2.3.2. El Sistema Numérico Intervalar.

El sistema numérico intervalar es una forma de representar y operar con números que incorpora la noción de intervalos en lugar de valores numéricos precisos. En lugar de trabajar con números específicos, se utilizan intervalos que abarcan un rango de posibles valores.

En el sistema numérico intervalar, un número se representa como un intervalo que incluye todos los valores posibles que puede tener. Por ejemplo, en lugar de representar el número 5 de manera exacta, se podría representar como el intervalo [4.5, 5.5], indicando que el valor real se encuentra en ese rango.

La aritmética en el sistema numérico intervalar se realiza teniendo en cuenta la incertidumbre asociada a los valores exactos. Las operaciones como la suma, resta, multiplicación y división se definen de manera que los resultados sean intervalos que contengan todos los posibles valores resultantes de esas operaciones.

Términos y conceptos básicos: el intervalo cerrado [a, b] es el conjunto de los números reales dados por:

$[a, b] = \{x \in R: a \leq x \leq b\}$

Si bien existen distintas tipologías de intervalos como el abierto y semiabierto en las matemáticas, esta investigación se centraliza en los intervalos cerrados.

Importancia de la Intersección

Según lo mencionado por García (2017), la intersección desempeña un papel fundamental en el análisis intervalar. Cuando se tienen dos intervalos que comparten un resultado en común, sin

importar cómo se hayan obtenido inicialmente, la intersección resultante, que puede ser más estrecha, también incluye dicho resultado. Para ilustrar esta idea, García utiliza el siguiente ejemplo:

Para considerar dos intervalos, [a, b] y [c, d], si existe un valor x que pertenece tanto al intervalo [a, b] como al intervalo [c, d], entonces la intersección de estos intervalos, denotada como [e, f], también contiene a x. En otras palabras, [e, f] es un intervalo más estrecho que contiene el valor común x. Esto se cumple independientemente de cómo se hayan obtenido inicialmente los intervalos [a, b] y [c, d].

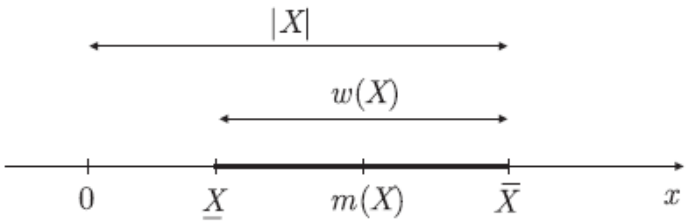


Figura 4. Intersección intervalar

Tomada de (García, 2017)

Relaciones de orden de los intervalos

Las relaciones de orden de los intervalos son fundamentales en el análisis intervalar y permiten comparar y establecer la relación de mayor o menor entre dos intervalos. En este contexto, existen diferentes relaciones de orden que se aplican a los intervalos.

Una de las relaciones de orden más comunes es la inclusión o contención. Se dice que un intervalo A está contenido en otro intervalo B si todos los valores de A también están incluidos en B. Formalmente, si A = [a, b] y B = [c, d], entonces A está contenido en B si y solo si a $\geq$ c y b $\leq$d. En este caso, se denota como A $\subseteq$ B.

Otra relación de orden importante es la disyunción o separación. Dos intervalos A y B se consideran disjuntos si no tienen valores en común, es decir, si no hay solapamiento entre ellos. Si A = [a, b] y B = [c, d], entonces A y B son disjuntos si a > d o b < c. En este caso, se denota como A $\cap$ B = $\emptyset$.

Además, se pueden establecer relaciones de orden basadas en la magnitud de los extremos de los intervalos. Por ejemplo, se puede decir que un intervalo A es menor que otro intervalo B si

el extremo inferior de A es menor que el extremo inferior de B, y si el extremo superior de A es menor o igual que el extremo superior de B. En este caso, se denota como A < B.

2.2.5. La construcción de Bachmann (1892).

En los números reales una sucesión $\{I_n\}_{n\geq 1}$ de intervalos $I_n = [a_n, c_n]$ se denominan encajados, si $I_{k+1} \subseteq I_k \ \forall\ k \geq 1$ y $c_n - a_n \to 0$ cuando $n \to \infty$. Para cada sucesión de intervalos encajados, $\exists b$, tal que $b \in I_k$ para todo $k \geq 1$.

Una sucesión de intervalos encajados $\{I_n\}_{n\geq 1}$ es más fina que otra $\{J_n\}_{n\geq 1}$si $I_n \subseteq J_n$, $\forall$ n ≥ 1. Si dos sucesiones de intervalos encajados tienen un *refinamiento común*, significa que existe una sucesión más precisa de intervalos encajados que se encuentra dentro de la intersección de ambas sucesiones. En consecuencia, si dos sucesiones de intervalos encajados determinan el mismo número real, es porque comparten un refinamiento común.

Debido a la propiedad de densidad de los números racionales en los números reales, los intervalos mencionados anteriormente pueden ser reemplazados por intervalos que contienen únicamente números racionales, sin perder la correspondencia con los números reales.

Los reales. Suponga en el momento intervalos racionales de la forma $I = [a, c] = \{x \in Q \mid a \leq x \leq c\}$, donde $a, c \in Q$. Un *racional encajado* es una familia $\{I_n\}_{n\geq 1}$ de intervalos racionales $[a_n, c_n]$ que satisface $I_{k+1} \subseteq I_k$ para todo $k \geq 1$ y $c_n - a_n \to 0$. Un racional encajado $\{I_n\}_{n\geq 1}$ es más fino que una sucesión del mismo tipo $\{J_n\}_{n\geq 1}$ si $I_n \subseteq J_n$, para todo n ≥ 1. Sea *N* el conjunto de todos los racionales encajados, luego en él se define la relación ~ donde $\{I_n\}_{n\geq 1} \sim \{J_n\}_{n\geq 1}$ si existe un *refinamiento común* de $\{I_n\}_{n\geq 1}$ y $\{J_n\}_{n\geq 1}$. De ello se puede deducir que ~ es una relación de equivalencia en *N* y el conjunto ℝ de los números reales se define por *N*/~, es decir el conjunto de clases de equivalencia de racionales encajados.

2.2.4.1.1. Orden. Dos números reales $x = [\{I_n\}]$ y $y = [\{J_n\}]$ satisface $x < y$, cuando existe $n_0 \in \mathbb{N}$ con $I_{n_0} < J_{n_0}$en el sentido de que $\alpha < \beta$ para todo $\alpha \in I_{n_0}$ y todo $\beta \in J_{n_0}$.

Filtros

En esta sección, se presentan de manera general algunos aspectos teóricos que posibilitan la aproximación al tema en cuestión. Por lo tanto, es oportuno ampliar algunos conceptos introductorios concernientes con la noción de filtro, que amplían la idea de sucesiones de números racionales mencionada anteriormente.

Los filtros desempeñan un papel fundamental en la construcción de los números reales propuesta por Weiss. En particular, se destaca la importancia de las bases de filtros de Cauchy, ya que trabajar con ellas resulta menos complejo que tratar directamente con el filtro en sí. Para abordar el tema, nos apoyaremos en el texto "The reals as rational Cauchy filters" de Weiss (2015), específicamente en las páginas 17-19 (citado en García, 2017)

Filtro: Un filtro sobre *X* es una familia no vacía *F* de subconjuntos de *X* que cumple lo siguiente:

1. $F_1, F_2 \in F \rightarrow F_1 \cap F_2 \in F$ (cerrado bajo intersecciones)
2. $F_2 \supseteq F_1 \in F \rightarrow F_2 \in F$ (Cerrado hacia arriba)

La segunda condición implica que el único filtro que contiene al conjunto ϕ es el filtro $P(X)$, el cual se le llama filtro impropio. Si F $\subsetneq P(X)$ se dice que F es un filtro propio.

Observación. La intersección de cualquier familia de filtros es nuevamente un filtro.

Base de Filtro: $B \subset P(X)$ se dice una base de filtro si $B_1, B_2 \in B \rightarrow \exists B_3 \in B$ tal que $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Luego, para describir un filtro es suficiente con describir la base que lo genera, que por ítem 1 deben garantizar el cierre para intersecciones finitas y por ítem 2 ser cerrado por contenencia hacia arriba.

Ejemplo 19.

Sea $q \in \mathbb{Q}$, entonces los conjuntos son bases de un filtro sobre $\mathbb{Q}$:

a) $B_1 = \{\{q\}\}$. En efecto, $B_1 \subseteq P(\mathbb{Q})$, por otro lado como $\{q\}$ es el único elemento en B_1, se cumple trivialmente que la intersección contiene un elemento de la base.

b) $B_2 = \{q_\varepsilon \subseteq \mathbb{Q}: \varepsilon > 0\}$, donde $q_\varepsilon = (q - \varepsilon, q + \varepsilon)$. En efecto, $B_2 \subseteq P(\mathbb{Q})$, por otro lado dado dos números ε_1 y ε_2, entonces $q_{\varepsilon_1} \cap q_{\varepsilon_2} \supseteq q_k$ donde $k = min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, por lo tanto q_k está en B_2.

Observación: Todo filtro es una base de filtro, pero el recíproco no es cierto.

Filtro generado por una base de filtro. Dada una base del filtro $\boldsymbol{B}$ la colección:

$\langle \boldsymbol{B} \rangle = \{F \subseteq X | F \supseteq B, B \in \boldsymbol{B}\}$ es un filtro sobre *X*.

De hecho, es el filtro más pequeño que contiene a $\boldsymbol{B}$ y se llama el filtro generado por la base del filtro B.

Filtro de Cauchy. Sea *F* un filtro sobre $\mathbb{Q}$, entonces *F* es de Cauchy si y solo si

$\forall \varepsilon > 0,\ \varepsilon \in \mathbb{Q}, \exists\ q \in \mathbb{Q}$ tal que $(q - \varepsilon, q + \varepsilon) \in F$.

Base de filtro de Cauchy: B es una base de un filtro de Cauchy si y solo si $(\forall \varepsilon\ \epsilon\ \mathbb{Q}^{+})\ \exists\ q \in \mathbb{Q}$ y $\exists\ B\ \in B$ tal que $B\ \subseteq q_{\varepsilon}$.

Afirmación: Si B es base de filtro de Cauchy, entonces $\langle B \rangle$ es un filtro de Cauchy.

Ejemplo 22.

Sea $q \in \mathbb{Q}$ fijo y se tiene:

$$B_1 = \{\{q\}\}$$

$$B_2 = \{q_{\varepsilon} : \varepsilon > 0\}$$

Y sean $F_1\ y\ F_2$ los filtros generados por B_1 y B_2 respectivamente, es decir

$$F_1 = \langle B_1 \rangle = \{\mathcal{F} \subseteq Q : \{q\} \subseteq \mathcal{F}\}$$

$F_2 = \langle B_2 \rangle = \{\ \mathcal{F} \subseteq Q : q_{\varepsilon} \subseteq \mathcal{F};\ \varepsilon > 0\}$,

Ahora puesto que B_1 y B_2 son bases, más aún son de Cauchy. En efecto, todo intervalo q_{ε} contiene a $\{q\}$, por tanto B_1 es una base de Cauchy, luego por otro lado todo intervalo q_{ε} es un elemento en B_2, entonces B_2 es una base de Cauchy, por lo tanto, por la afirmación anterior F_2 y F_1 son filtros de Cauchy.

Filtro minimal de Cauchy: los filtros están ordenados por la relación $\subseteq$, luego, por esta razón se puede hablar de la existencia de un mínimo.

Definición 9: $\mathcal{F}$ es un filtro minimal de Cauchy si y solo si $\mathcal{F}$ es filtro de Cauchy tal que si $G \subseteq \mathcal{F}$ es filtro de Cauchy, entonces $G = \mathcal{F}$.

Observación. Todo filtro propio de Cauchy contiene un único filtro minimal de Cauchy.

2.3. Referente curricular

Según la SEP (2018) el plan de estudios de la Licenciatura en Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en Educación Secundaria es el documento que dan dirección al proceso de formación de los futuros profesores en esta disciplina. Presenta las indicaciones principales, los aspectos

y con las direcciones del Plan de Estudios de la educación obligatoria. Su implementación en las Escuelas Normales debe incidir en la formación de los docentes.

Para alcanzar las competencias relacionadas a la disciplina, los profesores en formación del tercer semestre de la licenciatura han recibido los cursos de *Pensamiento algebraico, Sentido*

numérico, Razonamiento geométrico, Álgebra y funciones, Magnitudes y medidas y Tratamiento de la información. En los dos primeros cursos se abordan tópicos relacionados al concepto de número real en el que se mencionan propiedades de este conjunto numérico, sin embargo, estas aluden a las de la estructura algebraica no a las propiedades que tienen que ver con su comprensión. Este referente se analizó para identificar los significados institucionales del concepto de número real y su propiedad de densidad.

2.3.1. Pensamiento algebraico

Este curso se encuentra en el primer semestre del programa de la Licenciatura y según la SEP (2018) permite sistematizar y consolidar los conocimientos que los estudiantes construyeron en la educación obligatoria, afirmando y esperando que se logre avanzar en la consolidación y desarrollo de las competencias relacionadas con el álgebra, de las técnicas, estrategias y los elementos algebraicos empleados en la resolución de problemas.

Los propósitos del curso son:

- ✓ Que el estudiante consolide los procesos de lectura, construcción y análisis de los números reales y sus propiedades a través el desarrollo de técnicas y procedimientos que le permitan validar relaciones de expresiones algébricas y usar ecuaciones y desigualdades de segundo grado y de sistemas de ecuaciones en la solución de problemas.
- ✓ Que el estudiante adquiera gusto por los retos que ofrecen los problemas algebraicos a partir de escuchar y analizar los argumentos de sus compañeros en su propia construcción para la elaboración de conjeturas.
- ✓ Que el estudiante reconozca los procesos de enseñanza y aprendizaje que tienen lugar en las aulas de la formación inicial a través de la reflexión de sus propios procesos de aprendizaje y de los procesos de enseñanza del docente para identificar el posible impacto en el desarrollo de los aprendizajes en la educación obligatoria.

La estructura del curso se divide en tres momentos: primero se abordan las propiedades de los números reales, donde se aborda el orden, valor absoluto y representación geométrica,

exponentes y radicales, expresiones algebraicas, dominio de una expresión algebraica y sus operaciones; el segundo momento corresponde a la ecuaciones, abordándose la factorización de expresiones algebraicas, expresiones fraccionarias, ecuaciones lineales, ecuaciones cuadráticas y los sistemas de ecuaciones y, finalmente en el tercer momento se trabajan las desigualdades, atendiendo los intervalos, desigualdades lineales y cuadráticas y, se cierra con una reflexi0on sobre la enseñanza y aprendizaje del pensamiento algebraico.

En el l primer momento – Unidad de aprendizaje I – se mencionan las competencias genéricas, profesionales y disciplinares, explicitándose lo que debe alcanzar cada estudiante al finalizar este curso, ahora bien, en cuantos los propósitos de esta unidad se tienen que:

- ✓ Que el estudiante recurra a las propiedades de los números reales para resolver problemas de expresiones algebraicas y sus operaciones, mediante la aplicación de estrategias de la aritmética y el álgebra.
- ✓ Que el estudiante demuestre habilidades para trabajar con los números reales, mediante el reconocimiento, la caracterización y la relación entre sus propiedades, para resolver problemas que involucren expresiones algebraicas y sus operaciones.

2.3.2. Sentido numérico

Al igual que el curso anterior este se encuentra ubicado en el primer semestre de la carrera, en el que, según la SEP (2018), se espera logren avanzar en el desarrollo de las competencias relacionadas a este curso.

Los propósitos del curso son:

- ✓ Que el estudiante consolide los procesos de lectura, construcción y análisis de los sistemas de numeración y así llegar al teorema fundamental de la aritmética y las propiedades de divisibilidad para aplicarlos en la solución de problema.
- ✓ Que el estudiante adquiera gusto por los retos que ofrecen los problemas numéricos s partir de escuchar y analizar los argumentos de sus compañeros en su propia construcción para la elaboración de conjeturas.

- ✓ Que el estudiante reconozca los procesos de enseñanza y aprendizaje que tienen lugar en las aulas de la formación inicial a través de la reflexión de sus propios procesos de aprendizaje y de los procesos de enseñanza del docente para identificar el posible impacto en el desarrollo de los aprendizajes en la educación obligatoria.

La estructura de este curso también está dividida en tres momentos: primero se abordan los sistemas de numeración como el decimal, sexagesimal y el maya, además la construcción de los números naturales mediante inducción y por otro lado, el teorema fundamental de la aritmética y las propiedades de la divisibilidad; en el segundo momento se estudian los números enteros, racionales y sus construcciones, además las razones y proporciones y; finalmente en el último momento se presentan las progresiones aritméticas y geométricas. También se cierra con una reflexión sobre el aprendizaje y la enseñanza del sentido numérico.

En las tres unidades de aprendizaje se aborda el estudio de los números enteros y racionales; de manera general los propósitos están guiados a que los estudiantes caractericen los sistemas numéricos más usados, a través del reconocimiento de las propiedades y relaciones que permanecen invariantes entre ellos, aplicar estrategias de aritmética y álgebra, reflexión sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de estos números.

Al revisar estos dos cursos que son los que hacen mención, de manera explícita, sobre la apropiación de los números; en el primer curso – Unidad I – refiriéndose a los números reales y en el segundo curso – en las tres unidades – refiriéndose a los números enteros y racionales. A a pesar de que en los dos cursos se hace mención sobre *propiedades* estas aluden a las que se relacionan con su estructura algebraica, es decir, propiedades para las operaciones. Lo anterior es un aspecto preocupante, ya que, al revisar los programas curriculares para los estudiantes de tercer grado de secundaria, se observa que se solicita que los estudiantes comprendan las propiedades que tienen que ver con la comprensión del número real, siendo más específicos la propiedad de densidad. Por último, los significados asociados al número real identificados en los programas curriculares para la formación de profesores son: el aritmético y el algebraico.

2.4. Referente didáctico: Teoría de los significados sistémicos (TSS)

El primer acercamiento que tiene un escolar con las matemáticas es a través del número; ya en casa, desde sus primeros años tiene *noción* de los números 1, 2, 3 (y muchos), para luego en preescolar concebir más números (del cero al diez) como cantidades, ordenándolos primero para luego reconocerlos a través de asociaciones con objetos. Por ejemplo, *tres* manzanas se relacionan con el número «3» y también con *tres* gatos.

Siguiendo el modelo teórico (Godino y Batanero, 1998; Godino, 2002) que parte de la noción de situación-problema, se considera el *significado* de un objeto matemático como una entidad compuesta, formada por el conjunto de prácticas operatorias y discursivas relacionadas con dicho campo de problemas, diferenciando entre el *significado institucional* y el *personal*. A continuación, se exploran los componentes o elementos de significado que, de acuerdo con Batanero (2005), son de utilidad en el análisis de respuestas a una tarea matemática, o bien de un proceso de enseñanza o de aprendizaje.

1. *El campo de problemas de los que emerge el objeto*. Los problemas con los que trató la humanidad para alcanzar el concepto de número se remontan a la antigüedad y tal vez sea de manera paralela a nuestra existencia y el enigma es si empezó con los números cardinales (uno, dos, tres…) o bien, ordinales (primero, segundo, tercero…), esto porque, de acuerdo con Mario Livio, "… algunos antropólogos sugieren que los números pudieron hacer su aparición en la historia a partir de algunos rituales que requerían la aparición sucesiva de individuos (en un orden específico) durante las ceremonias. Si esto fuera cierto, la idea nos sugiere que el concepto de número ordinal podría haber precedido al cardinal" (Livio, 2011, p. 19-20).

De haber *ordenado* y luego *contado*, la humanidad asoció más tarde –el número– con la *medida*. En la escuela se evidencian de manera explícita los usos de "contar" y "medir" con la noción de número desde los primeros años de escolaridad. "Ordenar" se emplea de manera implícita al sugerir que "uno *es* primero", "dos *es* segundo", "tres *es* tercero" y así sucesivamente, reconociendo además que los primeros números en aparecen fueron los *naturales,* los cuales –se afirma– se usan para contar: 1, 2, 3, 4… (aunque algunos autores consideran al *cero* como el primer elemento de los números naturales).

2. *Elementos lingüísticos*. Los números en su construcción histórica han evolucionado y su notación ha sido de lo más variada. Desde los números en babilonia, pasando por los egipcios, romanos y mayas, por mencionar algunos, la humanidad tuvo que lidiar con la escritura y la representación de los números, amén de reconocer el valor posicional como con el que contamos hoy día, destacando que su origen data de más de dos mil años, hallándose en inscripciones budistas, que más tarde los árabes retomaron.

Anne Rooney (2010) asegura que "La difusión de los numerales indios por Oriente Medio quedó asegurada por dos textos muy importantes producidos en la Casa de la Sabiduría: *Sobre el cálculo numerales hindúes*, del matemático persa al-Khwarizmi (hacia 825), y *Sobre el uso de los numerales indios*, del árabe Abu Yusuf Yaqub ibn Ishaq al-Kindi (830)". Sabemos que Occidente continuó trabajando con los números indo-arábigos y son con los que nos familiarizamos, máxime que otros símbolos se han agregado y han conseguido aproximar la matemática a un lenguaje, con su sintaxis, semántica y pragmática.

3. *Procedimientos y algoritmos*. La adición y la multiplicación son las operaciones que definen a los números reales; no obstante, en la enseñanza se usan también la sustracción, división, potenciación y radicación, asegurando incluso que, la *adición* y la *sustracción* son operaciones inversas, lo mismo que sucede con la *división* y la *multiplicación* y, con la *radicación* y *potenciación*, hechos que los estudiantes consiguen aceptar, pero no así al operar, puesto que evidencian dificultades al sumar, por ejemplo $3 + (-5)$, o bien, dividir $0.32 \div 2.01$.

En este sentido, es importante mencionar que los alumnos de –prácticamente– todos los niveles, muestran deficiencias al realizar operaciones con fracciones. Al respeto, Hans Freudenthal comenta que "No se puede negar que la didáctica de las fracciones está caracterizada por tendencias unificadoras. Por regla general, los números naturales se enfocan desde varias perspectivas. Cuando llega el turno de las fracciones, se supone que los alumnos están lo suficientemente avanzados como para quedarse satisfechos con un único enfoque de la realidad. Desde mi punto de vista, este supuesto erróneo es la razón por la que las fracciones funcionan mucho peor que los números naturales y por la que mucha gente nunca comprende las fracciones" (Freudenthal, 2001, p. 2-3).

4. *Las definiciones y propiedades de los objetos y sus relaciones con otros objetos matemáticos*. Definir *qué es un número* resulta una tarea bastante compleja y al mismo tiempo, necesaria. Si bien

es cierto, en este breve apartado no se realizará, sí procuraremos dentro de las propiedades, la de *densidad* de los números reales que *grosso modo* se lee: "entre dos puntos racionales cualesquiera a y b existe una infinidad de otros puntos racionales (Courant y Fritz, 1999, p. 29).

La propiedad de densidad tiene relación directa con otros conceptos matemáticos como *intervalo*, *límite*, *sucesiones*, *series* y *funciones*, por mencionar algunos, motivo por el cual resulta importante atender vía la enseñanza y comprender a través del aprendizaje dicha propiedad, la cual está explícita en los programas del nivel secundaria en México (véase SEP, 2018).

5. *Los argumentos y demostraciones*. En la enseñanza de las propiedades de los números reales, regularmente se hace alusión a las propiedades operatorias que sin duda son importantes para comprender la estructura matemática, apareciendo la *propiedad de densidad* –en el mejor de los casos– enunciada advirtiendo que, *entre dos números reales, habrá siempre otro número real*, lo cual para el nivel secundaria e incluso, bachillerato se "prueba" calculado el punto medio entre los dos puntos cualesquiera.

Pensemos en dos números próximos, uno de otro: $\frac{33}{9}$ y $\frac{27}{7}$, uno de esos infinitos números a los que hacemos referencia con el enunciado de la propiedad es, el que está justo a la mitad, calculándose con el punto medio, es decir, la *mitad de la suma de ambos*, resultando $\frac{79}{21}$, número que se ubica justo a la misma distancia de los dos números propuestos en el ejemplo

2.4.1. Significados históricos del número real

Después de haber realizado la aproximación histórica del concepto de número real y de la teoría intervalar desde siglo V a. C. hasta el siglo XX, abordando las dos crisis de los fundamentos de las matemáticas (magnitudes inconmensurables y la fundamentación del análisis), es posible identificar sus significados, los cuales han sido diferentes, reflejando así las diversas concepciones que subyacen en la solución de situaciones problemáticas de la vida real, las cuales se relacionan con las actividades de medir, contar y ordenar que, según Recalde (2011), son sintetizadas con la constitución objetiva del conjunto de los números reales. Se determinan entonces cinco significados históricos, los cuales se relacionan entre sí.

1. Significado aritmético del número real

Este significado se enmarca en las antiguas civilizaciones ubicadas en el Oriente, Oriente medio y Mesoamérica como lo son; china, babilónica, egipcia, griega, india, árabe y Maya, las cuales utilizaban los números para cálculos aritméticos, ante situaciones relacionadas con cantidades, partición de longitudes, medición del tiempo, comercio, o situaciones astronómicas, entre otras.

Estas civilizaciones crearon sistemas de numeración que les permitían representar cantidades y realizar operaciones matemáticas. Por ejemplo:

- ✓ La antigua civilización china utilizaba el sistema decimal y desarrolló los caracteres numéricos que conocemos actualmente, como los números del 0 al 9. También emplearon la vara de cálculo, un instrumento que permitía hacer cálculos aritméticos y geométricos.
- ✓ Los babilonios, en la antigua Mesopotamia, empleaban un sistema de numeración sexagesimal, basado en el número 60. Este sistema influyó en la medición del tiempo (60 segundos en un minuto, 60 minutos en una hora) y en la división de los círculos en grados, minutos y segundos.
- ✓ Los egipcios utilizaron un sistema de numeración decimal, que incluía símbolos para las potencias de 10. Empleaban estos números para realizar cálculos relacionados con la construcción de pirámides, la medición de tierras y otros fines prácticos.
- ✓ En la antigua Grecia, se empleaban letras del alfabeto para representar números. Esta notación numérica se utilizaba en matemáticas y astronomía, y algunos de los primeros matemáticos griegos, como Pitágoras y Euclides, desarrollaron teorías y conceptos fundamentales en aritmética.
- ✓ La antigua India fue el lugar de origen del sistema de numeración decimal que utilizamos hoy en día, también conocido como sistema indo-arábigo. Este sistema emplea diez símbolos numéricos (0 al 9) y el valor posicional para representar cualquier cantidad.
- ✓ Los árabes, que heredaron el sistema numérico de la India, jugaron un papel crucial en la difusión y adopción de este sistema en Europa en la Edad Media. El sistema decimal

posicional, junto con el concepto del cero, revolucionó la aritmética y las operaciones matemáticas en todo el mundo.

- ✓ La civilización maya en Mesoamérica desarrolló un sistema de numeración vigesimal, basado en el número 20. Utilizaban símbolos para representar cantidades y realizaban cálculos matemáticos avanzados, como el cálculo de calendarios y la astronomía.

Estas civilizaciones contribuyeron significativamente al desarrollo de la aritmética y la utilización de los números para realizar cálculos en diferentes contextos. Sus sistemas numéricos y conocimientos matemáticos sentaron las bases para los avances posteriores en la aritmética y la matemática en general.

2. Significado geométrico del número real

Es de suma decir que los tres problemas iniciales, provenientes de la antigüedad griega, corresponden a problemas de medida, los cuales son: la cuadratura del círculo, la duplicación del cubo y la trisección del ángulo. El hecho de ver a los números como cantidad discreta, proveniente de la escuela pitagórica, condujo a la diferenciación entre número natural, racional e irracional, puesto que, defendían la idea de que los números para contar eran suficientes para medir, hecho que fue refutado con la aparición de las magnitudes inconmensurables.

Como se puede ilustrar, el concepto de número real está inscrito al proceso de medir, resultando así magnitudes conmensurables o inconmensurables respecto a la unidad, relacionándose con números racionales o irracionales; y si se trata de contar, entonces se relaciona con números naturales. Las representaciones presentes son verbales, geométricas y simbólicas.

El significado geométrico del número real está relacionado con su representación en un espacio geométrico, como la recta numérica o el plano cartesiano. La geometría proporciona una forma visual de comprender y relacionar los números reales en términos de posición, distancia y magnitud.

Algunos conceptos geométricos asociados al número real son, por ejemplo: la recta numérica pues esta es una representación geométrica de los números reales, además ayuda a visualizar la relación de orden y la magnitud de los números reales; otro concepto es el de coordenadas en el plano cartesiano, los números reales sirven para representar las coordenadas de puntos en un sistema de ejes; Longitud y magnitud, El número real se relaciona con la longitud y magnitud en la geometría. Por ejemplo, si consideramos un segmento de la recta numérica entre dos puntos, la longitud de ese segmento se puede representar mediante un número real. La magnitud de un vector también puede representarse mediante un número real, donde la dirección se expresa mediante un ángulo. Otros conceptos relacionados son escalas y proporciones, desplazamientos y traslaciones, entre otros.

En resumen, el significado geométrico del número real se refiere a su interpretación y aplicación en el contexto de la geometría. Las representaciones geométricas, como la recta numérica y el plano cartesiano, permiten visualizar y comprender la posición, la magnitud y las relaciones espaciales de los números reales. La geometría proporciona una perspectiva visual y espacial que enriquece nuestra comprensión de los números reales.

3. Significado algebraico

La aparición de los números irracionales se da en la antigua Grecia, el concepto madura a través de los años a partir del siglo XIX, no se presenta una definición formal, sin embargo, se realizan trabajos con los números trascendentes, como por ejemplo π que sirvieron de base para demostrar su naturaleza irracional.

Cuando se piensa al número real dentro de un ámbito algebraico lo enmarcamos entre estructuras abstractas y las relaciones entre ellas.

Algunos conceptos algebraicos asociados al número real son:

- ✓ Operaciones algebraicas: Los números reales se pueden sumar, restar, multiplicar y dividir entre sí utilizando las operaciones algebraicas básicas. Estas operaciones siguen

las reglas y propiedades algebraicas, como la conmutatividad, la asociatividad y la distributividad.

- ✓ Expresiones algebraicas, ecuaciones y desigualdades: Las expresiones algebraicas están compuestas por números reales, variables y operaciones algebraicas. Pueden incluir términos constantes, términos lineales, términos cuadráticos, entre otros. Las expresiones algebraicas se utilizan en la representación y manipulación de fórmulas, ecuaciones y desigualdades.

4. Significado matemático formal

Este significado es concebido a finales del siglo XIX a través de las construcciones formales de los números reales, el número real como objeto matemático tardó más de veintidós siglos en formalizarse, es decir, en otorgar un sentido de existencia y realidad matemática.

En ese tiempo, varios matemáticos realizaron construcciones formales para definir los números reales. Estas construcciones, como las propuestas por Dedekind, Cantor y Bachmann, permitieron establecer una base sólida y un sentido de existencia matemática para los números reales.

- ✓ En la construcción de Dedekind, los números reales se representan mediante cortaduras (o secciones) en el conjunto de los números racionales. Cada número real se asocia con un conjunto de números racionales que están "por debajo" o "por encima" del número real.
- ✓ En Cauchy, los números reales se representan como sucesiones infinitas de números racionales que convergen hacia un límite. Cada número real se representa por una sucesión de números racionales que se acercan cada vez más al número real deseado.
- ✓ En la construcción de Cantor, los números reales se representan mediante intervalos encajados, que son conjuntos de números racionales que contienen al número real deseado. Estos intervalos se construyen de manera recursiva, dividiendo intervalos más grandes en intervalos más pequeños.

- ✓ En la construcción de Bachmann, los números reales se representan mediante aproximaciones con intervalos encajados. Se utilizan intervalos que se superponen progresivamente y se estrechan para obtener una aproximación precisa del número real.

En todas estas construcciones, la representación simbólica de los números reales se realiza utilizando letras, ya sea del abecedario o letras griegas, dependiendo de la convención utilizada.

En resumen, teniendo en cuenta que en la actualidad existen más de 20 construcciones del número real, las representaciones utilizadas en las construcciones formales difieren entre sí, pero todas convergen en representaciones simbólicas. Estas construcciones permitieron establecer una base rigurosa y formal para los números reales, otorgándoles un sentido de existencia y realidad matemática

5. Número real como intervalo encajado

Este último significado nace del significado anterior, *significado matemático formal*, además está estrechamente relacionado con los otros tres significados; vinculado a las construcciones formales hechas por Cantor y Bachmann, tiene sus principios con el método de exhaución hace más de 2.500 años.

Este enfoque de representación de los números reales a través de intervalos se basa en el concepto de encajamiento de intervalos, donde cada intervalo contiene a otros intervalos más pequeños, de manera que se puede describir un número real como un *límite* o una *convergencia* de intervalos.

Este enfoque intervalar es una herramienta útil en la enseñanza y comprensión de los números reales, especialmente en el contexto de la propiedad de densidad de los números reales. La propiedad de densidad establece que entre dos números reales siempre existe otro número real. Al representar los números reales mediante intervalos encajados, se puede visualizar esta propiedad de manera *intuitiva*, ya que siempre hay intervalos más pequeños que se pueden colocar entre dos intervalos dados.

La representación intervalar utiliza la notación de intervalos, como se mencionó anteriormente, y el lenguaje simbólico para describir los intervalos y las relaciones de inclusión entre ellos. Esta representación es útil para describir rangos, límites y conjuntos de números reales de manera clara y concisa.

En resumen, el significado intervalar del número real surge del significado matemático formal y las construcciones realizadas por matemáticos como Cantor y Bachmann. Proporciona una forma alternativa de representar los números reales mediante el encajamiento de intervalos, permitiendo una comprensión intuitiva de la propiedad de densidad y utilizando la notación intervalar y el lenguaje simbólico para su representación.

SÍNTESIS DE LOS SIGNIFICADOS HISTÓRICOS DE LOS NÚMEROS REALES

En la siguiente tabla se presenta una síntesis de los significados históricos del número real, que como se puede observar todavía están inmersos y son utilizados en la práctica y en la enseñanza.

Tabla 1.

Síntesis de los significados históricos del número real (Elaboración propia)

SIGNIFICADOS DEL NÚMERO REAL	CAMPOS DE PROBLEMAS	ALGORITMOS Y PROCEDIMIENTOS	ELEMENTOS LINGÜÍSTICOS	DEFINICIONES Y PROPIEDADES	ALGUNOS CONCEPTOS RELACIONADOS
ARITMÉTICO	Problemas de la vida real y ecuaciones Problemas de tipo astronómico, comercial y de medición	Cálculos aritméticos y algebraicos, operaciones	Simbólico Expresiones en forma de fracción, expresiones con radicales	Reglas para la suma, resta, multiplicación y división	Medida, magnitud, ecuaciones, número, cantidad, ordenar
GEOMÉTRICO (NÚMEROS REALES COMO MAGNITUDES)	Cuadratura del círculo, duplicación del cubo, trisección del ángulo, diagonal del cuadrado	Cálculos de medidas, segmentos conmensurables e inconmensurables	Verbales y geométricas, uso de la retórica, dibujos para representar expresiones	Propiedades de las magnitudes, recta numérica	Algoritmo de Euclides, división de segmentos, distancia, ángulo, recta
ALGEBRAICO	Necesidad de demostrar la trascendencia	Representaciones de números irracionales	Notación simbólica, notación decimal, fracciones continuas	Unidad-medida unidad-mónada	Concepto de incógnita como cantidad desconocida, cuadrado, ecuación
FORMAL	Teorías formales	Interpretación geométrica de la recta, operaciones con números racionales	Cortaduras representación letras griegas, secesiones, intervalos encajados	Propiedades de los números racionales, base aritmética del análisis y el álgebra	Cortaduras, sucesiones, intervalos, convergencia
INTERVALAR	Problemas de representación	Manipulación de errores de truncamiento	Intervalos encajados	Relación de orden propiedad de densidad	Cálculo de una buena estimación, diferencia entre sus extremos, relación de orden

CAPÍTULO 3. MÉTODO

Enfoque metodológico:

El desarrollo de este trabajo está enfocado en el método cualitativo, pues se centra en la descripción, la interpretación y análisis de las experiencias de los profesores en formación luego de hacer la implementación de una propuesta de aula (Hernández, Fernández y Baptista, 2014).

Esta investigación es un estudio de caso, puesto que se trabaja con un grupo de cinco estudiantes normalistas, los cuales brindan información muy valiosa susceptible de análisis, el cual está apoyado de un marco teórico-metodológico.

Desarrollo metodológico:

- Fase 1. Análisis epistémico-didáctico: En esta primera fase se hace una exploración de los referentes teóricos. Primero, una búsqueda histórica de los componentes más notables en la construcción de los números reales; que comprende la crisis de los fundamentos de las matemáticas, en los pitagóricos siglo V a.C. y en el siglo XIX con la fundamentación del análisis, para reconocer los elementos didácticos que posibiliten su aplicación y para identificar los significados de este conjunto numérico a través de la historia. Posteriormente se realiza un estudio de los referentes matemáticos más relevantes en la construcción de los números reales en el marco de una propuesta intervalar expuestos por Cantor y Bachmann para el rediseño de una propuesta de aula. Finalmente, se realiza un análisis de los referentes didácticos y curriculares con el objetivo de identificar las orientaciones teóricas y metodológicas que propone la Secretaría de Educación Pública (SEP), aspecto que se relaciona con los significados institucionales.

- Fase 2. Análisis de significados personales mediante una entrevista clínica: De acuerdo con los referentes teóricos se identifican los significados que le atribuyen los profesores en formación sobre el número real y la propiedad de densidad. Esta fase se divide a su vez en tres etapas las cuales son:

  Etapa de diseño: con el propósito de identificar los significados que tienen los profesores en formación sobre los números reales y su propiedad de la densidad, se

toma como técnica de recolección de datos a la entrevista clínica y como instrumento al cuestionario. Este consta de dos tareas, la primera tarea está conformada por tres ítems y la segunda tarea de nueve ítems. La tarea 1 consiste en que el profesor en formación, de acuerdo con sus conocimientos, trate de definir qué es un número natural, entero, racional, irracional y real, mencionando algunas de sus características. Además, que dé algunos ejemplos de cada conjunto numérico. La tarea 2 consiste en que el docente en formación de respuestas a preguntas que tratan de indagar sobre sus significados acerca de la propiedad de densidad de los números reales, sus intuiciones donde haga referencia a cantidades infinitamente pequeñas y algunas operaciones de los números reales.

Para el diseño de los ítems se tomaron como referentes:

- ✓ Las Concepciones de los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas sobre los Números Reales por Mora, L. & Torres, J. (2007) y los cuestionarios que las autoras diseñaron para identificar dichas concepciones.
- ✓ El plan y programas de estudio de la Licenciatura en Enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas de la ENSEM.
- ✓ El Estudio Previo del Diseño a un Cuestionario por Sara Scaglia, S. (2000); que corresponde al capítulo tres de su tesis doctoral "Dos conflictos al representar los números reales en la recta" de la universidad de Granada.

En este orden de ideas los ítems de la entrevista clínica se diseñaron de acuerdo con el establecimiento de las siguientes variables a observar con el estudiante (profesor en formación):

1. Representación de un número real: específicamente las representaciones simbólicas, geométricas y verbales descritas en el apartado. Mora, L. & Torres, J. (2007). P.139.
2. Situaciones de aproximación: la selección de esta variable es con el propósito de estudiar las intuiciones del profesor en formación donde haga referencia a cantidades infinitamente pequeñas. Scaglia, S. (2000) P. 203.

3. Situaciones asociadas al concepto de número real: en relación con el por qué (procesos referentes al origen) y para qué (procesos referentes al uso) de los números reales. Mora, L. & Torres, J. (2007). P. 139
4. Definición de los números reales y su propiedad de la densidad: en relación con enunciado no relacionado con alguna definición, utilizando expresiones del lenguaje común (EC). Mora, L. & Torres, J. (2007). P. 212.

Etapa de instrucción y aplicación: La entrevista se desarrolló el jueves 30 de mayo del 2020 sin contratiempos, fue llevada a cabo con una estudiante perteneciente al segundo semestre de la Licenciatura en Enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas de la Escuela Normal Superior del Estado de México (ENSEM), que en el momento están llevando, entre otros cursos, álgebra y funciones, de acuerdo con el plan 2018 de las Escuelas Normales del país. Como antecedentes del primer semestre, tienen tres cursos: pensamiento numérico, pensamiento algebraico y pensamiento geométrico. La entrevista se inició con un cálido saludo, contextualizando a la estudiante de la entrevista a desarrollar.

Etapa de análisis: el análisis se desarrolla en tres partes. En la primera parte se identificaron las tipologías a analizar, en la segunda parte se relacionaron los datos con las tipologías y en la tercera parte se buscaron patrones dentro de las tipologías, sus relaciones y generalizaciones, para finalmente, mediante las categorías o elementos suministrados por la TSS se identifican los significados personales atribuidos al concepto de número real y su propiedad de densidad.

- Fase 3. Implementación de una propuesta de aula: Se implementa la propuesta de aula a un grupo de cinco profesores en formación de tercer semestre de la Licenciatura en Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas de la Escuela Normal Superior del Estado de México de la generación 2018 - 2022.
- Fase 4. Discusión y Análisis de los resultados: En esta última fase se hará una revisión de las respuestas que los estudiantes ofrecen durante el desarrollo de las partes que conforman la propuesta de aula enmarcada al acercamiento de la propiedad de densidad de los números reales a través de la representación intervalar. Este análisis se establece a través de las categorías que brinda la TSS.

CAPÍTULO 4. RESULTADOS Y ANÁLISIS

Los resultados y análisis de esta investigación se establecen desde la aplicación de una entrevista clínica que permite indagar sobre los significados que tienen los profesores en formación sobre el número real y su propiedad de densidad, a partir de ello se implementa el rediseño de una propuesta de aula elaborada por García (2017) encaminada al acercamiento de la propiedad de la densidad de los números reales ante situaciones que implican la representación intervalar. En este capítulo se presentan los resultados obtenidos de la aplicación de la entrevista clínica y de la implementación de la propuesta de aula, seguido de las conclusiones. Es importante mencionar que, para efectos de la presente investigación se implementan las cinco primeras partes rediseñadas de la propuesta de aula de García (2017), puesto que las dos últimas están orientadas hacia las operaciones con intervalos, además el análisis, tanto de la entrevista como de la propuesta, se hacen bajo la *Teoría de los significados sistémicos* (TSS) que es entendida como una propuesta teórica-metodológica que, junto con sus categorías de análisis – *elementos del significado*- permite enriquecer el análisis del significado de los objetos matemáticos, en este caso, el número real y su propiedad de densidad inmerso en una actividad matemática en particular.

4.1. Entrevista clínica: análisis

Para el desarrollo del análisis se establecieron cuatro tipologías, a saber:

1. Representación del número real
2. Situaciones de aproximación
3. Definición de número real y su propiedad de densidad
4. Situaciones asociadas al concepto de número real

Tipología 1. Representación del número real:

Particularmente en matemáticas, al trabajar con números –que son entes abstractos– es necesario buscar medios que permitan manipularlos y han sido las representaciones una de las maneras más eficaces que nos han permitido como humanidad, no solo manipularlos, sino conseguir con ellos el desarrollo de la ciencia y la tecnología. En este sentido, Rico (2009) asegura que:

> Representar es atribuir significado, ubicarse en un sistema. El concepto no es algo externo, objetual, sino un significado que ocupa el centro de un espacio semántico. El principio de realidad no es la representación de una exterioridad física o de una idea trascendente, sino la representación de un espacio semántico en el que las palabras y los signos, disputando su sentido, se hacen cargo del mundo, dibujan en él fuerzas, fijan sus núcleos a través de un juego de análisis y síntesis. La representación no es una mera imagen especular, sino que toma sentido dentro de un sistema de significados y relaciones.

Ante lo anterior, es de particular interés para este trabajo conocer las representaciones que un estudiante del nivel superior –que se preparará para enseñar matemáticas en el nivel básico– posee con respecto a los números reales, además de averiguar los significados que les otorga a dichas representaciones.

Para lo anterior, se plantearon tres ítems (6, 8 y 9) que buscan atender e indagar los significados que el profesor en formación tiene del número real, los cuales a continuación se exponen:

Ítem 6. Responde verdadero (V) o falso (F) y justifique su respuesta.

a) A un punto de la recta le corresponde un número real y viceversa.

b) Se pueden marcar en la recta todos los números racionales y quedan sobrando algunos puntos.

El diálogo que se generó a partir de este ítem es el siguiente:

Sea M la entrevistadora y sea E el entrevistado -profesor en formación-

*M: Ahora, responde verdadero (**V**) o falso (**F**) y justifica tu respuesta. A un punto de la recta le corresponde un número real y viceversa.*
E: Sí
M: ¿Por qué?
E: ¿Cuándo dices viceversa te refieres a un número irracional?
M: Es decir, si eliges un punto de la recta le podrás asignar un número real y si eliges un número real lo podrás ubicar en un punto sobre la recta

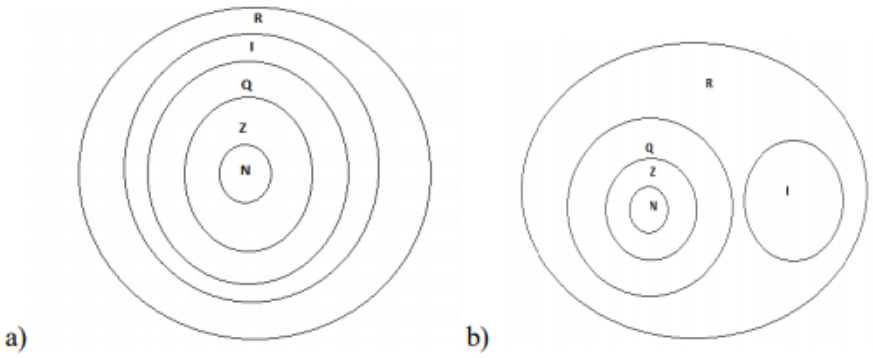
E: Sí, los números reales llenan la recta numérica

M: Ahora la «b»: se pueden marcar en la recta todos los números racionales y quedan sobrando algunos puntos.

E: (lee la pregunta dos veces), claro, mmm… en todo caso me quedarían los espacios de los números naturales, pero tengo una duda, si correspondería, por ejemplo $\frac{3}{3}$ *que sería igual* 1 *o* $\frac{9}{3}$ *que sería igual a* 3 *que es otro número entero, entonces la respuesta sería verdadera y los espacios que quedan sobrando son los enteros y los naturales.*

Son interesantes las respuestas que el profesor en formación expone, las cuales conducen a sospechar que establece una correspondencia uno a uno. Al respecto, Coritat y Scaglia, (2000) establecen que, aunque la biyección de punto-número aparentemente describa un simple emparejamiento de todos y cada uno de los números reales aún tenemos que resolver la cuestión de la atribución de etiquetas numéricas a los puntos y esto constituye un problema que no es exclusivamente procedimental, sino también conceptual.

Ítem 8. M: Considera los siguientes diagramas de Venn y decida si son correctos o no



E: Yo creo que la b es la correcta

M: ¿Y la «a» por qué no?

E: Porque los números irracionales no pueden contener a todos los números reales, racionales, enteros y naturales

M: ¿Y la «b» por qué sí?

E: Porque los números reales son el conjunto de los números racionales, enteros y naturales más los irracionales.

Es notorio que el profesor en formación conoce los números reales representados como conjuntos numéricos, herencia de años de escolaridad, seguramente; además de que se puede advertir que estos diagramas son vistos en libros de texto y que en la enseñanza son reproducidos por los docentes, hechos que denotan la clara idea de que los números reales son únicamente comprendidos como la unión entre diferentes conjuntos de números, siendo éstos, los naturales, enteros, racionales e irracionales.

Ítem 9. Representa en la recta numérica y menciona entre qué números enteros se encuentran los siguientes números:

a) $\sqrt{2} + \sqrt[3]{5}$

b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\frac{7}{2}$

d) $\frac{12}{3}$

e) -3

E: (desarrolla la pregunta en el software de Geogebra)

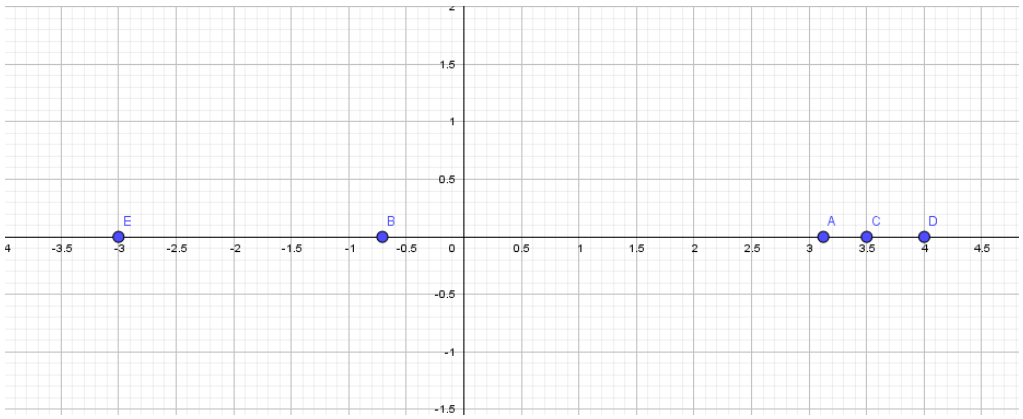


Figura 1. Ubicación de números

E: $\sqrt{2} + \sqrt[3]{5}$ *se encuentra entre los números* 3 *y* 4

$-\frac{\sqrt{2}}{2}$ *se encuentra entre los números* 0 *y* -1

$\frac{7}{2}$ *se encuentra entre los números* 3 *y* 4

$\frac{12}{3}$ *se encuentra entre los números* 3 *y* 5

-3 *se encuentra entre los números* -2 *y* -4

Los cinco incisos son respondidos de manera correcta y la representación en la recta también es atinada, máxime que *Geogebra* facilita la ubicación de los puntos al ser introducidos en el software. Esto evidencia un buen manejo con los números reales a nivel operatorio y hasta cierto punto una comprensión sobre la relación de orden entre expresiones con números irracionales, enteros, racionales y naturales.

Tipología 2. Situaciones de Aproximación:

Referencia a cantidades infinitamente pequeñas.

E: (realiza las operaciones)

7. Calcula las siguientes operaciones:

Figura 2. Operaciones realizadas por el profesor en formación

Al solicitarle al profesor en formación realizar operaciones que involucran números irracionales, para las cuales tenía que llegar a aproximaciones con números decimales, es notorio al mirar que, hace caso omiso a dicho proceso; además de que se observa que en el inciso (c) realiza una operación de manera incorrecta al sumar $4 + 3\sqrt{2} - \pi$, obteniendo $7\sqrt{2} - \pi$, agrupando los números enteros de los dos primeros sumandos.

De igual manera, se observa otro error en el inciso (d) al multiplicar $\sqrt{5} \cdot \sqrt{3}$, obteniendo $2\sqrt{2}$ que es distinto al resultado correcto $\sqrt{15}$, para el cual tuvo que aplicar la ley de los radicales que dice $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$, y que al sustituir nos resulta $\sqrt[2]{5} \cdot \sqrt[2]{3} = \sqrt[2]{15}$ que se aproxima a 3.87298334621 con infinitos decimales no periódicos.

Tipología 3. Definición de número real y su propiedad de densidad:

Para una mayor claridad, esta tercera tipología se divide en dos, por un lado, está la *definición de número real* y, por otro, la *propiedad de densidad*, las cuales estarán atendidas por separado, considerando ítems específicos que convergen en la comprensión de otros objetos matemáticos, como continuidad y límite, por mencionar algunos.

a) Definición de número real

Preguntas y respuestas de la tarea 1

M: De lo que has aprendido en la institución, define qué es un número natural E: Los números naturales podrían decirse que son todos los positivos, inician desde cero hasta infinito M: ¿El cero es un número natural? ¿por qué? E: Sí, porque desde allí parten

En algunos libros de divulgación científica, como el del prolífico matemático Ian Stewart, en su obra *Números increíbles*, aparece el número cero como el primer elemento del conjunto de los números naturales, sin duda es de llamar la atención este hecho que estriba entre lo matemático y lo filosófico.

Continuando con las preguntas…

M: ¿Qué es un número entero? *E: Mmm… puede decirse que serían todos los números desde el menos infinito hasta el infinito incluyendo obviamente a los negativos* *M: ¿qué es un número racional?* *E: Los números que por lo regular se representan con una fracción o un punto decimal* *M: ¿Será que el número* $\frac{\pi}{2}$ *es un número racional?* *E: Es un número irracional, porque* π *es un número irracional* *M: ¿Qué es un número irracional?*

E: (silencio por 5 segundos) son los números que por lo regular son periódicos como $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$ *o* π *aunque* π *no es periódico*

M: Dame un ejemplo de un número irracional periódico

E: $\sqrt{3}$ *o digo mejor* 0.333333 *... [E de acuerdo con la definición que da sobre los números irracionales da un ejemplo]*

M: ¿Y qué es número real?

E: Es la unión de todos los conjuntos

M: Ahora menciona 10 ejemplos de números naturales

E: (los escribe sobre la plataforma de zoom) $0, 1, 4, 6, 19, 67, 98, 3576, 2532, 342$

M: Menciona 10 números enteros

E: (los escribe sobre la plataforma de zoom) $-34, -45, -98, -34, 10, 67, 56, 23, 0, 78$

M: Menciona 10 números racionales

E: $\frac{4}{9}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{7}{3}$, $\frac{9}{2}$, $\frac{7}{6}$, 0.12, 0.70, 0.42

M: Menciona 10 números irracionales

E:$\sqrt{2}$, π, $\sqrt{3}$, $\sqrt{7}$, *e ¡no conozco más! [a pesar de que E define a los números irracionales como decimales periódicos pone como ejemplos a* $\sqrt{2}$, π, *sin embargo, reconoce la naturaleza de estos números, infinitos no periódicos]*

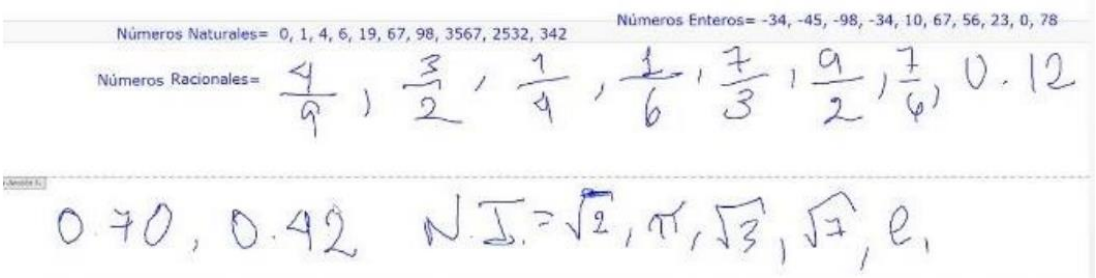


Figura 3. Ejemplos de números - entrevista clínica

Se evidencian algunos errores conceptuales de los números reales, en particular cuando se le pide que mencione un ejemplo de número irracional periódico, asegurando que se trata de $\sqrt{3}$, número que evidentemente no es $0.33333\ldots$ como lo advierte el profesor en formación. Incluso, se esperaba que rectificara su idea acerca de la definición de número irracional, al establecer que se trata de números que por lo regular son periódicos, cuando justamente no lo son y de ahí, la inconmensurabilidad que es el hito con el que en el siglo V a. C. inicia la travesía hacia la conquista de la fundamentación de los números reales.

M: Mira la tabla 1, marca con una X al conjunto o conjuntos numéricos a los que pertenece cada número, por ejemplo, miremos el número 1.$333\ldots$ *, a qué conjunto o conjuntos numéricos pertenece, ¿será un número natural? ¿entero? ¿racional? ¿irracional? o ¿real?*

E: (escribe las respuestas en la tabla)

Número	Natural	Entero	Racional	Irracional	Real
1,333…				X	
$-\sqrt{2}$				X	
$\frac{3}{4}$			X		
$\frac{\pi}{2}$				X	
1,7320508075…			X		
0	X	X			
$\sqrt{4}$	X				
-25		X			
$\frac{27}{3}$	X	X			

Figura 4. Tabla de conjuntos numéricos al que pertenece

Llama la atención que ninguno de los nueve números propuestos lo considere como número real, incluso y como se observa, para el primer caso que es racional, lo confunde con un irracional, esto debido, seguramente a que considera –como lo enunció– durante la entrevista que los números irracionales son decimales no periódicos.

Los siguientes tres casos son correctos, bajo la salvedad que tuvo que haber incluido también una marca X en (número) Real. Para el caso del cero, sin duda es ambiguo que aparezca en el conjunto de los números naturales, pero como ya se dijo, puede obedecer a que literatura de divulgación científica esté incidiendo en esta decisión.

M: ¿Por qué $\sqrt{4}$ *es natural?*

E: porque $\sqrt{4}$ *es igual a* 2

M: ¿Por qué $\frac{27}{3}$ *es natural y entero?*

E: porque al dividirlo me da 9 *y* 9 *es natural y es entero.*

Se observa que el estudiante normalista le otorga el estatus a $\sqrt{4}$ de número natural, descartando la pertenencia a otros conjuntos numéricos, como el de entero o racional, hecho similar que sucede con el último que efectivamente al dividir, resulta 3, mismo que puede ser considerado como racional, atendiendo a su definición como el *cociente de dos números enteros, siendo el denominador diferente de cero*; sin embargo, parece que la representación de 3 o de cualquier entero, como en el caso de 2 (raíz de 4), al parecer no lo interpreta como ese número dividido por uno.

Propiedad de la densidad

Tarea 2

La tarea 2 consiste en que el docente en formación dé respuestas a preguntas que tratan de indagar sobre sus significados acerca de la propiedad de densidad de los números reales, sus intuiciones donde haga referencia a cantidades infinitamente pequeñas y algunas operaciones de los números reales.

Preguntas y respuestas de la tarea 2

M: ¿Hay más números racionales que irracionales? Explica tu respuesta

E: Mmm… ¡esa es una buena pregunta!

M: Recuerda la definición que me diste de racionales y de irracionales [M alude a la definición que E le dio sobre números racionales e irracionales, para que, a partir de ello, responda la pregunta]

E: ¡Ajá! los racionales son la división de los números enteros, entonces podría decirse que hay más racionales que irracionales

M: ¿Por qué?

E: (Silencio por 3 segundos) Porque al dividir los números enteros, obtenemos demasiados números racionales

M: Y… ¿cuántos irracionales crees que hay?

E: Obviamente hay muchos, pero no creo que tantos como racionales

M: ¿Hay más números reales que racionales?

E: ¿Más números reales que racionales?... (lee la pregunta varias veces) sí claro, porque los reales es el conjunto de todos los conjuntos anteriores, por lo tanto, obviamente son más

E: ¡No! mmm… estoy pensando… (silencio por 8 segundos) yo creo que no puede haber una respuesta porque al final los números son infinitos, entonces tanto como definir si hay más números reales que racionales creo sería algo imposible obtener una respuesta.

Sin duda las preguntas plantean cuestionamientos que no sólo son propios de los escenarios escolares, sino más bien, son interrogantes ajenos a estos contextos, pertenecientes a las matemáticas y a la filosofía. De ahí que históricamente se ha generado un debate en torno al número como tal, como ente abstracto y luego con el cero, reconociéndolo como número y no solo como "nada" o "vacío".

Epistemológicamente, miramos a los números negativos que también tuvieron un momento de negación ante su aparición en escena (hacia el tercer milenio antes de nuestra era en la antigua China) al preguntarse si podría haber algo menos que nada, siendo este

dilema un conflicto con los estudiantes en sus primeros años de escolaridad al interactuar únicamente con los números naturales, incluyendo al cero.

M: Ahora encuentra un número racional y un número irracional que esté entre $\frac{1}{2}$ *y* $\frac{2}{3}$*, ¿será que hay?*

E: (toma una hoja de papel y dibuja la recta numérica) un número racional podría ser $\frac{5}{8}$

M: ¿Cómo hiciste para hallar $\frac{5}{8}$ *?*

E: Bueno, lo que hice fue dividir el entero entre $\frac{1}{2}$ *entonces vi que la diferencia que hay entre* $\frac{1}{2}$ *y* $\frac{2}{3}$ *solamente busqué un número que se encontrara en ese rango*

M: Ahora un número irracional que este entre $\frac{1}{2}$ *y* $\frac{2}{3}$

E: (trata de usar nuevamente la recta numérica para hallar el número) mmm… no encuentro un irracional, no sé si halla

M: ¿Cuántos números racionales hay entre $\frac{1}{2}$ *y* $\frac{2}{3}$ *?*

E: Infinidad de números racionales

M: ¿Por qué?

E: Porque entre más divisiones más se pueden ¡vamos¡ se pueden dividir de muchas formas, sería imposible contar, podríamos llegar hasta cincuenta… quinientos… mmm… ochocientavos (sic), entonces, habría muchísimos números racionales entre $\frac{1}{2}$ *y* $\frac{2}{3}$

M: ¿Hay muchos? pero… ¿será que son infinitos o en algún momento se acaban?

E: Sí, son infinitos, no se acaban

M: ¿Cuántos números irracionales puede haber entre $\frac{1}{2}$ *y* $\frac{2}{3}$ *?*

E: Pues es que va ligada a la otra pregunta ¡¿no?! Si no pude encontrar uno entonces… encontrar varios sería complicado

M: Entonces… ¿no hay números irracionales entre $\frac{1}{2}$ *y* $\frac{2}{3}$ *?*

E: No

M: ¿Por qué?

E: Mmm… haber… (silencio por 3 segundos) espera, estoy pensando… (silencio por 3 segundos) no, no hay
M: ¿Por qué crees que no hay?
E: Porque la diferencia es muy pequeña, entonces no hay

Al sugerirle al profesor en formación hallar números entre dos racionales, sus respuestas son afirmativas, reconociendo que es posible hallar más números, declarando incluso que "hay infinitos y no se acaban"; empero, al preguntar sobre la existencia de números irracionales entre dos racionales, su respuesta es un contundente ¡no! y justifica diciendo que "la diferencia es muy pequeña, entonces no hay".

En este sentido se aprecian dos situaciones, una relativa a la definición equívoca de número irracional que posee y, la otra, y por consecuencia, al significado sobre el número real que evidencia en sus diferentes respuestas.

Tipología 4. Situaciones asociadas al concepto de número real:

En relación con el por qué (procesos referentes al origen) y para qué (procesos referentes al uso) de los números reales.

M: Los números naturales son utilizados; por ejemplo, para contar; los números racionales para medir, y ¿los números irracionales para qué me sirven?
E: (lee la pregunta dos veces) Los irracionales podría decirse que, mmm… es que son números que se encuentran, que podemos usar para no utilizar tantos, que no existe su fin, por así decirlo, como es el número π, entonces digamos que es una forma de representarlos sin causar tantos problemas sobre todo en la solución de operaciones, por ejemplo, si tenemos, no es lo mismo decir $\sqrt{2x}$ perdón $(\sqrt{2})(x)$ que decir cuánto vale $\sqrt{2}$ por x [E alude a la representación]
M: Y en la vida real… ¿para qué crees que podrían servir estos números?
E: Pues en la vida real, el que más utilizamos es π
M: ¿Para?

E: Mmm… pues de la misma forma que los números naturales y que los racionales
M: Entonces… ¿para contar y medir?
E: Sí

Relativo a la utilidad que los números irracionales tienen en nuestro entorno, el estudiante normalista reduce a establecer a π como el principal protagonista de estos números sin mencionar ejemplos de su aplicabilidad, desconociendo, seguramente que para la producción de envases cilíndricos se usa el número π y prácticamente en todo que contenga círculos, pues no olvidemos que su historia nos evoca al año 350 a. C. cuando Eudoxo (390-337 a. C.) elaboró el método de exhaución, que posteriormente otro griego, Arquímedes (287-212 a. C.), perfeccionaría.

Otros usos del número que resulta de la relación entre la longitud de un círculo y su diámetro son aún más asombrosos. Los ordenadores miden su capacidad de procesamiento con los decimales que puede arrojar de π. Y no sólo eso, π también aparece en un experimento que no tiene relación con circunferencias o figuras circulares: se trata de la aguja de Buffon, que consiste en lanzar al azar una aguja de longitud L sobre una superficie con líneas paralelas separadas a una distancia D, la probabilidad de que la aguja caiga sobre una de las líneas es $P = \frac{L\pi}{2D}$.

Los ejemplos son vastos para tratar a los números irracionales, por ejemplo, el número Euler es empleado en finanzas y prácticamente todo el sector económico. Los bancos lo usan para proyectar las condiciones más estables, o bien, para prever alguna situación de riesgo en los mercados. Otro uso es el de los tendidos eléctricos que tienen forma de catenaria. De igual modo se emplean en la biología para estimar el crecimiento de poblaciones (incluidas las bacterias), entre otros.

Significado personal asociado al número real y la propiedad de densidad en la entrevista clínica

Los números son un enigma, ya Einstein se preguntaba, ¿cómo es posible que algo que vive sólo en nuestra mente, pueda explicar todo lo que está fuera de ella? Su origen sigue siendo un misterio y sigue provocando debates: ¿han sido descubiertos o han sido creados

por la humanidad? Ante estas interrogantes de corte ontológico y epistemológico el mismo ser humano ha ido creando teorías que le permitan dar respuesta.

La evolución de los números es inherente a nuestra civilización; incluso podríamos afirmar que sin los números nuestra raza viviría bajo otras condiciones, tal vez más primitivas y con menos herramientas para la misma supervivencia, de ahí la importancia de salvaguardar estas entidades abstractas que nos han permitido crear automóviles, aviones, teléfonos inteligentes y todos los demás recursos con los que hoy nuestra sociedad cuenta y se beneficia.

La comprensión de los números no debe ser entonces exclusivo de matemáticos o gente interesada en ellos, sino más bien de toda persona, partiendo de la premisa de que la matemática es una creación humana. Y es la escuela uno de los espacios donde se ha venido cultivando esta gran invención, por lo que resulta importante mirar los significados de los que enseñarán estos objetos matemáticos. Para ello se consideró el diseño e implementación de una entrevista aplicada a un estudiante que se está formando como docente de matemáticas en educación básica, quien respondió a todos los planteamientos, ofreciendo una valiosa y rica información con lo que atañe a los significados que tienen los profesores en formación sobre los números reales y la propiedad de densidad, inherente a ellos.

En la sección 2.4.1. se presentan diferentes significados históricos del número real que todavía permanecen y que son utilizados en el ámbito escolar. Esta entrevista tiene el objetivo de indagar sobre los significados personales que tienen los profesores en formación sobre el número real y la propiedad de densidad por lo que, se analiza en cada tipología establecida los elementos o categorías que permiten su identificación. En la siguiente tabla se presenta de manera sucinta los resultados obtenidos, los cuales se realizan teniendo en cuenta la Tabla 1, considerándose esto como una aportación para futuras investigaciones.

Tabla 2. *Elementos del significado - Entrevista clínica-*

Tipologías	**Elementos del significado**				
	Campos de problemas	*Algoritmos y procedimientos*	*Elementos lingüísticos*	*Definiciones y propiedades*	*Argumentos*
Representación del número real	Ubicación de números reales en la recta, representación de números irracionales	Métodos geométricos, aproximaciones decimales de números reales	Representación simbólica, notación decimal, operatoria	Propiedades algebraicas, relación de orden, recta numérica	Representación en el software de Geogebra
Situaciones de aproximación	Cálculos con números irracionales	Operaciones básicas (suma, resta y multiplicación) que involucran números irracionales,	Notación operacional o simbólica como resultado de una operación indicada	Propiedades algebraicas, no hay uso adecuado de las leyes de los radicales	No establece una equivalencia entre el número irracional y su representación decimal
Definición de número real y su propiedad de densidad	Reconocimiento de la naturaleza del número real y su propiedad de densidad	Teoría de conjuntos, asignación de números relacionándolos con un conjunto numérico	Lenguaje verbal, simbólico, notación decimal	Ausencia de la propiedad de densidad, definición conjuntista del número real (informal)	Argumentos basados en experiencias personales
Situaciones asociadas al concepto de número real	Utilidad de los números irracionales en relación con actividades prácticas	Relación directa con el uso de los números racionales y naturales	Lenguaje verbal	Comprensión de la conmensurabilidad - inconmensurabilidad	Uso y origen a intereses académicos y/o matemáticos

Elaboración propia

A partir del análisis anterior, se puede observar que la entrevista clínica, en sus cuatro tipologías, presenta diferentes situaciones problema, elementos lingüísticos, algoritmos y procedimientos y, argumentos asociados al número real y la propiedad de densidad, aspectos que son identificados considerando las respuestas del profesor en formación, de lo cual, se puede obtener uno de los objetivos de la presente investigación que es evaluar su conocimiento en relación a este tópico, para así tratar, de manera aproximada, identificar el significado personal atribuido.

De la tabla anterior se puede establecer la frecuencia de uso de cada uno de los elementos en total, con esto se determina lo siguiente:

En las cuatro tipologías se evidencian dos significados el aritmético y el geométrico, a pesar de que el estudiante normalista trata de definir a los números reales como la unión de conjuntos numéricos – naturales, enteros, racionales e irracionales- derivada tal vez de años de herencia de la enseñanza y de lo expuesto en los libros de texto, es de notar que esta definición no se relaciona con ninguna construcción histórica formal, bajo este tenor, el concepto de número real se presenta sin una definición formal, ni mención de propiedades; evidenciando errores de tipo conceptual al momento de definir y clasificar a los números en los diferentes conjuntos numéricos.

Es evidente que el significado aritmético del número real se exhibe de manera más recurrente, está presente en las cuatro tipologías, asociándose el concepto a operaciones, utilizando objetos ostensivos para su representación, como por ejemplo el lenguaje simbólico, notación decimal, lenguaje natural. Es de notar que el estudiante normalista vincula el uso de los números irracionales con los procesos de contar y medir, mismo que asocia a los números naturales, hecho que se remonta a las culturas orientales primitivas; la matemática oriental inicia como una ciencia que ayuda a facilitar la contabilidad de diversas actividades sociales, la administración de las cosechas, el pago de impuestos, es decir, centraba su interés en la aritmética práctica.

A través de la entrevista, el estudiante evidencia dificultades para establecer la representación de los números reales.

- Asegura que el cero es entero y también es número natural, pero no lo incluye como real.
- Defiende la postura de biyección, asignándole un punto a cada número que ocupa sobre la recta numérica.
- Al realizar operaciones con los números reales, hace un buen manejo al operar racionales, no así cuando se trata de irracionales.
- Cuando define a los números irracionales, a éstos los caracteriza como números decimales periódicos (por ejemplo, asegura que $\sqrt{3} = 0.\bar{3}$).
- Cuando aparece un número cuadrado en una raíz, por ejemplo $\sqrt{4} = 2$, afirma que es un número natural, pero no lo considera entero, ni racional y tampoco real.
- Considera que existen más números racionales que irracionales, esto debido a que, por un lado, la enseñanza ha privilegiado la representación y uso de los números racionales, sobre la de los irracionales y, por otro lado, cuando se representan números constructibles en la recta numérica.
- No reconoce la propiedad de densidad, puesto que tiene dificultades al hallar un número irracional entre otros dos irracionales.
- Los números reales que concibe, incluso en cuanto a utilidad son los naturales, enteros y racionales, no detallando los usos que tienen en el entorno los números irracionales.

En este sentido, es importante considerar que la formación de profesores debe tener una mayor consolidación de los números reales, pues serán los promotores de estas piezas matemáticas que son constructos humanos que sin duda le dan a la matemática las bases de su creación y evolución

4.2. Resultados y análisis de la implementación de la propuesta de aula

Para la implementación de la propuesta de aula se contó con la participación de cinco profesores en formación de la Escuela Normal Superior del Estado de México que cursan tercer semestre de la Licenciatura en Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas. El desarrollo de las actividades se realizó de manera individual y al finalizar cada actividad se socializaron los resultados. Teniendo en cuenta la situación mundial actual, derivada de la pandemia por el Covid 19, la implementación se realizó de manera virtual, a través de la plataforma de Teams ®, en ocho sesiones de dos horas cada una. De esta forma se recolectaron cuatro tipos de registro susceptibles de análisis: el escrito, donde se evidencian las respuestas de los profesores en formación; la observación, de las que se tomaron notas de campo; y registro del video de la clase a través Teams ®.

A continuación, se presentan un resumen de los resultados del análisis, organizado según las categorías o los elementos del significado expuestos por la TSS.

CAMPOS DE PROBLEMA

De acuerdo con la TSS, las situaciones problema son el punto de partida de la actividad matemática. En la propuesta de aula se proponen actividades con el objetivo de aproximar a los profesores en formación a la propiedad de densidad antes situaciones que involucran la representación intervalar, estos campos de problema se establecen a partir de cada una de las partes de la propuesta, las cuales son:

- ✓ *Errores de aproximación en los cálculos comunes, un acercamiento a las magnitudes inconmensurables* (CP1). Esta situación se relaciona con la primera parte de la propuesta de aula, la cual tiene como objetivo que los profesores en formación identifiquen errores de aproximación en cálculos comunes, para esto se plantean tres actividades: en la primera, hacen aproximaciones a partir de los cálculos con magnitudes inconmensurables, la segunda consiste en discutir los resultados obtenidos en la primera actividad reflexionando sobre las cantidades involucradas y, en la última actividad deben realizar operaciones con cantidades que han sido aproximadas para luego reflexionar sobre lo hallado. En las dos primeras actividades se plantean problemas que hacen parte de la vida real,

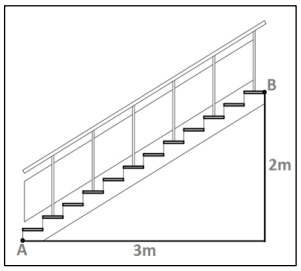
además es menester mencionar que, de manera implícita, la SP1 también se relaciona básicamente con las otras partes de la propuesta, puesto que a partir de la identificación de magnitudes inconmensurables, el profesor en formación empieza a darse cuenta de la necesidad de buscar otra alternativa de representación, la cual se le va presentando a medida que va avanzando sobre la puesta en marcha de la propuesta; con esto, se puede decir que hay una correspondencia con los significados *aritmético y geométrico.*

- ✓ *Aproximación a números racionales mediante encajamiento de intervalos cerrados y acotados por racionales. Hacia la aproximación intuitiva del concepto de límite y convergencia* (CP2). Actividades concernientes a la representación de números cuya naturaleza es un decimal infinito periódico, como por ejemplo $\frac{1}{6}$, se hacen presente en la parte II de la propuesta, en la que se establece como objetivo introducir a los profesores en formación a la alternativa de representación de números racionales mediante el encajamiento de otros racionales. Ahora bien, el inicio de construcción de estas representaciones permite que de manera intuitiva el estudiante normalista se vaya acercando a la propiedad de densidad de los racionales, y, por otro lado, a través del encajamiento progresivo, de manera que, la diferencia entre los extremos del intervalo se vaya haciendo cada vez más pequeña que esta tienda a ser cero hace que también, de manera intuitiva se aborden nociones de limite y de convergencia. En este sentido, este campo de problemas de los que emerge el objeto se relaciona con los *significados geométrico e intervalar*, ya que se vincula la representación en la recta numérica y, a partir de la exploración del software de GeoGebra, ubicando números muy próximos por la derecha y por la izquierda de otro número se inicia con la representación del número racional mediante intervalos.
- ✓ *Aproximación a números irracionales y la incompletitud de Q, a partir del encajamiento de intervalos con números racionales. Hacia la aproximación intuitiva del concepto de límite y convergencia* (CP3). Este campo de problemas está relacionado con la parte III de la propuesta, en la que se pretende que el estudiante normalista comprenda que hay números que no son posible de

representarlos con un número finito de cifras como es el caso de $\sqrt{2}$ y π, pero si es posible representarlos, de manera aproximada, a través de encajamiento de racionales; lo anterior parte de situaciones relacionadas con el surgimiento de los números irracionales a través de la historia de las matemáticas, como es el caso del método de exhaución. Por lo anterior se puede decir que los significados aquí involucrados son *el geométrico y el intervalar.*

- ✓ *Definición de intervalos cerrados y acotados* (CP4). Relacionada con la parte IV de la propuesta, presenta la necesidad de buscar una alternativa de representación del número real sin que esta lo excluya, al representar un número irracional a través de un número finito de cifras, por ejemplo e que al aproximarlo mediante decimales tenemos que es igual a 2.7182, como se puede observar esta expresión no representa la naturaleza de e, lo que hace es representar un número racional, excluyendo al número irracional, hecho que genera dificultades en los estudiantes; en cambio, al representar este número mediante intervalos no se excluye, se contempla dentro del encajamiento.
- ✓ *Definición de los números reales como conjunto de intervalos* (CP5). Finalmente se tiene el objetivo de acercar al estudiante normalista a la construcción de los números reales como conjuntos de intervalos, construcción aproximada a las realizadas por Cantor y Bachmann, las cuales ya se prefiguraban con el método de exhaución siglo IV a.C. que, aunque bajo esta propuesta intervalar el estudiante normalista no podrá definir a los números reales de manera formal, si podrá *reconocer* intuitivamente al número.

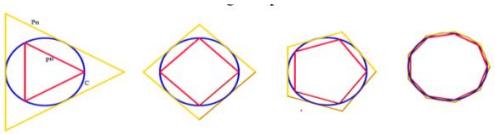
En la siguiente figura se presentan ejemplos de cada una de las situaciones, es menester mencionar que este campo de problemas de manera sencilla presenta tres de los cinco significados encontrados a lo largo de la historia de los números reales.



CP1. Longitud de pasamanos

Número racional	En cada aproximación determina cuál es el número racional más próximo por izquierda y cuál es el número racional más próximo derecha			
	Décima	Centésima	Milésima	Diezmilésima
$\frac{1}{6}$	$0.1 < \frac{1}{6} < 0.2$			

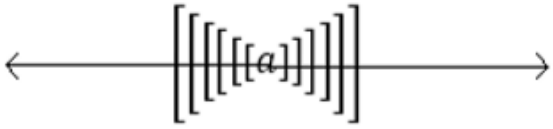
CP2. Aproximación a $\frac{1}{6}$



CP3. Método de exhaución

a) $\sqrt{3} = \sqrt{3} \in [1.6, 1.8]$
b) -5=
c) 0=
d) $\frac{5}{2}$ =
e) $\frac{1}{9}$ =

CP4. Definición de intervalos



CP5. El número real como intervalo

*Figura 5.*Campos de problemas en la propuesta de aula.

Ahora bien, en la siguiente tabla se presentan los campos de problemas y los significados del número real involucrados en cada uno de ellos.

Tabla 3. *Significados en los campos de problema de la propuesta*

Campos de problema	**Significados del número real**				
	Aritmético	Geométrico	Algebraico	Axiomático	Intervalar
CP1	x	x			
CP2		x			x
CP3		x			x
CP4		x			x
CP5		x			x

Elaboración propia

ALGORITMOS Y PROCEDIMIENTOS

Revisando las respuestas que los estudiantes normalistas aportan al trabajar con la primera parte de la propuesta, se presenta a continuación un análisis conciso de las tres actividades que desarrollaron atendiendo cada uno de los planteamientos expuestos correspondientes a los algoritmos y procedimientos involucrados.

Actividad 1 (I-*A*1). Haciendo aproximaciones en el cálculo común de medidas inconmensurables.

*A*1, *ítem 1.* Se necesita hacer un barandal de madera para una escalera siguiendo el modelo que muestra la figura. ¿cuál debe ser la longitud del largo del pasamano?

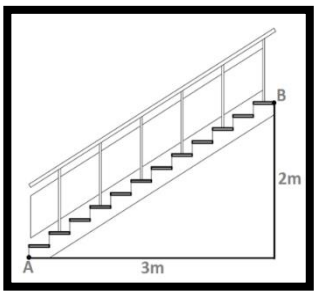


Figura 6. Pasamanos - análisis

Se pide a cada estudiante hallar una aproximación del resultado obtenido a décimos, centésimos, milésimos, diezmilésimos y cienmilésimos, respectivamente, lo cual, sin dificultad consiguen empleando el teorema de Pitágoras, obteniendo de manera correcta la solución –tomando de manera estricta las cifras después del punto decimal– y no la aproximación a la décima, centésima, milésima, diezmilésima y cienmilésima; no obstante se cita un caso en el que uno de los estudiantes expresa el resultado 3.6055 (correcto), recorrido a diezmilésimos, como se observa en la figura 3.

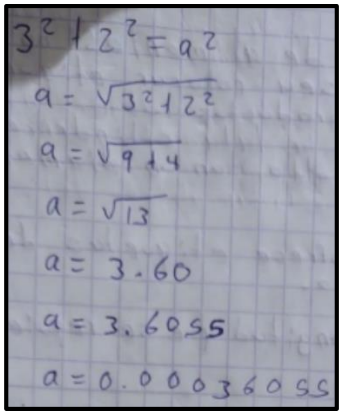


Figura 7. Recorrido a diezmilésimos

A1, ítem 2. Una empresa de alimentos no perecederos desea colocar etiquetas a uno de sus productos cuya presentación es una lata cilíndrica de 9.9cm de alto con un diámetro de 7.6cm

Si el proveedor ofrece etiquetas de 9.7cm de ancho. Determina la longitud que se requiere para una lata (*aproximando a décimos, centésimos, milésimos, diezmilésimos y cienmilésimos).*

La situación planteada arroja resultados correctos y también una manera de proceder que llama la atención, la cual se observa en la figura 4, donde se mira cómo un docente en formación establece una proporción lineal (regla de tres) con los datos que el problema ofrece, situación que, además de no ser correcta, induce a considerar una relación pobre entre el número π y su aplicabilidad en los círculos y circunferencias.

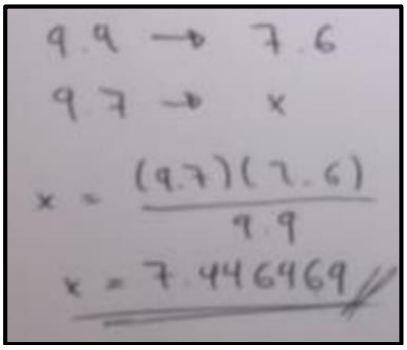


Figura 8. Proporcionalidad lineal

Con lo que atañe a la Actividad 2 (I-A2), se reflexiona sobre las aproximaciones que los normalistas respondieron en I-A1.

a) **La distancia del barandal**.
- Si Juan es el encargado de hacer el barandal, ¿cuál de las cinco medidas calculadas en clase, le recomiendas para que haga sus estimaciones y diseñe el barandal? Justifica tu respuesta.
- En otro caso, si Juan necesita fabricar doscientos pasamanos ¿Cuál le recomendarías y por qué?

b) Longitud de la etiqueta.

¿Cuál crees que es la longitud de material requerido para una lata? Elige una de las siguientes opciones (marca con una x) y Justifica:

- Una de las cinco aproximaciones_____ ¿Cuál? _____ Justifica_____
  _____
- Ninguna de las expuestas. ____Otra_____ ¿Cuál? _____ Justifica_____
  _____
- ¿Todas las posibilidades son correctas? ___ Justifica_____
  _____
- Otra respuesta_____

Respondiendo a las preguntas del inciso (a) la mayoría coincide en sugerir –para un barandal– el empleo de una décima, pues consideran que de manera práctica es la más conveniente y usada; mientras que, para el caso de la fabricación de doscientos pasamanos, optan por emplear los cienmilésimos (3.60555), advirtiendo con una multiplicación lo importante que resultaría considerar más números decimales en comparación de la elaboración de un único barandal. La figura 5 evidencia lo dicho.

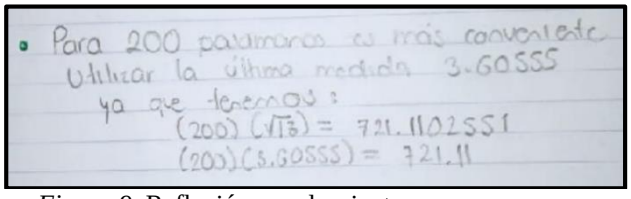
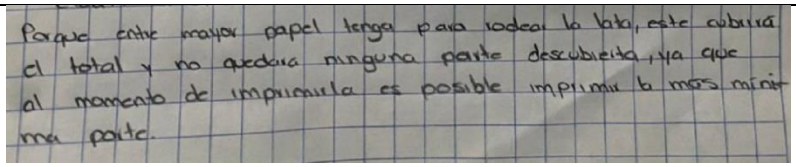


Figura 9. Reflexión con doscientos pasamanos

Para el planteamiento del inciso (b), la mayoría de los estudiantes se inclina por reconocer que "todas las posibilidades son correctas", salvo considerar que la mejor manera es tomar las diezmilésimas. Una de estas razones descansa en la figura 6, donde se lee la opinión de un estudiante.



Transcripción: *Porque entre mayor papel tenga para rodear la lata, este cubrirá el total y no quedará ninguna parte descubierta, ya que al momento de imprimirla es posible imprimir la más mínima parte.*

Figura 10. Reflexión sobre la etiqueta de una lata

La Actividad 3 de esta primera parte (I-A3) está compuesta por tres momentos. En el primero se pide que aproxime los valores de *un tercio* y de *pi* a la centésima, hecho que resulta muy sencillo de realizar (incluso sin calculadora). El segundo momento consta de una tabla con seis operaciones con números que involucran *un tercio* y *pi* con dos condiciones, ambas demandan el uso de la calculadora, pero mientras una la pide aproximando, la otro no, situación que también es bien entendida y resuelta por los estudiantes, con la excepción de un caso en dos expresiones, para las que la condición es "sin aproximar" y escribe números decimales (figura 7) y no una expresión para $(\pi)(\pi) = \pi^2$, por citar un ejemplo.

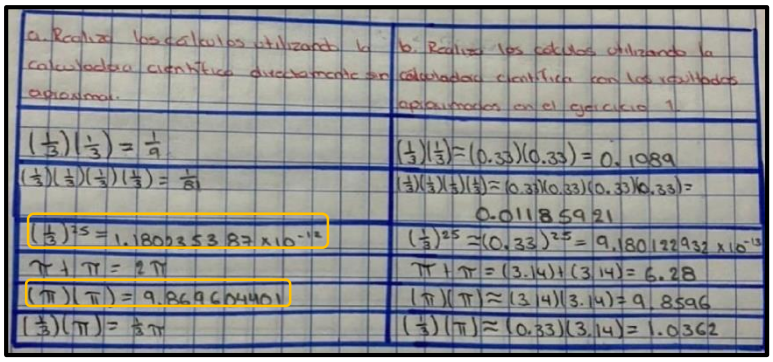
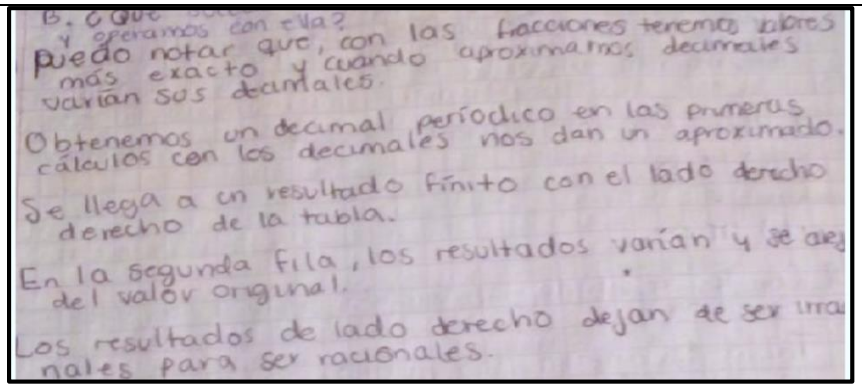


Figura 11. Aproximaciones de operaciones

El tercer momento persigue la reflexión de los estudiantes ante las operaciones que han realizado en el momento inmediato anterior.

1. De acuerdo con los cálculos realizados en el cuadro anterior responde las siguientes preguntas:
- **a.** Compara y establece las diferencias y similitudes entre los resultados de la columna A y la columna B.
- **b.** ¿Qué sucede cuando aproximamos una cantidad numérica y operamos con ella?

Ante las diferencias y similitudes, los profesores en formación coinciden en opiniones como las que se exponen en la figura.



Transcripción: *Puedo notar que, con las fracciones tenemos valores más exactos y cuando aproximamos decimales varían sus decimales.*
Obtenemos un decimal periódico en los primeros cálculos con los decimales nos dan un aproximado.
Se llega a un resultado finito con el lado derecho de la tabla.
En la segunda fila, los resultados varían y se alejan del valor original.
Los resultados de lado derecho dejan de ser irracionales para ser racionales.

Figura 12. Reflexiones al comparar cantidades

Lo anterior expuesto es un ejemplo de la manera en la que se realizan los análisis que atañe a los *algoritmos y procedimientos* realizados por los profesores en formación para cada una de las partes de la propuesta de aula, a continuación, se presenta un resumen de lo encontrado en la totalidad de la propuesta.

Tabla 4. Procedimientos y algoritmos

Significados	Algoritmos y procedimientos	Partes de la propuesta				
		I	**II**	**III**	**IV**	**V**
Significado Aritmético	PRA1. Distinguir entre números racionales e irracionales	x	x	x	x	x
	PRA2. Realizar operaciones básicas con números reales	x	x			
	PRA3. Realizar aproximaciones	x	x	x	x	x
	PRA4. Comparar cantidades que han sido aproximadas	x	x			
	PRA5. Calcular la diferencia de un intervalo			x	x	x
Significado Ge	PRG1. Establecer relación entre longitud y número	x				

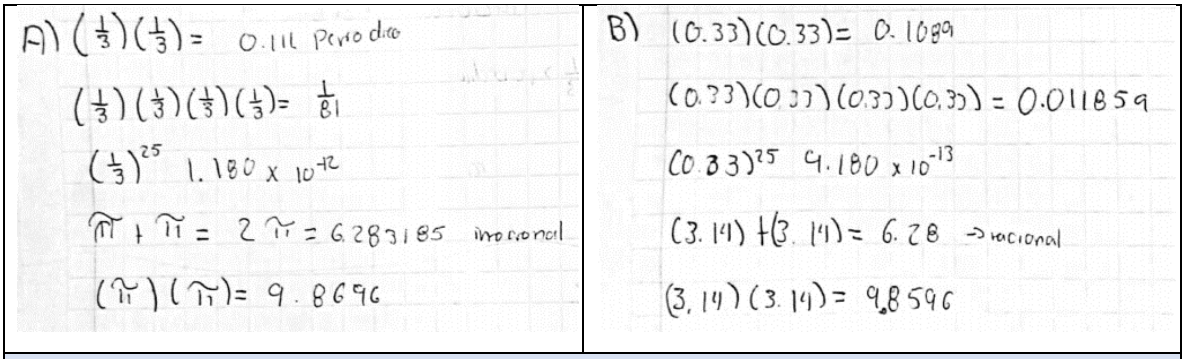
	PRG2. Representación de número racionales en la recta numérica	x		x	x
	PRG3. Verificar a través de la recta geométrica en el software de GeoGebra la proximidad de número racionales de un número en particular	x	x	x	x
	PRG4. Visualizar el método de exhaución a través de lápiz y papel y en el software de GeoGebra como medio para la aproximación al valor de π		x		
	PRG5. Representación de número irracionales en la recta numérica		x	x	x
Significado Intervalar	PRI1. Aproximar a través del encajamiento de intervalos con número racionales	x	x	x	x
	PRI2. Identificar el rango de una buena estimación	x	x	x	x
	PRI3. Elegir un número racional que esté muy próximo de otro	x	x	x	x
	PRI4. Representar un número mediante un intervalo encajado	x	x	x	x
	PRI5. Analizar la tendencia a cero de las diferencias continuas de los extremos de los intervalos encajados	x	x	x	x
	PRI6. Identificar la propiedad de densidad de los números reales mediante los intervalos encajados	x	x	x	x

Elaboración propia

ELEMENTOS LINGÜÍSTICOS

Como en esta investigación se persigue analizar los significados del número real y la propiedad de densidad involucrados en la representación mediante intervalos, es necesario indagar los términos y expresiones verbales, las simbólicas y las numéricas utilizadas por los estudiantes normalistas para dar solución a cada una de las actividades de la propuesta. Con el análisis se logra identificar tres tipos de representaciones ligadas al concepto de número real; representaciones con lenguaje numérico, con lenguaje verbal y representaciones con intervalos, las cuales hace alusión a los *significados aritmético, geométrico e intervalar*.

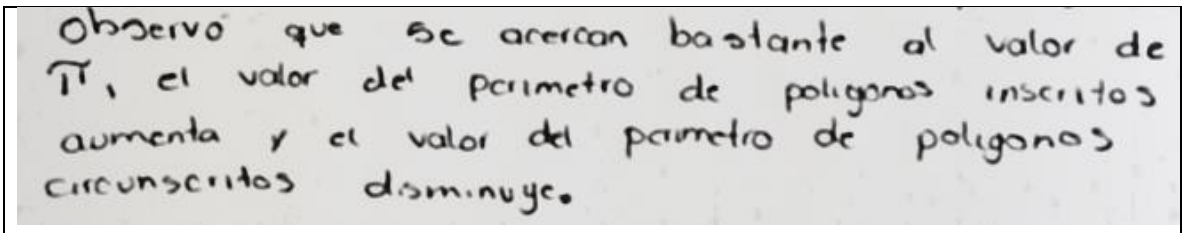
Con lo que atañe al lenguaje numérico, se observa una manipulación de este lenguaje para funciones nominales y numéricas, también hay uso de expresiones decimales, notación científica y de fraccionarios, propiamente para el desarrollo de las dos primeras partes de la propuesta, como por ejemplo en I-A3 se utilizan estas expresiones para realizar los cálculos con las cantidades con y sin aproximar (ver figura 13), otro ejemplo es la representación de $\frac{1}{6}$ y su aproximación decimal que la obtienen después de realizar la división.



I-A3 *Lenguaje numérico*

Figura 13. Lenguaje numérico - respuestas del profesor en formación

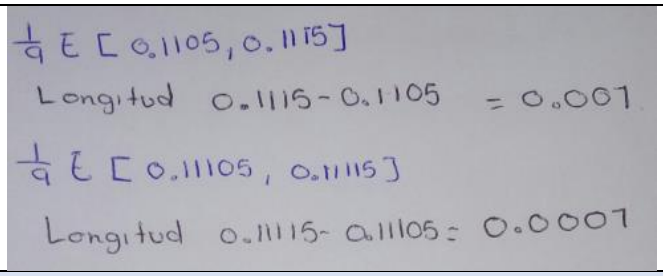
Ahora, con relación al lenguaje verbal, este es utilizado por los docentes normalistas durante todo el desarrollo de la propuesta para exteriorizar sus reflexiones (ver figura14)



III-A1-7 Lenguaje verbal

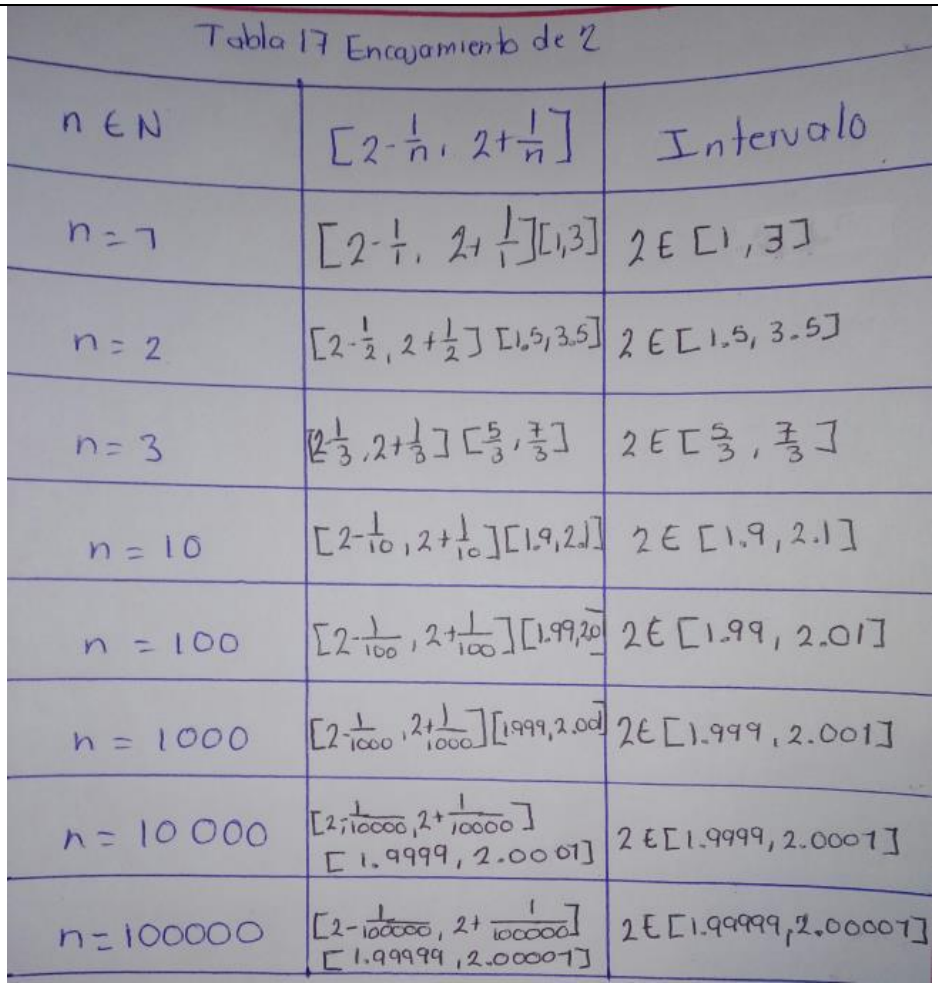
Figura 14. Lenguaje verbal – respuestas del profesor en formación

Por otro lado, la representación intervalar se hace de manera más explícita en las dos últimas partes de la propuesta. En las figuras 15 y 16 se presentan ejemplos de la manera en la que el docente en formación representa a cualquier número real, partiendo de la definición de intervalos cerrados y acotados que se proporciona con anterioridad.



IV-A1-e Representación intervalar

Figura 15. Representación intervalar - respuestas del profesor en formación



V-A3 Representación intervalar del número 2

Figura 16. Representación intervalar - respuestas del profesor en formación

DEFINICIONES Y PROPIEDADES

La presentación de las definiciones y propiedades durante la propuesta se hacen de manera implícita, las cuales versan dentro de los significados *aritmético, geométrico e intervalar;* en la primera parte de la propuesta se hace necesario conocer cómo aproximar a la décima, centésima, milésima, diezmilésima y cienmilésima un número decimal a partir de los valores que le brinda la calculadora, valores que resultan al operar números irracionales, por lo que, también es necesario conocer la naturaleza de estos números. Otro aspecto para considerar es uso del teorema de Pitágoras, así como la fórmula de la longitud de la circunferencia (ver figura 17 y 18).

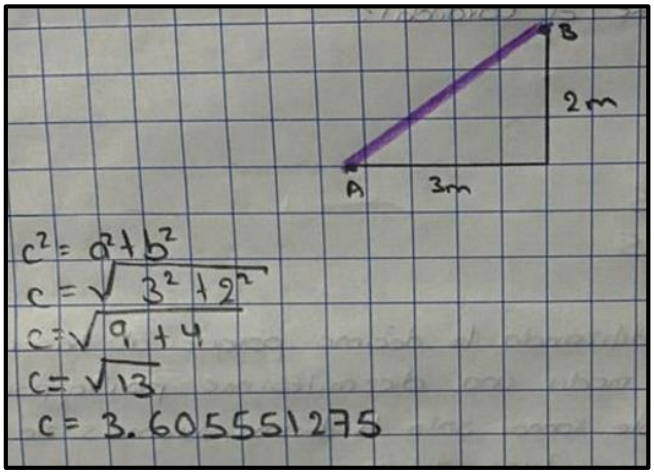


Figura 17. Uso del teorema de Pitágoras

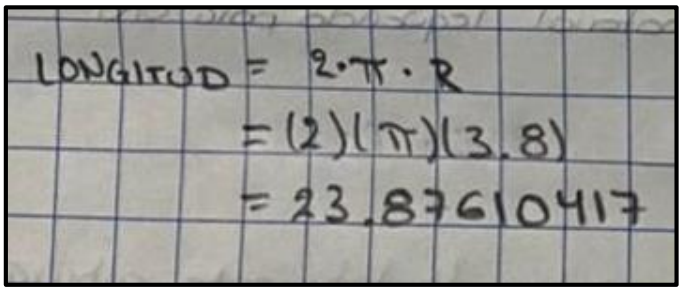


Figura 18. Longitud de la circunferencia

En las cuatro últimas partes de la propuesta intervienen definiciones y propiedades relacionadas con la representación intervalar, para empezar, el profesor en formación debe conocer las definiciones de número racional y de número irracional, relaciones de orden, saber ubicar números racionales en la recta numérica. Por otro lado, los propiedades y definiciones que se van abordando durante el desarrollo de la propuesta son: límite y

convergencia, método de Herón de Aznar, método de exhaución, intervalos cerrados, intervalos degenerados y finalmente, que es propósito de esta investigación, la propiedad de densidad de los números reales.

ARGUMENTOS Y DEMOSTRACIONES

En las respuestas de las cinco partes de la propuesta analizadas se observa que el profesor en formación utilizó tres tipos de argumentos: Razonamiento inductivo, visualización en el software de GeoGebra y generalización, no hay presentación de demostraciones formales.

- ✓ **Razonamiento inductivo**: a través de las tres primeras actividades pertenecientes a la parte I, los estudiantes normalistas inician con las reflexiones, a partir del análisis hecho en cada una de las soluciones encontradas. En un primer momento deben analizar para luego poder refutar el método de aproximación y truncamiento cuando se requieren cálculos con soluciones exactas, con esto, pueden llegar a decidir cuando una estimación más que una respuesta exacta es más bien conveniente.

  De igual manera al enfrentarse a la parte II, cuyas actividades versan sobre el encajamiento de $\frac{1}{6}$, realizan este proceso en la recta numérica en el software de GeoGebra, hallando valores muy próximos por la derecha y por la izquierda y, al ampliar la recta con la herramienta *lupa* el estudiante normalista intuye que siempre va a encontrar más y más números comprendidos de otros, es decir se acerca a la definición de la *propiedad de densidad.* A su vez, al desarrollar el método de exhaución primero a lápiz y papel y luego en el software de GeoGebra, se presenta un choque cognitivo, puesto que cuando se trabaja el método de exhaución a lápiz y papel, realizando los cálculos para hallar el perímetro de los polígonos inscritos y circunscritos y la diferencia entre estos dos valores, el profesor en formación cree que estas diferencias en algún momento llegan a ser cero es decir, que tanto los polígonos inscritos como circunscritos en algún momento llegan a coincidir.

  Sin embargo, al momento de realizar este mismo método en el software de GeoGebra y al aumentar el número de lados de los polígonos a 100, momento en el que parecen coincidir, con la opción *lupa* se aumenta el tamaño de la gráfica mostrando que aún siguen quedando espacios entre los polígonos inscritos, circunscritos y la circunferencia, por lo tanto concluyen que por más que se aumenten

los números de lados de los polígonos estos nunca llegan a coincidir, es decir que la diferencia de los perímetros tiende a ser cero pero no llega a serlo, con esto hay una aproximación intuitiva a la noción de límite. (ver figura 19).

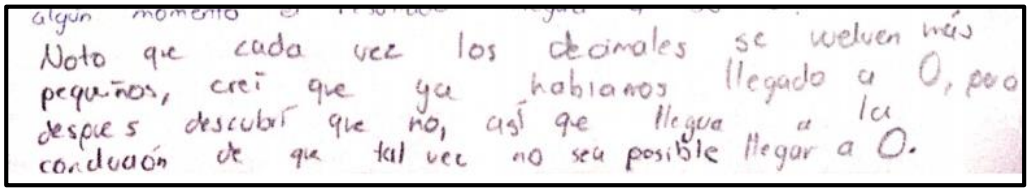


Figura 19. Reflexión - Método de exhaución

- ✓ **Visualización en el software de GeoGebra:** el uso de esta herramienta tecnológica permea las últimas cuatro partes de la propuesta de aula, ayudando de manera visual a encontrar números muy próximos de otro, para así poder representar un número mediante intervalos, esto ayuda a aproximarse a la *propiedad de densidad* de los números reales, además los argumentos dados por los estudiantes están sustentados a partir de la exploración en este software (ver figura 20).

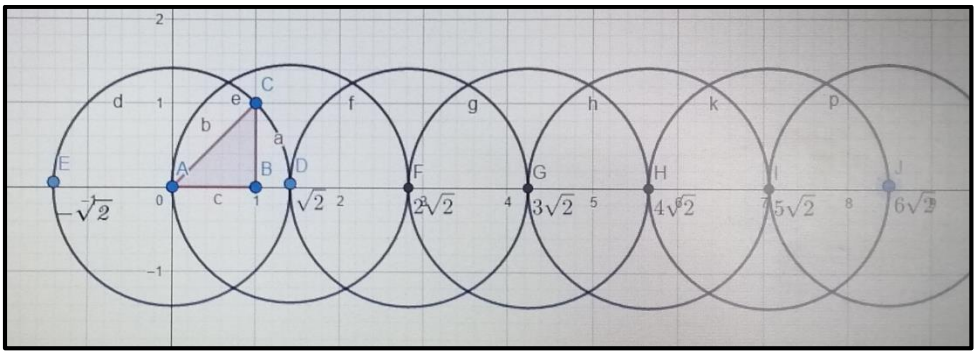


Figura 20. Múltiplos y submúltiplos de $\sqrt{2}$

- ✓ **Generalización:** en la segunda parte de la propuesta, las actividades permiten que el profesor en formación llegue a generalizar el método de representar un número real cualquiera a través de intervalos encajados de números racionales, situación que se consolida con las últimas partes de la propuesta de aula. Es decir, en la parte II el objetivo es encajar $\frac{1}{6}$ mediante números muy próximos por la derecha y por la izquierda, este proceso luego se realiza con otros números racionales, 0, -1, 1, entre otros, aquí se generaliza el método para cualquier número racional, luego en la parte

III este proceso se utiliza para encajar números irracionales y finalmente en las dos últimas partes de la propuesta se usa para representar cualquier número real.

4.3. Conclusiones

En este trabajo se realizó una aproximación histórica epistemológica con el fin de identificar los significados del número real presentes en su desarrollo histórico y, a partir de esto se analizaron los significados que le atribuyeron los profesores en formación a este conjunto numérico y a su propiedad de densidad, a través de la implementación de una propuesta de aula que estaba orientada al uso de la representación intervalar.

El significado del número real se consideró como un sistema de prácticas, el cual fue visto desde dos puntos; uno personal y otro institucional, que llevó a tratar de indagar sobre su estructura y caracterización abordándolo desde los elementos expuestos en la TSS; evidenciando así el significado heterogéneo que este posee (*aritmético, geométrico, algebraico, formal e intervalar*, estos dos últimos interconectados entre sí) de ahí que su enseñanza no puede limitarse a uno de estos diferentes aspectos. Ahora bien, para determinar los significados institucionales del número real se revisaron las orientaciones curriculares emanadas por el gobierno mexicano para la formación de los profesores de matemáticas; observando de qué manera se introducía el concepto, cuáles eran los elementos, de acuerdo a la TSS – que incorporaban las notas esenciales de este concepto y sus representaciones, este análisis fue realizado abarcando aspectos tanto epistemológicos como fenomenológicos. De lo anterior, se logró comprender las características del significado en la institución de enseñanza y el análisis de los factores condicionantes que operan en la construcción del concepto de número real y su propiedad de densidad. Las discusiones que han conducido la historia del número real también han permeado en su enseñanza, por tanto, es necesario más investigaciones que expliquen cuáles son los elementos esenciales de su significado.

Por otro lado, los significados personales de los profesores en formación se identificaron en dos momentos; primero, se realizó una entrevista clínica a uno de los estudiantes de la licenciatura y con estos resultados se seleccionaron las actividades que conformarían la propuesta de aula y en el segundo momento se identificaron los significados después de la

implementación. Es importante mencionar que la teoría intervalar, sustento de la propuesta de aula, dio elementos fundamentales en términos de problemas y estrategias de solución, para la representación de los números reales, permitió hacer la introducción de la propiedad de densidad de manera que los estudiantes comprendieron la noción de límite, ya que identificaron que un número real no necesariamente es la representación de un punto sobre la recta, sino que es aquel que está comprendido entre dos números racionales, siendo esto crucial pues al interpretar al número real como ese número que es menor que un conjunto de números racionales y mayor que otro conjunto de números racionales, en el trasfondo lo que implica es que el estudiante comprendió la noción de limite o en su defecto el número real como un límite, lo cual no está alejado a un significado formal.

Luego, los referentes teóricos que sustentaron la elección de las actividades de la propuesta de aula se basaron en los aspectos: histórico, matemático, didáctico y curricular: el referente histórico dio licencia para identificar algunas dificultades que dieron paso a la construcción del número real como objeto matemático, proporcionando elementos para transponer didácticamente acontecimientos históricos, como el Método de Exhaución, tratando de recrearlos en el aula; en relación al referente matemático, este suministró algunos elementos teóricos para la comprensión del número real y su propiedad de la densidad y la teoría intervalar; el referente didáctico aportó elementos teórico – metodológicos para el desarrollo del trabajo y, por último el curricular que facilitó las orientaciones educativas nacionales del concepto de número real para la Licenciatura en Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas.

La convergencia de estos cuatro referentes da cuenta de los objetivos específicos planteados, a continuación, se mencionan las conclusiones por cada uno de los objetivos. Finalmente se mencionan los significados que profesores en formación le atribuyeron al concepto de número real y su propiedad de densidad a través de la representación intervalar.

- ✓ **Caracterizar al número real como objeto didáctico a partir de su ontología y epistemología.**

El cumplimiento del primer objetivo fue realizado en la *Fase 1. Análisis epistémico-didáctico,* en la que, a través de una exploración de las construcciones del número real, comprendidas desde las crisis de los fundamentos de las matemáticas, se identificaron los

problemas de los que emergió este objeto matemático. Evidenciando así, el carácter social de las matemáticas. En este sentido, conocer los episodios que fueron importantes en la historia, llevan a darle otro sentido a las matemáticas, motivando la reflexión sobre su utilidad en el ambiente educativo, sin negar que brindan elementos para el diseño de una clase en la que se puede incentivar y atraer la atención de los estudiantes. Por consiguiente, es necesario retomar, mediados por la historia, los fundamentos que iniciaron la consolidación del número real como objeto matemático, y que hoy por hoy ayudan a comprender un poco su naturaleza.

Después de revisar las construcciones del número real desde las propuestas de Cantor y Bachmann, se pudo observar que estas dan la facultad para abordar al concepto desde un plano intervalar, ya que estas lo caracterizan como el *límite de sucesiones de intervalos encajados de números racionales*, por consiguiente, se puede deducir que permiten un acercamiento a la propiedad de la densidad tal como lo planteó García (2017). Aunado a lo anterior, estas construcciones permiten concluir que se necesitan considerar, en una propuesta que intenta movilizar una perspectiva intervalar, elementos teóricos relevantes como el número real visto como un límite, las sucesiones, convergencia, continuidad, orden, entre otros. Por esta razón fue necesario inspeccionar las causas que llevaron a que la teoría intervalar se constituyera como ciencia de la computación, facilitando una representación conveniente del número real mediante el uso de intervalos, viéndolo como el límite de sucesiones de intervalos encajados sin restringirlo a verse como un punto sobre la recta.

Al caracterizar al número real como objeto didáctico a partir de su ontología y epistemología se pueden identificar alternativas para su enseñanza, por ejemplo, una de las situaciones que llevó a la discordia en la cosmovisión de los Pitagóricos en el siglo V a. C. es la aparición de las magnitudes inconmensurables, hecho que puede verse reflejado en el aula ya que en algunas ocasiones se llega a tener una concepción de que todo es conmensurable. Por tal motivo, es trascendental acudir a estos problemas históricos e identificar y analizar las estrategias que en la antigüedad los matemáticos utilizaron para solucionarlos, y recrearlas en el aula; dándole así una función didáctica a la historia.

Bajo esta premisa, para tratar de superar ciertas dificultades relacionadas a la representación del número real, se pueden tomar hechos históricos como recursos didácticos en los que, mediante su ejecución, comprendan que las construcciones de las que emergió la

teoría intervalar son alternativas para expresarlo a través del encajamiento de intervalos de números racionales, es decir, tomar estos métodos que beneficien la comprensión de que, si bien, ciertos números – como los irracionales – no pueden representarse en la calculadora, en un ordenador o en lápiz y papel con cifras decimales finitas, si pueden expresarse mediante intervalos, de tal manera que la diferencia de sus extremos sea tan pequeña que tienda a ser cero.

Por otra parte, una alternativa para que los profesores en formación comprendan la propiedad de densidad es mediante la intuición geométrica; ya que se puede observar que, para los grandes avances de las matemáticas, los filósofos y matemáticos de épocas remotas, la usaron para plantear soluciones a determinados problemas – por ejemplo, la duplicación del cuadrado propuesta en el Menón – en los que para resolver este problema acudieron a la geometría. Generalmente los acercamientos a la enseñanza del concepto de número real, en los libros de texto y en el currículo siguen, de manera frecuente, la estructura formal, pero detrás de esta formalidad, que difícilmente los estudiantes comprenden, se esconden las ideas intuitivas que dieron lugar al concepto,

Con todo lo anterior, se puede decir que la geometría además de pensarse como un cimiento importante en el desarrollo de las actividades humanas, culturales, sociales, tecnológicas y científicas, entre otras, es una parte fundamental para la construcción y acercamiento del concepto de número real. Por este motivo, se concluyó que es necesario seleccionar actividades como el método de exhaución, la aproximación a $\sqrt{2}$ y su representación en la recta numérica entre otros, en los que se haga uso de la geometría.

- ✓ **Contrastar los significados del número real a través de la historia y los significados que le atribuyen los profesores en formación al número a través de la implementación de la propuesta de aula.**

Después de implementar cada una de las actividades que conformaban la propuesta se pudo observar que las estrategias utilizadas para introducir la propiedad de densidad de los números reales consiguieron que ellos se apropiaran de intuiciones que no estaban desviadas de las construcciones formales; en consecuencia, se presenta el contraste entre los significados identificados a lo largo del desarrollo histórico y los significados atribuidos después de la implementación:

La primera parte de la propuesta estuvo asociada a problemas sobre *errores de aproximación* en los que se movilizaban los significados *aritmético* y *geométrico*, en esta los profesores en formación detectaron errores de aproximación en los cálculos que realizaban bajo problemáticas relacionadas a la vida real, que a partir de la identificación de las magnitudes inconmensurables fueron dándose cuenta de la necesidad de hallar otra manera de representar el valor obtenido – un número irracional – la cual se fue trabajando a medida que iban avanzado en el desarrollo de la propuesta. Estas primeras actividades llevaron a utilizar al número real para realizar operaciones y aproximaciones, hecho que refleja el uso que le dieron en las antiguas civilizaciones, Mesoamérica, Oriente y Oriente Medio, para la realización de cálculos.

En lo que concierne a la segunda parte de la propuesta esta estaba vinculada a la *aproximación de números racionales mediante encajamiento de intervalos*, donde fue posible introducir a los profesores en formación a la representación intervalar, mediante la ubicación de números muy próximos por la derecha y por la izquierda de un número racional, esto apoyado de la recta numérica del software GeoGebra, la cual permitió, de manera dinámica, encontrar valores muy cercanos que a su vez beneficiaban la comprensión de la propiedad de densidad. Mediante el estudio del desarrollo histórico se detectó que existen otros campos en los que la teoría intervalar ha sido aplicada, donde se ha visto la necesidad de llevar a cabo cálculos sin errores de aproximación o redondeo, de este mismo modo, algunos matemáticos la han incorporado para resolver problemas que tiempo atrás estaban relacionados a la cosmovisión pitagórica. En este sentido, estás actividades involucran los significados *geométrico* e *intervalar*, apoyados de la representación en la recta numérica y la exploración del software de GeoGebra, ubicando números muy cercanos por la izquierda y por la derecha de otro número se da principio a la representación del número racional mediante intervalos.

En la tercera parte de la propuesta se consideraron *aproximaciones de números irracionales a partir del encajamiento de intervalos con racionales*, dando continuación a esta alternativa de representación pero para esta ocasión se abordó otro tipo de números, como π que retomando situaciones históricas relacionadas con su surgimiento, el Método de Exhaución elaborado por Eudoxo y perfeccionado por Arquímedes, se convierte en una

alternativa para expresar números racionales e irracionales con naturaleza infinita; en la que mediante el uso de intervalos cerrados de racionales se acercaron de forma intuitiva al número real y a su propiedad de densidad. Con estas actividades también se trabajaron los significados *geométrico* e *intervalar.*

A partir de las tres primeras partes de la propuesta, la parte cuatro ya mostraba la necesidad de *definir los intervalos cerrados y* acotados, encontrándose que esto también conduce a la comprensión de otros conceptos matemáticos; presentar los números reales como intervalos encajados beneficia el acercamiento a nociones relacionadas con el infinito potencial y actual, es decir, cuando el profesor en formación trata de encajar un número real, intentado hallar un buen rango de estimación, en el que a través de las retas sucesivas de sus extremos, la cual cada vez da como resultado una cantidad infinitamente pequeña, que tiene a ser cero. Además, esta representación requirió trabajar la idea implícita de orden, ya que, al construir un intervalo se necesitan considerar los valores menores y mayores que el que se debe representar.

La quinta y última parte de la propuesta acarrea *definir a los números reales como conjuntos de intervalos*, en la que finalmente el estudiante normalista se acercó a la construcción de los números reales y su propiedad de densidad como conjunto de intervalos de manera que alcanzaron la noción de límite; al darse cuenta que un número real es aquel que está comprendido entre dos números racionales muy próximos a él, y no visto como un punto sobre la recta, en el trasfondo lo que quiere decir es que se comprendió la noción de límite o en su defecto el número real como un límite. Esta manera en la que construyeron el concepto de número real está estrechamente relacionada con las construcciones matemáticas formales revisadas en el desarrollo histórico – Construcciones de Cantor y Bachmann – las cuales ya se prefiguraban con el Método de Exhaución, que, a pesar de que dentro de esta propuesta intervalar el profesor en formación no logró definir a los números reales de manera formal, si pudo *reconocer* intuitivamente al número.

Estudios Futuros

Los resultados obtenidos de los análisis de los significados presenten en el desarrollo de la propuesta de aula dan cuenta que actividades que involucren la representación intervalar benefician el desarrollo de los diferentes significados asociados al concepto de número real,

por lo anterior, se considera importante que en futuras investigaciones se diseñen situaciones que incorporen este tipo de representación. Además, se considera importante indagar sobre los significados del número real que se inducen en los libros de texto y los presentes en los planes y programas curriculares, tanto para la formación docente como para la educación básica secundaria y educación media.

REFERENCIAS

Arce, M., Conejo, L. y Pecharromán, C. (2019). Estrategias y errores de conversión entre representaciones de intervalos de la recta real. *Revista Enseñanza de las Ciencias.* 37(3), 169 – 187.

Anacona, M. (2003). La historia de las matemáticas en la Educación de las Matemáticas. *Revista EMA*. 8(1). páginas

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en educación secundaria. En *Revista Latinoamérica de Matemática Educativa*. Vol. 8 (3), pp. 247-263.

Broitman, C., Itzcovich, H. & Quaranta, M. (2003). La enseñanza de los números decimales: el análisis del valor posicional y una aproximación a la densidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.* 1(6), 5 - 26.

Brousseau, G. (2007). Iniciación al estudio de la Teoría de Situaciones Didácticas. (DFregona, Trad.). Buenos Aires, Argentina: Libros de Zorzal. (Trabajo original publicado en 1986).

Calderón, N. (2014). *Diferentes construcciones del número real.* Trabajo de maestría. Universidad Nacional, Bogotá, Colombia.

Courant, R. y Fritz, J. (1999). *Introducción al cálculo y al análisis matemático Vol. 1*. Trad. Saúl Hahn, Rolando Jiménez y José Florio. México: Limusa.

Crespo, C. (2009). Acerca de la comprensión y significado de los números irracionales en el aula de matemática. México. ALME. No. 41, 21-30. Recuperado de: http://www.soarem.org.ar/.

Freudenthal, H. (2001). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.* Dordrecht*:* Reidel. Trad. Luis Puig, publicada en Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas. Textos seleccionados. México: CINVESTAV.

García, A. (2017). *Los números reales como conjuntos de intervalos, ventajas y limitaciones de su consideración en la educación media.* Trabajo de maestría. Cali, Colombia: Universidad del Valle.

García, G., Serrano, C. y Díaz, H. (1999). ¿Qué hay detrás de las dificultades que presentan comprensión del concepto del número real? *Revista Tecne, Episteme Y Didaxis*. Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objetcs as a priority area of research in Mathematics Education. In A. Sierpinska y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics Education as a research domain: A search for identy* (pp. 177-195). Dordrecht, Netherlands: Kluwer.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherces en Didactiques des Mathématiques* 22(2-3), 237-284.

Gonzáles, P. (2004). La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. *Revista SUMA.* (45), 17-28.

Hernández-Sampieri, R., Fernández, C., Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación.* McGraw-Hill: México.

Hernández, A., & Valdivé, C. (2016). El número real: una visión desde el pensamiento matemático avanzado.

Hitt, F. (2017). *Learning Mathematics.* En Aldon, Gilles. (Ed.) Mathematics and Technology. 4-6. USA: Springer.

Livio, M. (2011). La proporción áurea. La historia de Phi, el número más enigmático del mundo. Trad. Daniel Aldea e Irene Muzás. España: Ariel.

Mora, L. y Torres, J. (2007). *Concepciones de estudiantes de licenciatura en matemáticas sobre números reales*. Tesis de maestría. Universidad Pedagógica Nacional. Colombia.

Moore, R., Kearfott, B. y Cloud, M. (2009). *Introduction to Interval Analysis.* SIAM, Society for Industrial and Applied Mathematics Philadelphia.

Puerto, Y. E. (2011). *Unidad Didáctica para la Construcción y significación del concepto de número real con los estudiantes del grado undécimo*. Tesis de maestría. Universidad Nacional, Bogotá, Colombia.

Patiño, V. (2013). *Construcción de los números reales: Completación de la estructura topológica.* Tesis de licenciatura. Cali, Colombia: Universidad del Valle.

Recalde, L. (2011). Medida, número y magnitud en la antigüedad griega. En Recalde, L. y Arbeláez, G. (Ed.), Los Números Reales como Objeto Matemático una perspectiva Histórico-Epistemológica. (pp. 19-37). Cali, Colombia: Universidad del Valle

Rico, L. (2000). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. En L. C. Contreras, J. Carrillo, N. Climent y M. Sierra (Eds.), *Cuarto simposio de la sociedad española de investigación en educación matemática* (pp. 219-231). Granada: Universidad de Granada.

Rigo, M. (1994). Elementos históricos y psicogenéticos en la construcción del continuo matemático. Primera y Segunda parte. En Educación Matemática. Grupo Editorial Iberoamericano.

Rooney, A. (2010). Historia de las matemáticas. De la construcción de las pirámides hasta la exploración del infinito. Trad. Joan Vilatella. Barcelona: Ediciones Oniro.

SEP. (2018). *Aprendizajes clave para la educación integral. Plan y programas de estudio para la educación básica*. México: SEP. Disponible en: https://www.planyprogramasdestudio.sep.gob.mx/descargables/APRENDIZAJES_CLAVE_PARA_LA_EDUCACION_INTEGRAL.pdf

SEP. (2018). *Licenciatura en Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en Educación Secundaria*. México: SEP. Disponible en: https://www.cevie-dgesum.com/index.php/planes-de-estudios-2018/120

Anexos

Actividades de la propuesta de aula

Parte I. Errores de aproximación en los cálculos comunes, un acercamiento a las magnitudes inconmensurables.

Actividad 1. *Haciendo aproximaciones en cálculos comunes con magnitudes inconmensurables.*

Nota: Consigna en la parte superior el grupo que te corresponde.

2. Se necesita hacer un barandal de madera, para una escalera, siguiendo el modelo que muestra la gráfica. ¿Cuál debe ser la longitud del largo del pasamano?

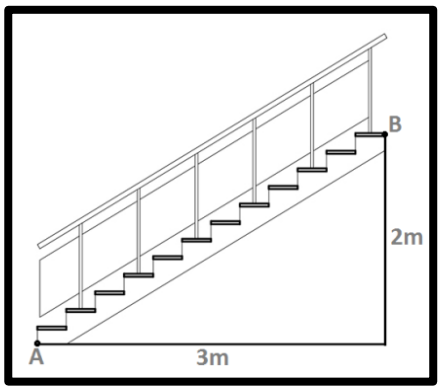


Figura 1. Pasamanos.

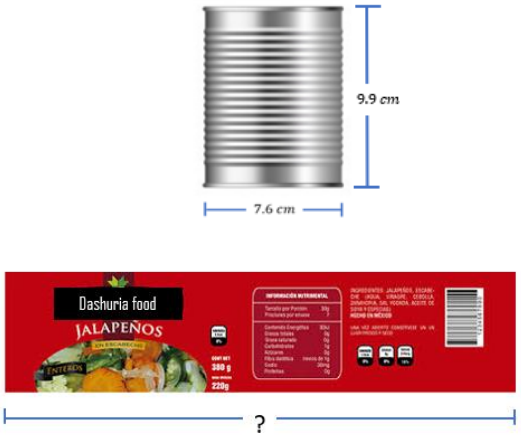


Figura 2. Etiqueta.

2. Una empresa de alimentos no perecederos desea colocar etiquetas a uno de sus productos cuya presentación es una lata cilíndrica de 9.9 *cm* de alto con un diámetro de 7.6 *cm*.

Si el proveedor ofrece etiquetas de 9.7 *cm* de ancho. Determina la longitud que se requiere para una lata.

Actividad 2. *Reflexionemos sobre las aproximaciones en contexto.*

c) **La distancia del barandal**.

- Si Juan es el encargado de hacer el barandal, ¿cuál de las cinco medidas calculadas en clase, le recomiendas para que haga sus estimaciones y diseñe el barandal? Justifica tu respuesta.
- En otro caso, si Juan necesita fabricar doscientos pasamanos ¿Cuál le recomendarías y por qué?

d) Longitud de la etiqueta.

¿Cuál crees que es la longitud de material requerido para una lata? Elige una de las siguientes opciones (marca con una x) y Justifica:

- Una de las cinco aproximaciones_____ ¿Cuál? _____ Justifica_____ _____
- Ninguna de las expuestas. ____Otra_____ ¿Cuál? _____ Justifica_____ _____
- ¿Todas las posibilidades son correctas? ___ Justifica_____ _____
- Otra respuesta_____ _____

Actividad 3. *Reflexionemos sobre los resultados de las operaciones con cantidades que se han truncado o aproximado.*

En los ejercicios propuestos en la actividad 1, se ha recurrido a la aproximación por la naturaleza de las cantidades que resultan de esos cálculos. Este es el proceso que usualmente hacemos en estos casos, sin embargo, veamos ¿qué sucede cuando operamos con cantidades que se han truncado o aproximado ya sea a la décima o a la centésima?

1. Aproxima los siguientes números a la centésima:

   a) $\frac{1}{3} \approx$
   b) $\pi \approx$

3. Con los resultados aproximados realiza las siguientes operaciones:

Tabla 1. Compara los cálculos con y sin el uso de la calculadora

a. Realiza los cálculos utilizando la calculadora científica directamente sin aproximar	**b. Realiza los cálculos utilizando la calculadora científica con los resultados aproximados en el ejercicio 1**
$\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) =$	$\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) \approx (0{,}33)(0{,}33) =$
$\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) =$	$\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) \approx (0{,}33)(0{,}33)(0{,}33)(0{,}33) =$
$\left(\frac{1}{3}\right)^{25} =$	$\left(\frac{1}{3}\right)^{25} \approx (0{,}33)^{25} =$
$\pi + \pi =$	$\pi + \pi \approx (3{,}14) + (3{,}14) =$
$(\pi)(\pi) =$	$(\pi)(\pi) \approx (3{,}14)(3{,}14) =$
$\left(\frac{1}{3}\right)(\pi) =$	$\left(\frac{1}{3}\right)(\pi) \approx (0{,}33)(3{,}14) =$

4. De acuerdo con los cálculos realizados en el cuadro anterior responde las siguientes preguntas:
    - **a.** Compara y establece las diferencias y similitudes entre los resultados de la columna A y la columna B.
    - **b.** ¿Qué sucede cuando aproximamos una cantidad numérica y operamos con ella?

Parte II: La aproximación a números racionales mediante encajamiento de intervalos cerrados y acotados por racionales. Hacia la aproximación intuitiva del concepto de límite y convergencia.

Lee con atención: un número racional se define por la relación de equivalencia $\frac{a}{b}$ con $b \neq 0$, donde $a\ , b\ \in Z$. Entre dos racionales siempre vamos a encontrar otro número racional. Sin embargo, números como $\frac{1}{6}$, presentan cierta particularidad en su expresión decimal, veamos cómo hacer una posible representación de este sin caer en errores de aproximación y representación.

Por ejemplo, Sabemos que $\frac{3}{2} = 1.5$. Para obtener esta expresión de derecha a izquierda, basta con hacer la operación $3 \div 2 = 1.5$ y de izquierda a derecha se representa la expresión decimal como una fracción así: $1.5 = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$. Otro ejemplo, sería 0.32851 es racional $0.32851 = \frac{32851}{100000}$. Si preguntas cuál es la mejor o la correcta, te pueden responder que tanto la fracción $\frac{3}{2}$, como la expresión decimal 1.5, lo son.

Actividad 1. *Ahora, volvamos con* $\frac{1}{6}$ *y su expresión decimal*.

Divide 1 entre 6 para obtenerla.

1. ¿El proceso de dividir es finito?
2. ¿Es posible expresar $\frac{1}{6}$ con un número limitado de cifras decimales en tu cuaderno?
3. ¿Qué particularidad tienen esas cifras decimales?
4. Divide 1 entre 6 en la calculadora. ¿Crees que el valor que aparece en la calculadora es el correcto?
5. ¿Será posible hacer una representación decimal de $\frac{1}{6}$ de manera que no se trunque su resultado?

Veamos una forma de aproximarnos a $\frac{1}{6}$ usando el software Geogebra. Ve al computador y abre el programa, ubica a $\frac{1}{6}$ en la recta numérica y selecciona la herramienta aproximar:

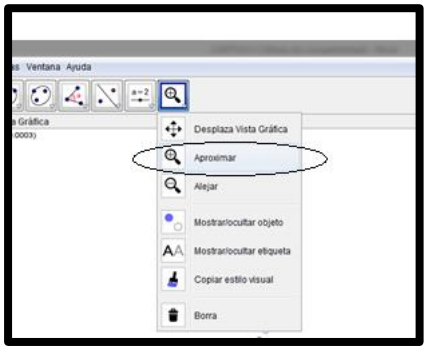


Imagen 10. Lupa en Geogebra.

6. Haz clic izquierdo sobre la recta en varias ocasiones hasta aproximarnos a $\frac{1}{6}$, primero a la décima 0.1, luego la centésima 0.16 y por último a la milésima 0.166. Cada vez que hagas estas aproximaciones, describe según lo que observas cuál es la décima, centésima, milésima (según sea el caso 0.1 o 0.16 o 0.166) más próxima por la izquierda y la más próxima por la derecha. Consigna tus resultados en la siguiente tabla:

Tabla 2. Encajamiento de racionales.

Número racional	**En cada aproximación determina cuál es el número racional más próximo por izquierda y cuál es el número racional más próximo derecha**			
	Décima	**Centésima**	**Milésima**	**Diezmilésima**
$\frac{1}{6}$	$0.1 < \frac{1}{6} < 0.2$			

a. De acuerdo con los valores más cercanos que has encontrado para $\frac{1}{6}$, ¿es posible encontrar otros más cercanos? Justifica.
b. ¿Es posible determinar cuántos números racionales hay alrededor de $\frac{1}{6}$?

Actividad 2. *Practiquemos lo aprendido*.

Usa el mismo proceso que utilizaste para aproximarte $\frac{1}{6}$ con otros números racionales. Puedes usar la recta numérica y debes consignar los valores aproximados en la siguiente tabla:

Tabla 3. Encajamiento de racionales

Número racional	**En cada aproximación determina cuál es el número racional más próximo por izquierda y cuál es el número racional más próximo derecha**			
	Décima	**centésima**	**Milésima**	**Diezmilésima**
$\frac{2}{3}$	$0.5 < \frac{2}{3} < 0.7$			
$\frac{35}{9}$				
$-\frac{27}{11}$				
$-\frac{1}{9}$				
Elige uno				

1. ¿Existen otros números racionales que se caracterizan por tener una expresión decimal como la de $\frac{1}{6}, \frac{35}{9}, -\frac{27}{11}, -\frac{1}{9}$? ¿Crees que es posible decir cuántos son? Justifica tus respuestas.
2. -1, 0, 100 y todos los números enteros son racionales, ¿crees que es posible aproximarnos a estos usando el proceso anterior? Inténtalo con algunos en la siguiente tabla. Puedes usar la recta numérica.

Tabla 4. Encajamiento de racionales.

Número racional	**En cada aproximación determina cuál es el número racional más próximo por izquierda y cuál es el número racional más próximo derecha.**			
	Décima	**centésima**	**Milésima**	**Diezmilésima**
-1				
0				
100				

3. ¿Crees que es posible aproximarse a cualquier número racional usando este método?

4. ¿Cuántos número racionales crees que hay entre 0 y $\frac{1}{6}$? Justifica tu respuesta.

5. ¿Cuántos números racionales crees que hay entre -1 y 1? Justifica tu respuesta.

Parte III. Aproximación a números irracionales y la incompletitud de Q a partir del encajamiento de intervalos con números racionales. Hacia la aproximación intuitiva del concepto de límite y convergencia.

Actividad 1. *El caso de* π.

Recordemos lo aprendido:

1. ¿Cuál es el procedimiento que normalmente utilizas para calcular el área de un círculo y la longitud de una circunferencia de radio *r*?
2. De acuerdo con estos procedimientos responde ¿Qué representa el número π?
3. ¿Qué diferencia hay entre π y números cómo $\frac{3}{2}, \frac{1}{6}$ y -1?

Aproximaciones graficas: Un poco de Historia

Lee con atención: sabemos que el área del círculo se "calcula" mediante la fórmula πr^2 y la longitud de la circunferencia con la fórmula $2\pi r$ y en algunas ocasiones, has aprendido que $\pi \approx 3.14$ es decir que se aproxima a ese valor. Pero ¿sabemos de dónde aparece esta fórmula? o ¿Qué representa π? Se dice que π es la razón entre la longitud de la circunferencia y su diámetro.

Hace muchos siglos 390 -337 a. C, Eudoxo de Cnidos, preocupado por medir el perímetro y el área de un terreno circular, utiliza un método conocido como el método de exhaución, perfeccionado más adelante por Arquímedes y Euclides. Este método, riguroso y complejo, consiste en inscribir y circunscribir polígonos a una circunferencia, aumentando progresivamente los lados de los polígonos, de modo que el perímetro y el área de los polígonos inscritos y circunscritos, se aproximen al perímetro y el área de la circunferencia. Para comprenderlo mejor, vamos a escudriñar un poco en fragmentos de la historia de π.

Muchos matemáticos han intentado encontrar la forma de aproximarse cada vez más a π, pues es un decimal infinito no periódico. Desde hace muchos siglos, Arquímedes, Zu Chong Zhi, Francisco de Vieta, Wallis, Leibnitz, Euler entre otros. Según Bárcena y Porras (2002), hasta el momento con la ayuda de ordenadores hay una aproximación de más de seis

mil cuatrocientos millones de dígitos decimales. En la actualidad, la determinación del número de dígitos en la aproximación de π mide la capacidad de cómputo de los nuevos ordenadores.

Sin embargo, dada la complejidad de lo propuesto por estos matemáticos, adoptaremos un método que proponen Bárcena y Porras (2002), que sin ser tan sofisticado como los de los otros autores mencionados, nos va a permitir aproximarnos a π. Podemos, primero hacerlo manualmente y luego con la ayuda del programa Geogebra para ilustrarlo mejor. Este método, parte de la idea de Arquímedes de inscribir y circunscribir polígonos regulares en una circunferencia. En este orden, el perímetro de los polígonos inscritos (p_n) es menor que el de la circunferencia, y el perímetro de los circunscritos (P_n) es mayor que este, así:

$$\boldsymbol{p_n < C < P_n}$$

Gráficamente algunas aproximaciones

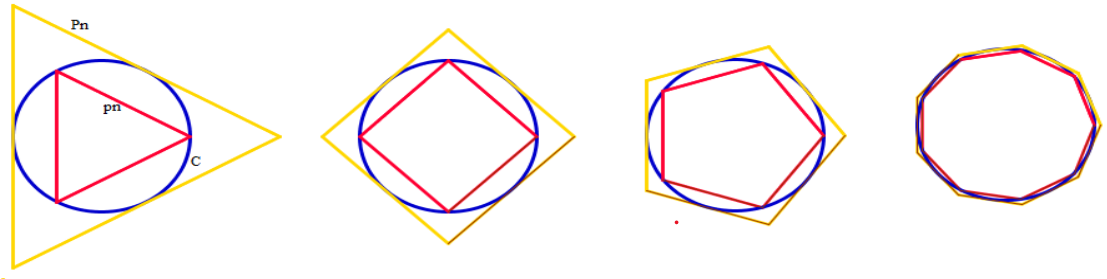


Imagen 11. Método de exhaución

Los polígonos circunscritos son de color amarillo, los circunscritos de color rojo y circunferencia es de color azul.

4. A medida que aumentan el número de los lados de los polígonos inscritos y circunscritos, ¿qué observas?

Ahora, para calcular la longitud de la circunferencia tenemos que $C = 2\pi r$, el perímetro de los polígonos inscritos p_n se calcula mediante la fórmula $2n\ sin\left(\frac{180^o}{n}\right)$ y el de los circunscritos P_n mediante la fórmula $2n\ tan\left(\frac{180^o}{n}\right)$.

Entonces reemplazamos en $p_n < C < P_n$ y obtenemos lo siguiente:

$$2n\ sin\left(\frac{180^o}{n}\right) < 2\pi r < 2n\ tan\left(\frac{180^o}{n}\right)$$

Si tomamos la circunferencia de radio uno (r =1) tenemos:

$$n\ sin\left(\frac{180^o}{n}\right) < \pi < n\ tan\left(\frac{180^o}{n}\right)$$

5. Ahora considerando a la circunferencia de radio 1 y dado que *n* es el número de lados del polígono, vamos a hacer varias aproximaciones a π, variando el número de lados desde el polígono más pequeño de $n = 3$, hasta otros con mayor número de lados. Puedes usar la calculadora para hacer estas aproximaciones, es decir toma los nueve decimales que arroja la calculadora y luego consigna los resultados en la siguiente tabla (al final de esta encontrarás un n =?, esto significa que puedes asignar el número de lados que elijas):

Tabla 5. Método de exhaución.

Número de lados	**Perímetro de polígonos inscritos:** $n\ sin\left(\frac{180^o}{n}\right)$	**Perímetro de polígonos circunscritos:** $n\ tan\left(\frac{180^o}{n}\right)$	**Escribe los valores en que π está comprendido** $p_n < \pi < P_n$	**Resta el valor mayor del menor** $P_n - p_n$
$n = 3$	$3\ sin\left(\frac{180^o}{3}\right) = 2.598076211$	$3\ tan\left(\frac{180^o}{3}\right) = 5.196152422$	$2.598076211 < \pi < 5.196152$	$= 2.598076211$
$n = 4$	$4\ sin\left(\frac{180^o}{4}\right) = 2.828427124$	$4\ tan\left(\frac{180^o}{4}\right) = 4$	$2.828427124 < \pi < 4$	$= 1.171572876$
$n = 5$				
$n = 6$				
$n = 10$				
$n = 100$				
$n = 1000$				
$n = 10\,000$				
$n = 100\,000$				
$n = 1000\,000$				
$n =$				

6. Ahora compara los resultados de la tabla con los valores que te muestra la calculadora científica de tu ordenador. ¿Qué diferencias y similitudes encuentras?
7. Con respecto a la aproximación de la calculadora científica de tu ordenador ($\pi = 3{,}14159265358979323846264338327 95$) y los resultados que vas obteniendo a medida que el número de lados aumentan de los polígonos inscritos y circunscritos. ¿Qué observas? (Compara las décimas, centésimas, milésimas, diezmilésimas…)
8. A medida que haces las restas de los valores que representan a π, en el proceso de inscripción y circunscripción de polígonos, ¿Qué notas en los resultados? ¿Crees que en algún momento el resultado llegará a ser cero?
9. ¿Es posible hacer una mejor aproximación a π? Si tu respuesta es sí, explica ¿cómo es posible hacerlo?

Vamos a observar este proceso de manera gráfica en Geogebra.

Abre el archivo llamado Método de exhaución. Arrastra el punto *n* tanto como desees y observa la construcción.

10. ¿Qué observas al hacer el arrastre?, con respecto:
    a. Al número de lados de los polígonos inscritos, circunscritos y la circunferencia.
    b. La variación en los valores para los que π está comprendido a medida que el número de lados aumenta.
11. Arrastra el deslizador, hasta notar que se superponen los polígonos inscritos y circunscritos sobre la circunferencia (se observa en la imagen que coinciden, los polígonos inscritos, circunscritos y la circunferencia). Luego puedes darle Zoom a la pantalla, ¿Qué observas con respecto a los polígonos inscritos, circunscritos y la circunferencia? ¿Crees que es posible, que en algún momento los polígonos inscritos, circunscritos y la circunferencia coincidan?
12. ¿El valor que nos arroja la calculadora científica, es el valor de π? Justifica tu respuesta.
13. ¿De acuerdo con el comportamiento de la cola infinita de decimales que vas descubriendo de π, crees que es posible representar a π de la forma $\frac{a}{b}$ con $a, b \in Z$ y $b \neq 0$? Justifica
14. De acuerdo con la respuesta de la pregunta anterior ¿π es un número racional? Justifica tu respuesta.
15. ¿Crees que el método de exhaución es un proceso válido para representar a π sin truncar su resultado? Justifica tu respuesta.

Actividad 2. *El caso de* $\sqrt{2}$

Vamos a calcular la distancia del punto *A* al punto *B* de la siguiente figura:

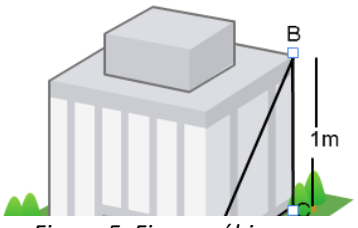


Figura 5. Figura cúbica.

1. ¿Cuál es la distancia de *A* hasta *B*?
2. ¿Lo puedes escribir con un número limitado de cifras decimales?
3. ¿Qué particularidad tienen las cifras decimales de la distancia de del punto *A* al punto *B*? ¿Son de la misma naturaleza por ejemplo que las de $\frac{1}{6}$?
4. ¿$\sqrt{2}$ es un número racional?

Has pensado, ¿cómo hacer sin la calculadora para describir la parte decimal de este resultado? Pues bien, una alternativa es el método de Herón Aznar, es posible hacer una aproximación a la raíz cuadrada de un número $n \in Q^+$, $\sqrt{n}$ mediante el siguiente algoritmo:

$$y = \frac{1}{2}\left(x + \frac{n}{x}\right)$$

Por ejemplo, para calcular las primeras cinco cifras decimales del número $\sqrt{2}$, vamos a proceder como sigue:

Para $X_0 = 1$ y sabemos que $n = 2$ tenemos:

$$X_1 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{1}\right) = \frac{3}{2} = 1.5$$

Utilizamos el resultado del primer cálculo para el siguiente y así sucesivamente:

Para $X_1 = \frac{3}{2}$

$$X_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{4}{3}\right) = \frac{17}{12} = 1.41666 \ldots$$

Para $X_2 = \frac{17}{12}$

$$X_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{17}{12} + \frac{24}{17}\right) = \frac{577}{408} = 1.414215 \ldots$$

Luego, con una aproximación de cinco decimales exactos 41421, podemos observar parte del comportamiento de la cola infinita de la expresión decimal de $\sqrt{2}$, pero si continuamos el proceso (que se torna un poco más complicado sin el uso de la calculadora) tenemos:

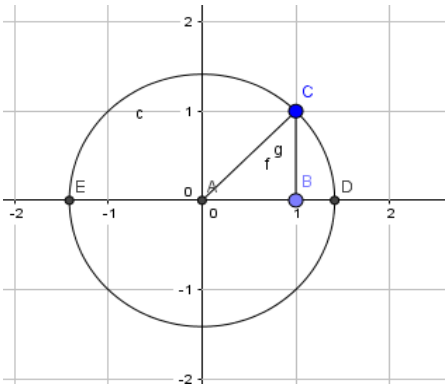
Para $X_3 = \frac{577}{408}$

$$X_4 = \frac{1}{2}\left(\frac{577}{408} + \frac{816}{577}\right) = 1{,}41421356237468991062629557889 01 \ldots.$$

5. ¿Crees que los valores que nos muestra la calculadora representan el valor real de $\sqrt{2}$ o son una aproximación? Justifica

Ahora, vamos a intentar aproximarnos a $\sqrt{2}$ usando el método de encajamiento que hemos venido utilizando en las anteriores actividades sin truncar el resultado. Para ello, se emplea la siguiente estrategia:

1. En tu ordenador en Geogebra, representas las coordenadas A= (0,0), B = (1,0), C= (1,1) en el plano cartesiano. Como se observa en la siguiente imagen.

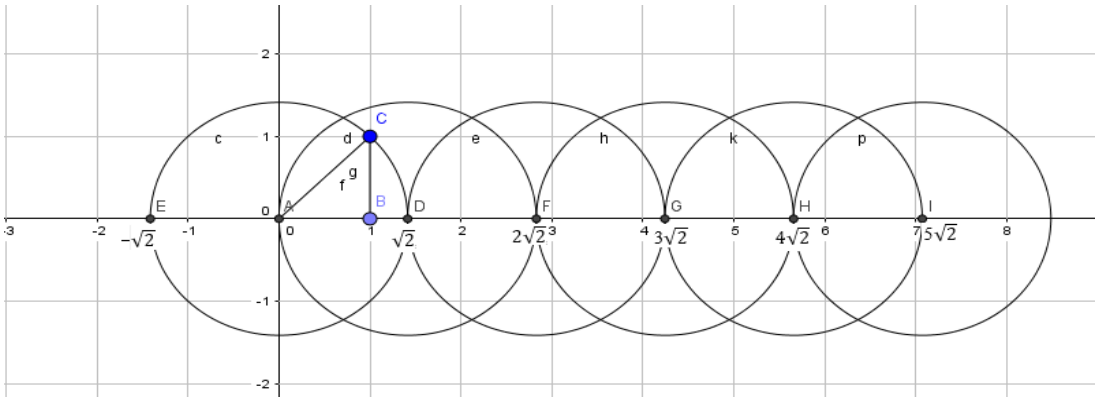


2. Une los puntos con segmentos en el orden AB, BC y CA, de modo que se forma el triángulo rectángulo ABC. (observa que el triángulo rectángulo que has construido tiene las mismas dimensiones que el formado en la imagen que encabeza esta actividad). Enviar captura de la construcción.
3. Traza una circunferencia con centro en A hasta C.
4. La circunferencia se interseca con el eje X en dos puntos, y los llamaremos D y E respectivamente.
5. Si comparas los segmentos $\underline{AC}$, $\underline{AE}$ y $\underline{AD}$ ¿Qué relaciones encuentras entre ellos?
6. Si sabemos que tanto la medida de $\underline{AB}$ como la de $\underline{BC}$ es igual a 1, entonces ¿Cuáles son las medidas de $\underline{AC}$, $\underline{AE}$ y $\underline{AD}$?
7. Ahora, en el proceso que realizaste, representaste a $-\sqrt{2}\ y\ \sqrt{2}$ en el eje X del plano cartesiano. Entonces, ahora te ubicas en el punto D y empiezas a aproximarte a $\sqrt{2}$ con la lupa de Geogebra, de la misma manera como lo hiciste para aproximarte a $\frac{1}{6}$. Es decir, vamos a "encajar" a $\sqrt{2}$ mediante números racionales con decimales finitos. Luego realiza el mismo proceso para -$\sqrt{2}$ y vas consignando las aproximaciones que observas a medida que manipulas la lupa, en la siguiente tabla:

Tabla 6. Encajamiento de irracionales a partir de racionales.

Número irracional	**En cada aproximación determina cuál es el número racional más próximo por izquierda y cuál es el número racional más próximo derecha**			
	Décima	**centésima**	**Milésima**	**Diezmilésima**
$\sqrt{2}$	$1{,}3 < \sqrt{2} < 1{,}5$			
$-\sqrt{2}$				

8. Ahora, calcula las diferencias entre los extremos que encontraste en las décimas, las centésimas, las milésimas y las diezmilésimas. ¿Qué observas? ¿Crees que este resultado se aproxime a cero?
9. Con la ayuda del compás del software Geogebra representa sobre el eje X: $2\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$, $4\sqrt{2}$ y $5\sqrt{2}$. Construye la circunferencia con radio $\underline{AD}$ y con centro D, con esto se forma F, luego con radio $\underline{FD}$ y con centro en F y así sucesivamente.



10. Luego haz lo mismo, pero en diferente dirección y representa en la recta a: $-2\sqrt{2}$, -3$\sqrt{2}$, $-4\sqrt{2}$ y -5$\sqrt{2}$. Enviar captura de las construcciones.
11. ¿Crees que es posible determinar cuántos múltiplos de $\sqrt{2}$ puedes representar en la recta siguiendo este proceso? Justifica.
12. Los múltiplos de $\sqrt{2}$ son números racionales o irracionales.
13. ¿Crees que existan más números irracionales entre 0 y $\sqrt{2}$ o entre 0 y $-\sqrt{2}$? Menciona algunos. ¿Puedes determinar cuántos números irracionales hay entre 0 y $\sqrt{2}$ o entre 0 y $-\sqrt{2}$? Justifica
14. En la actividad anterior habíamos concluido que lo números racionales son densos, porque siempre se cumple que dados dos números racionales a y b, puedo encontrar otro número racional entre ellos. ¿Crees que los números irracionales son densos? Justifica.
15. Inventa un número racional cualquiera y aproxímate tanto como desees a este, mediante el método de encajamiento.
16. ¿Crees que es posible representar a cualquier número irracional mediante el encajamiento de intervalos? Justifica tu repuesta.

Parte IV. Los intervalos cerrados y acotados.

Actividad 1. *Acerquémonos a la definición de intervalos racionales y de racionales encajados*.
Intervalo: Un intervalo cerrado es un conjunto de números, que se representa comúnmente como un par ordenado. Por ejemplo, un intervalo racional se denota de la siguiente manera:
$I = [a, c] = \{x \epsilon Q | \, a \leq x \leq c \}$, donde $a, c \in Q$

Racional encajado: Un racional encajado es una colección de intervalos racionales
$I_n = [a_n, c_n]$ para $n \geq 1$ que satisfacen:
$I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq I_4 \supseteq \cdots$ y $c_n - a_n \to 0$.

Pese a que existen otros tipos de intervalos como el abierto y el semiabierto, para los propósitos de este trabajo se centrará la atención principalmente en los intervalos cerrados. Estos se denotan con letras mayúsculas, así dado el intervalo L, entonces $L = [\underline{L}, \underline{L}]$, donde $\underline{L} < \underline{L}$. Por ejemplo, sea $M = \sqrt{2}$, una representación intervalar de M sería $\sqrt{2}\, \epsilon [1.4, 1.5]$ y la longitud del intervalo

se calcula restando los extremos del intervalo, así $1.5 - 1.4 = 0.1$. A medida que se va encajando este número la diferencia de los extremos tiende a cero.

> **Intervalos degenerados.** Estos son los intervalos de longitud cero, por ejemplo:
>
> $5 \in [5,5]$

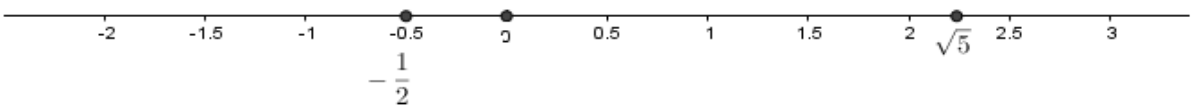
1. Representa mediante intervalos (no degenerados) las siguientes magnitudes:

a) $\sqrt{3} = \sqrt{3} \in [1.6, 1.8]$
b) -5=
c) 0=
d) $\frac{5}{2} =$
e) $\frac{1}{9} =$
f) La temperatura durante el día en Cali Colombia oscila entre 15 y 35 grados centígrados.

Parte V. Los números reales como conjuntos de intervalos

Actividad 1. *Relacionemos los conceptos previos.*
De acuerdo con los procedimientos realizados en las actividades anteriores, responde las siguientes preguntas:

1. ¿Cuál es la diferencia entre un número racional y un número irracional?
2. Menciona algunos números racionales muy próximos por la derecha y por la izquierda a $-\frac{1}{2}$, $\sqrt{5}$, y 0.



3. Menciona algunos números irracionales muy próximos por la derecha y por la izquierda a $-\frac{1}{2}$, $\sqrt{5}$, 1 y 0.
4. ¿Puedes determinar cuántos racionales existen muy próximos por la derecha y por la izquierda alrededor de un número racional? Justifica tu respuesta.
5. ¿Puedes determinar cuántos irracionales existen muy próximos por la derecha y por la izquierda alrededor de número racional? Justifica tu respuesta.
6. ¿Puedes determinar cuántos racionales existen muy próximos por la derecha y por la izquierda alrededor de número irracional? Justifica tu respuesta.
7. ¿Puedes determinar cuántos irracionales existen muy próximos por la derecha y por la izquierda alrededor de número irracional? Justifica tu respuesta.
8. En las actividades anteriores, concluimos que los números racionales no llenan la recta numérica, ¿Sera posible que entre los números racionales y los números irracionales se llene la recta numérica? ¿Es decir a cada punto de la recta numérica le corresponde un racional o un irracional?

Actividad 2. *Aproximándonos a la definición de los números reales como un conjunto de intervalos encajado.*

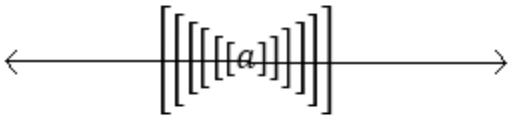
Lee con atención:

Como te has dado cuenta, en el desarrollo de cada una de las actividades, en la acción de medir no siempre encuentras resultados expresables como números racionales exactos, algunos son números racionales con una expresión decimal infinita periódica y en otros casos te has encontrado con números irracionales, es decir con números con una expresión decimal infinita no periódica.

Además, has descubierto que existen infinitos racionales muy próximos a un racional o a un irracional y que, por esa razón, siempre cada número racional o irracional estará comprendido entre dos números racionales. En otras palabras, todo número racional o irracional pertenece al menos a un intervalo.

Ahora, para aquellos números cómo los racionales infinitos periódicos y los irracionales, si bien es cierto que no es posible saber cuántas cifras decimales tienen y mucho menos consignarlas en tu cuaderno, al menos sabes que están comprendidos entre dos racionales y que puedes aproximarte a ellos tanto como quieras por la izquierda y por la derecha.

También has descubierto que a cada punto de la recta numérica le corresponde un número racional o un número irracional, y que cada punto está rodeado por infinitos números racionales muy próximos por la derecha y por la izquierda.



De esta forma, al conjunto formado por los números racionales y los números irracionales, se le denomina **conjunto de números reales (**R**)**, que cumple con la condición ser el conjunto de intervalos encajados.

1. Ya has reflexionado sobre la densidad de los números racionales y los números irracionales. ¿Serán los números reales un conjunto denso? Justifica.

Actividad 3. *Representación de un número real como intervalo encajado.*

¿Cómo se puede representar un número real mediante un encajonamiento de intervalos? Veamos unos ejemplos para intentar dar respuesta a esta pregunta.

$2 \in \left[2-\frac{1}{n},\ 2+\frac{1}{n}\right]$ para todo $n \in N$, veamos lo que sucede en la siguiente tabla si le asignamos valores a n.

Tabla 7. Encajamiento de 2.

$n \in N$	$\left[2-\frac{1}{n}, \quad 2+\frac{1}{n}\right]$	**Intervalo**
$n=1$	$\left[2-\frac{1}{1}, \quad 2+\frac{1}{1}\right]=[1,3]$	$2 \in [1,3]$

$n = 2$	$\left[2 - \frac{1}{2}, \quad 2 + \frac{1}{2}\right] = [1.5, 3.5]$	$2 \in [1.5, 3.5]$
$n = 3$	$\left[2 - \frac{1}{3}, \quad 2 + \frac{1}{3}\right] = \left[\frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right]$	$2 \in \left[\frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right]$
$n = 10$	$\left[2 - \frac{1}{10}, \quad 2 + \frac{1}{10}\right] = [1.9, 2.1]$	$2 \in [1.9, 2.1]$
$n = 100$	$\left[2 - \frac{1}{100}, \quad 2 + \frac{1}{100}\right] = [1.99, 2.01]$	$2 \in= [1.99, 2.01]$
$n = 1000$	$\left[2 - \frac{1}{1000}, \quad 2 + \frac{1}{1000}\right] = [1.999, 2.001]$	$2 \in [1.999, 2.001]$
$n = 10\,000$	$\left[2 - \frac{1}{10000}, \quad 2 + \frac{1}{10000}\right] = [1.9999, 2.0001]$	$2 \in [1.9999, 2.0001]$
$n = elije\ el\ valor$		

Como puedes observar cada vez que n es más grande, estos valores se aproximan a 2.

2. Haz el ejercicio de aproximación para el número de Euler que se representa como e, si sabemos que $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \ para\ todo\ n \in N$ se aproxima a e para valores muy grandes de n; para ello, habremos de recurrir al proceso que conocemos, aproximarnos a e en un conjunto de intervalos encajados Así:

$$e \in \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - \frac{1}{n}, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n + \frac{1}{n}\right]$$

Puedes calcular algunas aproximaciones utilizando los mismos valores de n del ejemplo 1.

Tabla 8. Encajamiento del número e.

$n \in N$	$\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - \frac{1}{n}, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n + \frac{1}{n}\right]$	**Intervalo**
$n = 1$	$\left[\left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 - \frac{1}{1}, \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 + \frac{1}{1}\right]$	$e \in [1, 3]$
$n = 2$	$\left[\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}, \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\right]$	$e \in [1.75, 2.75]$
$n = 3$		

$n = 10$		
$n = 100$		
$n = 1000$		
$n = 10\,000$		
$n = elije\ el\ valor$		

Retomando los ejemplos anteriores notamos que la aproximación hacia π fue mediante un encajonamiento de intervalos:

$$n\ sin\left(\frac{180^o}{n}\right) < \pi < n\ tan\left(\frac{180^o}{n}\right)\ \forall\ n \in N$$

1. Al igual que $-\sqrt{2}$, $\frac{1}{6}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ y todos los ejemplos que hemos construido. ¿Crees que sea posible representar cualquier número real mediante un encajamiento de intervalos? Justifica tu respuesta.
2. Sobre la siguiente afirmación:

> Un número real es el límite de sucesiones de intervalos encajados.

Reflexiona si es verdadera o falsa y justifica tu respuesta.