Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Colegio de Matemáticas

Confiabilidad

TESIS

Que para obtener el título de:

Licenciado en Actuaría

PRESENTA:

Andrea Martínez Culebro

Asesor:
Dr. Francisco Solano Tajonar Sanabria

Puebla, Puebla Noviembre de 2023

Índice general

Dedicatoria

Hay 4 importantes dedicatorias en esta sección

1. Para mis padres, por sus sacrificios, enseñanzas y confianza que culminaron en este precioso momento. La enseñanza es la mejor de las herencias.
2. A mí hermana, mi gemela separada al nacer, el brillo que me ilumina.
3. A mí persona, que siempre estuvo conmigo en cada uno de estos momentos difíciles.
4. Pero, sobre todo, a Dios, por permitirme llegar a este momento.

Agradecimientos

Esta es, posiblemente de los agradecimientos más importantes que daré en mi vida, y también las más sinceras palabras con todo el afecto que conllevan (tanto así, que el significado de estas no son suficientes). Los primeros que se deben de llevar el primer y más grande agradecimiento son mis padres, por esforzarse más allá de sus posibilidades para brindarme una mejor vida, porque cada uno de sus esfuerzos han sido valorados y ahora recompensados. A mi hermana, por ser mi alma gemela y siempre brindarme una sonrisa o un abrazo cuando más lo necesito, el aire que a veces me falta para seguir adelante. A Aime y Sergio, personas importantes en mi vida que siempre me han entendido, abrazado y consolado, me han ayudado a ser yo misma, con mi espíritu aventurero y mis ganas de libertad, pero sobre todo impulsarme al mundo abierto de infinitas posibilidades, que incluso a veces no sé cual escoger.

También doy mi agradecimiento y aprecio a cada una de las personas que me ayudaron en el camino, a todos los maestros que me han iluminado en todo este trayecto, sin su enseñanza yo no hubiera concluido esta etapa, mi agradecimientoa la Mtra. Brenda Zavala López, quien es de los maestros que más entiende a la comunidad estudiantil y por aceptar ser parte de mi jurado; a la Dra. Gladys Denisse Salgado Suárez, por sus comentarios y correcciones, a quien conocí en un curso y me compartió consejos para poder superarme en la carrera así como formar parte del jurado, y también mi agradecimiento al Dr. Fernando Velasco Luna, quien compartió con nosotros su saber tecnológico así como su tiempo para ser parte de este jurado.

Y por último pero no menos importante, un agradecimiento muy especial al Dr. Francisco Solano Tajonar Sanabria, por su gran paciencia conmigo y por nunca perder las esperanzas en mí, por apoyarme tanto e impulsarme, un maestro el cual una vez me dijo “Tienes potencial”, y cuyas palabras fueron una balsa en medio del océano de depresión que estaba pasando; muchas veces en este camino nos hace preguntarnos si en realidad somos buenos para algo, pero la clave es nunca rendirse así como ser constante.

Finalmente gracias FCFM por todos y cada uno de los momentos que me permitiste vivir, desde no dormir hasta aprender a dormir en cualquier sitio, de enseñarme a nunca darme por vencida, por aprender qué es la humildad, la paciencia, la enseñanza y la esperanza.

Es tiempo de empezar, lo que me tenga que costar.

Introducción

La Teoría de Confiabilidad es una área de investigación de las matemáticas aplicadas, teniendo como base a la probabilidad. De manera informal se puede decir que la Teoría de Confiabilidad es la encargada de estudiar los tiempos de "falla" de un dispositivo, componente o un sistema completo de componentes. También debemos mencionar que la probabilidad es una de las bases de la actuaría, pues esta trata de predecir el futuro en la forma económica para así poder determinar las acciones que se deben de tomar en caso de que sea un futuro negativo, o incluso que el futuro sea bueno y se necesite mantener. En este caso, el término probabilidad es usado para obtener el cálculo matemático que establece todas las posibilidades que existen de que ocurra un fenómeno en determinadas circunstancias de azar. La probabilidad se calcula con base en un valor entre [0,1] y el nivel de certidumbre viene determinado por la cercanía a la unidad; por el contrario, en caso de que se aproxime al cero, hay menos seguridad en el resultado final.

En la Teoría de Confiabilidad, como en cualquier otra teoría, se piensa y se opera en términos de modelos, esta teoría está orientada a las fallas, así que el problema es predecir en que momento ocurrirá la falla cuando el dispositivo o componente este en uso. De esta forma, el propósito de la Teoría de Confiabilidad es estudiar los tiempos de falla de un objeto, dispositivo o componente sometido a cierto tipo de tensión.

La definición que generalmente se utiliza en las diferentes áreas de estudio es: la confiabilidad de un componente es la probabilidad de que dicho componente realice su propósito adecuadamente durante el periodo de tiempo previsto en las condiciones o restricciones de funcionamiento.

La teoría matemática de la confiabilidad ha surgido de las demandas de la tecnología moderna y en particular de las experiencias de sistemas complejos tales como el militar, plantas nucleares, etc.

En la actualidad esta teoría se aplica en diferentes campos de investigación, como son: la Ingeniería, Actuaría, Física, Industria, etc.

Por ejemplo, en la ingeniería se aplica el concepto de confiabilidad desde dos escuelas con enfoques muy específicos:

- Confiabilidad basada en el análisis probabilístico del tiempo de falla o historial de fallas.
- Confiabilidad basada en el análisis probabilístico del deterioro o fisica de la falla.

Mientras que en el sentido de la industria es utilizado para medir y mejorar el nivel de confiabilidad en sus productos, debido a que el cliente siempre busca dispositivos, componentes o aparatos que posean mejor calidad (confiabilidad). Sin lugar a dudas la industria tiene la necesidad de reducir costos y aumentar la eficacia de productos, así pues, además de traer beneficios económicos, la confiabilidad también permite regular actividades que pueden dar a lugar a cierto tipo de incidentes como impactos grandes a la salud o seguridad del público en general. De esta manera es un buen recurso para identificar peligros y cuantificar las consecuencias de fracasos.

Debemos señalar también que un buen programa de mantenimiento en los aparatos, componentes y sistemas garantiza una buena confiabilidad en el funcionamiento de estos.

Con lo anterior se puede entender que la confiabilidad en componentes, dispositivos o sistemas está determinada como la probabilidad de que la componente, dispositivos o sistemas sobreviva o funcione al menos hasta un tiempo t . Luego para el estudio de esta probabilidad se requiere de una variable aleatoria continua T que determine el tiempo de falla de la componente.

El objetivo de este trabajo de tesis, es presentar un panorama general de la Teoría de Confiabilidad, haciendo ver que la probabilidad es la herramienta principal.

Para el desarrollo de este trabajo se ha estructurado en tres capítulos.

En el Capítulo 1 se presentan los conceptos y resultados de probabilidad que permitirán abordar la teoría de confiabilidad.

En el Capítulo 2 se establecen los conceptos y resultados básicos de la Teoría de Confiabilidad.

En el Capítulo 3 se estudian los modelos estándar de falla, como es: Exponencial, Normal y Weibull. Así como los modelos transmutados de la distribución Weibull y se finaliza con un sencillo ejemplo.

Finalmente, se muestran las conclusiones a las que se llegaron mediante el recorrido de este trabajo.

Capítulo 1

DEFINICIONES Y CONSIDERACIONES

Antes de adentrarnos de lleno en el campo de la confiabilidad y sus aplicaciones, debemos tener en claro algunos conceptos clave que nos ayudarán a identificar mejor el procedimiento de los modelos matemáticos.

- Componente: Es un dispositivo que se considera parte constituyente de un circuito electrónico.
- Sistema: Entidad formada por un conjunto de elementos o componentes básicos, y por las relaciones existentes entre ellos, así como con el entorno. Estas relaciones se expresan formalmente empleando lenguaje matemático.
- Tensión: Estado de un cuerpo sometido a esta.
- Defecto: Cuando el sistema no cumple con sus especificaciones ocasionadas por una imperfección.
- Falla: Estado incorrecto del sistema, en el hardware o software, resultante del defecto.
- Error: Manifestación de falla del sistema.
- Permanente: La falla o defecto permanente es aquel que es estable y continuo.
- Falla intermitente: Aquella que solo se manifiesta ocasionalmente, debido a un hardware inestable o a ciertos estados del sistema.
- Falla Transitoria. Aquella que resulta de una condición temporaria del medio ambiente.

Lo anterior es parte de la terminología que utiliza la Teoría de Confiabilidad.

En la siguiente sección se introducirán los conceptos necesarios de probabilidad que permitirán el estudio y análisis de la Teoría de Confiabilidad.

1.1. Espacio de Probabilidad

Recordando que la Teoría de Probabilidad tuvo sus inicios a mediados del siglo XVII, principalmente asociada con los juegos de azar, como el lanzamiento de dados, lanzamiento de monedas, loterías, etc.

El desarrollo de esta teoría se inició con Girolamo Cardano, quien se interesó en dar respuesta a los problemas que surgían en los juegos de azar. A él se le atribuye el inicio de la probabilidad, estableciendo su enfoque de probabilidad llamado Enfoque Clásico o Apriori:

$$P(A) = \frac{Casos\ favorables}{Número\ Total\ de\ Casos}.$$

Se debe mencionar que la Teoría de Probabilidad padeció y sufrió muchas críticas pues no contaba con un sustento formal en matemáticas.

Fue Andrei Kolmogorov quien llega a contribuir con esta teoría publicando su llamada probabilidad axiomática [2, 4, 6].

La probabilidad axiomática de Kolmogorov se basa en un conjunto de axiomas, donde se toma en cuenta los enfoques establecidos de probabilidad, además de su terminología, por ejemplo,

- Experimento aleatorio ε: Es aquel que admite repetición bajo las mismas condiciones pero que al realizarlo no se puede precisar que resultado va a ocurrir.
- Espacio Muestral o Muestra Ω**:** Es el conjunto que contiene a todos los posibles resultados de un experimento aleatorio ε.
- Evento **(**A**,** B**,** C**, ...):** Es cualquier subconjunto del espacio muestral Ω de manera inicial.

Una de las teorías que fortalece y fundamenta a la probabilidad es la teoría de conjuntos la cual nos permite definir formalmente:

Definición 1.1.1 Llámese espacio muestral a Ω que es el conjunto de todos los resultados posibles que pueden suceder en un experimento aleatorio llamado ε.

Ejemplo 1:

- Suponga que el experimento consiste en lanzar una moneda honesta y observar el evento que ocurre.

El espacio muestral que describe a este experimento es:

$\Omega = \{a,s\}$, donde $a =$ águila y $s =$ sol.

Ejemplo 2:

- El experimento consiste en lanzar un dado honesto.

El espacio muestral consiste en:

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}.$$

Ejemplo 3:

- El experimento consiste en lanzar al aire dos monedas honestas

El espacio muestral es:

$$\Omega = \{\{a,a\},\{a,s\},\{s,a\},\{s,s\}\}.$$

Ejemplo 4:

- El experimento consiste en medir el tiempo de vida de un fusible.

En este ejemplo el espacio muestral consiste de todos los números reales no negativos, esto es:

$$\Omega = [0,\infty).$$

Es conveniente que al realizar un experimento aleatorio identifiquemos los posibles resultados que pueden ocurrir, los cuales formarán parte del espacio muestral.

Note también que el resultado de un experimento no necesita ser un número, puede ser cualquier objeto de medición.

A continuación se define un concepto importante para un espacio de probabilidad que permite identificar cuando un conjunto es un evento. Esto es, se le puede asignar una probabilidad.

Definición 1.1.2: Sea $\mathscr{F}$ la colección de subconjuntos del espacio muestral Ω asociado a un experimento aleatorio, decimos que $\mathscr{F}$ es una σ-álgebra si cumple lo siguiente:

- $\Omega \ \in \mathscr{F}$.
- $A \in \mathscr{F}$; $A^c \in \mathscr{F}$.
- La sucesión de eventos disjuntos $A_i \in \mathscr{F}$ con $i \geq 1$, entonces $\cup_{m=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{F}$.

Para entender esta definición se toma el ejemplo más sencillo: Sea $\mathscr{F} = \{\varnothing, \Omega\}$, de la definición puede verificar que cumple con las propiedades de una σ-álgebra. Por lo tanto, no cualquier subconjunto es un evento, más bien, solamente los que están en $\mathscr{F}$.

También se menciona que la pareja $(\Omega,\mathscr{F})$ se le llama un espacio de medida. Así que el elemento que falta es la medida de probabilidad P que se define a continuación.

Definición 1.1.4: Sea P:$\mathscr{F} \longrightarrow$ [0,1] se dice que P es una función de probabilidad, sí cumple los siguientes axiomas:

1. P $[A] \geq 0$; $\forall\ A \in \mathscr{F}$.
2. P $[\Omega] = 1$.
3. Si A y B son eventos disjuntos entonces P$[A \cup B]$ = P$[A]$ + P$[B]$.
4. Si A_1, A_2, ..., A_n, ... es una sucesión numerable de eventos disjuntos dos a dos, es decir, $A_i \cap A_j = \varnothing$ si $i \neq j$ entonces P$[\cup_{k=1}^{\infty} A_k] = \sum_{k=1}^{\infty}$ P$[A_k]$.

Una vez que se han explicado los elementos que integran a un espacio de probabilidad, formalmente se tiene:

Definición 1.1.5: A la terna $(\Omega, \mathscr{F}, P)$, que está formada por el espacio muestral Ω, la σ-álgebra $\mathscr{F}$ y la medida de probabilidad P se le llama espacio de probabilidad.

Puesto que se cuenta ya con un espacio de probabilidad, la asignación de la probabilidad de un evento se puede determinar a partir de los axiomas y de los siguientes resultados, los cuales permiten el manejo en la parte del estudio de confiabilidad.

Resultados básicos:

Recordemos que: P(A)= probabilidad del evento A.

A estos 4 puntos anteriores, se les denomina axiomas de la teoría de la probabilidad, a partir de estos, se pueden deducir las siguientes propiedades:

- A) P(A^c)= 1 - P(A), para todo $A \in \mathscr{F}$.
- B) P($\varnothing$)= 0, donde $\varnothing$ se llama evento nulo o imposible.
- C) Sean A, $B \in \mathscr{F}$ cualesquiera eventos entonces P($A \cup B$) = P(A) + P(B) - P($A \cap B$).
- D) Sean A_1, A_2, ... , $A_n \in \mathscr{F}$ entonces P($A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$) $\leq$ P(A_1) + P(A_2)+ ... + P(A_n).
- E) Sean A, $B \in \mathscr{F}$ y $A \subseteq B$ entonces P(A) $\leq$ P(B).

Demostración:

Empezaremos tratando de hacer una breve demostración de algunas de estas propiedades:

A) Para ver que P(A^c) = 1 - P(A):

Puesto que $\Omega = A \cup A^c$ y que $A \cap A^c = \varnothing$, usando los axiomas 2 y 3 da como resultado

$$1 = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(A^c).$$

Por lo tanto,

$$\mathrm{P}(A^c) = 1 - \mathrm{P}(A). \blacksquare$$

B) Para demostrar, P($\varnothing$) = 0:

Podemos escribir que para cualquier suceso A, $A = A \cup \varnothing$. Como A y $\varnothing$ claramente son disjuntos, se deduce, por el axioma 3 que P(A) = P($A \cup \varnothing$) = P(A) + P($\varnothing$).

Despejando

$$\mathrm{P}(\varnothing) = 0. \blacksquare$$

C) Para probar que P($A \cup B$) = P(A) + P(B) - P($A \cap B$):

Descomponiendo la operación inicial se tiene, usando el axioma 3:

$$A \cup B = A \cup (B \cap A^c)$$
$$B = (A \cap B) \cup (B \cap A^c).$$

Por lo tanto:

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B \cap A^c),$$

$$\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A \cap B) + \mathrm{P}(B \cap A^c).$$

Sustrayendo de la segunda ecuación P($A \cup B$) - P(B) = P(A) - P($A \cap$ B). ■

La prueba de las propiedades restantes se realizan de forma similar. Para más detalles sobre estas propiedades puede consultar [2, 3, 4].

Debido a que los elementos de un espacio muestral no son necesariamente numéricos, y este es un conjunto el cual puede ser infinito y numerable o infinito y no numerable describir explícitamente a los elementos de Ω resultaría muy complicado. Un concepto que nos permite manejar este tipo de dificultades es el concepto de variable aleatoria, el cual se presenta en la siguiente sección.

1.2. Variables Aleatorias

Las variables aleatorias, son una gran herramienta ya que facilitan la manipulación de la probabilidad en base a los fenómenos aleatorios, y de esta forma permiten extender el análisis a muchos más casos de lo que se puede imaginar. Por ejemplo, por medio de las variables aleatorias se puede contar el número de llamadas telefónicas en el lapso de una hora, al lanzar un dado, el número de veces que caería un número especifico etc.

De esta forma, podemos seguir con la explicación formal para conocer más sobre estas herramientas.

Sea $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ un espacio de probabilidad, en donde Ω es el espacio muestral que está asociado a un experimento aleatorio, llamémosle ε, quiere decir, el conjunto que contiene a todos los posibles resultados de experimento aleatorio.

La componente $\mathscr{F}$ es la σ-álgebra de los eventos, esta nos asegura que a todo elemento de $\mathscr{F}$ siempre es posible asignar una medida de probabilidad.

La componente P se le llama "función de probabilidad"; esta permite asignar la probabilidad correspondiente a cualquier evento $A \in \mathscr{F}$.

Con esto se puede definir el concepto de variable aleatoria de la siguiente manera.

Las variables usuales que se estudian en diferentes areas son las variables aleatorias discretas y las variables aleatorias continuas. El tema de interés trata sobre variables aleatorias continuas, se presenta la definición de que es una variable aleatoria discreta.

Definición 1.2.1: Sea ε un experimento aleatorio y sea Ω el espacio muestral asociado al experimento. Se dice que X es una variable aleatoria si asigna un número $X(\omega)$ a cada uno de los elementos $\omega \in \Omega$, es decir, una variable aleatoria es una función que asigna valores reales y que está definida sobre el espacio muestral Ω, esto es:

$$X\mathbf{:}\ \Omega \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$\omega \longmapsto \mathbf{X}(\omega) = x.$$

Con el concepto de variable aleatoria seguimos con las siguientes definiciones:

Definición 1.2.2: Sea $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ el espacio de probabilidad. Sea $\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ una variable aleatoria. Se dice que X es una variable aleatoria discreta si su recorrido $\mathbb{R}_x$ es finito o numerable, es decir,

$\mathbb{R}_x = \{x_1, x_2, x_3, x_4, ..., x_N, ...\}$ y además, para todo posible resultado $x_i \in \mathbb{R}_x$ siempre es posible asignar un número real $\mathrm{p}(x_i) = P\ (\ X = x_i)$ tal que:

- $\mathrm{p}(x_i) \geq 0$, $\forall\ x_i \in \mathbb{R}_x$.
- $\sum_{\mathbb{R}_x} \mathrm{p}(x_i) = 1$.

A $\mathrm{p}(x_i)$ se le llama una función de probabilidad puntual ($fdpp$) y a (x_i, $\mathrm{p}(x_i)$) se le llama la función de probabilidad de X.

De igual forma se tiene el concepto siguiente:

Definición 1.2.3: Sea X: $\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ una variable aleatoria. Se dice que X es una variable aleatoria continua si su recorrido $\mathbb{R}_X$ es infinito y no numerable, es decir, $\mathbb{R}_X$ = (-∞,∞), (a,b),[a,b),(a,b],[a,b] y además, existe una función $f(x)$ llamada función de densidad de probabilidad, que cumple:

- $f(x) \geq 0$, $\forall\ x \in \mathbb{R}_x$.
- $\int_{\mathbb{R}_x} f(x)dx = 1$.
- $\mathrm{P}(a < X < b) = \mathrm{P}(a \leq X < b\ ) = \mathrm{P}(a < \mathrm{X} \leq b) = \mathrm{P}(a \leq \mathrm{X} \leq b) = \int_a^b f(x)dx$.

Una función que caracteriza de forma única a una variable aleatoria es la función de distribución acumulativa.

Definición 1.2.4 Sea X: $\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ una variable discreta o continua, definimos a la función de distribución acumulativa de X denotada como $F(x)$, como:

$$F(x) = P(X \leq x),$$

donde, si X es una variable aleatoria discreta se tiene;

$$P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i),$$

y si X es una variable aleatoria continua;

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

De las definiciones anteriores, a continuación se mencionan las características asociadas a las variables aleatorias discretas y continuas.

Definición 1.2.5: Sea X: $\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ una variable aleatoria discreta con $fdpp$ $p(x_i)$ y recorrido $\mathbb{R}_x = \{x_1, x_2, x_3, x_4, ..., x_N, ...\}$, se define la esperanza matemática de X, $E[X]$ como:

$$E[X] = \sum_{i=0}^{\infty} kp(k)$$

siempre que

$$\sum_{k=0}^{\infty} |k|p(k) < \infty.$$

Definición 1.2.6: Sea X: $\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ una variable aleatoria continua con fdp $f(x)$ y recorrido $\mathbb{R}_x$ = (- ∞, ∞), la esperanza matemática de X se denota como $E[X]$, se define de la siguiente manera:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx,$$

siempre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|f(x)dx < \infty.$$

Definición 1.2.7: Sea X: $\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ una variable aleatoria discreta o continua. La varianza de X se denota como $V[X]$ y se define como:

$$V[X] = E[(X - E[X])^2].$$

De esta definición, para fines prácticos del calculo de la varianza se tiene la siguiente propiedad:

Propiedad 1.2.8: Sea X: $\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ una variable aleatoria discreta o continua, se cumple lo siguiente:

$$V[X] = E[X^2] - (E[X])^2.$$

Demostración:

Por la Definición (1.2.6) tenemos que:

$$V[X] = E[(X - E[X])^2] = E[X^2 - 2XE[X] + (E[X])^2] =$$

Debido a que la esperanza matemática se comporta de manera lineal se tiene que,

$$= E[X^2] - 2E[X]E[X] + (E[X])^2.$$

Reduciendo términos se tiene

$$V[X] = E[X^2] - (E[X])^2. \blacksquare$$

1.3. Funciones de probabilidad continuos

En esta sección, se abordarán algunas distribuciones cuya relevancia no solo está en probabilidad sino también en otros temas de investigación en particular en la Teoría de Confiabilidad donde se utiliza el concepto de variable aleatoria continua cuya función de densidad de probabilidad puede ser alguna de las siguientes.

Distribución Exponencial

Definición 1.2.8: Se dice que una variable aleatoria continua X que toma todos los valores no negativos tiene una distribución exponencial con parámetro α positivo si su fdp está dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x}, \text{ si } x > 0, \\ 0, \quad \text{d.o.f} \end{cases}$$

Para los fenómenos, especialmente en la teoría de la confiabilidad, la distribución exponencial desempeña un papel importante en la descripción de tiempos de falla.

A continuación se presentan las propiedades importantes de la distribución exponencial

a) La fda F de la distribución exponencial está dada por:

$$F(x) = \begin{cases} \mathrm{P}(X \leq x) = \int_0^x \alpha e^{-\alpha t} dt = 1 \text{ - } e^{-\alpha x}, \text{ si } x \geq \ 0 \\ 0, \quad \text{d.o.f.} \end{cases}$$

Por tanto, $\mathrm{P}(X > x) = e^{-\alpha x} = 1$ - $F(x)$.

b) El valor esperado de X se obtiene como sigue.

$$E(X) = \int_0^\infty x\alpha e^{-\alpha x} dx.$$

Integrando por partes y haciendo $\alpha\ e^{-\alpha x}\ dx = dv$, $x = u$, obtenemos $v =$ -$e^{-\alpha x}$, $du = dx$. Luego,

$$E(X) = [-xe^{-\alpha x}]|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha}.$$

c) La varianza de X puede obtenerse con una integración semejante. Encontramos $E(X^2) = 2/\alpha^2$ y por tanto:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{1}{\alpha^2}.$$

d) La distribución exponencial tiene la siguiente propiedad, sean s y t cualesquiera números reales, con $s < t$,

$$P(X > \ s + t|X > s) = \frac{P(X > s + t)}{P(X > s)} = \frac{e^{-\alpha(s+t)}}{e^{-\alpha s}} = e^{-\alpha t}.$$

Por lo tanto,

$$P(X > s + t|X > s) = P(X > t).$$

De esta forma se muestra que la distribución exponencial tiene la propiedad de "no tener memoria" o de carecer de memoria.

La Distribución Normal

Una variable aleatoria que tiene mucha importancia en la Teoría de Confiabilidad, es la distribución normal. Esta distribución se utiliza para la aproximación de probabilidades en varios modelos y su principal aplicación se da en el Teorema Central de Límite [3]. De esta forma definamos a la distribución normal.

Definición 1.2.9: La variable aleatoria X, que toma todos los valores reales $-\infty < x < \infty$, tiene una distribución normal (o Gaussiana) si su fdp es de la siguiente forma:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} exp(-\frac{1}{2}[\frac{x-\mu}{\sigma}]^2), \ -\infty \ < \ x \ < \ \infty,$$

De esta forma, si la variable aleatoria X tiene una distribución normal con media μ y varianza σ^2, se denota con:

$$X \sim N(\mu, \sigma^2).$$

En esta distribución, el uso de los parámetros μ y σ^2 se utilizan para representar a la media y la varianza respectivamente, también, se debe notar que los parámetros μ y σ deben de satisfacer las condiciones siguientes: $-\infty < x < \infty$, con $\sigma > 0$.

La función de densidad de la distribución normal, posee características propias como es la continuidad, la simetría en $x = \mu$, etc. Como un caso particular de esta distribución, se tiene que si la variable aleatoria tiene $\mu = 0$ y $\sigma^2 = 1$, entonces la nueva función de densidad está dada de esta manera se le denomina como variable aleatoria estándar o normalizada, que para este caso, su representación es de la siguiente manera:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \qquad -\infty < x < \infty,$$

además, su función de distribución acumulativa tiene la siguiente forma

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \phi(u) du.$$

Para verificar que ϕ es una función de densidad puede consultar [2, 3].

Otra de las distribuciones que tiene relevancia en el estudio de conjuntos de datos de tiempos de vida es llamada distribución gamma.

Distribución Gamma

Para definir la función de la distribución gamma, primero es necesario definir la función gamma la cual se establece en cursos de ecuaciones diferenciales o de Física.

Definición 1.2.10: La función gamma denotada por Γ, se define como:

$$\Gamma(p) = \int_{0}^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx,$$

definida para

$$p \ > \ 0.$$

Se puede verificar que si p es un entero positivo entonces $\Gamma(p) = (p-1)!$, para más detalles se puede consultar [2, 8].

Definición 1.2.11: Sea X una variable aleatoria continua que toma sólo valores no negativos. Decimos que X tiene una distribución de probabilidades gamma si su fdp está dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\Gamma(r)} (\alpha x)^{r-1} e^{-\alpha x}, & \text{x} > 0, \\ 0, & \text{d.o.f.} \end{cases}$$

Está distribución dependen de dos parámetros, r y α, los cuales se requiere que $r > 0$ y es llamado parámetro de escala, $\alpha > 0$ es llamado parámetro de forma. De igual manera, para observar más propiedades de esta distribución, consultar [2, 3].

Esta distribución es usada para modelar el comportamiento de variables aleatorias con asimetría positiva o en experimentos donde está involucrado el tiempo, en particular en la Teoría de Confiabilidad.

Capítulo 2

CONFIABILIDAD

2.1. Introducción

El propósito de este capítulo es llevar a cabo el estudio de un área de aplicación y que actualmente tiene un crecimiento importante, principalmente en la industria y la ingeniería. Esta área de aplicación se le conoce con el nombre de Teoría de Confiabilidad y para su estudio se hará uso de conceptos y resultados de probabilidad. La Teoría de Confiabilidad se encarga de estudiar el tiempo de "falla" o de "vida" de un objeto, dispositivo, componente o sistema de componentes, el cual se somete a cierto tipo de "Tensión". Si el objeto, dispositivo o sistema se pone en condiciones de tensión durante un tiempo determinado, denominado como $t = 0$ y se observa hasta que falla, es decir, deja de funcionar correctamente debido a la tensión aplicada, el tiempo para que ocurra la falla o la duración llamémosle T, se puede considerar como una variable aleatoria continua con función de densidad de probabilidad (fdp) $f(t)$.

Existe evidencia empírica que el valor de T no puede predecirse con un modelo determinista. Es decir, componentes idénticos sometidos a tensiones idénticas fallarán en tiempos diferentes e impredecibles.

La forma de fallar depende de cada tipo de artículo o dispositivo que se considere. Por ejemplo, un fusible fallará de improviso en el sentido de que en un momento dado el fusible está funcionando y al otro fallará; mientras que una barra de acero sometida a una carga pesada se debilitará probablemente en el transcurso de un largo periodo de tiempo.

En cualquiera de las situaciones, el uso de un modelo probabilístico, considerando a T como una variable aleatoria continua, es lo más adecuado.

El termino confiabilidad se puede aplicar en diferentes áreas tales como: la Psicología, la Ingeniería, las Noticias, la Industria. Para el caso de la ingeniería de confiabilidad se puede definir como la rama de la ingeniería de las características físicas y aleatorias del fenómeno "falla". Mientras que, en la industria, la confiabilidad, surge de la integración de una serie de actividades, y de diversas ramas de la ingeniería, donde el análisis del "fracaso" jugó un papel fundamental en la mejora de la confiabilidad. El estudio que se realizará será desde la herramienta aleatoria mostrando que conceptos y resultados se pueden ser aplicados a la Teoría de Confiabilidad.

2.2. Concepto de Confiabilidad

En esta sección se abordan los conceptos de confiabilidad y función de riesgo que tienen un papel importante en esta área de aplicación.

De manera informal se puede decir que la confiabilidad de un dispositivo o componente cumpla con su función, en un tiempo determinado y bajo condiciones operacionales específicas.

Por ejemplo, supongamos que en una fábrica de bombillas, necesitamos saber el tiempo de duración de las mismas, de esta forma, podremos ofrecer un producto de calidad y con seguridad. Así pues, en este contexto se dirá que la confiabilidad es la capacidad de que la bombilla cumpla con su función en un tiempo determinado bajo las condiciones de fabricación, es decir, no considerando casos extraordinarios como fenómenos meteorológicos, fenómenos de corriente, etc.

Esto quiere decir: Considere que la variable aleatoria T es continua con función de densidad de probabilidad (fdp) $f(t)$, que determina el tiempo de "falla" del dispositivo o componente.

Definición 2.1: La confiabilidad de un componente (o sistema), en el tiempo t, que llamaremos:

$$R(t), \text{ está definida como } R(t) = \mathrm{P}\ (T > \ t),$$

donde, T es la duración del componente y R es llamada función de confiabilidad.
La Definición 2.1, se puede interpretar que la confiabilidad de un componente o sistema es la probabilidad de que dicho componente o sistema al menos funcione hasta el tiempo t, o que no falle al menos en el intervalo de tiempo de [0,t].

Los sistemas en general se encuentran integrados por componentes, y como hemos mencionado, es necesario evaluar la confiabilidad de dicho sistema, ya que nos permitirá estar preparados para el momento en que falle. Y, acorde a sus necesidades, hacer un pronóstico o mejora al evento.

Si tratamos de identificar las características de diseño y construcción de sistemas, que nos permitan mayor confiabilidad, entonces podemos considerar los siguientes 3 factores:

1. Complejidad: cuantos menos componentes y menos tipos de material se utilicen, en general, mayor es la probabilidad de un artículo confiable.
2. Duplicación o replicación: es el uso de partes adicionales, redundantes, mediante las cuales una sola falla no causa que el sistema en general falle, es un método para lograr confiabilidad.
3. Exceso de resistencia: el diseño deliberado para soportar tensiones superiores a las previstas reducirá la tasa de fallas.

2.3. Relaciones entre la función de confiabilidad y la función de riesgo

De lo anterior surge la pregunta, ¿qué es la tasa de falla?.

La tasa de falla también llamada función de riesgo, tiene un papel predominante en el análisis de conjuntos de datos de tiempos de "falla", ya que ella puede dar información sobre que distribución de probabilidad tienen o siguen los datos. Además, en el análisis de sistemas nos permite describir las partes que fallan.

Definición 2.2: La tasa de falla (instantánea), o también llamada función de riesgo, $Z(t)$ asociada con la variable aleatoria T, se puede expresar como:

$$Z(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)} = \frac{f(t)}{R(t)}.$$

Para F(t) $<$ 1, ya que esta es la función de distribución acumulada de T y $f(t)$ su función de densidad de probabilidad.

La tasa de fallas $Z(t)$ de un componente o sistema, representa la relación entre el número de fallas que experimenta el componente por unidad de tiempo que se encuentra operando.

Esta tasa, describe, de alguna forma, el deterioro o desgaste que sufre el componente o sistema en cuestión..

De esta forma se puede decir que la tasa de fallas $Z(t)$, describe el “deterioro” que sufre el componente o sistema. Por ejemplo, suponga que el tiempo de vida de un fusible sigue una distribución exponencial con parámetro $\lambda = 0.2$, esto es, $T \sim$ exp (0.2), como usted puede verificar, la tasa de fallas $Z(t) = 0.2$.

Esto indicaría que el fusible no sufre deterioro con el tiempo, mientras siga funcionando se le puede considerar como nuevo.

Observación 1. Una interpretación de la tasa de fallas $Z(t)$, sería la siguiente: Consideremos la probabilidad condicional:

$$P(t \leq T \leq t + \triangle t \mid T \ > \ t).$$

Es decir, la probabilidad de que el dispositivo falle durante las próximas $\triangle t$ unidades de tiempo, dado que el dispositivo está funcionando en el instante t. Luego, aplicando la definición de probabilidad condicional, se tiene:

$$P(t \leq T \leq t + \triangle t|T > t), = \frac{P(t < T \leq t + \triangle t)}{P(T > t)} = \frac{\int_{t}^{t \triangle t f(s) ds}}{P(T > t)} = \frac{\triangle t f(\epsilon)}{R(t)} \qquad (2.3)$$

donde t $\leq \epsilon \leq t + \triangle\ t$.

De la expresión (2.3) para un $\triangle t$ pequeño y suponiendo que f es continua en t por la derecha, esta es aproximadamente igual a $\triangle t \ \ Z(t)$. Así, de manera informal, $\triangle t \ \ Z(t)$ representa la proporción de dispositivos que está entre t y $t + \triangle t$, de aquellos dispositivos que aún están funcionando al tiempo t.

Para el estudio de los tiempos de “falla” de un dispositivo, componente o sistema, se necesita de una variable aleatoria continua T, de su fdp $f(t)$, de su fda $F(t)$, de su función de confiablidad $R(t)$ y la función $Z(t)$ que es una característica única de la variable de tiempo para fallar de una población de componentes, equipos o sistemas.

Como se puede notar en la Definición 2.2, la fdp de T, determina unívocamente a la tasa de fallas $Z(t)$. Enseguida se mostrará que su recíproco también es válido, esto es, la tasa de falla determina unívocamente a la función de densidad de probabilidad $f(t)$.

Teorema 2.1: Si T, el tiempo para fallar, es una variable aleatoria continua con "función de densidad de probabilidad" (fdp) f y si $F(0) = 0$ en donde F es la "función de distribución acumulada" (fda) de T, entonces f puede expresarse mediante la tasa de falla Z como sigue:

$$f(t) = Z(t)\ e^{-\int_0^t Z(s)ds}.$$

Demostración:

Como

$$R(t) = 1 - F(t), se\ tiene\ que\ R'(t) = -F'(t) = -f(t).$$

De esta forma, obtenemos:

$$Z(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{-R'(t)}{R(t)}.$$

Ahora, integrando ambos miembros de [0,t]:

$$\int_0^t Z(s)ds = \int_0^t \frac{R'(s)}{R(s)}ds = -lnR(s)|_0^t = -lnR(t) + lnR(0) = -lnR(t),$$

Suponiendo que $lnR(0) = 0$ lo que es válido si y sólo si $R(0) = 1$. La última condición se cumple si $F(0) = 0$. Esto quiere decir, que la probabilidad de una falla inicial es igual a cero, se hace esta suposición en el resto de la prueba. Por lo tanto:

$$R(t) = e^{-\int_0^t Z(s)ds}.$$

Así se obtiene $f(t) = F'(t) = \dfrac{d}{dt}$ (1 - $R(t)) = Z(t)\ e^{-\int_0^t Z(s)ds}$.

Esto demuestra que la tasa de fallas Z determina de forma única a la fdp f. ■

Como consecuencia directa del Teorema 2.1, se tiene:

Teorema 2.2: La función de confiabilidad $R(t)$ y la función de riesgo $Z(t)$ se encuentran relacionadas mediante la siguiente expresión:

$$R(t) = e^{-\int_0^t Z(s)ds}.$$

De la ecuación anterior se implica que al definir la función $Z(t)$ podemos definir la función $R(t)$ y viceversa.

Anteriormente se ha explicado la función de riesgo $Z(t)$ que describe el comportamiento del número de fallas de un sistema por unidad de tiempo, y la misma puede ser creciente (el número de componentes del sistema que fallan por unidad de tiempo aumenta progresivamente), decreciente (el número de componentes del sistema que fallan por unidad de tiempo disminuye progresivamente) o constante.

Debido al problema de globalización en las industrias hoy en día y en áreas de aplicación de la confibilidad, se busca que su función de riesgo tenga forma de bañera, es decir, se muestre un gráfico como el siguiente para lograr una mejor confiabilidad en sus productos.

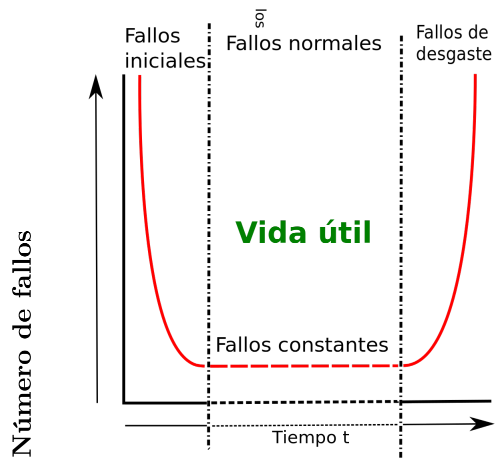


Gráfico 1: Gráfico de Bañera

2.4. Tiempo promedio de Falla

Ya vimos las relaciones que se tienen entre una función de confiabilidad y su tasa de falla. A continuación se presenta el siguiente concepto importante.

Existe una relación bastante estrecha entre la función de confiabilidad R, y el tiempo promedio de falla, es decir, $R(t)$ y $E(T)$. Así pues, para explicar este concepto, consideramos el siguiente lema.

Lema 1

Supongamos que $E(T)$, es finito entonces:

$$\lim_{b\to\infty} b(1 - F(b)) = 0$$

Demostración:

Ya que $E(T)$ es finito, entonces las "colas" tienden a ser 0, es decir:

$$\lim_{b\to\infty} \int_b^\infty tf(t)dt = 0$$

$$\lim_{b \to -\infty} \int_{-\infty}^{b} tf(t)dt = 0$$

De esta forma por la:

Desigualdad de Markov,

SI X es una variable aleatoria no negativa tal que existe $E[X]$ y $k > 0$ una constante, entonces:

$$P[X \geq k] \leq \frac{E[X]}{k}.$$

Obtenemos

$$bP(T \geq b) \leq E(T). \qquad (2.1)$$

Además,

$$\int_{b}^{\infty} tf(t)dt \geq E(T). \qquad (2.2)$$

Restando (2.1) de (2.2) se obtiene el siguiente resultado:

$$bP(t \geq b) - \int_{b}^{\infty} tf(t)dt \leq 0. \qquad (2.3)$$

luego entonces,

$$bP(t \geq b) \leq \int_{b}^{\infty} tf(t)dt.$$

entonces,

$$b(1 - F(b)) \leq \int_{b}^{\infty} tf(t)dt.$$

De donde se obtiene que,

$$0 \leq \lim_{b\to\infty} b(1 - F(b)) \leq \int_b^\infty tf(t)dt = 0.$$

Por consiguiente, se tiene:

$$\lim_{b\to\infty} b(1 - F(b)) = 0.\blacksquare$$

Veamos ahora que también existe una relación entre la función $R(t)$ y $E(t)$.

Teorema 2.2 Si $E(T)$ es finito entonces:

$$E(T) = \int_0^\infty R(t)dt. \qquad (2.6)$$

Demostración: del lado derecho de (2.6) se puede expresar de la siguiente forma:

$$\int_0^\infty R(t)dt = \int_0^\infty \int_t^\infty f(s)dsdt.$$

Ahora, integrando por partes,

$$u = \int_t^\infty f(s)ds \rightarrow du = -f(t)dt,$$

$$dv = dt =\rightarrow v = t.$$

Así se obtiene que:

$$\int_0^\infty \int_t^\infty f(s)dsdt = [t \int_t^\infty f(s)ds]_0^\infty + \int_0^\infty tf(t)dt =$$

$$= [t \int_t^\infty f(s)ds]_0^\infty + E[T] = [(\lim_{t\to\infty} t(1 - F(0))] \cdot \int_0^\infty f(s)ds] + E[T] =$$

$$= [\lim_{t\to\infty} t(1 - F(t))] + E[T] = E[T].\blacksquare$$

De los resultados anteriores, se puede preguntar ¿Cuál será la forma que tendrá la fdp $f(t)$ del tiempo de "falla" T?

La respuesta parece no complicada, pues se sabe que T es una variable aleatoria continua, luego entonces $f(t)$ debe de tener cualquier forma siempre y cuando sea una función de densidad de probabilidad. Sin embargo, no todas las fdp permiten modelar tiempos de "falla", el siguiente capítulo tratará sobre modelos de falla.

NOTA: Al conocer las distribuciones de probabilidad y los resultados establecidos en este capítulo, se puede estudiar la confiabilidad en sistemas de componentes armados en serie y en paralelo considerando que cada componente trabaja de forma independiente.

Capítulo 3

APLICACIONES DE LA CONFIABILIDAD

Se inicia este capítulo señalando que los conceptos de confiabilidad y tasa de falla están entre las herramientas necesarias más importantes para el estudio de los modelos de falla.

En la aplicación de las nuevas tecnologías en la industria hace posible la fabricación de nuevos productos o elementos, generalmente electrónicos que aumentan la complejidad en los procesos industriales; este hecho trae como consecuencia el aumento de riesgos que influyen en la seguridad de toda la instalación. La probabilidad por medio de la ley de fallas del sistema o componentes permite obtener técnicas de predicción que aseguran la calidad de los productos. Existen varias funciones de distribución que modelan el comportamiento de fallas. En este capítulo se realiza un estudio detallado de las distribuciones de uso más frecuente en la teoría de confiabilidad.

3.1. Leyes de Falla Estándar

Iniciamos esta sección describiendo los modelos básicos de falla, esto es, los modelos cuyas distribuciones de probabilidad se estudian en los primeros cursos de probabilidad.

En la probabilidad y la estadística la Distribución Normal tiene un rol importante, pues establece en primer lugar un modo de convergencia, llamada convergencia en distribución, y en segundo lugar, con esta distribución se pueden aproximar, sucesiones de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas.

Esta ley de convergencia se le conoce con el nombre de Teorema Central del Límite, [3].

3.1.1. Ley Normal de falla

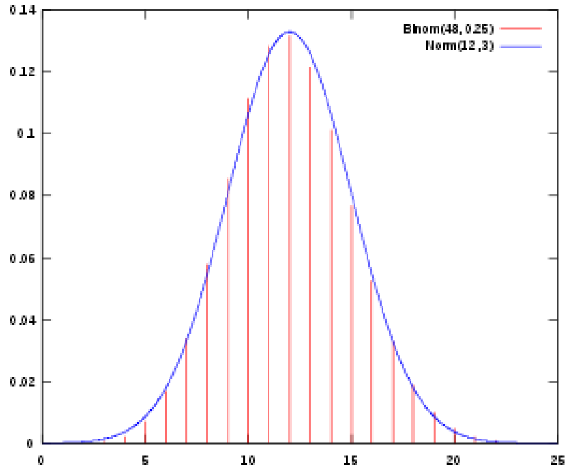


Gráfico 2: Distribución Normal

Este modelo es uno de los más básicos y conocidos, llamado así porque utiliza la distribución normal, utilizando los parámetros (μ, σ) para la variable aleatoria T.

En algunas aplicaciones, se tiene que la conducta de algunos componentes puede describirse a través de la ley normal de falla. Si T es la duración de un artículo, que claramente se va a considerar mayor o igual a cero, su fdp está dada por:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp[-\frac{1}{2}[\frac{t-\mu}{\sigma}]^2], -\infty < t < \infty.$$

Además, se tiene que -$\infty < \mu < \infty$ y $\sigma^2 > 0$.

En este modelo recuerde que el tiempo para que ocurra la falla T, debe ser mayor o igual a cero. Por tanto, para que este modelo sea aplicable se debe considerar que $\mathrm{P}(T < 0)$ es cercana a cero. Como la forma de la fdp normal lo indica, una ley normal de falla implica que la mayoría de los artículos fallan alrededor del tiempo promedio de falla, $E(T) = \mu$ y el número de fallas disminuye simétricamente cuando | T - μ | aumenta. Una ley normal de falla significa que alrededor del 95.44 % de las fallas tiene lugar para los valores de t, que satisfacen -2 $< \dfrac{t-\mu}{\sigma} <$ 2. Se puede ver que la distribución normal es simétrica, por lo tanto, la media, la mediana y la moda coinciden, esto es, son iguales. Además, la fdp normal no posee un parámetro que caracterice a la forma general, por esta razón la forma que posee de campana no cambia.

El paramétro que indica la relación de aspecto de una fdp normal está dado por la desviación estándar; a medida que este valor se incrementa, la fdp se desparrama del valor medio, se ensancha y su pico disminuye. Por el contrario, si el valor de σ disminuye, el pico de la campana se vuelve más alto y además se angosta.

Geométricamente, la desviación estándar, es la distancia entre el valor medio y el punto de inflexión de la fdp. La función confiabilidad de la ley normal de falla se puede determinar, de la forma siguiente:

$$R(t) = \int_t^\infty f(s)ds = \int_t^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp[-\frac{1}{2}[\frac{s-\mu}{\sigma}]^2]ds, \qquad (3.1)$$

Su valor no puede obtenerse a través de expresiones matemáticas cerradas sino a través del uso de tablas o evaluaciones numéricas.

Usando la función de distribución normal acumulativa tabulada,

$$R(t) = 1 - \phi[\frac{t-\mu}{\sigma}]. \qquad (3.2)$$

Donde ϕ muestra el valor de la función de densidad de una distribución normal.

Es decir, $R(t)$ como en (3.2) hace notar que, para obtener una confiabilidad alta, el tiempo de operación debe ser considerablemente menor que μ, es decir, que la duración esperada.

En muchos casos, es posible que se desconozcan los parámetros que caracterizan a la fdp normal.

Para una distribución normal, la función distribución acumulativa (fda), $F(t)$ se define a partir de la siguiente expresión:

$$F(t) = P(T \leq t) = \phi[\frac{t-\mu}{\sigma}] \qquad (3.3).$$

Por lo tanto,

$$\phi^{-1}((F(t)) = -\frac{\mu}{\sigma} + \frac{1}{\sigma}t, \qquad (3.4)$$

donde,

$$\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{x^2}{2}dx}. \qquad (3.6)$$

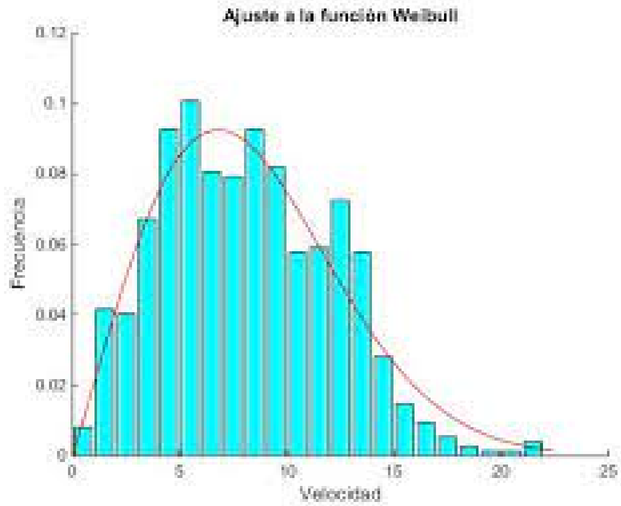
Entonces, es posible considerar las siguientes variables que permitirán obtener una ecuación lineal para ϕ^{-1} $(F(t))$:

$$y = \phi^{-1}(F(t)), a = \frac{-\mu}{\sigma}, b = \frac{1}{\sigma} \Longrightarrow y = a + bt. \qquad (3.7)$$

Al gráficar $F(t)$, es decir, la probabilidad de que ocurra una falla antes del instante t en función del tiempo, es posible estimar el valor de μ localizando el punto correspondiente a t en el cual $F(t)$ es del 50 %. Este hecho es posible gracias a que la distribución normal es simétrica consultar [1, 6, 7, 8].

La Ley Normal de Fallas usualmente se utiliza en el estudio de tiempos de vida de objetos que tienen o sufren desgaste, como por ejemplo; un balón de fútbol, un bate de béisbol, etc.

3.1.2. Ley de falla de Weibull



La distribución de Weibull es una de las distribuciones más utilizadas en el análisis de tiempos de falla, ya que los tiempos de vida de un conjunto de datos se pueden ajustar con esta distribución, que pertenece a la familia de los exponenciales.

Este modelo de distribución es usado en particular para ayudar a modelar la vida de un objeto, o saber el promedio de su duración antes de que presente una falla.

Además, la distribución de Weibull, es utilizada para evaluar aplicaciones como cables de luz, así como también ajustar conjuntos de datos de tiempos de falla.

Con la ayuda de este modelo, se pueden contestar las siguientes preguntas:

- ¿Qué porcentaje de los elementos se espera falla durante un periodo?
- ¿Cuántos reclamos de garantía pueden esperarse durante la fase de vida útil?
- ¿Cuándo se espera que se produzca un desgaste rápido?

Aunque bien, este modelo no es recomendable para modelar fallas de producción por reacciones químicas o un proceso de degradación.

Para este modelo se hace una modificación en la noción de tasa constante de fallas que conduce a la ley exponencial de fallas. Supóngase que la tasa de fallas Z, asociada a T, la duración de un artículo, tiene la forma siguiente:

$$Z(t) = (\alpha\beta)t^{\beta-1}.$$

En donde α y β son constantes positivas. Del Teorema 2.2, se obtiene la siguiente expresión:

$$f(t) = (\alpha\beta)t^{\beta-1}e^{-\alpha t^{\beta}},\ si\ t\ >\ 0, \alpha,\ \beta\ >\ 0. \tag{3.8}$$

De esta forma T, es una variable aleatoria Weibull si su función de densidad de probabilidad es como la anterior. Por otro lado, su función de confiabilidad R está dada por

$$R(T) = e^{-\alpha t^{\beta}}.$$

La cual es una función decreciente de t.

De los conceptos mencionados anteriormente, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 3.1.2 Si la variable aleatoria T tiene una distribución Weibull con fdp dada por (3.8), se tiene:

$$E(T) = \alpha^{\frac{-1}{\beta}} \Gamma(\frac{1}{\beta} + 1),$$

$$V(T) = \alpha^{\frac{-1}{\beta}} \{\Gamma(\frac{2}{\beta} + 1) - [\Gamma(\frac{1}{\beta} + 1)]^2\}.$$

Para su demostración puede consultar [1, 5, 8].

3.1.3. Ley exponencial de Falla

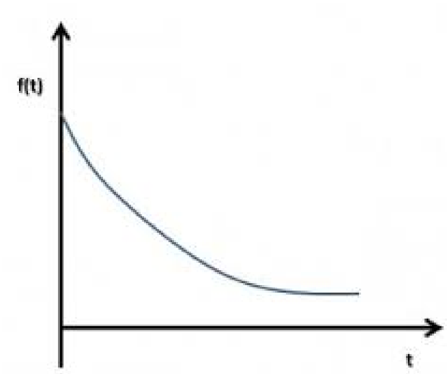


Gráfico 4: Ley exponencial de falla

La ley de falla exponencial, es un caso particular de la distribución de Weibull cuando $\alpha = 1$. Sin embargo, deseamos considerarla de forma específica, debido a sus características [5, 6, 7], las cuales nos permitirán identificar, si la implementación de esta distribución es adecuada para modelar el tiempo de vida representado por la variable aleatoria T.

Recordemos que una variable aleatoria T, tiene distribución exponencial, si su función de densidad es de la forma:

$$f(t) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha t}, \text{ si } t > 0, \\ 0, \quad \text{d.o.f.} \end{cases}$$

De esta forma implicamos lo siguiente:

- $F(t) = 1 - e^{-\alpha t}$,
- $R(t) = e^{-\alpha t}$,
- $E[T] = \dfrac{1}{\alpha}$,
- $Z(t) = \dfrac{\alpha e^{-\alpha t}}{e^{-\alpha t}} = \alpha$.

Se observa que la tasa de fallas es constante y si quisiéramos describir el comportamiento del tiempo de vida de un componente o sistema a través de la variable $T \sim exp\ (\alpha)$, significaría que dicho componente o sistema, no sufre de deterioros con el paso del tiempo, o bien, que su tiempo transcurrido antes de que ocurra la falla, no tiene relación con que esta se presente, lo que significa que las fallas se pueden producir en cualquier momento. Esta característica permite que la distribución exponencial se utilice para componentes que nunca se fatigan, es decir, que cuando un componente en una operación normal y aún no falla, es igual de un componente bueno, tanto como si fuera nuevo.

Los componentes que se identifican con este comportamiento son de tipo eléctrico, electrónico, electromecánico y mecánico. Suelen requerir el desmontaje de los componentes para su reparación (si este llegara a necesitarla), de tenerla, puede resultar costosa y con bastante tiempo de parada.

Algunos componentes eléctricos que por vista general no presentan un desgaste o falla visible, son componentes de circuitos integrados de alta calidad, como transistores, resistencias, condensadores, o diodos. Sin embargo, la distribución exponencial no se debe utilizar para modelar componentes mecánicos o eléctricos que se espera muestren fatiga, corrosión o desgaste, antes de que termine la vida útil del producto.

Los modelos de falla estándar nos permiten modelar los tiempos de falla de dispositivos, componentes, sistemas de componentes o conjuntos de datos de tiempo de vida, no obstante, siempre es recomendable contar con un programa de mantenimiento y reemplazo.

3.2. Modelos de Falla no Estándar

Uno de los problemas que se presenta actualmente en la adquisición de dispositivos, componentes o sistemas, fabricados con las nuevas tecnologías, es elegir aquel dispositivo que presente mejores características pero sobre todo que posea una buena confiabilidad. En este sentido, se han obtenido nuevos modelos que son una evolución de los modelos de falla estándar con nuevas condiciones de estudio.

A continuación, se presentan los modelos que son una evolución de los modelos de falla estándar.

La mayoría de estos modelos, son una combinación de dos modelos de falla tradicionales ajustados para situaciones o fallas especificas.

3.2.1. Modelo Weibull Modificado (MWM)

A pesar de que la distribución Weibull de dos parámetros es de amplio uso para modelar la vida de distintos componentes en ingeniería, este modelo no se puede utilizar para representar, al mismo tiempo, las 3 etapas de la curva de la bañera, (esta representa la probabilidad de que un determinado activo falle a lo largo del tiempo y nos permite tres fases distintas en el ciclo de vida del activo) es por esta razón que se propuso "The Additive Weibull Model", o bien, el Modelo de Weibull Modificado (MWM).

Como lo sugiere indirectamente el nombre en inglés, la modificación consiste en expresar la función de tasa de falla que no es más que la suma de dos tasas de falla, así su forma se representa mediante la distribución Weibull. El Modelo de Weibull Modificado combina dos distribuciones de Weibull, uno con una tasa de falla creciente y otra con tasa de falla decreciente. A continuación, presentamos las funciones principales asociadas a este modelo:

- $f(t) = at^b + ct^d$,
- $F(t) =$ 1- $e^{-at^b - ct^d}$,
- $R(t) = e^{-at^b - ct^d}$,
- $E(T) = \int_0^\infty$ $e^{-(at)b - ct^d}$ dt,
- $Z(t) = ab(at)^{b-1} + cd(ct)^{d-1}$,

con parámetros t, a, $c \geq 0$, $b > 1$ y $d < 1$.

Algunas de las características de este modelo que valen la pena comentar, es que al gráficar $Z(t)$, se puede apreciar que la tasa de fallas tiene forma de curva de la Bañera; para tiempos pequeños el segundo término de dicha ecuación es dominante y decreciente, para los tiempos más grandes el primer término es dominante para una función creciente, la tasa de fallas constante se presenta en los tiempos medios de la vida del componente.

Este modelo se puede utilizar para el análisis de conjuntos de datos de tiempos fallas recolectados, donde se desconozca el modo de falla que ha ocurrido. Además, la fase constante puede ser el resultado intermedio cuando la función creciente y decreciente son de magnitud similar.

Existe también el caso reducido para este modelo, en donde solamente se utilizan dos parámetros para facilitar su aplicación, este modelo se obtiene considerando que $a = c$ y $d = 1/b$, cuando $b > 1$ implica $= 1/b < 1$, así, se reduce el modelo a dos parámetros, pero se conserva la forma de la tasa de falla.

La función tasa de fallas para el MWM reducido a dos parámetros es:

$$Z(t) = ab(at)^{b-1} + \frac{a(at)^{\frac{1}{b-1}}}{b}.$$

El modelo reducido a dos parámetros, a pesar de utilizarse de forma educacional, presenta buenos resultados en aplicaciones prácticas. Este modelo es útil para el análisis de confiabilidad de productos y sistemas, permite determinar el tiempo óptimo para el cambio de componentes y también el tiempo para realizar algún servicio. Utiliza la función tasa de fallas para determinar el periodo de cambio antes de que el riesgo de aparición de la falla aumente.

3.2.2. El Nuevo Modelo Modificado de Weibull (NMWM)

Uno de los objetivos que se busca en la nueva modificación que se hizo al modelo de Weibull, es que permita realizar mejores ajustes de las tasas de fallas a la curva de la bañera. Es modelo se puede utilizar para modelar la confiabilidad de componentes o sistemas que se encuentren en la etapa inicial de su vida o en una etapa intermedia en funcionamiento. También podemos aplicar este modelo para representar el desgaste en componentes mecánicos y algunos componentes eléctricos. Para casos de desgaste y fatiga este modelo se comporta mejor que el exponencial, dado que realiza un buen ajuste de los datos.

Las funciones principales asociadas a este modelo son:

- $f(t) = a\ (b + n\ t\ )\ t^{b-1}\ e^{nt}\ e^{-at^b e^{nt}}$,
- $F(t) = 1 - e^{-at^b e^{nt}}$,
- $R(t) = e^{-at^b}\ e^{nt}$,
- $E(t) = \int_0^\infty\ e^{-at^b}\ e^{nt} dt$,
- $Z(t) = a\ (b + n\ t) t^{b-1}\ e^{nt}$,

con parámetros $a > 0$, $b \geq 0$ y $n > 0$, siendo n un parámetro de escala.

Los mejores resultados con este modelo se obtienen en el estudio de confiabilidad de componentes que son puestos en funcionamiento y rápidamente alcanzan un desempeño de operación, es decir, el periodo de rodaje es muy corto y las fallas son fácilmente solucionables.

3.2.3. Modelo de Weibull Transmutado Modificado (WTM)

Para realizar el análisis de fallas y confiabilidad en sistemas reparables, este modelo es una de las mejores opciones, pues busca ser un modelo flexible heredando las mismas propiedades que se derivan de la distribución de Weibull.

Este modelo utiliza 4 parámetros principales que se pueden utilizar para modelar y estudiar distintos formas de fallas. Donde los parámetros: β, $\eta > 0$ mientras que α y γ, $\alpha > 0$ es un parámetro de escala y γ es el parámetro transmutado, que representa, -1 $\leq \gamma \geq 1$.

Para esto, con el rango de valores, la función de densidad se escribe de la siguiente forma:

$$f(t) = (\alpha + \beta\eta t^{\beta-1}) e^{(-\alpha t - \eta t^{\beta})(1-\alpha+2\gamma e^{-\alpha t - \eta t^{\beta}})}.$$

Esta ecuación representa que los parámetros de forma y de escala son positivos. Sin embargo, estos parámetros de forma representan diferentes patrones del modelo transmutado así como también su parámetro de escala es la que representa la vida característica.

De esta forma, las demás funciones principales asociadas a este modelo son:

- $F(t) =$ (1 - $e^{(-\alpha t - \eta t^{\beta})}$) $(1 + \gamma e^{(-\alpha t - \eta t^{\beta})})$,
- $R(t) =$ 1 - (1 $e^{(-\alpha t - \eta t^{\beta})}$)$(1 + \gamma\ e^{(-\alpha t - \eta t^{\beta})})$,
- $E(t) = \int_0^t$ 1 - (1 - $e^{-\alpha t - \eta t^{\beta}}$)$(1 + \gamma\ e^{(-\alpha t - \eta t^{\beta})})\ dt$,
- $Z(t) = \dfrac{(\alpha + \beta\eta t^{\beta-1} e^{(-\alpha t - \eta t^{\beta})(1-\gamma+2\gamma e^{-\alpha t - \eta t^{\beta}})})}{1 - (1 - e^{(-\alpha t - \eta t^{\beta})}(1 + \gamma e^{(-\alpha t - \eta t^{\beta})})}.$

Las ventajas de este modelo son fáciles de ver en su flexibilidad, pues se asemeja a la distribución exponencial si son cambiados sus parámetros es como el modelo de estudio en modelos transmutados. La versatilidad de este modelo se presta para que se pueda utilizar en distintos patrones de falla, por supuesto incluyendo la falla con característica de curva de bañera.

Por esta flexibilidad y ajuste con otros modelos, se utiliza en distintos tipos de análisis de modos de falla en componentes, o también en sistemas que son reparables y que a su vez llegan a sufrir de desgaste o de deterioro, sin embargo, no se ajusta del todo para fallas prematuras que aparecen en el periodo de rodaje o de sincronización.

En este modelo, cuando la función de distribución acumulada es igual a cero expresa que estos componentes no han fallado. Además, la función de probabilidad de tasa de fallas se puede gráficar con base en diferentes unidades como distancia, ciclos y tiempo, por citar algunos.

El modelo WTM se puede utilizar para determinar la confiabilidad de componentes o sistemas durante las pruebas de diseño, esto quiere decir que antes de poder sacar el producto al mercado es analizada y aprobada en base a la estimación de la vida útil del elemento.

3.3. Aplicación

A continuación se presentará un ejemplo sobre una distribución para que se visualice su función.

Bajo un modelo de Ley Normal de Falla, un ejemplo para su uso puede ser el tiempo de vida de una batería, la cual se va desgastando en el momento que inicia su función, a continuación se presentan los parámetros estimados del modelo ajustado para sus respectivas pruebas.

Tiempo de vida de una batería (horas)				
26.093047	27.984826	42.341524	39.424797	41.859074
34.115814	33.446220	48.379157	39.224126	18.520358
4.973696	62.224533	42.729563	48.825522	12.775663
31.430549	24.022085	59.368013	53.442375	24.595472
50.277874	41.757483	48.978917	40.676305	35.584337
33.043834	45.610186	36.571895	36.749297	42.321425
49.834324	44.211903	45.725935	41.498818	69.471459
36.153610	39.990527	48.695706	40.306218	42.957813
53.174637	58.502231	32.945672	58.253986	1.882104
31.657751	37.267111	45.372450	18.908271	47.993359

Gráfico 5: Tiempo de vida de una batería

Teniendo en cuenta los parámetros: $\mu = 39.443$ y $\sigma = 13.562$

Bondad de ajuste - Detalles					
Normal [#44]					
Kolmogorov-Smirnov					
Tamaño de la muestra	50				
Estadistica	0.09732				
Valor P	0.69436				
Rango	21				
alpha	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01
Valor Critico	0.1484	0.16959	0.18841	0.21068	0.22604
Rechazar?	No	No	No	No	No
Anderson-Darling					
Tamaño de la muestra	50				
Estadistica	0.69015				
Rango	17				
Alpha	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01
Valor critico	1.3749	1.9286	2.5018	3.2892	3.9074
Rechazar?	No	No	No	No	No

Ahora, teniendo en cuenta los datos obtenidos, se harán los cálculos siguientes para ejemplificar las funciones ya mencionadas.

Función de distribución.

$$F(t) = \phi(\frac{t - 39{,}443}{13{,}562}).$$

Función de confiabilidad.

$$R(t) = 1 - \phi(\frac{t - 39{,}449}{13{,}562}).$$

Tasa de Fallo.

$$Z(t) = \frac{\frac{1}{13{,}562\sqrt{2\pi}} exp(-\frac{1}{2}[\frac{t - 39{,}442}{13{,}562}]^2)}{1 - \phi(\frac{t - 39{,}443}{13{,}562})}$$

Suponiendo que una reserva de 25 baterías de este tipo, cuya vida útil es independiente, se aproxima la probabilidad de obtener más de 1100 horas de su uso.

Se denota como X_i para denotar la vida útil de la i-ésima batería que se pondría en uso, entonces se desea que $p = P(X_1 + ... + X_{25} > 1100)$, esta se aproxima de la siguiente manera:

$$p = P(\frac{X_1 + ... + X_{25} - (25)(39{,}443)}{13{,}562\sqrt{25}} > \frac{1100 - (25)(39{,}443)}{13{,}562\sqrt{25}}) \approx 1 - \phi(1{,}68) \approx 0{,}0465.$$

Se debe mencionar que las leyes de falla exponencial y normal, para algunos son una segunda opción para modelar el tiempo de vida T, esto se debe a que la Distribución Weibull abarca de forma general, tasas de fallas decrecientes, constantes y crecientes. Comúnmente, se propone emplear la Distribución Weibull de 2 y 3 parámetros, de esta forma, dependiendo del valor de los parámetros de escala y forma, el modelo se puede transformar en la Distribución Exponencial, Distribución Normal, entre otras.

Capítulo 4

Conclusiones

En este trabajo se presenta un estudio general de la Teoría de Confiabilidad que tiene como base a la probabilidad y su principal objetivo es estudiar los tiempos de "falla".

En la actualidad la confiabilidad tiene diversos usos en la elección de dispositivos, componentes o sistemas así como diferentes funciones en cada una de ellas:

- Estudios de ingeniería en confiabilidad, mantenibilidad y disponibilidad.
- Inspección basada en riesgo.
- Análisis estadístico de fallas.
- Inventario basado en la confiabilidad.

Para el desarrollo de la Teoría de Confiabilidad se revisaron los conceptos básicos de probabilidad.

Posterior a esto se realizó el estudio de los conceptos básicos de confiabilidad tales como: Función de confiabilidad, función de riesgo y tiempo promedio de falla. También se presentan algunas relaciones de la función de confiabilidad, función de riesgo, función de densidad de probabilidad y tiempo promedio de falla.

Para finalizar el trabajo se analizaron los modelos de falla tradicionales: Normal, Weibull y la Exponencial, los cuales nos permiten modelar y pronosticar la probabilidad de tiempo de falla de componentes.

Como un adicional de estos modelos también se presentan la versión modificada de fallas de Weibull, las cuales tienen una amplitud de aplicación en los diferentes artículos que se producen actualmente.

Como un trabajo posterior se podría hacer el estudio de la relación entre la Teoría de Confiabilidad y la actuaria en los casos de:

- Predecir la probabilidad de la operación libre de problemas como las tasas de fallos, tiempo entre fallas etc.
- Identificar componentes que prevengan la producción en cualquier ámbito, así como también la causa de fallas y sus métodos preventivos.
- Costo del ciclo de vida de los productos, etc.

Bibliografía

[1] Espinel E., Distribuciones no Tradicionales para Medir Confiabilidad, Medellín, Colombia, Departamento de Ingeniería Mecánica, Universidad EAFIT, 2014.

[2] Meyer, Paul L., Probabilidad y Aplicaciones Estadísticas, Ed. Addison Wesley Iberoamericana, 1992.

[3] Mood M. A., Graybill F., Boes D., Introduction to the Theory of Statistics, McGraw Hill, 1973.

[4] Obregón S. I., Teoría de la probabilidad, Ed. Limusa S.A. de C.V., 1991.

[5] Rincón L., Curso intermedio de probabilidad, CDMX, México, Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias UNAM, 2006.

[6] Ross S. M., A First Course in Probability Models Edith Num 8, 2010

[7] Ross S. M., and R.A, Introduction to Probability Models, 11th Edith Num 1, 2014.

[8] Yañez M., Góm ez H., Valbuena G., Ingeniería de Confiabilidad y Análisis Probabilístico de Riesgo, 2004.