

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

Rayos de luz, frentes de onda y cáustica asociados a la refracción de una onda esférica

Tesis Presentada al

Colegio de Física

como requisito para la obtención del grado de

Licenciada en Física Aplicada

Presenta:

Karen Stephania Palafox Sánchez

Asesores:

Mtro. Israel Julián Macías

Dr. Gilberto Silva Ortigoza

Puebla, Pue.

Diciembre, 2018

Título: Rayos de luz, frentes de onda y cáustica asociados a la refracción de una onda esférica

Estudiante: Karen Stephania Palafox Sánchez

COMITÉ

_____

Dr. Gerardo F. Torres de Castillo
Presidente

_____

Dr. Luis M. Arroyo Carrasco
Secretario

_____

Dr. Carlos I. Robledo Sánchez
Vocal

_____

Dra. M. del Rosario Pastrana Sánchez
Suplente

Mtro. Israel Julián Macías
Asesor

Dr. Gilberto Silva Ortigoza Co-asesor

dedicad
o

Agradecimientos

´Indice general

Resumen V

Objetivo General VI

1. Introduccio´n 1

2. Descripcio´n de la propagaci´on de la luz usando o´ptica geom´etrica 4

2.1. Conceptos de ´optica geom´etrica: rayos de luz y frentes de onda 4

2.2. Principio de Fermat y de Huygens 6

2.3. Leyes de ´optica geom´etrica: reflexi´on y refracci´on 8

2.4. Ca´usticas 9

2.5. Ca´lculo anal´ıtico de los rayos de luz y frentes de onda refractados 10

2.6. Ca´lculo anal´ıtico de la ca´ustica 14

2.7. Deduccio´n de la ecuacio´n iconal 16

3. Refraccio´n de una onda esf´erica a trav´es de una superficie esf´erica: rayos de luz, frentes de onda y c´austica 21

3.1. Rayos de luz y frentes de onda asociados a la refraccio´n de una onda esf´erica sobre una superficie esf´erica . . . . . 23 **´INDICE GENERAL**

3.2. Ca´ustica asociada a la refraccio´n de una onda esf´erica a trav´es de una superficie esf´erica 31

4. Conclusiones 38

5. Bibliograf´ıa 39

Resumen

La finalidad de la presente tesis es estudiar la refraccio´n de los rayos de luz provenientes de una fuente puntual a trav´es de una superficie refractante con simetr´ıa esf´erica. En base al concepto de longitud de camino o´ptico y el principio de Huygens se determinan las trayectorias de los rayos de luz, as´ı como de los frentes de onda refractados. Adema´s de ´esto, se obtienen las regiones de ma´ximo enfocamiento de luz llamadas *c´austicas*. Como es sabido, la formaci´on de la regio´n ca´ustica depende de: los ´ındices de refracci´on de los medios divididos por una superficie denominada *refractante*, la forma que tiene esa superficie y el tipo de fuente luminosa. En este caso se consideran diferentes posiciones de la fuente luminosa sobre el eje ´optico considerando que las propiedades de la superficie refractante, los ´ındices de refraccio´n de los dos medios y la fuente luminosa no cambian. De los resultados obtenidos se muestra que cuando la fuente puntual luminosa se localiza en el centro de la esfera no hay formaci´on de c´austica; mientras que, cuando la fuente se va alejando del origen se encuentra que la ca´ustica tiene dos ramas.

V

Objetivo General

Obtencio´n de los rayos de luz, frentes de onda y ca´ustica asociados a la refraccio´n de una fuente puntual a trav´es de una superficie esf´erica.

Objetivos particulares

1. Revisar los conceptos que se utilizan para describir la propagacio´n de la luz a nivel de ´optica geom´etrica.

2. Revisar la deduccio´n de la ecuaci´on vectorial de onda a partir de las ecuaciones de Maxwell sin fuentes y en el vac´ıo.

3. Deducci´on de la ecuacio´n iconal y la relaci´on que tiene con la o´ptica geom´etrica.

4. Obtenci´on de las expresiones anal´ıticas as´ı como de las gra´ficas de los rayos de luz, frentes de onda y ca´ustica asociados a la refraccio´n de una onda esf´erica sobre una superficie esf´erica para diferentes posiciones de la fuente.

Cap´ıtulo 1

Introduccio´n

El estudio de la o´ptica tuvo sus inicios, aunque s´olo de forma intuitiva, con los filo´sofos griegos quienes desarrollaron dos enfoques acerca de c´omo es que uno puede ver los objetos. Posteriormente, Euclides enuncio´ la ley de reflexio´n en su libro *Cat´oprica*, por su parte Hero´n de Alejandr´ıa trat´o de explicar el feno´meno de reflexio´n y el de la propagacio´n rectil´ınea de la luz mediante la afirmaci´on de que si la luz viaja entre dos puntos lo har´a utilizando el camino ma´s corto entre estos. Como ellos, muchos otros comenzaron el largo camino del estudio de la ´optica.

En 1621 Will Snell (1591-1626) descubri´o de manera emp´ırica la ley de refraccio´n, esto constituyo´ un gran avance en la ´epoca, con lo cual algunos otros cient´ıficos comenzaron a mostrar notable inter´es en el tema. Pierre de Fermat fue uno de ellos pues logro´ deducir la ley de reflexio´n a partir de su principio de tiempo m´ınimo. Ma´s tarde Robert Hooke (1635-1703) propuso la idea de la luz como un movimiento vibratorio ra´pido del medio propaga´ndose a una gran velocidad, adema´s de que cada vibracio´n del cuerpo luminoso era capaz de generar una esfera, con esto Hooke abri´o las puertas al comienzo de la teor´ıa ondulatoria. Newton por su parte, sosten´ıa la idea de la luz como un conjunto de corpu´sculos que excitaban el ´eter en vibraciones caracter´ısticas y aunque Newton trabajo´ con la teor´ıa corpuscular y con la teor´ıa ondulatoria a la par, finalmente se decidi´o por esta u´ltima. Casi al mismo tiempo de esto, Christian Huygens (1629-1695) usando la teor´ıa ondulatoria dedujo las leyes de reflexio´n y refracci´on. En el siglo XIX Augustin Jean Fresnel (1778-1827) continu´o con los estudios de la teor´ıa ondulatoria reformulando los conceptos de la teor´ıa ondulatoria de Huygens usando ahora el principio de interferen**CAP´ıTULO 1 INTRODUCCION´**

---

cia.

As´ı como los estudios de ´optica avanzaban considerablemente, en otro contexto, James Clerk Maxwell (1831-1879) fue capaz de resumir el conocimiento que hasta entonces se ten´ıa de electricidad y magnetismo en un conjunto de ecuaciones matema´ticas que ampliaron todo el panorama de posibilidades tanto para electricidad y magnetismo como para ´optica pues, con esto pudo demostrar que la luz se puede describir como un campo electromagn´etico con ciertas caracter´ısticas. Se intodujo el concepto de ´eter, en el que se pensaba que la luz viajaba a una velocidad de $c \approx 3 \times 10^8$ *m/s*, y que experimentalmente fue medido en ese entonces por Armand Hippolyte Louis Fizeau (1819- 1896) con su experimento de la rueda dentada. As´ıconclu´ıa que la luz era una perturbacio´n electromagn´etica en forma de ondas que se propagaba a trav´es del ´eter. Hasta ese momento se cre´ıa que introducir el concepto del ´eter resolv´ıa el problema de propagacio´n en un medio, sin embargo en 1905 Albert Einstein (1879-1955) rechazo´ esta hip´otesis afirmando que las ondas electromagn´eticas eran capaces de propagarse en el espacio libre. Con esto y con la llegada de la meca´nica cu´antica la ´optica vivio´ una revolucio´n total a lo que se hab´ıa descrito anteriormente pues, los conceptos de onda y corpu´sculo que en la escala macrosc´opica eran totalmente externos e independientes uno del otro trabajaban ahora de la mano para explicar los feno´menos microsco´picos.

La o´ptica es la rama de la f´ısica que se encarga del estudio del comportamiento de la luz, ´esta a su vez se puede dividir en tres enfoques a nivel cla´sico: teor´ıa electromagn´etica de Maxwell, o´ptica f´ısica y o´ptica geom´etrica. Si lo que se desea es estudiar la interaccio´n de la luz con la materia es necesario considerar la teor´ıa electromagn´etica de Maxwell y la ley de Lorentz. Por otro lado, si los efectos de polarizaci´on de la onda electromagn´etica no son importantes se utiliza o´ptica f´ısica, con este enfoque es posible describir los feno´menos de difraccio´n e interferencia. Y finalmente, si las dimensiones del medio son muy grandes en comparaci´on con las dimensiones de la longitud de onda de la luz, entonces es suficiente estudiar la propagacio´n de la luz usando o´ptica geom´etrica. Es importante recordar que, cada enfoque est´a desarrollado a partir de ciertos conceptos con los cuales se pueden describir algunas de sus propiedades y efectos de la luz. En ´optica geom´etrica se trabaja con el concepto de rayo, el cual representa la direccio´n en la que viaja la luz o la energ´ıa de la onda luminosa.

El objetivo de este trabajo consiste en calcular los rayos de luz y frentes de onda refractados, as´ı como la ca´ustica asociada a la refraccio´n de una onda esf´erica a trav´es de una superficie esf´erica, la cual divide a dos medios ho**CAP´ıTULO 1 INTRODUCCION´**

mog´eneos caracterizados por ´ındices de refracci´on n_1 y n_2 con $n_1/n_2 > 1$. Para lograr el objetivo, el presente trabajo se divide de la siguiente manera:

- En el segundo cap´ıtulo, se inicia definiendo los conceptos de o´ptica geom´etrica que se utilizan a lo largo del presente trabajo. Adema´s, se realiza tambi´en el c´alculo de manera general para obtener los rayos de luz y frentes de onda refractados considerando una superficie arbitraria. Posteriormente se desarrolla la deduccio´n de la ecuaci´on iconal que es fundamental ya que, bajo ciertas condiciones, se obtiene que la longitud de camino o´ptico LCO es solucio´n de esta ecuaci´on lo que muestra la interesante relacio´n entre la ecuacio´n iconal y la ´optica geom´etrica.

- En el tercer cap´ıtulo, se considera una fuente puntual luminosa y una superficie esf´erica, y con los ca´lculos obtenidos en la seccio´n anterior se determinan las trayectorias de los rayos de luz y frentes de onda refractados. Posteriormente, se presentan las gra´ficas de los rayos de luz, frentes de onda as´ı como de las c´austicas correspondientes para diferentes posiciones de la fuente puntual luminosa y se analiza cada caso.

Cap´ıtulo 2

Descripci´on de la propagacio´n de la luz usando o´ptica geom´etrica

En este cap´ıtulo se mencionan los conceptos b´asicos con los cuales se desarrolla el tratamiento para describir la propagacio´n de la luz a partir de o´ptica geom´etrica. A nivel de o´ptica geom´etrica se tiene una observable f´ısica denominada “ca´ustica”, la cual representa la regio´n macrosc´opica de

ma´ximo enfocamiento de luz. Se deduce la ley de refraccio´n en forma vectorial y posteriormente, se obtienen las expresiones anal´ıticas de los rayos de luz y frentes de onda refractados. A partir de la expresio´n anal´ıtica de los rayos de luz se obtiene la ca´ustica asociada. Finalmente, se muestra que un campo electromagn´etico puede ser descrito mediante una ecuacio´n diferencial en derivadas parciales denominada “ecuacio´n iconal”, y se habla de la relacio´n que existe entre la ecuacio´n iconal y la o´ptica geom´etrica.

2.1. Conceptos de ´optica geom´etrica: rayos de luz y frentes de onda

Este cap´ıtulo tiene el prop´osito de abordar la o´ptica geom´etrica, primero, con la aceptacio´n del concepto de “rayo”que es la base para el desarrollo de este enfoque y luego relacionando con el concepto de frente de onda, as´ıcomo **CAP´ıTULO 2 DESCRIPCION´ DE LA PROPAGACION´ DE LA LUZ USANDO OPTICA´ GEOMETRICA´**

---

de introducir lo que se conoce como longitud de camino o´ptico con la finalidad de explicar el feno´meno de reflexio´n o refraccio´n.

Para describir la propagacio´n de luz a nivel de ´optica geom´etrica se requiere de los siguientes conceptos:

- Rayo

  La luz viaja en forma de rayos. Un rayo se define como la trayectoria imaginaria que indica la direccio´n de propagacio´n de la onda.

- ´Indice de refracci´on

  La interaccio´n macrosco´pica de la luz con los medios materiales puede caracterizarse mediante un cociente de velocidades denominado ´ındice de refraccio´n, simbolizado comu´nmente por *n*. Si *c* es la velocidad de la luz en el vac´ıo, considerado como el medio de referencia, y *v* es la velocidad de la luz en un medio material, entonces:

$$n = \frac{c}{v} \quad (2.1)$$

siendo $v < c$.

En el vac´ıo, $v = c$, por tanto $n = 1$; en cualquier otro medio material, $n > 1$. Se aclara que la Ec.(2.1) es va´lida u´nicamente si el medio material bajo consideracio´n es homog´eneo e iso´tropo; en otros materiales que no cumplen estas condiciones el ´ındice de refracci´on depende de variables como la posicio´n, tiempo, temperatura, etc.[1] Es decir,

$$n = n(x,y,z,t,T). \qquad (2.2)$$

- Longitud de camino o´ptico

El tiempo que tarda la luz en recorrer una distancia s, en un medio homog´eneo, esta dado por

$$t = \frac{s}{v} = \frac{\Phi}{c}$$

donde $\Phi = ns$ se denomina la longitud de camino o´ptico.[2] Para un medio no homog´eneo $n = n(r)$ es una funcio´n de la posicio´n, entonces la Longitud de Camino Optico´ se define como

$$\Phi = \int_A^B n(\mathbf{r})ds$$

donde *ds* es el elemento diferencial de arco a lo largo de la trayectoria que va del punto A al punto B, ver Fig.(2.1).

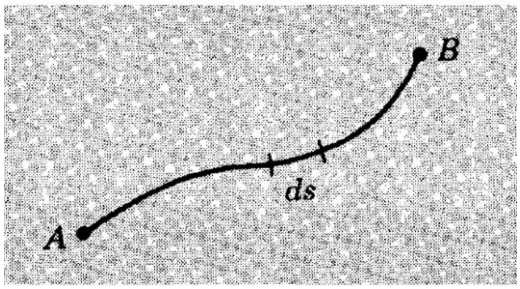


Figura 2.1: Elemento diferencial de la trayectoria que va del punto A al B.

Otro concepto definido en o´ptica geom´etrica es el de frente de onda, el cual esta´ dado por todos los puntos en el espacio tales que la longitud de camino ´optico es constante respecto a un punto de referencia, es decir,

$$L.C.O. = constante \qquad (2.3)$$

y son ortogonales a los rayos de luz. Considerando un medio is´otropo y homog´eneo se puede describir usando o´ptica geom´etrica la propagaci´on de dos tipos de fuentes luminosas ideales. El primer tipo de fuente es una fuente puntual, en este caso los rayos de luz son lineas rectas que salen de la fuente luminosa en todas direcciones, mientras que los frentes de onda son esferas conc´entricas. Existe una regio´n en donde los rayos de luz que emite la fuente puntual son paralelos entre s´ı, en este caso se tiene que los frentes de onda son planos, pues deben ser ortogonales a los rayos de luz, ver Fig.(2.2). El segundo tipo de fuente es una fuente lineal, cuyos rayos de luz son ortogonales a la fuente y sus frentes de onda son cilindros coaxiales.

2.2. Principio de Fermat y de Huygens

Dos principios que son equivalentes y que son importantes en la ´optica geom´etrica son el Principio de Fermat y el Principio de Huygens.[1]

Principio de Fermat: Un rayo que viaja en un medio ´optico, que va del punto *A* al punto *B* sigue una trayectoria tal que la LCO sea estacionaria,

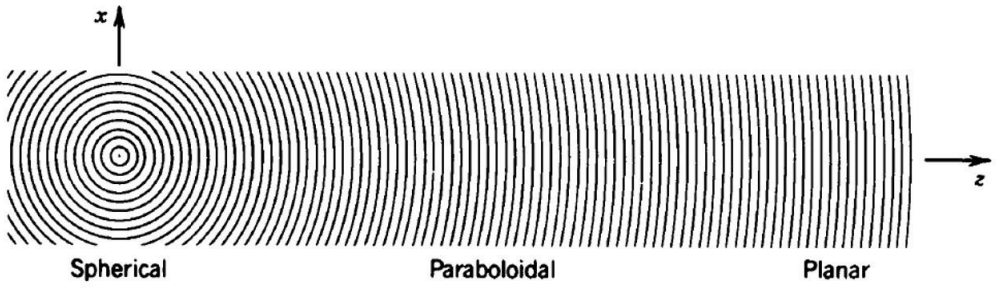


Figura 2.2: Evolucio´nde los frentes de onda en una regi´onmuy cercana al eje emitidos por una fuente puntual.

es decir

$$\delta \int_A^B n(\mathbf{r}) ds = 0 \qquad (2.4)$$

Principio de Huygens: Se considera que cada punto *P* sobre la superficie de onda o frente de onda Σ_0 generado por la luz emitida por una fuente S en el tiempo t_0 se comporta como una fuente secundaria; el frente de onda Σ, en un instante posterior $t \geq t_0$ es la envolvente de las superficies de onda secundarias u onditas provenientes de cada *P* en el instante t_0. Para explicar ´este principio nos referimos a la Fig.(2.2).[1]

Un equivalente al principio de Huygens esta´ dado por las condiciones

$$\Phi = C$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0$$

es decir, el frente de onda esta´ dado como la envolvente de la longitud de camino ´optico *L.C.O.* = Φ, con *x* y *y* para´metros variables.

2.3. LEYES DE OPTICA´ GEOMETRICA:´ REFLEXION´ Y REFRACCI ÓN

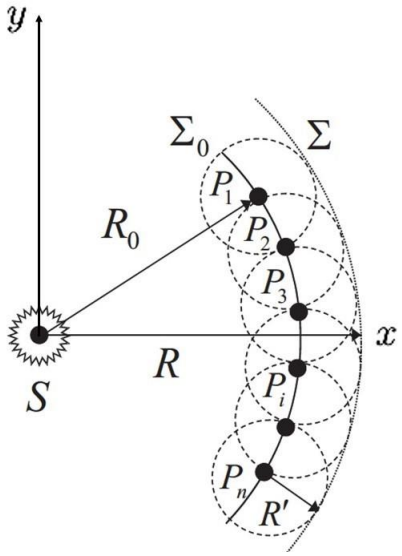


Figura 2.3: Las onditas emitidas por el frente de onda Σ_0 en $t = 0$ determinan el frente de onda Σ en un tiempo posterior siendo ´este la envolvente de las ondas secundarias.

2.3. Leyes de o´ptica geom´etrica: reflexio´n y refracci´on

Cuando la luz viaja a trav´es de un medio homog´eneo y transparente, ´esta mantiene una direcci´on y una velocidad constantes. Si ahora existe una superficie que divida dos medios con ´ındices de refraccio´n distintos entonces ocurren dos fen´omenos al mismo tiempo: reflexi´on y refraccio´n.

Al incidir la luz sobre la superficie, parte de la luz se refleja y parte de ella se refracta, es decir, atraviesa la superficie y se propaga en el otro medio.

- Ley de reflexio´n

  Segu´n la forma de las superficies donde incide la luz, la reflexi´on puede ser de dos formas: especular, cuando la superficie es pulida y los rayos se reflejan en una sola direcci´on; o difusa, cuando la superficie es irregular y por ello los rayos se reflejan en todas direcciones, es decir, este caso no permite formacio´n de ima´genes.

  La ley de reflexi´on establece que el rayo incidente, el rayo reflejado y la normal se encuentran en el mismo plano. Adem´as, establece que existe **CAP´ıTULO 2 DESCRIPCION´ DE LA PROPAGACION´ DE LA LUZ USANDO OPTICA´ GEOMETRICA´**

una igualdad entre el a´ngulo de incidencia y el a´ngulo reflejado:

$$\theta_i = \theta_r \quad (2.5)$$

- Ley de refraccio´n

  La refraccio´n es el cambio de direccio´n y velocidad que experimenta un rayo de luz al pasar de un medio a otro con distinto´ındice de refracci´on. Si un rayo va de un medio con ´ındice n_1 a un ´ındice n_2 pueden ocurrir dos casos: el primero, cuando $n_1 < n_2$ entonces el rayo refractado se acercara´ a la normal; y segundo, cuando $n_1 > n_2$ entonces el rayo refractado se alejar´a de la normal.[3] La ley de refracci´on establece que el rayo incidente, la normal y el rayo refractado se encuentran en un mismo plano, ver Fig.(2.4), y cumplen la Ley de Snell:

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \quad (2.6)$$

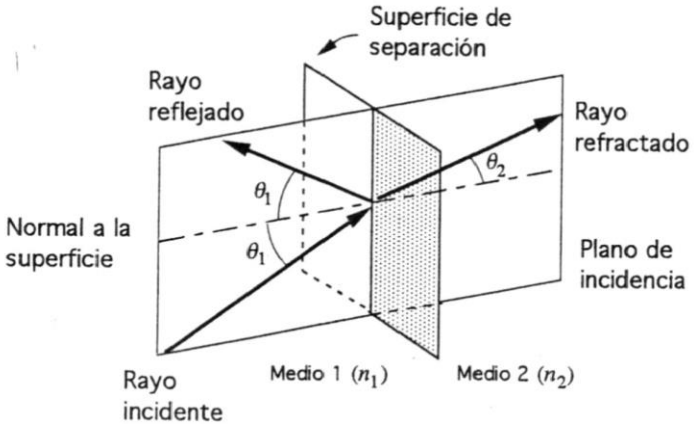


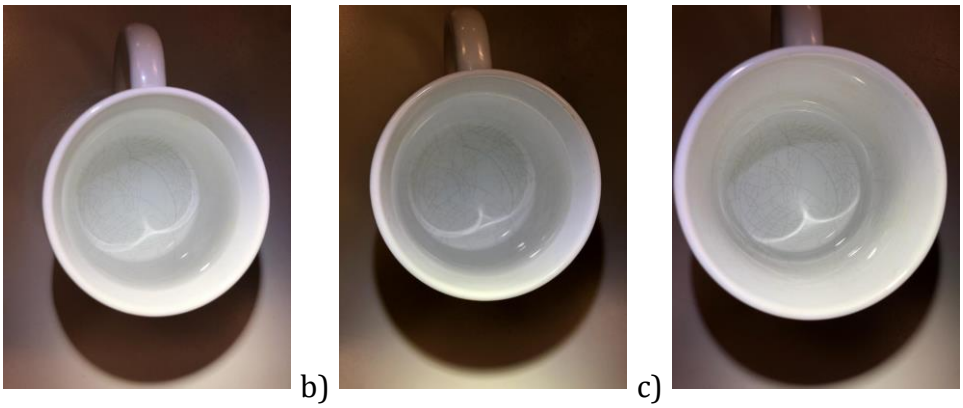
Figura 2.4: La imagen muestra la reflexio´n y refracci´on de un rayo de luz que incide sobre una superficie que separa dos medios con ´ındices de refraccio´n n_1 y n_2.

2.4. C´austicas

Cada d´ıa, por ejemplo al tomar una simple taza de t´e, si miramos con atencio´n podremos observar que en el fondo de la taza se forma una regio´n donde existe el m´aximo enfocamiento de la luz, esta regio´n recibe el nombre de c´austica, ver Fig.(2.5). Los patrones de luz que se forman cuando la luz

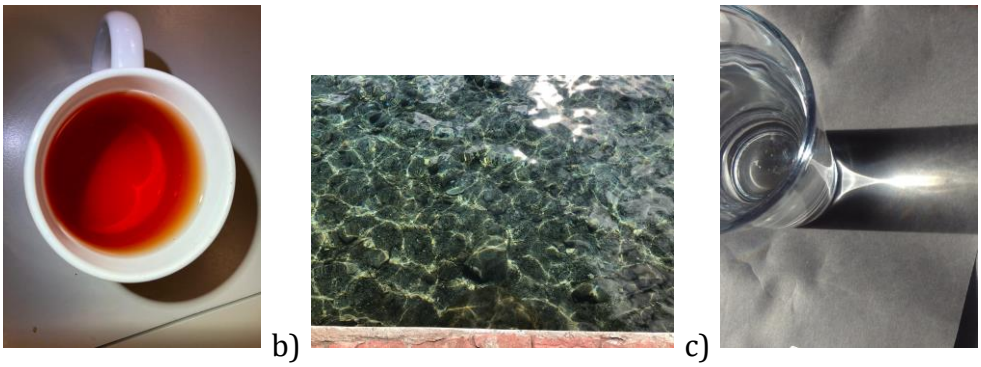
atraviesa una botella o un vaso y cae sobre el mantel, o los que se forman en el fondo de una piscina o sobre su superficie, son ejemplos caracter´ısticos de ca´usticas, ver Fig.(2.6).[4]

—



a) b) c)

Figura 2.5: La imagen muestra claramente tres ca´usticas que debido a la posici´on de la fuente de luz son diferentes pero esta´n formadas sobre la misma taza.



a) b) c)

Figura 2.6: a) y b) C´austicas formadas por refracci´on.c) Ca´ustica formada a) por una doble refraccio´n.

2.5. C´alculo anal´ıtico de los rayos de luz y frentes de onda refractados

Considere que el espacio vac´ıo esta´ dividido en dos regiones llenas con medios o´pticos distintos, es decir, cada medio esta´ caracterizado por un´ındice de refracci´on distinto denotados por n_1 y n_2; las regiones esta´n divididas por una superficie arbitraria. Dada la posici´on de una fuente puntual ubicada en el medio ´optico con ´ındice de refraccio´n n_1, ver Fig.(2.7), la longitud de camino o´ptico que va desde la posicio´n de la fuente puntual hasta un punto arbitrario **X** localizado en el medio o´ptico con ´ındice de refraccio´n n_2 esta´

dada por

$$\Phi = n_1|\mathbf{r}-\mathbf{s}| + n_2|\mathbf{X}-\mathbf{r}|, \tag{2.7}$$

$$\mathbf{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + f(x,y)\hat{z}, \tag{2.8}$$

$$\mathbf{s} = s_1\hat{x} + s_2\hat{y} + s_3\hat{z}, \tag{2.9}$$

$$\mathbf{X} = X\hat{x} + Y\hat{y} + Z\hat{z}, \tag{2.10}$$

por lo que, los frentes de onda asociados a Φ est´an dados por

$$\Phi = C, \tag{2.11}$$

que se puede escribir como

$$|\mathbf{X}-\mathbf{r}| = \frac{C}{n_2} - \gamma|\mathbf{r}-\mathbf{s}|. \tag{2.12}$$

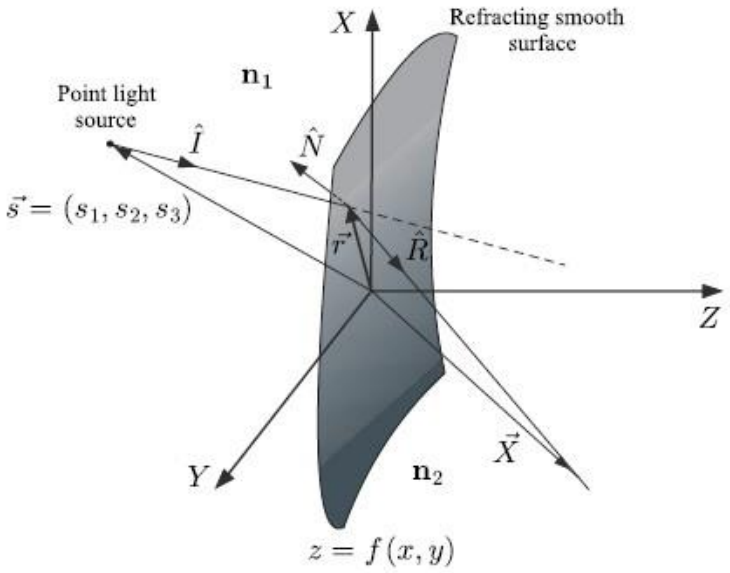


Figura 2.7: Imagen que muestra los vectores que localizan: la fuente puntual **s**, la superficie arbitraria **r**, el rayo refractado **X** y los vectores $\hat{\mathbf{I}}$, $\hat{\mathbf{R}}$ y $\hat{\mathbf{N}}$.

Observe que, para valores fijos de *x*, *y* y *C* la Ec.(2.12) describe una esfera cuyo centro se ubica en el punto de la superficie dado por **r** y de radio $\frac{C}{n_2} - \gamma|\mathbf{r} - \mathbf{s}|$. Esto quiere decir que cada rayo emitido por una fuente puntual en el momento en el que llega a la superficie refractante se transforma en una fuente puntual, cuyos frentes de onda son esferas, ver Fig.(2.8), en otras palabras, una vez que el rayo de luz incide en la superficie refractante, ´este tiene la posibilidad de tomar cualquier direccio´n de propagacio´n. Por lo que, para determinar los frentes de onda geom´etricos refractados es necesario usar el Principio de Huygens, es decir, los frentes de onda son todos los puntos **X** que satisfacen la Ec.(2.12) y las condiciones extras:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -n_2(\hat{\mathbf{R}} - \gamma\hat{\mathbf{I}}) \cdot \mathbf{r}_x = 0, \qquad (2.13)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -n_2(\hat{\mathbf{R}} - \gamma\hat{\mathbf{I}}) \cdot \mathbf{r}_y = 0, \qquad (2.14)$$

donde

$$\hat{\mathbf{I}} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{s}}{\overline{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|}}, \qquad (2.15)$$

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{\mathbf{X} - \mathbf{r}}{\overline{|\mathbf{X} - \mathbf{r}|}}, \qquad (2.16)$$

denotan los vectores unitarios incidente y refractado, respectivamente, $\gamma \equiv \frac{n_1}{n_2}$y los vectores $\mathbf{r}_x$ y $\mathbf{r}_y$ son las derivadas parciales del vector $\mathbf{r}$ con respecto de x y y respectivamente. Usando al conjunto de vectores $\{\mathbf{r}_x,\mathbf{r}_y,\hat{\mathbf{N}}\}$ como una base de R^3, donde $\hat{\mathbf{N}}$ es el vector normal unitario a la superficie que divide a los dos medios ´opticos, podemos escribir

$$\hat{\mathbf{R}} - \gamma\hat{\mathbf{I}} = \alpha\mathbf{r}_x + \beta\mathbf{r}_y + \Omega\hat{\mathbf{N}}, \qquad (2.17)$$

donde α, β y Ω son funciones que deben ser determinadas. Debido a que $\mathbf{r}_x$ y $\mathbf{r}_y$ son vectores tangentes a la interface entre los dos medios ´opticos entonces $\mathbf{r}_x \cdot \hat{\mathbf{N}} = 0$ y $\mathbf{r}_y \cdot \hat{\mathbf{N}} = 0$. Usando las Ecs.(2.13), (2.14) y (2.17) un c´alculo directo muestra que cuando

$$(\mathbf{r}_x)^2(\mathbf{r}_y)^2 - (\mathbf{r}_x \cdot \mathbf{r}_y)^2 \, 6= 0, \qquad (2.18)$$

α y β son cero. De tal forma que

$$\hat{\mathbf{R}} = \gamma\hat{\mathbf{I}} + \Omega\hat{\mathbf{N}}. \qquad (2.19)$$

Finalmente, Ω es determinada pidiendo que $\hat{\mathbf{R}} \cdot \hat{\mathbf{R}} = 1$, es decir;

$$\Omega^2 + \Omega[2\gamma(\hat{\mathbf{I}} \cdot \hat{\mathbf{N}})] + \gamma^2 - 1 = 0. \qquad (2.20)$$

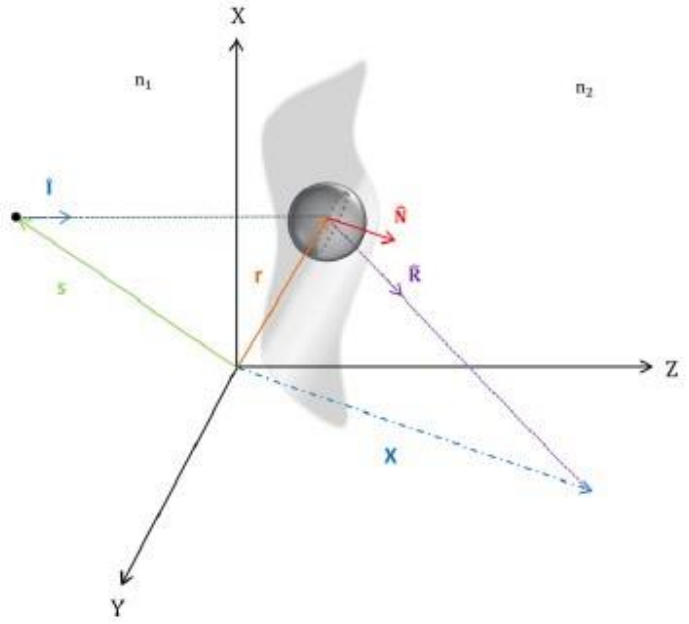


Figura 2.8: La imagen muestra un punto sobre la superficie arbitraria que ahora es una nueva fuente puntual y su frente de onda es una esfera.

y como esta ecuacio´n es una ecuaci´on de segundo grado en Ω, se tiene que

$$\Omega = -\gamma(\hat{\mathbf{I}} \cdot \hat{\mathbf{N}}) \pm \sqrt{1 - \gamma^2[1 - (\hat{\mathbf{I}} \cdot \hat{\mathbf{N}})^2]}. \qquad (2.21)$$

Analizando el caso en el que $\gamma = 1$ la ecuaci´on anterior se reduce a

$$\Omega = -(\hat{\mathbf{I}} \cdot \hat{\mathbf{N}}) \pm (\hat{\mathbf{I}} \cdot \hat{\mathbf{N}}). \qquad (2.22)$$

la cual tiene dos posibles expresiones

$$\Omega_+ = 0, \qquad (2.23)$$

$$\Omega_- = -2(\hat{\mathbf{I}} \cdot \hat{\mathbf{N}}). \qquad (2.24)$$

As´ı que, usando las Ecs.(2.19), (2.23) y (2.24), se encuentra que, para cada expresio´n de $\Omega_{\pm}$ el vector $\hat{\mathbf{R}}$ esta´ dado por los siguientes campos vectoriales

$$\hat{\mathbf{R}}_{+} = \hat{\mathbf{I}}, \quad (2.25)$$

$$\hat{\mathbf{R}}_{-} = \hat{\mathbf{I}} - 2(\hat{\mathbf{I}} \cdot \hat{\mathbf{N}})\hat{\mathbf{N}}, \quad (2.26)$$

donde la Ec.(2.25) representa al rayo que no se refleja, es decir, el rayo que atraviesa la superficie y la Ec.(2.26) representa la Ley de Reflexio´n en forma

vectorial.

Por lo tanto, la direcci´on de los rayos de luz refractados estara´ dada por la Ec.(2.19) donde Ω esta´ dada por Ec.(2.21) con signo +; es decir,

$$\hat{\mathbf{R}} = \gamma \hat{\mathbf{I}} - \{\gamma(\hat{\mathbf{I}} \cdot \hat{\mathbf{N}}) - \sqrt{1 - \gamma^2[1 - (\hat{\mathbf{I}} \cdot \hat{\mathbf{N}})^2]}\}\hat{\mathbf{N}}. \quad (2.27)$$

Esta ecuaci´on corresponde a la ley de refraccio´n en forma vectorial. En este trabajo u´nicamente trabajaremos con la refraccio´n de la luz.

Por otro lado, el vector refractado se puede escribir como

$$\mathbf{X} = \mathbf{r} + \tau \hat{\mathbf{R}}. \quad (2.28)$$

donde τ denota la distancia entre el punto sobre la superficie donde el rayo de luz incide y el punto por donde pasa el rayo refractado. Es importante mencionar que, la Ec.(2.28) describe los rayos de luz refractados cuando *x* y *y* son constantes y varia τ; mientras que, los frentes de onda refractados se obtienen con la ecuacio´n

$$\mathbf{X} = \mathbf{r} + \left[\frac{C}{n_2} - \gamma|\mathbf{r} - \mathbf{s}|\right] \hat{\mathbf{R}}. \quad (2.29)$$

cuando *x* y *y* var´ıan y *C* permanece constante.[5,6] Adem´as observe que

$$\tau = \left[\frac{C}{n_2} - \gamma|\mathbf{r} - \mathbf{s}|\right]. \quad (2.30)$$

2.6. C´alculo anal´ıtico de la c´austica

Observe que la Ec.(2.28) que describe las trayectorias de los rayos de luz refractados, representa un mapeo entre dos subconjuntos de R^3, donde el espacio dominio esta´ etiquetado por un punto (x,y,τ), mientras que el espacio codominio por (X,Y,Z), ver Fig.(2.9). El subconjunto del espacio dominio en el que el mapeo dado por la Ec.(2.28) localmente no es uno a uno

se denomina conjunto cr´ıtico y la imagen de este conjunto bajo dicho mapeo se llama conjunto c´austico. El conjunto cr´ıtico se obtiene determinando el conjunto de puntos donde el jacobiano se anula, esto es

$$J = \frac{\partial(X,Y,Z)}{\partial(\tau,x,y)} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \tau} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial y} \right) = 0, \qquad (2.31)$$

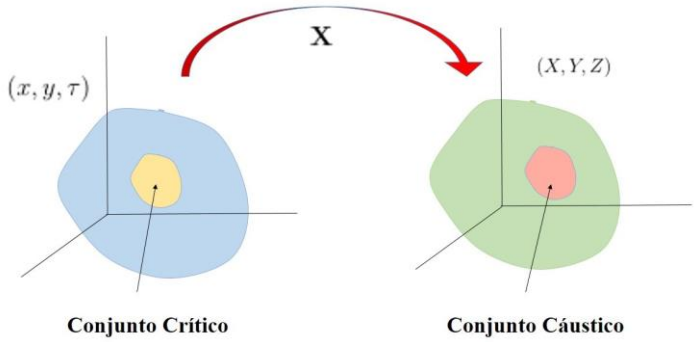


Figura 2.9: Dos espacios en R_3 etiquetan puntos con (x,y,τ) y (X,Y,Z) respectivamente. El mapeo dado por **X** es la relacio´n que existe entre el conjunto cr´ıtico y el conjunto c´austico.

Ahora, usando la ecuaci´on (2.28) y obteniendo las parciales del Jacobiano de la ecuaci´on (2.31) se tiene

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \tau} = \hat{\mathbf{R}} \qquad (2.32)$$

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} + \tau \frac{\partial \hat{\mathbf{R}}}{\partial x} \qquad (2.33)$$

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial y} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} + \tau \frac{\partial \hat{\mathbf{R}}}{\partial y} \quad (2.34)$$

y sustituyendo ´estas en la ecuacio´n (2.31) se obtiene

$$J = \tau^2 \left[\hat{\mathbf{R}} \cdot \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{R}}}{\partial x} \times \frac{\partial \hat{\mathbf{R}}}{\partial y}\right)\right] + \tau \left[\hat{\mathbf{R}} \cdot \left[\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \hat{\mathbf{R}}}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{R}}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}\right)\right]\right] + \left[\hat{\mathbf{R}} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}\right)\right] \quad (2.35)$$

que es una condicio´n equivalente a

$$\tau^2 H_2 + \tau H_1 + H_0 = 0 \quad (2.36)$$

donde

$$H_2 = \hat{\mathbf{R}} \cdot \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{R}}}{\partial x} \times \frac{\partial \hat{\mathbf{R}}}{\partial y}\right), \quad (2.37)$$

$$H_1 = \hat{\mathbf{R}} \cdot \left[\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \hat{\mathbf{R}}}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{R}}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}\right)\right], \quad (2.38)$$

$$H_0 = \hat{\mathbf{R}} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}\right). \quad (2.39)$$

Se puede ver claramente que la ecuacio´n (2.36) es una ecuaci´on de segundo grado la cual se resuelve f´acilmente haciendo uso de la fo´rmula general, as´ı

$$\tau = \frac{-H_1 \pm \sqrt{{H_1}^2 - 4H_2H_0}}{2H_2} \quad (2.40)$$

nos da el conjunto cr´ıtico y su imagen, el conjunto c´austico, se obtiene al sustituir la Ec.(2.40) en la Ec.(2.28), por lo que

$$\mathbf{X_C} = \mathbf{r} + \left[\frac{-H_1 \pm \sqrt{{H_1}^2 - 4H_2H_0}}{2H_2}\right] \hat{\mathbf{R}}. \quad (2.41)$$

Es decir, la c´austica es la observable a nivel de ´optica geom´etrica y se puede obtener como la envolvente de los rayos de luz o el conjunto de singularidades de los frentes de onda, la ca´ustica existe en los puntos donde los frentes de onda tienen picos o se autointersectan, en este caso nosotros utilizamos la ecuacio´n de los rayos de luz, Ec.(2.28), por lo tanto estamos calculando la ca´ustica como la envolvente de los rayos de luz.

Adema´s, de la Ec.(2.36) se pueden obtener los siguientes casos

- Si $H_1 = 0$ y $H_2 \neq 0$ se obtienen dos ramas de la ca´ustica.
- Si $H_1 \neq 0$ y $H_2 = 0$ se obtiene so´lo una rama de la ca´ustica.
- Si $H_1 \neq 0$ y $H_2 \neq 0$ se obtienen dos ramas de la ca´ustica.
- Si $H_1 = 0$ y $H_2 = 0$ no existe ca´ustica siempre y cuando $H_0 \neq 0$.

2.7. Deduccio´n de la ecuaci´on iconal

La forma de obtener la mayor cantidad posible de informacio´n sobre la propagacio´n de la luz es acudiendo a las ecuaciones de Maxwell:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \qquad (2.42)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\dot{\mathbf{B}}, \quad (2.43)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.44)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{1}{c}\dot{\mathbf{D}}, \quad (2.45)$$

con las cuales es posible estudiar los feno´menos relacionados con la luz en determinado material. En la naturaleza existen diferentes tipos de materiales, por ejemplo: conductores, semiconductores, diel´ectricos, magn´eticos, lineales y no lineales entre otros; caracterizados por su permitividad el´ectrica y permeabilidad magn´etica μ. En el caso de considerar un medio lineal, homog´eneo e isotr´opo, se cumplen las relaciones materiales dadas por

$$\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E},$$

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}. \quad (2.46)$$

Las ecuaciones de Maxwell sin fuentes en un medio lineal en el cual ϵ y μ son constantes esta´n dadas por

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \quad (2.47)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\dot{\mathbf{B}}, \quad (2.48)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.49)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{c}\dot{\mathbf{D}} \quad (2.50)$$

de las cuales se encuentra que **E** y **H** satisfacen la ecuaci´on vectorial de onda, esto es

$$\nabla^2\mathbf{E} - \frac{\mu\epsilon}{c^2}\ddot{\mathbf{E}} = \mathbf{0}, \quad (2.51)$$

$$\nabla^2\mathbf{H} - \frac{\mu\epsilon}{c^2}\ddot{\mathbf{H}} = \mathbf{0}, \quad (2.52)$$

Como se puede ver, el laplaciano actu´a sobre cada componente de los campos **E** y **H**, por lo cual, cada componente del campo electromagn´etico satisface la ecuacio´n escalar de onda con la condicio´n de que la velocidad de la onda electromagn´etica es $v = c/\sqrt{\epsilon\mu}$.

En coordenadas cartesianas, se tiene que una soluci´on a las Ecs. (2.51) y (2.52) est´a dada por

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}, \quad (2.53)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r},t) = \mathbf{H}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}, \quad (2.54)$$

donde $\mathbf{E}_0$ y $\mathbf{H}_0$ son vectores constantes. Estas ecuaciones representan una onda electromagn´etica plana, ya que sus frentes de onda, dados por $\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} =$ *constante*, son planos. Una vez que las Ecs. (2.53) y (2.54) se sustituyen en las ecuaciones de Maxwell en el vac´ıo y sin fuentes se encuentra que {**k**, $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{H}_0$} forman un sistema de vectores a derechas [4]. Adem´as se obtiene que $|\mathbf{E}_0|/v = |\mathbf{H}_0|$, es decir $|\mathbf{H}_0|$ es un valor muy pequen˜o, as´ı que existen casos en los que se puede despreciar la contribucio´n de este campo.

Ahora, considere los campos **E** y **H** dados por

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r})e^{-i\omega t} = \mathbf{e}(\mathbf{r})e^{i(k_0 S(\mathbf{r})-\omega t)}, \quad (2.55)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r},t) = \mathbf{H}_0(\mathbf{r})e^{-i\omega t} = \mathbf{h}(\mathbf{r})e^{i(k_0 S(\mathbf{r})-\omega t)}, \quad (2.56)$$

donde $S(\mathbf{r})$ es una funci´on real. Observe que, en las Ecs. (2.53) y (2.54) se han reemplazado $\mathbf{E}_0 \to \mathbf{E}_0(\mathbf{r})$, $\mathbf{H}_0 \to \mathbf{H}_0(\mathbf{r})$ y $\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} \to S(\mathbf{r})$. Si ahora sustituimos las Ecs. (2.55) y (2.56) en las ecuaciones de Maxwell sin fuentes y considerando que la permitividad diel´ectrica y la permeabilidad magn´etica son funciones del espacio, se encuentra que

$$\{[\nabla\cdot(\epsilon\mathbf{e})] + ik_0[\epsilon\mathbf{e}\cdot\nabla S]\}e^{i(k_0 S-\omega t)} = 0, \quad (2.57)$$

$$[(\nabla \times \mathbf{e}) - ik_0(\mathbf{e} \times \nabla S) - ik_0(\mu \mathbf{h})]e^{i(k_0 S - \omega t)} = \mathbf{0}, \quad (2.58)$$

$$\{[\nabla \cdot (\mu \mathbf{h})] + ik_0[\mu \mathbf{h} \cdot \nabla S]\}e^{i(k_0 S - \omega t)} = 0, \quad (2.59)$$

$$[(\nabla \times \mathbf{h}) - ik_0(\mathbf{h} \times \nabla S) + ik_0(\epsilon \mathbf{e})]e^{i(k_0 S - \omega t)} = \mathbf{0}, \quad (2.60)$$

usando que $v = \omega/k$ donde $k = nk_0$, y las conocidas identidades vectoriales,

$$\nabla \times (f\mathbf{A}) = f(\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \times (\nabla f), \quad (2.61)$$

$$\nabla \cdot (f\mathbf{A}) = f(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{A} \cdot (\nabla f), \quad (2.62)$$

donde f es una funcio´n escalar y $\mathbf{A}$ una funci´on vectorial. Podemos ver claramente que el t´ermino $e^{i(k_0 S - \omega t)}$ nunca se hace cero, por lo tanto debe ocurrir que

$$\frac{\nabla \cdot (\epsilon \mathbf{e})}{ik_0 \epsilon} + [\mathbf{e} \cdot \nabla S] = 0, \quad (2.63)$$

$$\nabla \times \mathbf{e} \qquad \frac{}{ik_0} - (\mathbf{e} \times \nabla S) - (\mu \mathbf{h}) = \mathbf{0}, \quad (2.64)$$

$$\frac{\nabla \cdot (\mu \mathbf{h})}{ik_0 \mu} + [\mathbf{h} \cdot \nabla S] = 0, \quad (2.65)$$

$$\nabla \times \mathbf{h} \qquad - (\mathbf{h} \times \nabla S) + (\epsilon \mathbf{e}) = \mathbf{0}, \quad (2.66)$$

$$\frac{}{ik_0}$$

Note que, en estas cuatro ecuaciones esta´ presente el valor de la longitud de onda $\lambda_0 = 2\pi/k_0$, es decir, en estas ecuaciones est´a presente el feno´meno ondulatorio de la luz. Recordando que, en ´optica geom´etrica se supone que $\lambda_0 \to 0$, por lo que, si se considera que el t´ermino $1/k_0$ es mucho m´as pequen˜o que el valor absoluto del t´ermino que lo multiplica se tiene que ´estas ecuaciones se reducen a

$$\mathbf{e} \cdot \nabla S = 0, \quad (2.67)$$

$$-(\mathbf{e} \times \nabla S) - \mu \mathbf{h} = \mathbf{0}, \quad (2.68)$$

$$\mathbf{h} \cdot \nabla S = 0, \quad (2.69)$$

$$-(\mathbf{h} \times \nabla S) + \epsilon \mathbf{e} = \mathbf{0}, \qquad (2.70)$$

Ahora, despejando **h** de (2.68), sustituyendo en (2.70) y multiplicando por μ se tiene que

$$[\nabla S \times (\mathbf{e} \times \nabla S)] - (\mu\epsilon\mathbf{e}) = \mathbf{0}, \qquad (2.71)$$

y haciendo uso de la identidad **a** × [**b** × **c**] = (**a** · **c**)**b** − (**a** · **b**)**c** obtenemos

$$(\nabla S \cdot \nabla S - \mu\epsilon)\mathbf{e} - (\nabla S \cdot \mathbf{e})\nabla S = 0, \qquad (2.72)$$

$$n = \sqrt{\mu\epsilon}$$

pero vemos que el segundo t´ermino se elimina por (2.67) adema´s denota el ´ındice de refracci´on y como **e** no siempre es cero, es decir, existen puntos en los cuales **e** = **0** pero no en todo el espacio entonces (2.72) se reduce a

$$||\nabla S||^2 = n^2, \qquad (2.73)$$

la cual se conoce como ecuacio´n iconal, que es la ecuaci´on ba´sica de la ´optica geom´etrica. Las superficies $S(\mathbf{r}) = constante$ son llamadas frentes de onda geom´etricos. [7] En esta ecuacio´n se desprecia totalmente la polarizacio´n de la onda electromagn´etica pues, en la ecuaci´on (2.72), **e** no siempre es cero y es presisamente este vector el que tiene la informaci´on de polarizacio´n de la onda. Tomando como ejemplo dos ondas electromagn´eticas planas, una con polarizaci´on lineal y la otra con polarizacio´n circular; en este caso ambas ondas electromagn´eticas esta´n descritas a nivel de o´ptica geom´etrica por la misma funci´on $S(\mathbf{r})$ aunque el estado de polarizacio´n no sea el mismo.

En la introduccio´n se mencionaron los diferentes enfoques que se han desarrollado para descibir las propiedades de la luz a nivel cla´sico. Resulta que existe una relacio´n entre los enfoques de teor´ıa de Maxwell y o´ptica geom´etrica dada por la ecuacio´n iconal. De las ecuaciones de Maxwell se encontro´ que bajo ciertas condiciones, el campo electromagn´etico que se propaga en un medio caracterizado por un ´ındice de refracci´on n puede ser descrito por la ecuacio´n iconal, es decir, por $||\nabla S||^2 = n^2$, donde $S = C = constante$ definen los frentes de onda y ∇S da la direccio´n de propagacio´n de la luz. Por otro lado, cuando la luz pasa de un medio o´ptico a otro, dada la longitud del camino o´ptico $LCO = \Phi$, los frentes de onda geom´etricos refractados esta´n dados por la envolvente de la longitud de camino ´optico,

es decir, por todos los puntos del espacio tales que $\Phi = C$, $\partial_x\Phi = 0$ y $\partial_y\Phi = 0$. Como se puede ver, dependiendo del enfoque que se utilice para definir los frentes de onda del campo electromagn´etico, se requiere de las funciones S o Φ, segu´n el enfoque y como se mostrara´ a continuacio´n, la longitud de camino ´optico Φ satisface la ecuacio´n iconal en el medio ´optico en el cual la luz se refracta. Dada *LCO* Ec.(2.8) la norma al cuadrado del gradiente de LCO es

$$||\nabla\Phi(\mathbf{X}, x, y)||^2 = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial Y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial Z}\right)^2 \quad (2.74)$$

pero calculando cada derivada parcial tenemos

$$\frac{\partial\Phi}{\partial X} = n\frac{X - x}{\sqrt{(X-x)^2 + (Y-y)^2 + (Z - f(x,y))^2}} \quad (2.75)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial Y} = n\frac{Y - y}{\sqrt{(X-x)^2 + (Y-y)^2 + (Z - f(x,y))^2}} \quad (2.76)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial Z} = n\frac{Z - f(x,y)}{\sqrt{(X-x)^2 + (Y-y)^2 + (Z - f(x,y))^2}} \quad (2.77)$$

as´ı, elevando el resultado de cada parcial al cuadrado y sumando se obtiene

$$||\nabla\Phi(\mathbf{X},x,y)||^2 = n^2 \quad (2.78)$$

por lo tanto, se ha mostrado que Φ es solucio´n a la ecuaci´on iconal. Se pueden tener dos campos electromagn´eticos con diferente estado de polarizacio´n que a nivel de ´optica geom´etrica est´en caracterizados por los mismos frentes de onda geom´etricos, ´esto es as´ı debido a que a nivel de ´optica geom´etrica la polarizacio´n de la luz no se toma en consideracio´n.

Cap´ıtulo 3

Refracci´on de una onda esf´erica a trav´es de una superficie esf´erica: rayos de luz, frentes de onda y c´austica

El problema estudiado en el presente trabajo, consiste en dos medios o´pticos caracterizados por ´ındices de refraccio´n n_1 y n_2 que se encuentran separados por una superficie esf´erica, en el medio ´optico con´ındice de refraccio´n n_1 se coloca una fuente puntual de luz, por lo que, los rayos emitidos por la fuente inciden sobre la superficie esf´erica y al salir se refractan tal como lo describe la Fig. (3.1).

En este caso, se considera una superficie esf´erica parametrizada por

$$\mathbf{r}(x,y) = x\hat{i} + y\hat{j} + \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\hat{k}, \qquad (3.1)$$

y una fuente puntual luminosa cuya posici´on esta´ dada por

$$\mathbf{s} = s_3\hat{k}, \qquad (3.2)$$

es decir, la fuente puntual luminosa solo tendr´a la posibilidad de moverse a lo largo del eje z, ya que si s_2 y s_3 son cero, de esta manera se tiene que la LCO de un rayo de luz refractado esta´ dada por

CAP´ıTULO 3 REFRACCION´ DE UNA ONDA ESFERICA´ A TRAVES´ DE UNA SUPERFICIE ESFERICA:´ RAYOS DE LUZ, FRENTES DE ONDA Y CAUSTICA´

3.1. RAYOS DE LUZ Y FRENTES DE ONDA ASOCIADOS A LA REFRACCION´ DE UNA ONDA ESFERICA´ SOBRE UNA SUPERFICIE ESFERICA´

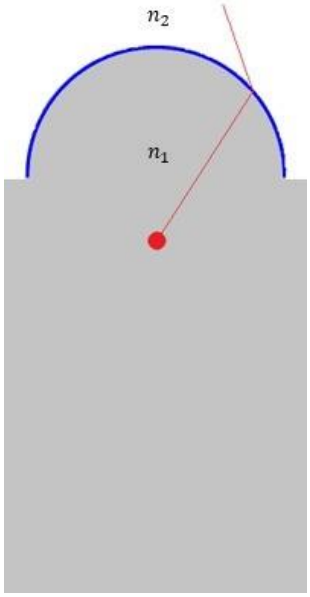


Figura 3.1:

$$\Phi(\mathbf{X}, x, y, s_3) = n_1\sqrt{x^2 + y^2 + (f(x,y) - s_3)^2} + n_2\sqrt{(X-x)^2 + (Y-y)^2 + (Z - f(x,y))^2} \quad (3.3)$$

.

As´ı, al sustituir las Ecs.(3.1) y (3.2) en las Ecs.(2.21) y (2.19) obtenemos

$$\hat{\mathbf{N}} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = \frac{x\hat{i} + y\hat{j} + \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\hat{k}}{a} \quad (3.4)$$

$$\hat{\mathbf{I}} = \frac{x\hat{i} + y\hat{j} + (\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} - s_3)\hat{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + (\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} - s_3)}} \quad (3.5)$$

$$\Omega = \frac{-\gamma a^2 + \gamma(\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}s_3) + \sqrt{\Delta}}{a\sqrt{x^2 + y^2 + (\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} - s_3)^2}} \quad (3.6)$$

$\hat{\mathbf{R}}$

$$= \frac{[\gamma(\sqrt{a} - x - y\ s_3) + \sqrt{\Delta}](xi + yj + \sqrt{a} - x - y\ k) - a\ \gamma s_3}{a^2\sqrt{x^2 + y^2 + (\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} - s_3)^2}} \quad (3.7)$$

donde

$$\Delta_= a^4 - 2a^2(\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}s_3) + a^2 {s_3}^2(1 - \gamma^2) + \gamma^2(a^2 - x^2 - y^2)s_3^2 \quad (3.8)$$

o de una forma m´as compacta para simplificar los ca´lculos

$$\hat{\mathbf{R}} = R_r\mathbf{r} + R_s\mathbf{s}, \quad (3.9)$$

con

$$R_r = \frac{\gamma(\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}s_3) + \sqrt{\Delta}}{a^2\sqrt{x^2 + y^2 + (\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} - s_3)^2}}, \quad (3.10)$$

$$R_s = \frac{-\gamma}{\sqrt{x^2 + y^2 + (\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} - s_3)^2}}. \quad (3.11)$$

De esta manera, con las expresiones anteriores, para nuestro caso particular se tiene que la expresio´n anal´ıtica de las trayectorias de los rayos de luz refractados, es decir, la Ec.(2.28) esta´ dada por

$$\mathbf{X} = (x\hat{i} + y\hat{j} + \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\hat{k}) \quad (3.12)$$

$$+\tau[\frac{[\gamma(\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}s_3) + \sqrt{\Delta}](x\hat{i} + y\hat{j} + \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\hat{k}) - a^2\gamma s_3}{a^2\sqrt{x^2 + y^2 + (\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} - s_3)^2}}]$$

3.1. Rayos de luz y frentes de onda asociados a la refracci´on de una onda esf´erica sobre una superficie esf´erica

Usando los resultados obtenidos en la subseccio´n anterior, se presentan las gra´ficas de los rayos de luz y frentes de onda refractados de una fuente puntual luminosa a trav´es de una superficie esf´erica.

Los rayos de luz incidentes esta´n dados por

$$\mathbf{X}_{\mathbf{inc}} = \mathbf{s} + l(\mathbf{r} - \mathbf{s}), \qquad (3.13)$$

donde l es un para´metro real. Cada rayo de luz emitido por la fuente puntual esta´ caracterizado por un valor fijo de x y y con $l \in [0,1]$; mientras que los frentes de onda esta´n dados por la misma ecuaci´on considerando que x y y var´ıan y l es fijo.

Como se describe en la seccio´n anterior, se han obtenido los ca´lculos para hallar los rayos de luz, frentes de onda y ca´ustica que se generan luego de

que los rayos de luz provenientes de una fuente puntual inciden sobre una superficie esf´erica y se refractan, ahora, usando esos c´alculos se supone el caso en el que la fuente puntual de luz est´a sobre el eje z y se aleja del origen. Para efectuar los ca´lculos se tomaron los siguientes valores: $a = 1$, $\rho \in [0{,}0{,}7]$ y $\gamma = 1{,}5$, adem´as se consideran diferentes valores de s_3 manteniendo s_1 y s_2 constantes. Cabe sen˜alar que el presente trabajo se calcul´o en 3D sin embargo, debido a la simetr´ıa del problema se realizan las gr´aficas en 2 D para una mejor visualizacio´n del problema.

En la Figura(3.2) se presentan los rayos de luz refractados (3.12) e incidentes Ec.(3.13) en tres dimensiones. Por otro lado, en la Figura(3.3) se muestran las gra´ficas de los frentes de onda refractados Ec.(3.12) e incidentes Ec.(3.13) en tres dimensiones. Debido a la simetr´ıa del problema, para tener una mejor descripcio´n de las Figuras(3.2) y (3.3), se presentan las ima´genes de los rayos de luz, ver Figura(3.4) y frentes de onda, ver Figura(3.5) en dos dimensiones. En la Figura(3.4)a) se muestra que cuando la fuente puntual se localiza justo en el centro de la superficie esf´erica, la direcci´on de los rayos de luz refractados no cambia, esto es as´ı debido a que cada rayo de luz que sale de la fuente puntual incide perpendicularmente a la superficie. En la Figura(3.4)b) se observa que los rayos de luz emitidos ya no inciden perpendicularmente a la superficie esf´erica; en ambos casos se tiene que los rayos de luz refractados divergen. En la Figura(3.4)c) se muestra que los rayos de luz refractados tienden a ser segmentos de l´ıneas que primero aparecen muy cerca del eje pero que ma´s tarde se intersectan y divergen. En las Figuras(3.4)d) y (3.4)f) se tienen que los rayos de luz refractados se intersectan y posteriormente divergen; en el caso en el que $s_3 = -100$ se puede apreciar que los rayos incidentes son paralelos al eje z, por lo que, se puede suponer que el frente de onda incidente es un frente de onda plano. Por otro lado, en la Figura(3.5)a) se observa que los frentes de onda incidentes y refractados son esferas conc´entricas. En la Figura(3.5)b) los frentes de onda refractados dejan de ser esferas. En la Figura(3.5)c) los frentes de onda tienen dos caracter´ısticas: cerca del eje z se aproximan a planos y mientras z aumenta los frentes de onda est´an formados por tres segmentos de l´ıneas rectas, es decir se autointersectan y tienen picos. En las Figuras(3.5)d)-(3.5)f), se tiene que algunos de los frentes de onda se autointersectan o tienen picos; en contraparte de la Figura(3.5)f), los frentes de onda incidentes son planos perpendiculares al eje z. En la Figura (3.6) se

pueden observar los rayos de luz y frentes de onda y se puede apreciar que los rayos de luz forman una curva denominada la envolvente, y justo en los puntos de la envolvente el frente de onda tiene picos o se autointersecta.

CAP´ıTULO 3 REFRACCION´ DE UNA ONDA ESFERICA´ A TRAVES´ DE UNA SUPERFICIE ESFERICA:´ RAYOS DE LUZ, FRENTES DE ONDA Y CAUSTICA´

3.1. RAYOS DE LUZ Y FRENTES DE ONDA ASOCIADOS A LA REFRACCION´ DE UNA ONDA ESFERICA´ SOBRE UNA SUPERFICIE ESFERICA´

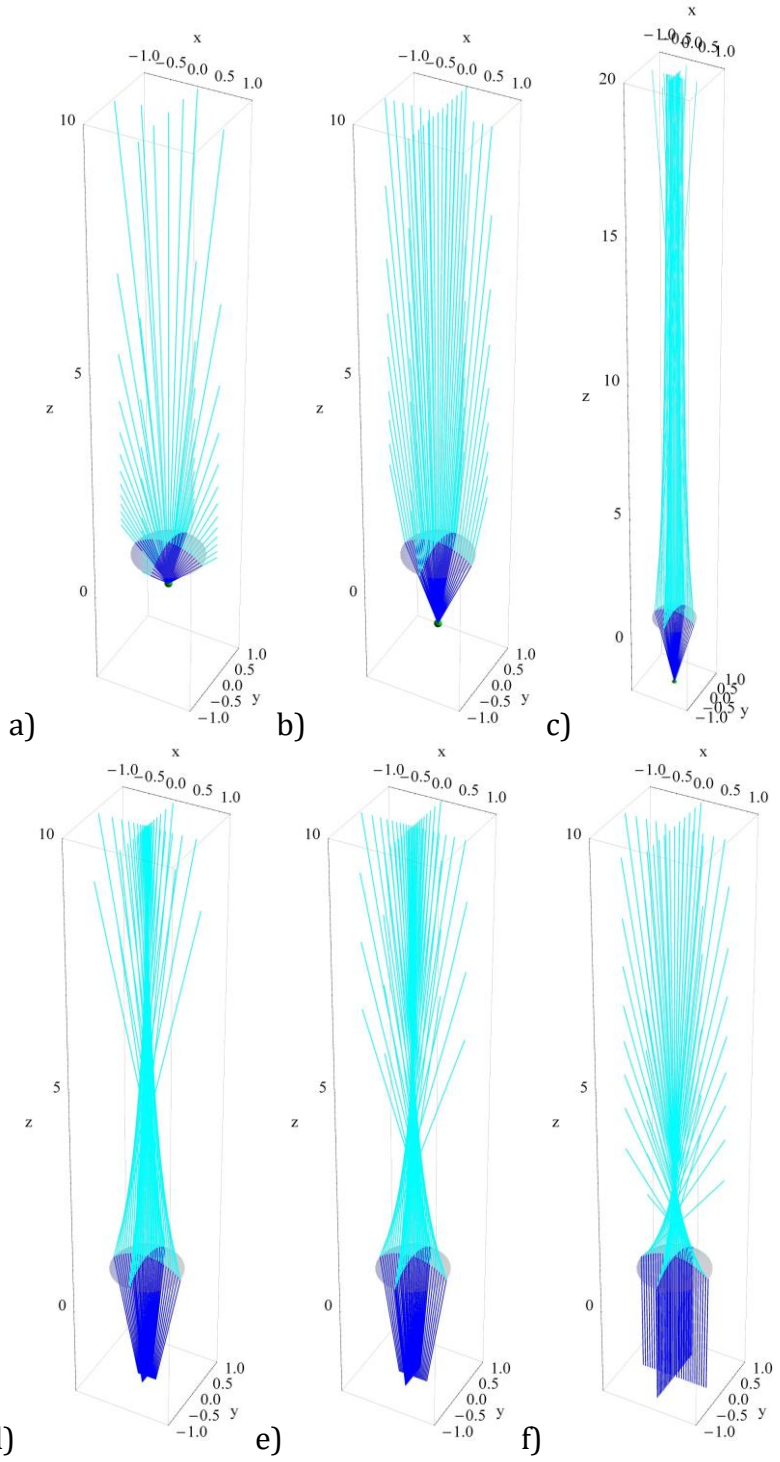
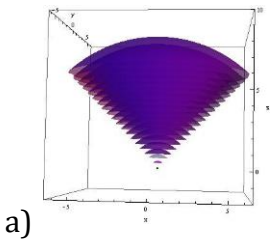
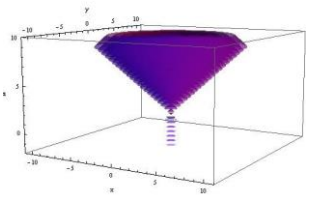


Figura 3.2: Arreglos 3D de rayos de luz incidentes y refractados con a) $z = 0$,

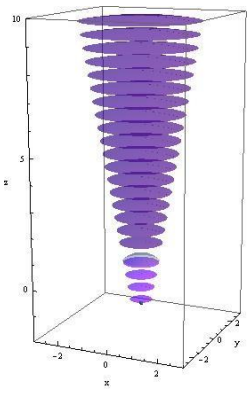
b)$z = -1$, c)$z = -2$, d)$z = -3$, e)$z = -4$, f)$z = -100$.



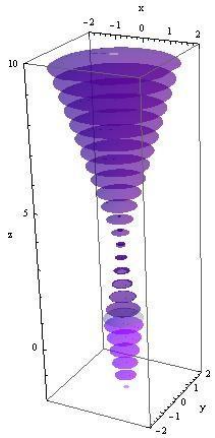
a)



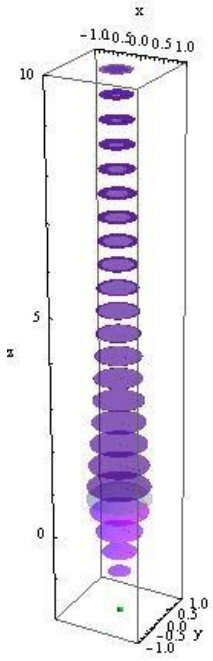
f)



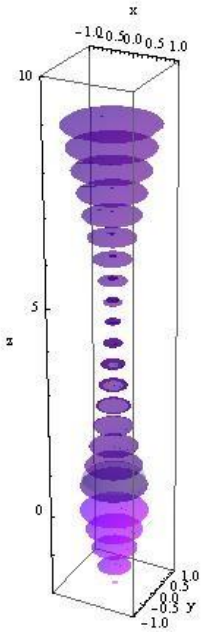
b)



e)



c)



d)

Figura 3.3: Arreglos 3D de frentes de onda incidentes y refractados con a)z = 0, b)z = −1, c)z = −2, d)z = −3, e)z = −4, f)z = −100.

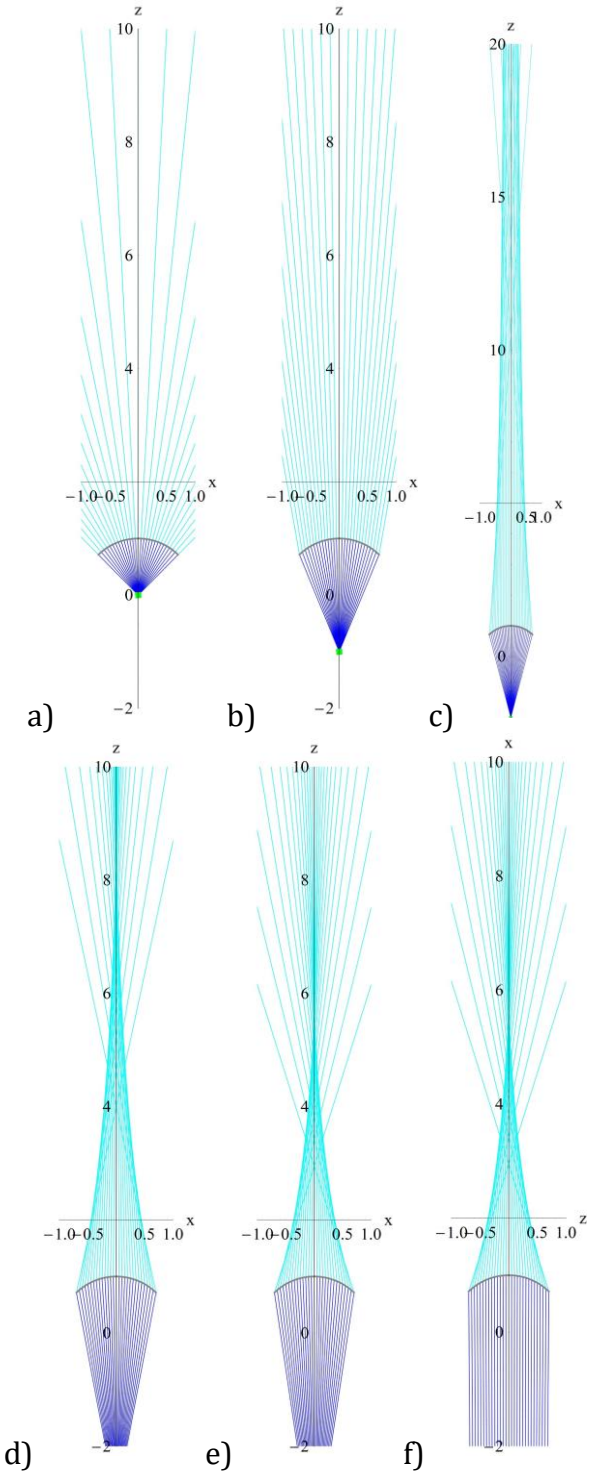

a)
b)
c)
d)
e)
f)

Figura 3.4: Arreglos 2D de rayos de luz incidentes (azul) y refractados (cian) con a)$z = 0$, b)$z = -1$, c)$z = -2$, d)$z = -3$, e)$z = -4$, f)$z = -100$.

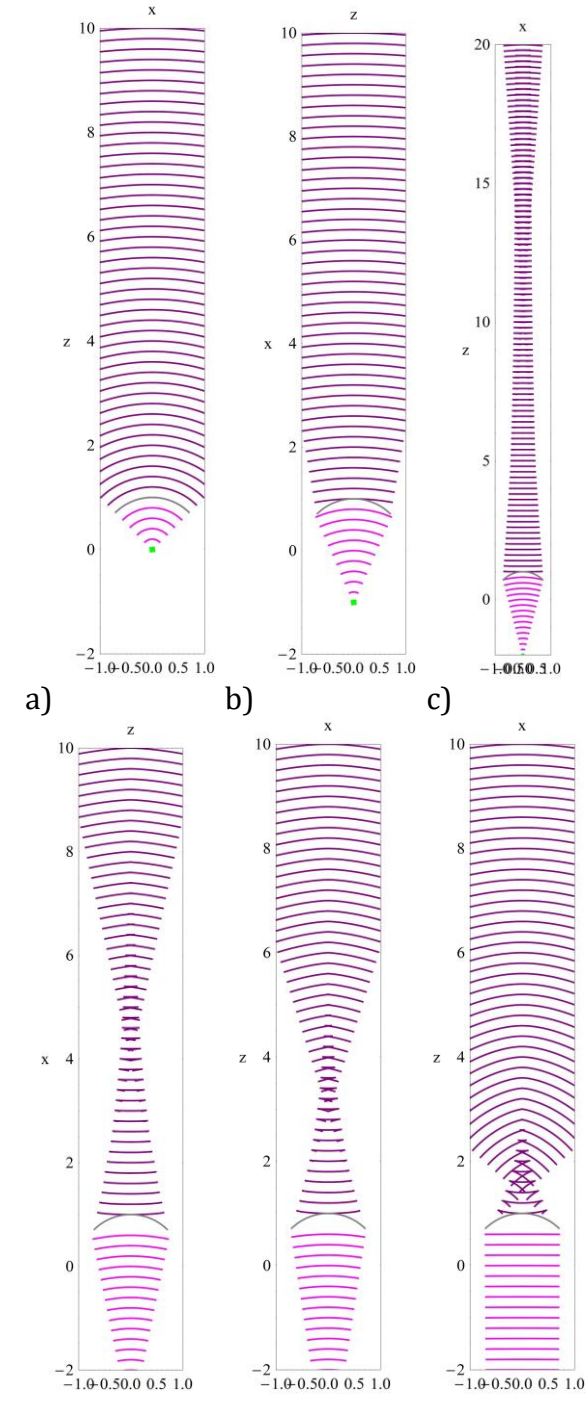

a)
b)
c)
d)
e)
f)

Figura 3.5: Arreglos 2D de frentes de onda incidentes (magenta) y refractados (morado) con a)$z = 0$, b)$z = -1$, c)$z = -2$, d)$z = -3$, e)$z = -4$, f)$z = -100$.

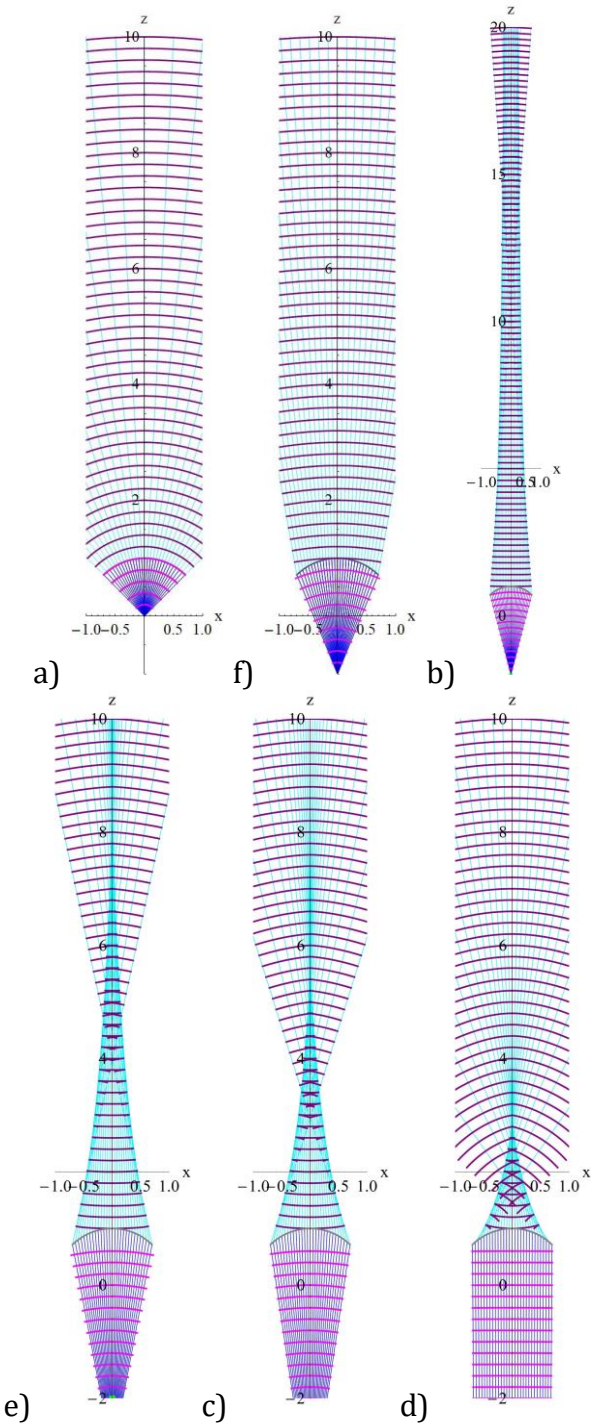

a)
f)
b)
e)
c)
d)

Figura 3.6: Arreglos 2D de rayos, incidentes y refractados, y frentes de onda incidentes y refractados con a)$z = 0$, b)$z = -1$, c)$z = -2$, d)$z = -3$, e)$z = -4$, f)$z = -100$.

3.2. C´austica asociada a la refracci´on de una onda esf´erica a trav´es de una superficie esf´erica

En el cap´ıtulo anterior se encontro´ la ecuacio´n que se debe resolver para hallar el conjunto c´austico generado por la refracci´on de los rayos de luz a trav´es de una superficie arbitraria. Esta ecuacio´n contiene tres coeficientes H_2, H_1 y H_0 dados por las ecuaciones (2.37), (2.38) y (2.39) los cuales tienen valores espec´ıficos ahora que elegimos una superficie esf´erica

$$H_2 = \frac{R_r}{z}\left[R_r(\mathbf{r}\cdot\hat{\mathbf{R}}) + R_s k[a^2s^2 - (\mathbf{r}\cdot\mathbf{s})^2]\right], \quad (3.14)$$

$$H_1 = 2\frac{R_r}{z}(\mathbf{r}\cdot\hat{\mathbf{R}}) + R_s k\left[\frac{a^2s^2 - (\mathbf{r}\cdot\mathbf{s})^2}{z}\right], \quad (3.15)$$

$$H_0 = \frac{\mathbf{r}\cdot\hat{\mathbf{R}}}{z}, \quad (3.16)$$

donde

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, \quad (3.17)$$

$$k = \frac{1}{a^2|\mathbf{r}-\mathbf{s}|}\left[\frac{1}{\sqrt{\Delta}}[a^2 - \gamma^2(\mathbf{r}\cdot\mathbf{s})] - \gamma\right]. \quad (3.18)$$

De esta manera se encuentra que existen dos conjuntos cr´ıticos dados por

$$\tau_+ = \frac{-(\mathbf{r}\cdot\hat{\mathbf{R}})}{R_r(\mathbf{r}\cdot\hat{\mathbf{R}}) + R_s k[a^2s^2 - (\mathbf{r}\cdot\mathbf{s})^2]}, \quad (3.19)$$

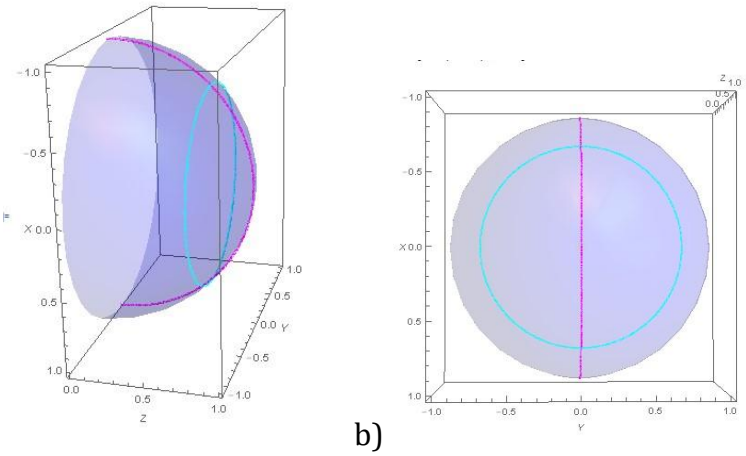
$$\tau_- = \frac{1}{R_r}, \quad (3.20)$$

por lo cual se tiene que existen dos ramas de la c´austica asociadas dadas por

$$\mathbf{X}_{c+} = \frac{R_s[k[a^2s^2-(\mathbf{r}\cdot\mathbf{s})^2]\mathbf{r}-(\mathbf{r}\cdot\hat{\mathbf{R}})\mathbf{s}]}{R_r(\mathbf{r}\cdot\hat{\mathbf{R}})+R_sk[a^2s^2-(\mathbf{r}\cdot\mathbf{s})^2]}, \quad (3.21)$$

$$\mathbf{X}_{c-} = -\frac{R_s}{R_r}\mathbf{s} \quad (3.22)$$

Si se pone especial atencio´n en la forma de la superficie se puede ver que tiene relacio´n con las dos ramas de la c´austica, es decir, la rama positiva



b)

Figura 3.7: Las figuras muestran las curvaturas, a) perfil, b) frente, que tiene a)

la superficie esf´erica. El resultado de la curvatura color magenta es una superficie ca´ustica en forma de cono, mientras que la curvatura color cian nos da una ca´ustica en forma de l´ınea recta.

$\mathbf{X}_{c+}$ forma una c´austica en forma de trompeta, ver Figura(3.7) l´ınea color magenta, por otro lado, la rama negativa $\mathbf{X}_{c-}$ forma una c´austica en forma de l´ınea recta, ver Figura(3.7) l´ınea color cian.

A continuacio´n, la Figura (3.8) describe los rayos de luz incidentes y refractados as´ı como ambas ramas de la ca´ustica. Para el primero y segundo caso, cuando la fuente puntual se encuentra en el origen y en $z = -1$ respectivamente, Figuras (3.8) a) y b), se tiene que no hay formaci´on de c´austica debido a que en estos casos no existe intersecci´on de los rayos

refractados, es decir, en este caso el mapeo dado por la Ec.(3.12) es uno a uno. En el tercer caso, Fig. (3.8) c), ya se aprecia la formacio´n de las dos ramas de la ca´ustica, una en forma de cilindro y la otra que es un segmento de l´ınea recta. Para los casos cuatro, cinco y seis, Figuras (3.8) d), e) y f) respectivamente, se observa ya la formaci´on de ambas ramas de la ca´ustica, una en forma de una especie de trompeta y la otra como un segmento de l´ınea recta sobre el eje o´ptico. Aqu´ı se aprecia que mientras m´as se aleja la fuente del origen, m´as se acercan las ca´usticas a la superficie esf´erica y se reduce el taman˜o de la trompeta y de la l´ınea recta. Posteriormente, la Fig. (3.9) describe los frentes de onda incidentes y refractados as´ıcomo ambas ramas de la c´austica. Como ya se analizo´ con los rayos de luz, para el primer y segundo caso no existe ca´ustica, Figuras (3.9) a) y b), y los frentes de onda tanto incidentes como refractados son esf´ericos. En el tercer caso, Fig (3.9) c), se observa una de las ramas de la ca´ustica que aparece en forma de una especie de cilindro y la otra en forma de l´ınea recta, a simple vista no se nota nada diferente a las gra´ficas de los rayos de luz pero si revisamos ma´s a fondo descubriremos que los frentes de onda comienzan a tener dobleces en las orillas (picos) y autointersecciones, es ah´ı donde aparece la ca´ustica, aqu´ı los frentes de onda incidentes son esf´ericos pero los refractados dan la impresio´n de ser casi planos. Para los casos cuatro, cinco y seis, Figuras (3.9) d), e) y f), podemos ver que los frentes de onda describen perfectamente los puntos donde se forma la ca´ustica pues los dobleces o picos forman parte de la c´austica en forma de trompeta y las autointersecciones de los frentes son aquellos puntos que forman el segmento de l´ınea recta. Los frentes de onda incidentes de los casos cuatro y cinco empiezan a dejar de ser curvos y los frentes de onda refractados son ligeramente curvos hacia arriba y despu´es de intersectarse comienzan a formar de nuevo la curvatura suave hacia abajo. En el u´ltimo caso $z = -100$ los frentes de onda incidentes son casi planos mientras que los frentes refractados mantienen la curvatura suave.

La Figura (3.10) nos describe los rayos de luz incidentes y refractados as´ı como la rama positiva de la ca´ustica en tres dimensiones y finalmente, la Figura (3.11) describe los rayos de luz incidentes y refractados, frentes de onda incidentes y refractados y ambas ramas de la ca´ustica en dos dimensiones.

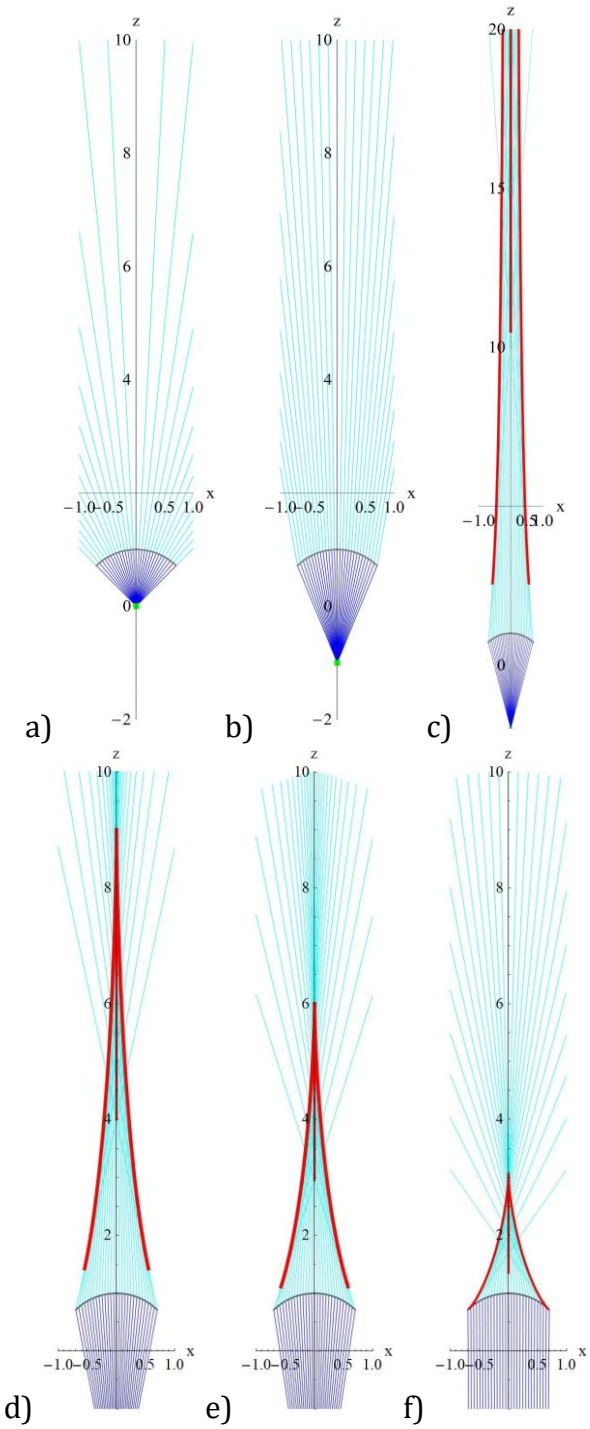

a)
b)
c)
d)
e)
f)

Figura 3.8: Arreglos 2D de rayos de luz incidentes y refractados y ambas ramas de la c´austica, con a)$z = 0$, b)$z = -1$, c)$z = -2$, d)$z = -3$, e)$z = -4$, f)$z = -100$.

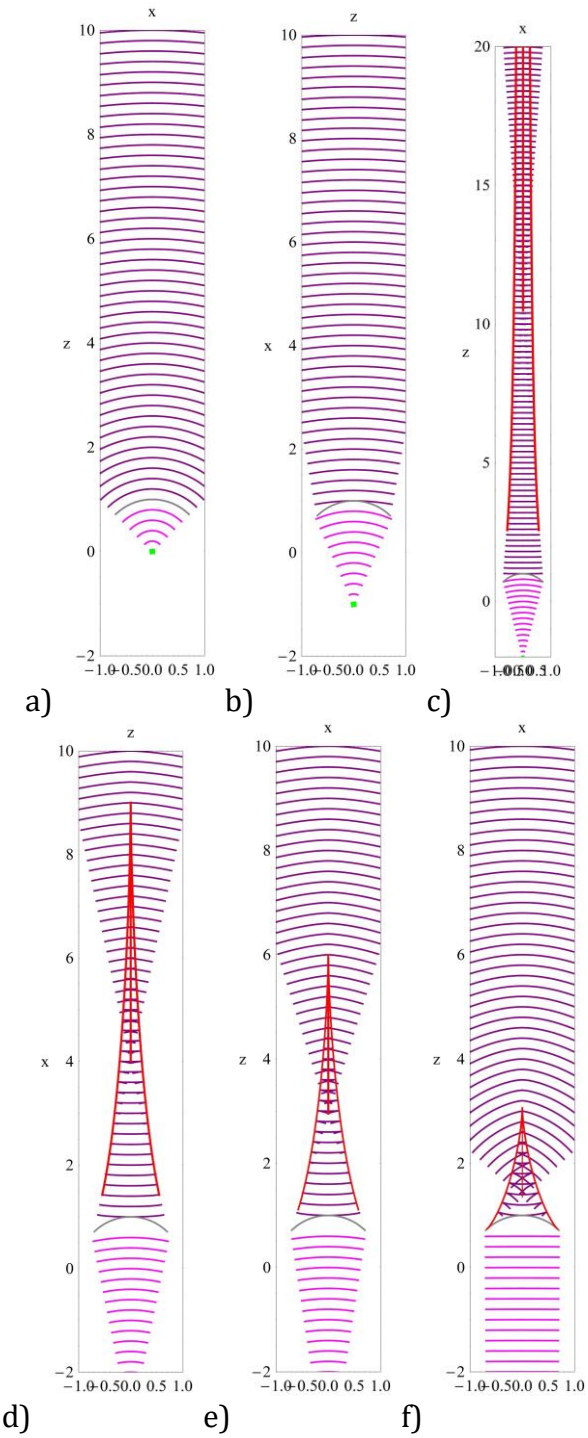

a)
b)
c)
d)
e)
f)

Figura 3.9: Arreglos 2D de frentes de onda incidentes y refractados y ambas ramas de la c´austica, con a)$z = 0$, b)$z = -1$, c)$z = -2$, d)$z = -3$, e)$z = -4$, f)$z = -100$.

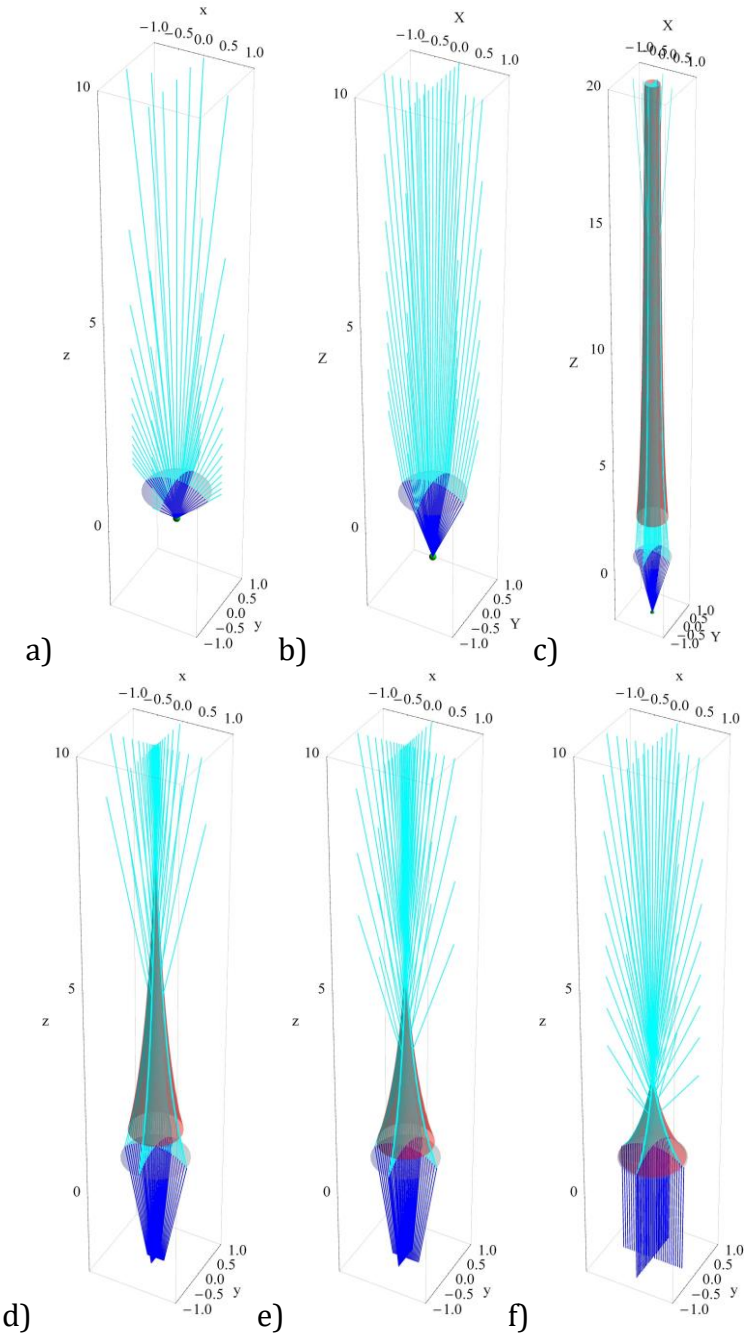


Figura 3.10: Arreglos de rayos de luz incidentes y refractados y ambas ramas de la ca´ustica, con a)$z = 0$, b)$z = -1$, c)$z = -2$, d)$z = -3$, e)$z = -4$, f)$z = -100$.

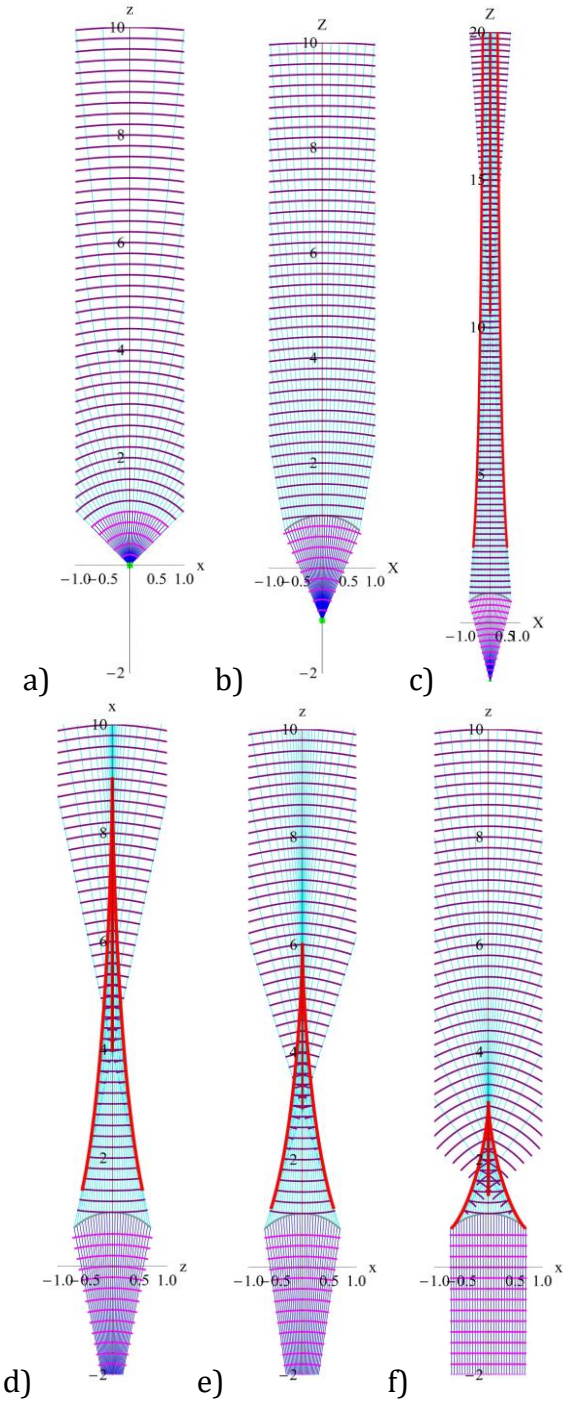

a)
b)
c)
d)
e)
f)

Figura 3.11: Arreglos 2D de rayos de luz incidentes y refractados, frentes de onda incidentes y refractados y ambas ramas de la ca´ustica, con a)$z = 0$, b)$z = -1$, c)$z = -2$, d)$z = -3$, e)$z = -4$, f)$z = -100$.

Cap´ıtulo 4

Conclusiones

El primer objetivo de este trabajo fue revisar los conceptos usados en ´optica geom´etrica para describir la propagaci´on de la luz: rayos de luz y frentes de onda, as´ıcomo de entender los principios de Fermat y de Huygens con los cuales se deducen las leyes de reflexio´n y refraccio´n. Posteriormente se deduce la ley de refracci´on de una fuente puntual luminosa debido a una superficie arbitraria en forma vectorial para obtener las expresiones anal´ıticas de los rayos de luz y frentes de onda refractados. Con estos resultados se determin´o la ca´ustica asociada debido a la refracci´on de la luz, la cual representa cualitativamente la regi´on macrosco´pica de m´aximo enfocamiento de luz debido al fen´omeno de refraccio´n. Tambi´en, se deduce la ecuaci´on iconal, la cual es importante porque con ella se muestra que un campo electromagn´etico puede describirse a partir de una funci´on S, donde S = *constante* son los frentes de onda geom´etricos y ∇S da la direcci´on de los rayos de luz. Finalmente, usando los resultados obtenidos se calculan los rayos de luz, frentes de onda y ca´ustica asociados a la refraccio´n de una fuente puntual luminosa a trav´es de una superficie esf´erica, considerando diferentes posiciones de la fuente puntual. Se encontro´ en este caso particular que existen dos posibilidades: no hay formacio´n de ca´ustica o tiene dos ramas.

Cap´ıtulo 5

Bibliograf´ıa

[1] Cornejo-Rodr´ıguez y Urcid-Serrano, *OPTICA´ GEOMETRICA.´ Resumen de Conceptos y F´ormulas Parte I*, (INAOE, 2005).

[2] Bahaa E. A. Saleh and M. Carl-Teich, *Fundamentals of Photonics*, (John Wiley & Sons, Inc., 1991).

[3] E. Hetch, *Optica´* , (Adisson Wesley Iberoamericana,2000).

[4] M. del C. Ferna´ndez-Garc´ıa, *Galer´ıa de curvas en el plano*.

[5] M. Marciano-Melchor, E. Navarro-Morales, E. Rom´an-Herna´ndez, J.G. Santiago-Santiago, G. Silva-Ortigoza, R. Silva-Ortigoza and R. Sua´rez-Xique, *The point-characteristic function, wavefronts, and caustic of a spherical wave refracted by an arbitrary smooth surface*, J. Opt. Soc. Am. A (2012).

[6] J.Castro-Ramos, S. A. Jua´rez-Reyes, M. Marcelino-Aranda, P. OrtegaVidals, G. Silva-Ortigoza, R. Silva-Ortigoza and R. Sua´rez-Xique, *The refraction and reflection laws from a complete integral of the eikonal equation and Huygens' principle*, J. Opt. 17 015601 (2015)

[7] M. Born and E. Wolf, *Principles of optics. Electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light*, (Cambridge University Press, 1999).

[8] R. Su´arez-Xique, *Difracci´on asociada con frentes de onda singulares*, Tesis de Maestr´ıa, Instituto de F´ısica Luis Rivera Terrazas-BUAP, (2011).

[9] I. Julia´n-Mac´ıas, *Ronchigramas generados por la refracci´on de una on***CAP´ıTULO 5 BIBLIOGRAF´IA**

---

da plana a trav´es de un axic´on y un prisma triangular, Tesis de Licenciatura, FCFM-BUAP, (2015).

[10] Arnold V.I. , Gusein-Zade S.M. and Varchenko A. N. 1995, *Singularities of Differentiable Maps*, vol I, (Boston: Birkha¨user).

[11] Arnold V. I. 1983, *Singularities, bifurcations and catastrophes*, Usp. Fiz. Nauk, 141 569-90.

[12] Kravtsov Y. A. and Orlov Y. I. 1983, *Caustics, catastrophes and wave fields*, Usp. Fiz. Nauk 141 591-627