BENEMÉRITA UNIVERSIDAD
AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO
MATEMÁTICAS

FORMULACIÓN LAGRANGIANA DISIPATIVA PARA UNA PARTÍCULA RELATIVISTA CON CARGA

T E S I S

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

LICENCIADO EN FÍSICA

Presenta:

JOSÉ JAVIER ROMERO HERNÁNDEZ

TUTOR:
CUPATITZIO RAMÍREZ ROMERO

Puebla, Puebla, 2022

Título: Formulación lagrangiana disipativa para una partícula relativista con carga

Estudiante: José Javier Romero Hernández

COMITÉ:

Dr. Gerardo Torres del Castillo
Presidente

Dr. Hector Novales Sánchez
Secretario

Dr. Roberto Cartas Fuentevilla
Vocal

M.C. Nephtalí Eliceo Martinez Pérez
Suplente

Dr. Cupatitzio Ramírez Romero
Asesor

Agradecimientos

A mis hermanas y hermano P.A.V.E.J por su ejemplo constante, cariño y complicidad incondicional.

A mi mamá por su ejemplo de perserverancia y disciplina que me guío durante todos mis estudios y metas.

A mis amigos de la carrera, muchas gracias por su compañia, consejos y amistad.

Le agradezco con creces al Dr. Cupatitzio Ramírez por todos los consejos, apoyo y paciencia que me brindo en este trabajo y durante la carrera.

A mis profesores de la licenciatura por toda su sabíduria plasmada en sus cursos.

Resumen

Los fenómenos naturales suceden en medios donde las partes del sistema interaccionan. La mecánica clásica resuelve algunos de estos problemas que pueden tener varios grados de libertad, para ello se han creado formulaciones lagrangianas o Hamiltonianas en el marco disipativo que modelan la dinámica de estos sistemas. El objetivo de este trabajo es determinar cómo se ven los sistemas con pérdida de energía en el marco relativista, concentrados en una partícula con carga en un campo electromagnético. Para este sistema se construye una lagrangiana invariante de Lorentz e invariante bajo reparametrizaciones del tiempo, se obtienen las ecuaciones de movimiento y se resuelven los casos donde los campos eléctricos y magnéticos actúan independientemente.

Índice general

Introducción

La descripción matemática de sistemas físicos reales requiere la incorporación de interacciones con el entorno, éstas fuerzas externas suelen ser no derivables de un potencial, como fuerzas de fricción, la función de disipación de Rayleigh Goldstein et al. (2002) es un ejemplo. En la mecánica clásica existen distintos formalismos, como el Lagrangiano y Hamiltoniano, con los cuales se pueden resolver problemas físicos donde la energía total se conserva. Para obtener las ecuaciones de movimiento se usa el principio variacional de Hamilton, formulado con condiciones de frontera en el tiempo, y no condiciones iniciales.
Galley Galley (2013) formula el principio de Hamilton con condiciones iniciales para sistemas generales y que generan una acción que describe sistemas no conservativos en la mecánica clásica que puede ser extendido al marco relativista con una variedad de aplicaciones. Del principio de conservación de la energía sabemos que esta se transforma y para la descripción matematica de ciertos fenómenos se pueden hacer consideraciones físicas de acuerdo a lo que nos interesa conocer del evento, como su posición o momento, y ayudan a convertir un problema que contiene intercambio de energía entre las partes del sistema global en uno donde esta interacción no afecta la descripción del suceso de interés, como el despreciar la influencia del aire sobre una pelota en el estudio del movimiento del cuerpo en un campo gravitacional, o despreciando la fricción con el suelo para saber la dinámica de un cuerpo en movimiento. El estudio de sistemas disipativos tiene gran importancia en la formulación cuántica Martínez-Pérez and Ramírez (2018) así como en la física de aceleradores donde las partículas que emergen de las colisiones interactúan con los sensores y en el proceso nos da información sobre su dinámica y energía o al interactuar una partícula cargada en un medio electromagnético como un electrón en una camara de niebla o los mismos rayos cósmicos a través de medios con presencia de magnetismo. En este caso estudiaremos la descripción de sistemas relativistas no conservativos usando sistemas con invariancia de Lorentz e invariancia bajo reparametrizaciones generales del tiempo. Extendemos la descripción de la partícula libre relativista disipativa al caso donde la partícula está cargada e interactúa con un campo electromagnético y con el potencial disipativo; se busca construir la formulación lagrangiana disipativa covariante, hallar sus ecuaciones de movimiento y sus soluciones.
Se calcula el Hamiltoniano del sistema y finalmente se buscan las soluciones para la dinámica del sistema en presencia de campo eléctrico y magnético constante y homogéneo.

Capítulo 1

Antecedentes

1.1. Formulación del electromagnetismo

James Clerk Maxwell (1831-1879) publicó sus leyes en 1865 como el resultado de la investigación experimental de varios físicos de la época. Aunque Maxwell añadió sólo un término a toda la amalgama de ecuaciones ya creadas, el hito de Maxwell fue unificar el conjunto de leyes empíricas, y sin aparente conexión, de la electrostática, corrientes eléctricas e inducción magnética en una teoría que describía todos los fenómenos relaciónados con el electromágnetismo.
Dada una densidad de cargas eléctricas $\rho(\vec{x}, t)$ y una densidad de corriente $\vec{j}(\vec{x}, t)$, entonces las leyes de Maxwell para los campos eléctricos $\vec{E}(\vec{x}, t)$ y magnéticos $\vec{B}(\vec{x}, t)$, en unidades de Lorentz-Heaviside, se ven como:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \vec{\rho}, \\
\vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{1}{c}\partial_t \vec{B}, \\
\vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0, \\
\vec{\nabla} \times \vec{B} &= \frac{1}{c}\partial_t \vec{j} + \frac{1}{c}\partial_t \vec{E}.
\end{aligned}$$

Donde c es la velocidad de la luz. En su forma diferencial, tenemos ocho ecuaciones diferenciales lineales acopladas; en muchos casos las condiciones de contorno hacen que los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ tiendan a cero en el infinito.
La formulación integral de las leyes de Maxwell da una perspectiva más clara sobre la física detrás de ellas. Utilizando los teoremas de Stokes a las integrales de la divergencia y rotacional de un campo vectorial $\vec{A}$,

$$\iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \oiint_{\partial V} \vec{A} \cdot \vec{n} d^2 x, \tag{1.1}$$

$$\iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot \vec{n} d^2 t = \oint_{\partial S} \vec{A} \cdot d\vec{r}. \tag{1.2}$$

Podemos reescribir las ecuaciones de Maxwell es su forma integral :

$$\iiint_V \rho d^3 x = \oiint_{\partial V} \vec{E} \cdot \vec{n} d^2 x, \tag{1.3}$$

$$-\frac{1}{c}\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} d^2 x = \oint_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{r}, \tag{1.4}$$

$$\oiint_{\partial V} \vec{B} \cdot \vec{n} d^2 x = 0, \tag{1.5}$$

$$\oint_{\partial S} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{c} \iint_S \vec{j} \cdot \vec{n} d^2 x + \frac{1}{c} \iint_S \vec{E} \cdot \vec{n} d^2 x, \tag{1.6}$$

La ecuación (1.3) mejor conocida como la ley de Gauss nos dice que el flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada es igual a la carga total encerrada dentro de la superficie. La ecuación (1.4) nos da la ley de inducción magnética que nos dice que un cambio en el flujo magnético a través de una superficie S induce un campo eléctrico rotacional alrededor de la curva que encierra S; en la ecuación (1.5) tenemos el análogo de la ley de Gauss para los campos magnéticos, el flujo magnético a través de cualquier superficie cerrada es cero; en la ecuación (1.6) nos dice la fuente del campo magnético: la corriente electrica $\vec{j}$. Las leyes de Maxwell describen cómo cargas y corrientes eléctricas generan campos eléctricos y magnéticos. Resta saber cómo es que una partícula cargada interactúa con estos campos electromagnéticos. La fuerza ejercida por los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ sobre una partícula con carga q es conocida como la fuerza de Lorentz:

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \frac{\vec{v} \times \vec{B}}{c}\right) \tag{1.7}$$

Donde $\vec{v}$ es la velocidad de la partícula. La fuerza de Lorentz (1.7) consiste en dos partes, la fuerza que ejerce el campo eléctrico en la partícula y un término que nos dice que la carga notará el campo magnético y cambiará su dirección conforme el producto cruz de la velocidad con el campo magnético, este segundo término no realiza trabajo sobre la partícula, cambia la dirección de $\vec{v}$ pero no su norma, y por lo tanto la energía cinética E_{cin} se mantiene igual. Así el cambio de la energía cinética en un campo electromagnético sólo es debido al campo eléctrico:

$$\frac{dE_{cin}}{dt} = \vec{v}\vec{F} = q\vec{v} \cdot \vec{E} \tag{1.8}$$

Esto se hará evidente más adelante al analizar las ecuaciones de movimiento de la partícula.

1.1.1. Potenciales electromagnéticos e invariancia de norma

La aparición del operador diferencial $\vec{\nabla}$ en las leyes de Maxwell en forma de rotacionales y divergencias puede complicar la solución de las mismas. Para reducirlas a un conjunto más accesible utilizando las dos leyes de Maxwell homogéneas, la ley de Faraday y la divergencia del campo magnético. Primero, notemos que la divergencia del campo magnético siempre es cero, asi que podemos escribir al campo magnético como el rotacional de un campo $\vec{A}$:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \tag{1.9}$$

Y sustituyendo en la ley de Faraday podemos escribirla como :

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{1}{c}\partial_t \vec{\nabla} \times \vec{A} \\
\vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{1}{c}\vec{\nabla} \times \partial_t \vec{A} \\
\vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{1}{c}\partial_t \vec{A}\right) &= 0
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Por las propiedades de los rotacionales y gradientes se ve que la divergencia de ese rotacional debe ser cero, por lo tanto la combinación de $\vec{E} + \frac{1}{c}\partial_t\vec{A}$ es el gradiente de un campo -ϕ, y el signo es por convenencia. Entonces podemos escribir el campo eléctrico como:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\partial_t\vec{A} \tag{1.11}$$

Los campos ϕ y $\vec{A}$ se conocen como potenciales electromagnéticos y una vez conocidos, los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ quedan totalmente determinados a través de las ecuaciones (1.9) y (1.11). Los potenciales electromagnéticos no están completamente determinados por los campos electromagnéticos. Si cambiamos los potenciales ϕ y $\vec{A}$ por otros potenciales ϕ' y $\vec{A}'$, relacionados con los originales por

$$\begin{aligned} \phi &\to \phi' = \phi + \partial_t\Lambda \\ \vec{A} &\to \vec{A}' = \vec{A} - c\vec{\nabla}\Lambda \end{aligned} \tag{1.12}$$

Conocida como transformación de norma, con $\Lambda = \Lambda(\vec{x}, t)$ una función arbitraria, así el campo eléctrico $\vec{E}'$ y magnético $\vec{B}'$ generado por los potenciales ϕ' y $\vec{A}'$ toman la forma

$$\begin{aligned} \vec{E}' &= -\vec{\nabla}\phi' - \frac{1}{c}\partial_t\vec{A}' \\ &= -\vec{\nabla}(\phi + \partial_t\Lambda) - \frac{1}{c}\partial_t(\vec{A} - c\vec{\nabla}\Lambda) \\ &= -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\partial_t\vec{A} \\ &= \vec{E} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{B}' &= \vec{\nabla} \times \vec{A}' \\ &= \vec{\nabla} \times (\vec{A} - c\vec{\nabla}\Lambda) \\ &= \vec{\nabla} \times \vec{A} - c\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\Lambda \\ &= \vec{\nabla} \times \vec{A} \\ &= \vec{B} \end{aligned}$$

En otras palabras, los potenciales ϕ' y $\vec{A}'$ generan los mismos campos electromagnéticos que los potenciales ϕ y $\vec{A}$ y como Λ es una función arbitraria, existen infinitos potenciales que dan como resultado al mismo campo electromagnético y por lo tanto la misma física. A pesar de tener infinitos potenciales, todos los ϕ y $\vec{A}$ que cumplan la relación (1,12, describe a la misma física ya que genera a los mismos campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$; en un experimento solo podemos medir la intensidad y dirección del campo elctromagnético, pero no se puede medir directamente a ϕ y $\vec{A}$ y así distinguirlos unos de otros entre la infinidad de ellos. La transformación de norma deja invariante a las leyes de Maxwell, así las cantidades físicamente relevantes sólo pueden depender de combinaciones de los potenciales que son invariantes de norma como en (1.12).
Ya tenemos las expresiones para los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ en términos de ϕ y $\vec{A}$; la ley de Gauss y la ley de Ampere-Maxwell en términos de ϕ y $\vec{A}$ son

$$\begin{aligned} &-\Delta\phi - \frac{1}{c}\partial_t(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = \rho \\ &\frac{1}{c^2}\partial_t^2\vec{A} - \Delta\vec{A} + \vec{\nabla}(\frac{1}{c}\partial_t\phi + \vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = \frac{1}{c}\vec{j} \end{aligned} \tag{1.13}$$

Con el operador diferencial $\Delta = \sum_{n=1}^{3} \partial_n \partial_n$ conocido como el Laplaciano. Al utilizar la invariancia de norma

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c}\partial_t \phi = 0 \tag{1.14}$$

Las ecuaciones (1.13) se reducen a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2}\partial_t^2 \phi - \Delta \phi &= \rho \\ \frac{1}{c^2}\partial_t^2 \vec{A} - \Delta \vec{A} &= \frac{1}{c}\vec{j} \end{aligned} \tag{1.15}$$

Que son ecuaciones de ondas con fuentes en tres dimensiones.
Más adelante revisaremos la formulación covariante de las leyes de Maxwell, para ello requerimos analizar la teoría de la relatividad especial y la formulación covariante para sistemas relativistas.

Capítulo 2

Sistemas disipativos en la mecánica clásica

En este capítulo se presenta el principio de mínima acción de la mecánica clásica y los arreglos necesarios para la descripción de sistemas no conservativos y la formulación lagrangiana clásica con disipación de energía.

2.0.1. Principio de Hamilton

En la mecánica clásica existen diversas maneras de obtener las ecuaciones de Euler-Lagrange; una de ellas es el principio de D'Alembert, que parte de consideraciones del estado instantáneo del sistema y pequeños desplazamientos virtuales alrededor del estado inicial.
Otro método muy útil es el principio integral el cual considera el movimiento total del sistema entre los tiempos t_1 y t_2 y pequeñas variaciones virtuales del movimiento. La configuración instantánea del sistema se describe por los valores de n coordenadas generalizadas $q_1, ..., q_n$ que corresponden a un punto particular del espacio de configuraciones; conforme el tiempo avanza el estado del sistema cambia y el sistema puntual se mueve en el espacio de configuraciones trazando una curva denominada trayectoria del sistema.
Se define la acción a partir de un movimiento a un tiempo inicial t_i hasta un tiempo final t_f y está dada por la integral de la función lagrangiana a lo largo del tiempo

$$S(q_i, \dot{q}_i, t) = \int_{t_i}^{t_f} L(q_i, \dot{q}_i, t)dt \tag{2.1}$$

Esto es, para todos los posibles caminos por los que el sistema puede viajar desde una posición inicial en un tiempo t_i a la posición en un tiempo t_f tomará el camino en el que el valor de la integral 2,1 sea estacionaria, entonces la variación de la integral es cero si los puntos inicial y final son fijos

$$\delta S(q_i, \dot{q}_i, t) = \int_{t_i}^{t_f} \delta L(q_i, \dot{q}_i, t)dt = 0 \tag{2.2}$$

Que nos lleva a las ecuaciones de movimiento del sistema conservativo.
Más adelante se verán las modificaciones al principio de Hamilton para sistemas donde se disipa energía.

2.1. Formulación lagrangiana de Galley para sistemas no conservativos

Para el tratamiento de sistemas clásicos con disipación de energía, R. Chad Galley propuso un método variacional Galley et al. (2014), denominado en la literatura como acción de Galley Galley (2013), la cuál consta de la duplicación de las coordenadas y velocidades generalizadas, es decir, si nuestra lagrangiana conservativa $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ consta de n grados de libertad, la lagrangiana no conservativa correspondiente dependerá de $2n$ grados de libertad y se define como:

$$L(q_1, \dot{q}_1, , q_2, \dot{q}_2) \equiv L(q_1, \dot{q}_1) - L(q_2, \dot{q}_2) + K(q_1, \dot{q}_1, t, q_2, \dot{q}_2) \tag{2.3}$$

Donde K es un potencial no conservativo y antisimétrico bajo el intercambio de variables $q_1 \leftrightarrow q_2$. Del lagrangiano anterior se define la acción de Galley de la siguiente manera:

$$S(q_1, q_2) = \int_{t_i}^{t_f} L(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2) \tag{2.4}$$

Las ecuaciones de movimiento se obtienen a partir del principio de acción estacionaria compatible con los valores iniciales de Galley, de manera similar al caso conservativo, este principio establece que la evolución de la dinámica dek sistema es tal que hace que la acción sea $\delta S = 0$, al imponer las siguientes condiciones

$$\delta q_1(t_i) = \delta q_2(t_i) = 0 \tag{2.5}$$
$$q_1(t_f) = q_2(t_f) \tag{2.6}$$
$$\dot{q}_1(t_f) = \dot{q}_2(t_f) \tag{2.7}$$
$$\delta q_1(t_f) = \delta q_2(t_f) \tag{2.8}$$

Mismas que sirven para eliminar los términos de frontera que surgen al realizar la variación.

Capítulo 3

Relatividad Especial

En este capítulo se sientan las bases de la relatividad especial, necesarias para realizar los cálculos posteriores, incluyen los postulados de la relatividad especial, las transformaciones de Lorentz, los conceptos de métrica, invariancia, cuadrivectores y el uso de tensores.

3.1. Postulados

La relatividad especial, publicada por A. Einstein en 1905, es una teoría que describe fenómenos físicos para diferentes sistemas de referencia inerciales, su formulación se basa en los siguientes postulados :

1. Todos los sistemas de referencia inerciales son equivalentes entre sí.
2. La velocidad de la luz en el vacío es independiente del movimiento de la fuente.

El primer postulado nos dice que no hay experimento alguno capaz de medir un marco inercial absoluto. En el segundo postulado se impone que la velocidad de la luz es la misma para todos los observadores.

3.2. Transformaciones de Lorentz

La relación que existe entre las coordenadas de los sucesos medidos por los sistemas de referencia inerciales, es una transformación de Lorentz. Sea S un marco de referencia inercial que mide a un suceso p con coordenadas (x,y,z,t) en su sistema y S' otro sistema de referencia inercial que mide el suceso p con coordenadas (x',y',z',t) desde su marco. Las transformaciones de Lorentz nos dicen cómo calcular las coordenadas de un suceso en las coordenadas de un sistema S' a partir de las coordenadas en otro sistemas S, para la configuración estándar donde el sistema S' con ejes paralelos al eje S, moviéndose a lo largo del eje x y que se aleja con velocidad constante $\vec{v}$ a partir de la cual se construyen las transformaciones de Lorentz también conocidas como boost de Lorentz:

$$ct' = \gamma(ct - \frac{v}{c}x) \tag{3.1}$$

$$x' = \gamma(x - \frac{v}{c}ct) \tag{3.2}$$

$$y' = y \tag{3.3}$$

$$z' = z \tag{3.4}$$

donde

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{3.5}$$

Con c como la velocidad de la luz y v es la velocidad relativa entre los sistemas S y S'.

También podemos obtener las transformaciones inversas que nos darán las coordenadas del suceso que ocurrió en el marco S a apartir de las coordenadas del mismo suceso en el marco S'

$$ct = \gamma(ct' + \frac{v}{c}x) \tag{3.6}$$

$$x = \gamma(x' + \frac{v}{c}ct') \tag{3.7}$$

$$y = y' \tag{3.8}$$

$$z = z' \tag{3.9}$$

El intervalo invariante $(\Delta S)^2$ tiene como propiedad que al ser medido desde cualquier marco de referencia inercial tiene el mismo valor. En la mecánica clásica un ejemplo son las rotaciones en el plano cartesiano $x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2$. Para las transformaciones de Lorentz requerimos calcular el intervalo entre las coordenadas de dos sucesos A y B medidos desde dos marcos inerciales S y S' respectivamente.

Proposición: Sea $\Delta t \equiv t_B - t_A$; $\Delta x \equiv x_B - x_A$; $\Delta y \equiv y_B - y_A$; $\Delta z \equiv z_B - z_A$; donde (x_A, y_A, z_A, t_A) y (x_B, y_B, z_B, t_B) son los sucesos inicial y final entonces

$$(\Delta S)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - (c\Delta t)^2 = (\Delta x)'^2 + (\Delta y)'^2 + (\Delta z)'^2 - (c\Delta t)'^2 \tag{3.10}$$

Prueba

Utilizando las transformaciones de Lorentz para cada suceso A y B tenemos

$\Delta x \equiv (x_{B'} - x_{A'}) = \gamma(x_B - \beta ct_B) - \gamma(x_A - \beta ct_A) \to \Delta x = \gamma(\Delta x - \Delta t)$

$\Delta y' \equiv (y_{B'} - y_{A'}) = (y_B - y_A) = \Delta y$

$\Delta z' \equiv (z_{B'} - z_{A'}) = (z_B - z_A) = \Delta z$

$c\Delta t' \equiv ct_{B'} - ct'_A{=}\gamma(ct_B - \beta x_B) - \gamma(ct_A - \beta x_A) \to c\Delta' = \gamma(c\Delta t - \beta\Delta x)$

Entonces

$$\begin{aligned}
\Delta(x)'^2 + (\Delta y)'^2 + (\Delta z)'^2 - (c\Delta t)'^2 &= \gamma^2\left[(\Delta x - \beta c\Delta t)^2 - (c\Delta t - \beta\Delta x)^2\right] + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 \\
&= \gamma^2(1 - \beta^2)(\Delta x^2 - (c\Delta t)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 \\
&= \Delta(x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - (c\Delta t)^2
\end{aligned}$$

$$\therefore (\Delta S)^2 = (\Delta S')^2$$

Se puede tomar a

$$(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - (c\Delta t)^2 = (\Delta x)'^2 + (\Delta y)'^2 + (\Delta z)'^2 - (c\Delta t)'^2 \tag{3.11}$$

como la definición de la transformación de Lorentz.

3.3. Formulación covariante

Consideremos el espacio de Minkowski, un espacio continuo 4-dimensional, donde cada punto corresponde con un suceso. Sea un evento que ocurre en una posición (x, y, z) y en un momento t en cierto sistema de coordenadas. Así podemos caracterizar a cada suceso por un vector cuadridimensional

$$x^\mu = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ x \\ z \end{pmatrix} \tag{3.12}$$

En el espacio de Minkowski la norma de los vectores se define como

$$(x^\mu)^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 \tag{3.13}$$

con esta definición de norma, queda implicita la definición de la métrica

$$(x^\mu)^2 = x_\mu x^\mu = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \tag{3.14}$$

Con $\eta_{\mu\gamma}$ nombrada 'Métrica de Minkowski' y tiene la forma

$$\eta_{\mu\gamma} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = diag(1, -1, -1, -1) \tag{3.15}$$

Las propiedades geométricas del espacio-tiempo se dan por el elemento de línea

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 \tag{3.16}$$

La métrica y su inversa nos permiten subir y bajar los índices y convertir vectores covariantes en contravariantes

$$\begin{aligned} x_\mu &= \eta_{\mu\nu} x^\nu \\ x^\mu &= \eta^{\mu\nu} x_\nu \end{aligned} \tag{3.17}$$

De manera que el producto escalar se ve como

$$x_\mu y^\mu = \eta_{\mu\gamma} x^\mu y^\nu = \eta^{\mu\nu} x_\mu y_\nu = x^\mu y_\mu \tag{3.18}$$

Corriendo la suma de los índices

$$x_\mu y^\mu = x_0 y^0 + x_1 y^1 + x_2 y^2 + x_3 y^3 = x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3 \tag{3.19}$$

En la métrica $\eta_{\mu\nu}$ la componente temporal lleva signo contrario a las componentes espaciales. Como consecuencia directa que existan vectores cuya norma al cuadrado es negativa.

3.4. El grupo de Lorentz

Se le llama así al grupo de transformaciones lineales y homogéneas

$$x^\mu = \Lambda^\mu_{\ \nu} x^\nu \tag{3.20}$$

Donde Λ^{μ}_{ν} es la matriz de Lorentz, sus entradas son constantes y al ser una matriz 4x4 tiene 16 entradas; para la configuración estándar muchas de ellas se anulan :

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} a_0^0 & a_1^0 & a_2^0 & a_3^0 \\ a_0^1 & a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_0^2 & a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_0^3 & a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.21}$$

Estas transformaciones dejan a la métrica invariante

$$\eta_{\mu\nu} = \Lambda^{\rho}{}_{\mu}\Lambda^{\lambda}{}_{\nu}\eta_{\rho\lambda} \tag{3.22}$$

Así que $\eta_{\mu\gamma}$ se transforma como un tensor de rango (0,2) bajo las transformaciones de Lorentz, además se ve sencillamente que

$$(\Lambda^{-1})^{\lambda}_{\rho} = \eta_{\rho\mu}\Lambda^{\mu}_{\nu}\eta^{\nu\lambda} \tag{3.23}$$

En particular un vector covariante se transforma con la matriz inversa de un vector contravariante

$$x'_{\mu} = (\Lambda^{-1})^{\nu}{}_{\mu}x_{\nu} \tag{3.24}$$

Por lo tanto, el producto escalar de dos vectores en el espacio de Minkowski es un invariante de Lorentz

$$x'_{\mu}y'^{\mu} = x_{\rho}(\Lambda^{-1})^{\rho}{}_{\mu}\Lambda^{\mu}{}_{\nu}y^{\nu} = x_{\rho}y^{\rho} \tag{3.25}$$

No sólo se pueden considerar las transformaciones homogéneas que mantienen el origen fijo, para las transformaciones inhomogéneas tenemos

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu}x^{\nu} + a^{\mu} \tag{3.26}$$

Es decir, también se incluyen las traslaciones en el espacio y tiempo. La trayectoria de una partícula a través del espacio tiempo se llama **línea de universo** .
Se puede parametrizar la línea del universo de una partícula masiva utilizando el tiempo propio τ de la partícula: $x^{\mu} = x^{\mu}(\tau)$. El tiempo propio es el tiempo medido por un observador O moviéndose con la partícula. Del boost de Lorentz podemos obtener la relación entre el tiempo propio τ de la partícula en el marco de referencia O con el tiempo t medido por cualquier otro observador inercial O'

$$d\tau = \sqrt{1-\beta^2}dt$$

con $\beta = \dfrac{v}{c}$ y v la velocidad de la partícula respecto al observador O', en el intervalo $d\tau$

$$d\tau^2 = dt^2 - dx^1 - dx^2 - dx^3 = \eta_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} \tag{3.27}$$

El vector tangente a la curva es la cuadrivelocidad

$$\begin{aligned} u^{\mu}(\tau) &= \frac{dx^{\mu}}{d\tau} \\ &= \frac{dx^{\mu}}{dt}\frac{dt}{d\tau} \\ &= \gamma\begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.28}$$

Además el producto interno de las velocidades $u^{\mu}u_{\mu} = c^2$
La ley de adición de las velocidades se obtiene directamente del boost de Lorentz

$$u'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu}u^{\mu}$$

y la aceleración de una partícula se define como el cuadrivector

$$\begin{aligned} a^{\mu}(\tau) &= \frac{du^{\mu}}{d\tau} \\ &= \gamma \frac{du^{\mu}}{dt} \\ &= \gamma \begin{pmatrix} \frac{d\gamma}{dt} \\ \vec{v}\frac{d\gamma}{dt} + \gamma\vec{a} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \gamma^4 \vec{v}\cdot\vec{a} \\ \gamma^4(\vec{v}\cdot\vec{a} + \gamma^2\vec{a} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.29}$$

En la mecánica relativista la cuadrivelocidad u^{μ} siempre es ortogonal a la aceleración a^{μ} por lo tanto un vector espacial:

$$u_{\mu}a^{\mu} = \eta_{\mu\nu}u^{\mu}\frac{du^{\nu}}{d\tau} = \frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}(\eta_{\mu\nu}u^{\mu}u^{\nu}) = 0 \tag{3.30}$$

Con $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ es la aceleración Newtoniana. El cuadrimomento p^{μ} se define como

$$p^{\mu} = mu^{\mu} = \gamma\begin{pmatrix} mc \\ m\vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ \vec{p} \end{pmatrix} \tag{3.31}$$

Donde m es la masa de la partícula. La norma de p^{μ} es un invariante

$$p_{\mu}p^{\mu} = m^2c^2 \tag{3.32}$$

Por otro lado ya hemos visto que las ecuaciones de Maxwell ya son invariantes de Lorentz, por lo tanto ya no requieren una corrección relativista. La densidad de carga ρ y la densidad de corriente $\vec{j} = \rho\vec{v}$ forman las componentes de un cuadrivector $\vec{j}^{\mu}$ y los potenciales ϕ y $\vec{A}$ se combinan en el cuadrivector $\vec{A}$

$$\vec{j} = \begin{pmatrix} \rho \\ \vec{j} \end{pmatrix}; \quad A^{\mu} = \begin{pmatrix} \phi \\ \vec{A} \end{pmatrix} \tag{3.33}$$

Los potenciales ϕ y $\vec{A}$ dan lugar a los campos electromagnéticos $\vec{E}$ y $\vec{B}$

$$\begin{aligned} E_i &= -(\partial_t\vec{A}) - (\vec{\nabla})_i\vec{A} = -\partial^0A^i + \partial^iA^0 \\ B_i &= -\epsilon_{ijk}\partial^jA^k = -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}(\partial^jA^k - \partial^kA^j) \end{aligned} \tag{3.34}$$

El tensor electromagnético $\mathcal{F}^{\alpha\beta} = \partial^{\alpha}A^{\beta} - \partial^{\beta}A^{\alpha}$ se define como:

$$\mathcal{F}_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\mu}\mathcal{F}^{\mu\nu}\eta_{\nu\beta} = \begin{bmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.35}$$

Siendo un tensor antisimétrico y bajo transformaciones de Lorentz se ve como

$$\mathcal{F}'^{\alpha\beta} = \Lambda^{\alpha}_{\rho}\Lambda^{\beta}_{\lambda}\mathcal{F}^{\rho\lambda} \tag{3.36}$$

Los vectores j^{μ} , A^{μ} y el tensor $\mathcal{F}^{\alpha\beta}$ son los *ingredientes* necesarios para formular la teoría de maxwell en su forma covariante.

Capítulo 4

Lagrangiana de una partícula cargada en un campo electromagnético externo

En este capítulo analizaremos la formulación lagrangiana covariante para una partícula interactuando con un campo electromagnético, la formulación relativista para el potencial disipativo de Galley y se presenta la lagrangiana disipativa con duplicación de varibles.

4.1. Lagrangiana para una partícula cargada

Como se puede ver en Rafelski (2017), una partícula relativista en un campo electromagnético se puede caracterizar por un cuadrivector de Lorentz denotano por $x\mu$. Durante su evolución, la partícula sigue una linea de mundo que puede ser parametrizada por t. La lagrangiana que nos da la fuerza de Lorentz es:

$$L = -mc(\dot{x}^{\mu}\dot{x}_{\mu})^{1/2} - \frac{q}{c}\dot{x}_{\mu}A^{\mu} \tag{4.1}$$

Dónde q y m son la carga y masa de la partícula respectivamente. Para saber qué tipo de sistema representa esta lagrangiana debemos aplicar el Hessiano y calcular su determinante. Sustituyendo (4,1) en el Hessiano obtenemos

$$W_{\gamma\beta} = \frac{\partial^2 L}{\partial\dot{x}^{\gamma}\partial\dot{x}^{\beta}}$$

Derivando una vez respecto de $\dot{x}^{\beta}$ tenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\dot{x}^{\beta}}L &= -mc\frac{\partial}{\partial\dot{x}^{\beta}}(\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu}\eta_{\mu\nu})^{1/2} - \frac{q}{c}\frac{\partial}{\partial\dot{x}^{\beta}}(\dot{x}^{\nu}\eta_{\mu\nu}A^{\mu}) \\
&= -\frac{1}{2}mc(\frac{\partial\dot{x}^{\mu}}{\partial\dot{x}^{\beta}}\dot{x}^{\nu}\eta_{\mu\nu} + \dot{x}^{\mu}\eta_{\mu\nu}\frac{\partial\dot{x}^{\nu}}{\partial\dot{x}^{\beta}})\frac{1}{(\dot{x}^{\mu}\dot{x}_{\mu})^{1/2}} - \frac{q}{c}(\eta_{\mu\nu}\frac{\partial\dot{x}^{\nu}}{\partial\dot{x}^{\beta}}A^{\mu} + \dot{x}_{\mu}\frac{\partial A^{\mu}}{\partial\dot{x}^{\beta}}) \\
&= -\frac{1}{2}mc(\delta^{\mu}_{\beta}\dot{x}^{\nu}\eta_{\mu\nu} + \dot{x}^{\mu}\eta_{\mu\nu}\delta^{\nu}_{\beta})\frac{1}{(\dot{x}^{\mu}\dot{x}_{\mu})^{1/2}} - \frac{q}{c}(\eta_{\mu\nu}\delta^{\nu}_{\beta}A^{\mu}) \\
&= -\frac{1}{2}mc(2\dot{x}_{\beta})\frac{1}{(\dot{x}^{\mu}\dot{x}_{\mu})^{1/2}} - \frac{q}{c}A_{\beta} \\
&= -\frac{mc\dot{x}_{\beta}}{(\dot{x}^{\mu}\dot{x}_{\mu})^{1/2}} - \frac{q}{c}A_{\beta}
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Ahora derivamos el resultado anterior respecto de $\dot{x}^{\gamma}$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^\gamma \partial \dot{x}^\beta} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}^\gamma}(-\frac{mc\dot{x}_\beta}{(\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu)^{1/2}} - \frac{q}{c}A_\beta$$
$$= -mc\frac{\eta_{\mu\nu}\dot{x}_\beta\dot{x}_\beta - \dot{x}_\mu\dot{x}_\nu}{(\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu)^{3/2}}$$

y como son índices mudos podemos escribir a la matriz Hessiana como:

$$W_{\gamma\beta} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^\gamma \partial \dot{x}^\beta} = -mc\frac{\eta_{\mu\nu}\dot{x}^2 - \dot{x}_\mu\dot{x}_\nu}{(\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu)^{3/2}}. \tag{4.3}$$

Resta calcular el determinante de la matriz Hessiana. Corriendo los índices de 0 a 3 tenemos

$$detW_{\gamma\beta} = (mc)^4 det\begin{pmatrix} -\dot{x}^2 - \dot{x}_0\dot{x}_0 & -\dot{x}_0\dot{x}_1 & -\dot{x}_0\dot{x}_2 & -\dot{x}_0\dot{x}_3 \\ -\dot{x}_1\dot{x}_0 & \dot{x}^2 - \dot{x}_1\dot{x}_1 & -\dot{x}_1\dot{x}_2 & -\dot{x}_1\dot{x}_3 \\ -\dot{x}_2\dot{x}_0 & -\dot{x}_2\dot{x}_1 & \dot{x}^2 - \dot{x}_2\dot{x}_2 & -\dot{x}_2\dot{x}_3 \\ -\dot{x}_3\dot{x}_0 & -\dot{x}_3\dot{x}_1 & -\dot{x}_3\dot{x}_2 & \dot{x}^2 - \dot{x}_3\dot{x}_3 \end{pmatrix} \tag{4.4}$$
$$= 0$$

Por lo tanto es un sistema singular, las velocidades del sistema no son todas independientes y el rango de la Hessiana es $(4 - 1 = 3)$. Las ecuaciones de Euler -Lagrange que se derivan del lagrangiano (3) son :

$$mc\frac{d}{dt}\frac{\dot{x}_\nu}{(\dot{x}^\theta\dot{x}_\theta)^{1/2}} + \frac{q}{c}\frac{d}{dt}A_\nu - \frac{q}{c}\dot{x}_\mu\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} = 0 \tag{4.5}$$

Con los resultados anteriores construiremos la versión del lagrangiano con duplicación de variables y potencial disipativo, como la propuesta de Galley para sistemas con pérdida de energía Galley (2013)

4.2. Extensión del potencial disipativo a la mecánica relativista

El potencial disipativo relativista Bautista (2020) que se reduce al potencial disipativo de Galley es

$$K(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2) = -\frac{\Omega}{2}(q_1\dot{q}_2 - q_2\dot{q}_1) \tag{4.6}$$

Es necesario extender este potencial a la mecánica relativista, asi que el potencial relativista K' debe ser un invariante de Lorentz que se reduzca al potencial K clásico. Sea

$$K' = K(x_1^\mu, \dot{x}_1^\mu, x_2^\mu, \dot{x}_2^\mu) = -\frac{\Omega}{2}(x_1^\mu\dot{x}_{2\mu} - x_2^\mu\dot{x}_{1\mu}) \tag{4.7}$$

De donde

$$x_1^\mu = (q_1^0, q_1^1, q_1^2, q_1^3,)$$
$$\dot{x}_1^\mu = (\dot{q}_1^0, \dot{q}_1^1, \dot{q}_1^2, \dot{q}_1^3,)$$
$$x_2^\mu = (q_2^0, q_2^1, q_2^2, q_2^3,)$$
$$\dot{x}_3^\mu = (\dot{q}_2^0, \dot{q}_2^1, \dot{q}_2^2, \dot{q}_2^3,)$$

Entonces sucede que

$$x_1^\mu \dot{x}_{2\mu} - x_2^\mu \dot{x}_{1\mu} = x_1^{'\mu} \dot{x}_{2\mu}^{'} - x_2^{'\mu} \dot{x}_{1\mu}^{'} \tag{4.8}$$

Usando (3.18) y (3.20) se ve que (4.8) es un invariante de Lorentz. Por último resta probar que el potencial K' se reduce al potelcial K del caso clásico con $q_1^0 = q_2^0$ =ct

$$-\frac{\Omega}{2}(x_1^\mu \dot{x}_{2\mu} - x_2^\mu \dot{x}_{1\mu}) = -\frac{\Omega}{2}(-q_{01}\dot{q}_{20} + q_{11}\dot{q}_{21} + q_{21}\dot{q}_{22} + q_{31}\dot{q}_{23} - (-q_{02}\dot{q}_{10} + q_{12}\dot{q}_{11} + q_{21}\dot{q}_{12} + q_{31}\dot{q}_{13}))$$

Entonces podemos reescribir la ecuación anterior como

$$\begin{aligned} -\frac{\Omega}{2}(x_1^\mu \dot{x}_{2\mu} - x_2^\mu \dot{x}_{1\mu}) &= -\frac{\Omega}{2}\left((q_{11}\dot{q}_{21} + q_{21}\dot{q}_{22} + q_{31}\dot{q}_{23}) - (q_{12}\dot{q}_{11} + q_{21}\dot{q}_{12} + q_{31}\dot{q}_{13})\right) \\ &= -\frac{\Omega}{2}\left((q_{11}, q_{12}, q_{13})(\dot{q}_{11}, \dot{q}_{12}, \dot{q}_{13}) - (q_{21}, q_{22}, q_{23})(\dot{q}_{21}, \dot{q}_{22}, \dot{q}_{23})\right) \\ &= -\frac{\Omega}{2}\left(\vec{q}_1 \dot{\vec{q}}_2 - \vec{q}_2 \dot{\vec{q}}_1\right) \end{aligned} \tag{4.9}$$

Este potencial es un invariante de Lorentz además de reducirse al potencial clásico disipativo , así que este potencial es consistente con la relatividad especial.

4.3. Lagrangiana de una partícula cargada con disipación de energía

Ya hemos analizado las ecuaciones de movimiento para una partícula cargada en un campo electromagnético externo y se construyó un potencial extendido válido en la mecánica relativista y clásica. El procedimiento usado en la lagrangiana 4.1 nos da las ecuaciones correctas para la fuerza de Lorentz de la manera adecuada.
Los sistemas de múltiples partículas incluyen nuevas complicaciones para la formulación Currie et al. (1963), la más evidente recae en encontrar un parámetro invariante que describa la evolución del sistema. Por si sólo esto ya es un problema en la relatividad especial.
Para esto utilizaremos la invariancia bajo reparametrizaciones en el tiempo para fijar la norma, así cualquier cuadrivector podrá escribirse $x^\mu(t) = (x^0(t), \vec{x}(t))$ con t como el parámetro de la trayectoria; por lo tanto $x'^\mu(t') = x^\mu(t)$ y la componente temporal $x'^0(t') = x^0(t) = ct$ este tiempo puede fijarse como el tiempo del observador. Al sustituir (4.1) y al potencial disipativo (4.6) en la formulación de Galley 2.3 se propone la duplicación de las variables de la Lagrangiana y la adición del potencial disipativo.

$$L = -mc(\dot{x}_1^\mu \dot{x}_{1\mu})^{1/2} + mc(\dot{x}_2^\mu \dot{x}_{2\mu})^{1/2} - \frac{q}{c}(\dot{x}_{1\mu}A^\mu(x_1) - \dot{x}_{2\mu}A^\mu(x_2)) - \frac{\Omega}{2}(x_1^\mu \dot{x}_{2\mu} - x_2^\mu \dot{x}_{1\mu}) \tag{4.10}$$

A diferencia de la lagrangiana conservativa (4.1) la ecuación anterior inlcluye un potencial disipativo . Esta lagrangiana cumple con la invariancia de Lorentz e invariancia bajo reparametrizaciones del tiempo. La manera de determinar si este es un sistema singular, o no, se da sí el Hessiano es cero:

$$det\begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial \dot{q}_1^2}(L_1 + K) & \frac{\partial^2 K}{\partial \dot{q}_1 \partial \dot{q}_2} \\ \frac{\partial^2 K}{\partial \dot{q}_2 \partial \dot{q}_1} & \frac{\partial^2}{\partial \dot{q}_2^2}(L_2 - K) \end{pmatrix} = 0 \tag{4.11}$$

Cálculando por separado las entradas de esta matriz Usando la formulación de Galley, reconocemos a

$$L_1 = -mc(\dot{x}_1^{\mu}\dot{x}_{1\mu})^{1/2} - \frac{q}{c}(\dot{x}_{1\mu}A^{\mu}(x_1)) \tag{4.12}$$

$$L_2 = -mc(\dot{x}_2^{\mu}\dot{x}_{2\mu})^{1/2} - \frac{q}{c}\dot{x}_{2\mu}A^{\mu}(x_2) \tag{4.13}$$

$$K = -\frac{\Omega}{2}(x_1^{\mu}\dot{x}_{2\mu} - x_2^{\mu}\dot{x}_{1\mu}) \tag{4.14}$$

Para determinar si este sistema es singular calcularemos su Hessiano (4.11) entrada por entrada; para la primera tenemos

$$\frac{\partial^2}{\partial\dot{x}_1^{\gamma}\partial\dot{x}_1^{\beta}}(L_1+K) = \frac{\partial}{\partial\dot{x}_1^{\gamma}}\left(\frac{\partial(L_1+K)}{\partial\dot{x}_1^{\beta}}\right) = \frac{\partial}{\partial\dot{x}_1^{\gamma}}\left(mc\frac{\partial}{\partial\dot{x}_1^{\beta}}(\dot{x}_1^{\mu}\dot{x}_1^{\nu}\eta_{\mu\nu})^{1/2} - \frac{q}{c}\frac{\partial}{\partial\dot{x}_1^{\beta}}(\dot{x}_{1\mu}A(x_2)^{\mu}) - \frac{\Omega}{2}\frac{\partial}{\partial\dot{x}_1^{\beta}}(x_1^{\mu}\dot{x}_{2\mu} - x_2^{\mu}\dot{x}_{1\mu})\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial\dot{x}_1^{\gamma}}\left(-\frac{1}{2}mc(\delta_{\beta}^{\mu}\dot{x}_1^{\nu}\eta_{\mu\nu} + \dot{x}_1^{\mu}\eta_{\mu\nu}\delta_{\beta}^{\nu})\frac{1}{(\dot{x}_1^{\mu}\dot{x}_{1\mu})^{1/2}} - \frac{q}{c}\eta_{\mu\nu}\delta_{\beta}^{\nu}A(x_1)^{\mu} + \frac{\Omega}{2}\eta_{\mu\nu}x_2^{\mu}\delta_{\beta}^{\nu}\right)$$
$$= \frac{\partial}{\partial\dot{x}_1^{\gamma}}\left(-\frac{1}{2}2mc\frac{\dot{x}_{1\beta}}{(\dot{x}_1^{\mu}\dot{x}_1\mu)^{1/2}} - \frac{q}{c}A_{1\beta} + \frac{\Omega}{2}x_{2\beta}\right)$$
$$=\text{-mc }\frac{\eta_{\mu\nu}\dot{x}_{1\beta}\dot{x}_{1\gamma} + \dot{x}_{1\mu}\dot{x}_{1\nu}}{(\dot{x}_1^{\mu}\dot{x}_{1\mu})^{3/2}}$$

(4.15)

Para la última entrada de la matriz Hessiana (4.11) sucede que:

$$\frac{\partial^2}{\partial\dot{x}_2^{\gamma}\partial\dot{x}_2^{\beta}}(L_2 - K) = \frac{\partial}{\partial\dot{x}_2^{\gamma}}\left(\frac{\partial(L_2 - K)}{\partial\dot{x}_1^{\beta}}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial\dot{x}_2^{\gamma}}\left(mc\frac{\partial}{\partial\dot{x}_2^{\beta}}(\dot{x}_1^{\mu}\dot{x}_2^{\nu}\eta_{\mu\nu})^{1/2} - \frac{q}{c}\frac{\partial}{\partial\dot{x}_2^{\beta}}(\dot{x}_{2\mu}A(x_2)^{\mu}) - \frac{\Omega}{2}\frac{\partial}{\partial\dot{x}_2^{\beta}}(x_1^{\mu}\dot{x}_{2\mu} - x_2^{\mu}\dot{x}_{1\mu})\right)$$
$$= \frac{\partial}{\partial\dot{x}_2^{\gamma}}\left(-\frac{1}{2}mc\left(\frac{\partial\dot{x}_1^{\mu}}{\partial\dot{x}_2^{\beta}}\dot{x}_2^{\nu}\eta_{\mu\nu} + \dot{x}_2^{\mu}\eta_{\mu\nu})\frac{\partial\dot{x}_2^{\nu}}{\partial\dot{x}_2^{\beta}}\right)\frac{1}{(\dot{x}_2^{\mu}\dot{x}_{2\mu})^{1/2}} - \frac{q}{c}\left(\frac{\partial\dot{x}_{2\mu}}{\partial\dot{x}_2^{\beta}}A(x_2)^{\mu} + \dot{x}_{2\mu}\frac{\partial A(x_2)^{\mu}}{\partial\dot{x}_2^{\beta}}\right) + \frac{\Omega}{2}\eta_{\mu\nu}x_1^{\mu}\frac{\partial\dot{x}_2^{\nu}}{\partial\dot{x}_2^{\beta}}\right)$$
$$= \frac{\partial}{\partial\dot{x}_2^{\gamma}}\left(-\frac{1}{2}mc(\delta_{\beta}^{\mu}\dot{x}_2^{\nu}\eta_{\mu\nu} + \dot{x}_2^{\mu}\eta_{\mu\nu}\delta_{\beta}^{\nu})\frac{1}{(\dot{x}_2^{\mu}\dot{x}_{2\mu})^{1/2}} - \frac{q}{c}\eta_{\mu\nu}\delta_{\beta}^{\nu}A(x_2)^{\mu} + \frac{\Omega}{2}\eta_{\mu\nu}x_1^{\mu}\delta_{\beta}^{\nu}\right)$$
$$= \frac{\partial}{\partial\dot{x}_2^{\gamma}}\left(-\frac{1}{2}2mc\frac{\dot{x}_{2\beta}}{(\dot{x}_2^{\mu}\dot{x}_2\mu)^{1/2}} - \frac{q}{c}A_{2\beta} + \frac{\Omega}{2}x_{1\beta}\right)$$
$$= -mc\frac{\eta_{\mu\nu}\dot{x}_{2\beta}\dot{x}_{2\gamma} - \dot{x}_{2\mu}\dot{x}_{2\nu}}{(\dot{x}_2^{\mu}\dot{x}_{2\mu})^{3/2}}$$

(4.16)

y por último notemos que las entradas restantes tienen el mismo valor

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 K}{\partial \dot{x}^(x_1)\partial \dot{x}_2^\gamma} &= \frac{\partial^2 K}{\partial \dot{x}^(x_2)\partial \dot{x}_1^\beta} \\
&= \frac{\partial}{\partial \dot{x}_1^\gamma}\left(-\frac{\Omega}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{x}_2^\beta}(x_1^\mu \dot{x}_{2\mu} - x_2^\mu \dot{x}_{1\mu})\right) \\
&= -\frac{\Omega}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{x}_1^\gamma}(\eta_{\mu\gamma} x_1^\mu \delta_\beta^\gamma) = 0
\end{aligned} \tag{4.17}$$

y sustituyendo los resultados de (4.3), (4.3), (4.17) en 4.11 obtenemos una matriz 8×8, y su determinante viene dado por:

$$det\begin{pmatrix} \frac{-mc}{(\dot{x}_1^2)^{3/2}}(\eta_{\mu\nu}\dot{x}_1^2 - \dot{x}_{1\mu}\dot{x}_{1\nu}) & 0 \\ 0 & \frac{-mc}{(\dot{x}_2^2)^{3/2}}(\eta_{\mu\nu}\dot{x}_2^2 - \dot{x}_{2\mu}\dot{x}_{2\nu}) \end{pmatrix} = 0 \tag{4.18}$$

Al hacer correr los índices del 0 a 3 y calcular el determinante el resultado es cero, por lo que hay velocidades dependientes unas de las otras, por lo que esta matriz pertenece a un sistema singular.

Capítulo 5

Sistemas con invariancia bajo reparametrizaciones del tiempo

Los sistemas relativistas se caracterizan por tener una acción invariante bajo reparametrizaciones del tiempo, entonces dada

$$\int L(q_i(t), \dot{q}_i(t))dt \tag{5.1}$$

La acción de un sistema relativista arbitrario y sea $t' = t'(t)$ una función invertible y monótona con $dt' = |\frac{dt'}{dt}|dt$

$$\Lambda' = \int L(q_i'(t'), \dot{q}_i'(t')dt' = \int L(q_i(t), \dot{q}_i(t)dt = \Lambda \tag{5.2}$$

Conocida como reparametrizaciones generales del tiempo. La función $q_i(t)$ tiene la propiedad de comportarse como una función escalar ya que $q_i'(t') = q_i(t)$, por lo tanto:

$$\dot{q}_i'(t') = \frac{d}{dt'}q'(t') = \frac{dt}{dt'}\frac{d}{dt}q(t) = \frac{dt}{dt'}\frac{dq(t)}{dt} = \frac{dt}{dt'}\dot{q}_i(t)$$

Se define $e(t)$ como un grado de libertad auxiliar cumpliendo que $t \to t'$ ⇒e'(t')= $\frac{dt}{dt'}e(t)$

$$\Rightarrow e^{-1}(t)\dot{q}_i(t) \to e'^{-1}(t')\dot{q}_i'(t') = \frac{dt'}{dt}e^{-1}(t)\frac{dt}{dt'}\dot{q}_i(t) = e^{-1}(t)\dot{q}_i(t)$$

Por lo tanto $e^{-1}(t)\dot{q}_i(t) = e'^{-1}(t')\dot{q}_i'(t')$ bajo la reparametrización $t \to t'$ Este grado de libertad auxiliar se puede eliminar con una transformación adecuada donde $\frac{dt}{dt'} = e^{-1}$ recuperando la expresión original.

5.1. La acción invariante bajo reparametrizaciones del tiempo

Sea $L(q_i(t), \dot{q}_i(t))$ una lagrangiana arbitraria con $q_i(t)$ una función escalar. Su acción es simplemente

$$\Lambda = \int L(q_i(t), \dot{q}_i(t))dt \tag{5.3}$$

y bajo reparametrizaciones del tiempo $t \to t'$ tenemos

$$\Lambda' = \int L(q_i'(t'), \dot{q}_i'(t'))dt' = \int L(q_i(t), \frac{dt}{dt'}\dot{q}_i(t))\frac{dt'}{dt}dt \neq \int L(q_i(t), \dot{q}_i(t))dt \tag{5.4}$$

Por lo que esta acción no es invariante bajo reparametrizaciones del tiempo. Una manera de volverla invarinte es considerando a $L(q_i(t), \dot{q}_i(t))$ lineal en las velocidades $\dot{q}_i$, este caso es muy particular debido a que la mayoria de sistemas físicos contienen los términos de la velocidad al cuadrado fallando en la invariancia del sistema. Para una accción invariante, sea :

$$e(t)dt \to e(t')dt' = \frac{dt}{dt'}e(t)\frac{dt'}{dt}dt = e(t)dt$$

Por lo que $e(t)dt$ también es un invariante escalar. La acción $\Lambda = \int e(t)L(q_i(t), e^{-1}\dot{q}_i(t))dt$ se comporta como invariante bajo reparametrizaciones generales del tiempo, ya que:

$$\begin{aligned}
\Lambda' &= \int e'(t')L(q_i'(t'), e'^{-1}\dot{q}_i'(t'))dt' \\
&= \int \frac{dt}{dt'}e(t)L(q_i(t), \frac{dt'}{dt}e^{-1}\frac{dt}{dt'}\dot{q}_i(t))\frac{dt'}{dt}dt \\
&= \int e(t)L(q_i(t), e^{-1}(t)\dot{q}_i(t))dt
\end{aligned}$$

Entonces podemos tomar como lagrangiana a la cantidad que hace a su acción invariante.

$$\mathcal{L}. = e(t)L(q_i(t), (e)^{-1}(t)\dot{q}_i(t)) \tag{5.5}$$

5.2. Sistemas con pérdida de energía

Utilizando el método usual de Galley visto en secciones pasadas podemos construir la lagrangiana para sistemas disipativos al duplicar los grados de libertad, la función e no tiene dinámica propia, al no aparecer derivadas de esa coordenada, de la lagrangiana de Galley:

$$L = L(q_{1i}, \dot{q}_{1i}) - L(q_{2i}, \dot{q}_{2i}) + K(q_{1i}, q_{2i}, \dot{q}_{1i}, \dot{q}_{2i}) \tag{5.6}$$

aplicándole la ecuación (5.5) :

$$\mathcal{L} = eL(q_{1i}, e^{-1}\dot{q}_{1i}) - eL(q_{2i}, e^{-1}\dot{q}_{2i}) + eK(q_{1i}, q_{2i}, e^{-1}\dot{q}_{1i}, e^{-1}\dot{q}_{2i}) \tag{5.7}$$

La lagrangiana con reparametrizaciones del tiempo Utilizando la lagrangiana (4.10 y separando las masas m_1 y m_2 de cada sistema :

$$L = -cm_1(\dot{x}_1^{\mu}\dot{x}_{1\mu})^{1/2} + cm_2(\dot{x}_2^{\mu}\dot{x}_{2\mu})^{1/2} - \frac{q}{c}(\dot{x}_{1\mu}A_1^{\mu}) + \frac{q}{c}\dot{x}_{2\mu}A_2^{\mu}) - \frac{\Omega}{2}((x_1^{\mu}\dot{x}_{2\mu} - x_2^{\mu}\dot{x}_{1\mu}) \tag{5.8}$$

De acuerdo a la sección (5.1) la lagrangiana (4.10) se ve como

$$L = -\frac{1}{2}e^{-2}\dot{x}_1^2 - \frac{cm_1^2}{2} + \frac{1}{2}e^{-2}\dot{x}_2^2 + \frac{cm_2^2}{2} - \frac{q}{c}e^{-1}(\dot{x}_{1\mu}A_1^{\mu}) + \frac{q}{c}e^{-1}\dot{x}_{2\mu}A_2^{\mu}) - \frac{\Omega}{2}e^{-1}((x_1^{\mu}\dot{x}_{2\mu} - x_2^{\mu}\dot{x}_{1\mu}) \tag{5.9}$$

y multiplicando por $e(t)$ la acción correspondiente se vuelve invariante de Lorentz.

$$\Rightarrow L' = eL = -\frac{e^{-1}}{2}\dot{x}_1^2 - \frac{ecm_1^2}{2} + \frac{1}{2}e^{-1}\dot{x}_2^2 - \frac{ecm_2^2}{2} - \frac{q}{c}\dot{x}_{1\mu}A_1^{\mu} + \frac{q}{c}\dot{x}_{2\mu}A_2^{\mu} - \frac{\Omega}{2}(x_1^{\mu}\dot{x}_{2\mu} - x_2^{\mu}\dot{x}_{1\mu}) \tag{5.10}$$

de donde se obtienen las siguientes ecuaciones de movimiento:

$$\begin{aligned} e : \frac{d}{dt}(\frac{\partial L'}{\partial}) - \frac{\partial L'}{\partial e} = 0 \\ \Rightarrow e^{-1} = \frac{(m_2^2 - m_1^2)^{1/2}}{(\dot{x}_2^2 - \dot{x}_1^2)^{1/2}} \end{aligned} \tag{5.11}$$

$$\begin{aligned} x_1^\mu : \frac{d}{dt}(\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_1^\theta}) - \frac{\partial L'}{\partial x_1^\theta} = 0 \\ \Rightarrow m_1 e^{-1}\frac{d}{dt}\dot{x}_{1\theta} = -\frac{q}{c}e^{-1}\dot{x}_1^\mu \mathcal{F}_{1\mu\theta} + \Omega \dot{x}_{2\theta} \end{aligned} \tag{5.12}$$

$$\begin{aligned} x_2^\mu : \frac{d}{dt}(\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_2^\theta}) - \frac{\partial L'}{\partial x_2^\theta} = 0 \\ \Rightarrow m_2 e^{-1}\frac{d}{dt}\dot{x}_{2\theta} = -\frac{q}{c}e^{-1}\dot{x}_2^\mu \mathcal{F}_{2\mu\theta} + \Omega \dot{x}_{1\theta} \end{aligned} \tag{5.13}$$

5.3. Hamiltoniano para sistemas disipativos

La mecánica relativista descrita en términos de la cuadriposición x^μ y cuadrivelocidad $\dot{x}^\mu$ está sujeta a la constricción $u^\mu u_\mu = c^2 = const$, así no todas las componentes de la cuadrivelocidad serán variables dinámicas independientes. En contraparte, la formulación Hamiltoniana covariante emplea al cuadrimomento p^μ como variable dinámica.
En la mecánica clásica la formulación Hamiltoniana para sistemas disipativos desarrollada por Galley-Tsang Galley et al. (2014) y Bateman Bateman (1931). Esta formulación difiere del caso clásico de la misma manera que la formulación lagrangiana disipativa con duplicación de variables y adición del termino disipativo al lagrangiano conservativo Jackson (1999) es L(q,q̇);
En la formulación clásica el momento canónico P y el Hamiltoniano de la energía H son

$$P = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$$

y

$$H = \dot{q}P - L(q, \dot{q})$$

Así, para el lagrangiano no conservativo en consistencia con el sector conservativo (Martínez-Pérez and Ramírez (2018))

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_1}\left[L(q_1, \dot{q}_1) + K(q_1, \dot{q}_1, q_2.\dot{q}_2)\right] \\ P_2 &= -\frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}_2} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_2}\left[L(q_2, \dot{q}_2) - K(q_1, \dot{q}_1, q_2.\dot{q}_2)\right] \end{aligned} \tag{5.14}$$

Su Hamiltoniano será

$$H = \dot{q}_1 p_1 - \dot{q}_2 p_2 - L(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2)$$

Para nuestra formulación tenemos que

$$\begin{aligned} L_1(x_1^\mu, \dot{x}_1^\mu) &= -mc(\dot{x}_1^\mu \dot{x}_{1\mu})^{1/2} - \frac{q}{c}(\dot{x}_{1\mu}A^\mu(x_1)) \\ L_2(x_2^\mu, \dot{x}_2^\mu) &= -mc(\dot{x}_2^\mu \dot{x}_{2\mu})^{1/2} - \frac{q}{c}(\dot{x}_{2\mu}A^\mu(x_2)) \\ K(x_1^\mu, \dot{x}_1^\mu, x_2^\mu, \dot{x}_2^\mu) &= -\frac{\Omega}{2}(x_1^\mu \dot{x}_{2\mu} - x_2^\mu \dot{x}_{1\mu}) \end{aligned} \tag{5.15}$$

Ahora calcularemos los momentos conjugados P_1^μ, P_2^μ utilizando las definiciones (5.14)

$$
\begin{aligned}
P_{1\mu} &= \frac{\partial(L_1 + K)}{\partial \dot{x}_1^\beta} \\
&= \left(-mc\frac{\partial}{\partial \dot{x}_1^\beta}(\dot{x}_1^\mu \dot{x}_1^\nu \eta_{\mu\gamma})^{1/2} - \frac{q}{c}\frac{\partial}{\partial \dot{x}_1^\beta}(\dot{x}_{1\mu}A(x_1)^\mu) - \frac{\Omega}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{x}_1^\beta}(x_1^\mu \dot{x}_{2\mu} - x_2^\mu \dot{x}_{1\mu})\right) \\
&= \left(-\frac{1}{2}mc\left(\frac{\partial \dot{x}_1^\mu}{\partial \dot{x}_1^\beta}\dot{x}_1^\nu \eta_{\mu\gamma} + \dot{x}_1^\mu \eta_{\mu\gamma}\frac{\partial \dot{x}_1^\nu}{\partial \dot{x}_1^\beta}\right)(\dot{x}_1^\mu \dot{x}_1^\nu \eta_{\mu\gamma})^{-1/2} - \frac{q}{c}\left(\frac{\partial \dot{x}_{1\mu}}{\partial \dot{x}_1^\beta}A(x_1)^\mu + \dot{x}_{1\mu}\frac{\partial A(x_1)^\mu}{\partial \dot{x}_1^\beta}\right) + \frac{\Omega}{2}\eta_{\mu\gamma}x_2^\mu \frac{\partial \dot{x}_1^\nu}{\partial \dot{x}_1^\beta}\right) \\
&= \left(-\frac{1}{2}mc(\delta_\beta^\mu \dot{x}_1^\nu \eta_{\mu\gamma} + \dot{x}_1^\mu \eta_{\mu\gamma}\delta_\beta^\nu)(\dot{x}_1^\mu \dot{x}_1^\nu \eta_{\mu\gamma})^{-1/2} - \frac{q}{c}\eta_{\mu\gamma}\delta_\beta^\nu A(x_1)^\mu + \frac{\Omega}{2}\eta_{\mu\gamma}x_2^\mu \delta_\beta^\nu\right) \\
&= \left(-\frac{1}{2}mc(2\dot{x}_{1\beta)}(\dot{x}_1^\mu \dot{x}_1^\nu \eta_{\mu\gamma})^{-1/2} - \frac{q}{c}A_{1\beta} + \frac{\Omega}{2}x_{2\beta}\right) \\
&= \frac{mc}{(\dot{x}_1^\mu \dot{x}_{1\nu})^{-1/2}}\dot{x}_{1\beta} - \frac{q}{c}A_{1\beta} + \frac{\Omega}{2}x_{2\beta}
\end{aligned}
\tag{5.16}
$$

para el momento conjugado P_2 tenemos

$$
\begin{aligned}
P_{2\mu} &= \frac{\partial(L_1 + K)}{\partial \dot{x}_2^\beta} \\
&= \left(-mc\frac{\partial}{\partial \dot{x}_2^\beta}(\dot{x}_2^\mu \dot{x}_2^\nu \eta_{\mu\gamma})^{1/2} - \frac{q}{c}\frac{\partial}{\partial \dot{x}_2^\beta}(\dot{x}_{2\mu}A(x_2)^\mu) - \frac{\Omega}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{x}_2^\beta}(x_1^\mu \dot{x}_{2\mu} - x_2^\mu \dot{x}_{1\mu})\right) \\
&= \left(-\frac{1}{2}mc\left(\frac{\partial \dot{x}_2^\mu}{\partial \dot{x}_2^\beta}\dot{x}_2^\nu \eta_{\mu\gamma} + \dot{x}_2^\mu \eta_{\mu\gamma}\frac{\partial \dot{x}_2^\nu}{\partial \dot{x}_2^\beta}\right)(\dot{x}_2^\mu \dot{x}_2^\nu \eta_{\mu\gamma})^{-1/2} - \frac{q}{c}\left(\frac{\partial \dot{x}_{2\mu}}{\partial \dot{x}_2^\beta}A(x_2)^\mu + \dot{x}_{2\mu}\frac{\partial A(x_2)^\mu}{\partial \dot{x}_2^\beta}\right) + \frac{\Omega}{2}\eta_{\mu\gamma}x_1^\mu \frac{\partial \dot{x}_2^\nu}{\partial \dot{x}_1^\beta}\right) \\
&= \left(-\frac{1}{2}mc(\delta_\beta^\mu \dot{x}_2^\nu \eta_{\mu\gamma} + \dot{x}_2^\mu \eta_{\mu\gamma}\delta_\beta^\nu)(\dot{x}_2^\mu \dot{x}_2^\nu \eta_{\mu\gamma})^{-1/2} - \frac{q}{c}\eta_{\mu\gamma}\delta_\beta^\nu A(x_2)^\mu + \frac{\Omega}{2}\eta_{\mu\gamma}x_1^\mu \delta_\beta^\nu\right) \\
&= \left(-\frac{1}{2}mc(2\dot{x}_{2\beta)}(\dot{x}_2^\mu \dot{x}_2^\nu \eta_{\mu\gamma})^{-1/2} - \frac{q}{c}A_{2\beta} + \frac{\Omega}{2}x_{1\beta}\right) \\
&= -\frac{mc}{(\dot{x}_2^\mu \dot{x}_{2\nu})^{-1/2}}\dot{x}_{2\beta} - \frac{q}{c}A_{2\beta} + \frac{\Omega}{2}x_{1\beta}
\end{aligned}
\tag{5.17}
$$

De acuerdo con Martínez-Pérez and Ramírez (2018) usando el resultado para los momentos conjugados (5.16) y (5.17) se obtine el Hamiltoniano para el sistema disipativo

$$
\begin{aligned}
H &= \dot{x}_1^\mu p_1^\mu - \dot{x}_2^\mu p_2^\mu - \left[-mc((\dot{x}_1^\mu \dot{x}_{1\mu})^{1/2} - (\dot{x}_2^\mu \dot{x}_{2\mu})^{1/2}) - \frac{q}{c}(\dot{x}_{1\mu}A^\mu(x_1) - \dot{x}_{2\mu}A^\mu(x_2)) - \frac{\Omega}{2}(x_1^\mu \dot{x}_{2\mu} - x_2^\mu \dot{x}_{1\mu})\right] \\
&= \dot{x}_1^\mu\left(-\frac{mc}{(\dot{x}_1^\mu \dot{x}_{1\mu})^{1/2}}\dot{x}_{1\mu} - \frac{q}{c}A_{1\mu} + \frac{\Omega}{2}x_{2\mu}\right) - \dot{x}_2^\mu\left(-\frac{mc}{(\dot{x}_2^\mu \dot{x}_{2\mu})^{1/2}}\dot{x}_{2\mu} - \frac{q}{c}A_{2\mu} + \frac{\Omega}{2}x_{1\mu}\right) \\
&+ mc((\dot{x}_1^\mu \dot{x}_{1\mu})^{1/2} - (\dot{x}_2^\mu \dot{x}_{2\mu})^{1/2}) + \frac{q}{c}(\dot{x}_{1\mu}A^\mu(x_1) - \dot{x}_{2\mu}A^\mu(x_2)) + \frac{\Omega}{2}(x_1^\mu \dot{x}_{2\mu} - x_2^\mu \dot{x}_{1\mu}) \\
&= -mc(\dot{x}_1^\mu \dot{x}_{1\mu})^{1/2} - \frac{q}{c}\dot{x}_1^\mu A_{1\mu} + \frac{\Omega}{2}\dot{x}_1^\mu x_{2\mu} + mc(\dot{x}_2^\mu \dot{x}_{2\mu})^{1/2} + \frac{q}{c}\dot{x}_2^\mu A_{2\mu} - \frac{\Omega}{2}\dot{x}_2^\mu x_{1\mu} \\
&+ mc(\dot{x}_1^\mu \dot{x}_{1\mu})^{1/2} - mc(\dot{x}_2^\mu \dot{x}_{2\mu})^{1/2} + \frac{q}{c}\dot{x}_{1\mu}A^\mu(x_1) - \frac{q}{c}\dot{x}_{2\mu}A^\mu(x_2) + \frac{\Omega}{2}x_1^\mu \dot{x}_{2\mu} - \frac{\Omega}{2}x_2^\mu \dot{x}_{1\mu} = 0
\end{aligned}
\tag{5.18}
$$

Esta formulación tiene problemas con este sistema ya que nos conduce a un hamiltonenano nulo $H \equiv 0$, es un escalar de Lorentz, y no una función de la energía, por lo que difiere de la formulación no relativista.

Capítulo 6

Ecuaciones de movimiento para la partícula relativista con disipación

En este capítulo se obtienen las ecuaciones de movimiento para la partícula relativista disipativa a través del principio variacional de Hamilton, se obtienen las condiciones para las soluciones de las ecuaciones utilizando las simetrías internas del sistema, las ecuaciones de movimiento utilizando el tiempo propio de cada sistema y las ecuaciones de movimiento utilizando los productos invariantes para los cuadrimomentos.

6.1. Variando la acción

Para obtener las ecuaciones de movimiento variaremos la acción, esto es, realizar la variación de la integral del Lagrangiano (4.10). Para esto se fija la norma de la invariancia con el parámetro de evolución como el tiempo del observador t.

$$\delta\Lambda = \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt =$$
$$\int_{t_1}^{t_2} dt \left(-mc(\delta(\dot{x}_1^{\mu}\dot{x}_{1\mu})^{1/2} - \delta(\dot{x}_2^{\mu}\dot{x}_{2\mu})^{1/2}) - \frac{q}{c}(\delta(\dot{x}_{1\mu}A^{\mu}(x_1)) - \delta(\dot{x}_{2\mu}A^{\mu}(x_2))) - \frac{\Omega}{2}(\delta(x_1^{\mu}\dot{x}_{2\mu}) - \delta(x_2^{\mu}\dot{x}_{1\mu})) \right)$$

Primero realizaremos el cálculo de las variaciones anteriores y posteriormente resolveremos las integrales, operando por separado

$$\begin{aligned}
\delta(\dot{x}_1^{\mu}\dot{x}_1^{\nu}\eta_{\mu\gamma})^{1/2} &= \frac{1}{2(\dot{x}_1^{\mu}\dot{x}_1^{\nu}\eta_{\mu\nu})^{1/2}}(\delta\dot{x}_1^{\mu}\dot{x}_1^{\nu}\eta_{\mu\gamma} + \dot{x}_1^{\mu}\delta\dot{x}_1^{\nu}\eta_{\mu\gamma}) \\
&= (\delta\frac{dx_1^{\mu}}{dt}\dot{x}_1^{\nu}\eta_{\mu\gamma} + \dot{x}_1^{\mu}\delta\frac{dx_1^{\nu}}{dt}\eta_{\mu\gamma})\frac{1}{2(\dot{x}_1^{\mu}\dot{x}_1^{\nu}\eta_{\mu\nu})^{1/2}} \\
&= (\delta\frac{dx_1^{\mu}}{dt}\dot{x}_{1\mu} + \dot{x}_{1\nu}\delta\frac{dx_1^{\nu}}{dt})\frac{1}{2(\dot{x}_1^{\mu}\dot{x}_1^{\gamma}\eta_{\mu\nu})^{1/2}} \\
&= (2\dot{x}_{1\mu}\delta\frac{dx_1^{\mu}}{dt})\frac{1}{2(\dot{x}_1^{\mu}\dot{x}_1^{\gamma}\eta_{\mu\nu})^{1/2}} \\
&= \left(\frac{d}{dt}((\dot{x}_1^{\mu}\dot{x}_1^{\nu}\eta_{\mu\nu)})^{-1/2}\dot{x}_{1\mu}\delta x_1^{\mu}) - \frac{d}{dt}((\dot{x}_1^{\mu}\dot{x}_1^{\nu}\eta_{\mu\nu)})^{-1/2}\dot{x}_{1\mu})\delta x_1^{\mu}\right)
\end{aligned} \tag{6.1}$$

y para L_2

$$\begin{aligned}
\delta(\dot{x}_2^{\mu}\dot{x}_2^{\nu}\eta_{\mu\gamma})^{1/2} &= \frac{1}{2(\dot{x}_2^{\mu}\dot{x}_2^{\nu}\eta_{\mu\nu})^{1/2}}(\delta\dot{x}_2^{\mu}\dot{x}_2^{\nu}\eta_{\mu\gamma} + \dot{x}_2^{\mu}\delta\dot{x}_2^{\nu}\eta_{\mu\gamma}) \\
&= (\delta\frac{dx_2^{\mu}}{dt}\dot{x}_2^{\nu}\eta_{\mu\gamma} + \dot{x}_1^{\mu}\delta\frac{dx_2^{\nu}}{dt}\eta_{\mu\gamma})\frac{1}{2(\dot{x}_2^{\mu}\dot{x}_2^{\nu}\eta_{\mu\nu})1/2} \\
&= (\delta\frac{dx_2^{\mu}}{dt}\dot{x}_{2\mu} + \dot{x}_{2\nu}\delta\frac{dx_2^{\nu}}{dt})\frac{1}{2(\dot{x}_2^{\mu}\dot{x}_2^{\nu}\eta_{\mu\nu})^{1/2}} \\
&= (2\dot{x}_{2\mu}\delta\frac{dx_2^{\mu}}{dt})\frac{1}{2(\dot{x}_2^{\mu}\dot{x}_2^{\nu}\eta_{\mu\nu})^{1/2}} \\
&= \left(\frac{d}{dt}((\dot{x}_2^{\mu}\dot{x}_2^{\nu}\eta_{\mu\nu}))^{-1/2}\dot{x}_{2\mu}\delta x_2^{\mu}) - \frac{d}{dt}((\dot{x}_2^{\mu}\dot{x}_2^{\nu}\eta_{\mu\nu}))^{-1/2}\dot{x}_{2\mu})\delta x_2^{\mu}\right)
\end{aligned} \tag{6.2}$$

Ahora para el tercer término

$$\begin{aligned}
\delta(\dot{x}_{1\mu}A^{\mu}(x_1)) &= \delta\dot{x}_{1\mu}A^{\mu}(x_1) + \dot{x}_{1\mu}\delta A^{\mu}(x_1) \\
&= \frac{d\delta x_1^{\nu}}{dt}\eta_{\mu\gamma}A^{\mu}(x_1) + \dot{x}_{1\mu}\frac{\partial A^{\mu}(x_1)}{\partial x_1^{\nu}}\delta x_1^{\nu} \\
&= \frac{d}{dt}\left(\eta_{\mu\gamma}A^{\mu}(x_1)\delta x_1^{\nu}\right) - \frac{d}{dt}\left(\eta_{\mu\gamma}A^{\mu}(x_1)\right)\delta x_1^{\nu} + \dot{x}_{1\mu}\frac{\partial A^{\mu}(x_1)}{\partial x_1^{\nu}}\delta x_1^{\nu}
\end{aligned} \tag{6.3}$$

y para la partícula 2

$$\begin{aligned}
\delta(\dot{x}_{2\mu}A^{\mu}(x_2)) &= \delta\dot{x}_{2\mu}A^{\mu}(x_2) + \dot{x}_{2\mu}\delta A^{\mu}(x_2) \\
&= \frac{d\delta x_2^{\nu}}{dt}\eta_{\mu\gamma}A^{\mu}(x_2) + \dot{x}_{2\mu}\frac{\partial A^{\mu}(x_2)}{\partial x_2\nu}\delta x_2^{\nu} \\
&= \frac{d}{dt}\left(\eta_{\mu\gamma}A^{\mu}(x_2)\delta x_2^{\nu}\right) - \frac{d}{dt}\left(\eta_{\mu\gamma}A^{\mu}(x_2)\right)\delta x_2^{\nu} + \dot{x}_{2\mu}\frac{\partial A^{\mu}(x_2)}{\partial x_2^{\nu}}\delta x_2^{\nu}
\end{aligned} \tag{6.4}$$

Finalmente para la parte del potencial disipativo

$$\begin{aligned}
\delta(x_1^{\mu}\dot{x}_{2\mu}) &= \delta x_1^{\mu}\dot{x}_2^{\nu}\eta_{\mu\gamma} + x_1^{\mu}\delta\dot{x}_2^{\nu}\eta_{\mu\gamma} \\
&= \dot{x}_2^{\nu}\eta_{\mu\gamma}\delta x_1^{\mu} + x_1^{\mu}\eta_{\mu\gamma}\frac{d\delta x_2^{\nu}}{dt} \\
&= \dot{x}_{2\nu}\delta x_1^{\mu} + \frac{d}{dt}(x_1^{\mu}\eta_{\mu\gamma}\delta x_2^{\nu}) - \frac{d}{dt}(x_1^{\mu}\eta_{\mu\gamma})\delta x_2^{\nu}
\end{aligned} \tag{6.5}$$

Similarmente para

$$\begin{aligned}
\delta(x_2^{\mu}\dot{x}_{1\mu}) &= \delta x_2^{\mu}\dot{x}_1^{\nu}\eta_{\mu\gamma} + x_2^{\mu}\delta\dot{x}_1^{\nu}\eta_{\mu\gamma} \\
&= \dot{x}_1^{\nu}\eta_{\mu\gamma}\delta x_2^{\mu} + x_2^{\mu}\eta_{\mu\gamma}\frac{d\delta x_1^{\nu}}{dt} \\
&= \dot{x}_{1\nu}\delta x_2^{\mu} + \frac{d}{dt}(x_2^{\mu}\eta_{\mu\gamma}\delta x_1^{\nu}) - \frac{d}{dt}(x_2^{\mu}\eta_{\mu\gamma})\delta x_1^{\nu}
\end{aligned} \tag{6.6}$$

Sustituyendo en la acción 6.1 las ecuaciones (6.1),(6.2),(6.3),(6.4),(6.5),(6.6) tenemos

$$\int_{t_1}^{t_2} dt\left(-mc(\delta(\dot{x}_1^{\mu}\dot{x}_{1\mu})^{1/2} - \delta(\dot{x}_2^{\mu}\dot{x}_{2\mu})^{1/2} - \frac{q}{c}(\delta(\dot{x}_{1\mu}A^{\mu}(x_1)) - \delta(\dot{x}_{2\mu}A^{\mu}(x_2))) - \frac{\Omega}{2}(\delta(x_1^{\mu}\dot{x}_{2\mu}) - \delta(x_2^{\mu}\dot{x}_{1\mu}))\right.$$

$$
\begin{aligned}
&= -\int_{t_1}^{t_2} mc\left(\frac{d}{dt}((\dot{x}_1^\mu \dot{x}_1^\nu \eta_{\mu\nu})^{-1/2}\dot{x}_{1\mu}\delta x_1^\mu) - \frac{d}{dt}((\dot{x}_1^\mu \dot{x}_1^\nu \eta_{\mu\nu})^{-1/2}\dot{x}_{1\mu})\delta x_1^\mu\right)dt \\
&+ \int_{s_1}^{s_2} mc\left(\frac{d}{dt}((\dot{x}_2^\mu \dot{x}_2^\nu \eta_{\mu\nu})^{-1/2}\dot{x}_{1\mu}\delta x_1^\mu) - \frac{d}{dt}((\dot{x}_1^\mu \dot{x}_1^\nu \eta_{\mu\nu})^{-1/2}\dot{x}_{1\mu})\delta x_1^\mu\right)dt \\
&- \frac{q}{c}\int_{s_1}^{s_2} dt\left(\frac{d}{dt}\left(\eta_{\mu\nu}A^\mu(x_1)\delta x_1^\nu\right) - \frac{d}{dt}\left(\eta_{\mu\nu}A^\mu(x_1)\right)\delta x_1^\nu + \dot{x}_{1\mu}\frac{\partial A^\mu(x_1)}{\partial x_1^\nu}\delta x_1^\nu\right) \\
&+ \frac{q}{c}\int_{s_1}^{s_2} dt\left(\frac{d}{dt}\left(\eta_{\mu\nu}A^\mu(x_2)\delta x_2^\nu\right) - \frac{d}{dt}\left(\eta_{\mu\nu}A^\mu(x_2)\right)\delta x_2^\nu + \dot{x}_{2\mu}\frac{\partial A^\mu(x_2)}{\partial x_2^\nu}\delta x_2^\nu\right) \\
&- \frac{\Omega}{2}\int_{s_1}^{s_2} dt\left(\dot{x}_{2\nu}\delta x_1^\mu + \frac{d}{dt}(x_1^\mu \eta_{\mu\nu}\delta x_2^\nu) - \frac{d}{dt}(x_1^\mu \eta_{\mu\nu})\delta x_2^\nu\right) \\
&+ \frac{\Omega}{2}\int_{s_1}^{s_2} dt\left(\dot{x}_{1\nu}\delta x_2^\mu + \frac{d}{dt}(x_2^\mu \eta_{\mu\nu}\delta x_1^\nu) - \frac{d}{dt}(x_2^\mu \eta_{\mu\nu})\delta x_1^\nu\right)
\end{aligned}
$$

las siguientes integrales se anulan ya que la variación de las coordenadas en los extremos es cero

$$
\begin{aligned}
&\int_{s_1}^{s_2} dt\left(\frac{d}{dt}((\dot{x}_1^\mu \dot{x}_1^\nu \eta_{\mu\nu})^{-1/2}\dot{x}_{1\mu}\delta x_1^\mu)\right) = 0; \int_{s_1}^{s_2} dt\left(\frac{d}{dt}((\dot{x}_2^\mu \dot{x}_2^\nu \eta_{\mu\nu})^{-1/2}\dot{x}_{2\mu}\delta x_2^{\breve{}})\right) = 0 \\
&\int_{s_1}^{s_2} dt\left(\frac{d}{dt}\left(\eta_{\mu\nu}A^\mu(x_2)\delta x_2^\nu\right)\right) = 0; \int_{s_1}^{s_2} dt\left(\eta_{\mu\nu}A^\mu(x_1)\delta x_1^\nu\right) = 0 \\
&\int_{s_1}^{s_2} dt\left(\frac{d}{dt}(x_1^\mu \eta_{\mu\nu}\delta x_2^\nu)\right) = 0; \int_{s_1}^{s_2} dt\left(\frac{d}{dt}(x_2^\mu \eta_{\mu\nu}\delta x_1^\nu)\right) = 0
\end{aligned}
\tag{6.7}
$$

y se simplifica, restando los siguientes términos:

$$
\begin{aligned}
0 = \delta S &= -mc\int_{s_1}^{s_2} dt\left(\frac{d}{dt}((\dot{x}_1^\mu \dot{x}_1^\nu \eta_{\mu\nu})^{-1/2}\dot{x}_{1\nu})(\delta x_1^\nu)\right) \\
&+ mc\int_{s_1}^{s_2} dt\left(\frac{d}{dt}((\dot{x}_2^\mu \dot{x}_2^\nu \eta_{\mu\nu})^{-1/2}\dot{x}_{2\nu})(\delta x_2^\nu)\right) \\
&- \frac{q}{c}\int_{s_1}^{s_2} dt\left(-\frac{d}{dt}\left(\eta_{\mu\nu}A^\mu(x_1)\right)\delta x_1^\nu + \dot{x}_{1\mu}\frac{\partial A^\mu(x_1)}{\partial x_1^\nu}\delta x_1^\nu\right) \\
&+ \frac{q}{c}\int_{s_1}^{s_2} dt\left(-\frac{d}{dt}\left(\eta_{\mu\nu}A^\mu(x_2)\right)\delta x_2^\nu + \dot{x}_{2\mu}\frac{\partial A^\mu(x_2)}{\partial x_2^\nu}\delta x_2^\nu\right) \\
&- \frac{\Omega}{2}\int_{s_1}^{s_2} dt\left(\dot{x}_{2\nu}\delta x_1^\nu - \frac{d}{dt}(x_1^\mu \eta_{\mu\nu})\delta x_2^\nu - \dot{x}_{1\nu}\delta x_2^\nu + \frac{d}{dt}(x_2^\mu \eta_{\mu\nu})\delta x_1^\nu\right)
\end{aligned}
$$

Simplificando y reagrupando obtenemos:

$$
\begin{aligned}
\delta S &= \int_{t_1}^{t_2} ds\left[mc\frac{d}{dt}((\dot{x}_1^\mu \dot{x}_1^\nu \eta_{\mu\nu})^{-1/2}\dot{x}_{1\nu}) + \frac{q}{c}\frac{d}{dt}\left(\eta_{\mu\nu}A^\mu(x_1)\right) - \frac{q}{c}\dot{x}_{1\mu}\frac{\partial A^\mu(x_1)}{\partial x_1^\nu} - \Omega\dot{x}_{2\nu}\right]\delta x_1^\nu \\
+ \int_{s_1}^{s_2} dt&\left[-mc\frac{d}{dt}((\dot{x}_2^\mu \dot{x}_2^\nu \eta_{\mu\nu})^{-1/2}\dot{x}_{2\nu}) - \frac{q}{c}\frac{d}{dt}\left(\eta_{\mu\nu}A^\mu(x_2)\right) + \frac{q}{c}\dot{x}_{2\mu}\frac{\partial A^\mu(x_2)}{\partial x_2^\nu} + \Omega\dot{x}_{1\nu}\right]\delta x_2^\nu = 0
\end{aligned}
$$

y por el teorema fundamental del cálculo de variaciones

$$
\begin{aligned}
&mc\frac{d}{dt}((\dot{x}_1^{\mu}\dot{x}_1^{\nu}\eta_{\mu\nu})^{-1/2}\dot{x}_{1\nu}) + \frac{q}{c}\frac{d}{dt}\left(A(x_1)_\nu\right) - \frac{q}{c}\dot{x}_{1\mu}\frac{\partial A^{\mu}(x_1)}{\partial x_1^{\nu}} - \Omega\dot{x}_{2\nu} = 0 \\
&- mc\frac{d}{dt}((\dot{x}_2^{\mu}\dot{x}_2^{\nu}\eta_{\mu\nu})^{-1/2}\dot{x}_{2\nu}) - \frac{q}{c}\frac{d}{dt}\left(A(x_2)_\nu\right) + \frac{q}{c}\dot{x}_{2\mu}\frac{\partial A^{\mu}(x_2)}{\partial x_2^{\nu}} + \Omega\dot{x}_{1\nu} = 0
\end{aligned}
\tag{6.8}
$$

Obtenemos las ecuaciones que definen la dinámica del sistema; además podemos reescribir las ecuaciones de movimiento (6.8) en una manera más simplificada dado que:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_\mu\frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\nu}} &= \dot{x}^{\beta}\eta_{\beta\mu}\frac{\partial A_\theta}{\partial x^{\nu}}n^{\theta\mu} \\
&= \dot{x}^{\beta}\frac{\partial A_\theta}{\partial x^{\nu}}\delta_{\beta\theta} \\
&= \dot{x}^{\theta}\frac{\partial A_\theta}{\partial x^{\nu}} \\
&= \dot{x}^{\mu}\frac{\partial A_\mu}{\partial x^{\nu}} = \dot{x}^{\mu}\partial_\nu A_\mu
\end{aligned}
\tag{6.9}
$$

y

$$
\frac{dA_\nu}{dt} = \frac{\partial x^{\mu}}{dt}\frac{dA_\nu}{\partial x_\mu} = \dot{x}^{\mu}\partial_\mu A_\nu \tag{6.10}
$$

Por lo que (6.8) se ve como

$$
\begin{aligned}
&mc\frac{d}{dt}((\dot{x}_1^{\mu}\dot{x}_1^{\nu}\eta_{\mu\nu})^{-1/2}\dot{x}_{1\nu}) + \frac{q}{c}\dot{x}_1^{\mu}\mathcal{F}_{\mu\nu}(x_1) - \Omega\dot{x}_{2\nu} = 0 \\
&- mc\frac{d}{dt}((\dot{x}_2^{\mu}\dot{x}_2^{\nu}\eta_{\mu\nu})^{-1/2}\dot{x}_{2\nu}) - \frac{q}{c}\dot{x}_2^{\mu}\mathcal{F}_{\mu\nu}(x_2) + \Omega\dot{x}_{1\nu} = 0
\end{aligned}
\tag{6.11}
$$

Que es el sistema de ecuaciones diferenciales acopladas a resolver

6.2. Dinámica del sistema

Las ecuaciones de movimiento obtenidas (6.11) son ecuaciones diferenciales acopladas no lineales; podemos obtener condiciones que deben cumplirse para solucionar el sistema, al operar algebraicamente las posiciones x_1^{μ}, x_2^{μ}. y velocidades $\dot{x}_1^{\mu}, \dot{x}_2^{\mu}$

$$
\begin{aligned}
mc\frac{d}{dt}\frac{\dot{x}_{1\mu}}{\sqrt{\dot{x}_1^2}} + \frac{q}{c}\dot{x}^{\nu}\mathcal{F}_{\nu\mu}(x_1) - \Omega\dot{x}_{2\mu} = 0 \\
mc\frac{d}{dt}\frac{\dot{x}_{2\mu}}{\sqrt{\dot{x}_2^2}} + \frac{q}{c}\dot{x}^{\nu}\mathcal{F}_{\nu\mu}(x_2) - \Omega\dot{x}_{1\mu} = 0
\end{aligned}
\tag{6.12}
$$

Desarrollando la primera ecuación (6.12)

$$
\begin{aligned}
&mc\frac{d}{dt}\frac{\dot{x}_{1\mu}}{\sqrt{\dot{x}_1^2}} + \frac{q}{c}\dot{x}^{\nu}\mathcal{F}_{\nu\mu}(x_1) - \Omega\dot{x}_{2\mu} = 0 \\
&\to mc\left(\frac{\ddot{x}_{1\mu}}{(\dot{x}_1^2)^{1/2}} - \frac{\dot{x}_{1\mu}}{(\dot{x}_1^2)^{3/2}}\dot{x}_1^{\nu}\ddot{x}_{1\nu}\right) + \frac{q}{c}\dot{x}^{\nu}\mathcal{F}_{\nu\mu}(x_1) - \Omega\dot{x}_{2\mu} = 0
\end{aligned}
\tag{6.13}
$$

El primer término de la ecuación (6.13) se puede escribir como el proyector

$$\Pi_{\mu}^{(1,+)\nu} = \delta_{\mu}^{\nu} - \frac{\dot{x}_{1\mu}\dot{x}_1^{\nu}}{\dot{x}_1^2} \tag{6.14}$$

Al aplicar por la derecha $\dot{x}_{1\nu}$ al proyector

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu}^{(1,+)\nu}\dot{x}_{1\nu} &= \delta_{\mu}^{\nu}\dot{x}_{1\nu} - \frac{\dot{x}_{1\mu}\dot{x}_1^{\nu}}{\dot{x}_1^2}\dot{x}_{1\nu} \\ &= \dot{x}_{1\mu} - \dot{x}_{1\mu} = 0 \end{aligned} \tag{6.15}$$

Al aplicar por la izquierda $\dot{x}_1^{\mu}$ al proyector

$$\begin{aligned} \dot{x}_1^{\mu}\Pi_{\mu}^{(1,+)\nu} &= \dot{x}_1^{\mu}\delta_{\mu}^{\nu} - \dot{x}_1^{\mu}\frac{\dot{x}_{1\mu}\dot{x}_1^{\nu}}{\dot{x}_1^2} \\ &= \dot{x}_1^{\nu} - \dot{x}_1^{\nu} = 0 \end{aligned} \tag{6.16}$$

Entonces

$$\Pi_{\mu}^{(1,+)\nu}\dot{x}_{1\nu} = \Pi_{\mu}^{(1,+)\nu}\dot{x}_{1\nu} = 0$$

Podemos reescribir las ecuaciones 6.12 como

$$\frac{mc^2}{(\dot{x}_1^2)^{1/2}}\Pi_{\mu}^{(1,+)\nu}\ddot{x}_{1\nu} + \frac{q}{c}\dot{x}^{\nu}\mathcal{F}_{\nu\mu}(x_1) - \Omega\dot{x}_{2\mu} = 0 \tag{6.17}$$

Operando por la izquierda con $\dot{x}_1^{\mu}$

$$\frac{mc^2\dot{x}_1^{\mu}}{(\dot{x}_1^2)^{1/2}}\Pi_{\mu}^{(1,+)\nu}\ddot{x}_{1\nu} + \frac{q}{c}\dot{x}_1^{\nu}\dot{x}_1^{\mu}\mathcal{F}_{\nu\mu}(x_1) - \Omega\dot{x}_1^{\mu}\dot{x}_{2\mu} = 0 \tag{6.18}$$

Usando la propiedad antisimetrica del tensor electromagnético y 6.16 obtenemos la primera condición del sistema, esto es, las soluciones del sistema requieren que el producto de las cuadrivelocidades $\dot{x}_2^{\mu}$, $\dot{x}_{1\mu}$ sea cero, por lo tanto, el producto de las componentes espaciales de los sistemas sea una constante

$$\Omega\dot{x}_1^{\mu}\dot{x}_{2\mu} = 0 \rightarrow c^2 - \vec{\dot{x}}_1 \cdot \vec{\dot{x}}_2 = 0 \rightarrow \vec{\dot{x}}_1 \cdot \vec{\dot{x}}_2 = c^2 \tag{6.19}$$

Operando $\dot{x}_{2\nu}$ por la derecha en el proyector $(1, +)$

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu}^{(1,+)\nu}\dot{x}_{2\nu} &= \delta_{\mu}^{\nu}\dot{x}_{2\nu} - \frac{\dot{x}_{1\mu}\dot{x}_1^{\nu}}{\dot{x}_2^2}\dot{x}_{2\nu} \\ &= \dot{x}_{2\mu} \end{aligned} \tag{6.20}$$

y multiplicando $\dot{x}_2^{\nu}$ por la izquierda en el proyector $(1, +)$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2^{\nu}\Pi_{\nu}^{(1,+)\mu} &= \dot{x}_2^{\nu}\delta_{\nu}^{\mu} - \dot{x}_2^{\nu}\frac{\dot{x}_{1\nu}\dot{x}_1^{\mu}}{\dot{x}_2^2} \\ &= \dot{x}_{2\mu} \end{aligned} \tag{6.21}$$

Operando $\dot{x}_2^{\mu}$ en 6.17

$$\begin{aligned} &\frac{mc}{(\dot{x}_1^2)^{1/2}}\dot{x}_2^{\mu}\Pi_{\mu}^{(1,+)\nu}\ddot{x}_{1\nu} + \frac{q}{c}\dot{x}_1^{\nu}\dot{x}_2^{\mu}\mathcal{F}_{\mu\nu}(x_1) - \Omega\dot{x}_2^2 = 0 \\ &\rightarrow \frac{mc}{(\dot{x}_1^2)^{1/2}}\dot{x}_2^{\nu}\ddot{x}_{1\nu} + \frac{q}{c}\dot{x}_1^{\nu}\dot{x}_2^{\mu}\mathcal{F}_{\mu\nu}(x_1) - \Omega\dot{x}_2^2 = 0 \end{aligned} \tag{6.22}$$

Similarmente para el sistema 2

$$\begin{aligned} &\frac{mc}{(\dot{x}_2^2)^{1/2}}\dot{x}_1^{\mu}\Pi_{\mu}^{(2,+)\nu}\ddot{x}_{2\nu} - \frac{q}{c}\dot{x}_2^{\nu}\dot{x}_1^{\mu}\mathcal{F}_{\mu\nu}(x_2) - \Omega\dot{x}_1^2 = 0 \\ &\rightarrow \frac{mc}{(\dot{x}_2^2)^{1/2}}\dot{x}_1^{\nu}\ddot{x}_{2\nu} - \frac{q}{c}\dot{x}_2^{\nu}\dot{x}_1^{\mu}\mathcal{F}_{\mu\nu}(x_2) - \Omega\dot{x}_1^2 = 0 \end{aligned} \tag{6.23}$$

El sistema de ecuaciones (6.22) y (6.23) tiene desventajas mayores al intentar resolverlo que el sistema principal (6.12). Otra condición aceptable ocurre al considerar que el campo electromagnético es constante y homogéneo, así las conexiones no dependeran de las posiciones o el tiempo, por lo que el sistema (6.12) puede reeescribirse como una derivada total respecto del tiempo del observador

$$\frac{d}{dt}\left(mc\frac{\dot{x}_{1\mu}}{(\dot{x}_1^2)^{1/2}} + \frac{q}{c}x_1^{\nu}\mathcal{F}_{\nu\mu} - \Omega x_{2\mu}\right) = 0 \rightarrow mc\frac{\dot{x}_{1\mu}}{(\dot{x}_1^2)^{1/2}} + \frac{q}{c}x_1^{\nu}\mathcal{F}_{\nu\mu} - \Omega x_{2\mu} = a_{1\mu} \tag{6.24}$$

y

$$\frac{d}{dt}\left(mc\frac{\dot{x}_{2\mu}}{(\dot{x}_2^2)^{1/2}} + \frac{q}{c}x_2^{\nu}\mathcal{F}_{\nu\mu} - \Omega x_{1\mu}\right) = 0 \rightarrow mc\frac{\dot{x}_{2\mu}}{(\dot{x}_2^2)^{1/2}} + \frac{q}{c}x_2^{\nu}\mathcal{F}_{\nu\mu} - \Omega x_{1\mu} = a_{2\mu} \tag{6.25}$$

aplicando $\dot{x}_2^{\mu}$ y $\dot{x}_{1\mu}$ en (6.24) y (6.25) respectivamente y utilizando (6.19)

$$\frac{q}{c}\dot{x}_2^{\mu}x_1^{\nu}\mathcal{F}_{\nu\mu} - \Omega\dot{x}_2^{\mu}x_{2\mu} = \dot{x}_2^{\mu}a_{1\mu} \tag{6.26}$$

y

$$\frac{q}{c}\dot{x}_1^{\mu}x_2^{\nu}\mathcal{F}_{\nu\mu} - \Omega\dot{x}_1^{\mu}x_{1\mu} = \dot{x}_1^{\mu}a_{2\mu} \tag{6.27}$$

sumando este par de ecuaciones e integrando

$$\begin{aligned} &\rightarrow \frac{q}{c}\frac{d}{dt}(x_2^{\mu}x_1^{\nu})\mathcal{F}_{\nu\mu} - \frac{\Omega}{2}\frac{d}{dt}(x_1^2 + x_2^2) = \frac{d}{dt}(x_2^{\mu}a_{1\mu} + x_1^{\mu}a_{2\mu}) \\ &\rightarrow \frac{q}{c}x_2^{\mu}x_1^{\nu}\mathcal{F}_{\nu\mu} - \Omega ct + \frac{\Omega}{2}(x_1^2 + x_2^2) - (x_2^{\mu}a_{1\mu} + x_1^{\mu}a_{2\mu}) = b \end{aligned} \tag{6.28}$$

Corriendo las sumas sobre los índices de las ecuaciones (6.28) se realizan a detalle en el apéndice 9. El sistema de ecuaciones a resolver es:

$$\begin{aligned} &qt\left(x_1^1E_x + x_1^2E_y + x_1^3E_z\right) \\ &+ \frac{q}{c}\left(-ctx_2^1E_x - x_1^2x_2^1B_z + x_1^3x_2^1B_y\right) \\ &+ \frac{q}{c}\left(-ctx_2^2E_y + x_1^1x_2^2B_z - x_1^3x_2^2B_x\right) \\ &+ \frac{q}{c}\left(-ctx_2^3E_z - x_1^1x_2^3B_y + x_1^2x_2^3B_x\right) \\ &- \Omega ct + \frac{\Omega}{2}(\vec{x}_1^2 + \vec{x}_2^2) - ct(a_{10} + a_{20}) - (a_{1i}x_{2i} + a_{2i}x_{1i}) = b \end{aligned} \tag{6.29}$$

Esta ecuación nos da otra condición que debe cumplir el sistema de ecuaciones (6.12). Además, las ecuaciones (6.24) y (6.25) escritas en términos del del tiempo propio de cada partícula

$$\begin{aligned} -\, mcu_{1\mu} - \frac{q}{c}x_1^{\nu}\mathcal{F}_{\nu\mu} + \Omega x_{2\mu} &= a_{1\mu} \\ mcu_{2\mu} + \frac{q}{c}x_2^{\nu}\mathcal{F}_{\nu\mu} - \Omega x_{1\mu} &= a_{2\mu} \end{aligned} \tag{6.30}$$

Al despejar $x_{2\mu}$ de la primera ecuación, derivando respecto de su tiempo prorpio τ_2 y sustituimos en la segunda ecuaciòn

$$\begin{aligned}
u_{2\mu}(\tau_2) = \frac{d}{d\tau_2}x_{2\mu}(\tau_2) &= \frac{1}{\Omega}mc\frac{d\tau_2}{d\tau_1}\frac{d}{d\tau_1}u_{1\mu}(\tau_1) - \frac{q}{\Omega c}\frac{d\tau_2}{d\tau_1}u_1^{\nu}(\tau_1)\mathcal{F}_{\nu\mu} \\
&= \frac{1}{mc}\left(a_{2\mu} + \frac{q}{c}x_2^{\nu}(\tau_2)\mathcal{F}_{\nu\mu} + \Omega x_{1\mu}\right) \\
\Rightarrow u_{2\mu} &= \frac{a_{2\mu}}{mc^2} + \frac{q}{\Omega mc^2}\left(mc^2u_1^{\nu}(\tau_1) + \frac{q}{c}x_1^{\rho}(\tau_1)\mathcal{F}_{\rho}^{\nu} + a_1^n u\right)\mathcal{F}_{\nu\mu} + \frac{\Omega}{mc}x_{1\mu} \\
&= \frac{d\tau_2}{d\tau_1}\left(\frac{mc}{\Omega}\frac{d^2}{dt^2}x_{1\mu}(\tau_1) - \frac{q}{\Omega c}\frac{d}{d\tau_1}x_1^{\nu}(\tau_1)\mathcal{F}_{\rho}^{\nu}\right)
\end{aligned} \tag{6.31}$$

Reordenando obtenemos una sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{d^2}{d\tau_1^2}x_{1\mu}(\tau_1) - \frac{q}{mc^2}(1 + \frac{d\tau_2}{d\tau_1})\frac{d}{d\tau_1}x_1^{\nu}(\tau_1)\mathcal{F}_{\nu\mu} + \frac{q\Omega}{mc^2}\frac{d\tau_2}{d\tau_1}x_1^{\rho}(\tau_1)\mathcal{F}_{\rho}^{\nu}\mathcal{F}_{\nu\mu} - \frac{\Omega}{m^2c^2}\frac{d\tau_2}{d\tau_1}(\frac{q}{c\Omega}a_1^{\nu}\mathcal{F}_{\nu\mu} + a_{2\mu}) = 0 \tag{6.32}$$

Tomando la suma sobre los índices ν obtenemos una ecuación diferencial para cada componente del sistema.

Por lo que el sistema de ecuaciones a resolver es

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2}{d\tau_1^2}x_{10} - \frac{q}{mc^2}(1 + \frac{d\tau_2}{d\tau_1})(\frac{d}{d\tau_1}x_{11}E_1^2 + \frac{d}{d\tau_1}x_{12}E_2^2 + \frac{d}{d\tau_1}x_{13}E_3^2) \\
&\frac{q\Omega}{mc^2}\left(ct(\vec{E}^2) + x_{11}(B_zE_y - B_yE_z) + x_{12}(B_zE_x - B_xE_z) + x_{11}(B_xE_y - B_yE_x)\right) \\
&+ \frac{q}{m^2c^2}\frac{d\tau_2}{d\tau_1}(a_1^1E_x + a_1^2E_y + a_1^3E_z) - \frac{\Omega}{m^2c^3}a_{20} = 0
\end{aligned} \tag{6.33}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2}{d\tau_1^2}x_{11} - \frac{q}{mc^2}(1 + \frac{d\tau_2}{d\tau_1})(\frac{d}{d\tau_1}(ct)E_x - \frac{d}{d\tau_1}x_{12}B_z + \frac{d}{d\tau_1}x_{13}B_y \\
&\frac{q\Omega}{mc^2}\left(ct(E_yB_z + E_zB_y) + x_{11}(E_x^2 + B_z^2 - B_y^2) + x_{12}(E_yE_x - B_xB_y) + x_{13}(E_zE_x - B_xB_z)\right) \\
&- \frac{q}{m^2c^2}\frac{d\tau_2}{d\tau_1}(a_1^1E_x + a_1^2B_z - a_1^3B_y) - \frac{\Omega}{m^2c^3}a_{21} = 0
\end{aligned} \tag{6.34}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2}{d\tau_1^2}x_{12} - \frac{q}{mc^2}(1 + \frac{d\tau_2}{d\tau_1})(\frac{d}{d\tau_1}(ct)E_y - \frac{d}{d\tau_1}x_{11}B_z - \frac{d}{d\tau_1}x_{13}B_x \\
&\frac{q\Omega}{mc^2}\left(ct(E_xB_z - E_zB_x) + x_{12}(E_y^2 + B_z^2 - B_x^2) + x_{11}(E_xE_y - B_xB_y) + x_{13}(E_zE_y - B_yB_z)\right) \\
&- \frac{q}{m^2c^2}\frac{d\tau_2}{d\tau_1}(a_1^0E_y + a_{11}B_z + a_{13}B_y) - \frac{\Omega}{m^2c^3}a_{22} = 0
\end{aligned} \tag{6.35}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2}{d\tau_1^2}x_{13} - \frac{q}{mc^2}(1 + \frac{d\tau_2}{d\tau_1})(\frac{d}{d\tau_1}(ct)E_z + \frac{d}{d\tau_1}x_{11}B_y + \frac{d}{d\tau_1}x_{12}B_x) \\
&\frac{q\Omega}{mc^2}\left(ct(E_xB_y + E_yB_x) + x_{12}(E_yE_z - B_zB_y) + x_{11}(E_xE_z - B_zB_x) + x_{13}(E_z^2 + B_y^2 + B_x^2)\right) \\
&- \frac{q}{m^2c^2}\frac{d\tau_2}{d\tau_1}(a_1^0E_z + a_{11}B_y + a_{12}B_x) - \frac{\Omega}{m^2c^3}a_{23} = 0
\end{aligned} \tag{6.36}$$

Al tomar en cuenta el tiempo propio de cada partícula encontramos ecuaciones diferenciales de segundo orden, no lineales, inhomogeneas y de coeficientes variables. Donde los coeficientes

$\frac{d\tau_1}{d\tau_2}$ complican mucho obtener una solución análitica.

Otro enfoque al problema es tomando las invariancias relativistas para los cuadrimomentos generadas al tomar el cuadrado de las ecuaciones (6.24) y (6.25), así:

$$
\begin{aligned}
&m^2c^2 = \left(\frac{q}{c}x_1^{\nu}\mathcal{F}_{\nu}^{\cdot\mu} + \Omega x_2^{\mu} - a_1^{\mu}\right)\left(\frac{q}{c}x_1^{\rho}\mathcal{F}_{\rho\mu} + \Omega x_{2\mu} - a_{1\mu}\right)\\
&\Rightarrow m^2c^2 = -\frac{q^2}{c^2}x_1^{\mu}x_1^{\nu}\mathcal{F}_{\nu}^{\cdot\mu}\mathcal{F}_{\mu\rho} + \frac{q\Omega}{c}x_1^{\nu}x_2^{\mu}\mathcal{F}_{\nu\mu} + \frac{q\Omega}{c}x_1^{\nu}x_2^{\mu}\mathcal{F}_{\nu\mu} + \frac{q\Omega}{c}x_2^{\mu}x_1^{\nu}\mathcal{F}_{\nu\mu}\\
&+ \Omega^2x_2^2 - \Omega x_2a_1 - \frac{q\Omega}{c}x_1^{\nu}a_1\mathcal{F}_{\nu\mu} - \Omega a_1x_2 + a_1^2
\end{aligned}
\tag{6.37}
$$

Ocurriendo lo mismo para la para el segundo sistema. Las ecuaciones a resolver son:

$$
\begin{aligned}
m^2c^2 &= -\frac{q^2}{c^2}x_1^{\mu}x_1^{\nu}\mathcal{F}_{\nu}^{\cdot\rho}\mathcal{F}_{\rho\nu} + 2\frac{q\Omega}{c}x_1^{\nu}x_2^{\mu}\mathcal{F}_{\nu\mu} - 2\frac{q\Omega}{c}x_1^{\nu}a_1\mathcal{F}_{\nu\mu} - 2\Omega x_2a_1 - \Omega^2\vec{x}_2^{\,2} + a_1^2\\
m^2c^2 &= -\frac{q^2}{c^2}x_2^{\mu}x_2^{\nu}\mathcal{F}_{\nu}^{\cdot\rho}\mathcal{F}_{\rho\nu} + 2\frac{q\Omega}{c}x_2^{\nu}x_1^{\mu}\mathcal{F}_{\nu\mu} - 2\frac{q\Omega}{c}x_2^{\nu}a_2\mathcal{F}_{\nu\mu} - 2\Omega x_1a_2 - \Omega^2\vec{x}_1^{\,2} + a_2^2
\end{aligned}
\tag{6.38}
$$

Fijamos las constantes de integración en el origen y suma de los índices (6.37) obtenemos:

$$
\begin{aligned}
m^2c^2 = &-\frac{q^2}{c^2}\Big((x_{11}^2 + c^2t^2)(E_x^2 + E_2^2 + E_y^2 + E_z^2) + x_{12}^2(E_y^2 + B_x^2 + B_z^2) + x_{13}^2(E_z^2 + B_x^2 + B_y^2)\Big)\\
&- \frac{q^2}{c^2}\Big(2x_{11}x_{12}(E_xE_y - B_xB_y) + 2x_{13}x_{11}(E_xE_z - B_xB_z) + 2x_{13}x_{12}(E_zE_y - B_zB_y)\Big)\\
&- \frac{q^2}{c^2}\Big(2x_{11}ct(E_yB_z - E_zB_y) + 2x_{13}ct(E_xB_y - E_yB_x) + 2x_{12}ct(E_zB_x - E_xB_z)\Big)\\
&+ \frac{2q\Omega}{c}\Big(x_{11}(ctE_x - x_{22}B_z + x_{23}B_y) + x_{12}(ctE_y + x_{21}B_z - x_{23}B_x)\Big)\\
&+ \frac{2q\Omega}{c}\Big(x_{13}(ctE_z - x_{21}B_y + x_{22}B_x) - ct(x_{21}E_x + x_{22}E_y + x_{23}E_z)\Big)\\
&+ \Omega^2c^2t^2 - \Omega^2\vec{x}_2^{\,2}
\end{aligned}
\tag{6.39}
$$

Similarmente para el segundo sistema obtenemos

$$
\begin{aligned}
m^2c^2 = &-\frac{q^2}{c^2}\Big((x_{21}^2 + c^2t^2)(E_x^2 + E_2^2 + E_y^2 + E_z^2) + x_{22}^2(E_y^2 + B_x^2 + B_z^2) + x_{23}^2(E_z^2 + B_x^2 + B_y^2)\Big)\\
&- \frac{q^2}{c^2}\Big(2x_{21}x_{22}(E_xE_y - B_xB_y) + 2x_{23}x_{21}(E_xE_z - B_xB_z) + 2x_{13}x_{12}(E_zE_y - B_zB_y)\Big)\\
&- \frac{q^2}{c^2}\Big(2x_{21}ct(E_yB_z - E_zB_y) + 2x_{23}ct(E_xB_y - E_yB_x) + 2x_{22}ct(E_zB_x - E_xB_z)\Big)\\
&+ \frac{2q\Omega}{c}\Big(x_{21}(ctE_x - x_{12}B_z + x_{13}B_y) + x_{22}(ctE_y + x_{11}B_z - x_{13}B_x)\Big)\\
&+ \frac{2q\Omega}{c}\Big(x_{23}(ctE_z - x_{11}B_y + x_{12}B_x) - ct(x_{11}E_x + x_{12}E_y + x_{13}E_z)\Big)\\
&+ \Omega^2c^2t^2 - \Omega^2\vec{x}_1^{\,2}
\end{aligned}
\tag{6.40}
$$

Para la ecuación (6.39), suponiendo que el campo el campo eléctrico $\vec{E} = (E_x, 0, 0)$ es constante, homogéneo y se encuentra orientado en la dirección del movimiento con $\vec{x}_1 = (x_{11}, 0, 0)$

y $\vec{x}_2 = (x_{21}, 0, 0)$, tenemos

$$m^2c^2 = -\frac{q^2E_x^2}{c^2}x_{11}^2 + 2q\Omega E_x t x_{11} - \Omega^2 x_{21}^2 - 2q\Omega E_x t x_{21} - (q^2E_x^2 + \Omega^2c^2)t^2 \tag{6.41}$$

De manera similar se obtiene la ecuación reducida para (6.40)

$$m^2c^2 = -\frac{q^2E_x^2}{c^2}x_{21}^2 + 2q\Omega E_x t x_{21} - \Omega^2 x_{11}^2 - 2q\Omega E_x t x_{11} - (q^2E_x^2 + \Omega^2c^2)t^2 \tag{6.42}$$

Al realizar las siguientes transformaciones

$$\begin{aligned} x_{11} &= \frac{1}{2}(x_+ + x_-) \\ x_{21} &= \frac{1}{2}(x_+ - x_-) \end{aligned} \tag{6.43}$$

y sumando las ecuaciones (6.41) y (6.42) se obtiene la ecuación

$$x_+^2 + x_-^2 + 2c^2t^2 = -\frac{2m^2c^4}{q^2E_x^2 + \Omega^2c^2} \tag{6.44}$$

Mientras que al restar (6.41) y (6.42) se obtiene

$$\left(\frac{\Omega^2c^2 - q^2E_x^2}{c^2}\right)(x_+x_-) + 4\Omega qE_x t x_- = 0 \tag{6.45}$$

Esta ecuación nos da dos condiciones, si $x_- = 0$ entonces (6.44) se resuelve cómo

$$x_+ = \sqrt{-\frac{m^2c^4}{q^2E_x^2 + \Omega^2c^2} - 2c^2t^2} \tag{6.46}$$

La segunda condición $x_+ = -\dfrac{4c^2\Omega qE_x t}{\Omega^2c^2 - q^2E_x^2}$ en (6.44) nos lleva a

$$x_- = \sqrt{\frac{4\Omega c^2 qE_x t}{\Omega^2c^2 - q^2E_x^2} - \frac{2m^2c^4}{\Omega^2c^2 + q^2E_x^2} - 2c^2t^2} \tag{6.47}$$

Capítulo 7

Solución de las ecuaciones de movimiento

En este capítulo se presentan las soluciones a las ecuaciones de movimiento con el uso de las transformaciones $(+, -)$ donde sólo está presente el campo eléctrico constante en la dirección del movimiento de la partícula y campo magnético constante perpendicular al plano de movimiento de la partícula.

7.0.1. Campo eléctrico constante

En las ecuaciones de movimiento (6.12) el tensor electromagnético depende de las posiciones de las partículas de cada sistema, al considerar el campo electromanético constante y homogéneo este es independiente de las componentes espaciales de las partículas; supongamos que el campo eléctrico constante y campo magnético $\vec{B} = 0$; las ecuaciones (6.12) toman la forma

$$\begin{aligned} mc\frac{d}{dt}\left(\frac{c}{(c^2 - \dot{x}_1^2)^{1/2}}\right) - \frac{q}{c}\dot{x}_{1i}E_i - \Omega c &= 0 \\ mc\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}_{1i}}{(c^2 - \dot{x}_1^2)^{1/2}}\right) - qE_i - \Omega\dot{x}_{2i} &= 0 \end{aligned} \tag{7.1}$$

las ecuaciones se vuelve una derivada total en el tiempo. Al integrar obtenemos el siguiente set de ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{mc^2}{(c^2 - \dot{x}_1^2)^{1/2}} - \frac{q}{c}x_{1i}E_i - \Omega ct &= a_1 \\ mc\frac{\dot{x}_{1i}}{(c^2 - \dot{x}_1^2)^{1/2}} - qE_it - \Omega x_{2i} &= a_2 \end{aligned} \tag{7.2}$$

Podemos deshacernos de la raíz despejando la parte temporal de la primera ecuación y sustituyendo en la segunda multipicada por c (7.2)

$$\begin{aligned} \frac{mc^2}{(c^2 - \dot{x}_1^2)^{1/2}} &= \frac{q}{c}x_{1i}E_i + \Omega ct + a_1 \\ \rightarrow \left(\frac{q}{c}x_{1i}E_i + \Omega ct + a_1\right)\dot{x}_{1i} - qE_ict - \Omega cx_{2i} &= a_2 \end{aligned} \tag{7.3}$$

Para el sistema x_2

$$\begin{aligned} \frac{c^2}{(c^2 - \dot{x}_2^2)^{1/2}} &= \frac{q}{c}x_{2i}E_i + \Omega ct + b_1 \\ \rightarrow \left(\frac{q}{c}x_{2i}E_i + \Omega ct + b_1\right)\dot{x}_{2i} - qE_ict - \Omega cx_{1i} &= b_2 \end{aligned} \tag{7.4}$$

Tomando x_{2i} de (7.3) y derivando respecto del tiempo

$$
\begin{aligned}
x_{2i} &= \frac{qE_i}{\Omega c^2}x_{1i}\dot{x}_{1i} + (t + \frac{a_1}{\Omega c})\dot{x}_{1i} - \frac{qE_i t}{\Omega} - \frac{a_2}{\Omega c} \\
\dot{x}_{2i} &= \frac{qE_i}{\Omega c^2}(\dot{x}_{1i}\dot{x}_{1i}) + \frac{qE_i}{\Omega c^2}x_{1i}\ddot{x}_{1i} + \dot{x}_{1i} + t\ddot{x}_{1i} + \frac{a_1}{\Omega c}\dot{x}_{1i} - \frac{qE_i}{\Omega}
\end{aligned}
\tag{7.5}
$$

Sustituyendo en (7.4) y reagrupando obtenemos

$$
\begin{aligned}
&\frac{q^3E_i^3}{\Omega^2c^5}\dot{x}_{1i}^3x_{1i} + \frac{q^3E_i^3}{\Omega^2c^5}x_{1i}^2\dot{x}_{1i}\ddot{x}_{1i} + \frac{q^2E_i^2}{\Omega c^2}x_{1i}\dot{x}_{1i}^2 + (2\frac{q^2E_i^2}{\Omega c^3} + 2\frac{q^2E_i^2a_1}{\Omega^2c^4})x_{1i}\dot{x}_{1i}\ddot{x}_{1i} - \frac{q^2E_i^2}{\Omega^2c^2}x_{1i}\dot{x}_{1i} \\
&+ \left(\frac{q^2E_i^2t}{\Omega c^3} + \frac{q^2E_i^2}{\Omega^2c^4}\right)\dot{x}_{1i}^3 + \left(\frac{qE_it}{c} + \frac{qE_ia_1}{\Omega^2c^2} - \frac{q^3E_i^3t}{\Omega^2c^4} - \frac{q^2E_i^2a_2}{\Omega^2c^4}\right)\dot{x}_{1i}^2 + \left(\frac{qE_it^2}{c} + 2\frac{qE_ita_1}{\Omega c^2} + \frac{a^2qE_i}{\Omega^2c^3}\right)\ddot{x}_{1i}\dot{x}_{1i} \\
&- \left(2\frac{q^2E_i^2t}{\Omega c} + \frac{a_1q^2E_i^2}{\Omega^2c^2} + \frac{a_2qE_i}{\Omega c}\right)\dot{x}_{1i} - \left(\frac{q^2E_i^2t^2}{\Omega c} + \frac{q^2E_i^2t^2a_1t}{\Omega^2c^2} + \frac{qE_ia_2t}{\Omega c^2} + \frac{a_1a_2}{\Omega^2c^3}qE_i\right)\ddot{x}_{1i} \\
&- \left(\frac{q^3E_i^3t}{\Omega^2c^3} + \frac{q^2E_i^2}{\Omega^2c^4}\right)x_{1i}\ddot{x}_{1i} - \frac{a_2q^2E_i^2}{\Omega c^2} + \frac{q^3E_i^3}{\Omega^2c} + \frac{qE_it + b_1c}{c}\dot{x}_{1i}^2 + \frac{qE_it + b_1c}{c}\ddot{x}_{1i}x_{1i} \\
&+ (\Omega ct + b_1)x_{1i} + (\Omega ct^2 + b_1)\ddot{x}_{1i} + (a_1t + b_1)\dot{x}_{1i} - 2qE_ict - \Omega cx_{1i} = b_2
\end{aligned}
\tag{7.6}
$$

Por lo que las ecuaciones (7.3) y (7.4) nos conducen a ecuaciones diferenciales inhomogeneas no lineales y de coeficientes variables cuyas soluciones, de existir para algún intervalo I, no pueden ser calculadas sencillamente.
Otro método para resolverla es aplicando teoría de perturbaciones alrededor de una solución conocida para sistemas de esta índole. Y dependerán de un problema en particular y sus condiciones iniciales.
En términos de las variables de BatemanBateman (1931) (x_+, x_-) relacionadas a las coordenadas cartesianas como sumas o restas de (x_{1i}, x_{2i}) Al realizar las siguientes transformaciones, se obtiene un sistema de ecuaciones más sencillo

$$
\begin{aligned}
x_{1i} &= \frac{1}{2}(x_{+,i} + x_{-,i}) \\
x_{2i} &= \frac{1}{2}(x_{+,i} - x_{-,i})
\end{aligned}
\tag{7.7}
$$

Para ello, al restar las ecuaciones (7.3) y (7.4) y tomando $a_1 = b_1 = a$ y $a_2 = b_2 = b$

$$
\begin{aligned}
&\frac{qE}{2c}\frac{d}{dt}(x_{11}^2 - x_{21}^2) + (\Omega ct + a)(\dot{x}_{11} - \dot{x}_{21}) - \Omega c(x_{2i} - x_{1i}) = 0 \\
&\Rightarrow \frac{qE}{2c}\frac{d}{dt}(x_+x_-) + \Omega c\frac{d}{dt}(tx_-) + a\frac{d}{dt}x_- = 0
\end{aligned}
\tag{7.8}
$$

Integrando y con l constante

$$
\Rightarrow \frac{qE}{2c}x_{-,i}x_{+,i} + \Omega ctx_{-,i} + ax_{-,i} = l \tag{7.9}
$$

Por otro lado, al sumar las ecuaciones (7.3) y (7.4)

$$
\begin{aligned}
&\frac{qE}{4c}\frac{d}{dt}(x_{11}^2 + x_{21}^2) + (\Omega t + a)(\dot{x}_{11} + \dot{x}_{21}) - 2qtE - \Omega(x_{21} + x_{11}) - b = 0 \\
&\Rightarrow \frac{qE}{4c}\frac{d}{dt}(x_{+,i}^2 + x_{-,i}^2) + (\Omega ct + a)\dot{x}_{+,i} - \Omega cx_{+,i} - 2qcEt - b = 0
\end{aligned}
\tag{7.10}
$$

Que es una función de segundo orden de coeficientes variables. El sistema de ecuaciones a resolver es

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \frac{qE}{2c} x_{-,i} x_{+,i} + \Omega c t x_{-,i} + a x_{-,i} = l \\ &\frac{qE}{2c}\frac{d}{dt}(x_{+,i}^2 + x_{-,i}^2) + (\Omega c t + a)\dot{x}_{+,i} - \Omega c x_{+,i} - 2qcEt - b = 0 \end{aligned} \tag{7.11}$$

Las ecuaciones desacopladas para este sistema son:

$$\frac{qE_i}{4c}\frac{d}{dt}\left(x_{+,i}^2 + \frac{l^2}{(\frac{qE_i}{2c} x_{+,i} + \Omega c t + a)^2} \right) + (\Omega c t + a)\frac{d}{dt} x_{+,i} - \Omega c x_{+,i} - 2qE_i c t - b_i = 0 \tag{7.12}$$

$$\frac{qE_i}{4c}\frac{d}{dt}\left(x_{-,i}^2 + \frac{(l_i - (\Omega c t) x_{-,i})^2}{x_{-,i}^2} \right) + (\Omega c t + a)\frac{d}{dt}\left(\frac{l_i - \Omega c t x_{-,i} + a x_{-,i}}{x_{-,i}} \right) - \Omega c \left(\frac{l_i - \Omega c t x_{-,i} + a x_{-,i}}{x_{-,i}} \right) - 2qE_i c t - b_i = \tag{7.13}$$

Que son ecuaciones diferenciales inhomogéneas de coeficientes variables.

7.0.2. Electrón en campo magnético con disipación de energía

Consideremos las componentes espaciales perpendiculares al campo magnético $\vec{B}$ constante y ausencia de campo eléctrico. Tomando las ecuaciones para las componentes temporal y espacial del set (6.12) se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales; para x_1

$$\begin{aligned} mc\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}_{10}}{(c^2-\dot{x}_{1i}^2)^{1/2}}\right) - \Omega c = 0 \\ mc\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}_{1i}}{(c^2-\dot{x}_{1i}^2)^{1/2}}\right) - \frac{q}{c}\epsilon_{ijk}\dot{x}_{1j}B_k - \Omega\dot{x}_{2i} = 0 \end{aligned} \tag{7.14}$$

Que es una derivada total respecto del tiempo. Al integrar generamos las condiciones

$$\begin{aligned} \frac{mc^2}{(c^2-\dot{x}_{1i}^2)^{1/2}} - \Omega ct = a_1 \\ mc\frac{\dot{x}_{1i}}{(c^2-\dot{x}_{1i}^2)^{1/2}} - \frac{q}{c}\epsilon_{ijk}x_{1j}B_k - \Omega x_{2i} = a_2 \end{aligned} \tag{7.15}$$

Similarmente para el sistema 2

$$\begin{aligned} mc\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}_{20}}{(c^2-\dot{x}_{2i}^2)^{1/2}}\right) - \Omega c = 0 \\ mc\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}_{2i}}{(c^2-\dot{x}_{2i}^2)^{1/2}}\right) - \frac{q}{c}\epsilon_{ijk}\dot{x}_{2j}B_k - \Omega\dot{x}_{1i} = 0 \end{aligned} \tag{7.16}$$

Al integerar obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{mc^2}{(c^2-\dot{x}_{2i}^2)^{1/2}} - \Omega ct = b_1 \\ mc\frac{\dot{x}_{2i}}{(c^2-\dot{x}_{2i}^2)^{1/2}} - \frac{q}{c}\epsilon_{ijk}x_{2j}B_k - \Omega x_{1i} = b_2 \end{aligned} \tag{7.17}$$

sustituimos la primera ecuación de (7.17) en la segunda y similarmente para(7.15), al reordenar generamos el sistema de ecuaciones a resolver.

$$\begin{aligned} (\Omega ct + a_1)\dot{x}_{1i} - q\epsilon_{ijk}x_{1j}B_k - \Omega cx_{2i} = a_2 \\ (\Omega ct + b_1)\dot{x}_{2i} - q\epsilon_{ijk}x_{2j}B_k - \Omega cx_{1i} = b_2 \end{aligned} \tag{7.18}$$

Transformando las ecuaciones a través de las variables +, − podemos obtener el sistema de ecuaciones más sencillo; al restar y sumar las ecuaciones del sistema (7.18) respectivamente

$$(\Omega ct + a)(\dot{x}_{1i} - \dot{x}_{2i}) - q\epsilon_{ijk}(x_{1j} - x_{2j})B_k + \Omega(x_{1i} - x_{2i}) = 0 \tag{7.19}$$

$$(\Omega t + a)(\dot{x}_{1i} + \dot{x}_{2i}) - q\epsilon_{ijk}(x_{1j} + x_{2j})B_k - \Omega c(x_{2i} + x_{1i}) = b \tag{7.20}$$

Y aplicando la transformación

$$\begin{aligned} x_{1i} = \frac{1}{2}(x_{+,i} + x_{-,i}) \\ x_{2i} = \frac{1}{2}(x_{+,i} - x_{-,i}) \end{aligned} \tag{7.21}$$

Se generan sets de ecuaciones diferenciales independientes bajo las variables $(+,-)$

$$\begin{aligned}(\Omega ct+a)\dot{x}_{+i}-q\epsilon_{ijk}x_{+j}B_k-\Omega cx_{+i}-b&=0\\ \Omega c\frac{d}{dt}tx_{-i}-q\epsilon_{ijk}x_{-j}B_k+a\frac{d}{dt}x_{-i}&=0\end{aligned}\tag{7.22}$$

Desarrolando la primera ecuación (7.22) obtenemos un par de ecuaciones diferenciales para $x_{+,i}$

$$\begin{aligned}(\Omega ct+a)^2\ddot{x}_{+1}-\Omega c(\Omega ct+a)\dot{x}_{+1}+(q^2B^2+\Omega^2c^2)x_{+1}+\Omega cb&=0\\ (\Omega ct+a)^2\ddot{x}_{+2}-\Omega c(\Omega ct+a)\dot{x}_{+2}+(q^2B^2+\Omega^2c^2)x_{+2}+\Omega cb&=0\end{aligned}\tag{7.23}$$

cuyas soluciones para $x_{+,i}$ son idénticas salvo las constantes

$$\begin{aligned}x_{+,1}&=l_1(a+\Omega ct)^{1-i\omega}+l_2(a+\Omega ct)^{1+i\omega}-\frac{\Omega cb}{\phi}\\ x_{+,2}&=l_3(a+\Omega ct)^{1-i\omega}+l_4(a+\Omega ct)^{1+i\omega}-\frac{\Omega cb}{\phi}\end{aligned}\tag{7.24}$$

con $\omega=\dfrac{qB}{\Omega c}$ y $\phi=\Omega^2c^2+q^2B^2$.
En la segunda ecuación del set (7.22) consideramos el movimiento en un plano perpendicular al campo $\vec{B}$, y las constantes $a_1=b_1=a$, $a_2=b_2=b$; por lo que las ecuaciones son:

$$\begin{aligned}(\Omega ct+a)\dot{x}_{-1}-qBx_{-2}+\Omega cx_{-1}&=0\\ (\Omega ct+a)\dot{x}_{-2}+qBx_{-1}+\Omega cx_{-2}&=0\end{aligned}\tag{7.25}$$

Al desacoplar para cada una de las coordenadas x_{-1}, x_{-2} obtenemos un set de ecuaciones diferenciales de coeficientes variables

$$\begin{aligned}(\Omega ct+a)^2\frac{d^2}{dt^2}x_{-1}+(\Omega ct+a)\Omega c\frac{d}{dt}x_{-1}+(q^2B^2+\Omega^2c^2)x_{-1}&=0\\ (\Omega ct+a)^2\frac{d^2}{dt^2}x_{-2}+(\Omega ct+a)\Omega c\frac{d}{dt}x_{-2}+(q^2B^2+\Omega^2c^2)x_{-2}&=0\end{aligned}\tag{7.26}$$

Cuyas soluciones son

$$\begin{aligned}x_{-1}&=l_1\cos\left(\frac{\sqrt{\phi}}{\Omega ca}\log(a+\Omega ct)\right)+l_2\sin\left(\frac{\sqrt{\phi}}{\Omega ca}\log(a+\Omega ct)\right)\\ x_{-2}&=l_3\cos\left(\frac{\sqrt{\phi}}{\Omega ca}\log(a+\Omega ct)\right)+l_4\sin\left(\frac{\sqrt{\phi}}{\Omega ca}\log(a+\Omega ct)\right)\end{aligned}\tag{7.27}$$

Con $\phi=q^2B^2+\Omega^2c^2$.
Para las ecuaciones (7.25) si tomamos $a=0$ el sistema se puede reescribir

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(tx_{-1})-\frac{qB}{\Omega c}x_{-2}&=0\\ \frac{d}{dt}(tx_{-2})+\frac{qB}{\Omega c}x_{-1}&=0\end{aligned}\tag{7.28}$$

Al desacoplar; con $\varsigma=tx_{-1}$ y $\zeta=tx_{-2}$

$$\begin{aligned}t^2\frac{d^2}{dt^2}\varsigma+t\frac{d}{dt}\varsigma+\frac{q^2B^2}{\Omega^2c^2}\varsigma&=0\\ t^2\frac{d^2}{dt^2}\zeta+t\frac{d}{dt}\zeta+\frac{q^2B^2}{\Omega^2c^2}\zeta&=0\end{aligned}\tag{7.29}$$

Con soluciones para ς y ζ respectivamente:

$$\begin{aligned} \varsigma &= a_1 e^{i\omega b} e^{i\omega log(t)} + a_2 e^{-i\omega b} e^{-i\omega log(t)} \\ & a_1 e^{i\omega b} e^{i\omega log(t)} - a_2 e^{-i\omega b} e^{-i\omega log(t)} \end{aligned} \tag{7.30}$$

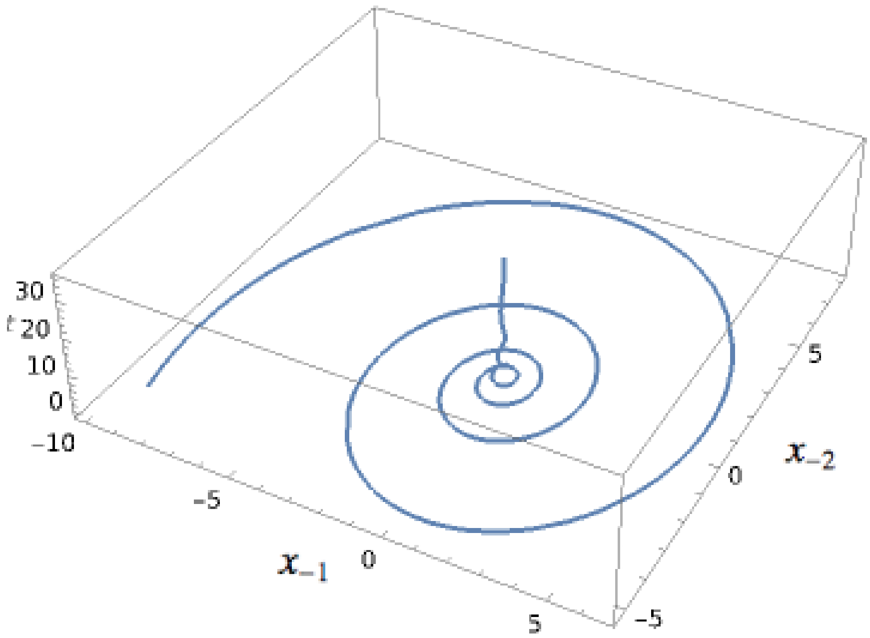
$$\begin{aligned} \zeta &= a_3 e^{i\omega b} e^{i\omega log(t)} + a_4 e^{-i\omega b} e^{-i\omega log(t)} \\ & a_3 e^{i\omega b} e^{i\omega log(t)} - a_4 e^{-i\omega b} e^{-i\omega log(t)} \end{aligned} \tag{7.31}$$

Que escritas en términos de senos y cosenos, las soluciones para las posiciones $x_{-1} = \frac{\varsigma}{t}$, $x_{-2} = \frac{\zeta}{t}$ son

$$\begin{aligned} x_{-1} &= \frac{1}{t}\left(a_1 \cos b\omega log(t) + a_2 \sin b\omega log(t)\right) \\ x_{-2} &= \frac{1}{t}\left(a_3 \cos b\omega log(t) + a_4 \sin b\omega log(t)\right) \end{aligned} \tag{7.32}$$

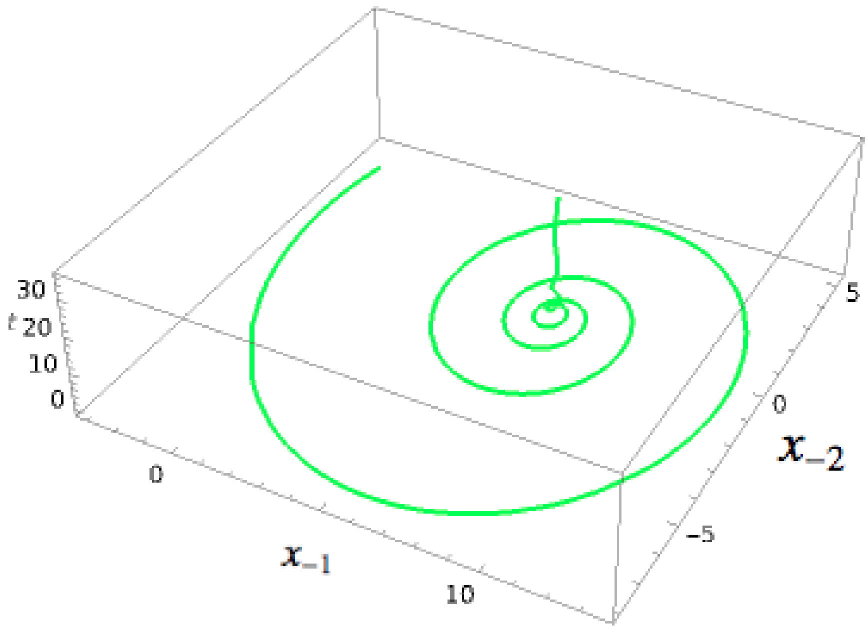
La amplitud y frecuencia del sistema queda determinada por el parámetro $\omega = \frac{qB}{\Omega c}$ y el valor de las constantes de integración, que para casos particulares pueden ser obtenidos como condiciones iniciales del problema.

Figura 7.1: Partícula con pérdida de energía en campo magnético constante



La trayectoria de una partícula cargada en un campo magnético constante es un movimiento helicoidal, es de esperarse que al existir disipación de energía en el movimiento de la partícula esta trayectoria se reduzca con el tiempo. Además, las soluciones (7.32) depende del la carga q de la partícula, como solo cambia su signo, la trayectoria de un positrón será:

Figura 7.2: partícula de carga positiva con pérdida de energía en campo magnético constante



Capítulo 8

Conclusiones

El método de Galley para sistemas disipativos llevado a la relatividad especial puede tener complicaciones debido a las componentes temporales de los cuadrivectores, estas desventajas se pueden trabajar al obtener lagrangianas con invariancia de reparametrizaciones del tiempo e invariancia de Lorentz. Las ecuaciones de movimiento para las particulas, generadas a través de la variación de la acción lagrangiana, representan sistemas de ecuaciones diferenciales no homogéneas, no lineales y de coeficientes variables, cuyas soluciones pueden obtenerse a través de un análisis perturbativo y dependerá de una solución conocida para un problema en particular. Al construir el Hamiltoniano del sistema de varias particulas nos encontramos con una constricción, ya que nuestra lagrangiana es homogénea en primer grado para las velocidades generalizadas y al llevarlo al formalismo disipativo se encontró indentico a cero. Las solución a las ecuaciones de movimiento del sistema, en términos de las variables de Bateman, cuando se aisla al campo eléctrico son en general complejas y se vuelven reales al considerar el tiempo como negativo. Mientras las soluciones con campo magnético constante y dos componentes espaciales representan espirales cuyo radio decrece con el tiempo, justo como se esperaría en un sistema disipativo. Adémas de darnos información sobre la carga asociada ya que las soluciones dependen de la frecuencia ciclotrón; Por lo cuál se puede concluir que el método de Galley funciona en la descripción relativista de sistemas disipativos.

Capítulo 9

Apéndice

Al correr la suma de los índices de la ecuación (6.28) :

$$\begin{aligned}
&\frac{q}{c}\left(x_2^0x_1^0\mathcal{F}_{00} + x_2^1x_1^0\mathcal{F}_{01} + x_2^2x_1^0\mathcal{F}_{02} + x_2^3x_1^0\mathcal{F}_{03}\right)\\
&+\frac{q}{c}\left(x_2^0x_1^1\mathcal{F}_{10} + x_2^1x_1^1\mathcal{F}_{11} + x_2^2x_1^1\mathcal{F}_{12} + x_2^3x_1^1\mathcal{F}_{13}\right)\\
&+\frac{q}{c}\left(x_2^0x_1^2\mathcal{F}_{20} + x_2^1x_1^2\mathcal{F}_{21} + x_2^2x_1^2\mathcal{F}_{22} + x_2^3x_1^2\mathcal{F}_{23}\right)\\
&+\frac{q}{c}\left(x_2^0x_1^3\mathcal{F}_{30} + x_2^1x_1^3\mathcal{F}_{31} + x_2^2x_1^3\mathcal{F}_{32} + x_2^3x_1^3\mathcal{F}_{33}\right.\\
&-\frac{\Omega}{2}(\vec{x}_1^2 - \vec{x}_2^2) - ct(a_{10} - a_{20}) - (x_1A(x_2) - x_2A(x_1)) = b
\end{aligned} \tag{9.1}$$

Este resultado es una constricción para las soluciones del sistema.
en la seccion (6.2) se analizan las ecuaciones de movimiento utilizando el tiempo propio de cada particula 6.32 obtuvimos una ecuación diferencial que al correr las sumas sobre los índices nos llevan a

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2}{d\tau_1^2}x_{10}(\tau_1) - \frac{q}{mc^3}(1+\frac{d\tau_2}{d\tau_1})\left(\frac{d}{d\tau_1}x_1^0\mathcal{F}_{00} + \frac{d}{d\tau_1}x_1^1\mathcal{F}_{10} + \frac{d}{d\tau_1}x_1^2\mathcal{F}_{20} + \frac{d}{d\tau_1}x_1^3\mathcal{F}_{30}\right)\\
&+\frac{q\Omega}{mc^3}\frac{d\tau_2}{d\tau_1}\left(x_1^0\mathcal{F}_0{}^0\mathcal{F}_{00} + x_1^0\mathcal{F}_0{}^1\mathcal{F}_{10} + x_1^0\mathcal{F}_0{}^2\mathcal{F}_{20} + x_1^0\mathcal{F}_0{}^3\mathcal{F}_{30}\right)\\
&+\frac{q\Omega}{mc^3}\frac{d\tau_2}{d\tau_1}\left(x_1^1\mathcal{F}_1{}^0\mathcal{F}_{00} + x_1^1\mathcal{F}_1{}^1\mathcal{F}_{10} + x_1^1\mathcal{F}_1{}^2\mathcal{F}_{20} + x_1^1\mathcal{F}_1{}^3\mathcal{F}_{30}\right)\\
&+\frac{q\Omega}{mc^3}\frac{d\tau_2}{d\tau_1}\left(x_1^2\mathcal{F}_2{}^0\mathcal{F}_{00} + x_1^2\mathcal{F}_2{}^1\mathcal{F}_{10} + x_1^2\mathcal{F}_2{}^2\mathcal{F}_{20} + x_1^2\mathcal{F}_2{}^3\mathcal{F}_{30}\right)\\
&+\frac{q\Omega}{mc^3}\frac{d\tau_2}{d\tau_1}\left(x_1^3\mathcal{F}_3{}^0\mathcal{F}_{00} + x_1^3\mathcal{F}_3{}^1\mathcal{F}_{10} + x_1^3\mathcal{F}_3{}^2\mathcal{F}_{20} + x_1^3\mathcal{F}_3{}^3\mathcal{F}_{30}\right)\\
&-\frac{q}{m^2c^5}\frac{d\tau_2}{d\tau_1}(a_1^0\mathcal{F}_{00} + a_1^1\mathcal{F}_{10} + a_1^2\mathcal{F}_{20} + a_1^3\mathcal{F}_{30}) - \frac{\Omega}{m^2c^4}a_{20} = 0\\
&\Rightarrow \frac{d^2}{d\tau_1^2}x_{10} - \frac{q}{mc^3}(1+\frac{d\tau_2}{d\tau_1})(\frac{d}{d\tau_1}x_{11}E_1^2 + \frac{d}{d\tau_1}x_{12}E_2^2 + \frac{d}{d\tau_1}x_{13}E_3^2)\\
&\frac{q\Omega}{mc^3}\left(ct(\vec{E}^2) + x_{11}(B_zE_y - B_yE_z) + x_{12}(B_zE_x - B_xE_z) + x_{11}(B_xE_y - B_yE_x)\right)\\
&+\frac{q}{m^2c^4}\frac{d\tau_2}{d\tau_1}(a_1^1E_x + a_1^2E_y + a_1^3E_z) - \frac{\Omega}{m^2c^4}a_{20} = 0
\end{aligned} \tag{9.2}$$

Donde $\dfrac{d\tau_2}{d\tau_1}=\left(\dfrac{c^2-\dot{x}_2^2}{c^2-\dot{x}_1^2}\right)^{1/2}$; tomando la suma sobre los índices ν para $\mu=1$

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^2}{d\tau_1^2}x_{11}(\tau_1)-\frac{q}{mc^3}(1+\frac{d\tau_2}{d\tau_1})\left(\frac{d}{d\tau_1}x_1^0\mathcal{F}_{01}+\frac{d}{d\tau_1}x_1^1\mathcal{F}_{11}+\frac{d}{d\tau_1}x_1^2\mathcal{F}_{21}+\frac{d}{d\tau_1}x_1^3\mathcal{F}_{31}\right)\\
&+\frac{q\Omega}{mc^3}\frac{d\tau_2}{d\tau_1}\left(x_1^0\mathcal{F}_0^{.,0}\mathcal{F}_{01}+x_1^0\mathcal{F}_0^{.,1}\mathcal{F}_{11}+x_1^0\mathcal{F}_0^{.,2}\mathcal{F}_{21}+x_1^0\mathcal{F}_0^{.,3}\mathcal{F}_{31}\right)\\
&+\frac{q\Omega}{mc^3}\frac{d\tau_2}{d\tau_1}\left(x_1^1\mathcal{F}_1^{.,0}\mathcal{F}_{01}+x_1^1\mathcal{F}_1^{.,1}\mathcal{F}_{11}+x_1^1\mathcal{F}_1^{.,2}\mathcal{F}_{21}+x_1^1\mathcal{F}_1^{.,3}\mathcal{F}_{31}\right)\\
&+\frac{q\Omega}{mc^3}\frac{d\tau_2}{d\tau_1}\left(x_1^2\mathcal{F}_2^{.,0}\mathcal{F}_{01}+x_1^2\mathcal{F}_2^{.,1}\mathcal{F}_{11}+x_1^2\mathcal{F}_2^{.,2}\mathcal{F}_{21}+x_1^2\mathcal{F}_2^{.,3}\mathcal{F}_{31}\right)\\
&+\frac{q\Omega}{mc^3}\frac{d\tau_2}{d\tau_1}\left(x_1^3\mathcal{F}_3^{.,0}\mathcal{F}_{01}+x_1^3\mathcal{F}_3^{.,1}\mathcal{F}_{11}+x_1^3\mathcal{F}_3^{.,2}\mathcal{F}_{21}+x_1^3\mathcal{F}_3^{.,3}\mathcal{F}_{31}\right)\\
&-\frac{q}{m^2c^5}\frac{d\tau_2}{d\tau_1}(a_1^0\mathcal{F}_{01}+a_1^1\mathcal{F}_{11}+a_1^2\mathcal{F}_{21}+a_1^3\mathcal{F}_{31})-\frac{\Omega}{m^2c^4}a_{21}=0\\
&\Rightarrow\frac{d^2}{d\tau_1^2}x_{11}-\frac{q}{mc^3}(1+\frac{d\tau_2}{d\tau_1})(\frac{d}{d\tau_1}(ct)E_x-\frac{d}{d\tau_1}x_{12}B_z+\frac{d}{d\tau_1}x_{13}B_y\\
&\frac{q\Omega}{mc^3}\left(ct(E_yB_z+E_zB_y)+x_{11}(E_x^2+B_z^2-B_y^2)+x_{12}(E_yE_x-B_xB_y)+x_{13}(E_zE_x-B_xB_z)\right)\\
&-\frac{q}{m^2c^5}\frac{d\tau_2}{d\tau_1}(a_1^1E_x+a_1^2B_z-a_1^3B_y)-\frac{\Omega}{m^2c^4}a_{21}=0
\end{aligned}
\tag{9.3}
$$

Tomando la suma sobre los índices ν para $\mu=2$

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^2}{d\tau_1^2}x_{12}(\tau_1)-\frac{q}{mc^3}(1+\frac{d\tau_2}{d\tau_1})\left(\frac{d}{d\tau_1}x_1^0\mathcal{F}_{02}+\frac{d}{d\tau_1}x_1^1\mathcal{F}_{12}+\frac{d}{d\tau_1}x_1^2\mathcal{F}_{22}+\frac{d}{d\tau_1}x_1^3\mathcal{F}_{32}\right)\\
&+\frac{q\Omega}{mc^3}\frac{d\tau_2}{d\tau_1}\left(x_1^0\mathcal{F}_0^{.,0}\mathcal{F}_{02}+x_1^0\mathcal{F}_0^{.,1}\mathcal{F}_{12}+x_1^0\mathcal{F}_0^{.,2}\mathcal{F}_{22}+x_1^0\mathcal{F}_0^{.,3}\mathcal{F}_{32}\right)\\
&+\frac{q\Omega}{mc^3}\frac{d\tau_2}{d\tau_1}\left(x_1^1\mathcal{F}_1^{.,0}\mathcal{F}_{02}+x_1^1\mathcal{F}_1^{.,1}\mathcal{F}_{12}+x_1^1\mathcal{F}_1^{.,2}\mathcal{F}_{22}+x_1^1\mathcal{F}_1^{.,3}\mathcal{F}_{32}\right)\\
&+\frac{q\Omega}{mc^3}\frac{d\tau_2}{d\tau_1}\left(x_1^2\mathcal{F}_2^{.,0}\mathcal{F}_{02}+x_1^2\mathcal{F}_2^{.,1}\mathcal{F}_{12}+x_1^2\mathcal{F}_2^{.,2}\mathcal{F}_{22}+x_1^2\mathcal{F}_2^{.,3}\mathcal{F}_{32}\right)\\
&+\frac{q\Omega}{mc^3}\frac{d\tau_2}{d\tau_1}\left(x_1^3\mathcal{F}_3^{.,0}\mathcal{F}_{02}+x_1^3\mathcal{F}_3^{.,1}\mathcal{F}_{12}+x_1^3\mathcal{F}_3^{.,2}\mathcal{F}_{22}+x_1^3\mathcal{F}_3^{.,3}\mathcal{F}_{32}\right)\\
&-\frac{q}{m^2c^5}\frac{d\tau_2}{d\tau_1}(a_1^0\mathcal{F}_{02}+a_1^1\mathcal{F}_{12}+a_1^2\mathcal{F}_{22}+a_1^3\mathcal{F}_{31})-\frac{\Omega}{m^2c^4}a_{22}=0\\
&\Rightarrow\frac{d^2}{d\tau_1^2}x_{12}-\frac{q}{mc^3}(1+\frac{d\tau_2}{d\tau_1})(\frac{d}{d\tau_1}(ct)E_y-\frac{d}{d\tau_1}x_{11}B_z-\frac{d}{d\tau_1}x_{13}B_x\\
&\frac{q\Omega}{mc^3}\left(ct(E_xB_z-E_zB_x)+x_{12}(E_y^2+B_z^2-B_x^2)+x_{11}(E_xE_y-B_xB_y)+x_{13}(E_zE_y-B_yB_z)\right)\\
&-\frac{q}{m^2c^5}\frac{d\tau_2}{d\tau_1}(a_1^0E_y+a_{11}B_z+a_{13}B_y)-\frac{\Omega}{m^2c^4}a_{22}=0
\end{aligned}
\tag{9.4}
$$

Tomando la suma sobre los índices ν para $\mu = 3$

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2}{d\tau_1^2}x_{13}(\tau_1) - \frac{q}{mc^3}(1+\frac{d\tau_2}{d\tau_1})\left(\frac{d}{d\tau_1}x_1^0\mathcal{F}_{03} + \frac{d}{d\tau_1}x_1^1\mathcal{F}_{13} + \frac{d}{d\tau_1}x_1^2\mathcal{F}_{23} + \frac{d}{d\tau_1}x_1^3\mathcal{F}_{33}\right)\\
&+ \frac{q\Omega}{mc^3}\frac{d\tau_2}{d\tau_1}\left(x_1^0\mathcal{F}_0^{\cdot,0}\mathcal{F}_{03} + x_1^0\mathcal{F}_0^{\cdot,1}\mathcal{F}_{13} + x_1^0\mathcal{F}_0^{\cdot,2}\mathcal{F}_{23} + x_1^0\mathcal{F}_0^{\cdot,3}\mathcal{F}_{33}\right)\\
&+ \frac{q\Omega}{mc^3}\frac{d\tau_2}{d\tau_1}\left(x_1^1\mathcal{F}_1^{\cdot,0}\mathcal{F}_{03} + x_1^1\mathcal{F}_1^{\cdot,1}\mathcal{F}_{13} + x_1^1\mathcal{F}_1^{\cdot,2}\mathcal{F}_{23} + x_1^1\mathcal{F}_1^{\cdot,3}\mathcal{F}_{33}\right)\\
&+ \frac{q\Omega}{mc^3}\frac{d\tau_2}{d\tau_1}\left(x_1^2\mathcal{F}_2^{\cdot,0}\mathcal{F}_{03} + x_1^2\mathcal{F}_2^{\cdot,1}\mathcal{F}_{13} + x_1^2\mathcal{F}_2^{\cdot,2}\mathcal{F}_{23} + x_1^2\mathcal{F}_2^{\cdot,3}\mathcal{F}_{33}\right)\\
&+ \frac{q\Omega}{mc^3}\frac{d\tau_2}{d\tau_1}\left(x_1^3\mathcal{F}_3^{\cdot,0}\mathcal{F}_{03} + x_1^3\mathcal{F}_3^{\cdot,1}\mathcal{F}_{13} + x_1^3\mathcal{F}_3^{\cdot,2}\mathcal{F}_{23} + x_1^3\mathcal{F}_3^{\cdot,3}\mathcal{F}_{33}\right)\\
&- \frac{q}{m^2c^5}\frac{d\tau_2}{d\tau_1}(a_1^0\mathcal{F}_{03} + a_1^1\mathcal{F}_{13} + a_1^2\mathcal{F}_{23} + a_1^3\mathcal{F}_{33}) - \frac{\Omega}{m^2c^4}a_{23} = 0\\
&\Rightarrow \frac{d^2}{d\tau_1^2}x_{13} - \frac{q}{mc^3}(1+\frac{d\tau_2}{d\tau_1})(\frac{d}{d\tau_1}(ct)E_z + \frac{d}{d\tau_1}x_{11}B_y + \frac{d}{d\tau_1}x_{12}B_x)\\
&\frac{q\Omega}{mc^3}\left(ct(E_xB_y + E_yB_x) + x_{12}(E_yE_z - B_zB_y) + x_{11}(E_xE_z - B_zB_x) + x_{13}(E_z^2 + B_y^2 + B_x^2)\right)\\
&- \frac{q}{m^2c^5}\frac{d\tau_2}{d\tau_1}(a_1^0E_z + a_{11}B_y + a_{12}B_x) - \frac{\Omega}{m^2c^4}a_{23} = 0
\end{aligned} \tag{9.5}$$

Bibliografía

Bateman, H. (1931). On dissipative systems and related variational principles. *Physical Review*, 38(1):815.

Bautista, M. A. R. (2020). particula relativista con disipación de enrgía. (8).

Currie, D., Jordan, T., and Sudarshan, E. (1963). Relativistic invariance and hamiltonian theories of interacting particles. *Reviews of Modern Physics*, 35(6):350.

Galley, C. R. (2013). Classical mechanics of nonconservative systems. *Physical review letters*, 110(2):174301.

Galley, C. R., Tsang, D., and Stein, L. C. (2014). The principle of stationary nonconservative action for classical mechanics and field theories. *arXiv preprint arXiv:1412.3082*.

Goldstein, H., Poole, C., and Safko, J. (2002). Classical mechanics.

Jackson, J. D. (1999). Classical electrodynamics.

Martínez-Pérez, N. and Ramírez, C. (2018). On the lagrangian description of dissipative systems. *Journal of Mathematical Physics*, 59(3):032904.

Rafelski, J. (2017). *Relativity Matters*. Springer.