

Topos de Grothendieck y algunas relaciones
con la mecánica cuántica: Álgebras
cuánticas como gavillas sobre un sitio

Daniel Joshua Anaya Palacios

Junio, 2021

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla



Departamento de Física
Facultad de Ciencias Físicomatemáticas

Topos de Grothendieck y algunas relaciones con la mecánica cuántica: Álgebras cuánticas como gavillas sobre un sitio

Daniel Joshua Anaya Palacios

- | | |
|------------|--|
| 1. Sinodal | Dr. José Juan Angoa Amador
Departamento de Matemáticas
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla |
| 2. Sinodal | Dr. Cesar Cejudo Castilla
Departamento de Matemáticas
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla |
| 3. Sinodal | Dr. Agustín Contreras Carreto
Departamento de Matemáticas
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla |
| Asesor | Dr. Iván Fernando Vilchis Montalvo
Departamento de Matemáticas
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla |

Mayo, 2021



Benemérita Universidad Autónoma de
Puebla

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICOMATEMÁTICAS

TOPOS DE GROTHENDIECK Y ALGUNAS
RELACIONES CON LA MECÁNICA CUÁNTICA:
ÁLGEBRAS CUÁNTICAS COMO GAVILLAS
SOBRE UN SITIO

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para obtener el grado de

Licenciado en Física

por

Daniel Joshua Anaya Palacios

bajo la dirección de

Dr. Iván Fernando Vilchis Montalvo

Agradecimientos

A mis padres, les debo todo lo bueno que pueda haber en mí.

Al profe Vilchis, por su tiempo y su paciencia para corregir y escuchar. A los miembros del jurado por sus aportaciones a este trabajo. A Manolo, por su amistad y apoyo en toda la licenciatura. A Orlando, por trabajar conmigo, acompañarme y motivarme a lo largo de este trabajo. A Georgi, Lau y Max por ser amigos y compañeros. A alumnos, maestros, personal administrativo y personal de mantenimiento de la FCFM, por sus aportaciones directas o indirectas a mi formación.

” *“No son esos dones, ni la ambición más ardiente, servida por una voluntad de hierro, los que nos permiten cruzar esos “círculos invisibles y imperiosos” que encierran nuestro Universo. Sólo la inocencia los cruza, sin saberlo y sin preocuparse, en los momentos en que estamos solos escuchando a las cosas, intensamente absorbidos en un juego de niños...”*

— **A. Grothendieck**
Cosechas y Siembras.

Índice

Introducción	1
1 La representación de álgebras cuánticas como gavillas	5
1.1 La topología de Grothendieck de las familias epimórficas . . .	5
1.2 Álgebras cuánticas como gavillas	13
Bibliografía	17

Introducción

El objetivo central de esta tesis es reconocer en la teoría de topos un aliado especialmente poderoso para el estudio de la física. Principalmente, la visión de un Topos como un espacio generalizado es lo que nos lleva a creer que la física se podría beneficiar de estas matemáticas. Además, el concepto de Topos nace de una generalización de un concepto topológico realizada gracias a las estructuras de la teoría de categorías, lo que en sí mismo ya debe sonar prometedor para la física, pues una idea central de la topología es estudiar la geometría invariante ante transformaciones continuas y la de las categorías es el estudio de las relaciones entre objetos que no se necesita conocer individualmente, ¿acaso no es eso lo que hace la física?!

Aplicar la teoría de topos a la física es una idea relativamente nueva, pero que ha sido presentada y defendida por matemáticos y físicos con seriedad e intensidad, por ejemplo, Wiliam F. Lawvere (1937), quien forma un taller sobre teoría de categorías y fundamentos de la termomecánica continua en Buffalo en mayo de 1982, además, en esa misma década, publica una serie de artículos en donde aplica la teoría de topos al estudio teórico de lo que llama “Continuum Physics”. Una década después, a finales del siglo pasado, y durante estas dos ultimas décadas, la teoría de topos ha sido sugerida por Andreas Döering y Chris J. Isham (1944) como una estructura matemática alternativa con la cual formular teorías físicas, en particular la teoría cuántica. Según ellos, cualquier intento de construir una interpretación realista de la teoría cuántica se basa en el teorema de Kochen-Specker. Con esto en mente, publican una serie de artículos, donde proponen un marco teórico desde la teoría de topos para el estudio de la teoría cuántica y la gravedad cuántica construyendo una equivalencia del teorema de Kochen-Specker en la teoría de topos, creando lo que se conoce como “quatum topos theory”. El trabajo de Isham sobre el enfoque de la gravedad cuántica desde la teoría de topos ha servido de inspiración para que otros físicos teóricos se interesen en la aplicación de los topos a la física, como es el caso de la física teórica Cecilia

Flori (1980), que en 2013 publica el libro “A first course in quantum topos theory”, donde hace un estudio de la teoría cuántica a través de la teoría de topos. Posteriormente, en 2018, publicó la continuación del libro anterior, “A second course in topos quantum theory”, donde continúa con el estudio de ese enfoque de la teoría cuántica. Aún así, no nos enfocaremos en abarcar todas las aplicaciones, sino solamente en dos ejemplos particularmente adecuados a las herramientas que la “parte matemática” de la tesis contiene, éstas resultan ser en mecánica cuántica.

Este es un trabajo matemático en mayor medida, puesto que hablar de topos no es tarea fácil, al menos al nivel licenciatura, y se necesita una buena cantidad de material puramente matemático para lograr siquiera asomar las posibilidades que le ofrece a la física. Esta tesis está realizada entre dos personas debido a las dificultades que presenta la meta escogida, puesto que no contamos con clases dirigidas a este tema ni una comunidad universitaria que nos ayude a resolver las dudas que nos han surgido (lo que es entendible por lo exótico del tema que hemos decidido estudiar), hemos conseguido progresar mediante el constante diálogo entre nosotros (los autores) y con el apoyo de dos o tres profesores que tienen intereses similares, uno de los cuales (el que más nos ha apoyado) es nuestro asesor.

La teoría de categorías ve la luz alrededor en los 40's, de la mano de Samuel Eilenberg (1913-1998) y Saunders Mc Lane (1904-2005), como una presentación de las matemáticas en términos de los conceptos fundamentales de transformación, y composición de transformaciones. A pesar de que esta es una teoría reciente, ya ha dado para un intento de fundamentación de las matemáticas, orquestado por W. Lawvere y S. Mc lane, además de tener presencia ya en distintos campos de investigación, siendo una teoría aplicada en Biología (Varenne, 2013, p. 167), Física, Lingüística (Bradley, 2018), Ciencias de la computación (Pitt et al., 1995, p. 1-3) e incluso con aplicaciones en la matemática que la precede. Es dentro del marco de esta teoría que A. Grothendieck (1928-2014) logra concretar la que es la idea central de este trabajo, la idea de topos. Esta surge de la generalización del concepto de gavilla topológica, que es un funtor cuyo dominio es la categoría de abiertos de un espacio topológico y codominio la categoría de conjuntos, que se generaliza en el sentido de que se cambia la categoría dominio por una categoría más general (solo necesita ser pequeña). Esta generalización, que consiste en pedir menos al dominio de un funtor y exigirle que conserve

ciertas propiedades, genera un gran número de nuevos conceptos y resultados que permiten remarcar nuevos contornos y dibujar nuevas figuras en antiguos paisajes, dando paso al estudio de *espacios generalizados*, como lo describe el mismo Grothendieck, siendo las categorías de gavillas sobre una categoría pequeña, determinadas por una estructura llamada Topología de Grothendieck, lo que define al concepto de Topos. Actualmente, la noción de Topos es algo distinta a la noción que Grothendieck estableció, pues la definición moderna no se realiza a partir de categorías de gavillas, sino de categorías con ciertas propiedades similares a las propiedades que tiene la categoría de conjuntos, esto se debe al trabajo de Lawvere y Tierney (Lawvere, 1971, p. 329-33), quienes llaman a esto un Topos elemental. En este trabajo llamaremos simplemente Topos a los Topos elementales de Lawvere y Topos de Grothendieck a los topos primitivos.

En cuanto a la realización y el contenido del trabajo, desde el inicio asumimos que el lector conoce las definiciones básicas de teoría de categorías; y los conceptos necesarios sobre teoría de topos (pregavillas y gavillas) se pueden consultar en la primera parte de este trabajo conjunto presentada en [3]. En el trabajo se presenta a la estructura de los topos de Grothendieck desde sus características (sin necesidad de verlos como categorías de gavillas) y una topología de Grothendieck (la de las familias epimórficas) que se considera importante pues, entre otras cosas, nos permite reconstruir a una categoría, que cumpla con ciertas (exigentes) hipótesis, como una categoría de gavillas sobre un sitio. Esto a su vez nos permite hablar de la otra aplicación en física, que se describe como *representar a las álgebras cuánticas como gavillas sobre una categoría de álgebras booleanas*.

La representación de álgebras cuánticas como gavillas

1

1.1 La topología de Grothendieck de las familias epimórficas

Desarrollaremos la idea central de este capítulo presentando un teorema que permite caracterizar a los Topos de Grothendieck independientemente de una categoría de gavillas. Éste es conocido como Teorema de Giraud pero antes de presentarlo necesitamos conocer algunas definiciones.

Definición 1.1.1. Sean $\mathcal{Q}$ una categoría que tiene límites finitos y colímites arbitrarios, y I un conjunto.

a) Si

$$\mathcal{E} = \sum_{i \in I} E_i$$

es el coproducto de una familia de objetos $E_i \in \mathcal{Q}$ y $q_i \in \mathcal{Q}(E_i, \mathcal{E})$ sus inclusiones.

- Este coproducto es **disjunto** si cada q_i es monomorfismo y, para cada diagrama

$$\begin{array}{ccc} & E_i & \\ & \downarrow q_i & \\ E_j & \xrightarrow{q_j} & \mathcal{E} \end{array} \quad (1.1)$$

con $i \neq j$, el pullback correspondiente, es el objeto terminal de $\mathcal{Q}$.

- El coproducto es **estable ante pullbacks** cuando, por cada morfismo $f \in \mathcal{Q}(Q, \mathcal{E})$, los diagramas

$$\begin{array}{ccc} & Q & \\ & \downarrow f & \\ E_i & \xrightarrow{q_i} & \mathcal{E} \end{array} \quad (1.2)$$

y

$$\begin{array}{ccc} & & Q \\ & & \downarrow f \\ \sum_{i \in I} E_i & \xrightarrow{\check{f}} & \mathcal{E} \end{array} \quad (1.3)$$

mediante sus pullbacks

$$\begin{array}{ccc} A_i & \longrightarrow & Q \\ \downarrow & & \downarrow f \\ E_i & \xrightarrow{q_i} & \mathcal{E} \end{array} \quad (1.4)$$

y

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \longrightarrow & Q \\ \downarrow & & \downarrow f \\ \sum_{i \in I} E_i & \xrightarrow{\check{f}} & \mathcal{E} \end{array} \quad (1.5)$$

producen el isomorfismo

$$\sum_{i \in I} A_i \cong \mathcal{A}.$$

- b) Una **relación de equivalencia** en un objeto $Q \in \mathcal{Q}$ es un par de morfismos $A, B \in \mathcal{Q}(R, Q)$, tales que $\langle A, B \rangle$ es un monomorfismo, representa a R como subobjeto de $Q \times Q$ y satisface los axiomas de reflexividad, simetría y transitividad expresados en forma diagramática. Esto es, si $\langle A, B \rangle \in \mathcal{Q}(R, Q \times Q)$

a) La flecha $\langle Id_Q, Id_Q \rangle$ se factoriza a través $\langle A, B \rangle$.

b) La flecha $\langle B, A \rangle \in \mathcal{Q}(R, Q \times Q)$ se factoriza a través de $\langle A, B \rangle$.

c) Si $R * R$ denota el pullback del diagrama

$$\begin{array}{ccc} & & R \\ & & \downarrow A \\ R & \xrightarrow{B} & Q \times Q \end{array} \quad (1.6)$$

es decir, el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} R * R & \xrightarrow{B'} & R \\ A' \downarrow & & \downarrow A \\ R & \xrightarrow{B} & Q \times Q \end{array} \quad (1.7)$$

es pullback. Entonces $\langle A \circ A', B \circ B' \rangle \in \mathcal{Q}(R * R, Q \times Q)$ se factoriza a través de $\langle A, B \rangle$.

El **cociente** Q/R de la relación de equivalencia R es el objeto Q/R determinado por el coigualador

$$R \begin{array}{c} \xrightarrow{A} \\ \xrightarrow{B} \end{array} Q \xrightarrow{k} Q/R. \quad (1.8)$$

- c) Si $u \in \mathcal{Q}(Q, Q')$, su **par nucleo** es un par de flechas paralelas $A, B \in \mathcal{Q}(R, Q)$ tales que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{B} & Q \\ A \downarrow & & \downarrow u \\ R & \xrightarrow{u} & Q' \end{array} \quad (1.9)$$

es pullback.

- d) Un diapasón

$$R \begin{array}{c} \xrightarrow{A} \\ \xrightarrow{B} \end{array} Q \xrightarrow{k} Q' \quad (1.10)$$

es **exacto** si es un coigualador y A, B son el par nucleo de k . Además es **estable** si permanece exacto ante pullbacks, esto es, para cada flecha $h \in \mathcal{Q}(Q'', Q')$ el diagrama

$$P_R \begin{array}{c} \xrightarrow{A'} \\ \xrightarrow{B'} \end{array} P_Q \xrightarrow{k'} P_{Q'} = Q'' \quad (1.11)$$

construido mediante los pullbacks

$$\begin{array}{ccc} P_Q & \xrightarrow{k'} & Q'' \\ h' \downarrow & & \downarrow h \\ Q & \xrightarrow{k} & Q' \end{array} \quad (1.12)$$

$$\begin{array}{ccc} P_R^A & \xrightarrow{A'} & P_Q \\ h'' \downarrow & & \downarrow h' \\ R & \xrightarrow{A} & Q \end{array} \quad (1.13)$$

$$\begin{array}{ccc}
P_R^B & \xrightarrow{B'} & P_Q \\
h'' \downarrow & & \downarrow h' \\
R & \xrightarrow{B} & Q
\end{array} \quad (1.14)$$

$$\begin{array}{ccc}
Q'' & \xrightarrow{Id_{Q''}} & Q'' \\
h \downarrow & & \downarrow h \\
Q' & \xrightarrow{Id_{Q'}} & Q'
\end{array} \quad (1.15)$$

es un diapasón exacto. Esto tiene sentido porque los siguientes diagramas

$$\begin{array}{ccc}
P_R^A & \xrightarrow{k' \circ A'} & Q'' \\
h \downarrow & & \downarrow h \\
R & \xrightarrow{k \circ A} & Q'
\end{array} \quad (1.16)$$

$$\begin{array}{ccc}
P_R^B & \xrightarrow{k' \circ B'} & Q'' \\
h \downarrow & & \downarrow h \\
R & \xrightarrow{k \circ B} & Q'
\end{array} \quad (1.17)$$

son pullbacks, por la Proposición ??, entonces, $P_R^A \cong P_R^B$ (por eso denotamos solo P_R), ya que los límites son únicos salvo isomorfismos y ambos son pullback del mismo digrama porque (1.10) es un diapasón. Este último par de diagramas también implica, claramente, que (1.11) es un diapasón.

- e) Sea $\{B_i | i \in I\}$ un conjunto de objetos de $\mathcal{Q}$. Se dice que $\{B_i | i \in I\}$ **genera** a $\mathcal{Q}$ cuando, para cuales quier par de flechas $u, v \in \mathcal{Q}(Q, Q')$, la identidad $f \circ w = g \circ w$ para todas las flechas $w \in \mathcal{Q}(B_i, Q)$, para algún B_i , implica que $f = g$. Esto se puede expresar de otra forma diciendo que $\{B_i | i \in I\}$ genera a $\mathcal{Q}$ si, siempre que dos flechas $f, g \in \mathcal{Q}(Q, Q')$ son diferentes, entonces existe una flecha $w \in \mathcal{Q}(B_i, Q)$ tal que $f \circ w \neq g \circ w$, para algún B_i .

Teorema 1.1.1. *Una categoría $\mathcal{Q}$, localmente pequeña, es un Topos de Grothendieck si y solo si tiene las siguientes propiedades:*

- I) $\mathcal{Q}$ tiene coproductos arbitrarios, que cumplen ser disjuntos y estables ante los pullbacks.

II) Cada epimorfismo en $\mathcal{Q}$ es un coigualador.

III) Cada relación de equivalencia en $\mathcal{Q}$ es un núcleo par y tiene un cociente.

IV) Cada diapasón exacto es estable.

V) Hay un conjunto de objetos de $\mathcal{Q}$ que genera a $\mathcal{Q}$.

La demostración de este teorema es muy larga y requiere de herramientas que no planeamos construir en esta tesis, por lo que solo nos asomaremos a la demostración de la suficiencia, es decir, veremos que $\mathcal{Q}$, cumpliendo I)-V), es un topos de Grothendieck. De ahora en adelante, consideraremos a $\mathcal{Q}$ una categoría que cumple las hipótesis del teorema de Giraud (localmente pequeña y cumple las cinco condiciones I)-V)) y a $\mathcal{B}$ una subcategoría plena de $\mathcal{Q}$, cuyos objetos son $\{B_i \in \mathcal{Q} | i \in I\}$ un conjunto que genera a $\mathcal{Q}$.

Definición 1.1.2. Sea $\{f_i\}_{i \in I}$ una familia de flechas, con cada $f_i \in \mathcal{B}(D_i, B)$. La familia $\{f_i\}_{i \in I}$ es una **familia epimórfica** en $\mathcal{B}$ si, dadas $f, g \in \mathcal{B}(B, B')$ tales que $f \circ f_i = g \circ f_i$, para toda $i \in I$, entonces, $f = g$.

Podemos pensar la definición dual, de familias monomorficas, pero no aporta a nuestros propósitos, en principio porque no las usaremos pero en general porque no forman cribas (recordemos que las cribas son los elementos que conforman topologías de Grothendieck), pues esas familias coinciden en sus dominios y no necesariamente en sus codominios.

Proposición 1.1.1. Una familia $\{f_i\}_{i \in I}$ es epimórfica si y solo si determina un epimorfismo mediante el coproducto.

Demostración. La primera parte de la demostración es precisar de qué morfismo hablamos al decir que lo determina una familia mediante el producto. Sea

$$S = \{g \in \mathcal{Q}(B, Q) | B \in \mathcal{B}\} \quad (1.18)$$

una familia de flechas en $\mathcal{Q}$, entonces, S se puede pensar como un cocono con vértice Q , para un coproducto indizado por las flechas de S . Si nombramos

$$\mathcal{S} = \sum_{g \in S} \text{Dom}(g)$$

(el coproducto de los dominios de todas las flechas en S) este es el colímite con las inclusiones $q_g \in \mathcal{Q}(S, \text{Dom}(g))$, entonces, sucede que, por la propiedad universal del coproducto, se determina un morfismo

$$\check{f} \in \mathcal{Q}(S, Q)$$

único con la propiedad de que $g = \check{f} \circ q_g$.

Ahora, demostremos que esta flecha única con esa propiedad es epimorfismo si y solo si S es una familia epimórfica.

$\Rightarrow$] Si $u, v \in \mathcal{Q}(Q, Q')$ tales que $u \circ \check{f} = v \circ \check{f}$ sucede que $u \circ \check{f} \circ q_g = v \circ \check{f} \circ q_g$ por lo que $u \circ g = v \circ g$ para toda $g \in S$ por lo tanto $u = v$, es decir, $\check{f}$ es epimorfismo.

$\Leftarrow$] Si $u, v \in \mathcal{Q}(Q, Q')$ tales que $u \circ g = v \circ g$ para toda $g \in S$ sucede también que $u \circ \check{f} \circ q_g = v \circ \check{f} \circ q_g$ pero, por la Proposición ??, esto implica que $u \circ \check{f} = v \circ \check{f}$, por lo tanto $u = v$, es decir, S es una familia epimórfica. $\square$

En estos términos

Proposición 1.1.2. Sean I un conjunto $\mathcal{Q}$ una categoría y $\{C_i | i \in I\}$ un subconjunto de los objetos de $\mathcal{Q}$. Se dice que $\{C_i | i \in I\}$ **genera** a $\mathcal{Q}$ cuando el conjunto

$$\bigcup_{i \in I} \mathcal{Q}(C_i, Q) \quad (1.19)$$

es una familia epimórfica en $\mathcal{Q}$ para cada $Q \in \mathcal{Q}$.

Demostración. Es claro de las definiciones de generar y familia epimórfica. $\square$

Ahora bien, como queremos construir la **TG** de las familias epimórficas tenemos que preguntarnos, ¿las familias epimórficas son cribas? la respuesta es que generalmente no, porque, por ejemplo, una familia epimórfica no tiene por qué ser cerrada bajo la composición, un ejemplo fácil de esto lo podemos encontrar en $Vec_{\mathbb{R}}$, la categoría de los espacios vectoriales sobre los números reales. Consideremos las flechas $f_1, f_2 \in Vec_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ definidas para $r \in \mathbb{R}$ por

$$f_1(r) = (r, 0)$$

$$f_2(r) = (0, r)$$

que claramente son lineales. Si existen flechas $f, g \in \text{Vec}(\mathbb{R}^2, \mathcal{V})$ tales que $f \circ f_1 = g \circ f_1$ y $f \circ f_2 = g \circ f_2$ sucede que $f = g$, ya que para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ se cumplirá que

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x, 0) + f(0, y) \\ &= g(x, 0) + g(0, y) \\ &= g(x, y) \end{aligned}$$

usando parte de la linealidad de los morfismos en $\text{Vec}_{\mathbb{R}}$, entonces, la familia de flechas $\{f_1, f_2\}$ es epimórfica y no es cerrada bajo la composición. Ahora, claramente, toda criba que contenga a una familia epimórfica es una familia epimórfica, en particular, toda criba que contenga un epimorfismo es una familia epimórfica, aunque las conversas (toda criba que es una familia epimórfica contiene un epimorfismo o un subconjunto propio que es por si mismo familia epimórfica) no son ciertas, el ejemplo anterior también deja claro eso. Luego, definimos la colección de cribas sobre un objeto $B \in \mathcal{B}$ por

$$\text{Cov}(B) = \{S \in \Omega(B) \mid S \text{ es una familia apimórfica}\}$$

entonces, como la identidad de un objeto B es, particularmente, epimorfismo y la criba $\max(B)$ la contiene, siempre sucede que, $\max(B) \in \text{Cov}(B)$. También, si una criba S sobre un objeto B , es tal que, $S \cdot f \in \text{Cov}(D)$ para toda $f \in R$ con $R \in \text{Cov}(B)$ entonces $S \in \text{Cov}(B)$, para ver esto, supongamos que existen $u, v \in \mathcal{B}(B, B')$ tales que $u \circ k = v \circ k$ para toda $k \in S$, en particular para cada $k = f \circ g$, con $g \in S \cdot f$, esto implica que

$$\begin{aligned} u \circ (f \circ g) &= v \circ (f \circ g) \\ (u \circ f) \circ g &= (v \circ f) \circ g \end{aligned}$$

para toda $g \in S \cdot f \in \text{Cov}(D)$, por lo que $u \circ f = v \circ f$, pero esto sucede también para cada $f \in R \in \text{Cov}(B)$ por lo tanto $u = v$. Por lo que, Cov cumple las condiciones i) y iii) de la definición "tal", para la condición iii) necesitamos que los coproductos sean estables ante pullbacks, pero esto está cubierto en las hipótesis del teorema de Giraud (específicamente en I)).

Así, la última pieza para conseguir construir la **TG** de familias apimórficas es la siguiente. Si S una criba sobre B es una familia epimórfica, entonces,

$S \cdot f$ es también una familia epimórfica para cualquier $f \in \mathcal{B}(B', B)$. Para demostrar esto, si $h \in S$ consideremos el diagrama

$$\begin{array}{ccc} & B' & \\ & \downarrow f & \\ B'' & \xrightarrow{h} & B \end{array} \quad (1.20)$$

cuyo pullback en $\mathcal{Q}$ denotamos por

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{h'} & B' \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ B'' & \xrightarrow{h} & B \end{array} \quad (1.21)$$

Siendo A un objeto de $\mathcal{Q}$ pero no necesariamente de $\mathcal{B}$, aún así, como $\mathcal{B}$ genera a $\mathcal{Q}$, el conjunto (1.19) es una familia epimórfica para cualquier $Q \in \mathcal{Q}$, en particular para A , y $g \circ h' \in S \cdot f$ puesto que, como S es criba y $\mathcal{B}$ es plena, entonces, $g \circ h' \circ f \in S$. Ahora, si demostramos que la familia $\{h' | h \in S\}$, con h' obtenida a través del pullback como en (1.21), es una familia epimórfica, tendremos que la familia $S' = \{u \circ h' | u \in \mathcal{Q}(B, Q)\}$ también es una familia epimórfica. Esto se sigue de que el pullback del diagrama

$$\begin{array}{ccc} & R & \\ & \downarrow f & \\ R & \xrightarrow{\check{f}} & Q \times Q \end{array} \quad (1.22)$$

es decir

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{\check{f}'} & B' \\ p_S \downarrow & & \downarrow f \\ \mathcal{S} & \xrightarrow{\check{f}} & B \end{array} \quad (1.23)$$

cumple que $\check{f}'$ es epimorfismo porque $\check{f}$ lo es y los pullbacks los preservan y gracias a que en la categoría $\mathcal{Q}$ los pullbacks preservan coproductos, el pullback de $\check{f}$ se corresponde al coproducto de los pullbacks de las flechas $h \in S$, por lo que la familia de flechas S' es epimórfica, por lo tanto $S \cdot f$ también lo es.

Acabamos de demostrar que las familias epimórficas sobre cada objeto B forman una **TG**.

Esta **TG** nos permite afirmar que $\mathcal{Q}$ es un topos de Grothendieck, como queríamos, esto mediante el siguiente resultado.

Proposición 1.1.3. Si $\mathcal{B}$ es una subcategoría pequeña de $\mathcal{Q}$ la cual genera a la categoría $\mathcal{Q}$ y Cov es la topología de Grothendieck en $\mathcal{B}$ de las familias epimórficas. Entonces, $\mathcal{Q}$ es equivalente a $Gav(\mathcal{B}, Cov)$

La idea inicial de la demostración de ese corolario se encuentra en el Teorema ?? que ya demostramos en esta tesis. Aplicándolo aquí al funtor inclusión $\mathcal{I} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{Q}$, como $\mathcal{B}$ es localmente pequeña y $\mathcal{Q}$ localmente pequeña y cocompleta, se da la adjunción

$$Set^{\mathcal{B}^{op}}(X, y_Q) \cong \mathcal{Q}(Colim(\mathcal{I} \circ \mathcal{U}_X), Q) \quad (1.24)$$

Esta adjunción se convierte en una equivalencia como consecuencia de que, para la TG de familias epimórficas, los funtores representables son gavillas, por lo que la restricción de la adjunción a la categoría $Gav(\mathcal{B}, Cov)$, es decir,

$$Gav(G, y_Q) \cong \mathcal{Q}(Colim(\mathcal{I} \circ \mathcal{U}_G), Q) \quad (1.25)$$

es una equivalencia de categorías. La demostración de todo esto se encuentra a lo largo de la parte 4 del apéndice de [4].

La segunda parte de este capítulo es la aplicación directa de este resultado en la física. Esto es, permite demostrar que la categoría de álgebras cuánticas $\mathcal{Q}$ es un topos de Grothendieck y que un álgebra cuántica Q es una gavilla sobre la subcategoría que genera Q , que resulta ser una categoría de álgebras booleanas.

1.2 Álgebras cuánticas como gavillas

Sea $(Q, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado y sea $R \subset Q$. Una **cota superior** de R es un elemento $s \in Q$ tal que $x \leq s$ para todo $x \in R$. Una **cota inferior** para R es un elemento $s' \in Q$ tal que $s' \leq x$ para todo $x \in R$. Una superior (inferior) se denomina **supremo (ínfimo)** si es menor o igual (mayor o igual) a cualquier otra cota superior (inferior). Dados $x, y \in Q$ denotaremos $x \vee y$ al supremo y $x \wedge y$ al ínfimo, si es que existen.

Definición 1.2.1. Sea $(B, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado. $(B, \leq)$ es un **álgebra booleana** si:

- i) B tiene un primer elemento, llamémosle 0 , y un último elemento, denotémoslo 1 . Con esto queremos decir que $0 \leq x \leq 1$ para todo $x \in Q$.

ii) Todo par de elementos $x, y \in B$ tiene supremo e ínfimo.

iii) Para todo $x \in B$, existe $\neg x \in B$ tal que $x \vee \neg x = 1$ y $x \wedge \neg x = 0$. A este $\neg x$ se le conoce como el complemento de x .

iv) Si $x, y, z \in B$, sucede que $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee z$.

Si B y B' son álgebras booleanas. Un **morfismo booleano** o morfismo entre álgebras booleanas $f : B \rightarrow B'$ es un morfismo entre los conjuntos parcialmente ordenados (preserva orden) que envía el último elemento de B al último elemento de B' ($f(1) = 1$) y respeta $\vee, \wedge$ y $\neg$, es decir, dados $x, y \in B$

- $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$
- $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$
- $f(\neg x) = \neg f(x)$

Proposición 1.2.1. Si $(B, \leq)$ es un álgebra booleana. Para todo $x \in B$ sucede que $\neg x$ es único.

Demostración. Sea $x \in B$, supongamos que $\neg x$ y y son tales que $x \vee \neg x = 1$, $x \wedge \neg x = 0$ y $x \vee y = 1, x \wedge y = 0$. Entonces, por iv)

$$\begin{aligned}\neg x \wedge (x \vee y) &= (\neg x \wedge x) \vee y \\ \neg x \wedge 1 &= 0 \vee y\end{aligned}$$

Por lo tanto $\neg x = y$. □

Como corolario de este resultado $\neg \neg x = x$.

En el artículo 6 se define

Definición 1.2.2. Un **álgebra cuántica** es un conjunto parcialmente ordenado $(Q, \leq)$ y una operación $(-)^* : Q \rightarrow Q$ que cumplen, para todo $x \in Q$, las siguientes condiciones:

- a) Q tiene último elemento 1, es decir, existe $1 \in Q$ tal que $x \leq 1$.
- b) $x^{**} = x$.

c) $x \vee x^* = 1$.

d) Si $x' \in Q$ tal que $x \leq x'$ entonces $x'^* \leq x^*$.

e) Si $x \leq x'$ entonces $x \vee x'^* \in Q$.

f) Si $x \vee y = 1$ y $x \wedge y = 1^*$ entonces $y = x^*$.

Si Q, Q' son álgebras cuánticas. Un **morfismo cuántico** o morfismo de álgebras cuánticas $f : Q \rightarrow Q'$ es un morfismo entre conjuntos parcialmente ordenados (preserva orden) que cumple las siguientes condiciones:

- $f(1) = 1$
- $f(x^*) = f(x)^*$
- Si $x, y \in Q$ tales que $x \leq y^*$ entonces $f(x \vee y) \leq f(x) \vee f(y)$

Un ejemplo de álgebras cuánticas se da en el formalismo de espacios de Hilbert de la teoría cuántica, pues, los subespacios cerrados $Sub(\mathcal{H})$ de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ con la operación

$$\begin{aligned} (-)^* : Sub(\mathcal{H}) &\rightarrow Sub(\mathcal{H}) \\ \mathcal{V} &\mapsto \mathcal{V}^* = \mathcal{V}^\perp \end{aligned}$$

Siendo, $\mathcal{V}^\perp$ el complemento ortogonal cerrado de $\mathcal{V}$, para un espacio de Hilbert complejo, es un álgebra cuántica [6].

Otro ejemplo son las álgebras booleanas, como se ve a continuación.

Proposición 1.2.2. *Toda álgebra booleana es un álgebra cuántica y todo morfismo booleano es un morfismo cuántico.*

Demostración. Sea $(B, \leq)$ un álgebra booleana. a) se cumple por i), e) se cumple por ii) y si definimos

$$\begin{aligned} (-)^* : B &\rightarrow B' \\ x &\mapsto x^* = \neg x \end{aligned}$$

entonces, claramente, se cumplen b), c), d) y f).

Ahora, si B, B' son álgebras booleanas, entonces, también son álgebras cuánticas. Luego, si $f : B \rightarrow B'$ es un morfismo de álgebras booleanas, entonces,

preserva orden, cumple que $f(1) = 1$, $f(\neg x) = \neg f(x)$ y preserva ínfimos y supremos. Entonces, en particular, es morfismo de álgebras cuánticas. $\square$

Llamaremos $\mathcal{Q}$ a la categoría cuyos objetos son álgebras cuánticas y cuyas flechas son los morfismos cuánticos entre ellas y $\mathcal{B}$ a la categoría de álgebras booleanas, es decir, cuyos objetos son álgebras booleanas y sus flechas son morfismos de álgebras booleanas. Como corolario de la proposición 1.2.2, $\mathcal{B}$ es una subcategoría plena de $\mathcal{Q}$. Además $\mathcal{Q}$ es pequeña, cocompleta y $\mathcal{B}$ la genera [6]. Entonces, por la proposición 1.1.3, la categoría de álgebras cuánticas es equivalente a $Gav(\mathcal{B}, Cov)$ con Cov la **TG** de familias epimórficas.

Este resultado es de gran relevancia física: las estructuras necesarias para describir el comportamiento de los sistemas cuánticos representan un salto conceptual dentro de las reglas globalmente booleanas que caracterizan a los sistemas clásicos [6].

De acuerdo a esto, el estudio de estos comportamientos no se puede hacer desde los sistemas globalmente booleanos, por esa razón, el estudio de un objeto globalmente no booleano mediante una familia de objetos más simples adecuadamente relacionados, logrado en este sentido por la equivalencia de la categoría de álgebras cuánticas con la de gavillas sobre la subcategoría de álgebras booleanas que la genera, implica que aunque la información contenida en un sistema cuántico, en general, no puede recuperarse completamente al trasladarse de un lenguaje a otro y de regreso, es posible especificar las condiciones para una noción consistente de variaciones mutuamente dependientes en la información compartida entre las estructuras de naturaleza booleana y las de naturaleza cuántica. Esta dependencia se refleja en la adjunción (1.24). Además, cómo esta adjunción restringida a la categoría de gavillas correcta es una equivalencia de categorías, (1.25), sucede que la información puede reconstruirse completamente bajo cierto tipo de condiciones, esto es, cuando las pregavillas cumplen ser compatibles con la topología de Grothendieck de familias epimórficas [8].

Bibliografía

- [1] Leinster, T. (2014). Basic Category Theory. Cambridge University Press.
- [2] MacLane, S., & Moerdijk, I. (1992). Sheaves in geometry and logic. New York: Springer.
- [3] Pérez, O. (2021). Topos de Grothendieck y algunas relaciones con la mecánica cuántica. Benémerita Universidad Autónomas de Puebla.
- [4] van Oosten, J. (2014). Lecture Notes. Category Theory and Topos Theory, Spring 2016. <https://webpace.science.uu.nl/~ooste110/cattoptheory16.html>.
- [5] Zafiris, E. (2004). Quantum Event Structures from the Perspective of Grothendieck Topoi. Foundations of Physics, 34, 1063-1090. <https://doi.org/10.1023/B:F00P.0000037623.08379.df>.
- [6] Zafiris, E. (2001). On quantum event structures. Part I: The categorical scheme, Found. Phys. Lett. 14(2), 147.
- [7] Zafiris, E. (2001). On quantum event structures. Part II: Interpretational aspects, Found.Phys. Lett. 14(2), 167.
- [8] Rawling, J. P. and Selesnick, S. A. (2000). Orthologic and quantum logic. models and computational elements, Journal of the Association for Computing Machinery 47, 721.