



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

---

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

---

Formalismo canónico de los invariantes de Pontryagin y  
Euler con un parámetro de Barbero-Immirzi

Tesis presentada al

**Colegio de Física**

como requisito parcial para la obtención del grado de

**LICENCIADO EN FÍSICA**

por

Luis Antonio Huerta del Campo

Asesorado por

Dr. Alberto Escalante Hernández

Dr. Cupatitzio Ramírez Romero

Puebla Pue.  
Julio de 2025





Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

---

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

---

Formalismo canónico de los invariantes de Pontryagin y  
Euler con un parámetro de Barbero-Immirzi

Tesis presentada al

**Colegio de Física**

como requisito parcial para la obtención del grado de

**LICENCIADO EN FÍSICA**

por

Luis Antonio Huerta del Campo

Asesorado por

Dr. Alberto Escalante Hernández

Dr. Cupatitzio Ramírez Romero

Puebla Pue.  
Julio de 2025



**Título:** Formalismo canónico de los invariantes de Pontryagin y Euler  
con un parámetro de Barbero-Immirzi

**Estudiante:** LUIS ANTONIO HUERTA DEL CAMPO

COMITÉ

---

Presidente

---

Secretario

---

Vocal

---

Vocal

---

Dr. Alberto Escalante Hernández  
Asesor

---

Dr. Cupatitzio Ramírez Romero  
Co-asesor



# Índice general

|                                                                                              |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1. Introducción                                                                              | 3  |
| 2. Gravedad autodual                                                                         | 5  |
| 3. Invariantes topológicos de Euler y Pontryagin en su forma autodual                        | 9  |
| 4. Formulación de Holst                                                                      | 11 |
| 5. Invariantes topológicos de Pontryagin y Euler con parámetro de Barbero-Immirzi arbitrario | 13 |
| 6. Conclusiones                                                                              | 17 |
| A. Algoritmo de Dirac-Bergmann                                                               | 19 |
| Bibliografía                                                                                 | 21 |



# Abstract

Usando el formalismo canónico de Dirac, se realizará el análisis Hamiltoniano de los invariantes de Pontryagin y Euler vistos como teorías de campo, acoplados con un parámetro de Barbero-Immirzi  $[BI]$ . Reportamos una estructura canónica completa; el estudio de las restricciones y el álgebra entre ellas. En particular, pondremos especial atención al caso cuando el parámetro  $BI$  toma el valor imaginario de  $\pm i$ , puesto que nuestros resultados reproducen la formulación autodual de los invariantes topológicos que ya ha sido reportada en la literatura.



# Capítulo 1

## Introducción

En los últimos años, con el fin de tener una mejor comprensión del campo gravitacional, se ha tenido un particular interés en proponer nuevas formulaciones de la Relatividad General [*RG*], ya sea a nivel del espacio de configuración o a nivel del espacio fase, y estudiar la posible existencia de nuevas simetrías. Por ejemplo, respecto a la formulación hamiltoniana, se encuentra el trabajo desarrollado por Arnowit-Deser-Misner [*ADM*] donde las variables dinámicas, en lugar de ser la métrica del espacio tiempo, ahora son consideradas la tres-métrica de la foliación y su momento canónico conjugado. Sin embargo, al analizar las restricciones se encuentra que, al tratar de realizar una cuantización canónica, la no linealidad del campo gravitacional manifestada en las restricciones hace muy complicado el proceso [1].

Por otra parte, en los años 80's el panorama se aclara un poco más gracias a los trabajos desarrollados por Ashtekar [2, 3, 4, 5], donde se introducen un nuevo conjunto de variables, dando origen a la formulación autodual de la *RG*. Las variables de Ashtekar simplifican las restricciones que se habían obtenido en la formulación *ADM*, siendo ahora polinomiales, pero debido al carácter de las variables de Ashtekar, que son complejas, ahora con dichas variables se describiría a *RG* compleja. En los años 90's nuevamente se obtiene un progreso en la formulación Hamiltoniana de *RG* cuando Barbero introduce un nuevo conjunto de variables [6]. Las variables de Barbero son reales, ahora describirían a *RG*, sin embargo, la estructura polinomial de las restricciones que se había encontrado en la formulación de Ashtekar, se vuelve a perder.

Los trabajos desarrollados por Ashtekar y Barbero, fueron realizados a nivel del espacio fase. En 1996, Holst presenta una acción [7] que consiste en acoplar la acción de Palatini a un término que es llamado el término de Holst mediante un parámetro. Realizar la formulación hamiltoniana de la acción de Palatini no es trivial, sin embargo, cuando se le agrega el término de Holst, el análisis se realiza en forma más directa, por lo menos en el caso autodual. Por otra parte, el parámetro que acopla a la acción de Palatini con el término de Holst, llamado parámetro de Barbero-Immirzi [*BI*] (comúnmente llamado parámetro  $\gamma$ ), tiene un rol muy particular. Por una parte, a nivel lagrangiano, el parámetro *BI* no tiene contribución alguna a las ecuaciones de movimiento. Por otra parte, a nivel Hamiltoniano, el parámetro modifica los paréntesis fundamentales y presenta una contribución no trivial en el espectro cuántico del operador de área y volumen en gravedad cuántica por lazos [8, 9, 4]. Si el parámetro toma ciertos valores, por ejemplo, si  $\gamma = \pm i$ , se reproduce la formulación autodual de Ashtekar. Por otra parte, si  $\gamma = 1$  se obtiene la formulación de Barbero. Las implicaciones que tiene el agregar este término y la relevancia física del parámetro *BI* tanto en el análisis lagrangiano y hamiltoniano como en otros ámbitos del estudio de gravedad y cosmología es un problema abierto, e investigar la relevancia de dicho parámetro es muy importante porque podría tener un papel relevante en la formulación cuántica de gravedad. Aunque existen diversas interpretaciones sobre el papel que juega dicho parámetro, permanece la ambigüedad respecto a su presencia y relevancia, en particular, nos concierne la interpretación topológica de dicho parámetro [10] la cual puede ser estudiada a partir de la introducción de otros términos topológicos a la acción

de Holst [11].

El término que agregó Holst a la acción de Palatini es un término que por separado no presenta grados de libertad. Además del término de Holst hay dos invariantes diferentes de este, puesto que son una divergencia total (o una forma exacta), dichos invariantes se les conoce como los invariantes de Pontryagin y Euler  $[PE]$  [12, 13]. Al igual que el término de Holst, si acoplamos dichos invariantes a la acción de  $RG$ , estos no presentan una contribución alguna a las ecuaciones de movimiento de  $RG$ . Sin embargo, uno espera que, a nivel hamiltoniano, dichos invariantes presenten una contribución importante en los paréntesis fundamentales o en la estructura de las restricciones mediante el parámetro  $\gamma$ .

Debido a lo anterior, en esta tesis, se propone estudiar de manera exhaustiva el formalismo canónico de los invariantes de  $PE$  acoplados por un parámetro  $BI$ . Con este estudio, sentaremos las bases para poder estudiar en un futuro la contribución de los invariantes de  $PE$  a la formulación canónica de  $RG$  con un parámetro arbitrario. Cabe mencionar que en nuestros resultados, si  $\gamma = \pm i$ , todo se reduce a la formulación autodual de los invariantes de  $PE$ , de esta manera, nuestros resultados extienden lo reportado en la literatura.

## Capítulo 2

# Gravedad autodual

En este Capítulo se estudiará la formulación de gravedad autodual propuesta inicialmente por Ashtekar [2], la cual significó un avance de suma importancia en el estudio de la cuantización de la teoría de gravedad, mediante métodos no-perturbativos, y marcó el inicio de lo que hoy se conoce como la teoría de gravedad cuántica de lazos (*LQG*) [14]. Se obtendrá la formulación de *RG* a partir de la acción de Holst y se realizará el análisis hamiltoniano para obtener sus restricciones y el álgebra que forman.

De esta manera, partimos de la siguiente acción

$$S_A[e, \omega] = \alpha_1 \int \star(e_I \wedge e_J) \wedge R^{IJ}[\omega] + \alpha_2 \int e_I \wedge e_J \wedge R^{IJ}[\omega], \quad (2.1)$$

donde el primer término corresponde a la acción de Palatini usual en el formalismo de primer orden y el segundo término al invariante propuesto por Holst [7]. En este trabajo los índices  $I, J, \dots$  son índices de  $SO(1, 3)$ , donde la signatura utilizada es  $\eta = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ ; las  $e_I$  son las tetradas,  $\omega^{IJ} = \omega_{\mu}^{IJ} dx^{\mu}$  es la 1-forma de la conexión de Lorentz y  $R^{IJ} = \frac{1}{2} R_{\mu\nu}^{IJ} dx^{\mu} \wedge dx^{\nu}$  su curvatura, con  $\mu, \nu, \dots$  como los índices de espacio-tiempo.

Tomando las constantes tales que  $\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = -i\epsilon$ , e introduciendo la conexión siguiente

$$A^{IJ} = \frac{1}{2}(\omega^{IJ} - \frac{i\epsilon}{2}\epsilon_{KL}^{IJ}\omega^{KL}), \quad (2.2)$$

donde  $\epsilon = 1$  para la forma autodual y  $\epsilon = -1$  para la anti-autodual, la acción (2.1) toma la siguiente forma,

$$S_A[e, A] = -2i\epsilon\alpha_1 \int e_I \wedge e_J \wedge F^{IJ}[A], \quad (2.3)$$

donde  $F^{IJ}[A]$  es la curvatura autodual definida por

$$F^{IJ}[A] = \frac{1}{2}(R^{IJ} - \frac{i\epsilon}{2}\epsilon_{KL}^{IJ}R^{KL}). \quad (2.4)$$

Realizando una descomposición 3+1 en los índices de espacio-tiempo tomando  $\mu = (0, a)$ , y en los índices de Lorentz tomando  $I = (0, i)$ , y fijando el gauge temporal las tetradas estarán expresadas por

$$\begin{aligned} e_0^0 &= N, \\ e_a^0 &= 0, \\ e_0^i &= e_a^i N^a. \end{aligned} \quad (2.5)$$

## CAPÍTULO 2. GRAVEDAD AUTODUAL

---

donde  $N$  es la función lapse y  $N^a$  el shift. Además, haciendo el cambio de variable siguiente

$$\begin{aligned} A_a^i &= -\epsilon^{ijk} A_a^{jk}, \\ A_0^i &= -\epsilon^{ijk} A_0^{jk}, \\ A_{a\ 0i} &= \frac{i\epsilon}{2} A_{a\ i}, \\ A_{0\ 0i} &= \frac{i\epsilon}{2} A_{0\ i}, \end{aligned} \tag{2.6}$$

se tiene que la acción (2.3) escrita en términos de estas nuevas variables tomará la forma

$$\begin{aligned} S_A[e, A] &= -2i\epsilon\alpha_1 \int d^4x \eta^{abc} e_a^i [i\epsilon N [\partial_b A_{c\ i} + \frac{1}{2}\epsilon_i^{jk} A_{b\ j} A_{c\ k}] \\ &\quad + e_j^d N^d [\epsilon_{ij}^k \partial_b A_{c\ k} + A_{b\ i} A_{c\ j}] \\ &\quad - e_b^j [\frac{1}{2}\epsilon_{ij}^k (\partial_0 A_{ck} - \partial_c A_{0k}) + A_{0i} A_{cj}]]. \end{aligned} \tag{2.7}$$

donde hemos usado la convención  $\eta^{abc} \equiv \epsilon^{0abc}$  y  $\epsilon^{ijk} \equiv \epsilon^{0ijk}$ .

Ahora, continuamos con el análisis hamiltoniano de la teoría. Las variables de campo  $(N, N_a, A_0^i)$  tienen momentos canónicos iguales a cero sobre la superficie de evolución, por lo que se identificarán como multiplicadores de Lagrange. El momento  $\pi_i^a$  se define como el par canónico de  $A_a^i$  y está dado por

$$\pi_k^c = i\epsilon\alpha_1 \eta^{abc} e_a^i e_b^j \epsilon_{ijk}. \tag{2.8}$$

Una vez que tenemos indentificadas las variables canónicas, los paréntesis fundamentales de Poisson estarán determinados por

$$\{A_a^i(\vec{x}), \pi_j^b(\vec{y})\} = \delta_a^b \delta_j^i \delta^3(\vec{x} - \vec{y}). \tag{2.9}$$

Si ahora definimos la siguiente curvatura, que tomará una forma tipo Yang-Mills

$$F_{ab}^i = \partial_a A_b^i - \partial_b A_a^i + \epsilon_{jk}^i A_a^j A_b^k, \tag{2.10}$$

la acción (2.7) se podrá escribir de manera más compacta, para ello vamos a considerar la siguiente relación entre las curvaturas,

$$\eta^{abc} F_{bc\ 0i} = i\epsilon \eta^{abc} F_{bc\ i}, \tag{2.11}$$

y además, vamos a considerar la siguiente igualdad

$$\epsilon_m^{kl} \pi_k^c \pi_l^d F_{cd}^m = -2\alpha_1^2 \epsilon \eta^{abc} e_a^i F_{bc\ i}. \tag{2.12}$$

Entonces, el término proporcional a  $N$  se puede escribir como

$$2\alpha_1 \eta^{abc} N e_a^i F_{bc\ 0i} = -\frac{1}{2\alpha_1} \frac{N}{e} \epsilon^{ij} \pi_k^a \pi_j^b F_{ab}^k. \tag{2.13}$$

Por otra parte

$$\eta^{abc} F_{bc\ ij} = -\eta^{abc} \epsilon_{ijk} (\partial_b A_{c\ k} + \frac{1}{2} A_{b\ i} A_{c\ j} - \frac{1}{2} \epsilon_{in}^m \epsilon_{mjl} A_b^n A_c^l), \tag{2.14}$$

y, usando la identidad de Jacobi entre las constantes de estructura,

$$-\epsilon_{in}^m \epsilon_{mjk} + \epsilon_{jmn} \epsilon_{ki}^m + \epsilon_{ij}^m \epsilon_{kmn} = 0, \tag{2.15}$$

se tiene que

$$\eta^{abc} F_{bc\ ij} = -\eta^{abc} \epsilon_{ijk} F_{bc}^k. \tag{2.16}$$

Entonces, el término relacionado con la función shift,  $N^a$ , se puede escribir como

$$\begin{aligned} -2i\epsilon\alpha_1\eta^{abc}N^de_d^ie_a^jF_{bc\ ij} &= i\epsilon\alpha_1\eta^{abc}N^de_d^ie_a^j\epsilon_{ijk}F_{bc}^k \\ &= 2N^a\pi_i^bF_{ab}^i. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Además, se tiene que

$$\begin{aligned} -2i\epsilon\alpha_1\eta^{abc}e_a^ie_b^jF_{0c\ ij} &= \pi^{ck}\partial_0A_{ck} - i\epsilon\alpha_1\eta^{abc}e_a^ie_b^j(\partial_cA_{0k} - \frac{1}{2}A_{0\ i}A_{c\ j} \\ &\quad - \frac{1}{2}\epsilon_{il}^m\epsilon_{mjk}A_0^lA_c^k), \end{aligned} \quad (2.18)$$

y usando la identidad de Jacobi (2.15), se tiene que el término restante se puede escribir como

$$\begin{aligned} -2i\epsilon\alpha_1\eta^{abc}e_a^ie_b^jF_{0c\ ij} &= \pi^{ck}(\partial_0A_{ck} - \partial_cA_{0k} + \epsilon_{mn}^kA_{0m}A_{cn}) \\ &= \pi^{ck}\dot{A}_{ck} + A_{0k}(\partial_c\pi^{ck} + \frac{1}{2}\epsilon^{mnk}A_c^m\pi^{cn}) \\ &= \pi^{ck}\dot{A}_{ck} + A_{0k}D_c\pi^{ck} \end{aligned} \quad (2.19)$$

donde definimos la derivada covariante tipo Yang-Mills

$$D_aT_i^b = \partial_aT_i^b + \epsilon_{ij}^kA_a^jT_k^b. \quad (2.20)$$

Por lo tanto, la densidad hamiltoniana (modulo términos de frontera) será

$$\mathcal{H}_0[A] = \frac{1}{2\alpha_1}N'\epsilon^{ij}_k\pi_i^a\pi_j^bF_{ab}^k - 2N^a\pi_i^bF_{ab}^i - A_0^iD_a\pi_i^a, \quad (2.21)$$

donde se definió  $N' = \frac{N}{e}$ .

Podemos ver de (2.21) que se identifican las siguientes restricciones

$$\begin{aligned} H &\equiv \epsilon^{ij}_k\pi_i^a\pi_j^bF_{ab}^k \approx 0, \\ V_a &\equiv \pi_i^bF_{ab}^i \approx 0, \\ G_i &\equiv D_a\pi_i^a \approx 0, \end{aligned} \quad (2.22)$$

donde  $H$  es conocida como restricción escalar o Hamiltoniana,  $V_a$  es conocida como restricción vectorial y  $G_i$  es conocida como la restricción de Gauss. La restricción de Gauss, es de particular importancia puesto que genera la simetría de rotaciones bajo el grupo  $SU(2, \mathbb{C})$  similares a las de una teoría de Yang-Mills convencional. La restricción Hamiltoniana  $H$  está relacionada con la evolución temporal, mientras que la restante está relacionada con la simetría de difeomorfismos mediante la combinación de restricciones

$$\mathcal{D}_a = V_a - A_a^iG_i, \quad (2.23)$$

que es la que genera los difeomorfismos sobre las superficies espaciales [15].

La hamiltoniana se escribe finalmente como

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{2\alpha}N'H - 2N^aV_a - A_0^iG_i. \quad (2.24)$$

Los generadores de transformaciones de norma se definen de la siguiente manera,

$$G(T^i) = \int d^3x T^i(\vec{x})G_i(\vec{x}), \quad (2.25)$$

$$D(M^a) = \int d^3x M^a(\vec{x})\mathcal{D}_a(\vec{x}), \quad (2.26)$$

$$H(M) = \int d^4x M(\vec{x})H(\vec{x}). \quad (2.27)$$

Para simplificar los desarrollos algebraicos, es conveniente escribir el álgebra de restricciones en términos de los generadores, aunque es equivalente a escribirla en términos de las restricciones por sí solas. El álgebra de Poisson que se encuentra es la siguiente,

$$\{G(M^i), G(N^j)\} = G(\epsilon_{ij}^k M^i N^j), \quad (2.28)$$

$$\{H(M), G(N^i)\} = 0, \quad (2.29)$$

$$\{D(M^a), G(N^i)\} = G(M^a \partial_a N^i), \quad (2.30)$$

$$\{D(M^a), H(N)\} = H(M^a \partial_a N), \quad (2.31)$$

$$\{D(M^a), D(N^b)\} = D(N^a \partial_a M^b - M^a \partial_a N^b), \quad (2.32)$$

$$\{H(M), H(N)\} = D(2\pi_i^a \pi^{bi} (M \partial_b N - N \partial_b M)) - G(2A_a^i \pi_j^a \pi^{bj} (M \partial_b N - N \partial_b M)) \quad (2.33)$$

Nótese que, aunque las restricciones no forman un álgebra de Lie debido a la presencia de los momentos en los resultados de los paréntesis de Poisson (2.33), todos ellos son iguales a cero sobre la superficie de evolución, por lo tanto todas ellas son de primera clase y la teoría no tiene restricciones de segunda clase. En total se tienen 7 restricciones de primera clase y 18 variables del espacio fase, por lo que se tienen entonces D.o.F. =  $\frac{1}{2}(18 - 2(7)) = 2$  grados de libertad, coincidiendo con lo que se obtiene en la formulación dada en términos de la métrica.

Esta formulación hamiltoniana de  $RG$  ofrece ciertas ventajas en comparación con otras como la de ADM, en particular, se encuentran restricciones polinomiales que son significativamente más fáciles de manejar como se puede observar en (2.22), además, su evolución temporal es más fácil de calcular [16]. Aunado a lo anterior, existe un estado que es solución exacta de las restricciones de esta formulación de  $RG$ , llamado estado de Kodama (o estado Chern-Simons) [17], el cual se puede interpretar como un estado base que cuenta con un límite semiclásico que resulta en la  $RG$  convencional, aunque su significado físico está en discusión debido a algunos problemas que se tienen al trabajar con él, en particular el hecho de que sea no-normalizable [18].

## Capítulo 3

# Invariantes topológicos de Euler y Pontryagin en su forma autodual

A diferencia de la formulación métrica de  $RG$ , la formulación de Palatini solo admite un número reducido de términos que se pueden agregarse a la acción, los cuales deben ser invariantes bajo las dos simetrías manifestadas en esta formulación; la simetría fundamental de  $RG$  que es la de difeomorfismos y la simetría de Lorentz. En particular, uno de estos términos corresponde al invariante de Holst que se introdujo en el capítulo anterior y sobre el cual se ahondará en el siguiente, y otros dos corresponden a los invariantes de Euler y Pontryagin los cuales se analizarán en este capítulo en su forma autodual y posteriormente en una forma más general en el Capítulo 5.

Para empezar con nuestro estudio, partimos de la siguiente acción

$$S_{PE}[\omega] = \alpha_3 \int \star R_{IJ}[\omega] \wedge R^{IJ}[\omega] + \alpha_4 \int R_{IJ}[\omega] \wedge R^{IJ}[\omega], \quad (3.1)$$

donde el primer término lo identificamos con el invariante topológico de Euler y el segundo con el de Pontryagin en su forma general. Ahora, escribiremos su forma autodual, dada cuando  $\frac{\alpha_4}{\alpha_3} = -i\epsilon$ , la cual se puede escribir en términos de la conexión autodual/anti-autodual (2.2) como

$$S_{PE}[A] = -2i\epsilon\alpha_3 \int F_{IJ}[A] \wedge F^{IJ}[A]. \quad (3.2)$$

donde  $F_{IJ}$  ya fue definida en el Capítulo anterior (2.4).

Haciendo la descomposición 3+1 en ambos índices y haciendo el cambio de variable (2.6) se tiene que

$$S_{PE}[A] = -4i\epsilon\alpha_3 \int d^4x \eta^{abc} [(\partial_0 A_{a\ i} - \partial_a A_{0\ i}) F_{bc}^{\ i} + \epsilon^{ijk} \partial_b A_{c\ k} A_{0\ i} A_{a\ j}]. \quad (3.3)$$

De la acción (3.3), se encuentran los momentos canónicos asociados a  $A_{a\ i}$ , y  $A_{0\ i}$ , que llamaremos  $\pi_i^a$  y  $\pi_i^0$ , respectivamente, los cuales están dados por

$$\pi_i^a = -4i\epsilon\alpha_3 \eta^{abc} F_{bc}^{\ i}, \quad (3.4)$$

$$\pi_i^0 = 0. \quad (3.5)$$

El momento canónico asociado a  $A_{0\ i}$  es igual a cero sobre la superficie de evolución, por lo que identificaremos a dicha variable como un multiplicador de Lagrange.

### CAPÍTULO 3. INVARIANTES TOPOLÓGICOS DE EULER Y PONTRYAGIN EN SU FORMA AUTODUAL

---

La hamiltoniana canónica está dada por

$$\mathcal{H}_0 = -A_0^i D_a \pi_i^a. \quad (3.6)$$

y resulta ser una restricción gaussiana con  $A_0^i$  como su multiplicador de Lagrange.

Por lo tanto, se tienen las restricciones

$$G_i \equiv D_a \pi_i^a \approx 0, \quad (3.7)$$

$$C_i^a \equiv \pi_i^a + 4i\epsilon\alpha_3\eta^{abc}F_{bc\ i} \approx 0. \quad (3.8)$$

El álgebra de restricciones está dada por

$$\{G_i(\vec{x}), G_j(\vec{y})\} = \epsilon_{ij}^k G_k(\vec{x})\delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \quad (3.9)$$

$$\{C_k^a(\vec{x}), C_l^b(\vec{y})\} = 0, \quad (3.10)$$

$$\{G_i(\vec{x}), C_j^b(\vec{y})\} = \epsilon_{ij}^k C_k^b(\vec{x})\delta^3(\vec{x} - \vec{y}). \quad (3.11)$$

Las restricciones forman un álgebra de Poisson cerrada, por lo que son restricciones de primera clase.

Podemos observar que, por las identidades de Bianchi,

$$D_a F_{bc}^i + D_c F_{ab}^i + D_b F_{ca}^i = 0, \quad (3.12)$$

se tiene

$$\eta^{abc} D_a F_{bc}^i = 0, \quad (3.13)$$

por lo que  $D_a C_i^a = G_i$  es una identidad sobre la superficie de evolución. Por lo tanto, las identidades de Bianchi nos ayudan a encontrar condiciones de reductibilidad para las restricciones, por lo que en realidad se tienen solo 9 restricciones de primera clase. En consecuencia, el conteo de grados de libertad da D.o.F. =  $\frac{1}{2}(18 - 2(9)) = 0$ .

Por el conteo de grados de libertad, se tiene que los invariantes de  $PE$  son teorías topológicas, i. e. no tienen grados de libertad, por lo cual uno espera que no alteren la dinámica a nivel lagrangiano cuando se acoplen a otra acción, pero en el análisis hamiltoniano pueden contribuir a las restricciones. Por otra parte, podemos ver que la hamiltoniana canónica es una restricción; la restricción de Gauss, y no hay una restricción escalar o Hamiltoniana como en  $RG$ ; la dinámica es generada por simetrías. Por otro lado, dado que (3.7) coincide con la restricción de Gauss (2.22) de la formulación autodual estudiada en el Capítulo 2, su álgebra (2.28) será la misma a la encontrada en (3.9). Es importante comentar que si añadimos los invariantes a la acción de Holst en su forma autodual, habrá cambios en la hamiltoniana. En efecto, la adición de estos términos topológicos supone un cambio en la definición de los momentos y, por lo tanto, un cambio en las restricciones de la teoría [19].

## Capítulo 4

# Formulación de Holst

La acción de Holst está dada por

$$S[e, \omega] = \int \star(e_I \wedge e_J) \wedge R^{IJ}[\omega] + \frac{1}{\gamma} \int e_I \wedge e_J \wedge R^{IJ}[\omega], \quad (4.1)$$

y se puede obtener a partir de la expresión (2.1), tomando  $\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{1}{\gamma}$  y obviando el factor global  $\alpha_1$ ; dicha acción generaliza a la acción de la formulación autodual, la cual se puede recuperar simplemente tomando  $\gamma = \pm i$ . A su vez, en el límite  $\gamma = 1$  reproduce la formulación de Barbero, por lo que la acción de Holst es una generalización de ambas teorías y, debido a esto, en la actualidad suele ser el punto de partida para el estudio de *LQG* [20]. El acoplamiento del término añadido por Holst no afecta a las ecuaciones de movimiento, puesto que sus dos ecuaciones de campo dan lugar a la condición de no-torsión, ya presente en las ecuaciones de campo de la acción de Palatini, y a las identidades de Bianchi algebraicas, por lo que su adición no supone una alteración a la dinámica (siempre y cuando se trabaje sin materia) ni un papel relevante para el parámetro  $BI$  a nivel lagrangiano [7].

Introducimos la conexión de Ashtekar-Barbero,

$$A_\mu^i = \gamma \omega_\mu^{0i} + \frac{1}{2} \epsilon^i_{jk} \omega_\mu^{jk}, \quad (4.2)$$

la cual es análoga a las variables (2.6) en el caso  $\gamma = \pm i$ , así como su curvatura con estructura tipo Yang-Mills,

$$F_{ab}^i = \partial_a A_b^i - \partial_b A_a^i - \epsilon^i_{jk} A_a^j A_b^k. \quad (4.3)$$

A partir de estas, definimos la derivada covariante tipo Yang-Mills

$$D_a T_i^b = \partial_a T_i^b + \epsilon_{ij}^k A_a^j T_k^b. \quad (4.4)$$

Hacemos la descomposición 3+1 y fijamos el gauge temporal (2.5), la hamiltoniana canónica (modulo términos de frontera) tomará la forma

$$\mathcal{H}_0[A] = -\frac{\gamma^2}{4} N' H + N^a V_a - \Lambda^i G_i, \quad (4.5)$$

donde se definió nuevamente  $N' = \frac{N}{e}$  y  $N$  es la función lapse,  $N^a$  es el shift y  $\Lambda^i$  corresponde a un multiplicador de Lagrange, y las restricciones se definen de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} H &\equiv \epsilon^{ij}_k \pi_i^a \pi_j^b \left[ F_{ab}^k + (1 + \gamma^2) \epsilon^k_{mn} \omega_a^{0m} \omega_b^{0n} - \frac{1 + \gamma^2}{\gamma} D_a \omega_b^{0k} \right], \\ V_a &\equiv \pi_i^b [F_{ab}^i + (1 + \gamma^2) \epsilon^i_{jk} \omega_a^{0j} \omega_b^{0k}], \\ G_i &\equiv D_a \pi_i^a, \end{aligned} \quad (4.6)$$

## CAPÍTULO 4. FORMULACIÓN DE HOLST

---

donde  $\pi_i^a$  es el momento canónico asociado a  $A_a^i$ .

Estas restricciones son de primera clase, por lo que el conteo de grados de libertad es D.o.F.  $= \frac{1}{2}(18 - 2(7)) = 2$ , al igual que en el caso de la formulación autodual. Es evidente que fijando el parámetro  $BI$  como  $\gamma = \pm i$  se obtienen las restricciones de la formulación autodual (2.22), además, la restricción de Gauss,  $G_i$ , conserva la misma forma y, por lo tanto, la misma álgebra de Poisson, solo que no es exactamente igual debido a la presencia del parámetro  $BI$  en la variable  $A_a^i$  en la definición de la derivada covariante (4.4). Cabe destacar que estas restricciones con el parámetro  $BI$  arbitrario tienen una estructura más complicada y representan una dificultad mayor al realizar los cálculos algebraicos, pero tienen la ventaja de poderse trabajar sin la necesidad de introducir condiciones de realidad.

A pesar de que esta acción sea indistinta a la acción de Palatini por sí sola, en cuanto a las ecuaciones de movimiento se refiere, el invariante de Holst sí afecta a la estructura de la teoría en lo que el análisis hamiltoniano se refiere, dando lugar a una contribución no trivial del parámetro  $BI$ . En particular, se ve afectada la estructura de las restricciones, que se tornan más complicadas de manejar en comparación con las de la formulación autodual, donde estas tenían una estructura polinomial. Por otra parte, esta formulación tiene la ventaja de poder trabajarse con un parámetro  $\gamma$  real.

Otra consecuencia de trabajar con un parámetro real, es que se describe entonces la teoría de  $RG$  como una de tipo Yang-Mills real  $SU(2)$ , lo que supone varios beneficios al contemplar una posible cuantización del campo gravitacional. Además, un parámetro real evita algunas dificultades al tratar de establecer una teoría cuántica, dado que el grupo de gauge de la teoría compleja es no-compacto y no está del todo claro cómo realizar la integración en este tipo de grupos. Aunado a lo anterior, un parámetro complejo complica el estudio de áreas relacionadas como los spin networks y la entropía de agujeros negros [21].

Sin embargo, el hecho de tener la opción de trabajar con un parámetro arbitrario real o complejo da lugar a una ambigüedad sobre su valor y también sobre su significado físico. Una de las interpretaciones que se ha hecho de este es la de ser un coeficiente que acompaña a un invariante topológico, sustituyendo el término de Holst por la densidad topológica de Nieh-Yan, lo que además soluciona el problema las alteraciones a la dinámica que provoca el término de Holst cuando se acopla materia [10, 22]. Esto permite ver al parámetro  $BI$  como uno análogo al parámetro  $\theta$  en  $QCD$ , además de ser un indicio de que los demás invariantes también deben ser considerados [11].

Existe además una generalización del estado de Kodama a partir de la acción de Holst con un parámetro  $\gamma$  real arbitrario propuesta en 2006 por Randono [23, 24], el cual resuelve varios problemas del estado de Kodama original, particularmente remueve la necesidad de imponer condiciones de realidad, resuelve el problema de normalización [23] y también es invariante bajo transformaciones  $CPT$  [24].

## Capítulo 5

# Invariantes topológicos de Pontryagin y Euler con parámetro de Barbero-Immirzi arbitrario

Ahora, se realiza el análisis hamiltoniano de los invariantes  $PE$  con un parámetro  $BI$  arbitrario, teniendo como intención el generalizar los resultados reportados en la literatura, y obtener como caso particular cuando  $\gamma = \pm i$ , donde  $\gamma$  es el parámetro  $BI$ , la formulación autodual presentada en la Sección 3.

Para empezar, partimos de la acción compuesta por los invariantes de Euler y Pontryagin dada en (3.1), tomando  $\frac{\alpha_4}{\alpha_3} = \frac{1}{\gamma}$  y factorizando el factor global  $\alpha_1$  por simplicidad. Así, la acción (3.1) toma la forma

$$S[\omega] = \int \star R_{IJ}[\omega] \wedge R^{IJ}[\omega] + \frac{1}{\gamma} \int R_{IJ}[\omega] \wedge R^{IJ}[\omega], \quad (5.1)$$

donde el operador de Hodge del grupo interno de simetría está dado por  $\star T^{IJ} = \frac{1}{2} \epsilon^{IJKL} T_{KL}$  y  $R^{IJ}$  es la curvatura de la conexión de Lorentz. Factorizando  $R_{IJ}$ , la acción (5.1) tomará la siguiente forma

$$S[\omega] = \int R_{IJ}[\omega] \wedge (\star R^{IJ}[\omega] + \frac{1}{\gamma} R^{IJ}[\omega]). \quad (5.2)$$

Podemos reescribir esta acción (5.2) como

$$S[\omega] = -\frac{\gamma^2}{\gamma^2 + 1} \int (\star F_{IJ} - \frac{1}{\gamma} F_{IJ}) \wedge F^{IJ}, \quad (5.3)$$

donde hemos llamado a  $F^{IJ} = \star R^{IJ} + \frac{1}{\gamma} R^{IJ}$ .

Con el propósito de simplificar la forma de la acción (5.3), ahora definimos  $\tilde{F}^{IJ} = \star F^{IJ} - \frac{1}{\gamma} F^{IJ}$ , con lo cual la acción se podrá reescribir de la siguiente forma

$$S[\omega] = -\frac{\gamma^2}{\gamma^2 + 1} \int \tilde{F}^{IJ} \wedge F_{IJ}. \quad (5.4)$$

Ahora, tenemos que las expresiones para la curvatura  $R^{IJ}$  y la  $F^{IJ}$  que definimos arriba, en forma tensorial tienen las siguientes expresiones

$$R_{\mu\nu}^{IJ} = \partial_\mu \omega_\nu^{IJ} - \partial_\nu \omega_\mu^{IJ} + \omega_\mu^{IK} \omega_\nu^J{}_K - \omega_\mu^{JK} \omega_\nu^I{}_K, \quad (5.5)$$

$$F_{\mu\nu}^{IJ} = \frac{1}{2} \epsilon^{IJKL} R_{\mu\nu KL} + \frac{1}{\gamma} R_{\mu\nu}^{IJ}, \quad (5.6)$$

## CAPÍTULO 5. INVARIANTES TOPOLÓGICOS DE PONTRYAGIN Y EULER CON PARÁMETRO DE BARBERO-IMMIRZI ARBITRARIO

---

$$\tilde{F}_{\mu\nu}^{IJ} = \frac{1}{2}\epsilon^{IJKL}F_{\mu\nu KL} - \frac{1}{\gamma}F_{\mu\nu}^{IJ}. \quad (5.7)$$

De esta manera, corriendo los índices del grupo y de espacio-tiempo, además de tomar la convención de  $\eta^{abc} \equiv \epsilon^{0abc}$  y  $\epsilon^{ijk} \equiv \epsilon^{0ijk}$ , la acción (5.4) estará dada por

$$S[\omega] = -\frac{\gamma^2}{\gamma^2 + 1} \int d^4x \eta^{abc} (2\tilde{F}_{bc0i}F_{0a}^{0i} + \tilde{F}_{bcij}F_{0a}^{ij}), \quad (5.8)$$

donde usaremos (5.7), que después de un largo proceso algebraico, las  $\tilde{F}_{bc0i}$  y  $\tilde{F}_{bcij}$  se puedan escribir como

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{bc0i} &= -\frac{\gamma^2 + 1}{\gamma^2} R_{bc0i}, \\ \tilde{F}_{bcij} &= -\frac{\gamma^2 + 1}{\gamma^2} R_{bcij}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Ahora, realizamos los siguientes cambios de variables

$$\omega_\alpha^{ij} = \epsilon_k^{ij} \omega_\alpha^k, \quad (5.10)$$

$$\omega_\alpha^k = \frac{1}{\gamma} (A_\alpha^k - \omega_\alpha^{0k}), \quad (5.11)$$

en todas nuestras expresiones para la  $R^{IJ}$  y la  $F^{IJ}$ , de donde se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu 0i} &= \partial_\mu \omega_\nu^{0i} - \partial_\nu \omega_\mu^{0i} - \frac{2}{\gamma} \epsilon_{jk}^i \omega_\mu^{0j} (A_\nu^k - \omega_\nu^{0k}), \\ R_{\mu\nu ij} &= \epsilon_k^{ij} \left[ \partial_\mu A_\nu^{0k} - \partial_\nu A_\mu^{0k} - \epsilon_{mn}^k A_\mu^m A_\nu^n + \frac{1}{\gamma^2} \epsilon_{mn}^k (A_\mu^m \omega_\nu^{0n} - A_\nu^m \omega_\mu^{0n}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\gamma} (\partial_\mu \omega_\nu^{0k} - \partial_\nu \omega_\mu^{0k}) + \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2} \epsilon_{mn}^k \omega_\mu^{0m} \omega_\nu^{0n} \right], \\ F_{\mu\nu}^{0i} &= \frac{1}{\gamma} (\partial_\mu A_\nu^{0i} - \partial_\nu A_\mu^{0i}) - \epsilon_{jk}^i A_\mu^j A_\nu^k + \frac{\gamma^2 + 1}{\gamma^2} \epsilon_{jk}^i \omega_\mu^{0j} \omega_\nu^{0k}, \\ F_{\mu\nu}^{ij} &= \epsilon_k^{ij} \left[ \frac{1}{\gamma^2} (\partial_\mu A_\nu^{0k} - \partial_\nu A_\mu^{0k}) - \frac{1}{\gamma^3} \epsilon_{mn}^k A_\mu^m A_\nu^n + \frac{\gamma^2 + 1}{\gamma^2} \epsilon_{mn}^k (A_\mu^m \omega_\nu^{0n} - A_\nu^m \omega_\mu^{0n}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\gamma^2 + 1}{\gamma^2} (\partial_\mu \omega_\nu^{0k} - \partial_\nu \omega_\mu^{0k}) - \frac{\gamma^2 + 1}{\gamma^3} \epsilon_{mn}^k \omega_\mu^{0m} \omega_\nu^{0n} \right], \end{aligned} \quad (5.12)$$

dicho cambio de variable será de vital importancia para poder escribir los términos de  $PE$  en términos de un parámetro de  $BI$ .

Haciendo uso de las expresiones (5.9 - 5.12), se encuentra que la acción (5.8) se puede escribir como

$$\begin{aligned} S &= \int d^4x \eta^{abc} (2R_{bc0i}F_{0a}^{0i} + R_{bcij}F_{0a}^{ij}) \\ &= \int d^4x \eta^{abc} \left\{ 2R_{bc0i} \left( \frac{1}{\gamma} (\dot{A}_a^{0i} - \partial_a A_0^{0i}) - \epsilon_{jk}^i A_0^j A_a^k + \frac{\gamma^2 + 1}{\gamma^2} \epsilon_{jk}^i \omega_0^{0j} \omega_a^{0k} \right) \right. \\ &\quad \left. \epsilon_k^{ij} R_{bcij} \left[ \frac{1}{\gamma^2} (\dot{A}_a^{0k} - \partial_a A_0^{0k}) - \frac{1}{\gamma^3} \epsilon_{mn}^k A_0^m A_a^n + \frac{\gamma^2 + 1}{\gamma^2} \epsilon_{mn}^k (A_0^m \omega_a^{0n} - A_a^m \omega_0^{0n}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\gamma^2 + 1}{\gamma^2} (\dot{\omega}_a^{0k} - \partial_a \omega_0^{0k}) - \frac{\gamma^2 + 1}{\gamma^3} \epsilon_{mn}^k \omega_0^{0m} \omega_a^{0n} \right] \right\} \end{aligned} \quad (5.13)$$

## CAPÍTULO 5. INVARIANTES TOPOLÓGICOS DE PONTRYAGIN Y EULER CON PARÁMETRO DE BARBERO-IMMIRZI ARBITRARIO

---

de donde podemos identificar los momentos dados por

$$\pi_k^a = \eta^{abc} \left( \frac{2}{\gamma} R_{bc0k} + \frac{1}{\gamma^2} \epsilon^{ij}_k R_{bcij} \right), \quad (5.14)$$

$$\tilde{\pi}_k^a = -\frac{\gamma^2 + 1}{\gamma^2} \eta^{abc} \epsilon^{ij}_k R_{bcij}, \quad (5.15)$$

los cuales son los pares canónicos de  $A_a^i$  y  $\omega_a^{0i}$ , respectivamente. Por lo tanto, los paréntesis fundamentales entre nuestras variables dinámicas estarán dados por

$$\begin{aligned} \{A_a^i(\vec{x}), \pi_j^b(\vec{y})\} &= \delta_j^i \delta_a^b \delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \\ \{\omega_a^{0i}(\vec{x}), \tilde{\pi}_j^b(\vec{y})\} &= \delta_j^i \delta_a^b \delta^3(\vec{x} - \vec{y}). \end{aligned} \quad (5.16)$$

Sustituyendo los momentos (5.14, 5.15) en la acción (5.13) se tiene que

$$\begin{aligned} S = \int d^4x \left\{ \pi_i^a \left( \dot{A}_a^i - \partial_a A_0^i - \frac{1}{\gamma} \epsilon_{ij}^k (A_0^j A_a^k + \omega_0^{0j} A_a^k) + \frac{\gamma^2 + 1}{\gamma} \epsilon_{ij}^k \omega_0^{0j} \omega_a^{0k} \right) \right. \\ \left. + \tilde{\pi}_i^a \left( \dot{\omega}_a^{0i} - \partial_a \omega_0^{0i} - \frac{1}{\gamma} \epsilon_{ij}^k (A_0^j \omega_a^{0k} + \omega_0^{0j} A_a^k) + \frac{2}{\gamma} \epsilon_{ij}^k \omega_0^{0j} \omega_a^{0k} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

De lo anterior, se puede ver que en el caso de que el parámetro de  $BI$  tome los valores  $\gamma = \pm i$  el momento  $\tilde{\pi}_k^a$  definido por (5.15) es igual a cero, y su contribución a la acción (5.17) desaparece, por lo que nuestros resultados reproducen el caso autodual obtenido en (3.6) expuesto en el Capítulo 3.

Integrando por partes, podemos reescribir a la acción (5.17) de la siguiente forma,

$$\begin{aligned} S = \int d^4x \left\{ \pi_k^a \dot{A}_a^k + A_0^i \left( \partial_a \pi_i^a - \frac{1}{\gamma} \epsilon_{ij}^k (A_a^j \pi_k^a + \omega_a^{0j} \tilde{\pi}_k^a) \right) \right. \\ \left. + \tilde{\pi}_k^a \dot{\omega}_a^{0k} + \omega_0^{0k} \left( \partial_a \tilde{\pi}_i^a + \frac{1}{\gamma} \epsilon_{ij}^k (\omega_a^{0j} (2\tilde{\pi}_k^a + (\gamma^2 + 1)\pi_k^a) - A_a^j \tilde{\pi}_k^a) \right) \right\}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Entonces, de (5.18) podemos identificar las siguientes restricciones; las denotadas por  $C$  y  $\tilde{C}$  serán relacionadas a la definición de los momentos, y las llamadas  $G$  y  $\tilde{G}$  serán las restricciones de Gauss y una tipo Gauss respectivamente. Dichas restricciones están dadas por

$$C_k^a \equiv \pi_k^a - \eta^{abc} \left( \frac{2}{\gamma} R_{bc0k} + \frac{1}{\gamma^2} \epsilon^{ij}_k R_{bcij} \right) \approx 0, \quad (5.19)$$

$$\tilde{C}_k^a \equiv \tilde{\pi}_k^a + \frac{\gamma^2 + 1}{\gamma^2} \eta^{abc} \epsilon^{ij}_k R_{bcij} \approx 0, \quad (5.20)$$

$$G_i \equiv \partial_a \pi_i^a - \frac{1}{\gamma} \epsilon_{ij}^k (A_a^j \pi_k^a + \omega_a^{0j} \tilde{\pi}_k^a) \approx 0, \quad (5.21)$$

$$\tilde{G}_k \equiv \partial_a \tilde{\pi}_k^a + \frac{1}{\gamma} \epsilon_{ij}^k [\omega_a^{0j} (2\tilde{\pi}_k^a + (\gamma^2 + 1)\pi_k^a) - A_a^j \tilde{\pi}_k^a] \approx 0. \quad (5.22)$$

Las restricciones expresadas arriba, satisfacen la siguiente álgebra bajo los paréntesis de Poisson

$$\{C_k^a(\vec{x}), C_l^b(\vec{y})\} = 0, \quad (5.23)$$

$$\{\tilde{C}_k^a(\vec{x}), \tilde{C}_l^b(\vec{y})\} = 0, \quad (5.24)$$

## CAPÍTULO 5. INVARIANTES TOPOLÓGICOS DE PONTRYAGIN Y EULER CON PARÁMETRO DE BARBERO-IMMIRZI ARBITRARIO

---

$$\{C_k^a(\vec{x}), \tilde{C}_l^b(\vec{y})\} = 0, \quad (5.25)$$

$$\{G_i(\vec{x}), G_j(\vec{y})\} = -\frac{1}{\gamma} \epsilon_{ij}^k G_k(\vec{x}) \delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \quad (5.26)$$

$$\{\tilde{G}_i(\vec{x}), \tilde{G}_j(\vec{y})\} = \epsilon_{ij}^k \left[ \frac{\gamma^2 + 1}{\gamma} G_k(\vec{x}) + \frac{2}{\gamma} \tilde{G}_k(\vec{x}) \right] \delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \quad (5.27)$$

$$\{G_i(\vec{x}), \tilde{G}_j(\vec{y})\} = -\frac{1}{\gamma} \epsilon_{ij}^k \tilde{G}_k(\vec{x}) \delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \quad (5.28)$$

$$\{C_i^a(\vec{x}), G_j(\vec{y})\} = -\frac{1}{\gamma} \epsilon_{ij}^k C_k^a(\vec{x}) \delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \quad (5.29)$$

$$\{\tilde{C}_i^a(\vec{x}), G_j(\vec{y})\} = -\frac{1}{\gamma} \epsilon_{ij}^k \tilde{C}_k^a(\vec{x}) \delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \quad (5.30)$$

$$\{C_i^a(\vec{y}), \tilde{G}_j(\vec{y})\} = -\frac{1}{\gamma} \epsilon_{ij}^k \tilde{C}_k^a(\vec{x}) \delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \quad (5.31)$$

$$\{\tilde{C}_i^a(\vec{y}), \tilde{G}_j(\vec{y})\} = \epsilon_{ij}^k \left[ \frac{\gamma^2 + 1}{\gamma} C_k^a(\vec{x}) + \frac{2}{\gamma} \tilde{C}_k^a(\vec{x}) \right] \delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \quad (5.32)$$

donde podemos ver que el álgebra cierra y esto indica que tenemos restricciones de primera clase. Por otro lado, también observamos que si calculamos  $\partial_a C_i^a = G_i$  y  $\partial_a \tilde{C}_i^a = \tilde{G}_i$ , debido a las identidades de Bianchi, y esto indica que tenemos condiciones de reductibilidad entre las restricciones  $C_i^a$  y  $\tilde{C}_i^a$ . Tomando en cuenta las condiciones de reductibilidad, se tienen 18 restricciones de primera clase independientes y 36 variables del espacio fase, por lo tanto el número de grados de libertad físicos está dado por

$$\text{D.o.F.} = \frac{1}{2}(36 - 2(18)) = 0, \quad (5.33)$$

con lo que se confirma que estos términos topológicos carecen de grados de libertad.

Por último, nótese que, debido a la elección de variables (5.10, 5.11), para recuperar la forma exacta de las transformaciones de norma que se obtuvieron en la forma autodual, se tiene que hacer el cambio de variable  $A_a^i \rightarrow -\gamma A_a^i$  y así obtendremos la constricción de Gauss reportada previamente.

En este Capítulo, realizamos el análisis canónico para los invariantes de Euler y Pontryagin con un parámetro  $BI$  arbitrario. Presentamos nuestros resultados como una generalización del caso autodual que fue expuesto en el Capítulo 3, el cual recuperamos cuando fijamos en nuestros resultados el parámetro  $BI$  a que tome el valor de  $\gamma = \pm i$ . En particular, encontramos todas las restricciones del sistema que forman un conjunto de primera clase. Cabe mencionar que en el caso de que el parámetro de  $BI$  toma el valor de  $\gamma = \pm i$ , la variable dinámica  $\omega_a^{0i}$  y su momento canónico se eliminan, y solo nos queda en nuestros resultados la dependencia de las variables  $A_a^i$ , siendo estas las variables de Ashtekar expuestas en previas secciones. Al realizar el conteo de grados de libertad, vimos que las restricciones de Gauss y la de tipo Gauss presentan relaciones de reductibilidad, y al igual que en las secciones anteriores, se tiene ausencia de grados de libertad físicos, indicando que los invariantes estudiados corresponden a teorías topológicas.

## Capítulo 6

# Conclusiones

En este trabajo de tesis, nos enfocamos en exponer y generalizar la formulación autodual de los invariantes de  $PE$ . En el Capítulo 2, se presentó un breve repaso de las bases de la formulación canónica de  $RG$  escrita en términos de las variables de Ashtekar. Dicha formulación es uno de los pilares que uno usa en el intento de querer cuantizar la  $RG$ , puesto que ahora  $RG$  es escrita en términos de un lenguaje como el de Yang-Mills. Posteriormente, en el Capítulo 3 revisamos el análisis hamiltoniano de los invariantes topológicos en el contexto de la formulación autodual. Pudimos observar que los invariantes carecen de una restricción Hamiltoniana, y toda la dinámica de  $PE$  está generada por simetrías. También, se realizó el conteo de grados de libertad y encontramos que los términos topológicos corresponden a teorías topológicas. Además, en el Capítulo 4 se revisaron los aspectos fundamentales de la propuesta de Holst y la importancia del parámetro de Barbero-Immirzi. Pudimos observar que, si el parámetro de  $BI$  toma el valor de  $\gamma = \pm i$ , las restricciones se reducen a las que se encontraron en la formulación autodual del Capítulo 2. Por otra parte, en el Capítulo 5 pudimos escribir a los invariantes topológicos en términos de un parámetro de  $BI$  arbitrario. Encontramos que las restricciones de la teoría son de primera clase, y que existen condiciones de reductibilidad entre las restricciones. También, en este caso se encuentra que no hay restricción Hamiltoniana, y obtuvimos dos restricciones particulares; una que se reduce a la restricción de Gauss cuando  $\gamma = \pm i$ , y otra que es de tipo Gauss que desaparece cuando  $\gamma = \pm i$ . Debido a las condiciones de reductibilidad, obtuvimos que  $PE$  con un parámetro de  $BI$  arbitrario carece de grados de libertad.

Finalmente, es importante comentar que los resultados del Capítulo 5 son de aportación original, es decir, no están reportados en la literatura [25]. También queremos mencionar que nuestros resultados se podrán generalizar en futuros trabajos, cuando los invariantes se acoplen a  $RG$ , pero teniendo en cuenta a un parámetro de  $BI$  arbitrario. Así, esperamos usar lo que aquí obtuvimos y reportar en el futuro una generalización de lo que ya se encuentra reportado en la literatura. Aunque se desconocen múltiples aspectos del parámetro de  $BI$ , el estudio de invariantes topológicos como el presentado en este trabajo, es una vía alternativa para poder ayudar a esclarecer el papel que juega en la física. Además, el estudio de los efectos de los invariantes topológicos en teorías físicas, es de particular importancia, pensando no solo en aclarar el panorama alrededor del parámetro de  $BI$  de manera clásica, sino también por los efectos que pueden tener al tratar de cuantizar la teoría. En adición, también nuestros resultados serán útiles al estudiar la contribución del parámetro de  $BI$  que podría tener en los estados cuánticos encontrados en [26, 27], donde se analizaron los invariantes topológicos en términos de variables reales y de manera independiente.



## Apéndice A

# Algoritmo de Dirac-Bergmann

El algoritmo de Dirac-Bergmann es una extensión natural de la mecánica lagrangiana y hamiltoniana estándar cuyo propósito es el estudio de sistemas singulares como lo son las teorías gauge o de norma [28]. El proceso para aplicar dicho algoritmo es el siguiente [29, 30].

Dado un sistema físico con una lagrangiana  $L(\phi^1, \dots, \phi^N)$ , dicho sistema es singular cuando su matriz hessiana,

$$(H)_{ij} \equiv \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_i \partial \dot{\phi}_j}, \quad (\text{A.1})$$

donde  $\mathcal{L}$  es la densidad lagrangiana dada por

$$L = \int d^3x \mathcal{L}, \quad (\text{A.2})$$

es singular, i.e. no es invertible. Si este es el caso, entonces el sistema de las ecuaciones de movimiento no tiene solución única y la teoría hamiltoniana no puede construirse de la forma usual debido a que resulta imposible escribir a las velocidades en función de los momentos como se haría usualmente para hallar la hamiltoniana de un sistema regular. La forma en la que se propuso originalmente lidiar con estos sistemas es el llamado algoritmo de Dirac-Bergmann [31]. El proceso para aplicar dicho algoritmo es el siguiente [29, 30].

Se parte de un sistema con  $N$  grados de libertad, cuyas coordenadas y velocidades son  $\phi^i$  y  $\dot{\phi}^i$ , con  $i = 1, 2, \dots, N$ . Dado que el sistema dado por la lagrangiana  $L[\phi, \dot{\phi}]$ , con  $i = 1, 2, \dots, N$ , es singular, el rango de la matriz  $(H)_{ij}$ ,  $M$ , debe ser menor que  $N$ , i.e.  $N > M$ .

Ahora, se encuentran los momentos canónicos conjugados,

$$\pi_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}^i}. \quad (\text{A.3})$$

Debido a lo mencionado antes habrá un número  $P = N - M$  de relaciones no invertibles, éstas se denominan restricciones primarias, denominadas como  $\psi_a(\phi, \pi) = 0$ , con el índice  $a = 1, 2, \dots, P$  y  $M$  relaciones invertibles dadas por  $\pi_m$  donde el subíndice  $m$  va de  $P + 1$  hasta  $N$ . Este conjunto de  $N$  relaciones entre las variables del espacio fase del sistema definen la superficie de evolución. Aquellas igualdades que se sostengan solo en dicha superficie se denominan "débiles" se denotan por el símbolo  $\approx$ . Después se escribe la hamiltoniana canónica en términos de las coordenadas y de los momentos a través de la transformada de Legendre como en el caso usual,

$$H_0 = \int d^3x \mathcal{H}_0 = \int d^3x (\pi_m \dot{\phi}^m - \mathcal{L}(\phi, \dot{\phi})), \quad (\text{A.4})$$

para posteriormente escribir la hamiltoniana primaria:

$$H_P = \int d^3x (\mathcal{H}_0 + \lambda^a \psi_a), \quad (\text{A.5})$$

## APÉNDICE A. ALGORITMO DE DIRAC-BERGMANN

---

donde las  $\lambda^a$  son multiplicadores de Lagrange.

Ahora se utilizan los paréntesis de Poisson para definir las condiciones de consistencia. Primero se establece que para cualquier función  $G$  dependiente de  $\phi$ 's y  $\pi$ 's se tiene que

$$\dot{G}(\phi, \pi) = \{g, H_P\} = \int d^3x (\{g, \mathcal{H}_0\} + \lambda^a \{G, \phi_a\}). \quad (\text{A.6})$$

Esta es la ecuación de movimiento hamiltoniana general. Las condiciones de consistencia que se imponen,

$$\dot{\phi}_a \approx 0, \quad (\text{A.7})$$

aseguran que las restricciones primarias se preserven bajo evoluciones temporales. Las condiciones de consistencia de las restricciones primarias dan lugar a un número limitado tipos de relaciones entre las variable; pueden ser identidades que se satisfacen sobre la superficie de evolución, restricciones sobre los multiplicadores  $\lambda$ 's o nuevas restricciones sobre  $\phi$ 's y  $\pi$ 's. En este último caso estas nuevas relaciones se denominan restricciones secundarias,  $\xi_a(\phi, \pi) = 0$ .

Se prosigue aplicando condiciones de consistencia para las restricciones secundarias. Si estas dan lugar a nuevas restricciones sobre  $\phi$ 's y  $\pi$ 's, se definen como restricciones terciarias y el proceso se repite hasta que no resulten más restricciones sobre las variables del espacio fase  $\phi$ 's y  $\pi$ 's.

Una vez encontradas todas las restricciones del sistema se construye la hamiltoniana total añadiendo a la hamiltoniana canónica las restricciones secundarias y posteriores si es que las hay, cada una con sus multiplicadores de Lagrange correspondientes. Posteriormente se clasifican las restricciones entre restricciones de primera clase y restricciones de segunda clase; las restricciones de primera clase son aquellas cuyos paréntesis de Poisson con todas las restricciones es igual a cero sobre la superficie de evolución, i.e. sean ceros débiles. El resto son de segunda clase.

Las restricciones de primera clase además de formar un álgebra cerrada, generan las transformaciones gauge (o de norma) del sistema. Las restricciones de segunda clase están involucradas en la definición de los paréntesis de Dirac. Ambos tipos de restricciones se necesitan para realizar el conteo de grados de libertad de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \text{D.oF.} &= \text{num. de variables del espacio fase} - 2(\text{num. de restricciones de 1ra. clase}) \\ &\quad - \text{num de restricciones de 2da. clase.} \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Por último, se definen los generadores gauge de la siguiente forma,

$$G = \int d^3x \xi^i(\vec{x}) \Gamma_i(\vec{x}) \quad (\text{A.9})$$

donde  $\xi^i$  es un parámetro infinitesimal y  $\Gamma_i$  una restricción de primera clase.

Las transformaciones gauge de las variables de campo están dadas por

$$\delta\phi^i = \{\phi^i, G\}. \quad (\text{A.10})$$

# Bibliografía

- [1] R. Arnowitt, S. Deser, and C. W. Misner. Republication of: The dynamics of general relativity. *General Relativity and Gravitation*, 40(9):1997–2027, 2008.
- [2] A. Ashtekar. New variables for classical and quantum gravity. *Phys. Rev. Lett.*, 57(18):2244–2247, November 1986.
- [3] A. Ashtekar. New Hamiltonian formulation of general relativity. *Phys. Rev. D Part. Fields*, 36(6):1587–1602, September 1987.
- [4] A. Ashtekar. *Lectures On Non-perturbative Canonical Gravity*. Advanced Series In Astrophysics And Cosmology. World Scientific Publishing, Singapore, Singapore, January 1991.
- [5] A. Ashtekar, J. D. Romano, and R. S. Tate. New variables for gravity: Inclusion of matter. *Phys. Rev. D Part. Fields*, 40(8):2572–2587, October 1989.
- [6] J. F. Barbero G. Real Ashtekar variables for Lorentzian signature space-times. *Phys. Rev. D Part. Fields*, 51(10):5507–5510, May 1995.
- [7] S. Holst. Barbero’s Hamiltonian derived from a generalized Hilbert-Palatini action. *Phys. Rev. D Part. Fields*, 53(10):5966–5969, May 1996.
- [8] C. Rovelli. *Cambridge monographs on mathematical physics: Quantum gravity*. Cambridge University Press, Cambridge, England, July 2010.
- [9] T. Thiemann. *Cambridge monographs on mathematical physics: Modern canonical quantum general relativity*. Cambridge University Press, Cambridge, England, August 2010.
- [10] G. Date, R. K. Kaul, and S. Sengupta. Topological interpretation of Barbero-Immirzi parameter. *Physical Review D*, 79(4), February 2009.
- [11] R. P. Vyas and M. J. Joshi. The Barbero–Immirzi parameter: An enigmatic parameter of loop quantum gravity. *Physics*, 4(4):1094–1116, September 2022.
- [12] H. T. Nieh. Torsional topological invariants. *arXiv [gr-qc]*, 2018.
- [13] O. Chandia and J. Zanelli. Torsional topological invariants (and their relevance for real life). In *AIP Conference Proceedings*. AIP, 1998.
- [14] C. Rovelli. Ashtekar formulation of general relativity and loop-space nonperturbative quantum gravity: a report. *Class. Quantum Gravity*, 8(9):1613–1676, September 1991.
- [15] L. Lu and P. A. May. Step-by-step canonical quantum gravity – part I: Ashtekar’s new variables. 2024.
- [16] R. Gambini and J. Pullin. *Loops, knots, gauge theories and quantum gravity*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, Cambridge, England, February 2023.

- [17] H. Kodama. Specialization of Ashtekar’s formalism to Bianchi cosmology. *Progress of Theoretical Physics*, 80(6):1024–1040, 12 1988.
- [18] L. Smolin. Quantum gravity with a positive cosmological constant, 2002.
- [19] M. Montesinos. Self-dual gravity with topological terms. *Class. Quantum Gravity*, 18(10):1847–1852, May 2001.
- [20] L. Fatibene, A. Orizzonte, A. Albano, S. Coriasco, M. Ferraris, S. Garruto, and N. Morandi. Introduction to loop quantum gravity. The Holst’s action and the covariant formalism. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 21(10):2440016, 2024.
- [21] S. Bilson-Thompson. First steps to a theory of quantum gravity. In *Loop Quantum Gravity for the Bewildered*, pages 59–68. Springer International Publishing, Cham, 2024.
- [22] S. Mercuri. Fermions in the Ashtekar-Barbero connection formalism for arbitrary values of the Immirzi parameter. *Physical Review D*, 73(8), April 2006.
- [23] A. Randono. Generalizing the Kodama state I: Construction, 2006.
- [24] A. Randono. Generalizing the Kodama state II: Properties and physical interpretation, 2006.
- [25] A. Escalante, E. Suárez-Polo, and L. A. Huerta del Campo. Canonical description of Pontryagin and Euler invariants in terms of a Barbero-Immirzi parameter. In progress, 2025.
- [26] A. Escalante and A. Pantoja. The Hamilton–Jacobi characteristic equations for topological invariants: Pontryagin and Euler classes. *Annals of Physics*, 420:168265, 2020.
- [27] A. Escalante and C. Medel-Portugal. Faddeev–Jackiw quantization of topological invariants: Euler and Pontryagin classes. *Annals of Physics*, 391:27–46, 2018.
- [28] P. A. M. Dirac. Generalized Hamiltonian dynamics. *Canadian Journal of Mathematics*, 2:129–148, 1950.
- [29] M. Henneaux and C. Teitelboim. *Quantization of Gauge Systems*. Princeton University Press, 1992.
- [30] W. Greiner and J. Reinhardt. *Field Quantization*. Springer, Berlin, Germany, 1 edition, May 1997.
- [31] J. D. Brown. Singular Lagrangians and the Dirac–Bergmann algorithm in classical mechanics. *American Journal of Physics*, 91(3):214–224, March 2023.