Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Ejemplos de transformaciones canonoides

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

Licenciado en Física

por

Ricardo Arturo Nuñez Tenorio

Asesorado por

Gerardo Francisco Torres del Castillo

Puebla Pue.
11 de abril de 2024

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Ejemplos de transformaciones canonoides

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

Licenciado en Física

por

Ricardo Arturo Nuñez Tenorio

Asesorado por

Gerardo Francisco Torres del Castillo

Puebla Pue.
11 de abril de 2024

Título: Ejemplos de transformaciones canonoides
Estudiante: Ricardo Arturo Nuñez Tenorio

COMITÉ

Gilberto Silvia Ortigoza
Presidente

Iraís Rubalcava García
Secretario

Ana Aurelia Aviléz López
Vocal

Mercedes Paulina Velázquez Quesada
Vocal

Gerardo Francisco Torres del Castillo
Asesor

Agradecimientos

Agradezco al Dr. Gerardo por su apoyo y paciencia en todo el proceso de la tesis, y a todos los profesores que tuve a lo largo de la carrera. También quiero agradecer a mi madre, Guillermina, y a mi familia por su amor y sacrificios. Finalmente quiero agradecer a todos mis compañeros en especial a Berenice, Claudia, Sabine y Natalia por su apoyo constante y por creer en mi en los momentos más difíciles.

Índice general

Resumen

Esta tesis presenta ocho ejemplos de transformaciones canonoides, tres de los ejemplos corresponden al sistema de una partícula cargada en un campo magnético uniforme, cuatro a la partícula libre y uno al oscilador armónico simple bidimensional. En algunos de los ejemplos presentados se obtienen cantidades conservadas asociadas a coordenadas ignorables. En siete de los ejemplos se utiliza un método para obtener transformaciones canonoides asociadas a cantidades conservadas, siendo solo en el caso del oscilador armónico bidimensional donde se presenta una cantidad conservada no trivial asociada directamente con la transformación.

Palabras clave: *Transformaciones canonoides, Mecánica clásica.*

Capítulo 1

Introducción

Las herramientas más importantes de la mecánica teórica son el formalismo Lagrangiano y el Hamiltoniano, siendo este último de mayor importancia al existir transformaciones que hacen triviales a la función hamiltoniana y, por lo tanto, a las ecuaciones de movimiento. Haciendo uso de la función hamiltoniana se obtienen las denominadas ecuaciones de Hamilton o ecuaciones canónicas, las cuales corresponden a un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. Estas ecuaciones están en función del conjunto de coordenadas y momentos generalizados y posiblemente del tiempo, siendo estos funcionalmente independientes entre sí. La solución de este conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias corresponde a las de movimiento del sistema tratado.

En [1] se presenta el desarrollo completo del formalismo Hamiltoniano y Lagrangiano a partir de nociones de cálculo sin necesidad de tratar temas como el cálculo variacional, a diferencia de [2] donde se presenta utilizando la deducción a partir de la mecánica Newtoniana y a partir del cálculo variacional. Por otra parte, [3] presenta la deducción de las ecuaciones de Euler-Lagrange a partir de nociones geométricas y el principio variacional de Hamilton. Finalmente, en [4] y [5] se desarrolla desde el concepto del principio de Hamilton.

En el formalismo Hamiltoniano se presentan los denominados paréntesis de Poisson cuya principal utilidad es facilitar las cuentas para determinar las constantes de movimiento, presentado muy brevemente en [5] o con mucho más detalle en [1] y [2]. Además, se utilizan para definir a las transformaciones canónicas, estas se definen como aquellas que conservan la forma de los paréntesis de Poisson para cualquier hamiltoniana [6]. Por otra parte, a toda transformación que conserva la forma de las ecuaciones de Hamilton y no sea canónica se le denominada transformación canonoide [1]. Las transformaciones canónicas son tratadas con menor o mayor detalle en [2]-[5] a diferencia de las transformaciones canonoides. Estas últimas presentan la dificultad de aparentemente no contar con una función generatriz, es decir, no se encontró en la literatura revisada sobre la existencia de dicha función. Por ende, al no contar con una función generatriz, se dificulta la obtención de dichas transformaciones.

Este trabajo presenta ejemplos de transformaciones canonoides en ejemplos sencillos en donde se trata de hallar regularidades aplicables a otros problemas, con el propósito de ampliar los ejemplos en la literatura, siendo estos una alternativa a las transformaciones canónicas utilizadas para hacer triviales a las funciones hamiltonianas. En el capítulo 2 se presentan las condiciones para la existencia de una transformación canonoide y en el capítulo 3, se presentan algunos ejemplos para la función hamiltoniana de una partícula cargada en un campo magnético uniforme, de la partícula libre y del oscilador armónico simple bidimensional. Es necesario mencionar que, debido al método empleado para buscar las transformaciones canonoides, las cantidades conservadas que se pueden hallar son triviales en los primeros 7 ejemplos, al considerarse que la matriz M tiene entradas constantes. Además, la función hamiltoniana de los ejemplos 2 al 8 son cantidades conservadas dado que ni las hamiltonianas ni las transformaciones de coordenadas dependen explícitamente del tiempo.

Capítulo 2

Transformaciones canónicas y canonoides

En el formalismo Hamiltoniano se tienen las ecuaciones de Hamilton, las cuales involucran a la función hamiltoniana H del sistema y están dadas de la siguiente manera,

$$\dot{q}_i = \left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\right)_{q,p,t}, \qquad \dot{p}_i = -\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)_{q,p,t},$$

donde q_i y p_i son coordenadas y momentos generalizados para $i = 1, 2, 3 \ldots, n$. En este trabajo se buscaron ejemplos de transformaciones canonoides con $Q_i = Q_i(q_j, p_j, t)$ y $P_i = P_i(q_j, p_j, t)$, donde fue conveniente utilizar los paréntesis de Lagrange expresados como

$$[u, v] \equiv \frac{\partial Q_j}{\partial u}\frac{\partial P_j}{\partial v} - \frac{\partial P_j}{\partial u}\frac{\partial Q_j}{\partial v}, \tag{2.1}$$

donde u y v son dos variables arbitrarias del conjunto q_i, p_i, t y $j = 1, 2, \ldots, n$; además, el índice repetido indica suma implícita. Es importante recalcar que, se utilizan los paréntesis de Lagrange en vez de los paréntesis de Poisson debido que simplifican la notación de las ecuaciones presentadas. Como se mencionó previamente, una transformación canonoide es aquella que preserva la forma de las ecuaciones de Hamilton y no es canónica [1]. Por lo tanto, considerando la definición de transformación canonoide, Q_i y P_i son las nuevas coordenadas y momentos generalizados, es decir, corresponden a una transformación de coordenadas que cumplen

$$\dot{Q}_i = \left(\frac{\partial K}{\partial P_i}\right)_{Q,P,t}, \qquad \dot{P}_i = -\left(\frac{\partial K}{\partial Q_i}\right)_{Q,P,t}, \tag{2.2}$$

donde K es la nueva función hamiltoniana. Como Q_i y P_i dependen de las coordenadas q_i y p_i, se puede utilizar la regla de la cadena para obtenerse que

$$\frac{\partial K}{\partial q_i} = \frac{\partial K}{\partial Q_j}\frac{\partial Q_j}{\partial q_i} + \frac{\partial K}{\partial P_j}\frac{\partial P_j}{\partial q_i}, \qquad \frac{\partial K}{\partial p_i} = \frac{\partial K}{\partial Q_j}\frac{\partial Q_j}{\partial p_i} + \frac{\partial K}{\partial P_j}\frac{\partial P_j}{\partial p_i}. \tag{2.3}$$

Sustituyendo la ecuación (2.2) en (2.3) se cumple que

$$\frac{\partial K}{\partial q_i} = -\dot{P}_j\frac{\partial Q_j}{\partial q_i} + \dot{Q}_j\frac{\partial P_j}{\partial q_i}, \qquad \frac{\partial K}{\partial p_i} = -\dot{P}_j\frac{\partial Q_j}{\partial p_i} + \dot{Q}_j\frac{\partial P_j}{\partial p_i}. \tag{2.4}$$

Por lo tanto, utilizando la definición de derivada total en la ecuación (2.4) y agrupando términos se obtiene que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial K}{\partial q_i} &= \left(\frac{\partial Q_j}{\partial q_i}\frac{\partial P_j}{\partial p_k} - \frac{\partial P_j}{\partial q_i}\frac{\partial Q_j}{\partial p_k}\right)\frac{\partial H}{\partial q_k} - \left(\frac{\partial Q_j}{\partial q_i}\frac{\partial P_j}{\partial q_k} - \frac{\partial P_j}{\partial q_i}\frac{\partial Q_j}{\partial q_k}\right)\frac{\partial H}{\partial p_k} + \frac{\partial Q_j}{\partial t}\frac{\partial P_j}{\partial q_i} - \frac{\partial P_j}{\partial t}\frac{\partial Q_j}{\partial q_i}, \\
\frac{\partial K}{\partial p_i} &= \left(\frac{\partial Q_j}{\partial p_i}\frac{\partial P_j}{\partial p_k} - \frac{\partial P_j}{\partial p_i}\frac{\partial Q_j}{\partial p_k}\right)\frac{\partial H}{\partial p_k} - \left(\frac{\partial Q_j}{\partial p_i}\frac{\partial P_j}{\partial q_k} - \frac{\partial P_j}{\partial p_i}\frac{\partial Q_j}{\partial p_i}\right)\frac{\partial H}{\partial q_k} + \frac{\partial Q_j}{\partial t}\frac{\partial P_j}{\partial p_i} - \frac{\partial P_j}{\partial t}\frac{\partial Q_j}{\partial p_i},
\end{aligned} \tag{2.5}$$

donde $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$. La ecuación anterior se simplifica utilizando los paréntesis de Lagrange presentados previamente, dando una expresión más compacta. Usando (2.1) se reescribe la ecuación (2.5) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial K}{\partial q_i} &= [q_i, p_k]\frac{\partial H}{\partial q_k} - [q_i, q_k]\frac{\partial H}{\partial p_k} + [t, q_i], \\
\frac{\partial K}{\partial p_i} &= [p_i, p_k]\frac{\partial H}{\partial q_k} - [p_i, q_k]\frac{\partial H}{\partial p_k} + [t, p_i].
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Estas ecuaciones son la condición necesaria para la existencia de las nuevas coordenadas Q_i y P_i, es decir, si se cumple (2.6) entonces existen $Q_i = Q_i(q_j, p_j, t)$ y $P_i = P_i(q_j, p_j, t)$ para la función hamiltoniana H tal que se obtiene la nueva función hamiltoniana K. Además, con ellas se obtiene a K en función de las coordenadas originales q_i, p_i y posiblemente t. Por lo tanto, se necesita que la función K exista y para ello se requiere la condición de integrabilidad

$$\frac{\partial^2 K}{\partial x_\beta \partial x_\alpha} - \frac{\partial^2 K}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = 0, \tag{2.7}$$

donde $\alpha, \beta = 1, 2, \ldots 2n$ y

$$(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{2n}) \equiv (q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n).$$

Las expresiones (2.6) y (2.7) no está escrita de forma conveniente, pero se puede reescribir utilizando la matriz que se define a continuación. Sea la matriz de bloques $(\varepsilon_{\alpha\beta})$ expresada como

$$(\varepsilon_{\alpha\beta}) \equiv \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.8}$$

donde I es la matriz unidad $n \times n$. Notemos que, por la definición de $(\varepsilon_{\alpha\beta})$, esta es antisimétrica, lo cual, es una propiedad que será de utilidad. La ecuación (2.6) se puede reescribir utilizando la matriz de bloques definida anteriormente, de tal forma que

$$\frac{\partial K}{\partial x_\alpha} = \epsilon_{\mu\nu}[x_\alpha, x_\nu]\frac{\partial H}{\partial x_\mu} + [t, x_\alpha], \tag{2.9}$$

donde $\alpha = 1, \ldots, 2n$. Por lo tanto, utilizando (2.9) en (2.7) se obtiene que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 K}{\partial x_\beta \partial x_\alpha} - \frac{\partial^2 K}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} &= \epsilon_{\mu\nu}\frac{\partial [x_\alpha, x_\nu]}{\partial x_\beta}\frac{\partial H}{\partial x_\mu} + \epsilon_{\mu\nu}[x_\alpha, x_\nu]\frac{\partial^2 H}{\partial x_\beta \partial x_\mu} + \frac{\partial [t, x_\alpha]}{\partial x_\beta} \\
&\quad - \epsilon_{\mu\nu}\frac{\partial [x_\beta, x_\nu]}{\partial x_\alpha}\frac{\partial H}{\partial x_\mu} - \epsilon_{\mu\nu}[x_\beta, x_\nu]\frac{\partial^2 H}{\partial x_\alpha \partial x_\mu} - \frac{\partial [t, x_\beta]}{\partial x_\alpha}
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Una propiedad útil de los paréntesis de Lagrange presentada en [1] es

$$\frac{\partial}{\partial u}[v, \omega] + \frac{\partial}{\partial v}[\omega, u] + \frac{\partial}{\partial \omega}[u, v] = 0, \tag{2.11}$$

donde u, v, ω son tres variables arbitrarias del conjunto q_i, p_i, t. Utilizando (2.11) en (2.10) se obtiene que

$$\frac{\partial^2 K}{\partial x_\beta \partial x_\alpha} - \frac{\partial^2 K}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = -\epsilon_{\mu\nu}\frac{\partial[x_\beta, x_\alpha]}{\partial x_\nu}\frac{\partial H}{\partial x_\mu} + \epsilon_{\mu\nu}[x_\alpha, x_\nu]\frac{\partial^2 H}{\partial x_\beta \partial x_\mu} - \epsilon_{\mu\nu}[x_\beta, x_\nu]\frac{\partial^2 H}{\partial x_{\alpha\mu}} + \frac{\partial[x_\beta, x_\alpha]}{\partial t} \tag{2.12}$$

Por lo tanto, se concluye que, para que la función hamiltoniana K exista, se debe cumplir

$$\frac{\partial[x_\beta, x_\alpha]}{\partial t} + \varepsilon_{\nu\mu}\frac{\partial[x_\beta, x_\alpha]}{\partial x_\nu}\frac{\partial H}{\partial x_\mu} + \varepsilon_{\mu\nu}[x_\alpha, x_\nu]\frac{\partial^2 H}{\partial x_\beta \partial x_\mu} - \varepsilon_{\mu\nu}[x_\beta, x_\nu]\frac{\partial^2 H}{\partial x_\alpha \partial x_\mu} = 0, \tag{2.13}$$

donde $\alpha, \beta, \nu, \mu = 1, 2, \ldots 2n$. Como se verá más adelante, esta expresión se puede escribir en forma matricial, lo que permite encontrar transformaciones canonoides asociadas a cantidades conservadas [1]. A continuación, se definen convenientemente las matrices $2n \times 2n$; $M = (M_{\alpha\beta})$ y $\Phi = (\Phi_{\alpha\beta})$ presentadas en [1]:

$$M_{\alpha\beta} \equiv \varepsilon_{\alpha\gamma}[x_\beta, x_\gamma], \qquad \Phi_{\alpha\beta} \equiv \varepsilon_{\alpha\gamma}\frac{\partial^2 H}{\partial x_\gamma x_\beta}. \tag{2.14}$$

Utilizando la definición de la matriz M, se reescribe la ecuación (2.6) en forma compacta dada por:

$$\frac{\partial K}{\partial x_\alpha} = M_{\mu\alpha}\frac{\partial H}{\partial x_\mu} + [t, x_\alpha]. \tag{2.15}$$

Si la transformación no involucra al tiempo, la expresión anterior se reduce a:

$$\frac{\partial K}{\partial x_\alpha} = M_{\mu\alpha}\frac{\partial H}{\partial x_\mu}. \tag{2.16}$$

La ecuación (2.15) es más conveniente que su expresión equivalente (2.6) debido al método empleado para obtener las transformaciones canonoides en este trabajo. Además, como los ejemplos que se presentan son problemas en dos dimensiones, es conveniente escribir en forma explícita a las matrices M y Φ, que corresponden a:

$$M = \begin{pmatrix} [q_1, p_1] & [q_2, p_1] & 0 & -[p_1, p_2] \\ [q_1, p_2] & [q_2, p_2] & [p_1, p_2] & 0 \\ 0 & [q_1, q_2] & [q_1, p_1] & [q_1, p_2] \\ -[q_1, q_2] & 0 & [q_2, p_1] & [q_2, p_2] \end{pmatrix}, \tag{2.17}$$

$$\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial p_1 \partial q_1} & \frac{\partial^2 H}{\partial p_1 \partial q_2} & \frac{\partial^2 H}{\partial p_1 \partial p_1} & \frac{\partial^2 H}{\partial p_1 \partial p_2} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial p_2 \partial q_1} & \frac{\partial^2 H}{\partial p_2 \partial q_2} & \frac{\partial^2 H}{\partial p_2 \partial p_1} & \frac{\partial^2 H}{\partial p_2 \partial p_2} \\ -\frac{\partial^2 H}{\partial q_1 \partial q_1} & -\frac{\partial^2 H}{\partial q_1 \partial q_2} & -\frac{\partial^2 H}{\partial q_1 \partial p_1} & -\frac{\partial^2 H}{\partial q_1 \partial p_2} \\ -\frac{\partial^2 H}{\partial q_2 \partial q_1} & -\frac{\partial^2 H}{\partial q_2 \partial q_2} & -\frac{\partial^2 H}{\partial q_2 \partial p_1} & -\frac{\partial^2 H}{\partial q_2 \partial p_2} \end{pmatrix}. \tag{2.18}$$

Como se presenta en [1], multiplicando por $\varepsilon_{\gamma\alpha}$ a la ecuación (2.13) y utilizando la antisimetría de $\varepsilon_{\alpha\beta}$ y $[x_\alpha, x_\beta]$ se puede reescribir la expresión (2.13) como

$$\frac{dM_{\gamma\beta}}{dt} + M_{\gamma\nu}\Phi_{\nu\beta} - \Phi_{\gamma\mu}M_{\mu\beta} = 0, \tag{2.19}$$

o de forma equivalente,

$$\frac{dM}{dt} + M\Phi - \Phi M = 0. \tag{2.20}$$

Como se puede apreciar en las ecuaciones (2.13) y (2.20), las ecuaciones se resuelve trivialmente si los paréntesis de Lagrange son constantes, y si las matrices M y Φ conmutan. Es decir, la función hamiltoniana K existe. La condición de que las matrices M y Φ conmuten se puede expresar como

$$M\Phi - \Phi M = 0. \tag{2.21}$$

Por lo tanto, si M y Φ conmutan se cumple que

$$\frac{dM}{dt} = 0, \tag{2.22}$$

es decir, M es una cantidad conservada. En caso de que las entradas de la matriz M sean constantes triviales se puede escribir a la matriz como

$$M = \begin{pmatrix} a & c & 0 & -f \\ d & b & f & 0 \\ 0 & e & a & d \\ -e & 0 & c & b \end{pmatrix}, \tag{2.23}$$

donde $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$. En el ejemplo 8, se considera que las entradas de la matriz M no son constantes. Finalmente, la matriz M corresponde al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned}
[q_1, p_1] = a &= \left[\frac{\partial Q_1}{\partial q_1}\frac{\partial P_1}{\partial p_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial q_1}\frac{\partial P_2}{\partial p_1}\right] - \left[\frac{\partial P_1}{\partial q_1}\frac{\partial Q_1}{\partial p_1} + \frac{\partial P_2}{\partial q_1}\frac{\partial Q_2}{\partial p_1}\right], \\
[q_1, p_2] = d &= \left[\frac{\partial Q_1}{\partial q_1}\frac{\partial P_1}{\partial p_2} + \frac{\partial Q_2}{\partial q_1}\frac{\partial P_2}{\partial p_2}\right] - \left[\frac{\partial P_1}{\partial q_1}\frac{\partial Q_1}{\partial p_2} + \frac{\partial P_2}{\partial q_1}\frac{\partial Q_2}{\partial p_2}\right], \\
[q_2, p_1] = c &= \left[\frac{\partial Q_1}{\partial q_2}\frac{\partial P_1}{\partial p_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial q_2}\frac{\partial P_2}{\partial p_1}\right] - \left[\frac{\partial P_1}{\partial q_2}\frac{\partial Q_1}{\partial p_1} + \frac{\partial P_2}{\partial q_2}\frac{\partial Q_2}{\partial p_1}\right], \\
[q_2, p_2] = b &= \left[\frac{\partial Q_1}{\partial q_2}\frac{\partial P_1}{\partial p_2} + \frac{\partial Q_2}{\partial q_2}\frac{\partial P_2}{\partial p_2}\right] - \left[\frac{\partial P_1}{\partial q_2}\frac{\partial Q_1}{\partial p_2} + \frac{\partial P_2}{\partial q_2}\frac{\partial Q_2}{\partial p_2}\right], \\
[p_1, p_2] = f &= \left[\frac{\partial Q_1}{\partial p_1}\frac{\partial P_1}{\partial p_2} + \frac{\partial Q_2}{\partial p_1}\frac{\partial P_2}{\partial p_2}\right] - \left[\frac{\partial P_1}{\partial p_1}\frac{\partial Q_1}{\partial p_2} + \frac{\partial P_2}{\partial p_1}\frac{\partial Q_2}{\partial p_2}\right], \\
[q_1, q_2] = e &= \left[\frac{\partial Q_1}{\partial q_1}\frac{\partial P_1}{\partial q_2} + \frac{\partial Q_2}{\partial q_1}\frac{\partial P_2}{\partial q_2}\right] - \left[\frac{\partial P_1}{\partial q_1}\frac{\partial Q_1}{\partial q_2} + \frac{\partial P_2}{\partial q_1}\frac{\partial Q_2}{\partial q_2}\right].
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Con el fin de facilitar la obtención de las transformaciones canonoides, en los ejemplos que se muestran a continuación, se eligió de forma específica la forma de 2 de las 4 expresiones de las transformaciones de coordenadas para simplificar el sistema de ecuaciones diferenciales parciales (EDP) dado por (2.24) y solo enfocarse en buscar las otras 2 restantes. Además, se probó eligiendo de qué variables dependía cada expresión de la transformación, con el mismo fin de simplificar (2.24) y, como se verá más adelante, en algunos casos se logró que el número de EDP disminuyera.

Hay que añadir que, para (2.20) se tiene que la matriz M tiene las siguientes cantidades conservadas que se presentan en [1],

$$\frac{d(trM^k)}{dt} = 0, \tag{2.25}$$

$$\frac{d(detM)}{dt} = 0, \tag{2.26}$$

donde $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$ donde los números positivos corresponden a multiplicos de la matriz M y los números negativos los múltiplos de la matriz inversa M^{-1}. En la mayoría de problemas presentados no toma gran relevancia estas cantidades conservadas, debido a que las entradas de las matrices M asociadas a cada ejemplo son constantes triviales, excepto en el ejemplo 8 en donde se consideran que son funcionalmente dependientes de q_i y p_i.

Capítulo 3

Ejemplos de transformaciones canonoides

3.1. Partícula cargada en un campo magnético uniforme

Sea la función hamiltoniana correspondiente a una partícula cargada en un campo magnético uniforme,

$$H = \frac{1}{2m}\left[\left(p_1 + \frac{m\omega_c}{2}q_2\right)^2 + \left(p_2 - \frac{m\omega_c}{2}q_1\right)^2\right], \tag{3.1}$$

donde $\omega_c = \frac{q_e B_0}{m v_c}$, m la masa de la partícula, B_0 la magnitud del campo magnético, q_e la carga eléctrica y v_c la velocidad de la luz. Además, las coordenadas q_i corresponden a las coordenadas cartesianas y las p_i a sus respectivos momentos.

Utilizando la función hamiltoniana dada por (3.1) y la definición de la matriz Φ presentada en (2.18) se obtiene que

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\omega_c}{2} & \frac{1}{m} & 0 \\ -\frac{\omega_c}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{m} \\ -\frac{m\omega_c^2}{4} & 0 & 0 & \frac{\omega_c}{2} \\ 0 & -\frac{m\omega_c^2}{4} & -\frac{\omega_c}{2} & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

Suponiendo que las entradas de la matriz M son constantes, y que las matrices M y Φ conmutan, se debe cumplir la ecuación (2.21), lo que implica que

$$\begin{pmatrix} \frac{-c\omega_c-d\omega_c}{2} & \frac{-4e+fm^2\omega_c^2+2m\omega_c(a-b)}{4m} & 0 & \frac{c-d}{m} \\ \frac{4e-fm^2\omega_c^2+2m\omega_c(a-b)}{4m} & \frac{c\omega_c+d\omega_c}{2} & \frac{-c+d}{m} & 0 \\ 0 & \frac{cm\omega_c^2-dm\omega_c^2}{4} & -\frac{c\omega_c+d\omega_c}{2} & \frac{4e-fm^2\omega_c^2+2m\omega_c(a-b)}{4m} \\ \frac{-cm\omega_c^2+dm\omega_c^2}{4} & 0 & \frac{-4e+fm^2\omega_c^2+2m\omega_c(a-b)}{4m} & \frac{c\omega_c+d\omega_c}{2} \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

De la expresión anterior, se concluye que $c = d = 0$,

$$\frac{-4e + fm^2\omega_c^2 + 2am\omega_c - 2bm\omega_c}{4m} = 0,$$
$$\frac{4e - fm^2\omega_c^2 + 2am\omega_c - 2bm\omega_c}{4m} = 0.$$

Sumando las dos expresiones anteriores se concluye que $a = b$. Restando ambas expresiones se cumple que $e = \frac{1}{4} f m^2 \omega_c^2$. Además, para que M sea invertible se debe cumplir que $\det M = (a^2 - ef)^2 \neq 0$. Por lo tanto, la matriz M se escribe como

$$M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & -f \\ 0 & a & f & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} f m^2 \omega_c^2 & a & 0 \\ -\frac{1}{4} f m^2 \omega_c^2 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

Para el caso particular (3.3) el sistema de ecuaciones (2.24) corresponde a

$$[q_1, p_1] = a = \left[\frac{\partial Q_1}{\partial q_1}\frac{\partial P_1}{\partial p_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial q_1}\frac{\partial P_2}{\partial p_1}\right] - \left[\frac{\partial P_1}{\partial q_1}\frac{\partial Q_1}{\partial p_1} + \frac{\partial P_2}{\partial q_1}\frac{\partial Q_2}{\partial p_1}\right], \tag{3.4}$$

$$[q_1, p_2] = 0 = \left[\frac{\partial Q_1}{\partial q_1}\frac{\partial P_1}{\partial p_2} + \frac{\partial Q_2}{\partial q_1}\frac{\partial P_2}{\partial p_2}\right] - \left[\frac{\partial P_1}{\partial q_1}\frac{\partial Q_1}{\partial p_2} + \frac{\partial P_2}{\partial q_1}\frac{\partial Q_2}{\partial p_2}\right], \tag{3.5}$$

$$[q_2, p_1] = 0 = \left[\frac{\partial Q_1}{\partial q_2}\frac{\partial P_1}{\partial p_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial q_2}\frac{\partial P_2}{\partial p_1}\right] - \left[\frac{\partial P_1}{\partial q_2}\frac{\partial Q_1}{\partial p_1} + \frac{\partial P_2}{\partial q_2}\frac{\partial Q_2}{\partial p_1}\right], \tag{3.6}$$

$$[q_2, p_2] = a = \left[\frac{\partial Q_1}{\partial q_2}\frac{\partial P_1}{\partial p_2} + \frac{\partial Q_2}{\partial q_2}\frac{\partial P_2}{\partial p_2}\right] - \left[\frac{\partial P_1}{\partial q_2}\frac{\partial Q_1}{\partial p_2} + \frac{\partial P_2}{\partial q_2}\frac{\partial Q_2}{\partial p_2}\right], \tag{3.7}$$

$$[p_1, p_2] = f = \left[\frac{\partial Q_1}{\partial p_1}\frac{\partial P_1}{\partial p_2} + \frac{\partial Q_2}{\partial p_1}\frac{\partial P_2}{\partial p_2}\right] - \left[\frac{\partial P_1}{\partial p_1}\frac{\partial Q_1}{\partial p_2} + \frac{\partial P_2}{\partial p_1}\frac{\partial Q_2}{\partial p_2}\right], \tag{3.8}$$

$$[q_1, q_2] = \frac{1}{4} f m^2 \omega_c^2 = \left[\frac{\partial Q_1}{\partial q_1}\frac{\partial P_1}{\partial q_2} + \frac{\partial Q_2}{\partial q_1}\frac{\partial P_2}{\partial q_2}\right] - \left[\frac{\partial P_1}{\partial q_1}\frac{\partial Q_1}{\partial q_2} + \frac{\partial P_2}{\partial q_1}\frac{\partial Q_2}{\partial q_2}\right], \tag{3.9}$$

donde suponemos que Q_i y P_i no dependen explícitamente del tiempo. Sustituyendo las ecuaciones (3.1) y (3.3) en la ecuación (2.16) se llega a que

$$\frac{\partial K}{\partial q_1} = -\left(\frac{a\omega_c}{2} + \frac{f m \omega_c^2}{4}\right)\left(p_2 - \frac{m\omega_c}{2} q_1\right), \tag{3.10}$$

$$\frac{\partial K}{\partial q_2} = \left(\frac{a\omega_c}{2} + \frac{f m \omega_c^2}{4}\right)\left(p_1 + \frac{m\omega_c}{2} q_2\right), \tag{3.11}$$

$$\frac{\partial K}{\partial p_1} = \left(\frac{f\omega_c}{2} + \frac{a}{m}\right)\left(p_1 + \frac{m\omega_c}{2} q_2\right), \tag{3.12}$$

$$\frac{\partial K}{\partial p_2} = \left(\frac{f\omega_c}{2} + \frac{a}{m}\right)\left(p_2 - \frac{m\omega_c}{2} q_1\right). \tag{3.13}$$

Además, se verifica que (2.20) se cumple para M y Φ dados en (3.3) y (3.2), entonces existe la función hamiltoniana K. A continuación se calcula a K utilizando el método estándar. Se toma a $\frac{\partial K}{\partial q_1}$ e integra con respecto a q_1 con q_2, p_1, p_2 y t constantes de tal forma que

$$K = -\left(\frac{a\omega_c}{2} + \frac{f m \omega_c^2}{4}\right)\left(p_2 - \frac{m\omega_c}{4} q_1\right) q_1 + F(q_2, p_1, p_2, t), \tag{3.14}$$

donde $F = F(q_2, p_1, p_2, t)$ es una función desconocida por ahora. Después, se deriva la ecuación anterior con respecto a q_2 y se compara con la ecuación (3.11), por lo tanto, se debe cumplir que

$$\frac{\partial F}{\partial q_2} = \left(\frac{a\omega_c}{2} + \frac{f m \omega_c^2}{4}\right)\left(p_1 + \frac{m\omega_c}{2} q_2\right).$$

Calculando la integral de $\frac{\partial F}{\partial q_2}$ con respecto a q_2 se determina que

$$F(q_2, p_1, p_2, t) = \left(\frac{a\omega_c}{2} + \frac{f m \omega_c^2}{4}\right)\left(p_1 + \frac{m\omega_c}{4} q_2\right) q_2 + G_0(p_1, p_2, t), \tag{3.15}$$

donde $G_0 = G_0(p_1, p_2, t)$ es una función desconocida. Tomando el valor de la función $F(q_2, p_1, p_2, t)$ dado por (3.15) se calcula la derivada parcial de K con respecto a p_1, donde se obtiene que

$$\frac{\partial K}{\partial p_1} = \left(\frac{a\omega_c}{2} + \frac{fm\omega_c^2}{4}\right) q_2 + \frac{\partial G_0}{\partial p_1}. \tag{3.16}$$

Comparando la ecuación (3.16) con (3.12) se debe cumplir que

$$\frac{\partial G_0}{\partial p_1} = \left(\frac{f\omega_c}{2} + \frac{a}{m}\right) p_1.$$

Calculando la integral de $\frac{\partial G_0}{\partial p_1}$ con respecto a p_1 se llega a que

$$G_0(p_1, p_2, t) = \frac{1}{2}\left(\frac{f\omega_c}{2} + \frac{a}{m}\right) p_1^2 + G_1(p_2, t). \tag{3.17}$$

Seguidamente, se calcula la derivada parcial de K con respecto a p_2 considerando (3.14), (3.15) y (3.17) donde se obtiene que

$$\frac{\partial K}{\partial p_2} = -\left(\frac{a\omega_c}{2} + \frac{fm\omega_c^2}{4}\right) q_1.$$

Comparando la ecuación anterior con la ecuación (3.13) se observa que se debe cumplir que

$$\frac{\partial G_1}{\partial p_2} = \left(\frac{a\omega_c}{2} + \frac{fm\omega_c^2}{4}\right) p_2.$$

Posteriormente, se calcula la integral de $\frac{\partial G_1}{\partial p_2}$ con respecto a p_2 y se obtiene que

$$G_1(p_2, t) = \frac{1}{2}\left(\frac{a\omega_c}{2} + \frac{fm\omega_c^2}{4}\right) p_2^2 + G_2(t),$$

donde $G_2 = G_2(t)$ es una función arbitraria. Por lo tanto, si $G_2(t) = 0$, la nueva función hamiltoniana en función de q_i, p_i y t es

$$K = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{m} + \frac{f\omega_c}{2}\right)\left[\left(\frac{m\omega_c}{2}q_1 - p_2\right)^2 + \left(\frac{m\omega_c}{2}q_2 + p_1\right)^2\right]. \tag{3.18}$$

A continuación se presenta una transformación, para la cual no existe la función hamiltoniana (3.18). Sin embargo, sirve para mostrar cómo se obtiene la transformación mostrada en el Ejemplo 1, en el cual, sí existe la función hamiltoniana. Observando la ecuación (3.18), se propone convenientemente la transformación

$$\begin{aligned} Q_1 &= q_1, \\ Q_2 &= q_2, \\ P_1' &= p_1 + \frac{m\omega_c}{2} q_2, \\ P_2' &= p_2 - \frac{m\omega_c}{2} q_1. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Utilizando la transformación (3.19), los correspondientes paréntesis de Lagrange son:

$$\begin{aligned} &[q_1, p_1] = 1, \qquad && [q_1, p_2] = 0, \qquad && [q_2, p_1] = 0, \\ &[q_2, p_2] = 1, && [p_1, p_2] = 0, && [q_1, q_2] = m\omega_c. \end{aligned} \tag{3.20}$$

La transformación (3.19) no está asociada con una cantidad conservada, como se confirma comparando (3.20) con (3.4)-(3.9). Utilizando (3.20) en (2.13) se puede simplificar dicha expresión y obtener que

$$\varepsilon_{\mu\nu}[x_\alpha, x_\nu]\frac{\partial^2 H}{\partial x_\beta \partial x_\mu} - \varepsilon_{\mu\nu}[x_\beta, x_\nu]\frac{\partial^2 H}{\partial x_\alpha \partial x_\mu} = 0. \tag{3.21}$$

Desarrollando convenientemente la ecuación anterior se obtiene que

$$\begin{aligned}
&[x_\alpha, x_3]\frac{\partial^2 H}{\partial x_\beta \partial x_1} + [x_\alpha, x_4]\frac{\partial^2 H}{\partial x_\beta \partial x_2} - [x_\alpha, x_1]\frac{\partial^2 H}{\partial x_\beta \partial x_3} - [x_\alpha, x_2]\frac{\partial^2 H}{\partial x_\beta \partial x_4}\\
&-[x_\beta, x_3]\frac{\partial^2 H}{\partial x_\alpha \partial x_1} - [x_\beta, x_4]\frac{\partial^2 H}{\partial x_\alpha \partial x_2} + [x_\beta, x_1]\frac{\partial^2 H}{\partial x_\alpha \partial x_3} + [x_\beta, x_2]\frac{\partial^2 H}{\partial x_\alpha \partial x_4} = 0.
\end{aligned}$$

A continuación, se considera el caso en que $\alpha = 1$ y $\beta = 4$ de tal forma que la ecuación anterior corresponde a

$$\begin{aligned}
&[q_1, p_1]\frac{\partial^2 H}{\partial p_2 \partial q_1} + [q_1, p_2]\frac{\partial^2 H}{\partial p_2 \partial q_2} - [q_1, q_1]\frac{\partial^2 H}{\partial p_2 \partial p_1} - [q_1, q_2]\frac{\partial^2 H}{\partial p_2 \partial p_2}\\
&-[p_2, p_1]\frac{\partial^2 H}{\partial q_1 \partial q_1} - [p_2, p_2]\frac{\partial^2 H}{\partial q_1 \partial q_2} + [p_2, q_1]\frac{\partial^2 H}{\partial q_1 \partial p_1} + [p_2, q_2]\frac{\partial^2 H}{\partial q_1 \partial p_2} = 0,
\end{aligned}$$

o equivalentemente,

$$\begin{aligned}
&[q_1, p_1]\frac{\partial^2 H}{\partial p_2 \partial q_1} + [q_1, p_2]\frac{\partial^2 H}{\partial p_2 \partial q_2} - [q_1, q_2]\frac{\partial^2 H}{\partial p_2 \partial p_2}\\
&-[p_2, p_1]\frac{\partial^2 H}{\partial q_1 \partial q_1} + [p_2, q_1]\frac{\partial^2 H}{\partial q_1 \partial p_1} + [p_2, q_2]\frac{\partial^2 H}{\partial q_1 \partial p_2} = 0.
\end{aligned}$$

Simplificando la expresión anterior, se cumple que

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p_2 \partial q_1} - m\omega_c\frac{\partial^2 H}{\partial p_2 \partial p_2} - \frac{\partial^2 H}{\partial q_1 \partial p_2} = 0.$$

Al sustituir los valores de las derivadas parciales correspondientes, se llega a que

$$-\omega_c = 0.$$

Sin embargo, ω_c es distinto de cero, lo que implica que no existe la función hamiltoniana K y por ende, la transformación (3.19). Ahora, si se considera una reflexion de la forma

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\omega_c t & -\operatorname{sen}\omega_c t \\ -\operatorname{sen}\omega_c t & -\cos\omega_c t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P_1' \\ P_2' \end{pmatrix},$$

se obtiene la siguiente transformación, la cual sí existe y es una transformación canonoide, como se mostrará más adelante.

3.1.1. Ejemplo 1

Por lo presentado anteriormente, se considera la transformación

$$\begin{aligned}
Q_1 &= q_1,\\
Q_2 &= q_2,\\
P_1 &= \left(p_1 + \frac{m\omega_c}{2}q_2\right)\cos\omega_c t - \left(p_2 - \frac{m\omega_c}{2}q_1\right)\operatorname{sen}\omega_c t,\\
P_2 &= -\left(p_2 - \frac{m\omega_c}{2}q_1\right)\cos\omega_c t - \left(p_1 + \frac{m\omega_c}{2}q_2\right)\operatorname{sen}\omega_c t.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Utilizando la ecuación (2.17) y la transformación dada en (3.22) se obtiene que

$$M = \begin{pmatrix} -\cos\omega_c t & \operatorname{sen}\omega_c t & 0 & 0 \\ \operatorname{sen}\omega_c t & \cos\omega_c t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\cos\omega_c t & \operatorname{sen}\omega_c t \\ 0 & 0 & \operatorname{sen}\omega_c t & \cos\omega_c t \end{pmatrix}.$$

A continuación, se calculan el segundo y tercer término de (2.20) tomando M y Φ dadas por

$$M\Phi - \Phi M = \begin{pmatrix} -\omega_c \operatorname{sen}\omega_c t & -\omega_c \cos\omega_c t & 0 & 0 \\ -\omega_c \cos\omega_c t & \omega_c t \operatorname{sen}\omega_c t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_c t \operatorname{sen}\omega_c t & -\omega_c \cos\omega_c t \\ 0 & 0 & -\omega_c \cos\omega_c t & \omega_c \operatorname{sen}\omega_c t \end{pmatrix}.$$

Por otra parte, el primer término corresponde a

$$\frac{dM}{dt} = \begin{pmatrix} \omega_c \operatorname{sen}\omega_c t & \omega_c \cos\omega_c t & 0 & 0 \\ \omega_c \cos\omega_c t & -\omega_c t \operatorname{sen}\omega_c t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_c t \operatorname{sen}\omega_c t & \omega_c \cos\omega_c t \\ 0 & 0 & \omega_c \cos\omega_c t & -\omega_c \operatorname{sen}\omega_c t \end{pmatrix}.$$

Sumando las dos expresiones anteriores se verifica la condición (2.20), por ende, existe la función hamiltoniana K y la transformación (3.22). Observando la matriz M correspondiente al Ejemplo 1 se verifica que la transformación (3.22) es canonoide. A continuación, se obtendrá la función hamiltoniana K en función de las coordenadas q_i, p_i y t.

Considerando la función hamiltoniana dada por (3.1), la transformación de coordenadas (3.22) y sustituyendo en las ecuaciones (2.6) se obtiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial K}{\partial q_1} &= \frac{\omega_c}{2}\left[\left(p_2 - \frac{m}{2}\omega_c q_1\right)\cos\omega_c t + \left(p_1 + \frac{m}{2}\omega_c q_2\right)\operatorname{sen}\omega_c t\right], \\ \frac{\partial K}{\partial q_2} &= \frac{\omega_c}{2}\left[\left(p_1 + \frac{m}{2}\omega_c q_2\right)\cos\omega_c t - \left(p_2 - \frac{m}{2}\omega_c q_1\right)\operatorname{sen}\omega_c t\right], \\ \frac{\partial K}{\partial p_1} &= \frac{1}{m}\left[\left(p_1 + \frac{m}{2}\omega_c q_2\right)\cos\omega_c t - \left(p_2 - \frac{m}{2}\omega_c q_1\right)\operatorname{sen}\omega_c t\right], \\ \frac{\partial K}{\partial p_2} &= -\frac{1}{m}\left[\left(p_2 - \frac{m}{2}\omega_c q_1\right)\cos\omega_c t + \left(p_1 + \frac{m}{2}\omega_c q_2\right)\operatorname{sen}\omega_c t\right]. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Utilizando el mismo método empleado al inicio de este capítulo para resolver el sistema de ecuaciones (3.23), se obtiene la nueva función hamiltoniana K en términos de las nuevas coordenadas

$$K = \frac{1}{2m}[P_1^2 \cos\omega_c t - 2P_1 P_2 \operatorname{sen}\omega_c t + P_2^2 \cos\omega_c t]. \tag{3.24}$$

Como se puede observar, esta función solo depende de los momentos generalizados P_i, lo cual, únicamente se cumple para la partícula libre, sin embargo, la función hamiltoniana original corresponde a una partícula cargada en un campo magnético uniforme.

3.1.2. Ejemplo 2

Observando la ecuación (3.18), se propone dos de las expresiones de la transformación dadas por

$$\begin{aligned} Q_1 &= p_1 + \frac{m\omega_c}{2} q_2, \\ P_1 &= p_2 - \frac{m\omega_c}{2} q_1, \end{aligned} \tag{3.25}$$

por lo tanto, falta encontrar las expresiones para Q_2 y P_2. Considerando (3.25) y sustituyendo en (2.24) se obtiene que

$$\begin{aligned}
[q_1, p_1] &= a = \frac{\partial Q_2}{\partial q_1}\frac{\partial P_2}{\partial p_1} + \left(\frac{m\omega_c}{2}\right) - \frac{\partial P_2}{\partial q_1}\frac{\partial Q_2}{\partial p_1},\\
[q_1, p_2] &= 0 = \frac{\partial Q_2}{\partial q_1}\frac{\partial P_2}{\partial p_2} - \frac{\partial P_2}{\partial q_1}\frac{\partial Q_2}{\partial p_2},\\
[q_2, p_1] &= 0 = \frac{\partial Q_2}{\partial q_2}\frac{\partial P_2}{\partial p_1} - \frac{\partial P_2}{\partial q_2}\frac{\partial Q_2}{\partial p_1},\\
[q_2, p_2] &= a = \frac{m\omega_c}{2} + \frac{\partial Q_2}{\partial q_2}\frac{\partial P_2}{\partial p_2} - \frac{\partial P_2}{\partial q_2}\frac{\partial Q_2}{\partial p_2},\\
[p_1, p_2] &= f = 1 + \frac{\partial Q_2}{\partial p_1}\frac{\partial P_2}{\partial p_2} - \frac{\partial P_2}{\partial p_1}\frac{\partial Q_2}{\partial p_2},\\
[q_1, q_2] &= \frac{1}{4}fm^2\omega_c^2 = \frac{\partial Q_2}{\partial q_1}\frac{\partial P_2}{\partial q_2} + \left(\frac{m\omega_c}{2}\right)^2 - \frac{\partial P_2}{\partial q_1}\frac{\partial Q_2}{\partial q_2}.
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Notemos que, si $Q_2 = Q_2(p_1, q_2)$ y $P_2 = P_2(p_2, q_1)$, los paréntesis $[q_1, p_2]$ y $[q_2, p_1]$ son trivialmente cero, entonces el sistema anterior se reduce a

$$\begin{aligned}
[q_1, p_1] &= a = \frac{m\omega_c}{2} - \frac{\partial P_2}{\partial q_1}\frac{\partial Q_2}{\partial p_1},\\
[q_2, p_2] &= a = \frac{m\omega_c}{2} + \frac{\partial Q_2}{\partial q_2}\frac{\partial P_2}{\partial p_2},\\
[p_1, p_2] &= f = 1 + \frac{\partial Q_2}{\partial p_1}\frac{\partial P_2}{\partial p_2},\\
[q_1, q_2] &= \frac{1}{4}m^2\omega_c^2 = \left(\frac{m\omega_c}{2}\right)^2 - \frac{\partial P_2}{\partial q_1}\frac{\partial Q_2}{\partial q_2}.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Observando el sistema de ecuaciones diferenciales anterior, se concluye que las expresiones de Q_2 y P_2 deben ser lineales. Por lo tanto, se considera las expresiones restantes dadas como

$$\begin{aligned}
Q_2 &= b_1 p_1 + b_2 q_2,\\
P_2 &= c_1 p_2 + c_2 q_1.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Considerando las expresiones (3.28) en (3.27) se obtienen las siguientes condiciones:

$$a = \frac{m\omega_c}{2} - c_2 b_1, \tag{3.29}$$

$$a = \frac{m\omega_c}{2} + c_1 b_2, \tag{3.30}$$

$$f = 1 + b_1 c_1, \tag{3.31}$$

$$\frac{1}{4}fm^2\omega_c^2 = \left(\frac{m\omega_c}{2}\right)^2 - c_2 b_2. \tag{3.32}$$

Tomando la expresión (3.30) y restándole la expresión (3.29) se obtiene (3.33). Por otra parte, multiplicando (3.31) por $\frac{1}{4}m^2\omega_c^2$ y restándole (3.32) se obtiene (3.34), es decir,

$$c_1 b_2 + c_2 b_1 = 0, \tag{3.33}$$

$$\frac{1}{4}m^2\omega_c^2 b_1 c_1 + c_2 b_2 = 0. \tag{3.34}$$

Tomando $b_2 \neq 0$ en (3.33) se obtiene que

$$c_1 = -\frac{c_2 b_1}{b_2}. \tag{3.35}$$

Sustituyendo (3.35) en (3.34) se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{1}{4}m^2\omega_c^2 b_1\left(-\frac{c_2 b_1}{b_2}\right) + c_2 b_2 = 0.$$

Dividiendo entre $c_2 \neq 0$ y multiplicando por b_2 en la expresión anterior, se obtiene que

$$-\frac{1}{4}m^2\omega_c^2 b_1^2 + b_2^2 = 0.$$

Por lo tanto, de la expresión anterior se concluye que

$$b_2 = \pm\frac{m\omega_c}{2}b_1. \tag{3.36}$$

Sustituyendo el resultado de (3.36) en (3.35) se cumple que

$$c_1 = \mp\frac{2}{m\omega_c}c_2. \tag{3.37}$$

Despejando c_1 de la ecuación (3.29) y tomando (3.36) se obtiene (3.38). Por otra parte, despejando c_1 de (3.31) se obtiene (3.39).

$$c_1 = \frac{a - \frac{m\omega_c}{2}}{b_2} = \frac{a - \frac{m\omega_c}{2}}{\pm\frac{m\omega_c}{2}b_1}, \tag{3.38}$$

$$c_1 = \frac{f-1}{b_1}. \tag{3.39}$$

Igualando estas dos expresiones, se concluye que

$$f - 1 = \pm\frac{2}{m\omega_c}a \mp 1.$$

Notese que para el caso en que se toma el signo negativo se obtiene que $f = -\frac{2}{m\omega_c}a$ y en dicho caso se tiene que el determinante de la matriz M es cero. Por lo tanto, solo se considera el caso en que $f = 2 - \frac{2}{m\omega_c}a$. Finalmente, se obtiene la transformación

$$\begin{aligned}
Q_1 &= p_1 + \frac{m\omega_c}{2}q_2,\\
P_1 &= p_2 - \frac{m\omega_c}{2}q_1,\\
Q_2 &= \left(1 - \frac{2}{m\omega_c}a\right)p_1 + \left(a - \frac{m\omega_c}{2}\right)q_2,\\
P_2 &= p_2 + \frac{m\omega_c}{2}q_1,
\end{aligned} \tag{3.40}$$

donde a es un parámetro arbitrario. Nótese que en caso de que $a = m\omega_c$ la transformación es canónica y corresponde a la siguiente transformación de coordenadas:

$$\begin{aligned}
Q_1 &= p_1 + \frac{m\omega_c}{2}q_2,\\
P_1 &= p_2 - \frac{m\omega_c}{2}q_1,\\
Q_2 &= -p_1 + \frac{m\omega_c}{2}q_2,\\
P_2 &= p_2 + \frac{m\omega_c}{2}q_1.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, para todo valor de a a excepción de $m\omega_c$ y $\frac{m\omega_c}{2}$ la transformación (3.40) es canonoide, como se puede verificar observando la matriz M dada en la ecuación (3.3). Finalmente, sustituyendo la transformación (3.40) en (3.18) se obtiene la función hamiltoniana K en función de las nuevas coordenadas

$$K = \frac{\omega_c}{2}\left(P_1^2 + Q_1^2\right). \tag{3.41}$$

La función hamiltoniana anterior corresponde a un oscilador armónico unidimensional. Hay que recordar que la función hamiltoniana original corresponde a una partícula cargada en un campo magnético uniforme en dos dimensiones.

3.1.3. Ejemplo 3

Se proponen dos de las expresiones de la transformación, para reducir el sistema de ecuaciones diferenciales dado por las ecuaciones (3.4)-(3.9), dadas por

$$\begin{aligned} Q_1 &= q_1, \\ Q_2 &= p_1. \end{aligned} \tag{3.42}$$

Sustituyendo (3.42) en el sistema de ecuaciones dado por las ecuaciones (3.4)-(3.9) se obtiene que $[q_2, p_2]$ es trivialmente cero, y además,

$$\begin{aligned} [q_1, p_1] &= a = \frac{\partial P_1}{\partial p_1} - \frac{\partial P_2}{\partial q_1}, \\ [q_1, p_2] &= d = \frac{\partial P_1}{\partial p_2}, \\ [q_2, p_1] &= c = -\frac{\partial P_2}{\partial q_2}, \\ [p_1, p_2] &= f = \frac{\partial P_2}{\partial p_2}, \\ [q_1, q_2] &= e = \frac{\partial P_1}{\partial q_2}. \end{aligned} \tag{3.43}$$

Inspeccionando la expresión (3.18), se propone que P_1 y P_2 dependan linealmente de q_2 y p_2, respectivamente. Además, para que $[q_1, p_2]$ y $[q_2, p_1]$ sean trivialmente cero, se toma que P_1 no dependa de p_2 y que P_2 no dependa de q_2, entonces se tiene que

$$P_1 = a_1 q_2 + G_1(q_1, p_1), \tag{3.44}$$

$$P_2 = a_2 p_2 + G_2(q_1, p_1), \tag{3.45}$$

donde G_1 y G_2 son funciones arbitrarias. Tomando en cuenta las suposiciones anteriores, el sistema de EDP (3.43) se reduce a

$$\begin{aligned} [q_1, p_1] &= a = \frac{\partial G_1}{\partial p_1} - \frac{\partial G_2}{\partial q_1}, \\ [p_1, p_2] &= f = \frac{\partial P_2}{\partial p_2}, \\ [q_1, q_2] &= e = \frac{\partial P_1}{\partial q_2}. \end{aligned} \tag{3.46}$$

Por lo tanto, se debe cumplir que

$$\frac{\partial G_1}{\partial p_1} = \frac{\partial G_2}{\partial q_1} + a = F(q_1, p_1),$$

donde $F = F(q_1, p_1)$ es una función arbitraria. Además, se debe cumplir que

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{4}m^2\omega_c^2 f, \\ a_2 &= f. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la transformación final es

$$\begin{aligned} Q_1 &= q_1, \\ Q_2 &= p_1, \\ P_1 &= \frac{1}{4}m^2\omega_c^2 f q_2 + \int F(q_1, p_1)dp_1, \\ P_2 &= f p_2 + \int [F(q_1, p_1) - a]dq_1. \end{aligned} \tag{3.47}$$

Esta transformación es canonoide, como se puede verificar viendo la matriz M dada en (3.3). Considerando $a = 0$, $F = -\frac{m\omega_c}{2}$ y $f = 1$ en la ecuación (3.47) se obtiene la transformación

$$\begin{aligned} Q_1 &= q_1, \\ Q_2 &= p_1, \\ P_1 &= \frac{1}{4}m^2\omega_c^2 q_2 - \frac{m\omega_c}{2}p_1, \\ P_2 &= p_2 - \frac{m\omega_c}{2}q_1. \end{aligned} \tag{3.48}$$

Utilizando la transformación (3.48) en la ecuación (3.18) se obtiene que la nueva función hamiltoniana en función de las nuevas coordenadas y momentos generalizados puede escribirse como

$$K = \frac{\omega_c}{4}\left[P_2^2 + \left(\frac{2}{m\omega_c}P_1 + 2Q_2\right)^2\right]. \tag{3.49}$$

Nótese que la función hamiltoniana (3.47) no depende de Q_1, y por ende, P_1 es una cantidad conservada. A continuación, se desarrollan cuatro ejemplos más utilizando la función hamiltoniana de una partícula libre.

3.2. Partícula libre

Sea la función hamiltoniana correspondiente a una partícula libre,

$$H = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2), \tag{3.50}$$

donde m es la masa de la partícula, q_i son las coordenadas cartesianas y p_i sus respectivos momentos, con $i = 1, 2$. Utilizando la función hamiltoniana dada por (3.50) y la definición de la matriz Φ presentada en (2.18) se obtiene la siguiente matriz:

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.51}$$

Suponiendo que las entradas de la matriz M son constantes, y que las matrices M y Φ conmutan, se debe cumplir la ecuación (2.21), lo que implica que

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{e}{m} & 0 & \frac{c-d}{m} \\ \frac{e}{m} & 0 & \frac{-c+d}{m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{e}{m} \\ 0 & 0 & -\frac{e}{m} & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

De la expresión anterior se concluye que $e = 0$ y $c = d$. Además, para que M sea invertible se debe cumplir que $\det M = (ab - c^2)^2 \neq 0$. Por lo tanto, se tiene que la matriz M debe escribirse como

$$M = \begin{pmatrix} a & c & 0 & f \\ c & b & -f & 0 \\ 0 & 0 & a & c \\ 0 & 0 & c & b \end{pmatrix}. \tag{3.52}$$

Por lo tanto, para el caso particular (3.52) el sistema de ecuaciones (2.24) corresponde a

$$[q_1, p_1] = a = \left[\frac{\partial Q_1}{\partial q_1}\frac{\partial P_1}{\partial p_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial q_1}\frac{\partial P_2}{\partial p_1}\right] - \left[\frac{\partial P_1}{\partial q_1}\frac{\partial Q_1}{\partial p_1} + \frac{\partial P_2}{\partial q_1}\frac{\partial Q_2}{\partial p_1}\right], \tag{3.53}$$

$$[q_1, p_2] = c = \left[\frac{\partial Q_1}{\partial q_1}\frac{\partial P_1}{\partial p_2} + \frac{\partial Q_2}{\partial q_1}\frac{\partial P_2}{\partial p_2}\right] - \left[\frac{\partial P_1}{\partial q_1}\frac{\partial Q_1}{\partial p_2} + \frac{\partial P_2}{\partial q_1}\frac{\partial Q_2}{\partial p_2}\right], \tag{3.54}$$

$$[q_2, p_1] = c = \left[\frac{\partial Q_1}{\partial q_2}\frac{\partial P_1}{\partial p_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial q_2}\frac{\partial P_2}{\partial p_1}\right] - \left[\frac{\partial P_1}{\partial q_2}\frac{\partial Q_1}{\partial p_1} + \frac{\partial P_2}{\partial q_2}\frac{\partial Q_2}{\partial p_1}\right], \tag{3.55}$$

$$[q_2, p_2] = b = \left[\frac{\partial Q_1}{\partial q_2}\frac{\partial P_1}{\partial p_2} + \frac{\partial Q_2}{\partial q_2}\frac{\partial P_2}{\partial p_2}\right] - \left[\frac{\partial P_1}{\partial q_2}\frac{\partial Q_1}{\partial p_2} + \frac{\partial P_2}{\partial q_2}\frac{\partial Q_2}{\partial p_2}\right], \tag{3.56}$$

$$[p_1, p_2] = f = \left[\frac{\partial Q_1}{\partial p_1}\frac{\partial P_1}{\partial p_2} + \frac{\partial Q_2}{\partial p_1}\frac{\partial P_2}{\partial p_2}\right] - \left[\frac{\partial P_1}{\partial p_1}\frac{\partial Q_1}{\partial p_2} + \frac{\partial P_2}{\partial p_1}\frac{\partial Q_2}{\partial p_2}\right], \tag{3.57}$$

$$[q_1, q_2] = 0 = \left[\frac{\partial Q_1}{\partial q_1}\frac{\partial P_1}{\partial q_2} + \frac{\partial Q_2}{\partial q_1}\frac{\partial P_2}{\partial q_2}\right] - \left[\frac{\partial P_1}{\partial q_1}\frac{\partial Q_1}{\partial q_2} + \frac{\partial P_2}{\partial q_1}\frac{\partial Q_2}{\partial q_2}\right]. \tag{3.58}$$

Por lo tanto, suponiendo que las nuevas coordenadas Q_i y P_i no dependen explícitamente del tiempo, utilizando las ecuaciones (3.50) y (3.52) en la ecuación (2.16) se cumple que

$$\begin{aligned} \frac{\partial K}{\partial q_1} &= 0, \\ \frac{\partial K}{\partial q_2} &= 0, \\ \frac{\partial K}{\partial p_1} &= a\frac{p_1}{m} + c\frac{p_2}{m}, \\ \frac{\partial K}{\partial p_2} &= c\frac{p_1}{m} + b\frac{p_2}{m}. \end{aligned} \tag{3.59}$$

Utilizando el mismo método empleado al inicio de este capítulo, para resolver el sistema de ecuaciones (3.59), se obtiene la nueva función hamiltoniana K en términos de las nuevas coordenadas

$$K = a\frac{p_1^2}{2m} + c\frac{p_1 p_2}{m} + b\frac{p_2^2}{2m}. \tag{3.60}$$

3.2.1. Ejemplo 4

Se proponen las expresiones para P_1 y P_2, con el fin de simplicar el sistema de EDP dado por las ecuaciones (3.53)-(3.58), dadas por

$$\begin{aligned} P_1 &= p_2 + q_2, \\ P_2 &= p_1 + q_1. \end{aligned} \tag{3.61}$$

Sustituyendo (3.61) en las ecuaciones (3.53)-(3.58) se reduce el sistema de EDP a

$$[q_1, p_1] = a = \frac{\partial Q_2}{\partial q_1} - \frac{\partial Q_2}{\partial p_1}, \tag{3.62}$$

$$[q_1, p_2] = c = \frac{\partial Q_1}{\partial q_1} - \frac{\partial Q_2}{\partial p_2}, \tag{3.63}$$

$$[q_2, p_1] = c = \frac{\partial Q_2}{\partial q_2} - \frac{\partial Q_1}{\partial p_1}, \tag{3.64}$$

$$[q_2, p_2] = b = \frac{\partial Q_1}{\partial q_2} - \frac{\partial Q_1}{\partial p_2}, \tag{3.65}$$

$$[p_1, p_2] = f = \frac{\partial Q_1}{\partial p_1} - \frac{\partial Q_2}{\partial p_2}, \tag{3.66}$$

$$[q_1, q_2] = 0 = \frac{\partial Q_1}{\partial q_1} - \frac{\partial Q_2}{\partial q_2}. \tag{3.67}$$

Si se considera que Q_1 es independiente de q_2, p_2 y que Q_2 es independiente de q_1, p_1 se cumple que $[q_1, p_1]$ y $[q_2, p_2]$ son trivialmente cero. Por otra parte, se considera que Q_1 depende linealmente de q_1, p_1 y que Q_2 depende linealmente de q_2, p_2, de tal forma que

$$Q_1 = a_1 q_1 + a_2 p_1,$$
$$Q_2 = b_1 q_2 + b_2 p_2.$$

Por lo tanto, el sistema de EDP (3.62)-(3.67) se reduce a las condiciones

$$a_1 - b_2 = c,$$
$$b_1 - a_2 = c,$$
$$a_2 - b_2 = f,$$
$$a_1 - b_1 = 0.$$

Tomando $f = 0$, se cumple que $a_1 = b_1$ y $a_2 = b_2$. Además, se debe cumplir que

$$a_1 = a_2 + c. \tag{3.68}$$

Ahora, tomando $a_2 = d$ se tiene que la transformación de coordenadas es

$$P_1 = p_2 + q_2,$$
$$P_2 = p_1 + q_1,$$
$$Q_1 = (c + d)q_1 + dp_1,$$
$$Q_2 = dp_2 + (c + d)q_2. \tag{3.69}$$

Utilizando la transformación (3.69) en la ecuación (3.60) se obtiene que la nueva función hamiltoniana en función de las nuevas coordenadas y momentos generalizados puede escribirse como

$$K = \frac{c}{m}\left[\left(\frac{c+d}{c}\right)^2 P_1 P_2 - \frac{c+d}{c^2}(P_1 Q_1 + P_2 Q_2) + \frac{1}{c^2} Q_1 Q_2\right]. \tag{3.70}$$

Los términos de la nueva función hamiltoniana (3.70) son productos cruzados de las nuevas coordenadas y momentos, lo cual, difiere bastante de la función hamiltoniana de una partícula libre.

3.2.2. Ejemplo 5

Se proponen las expresiones para P_1 y P_2 dadas por

$$P_1 = p_1 + p_2,$$
$$P_2 = p_1 - p_2. \tag{3.71}$$

Por lo tanto, usando (3.71) el sistema de EDP (3.53)-(3.58) se reduce a:

$$[q_1, p_1] = a = \frac{\partial Q_1}{\partial q_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial q_1}, \tag{3.72}$$

$$[q_1, p_2] = c = \frac{\partial Q_1}{\partial q_1} - \frac{\partial Q_2}{\partial q_1}, \tag{3.73}$$

$$[q_2, p_1] = c = \frac{\partial Q_1}{\partial q_2} + \frac{\partial Q_2}{\partial q_2}, \tag{3.74}$$

$$[q_2, p_2] = b = \frac{\partial Q_1}{\partial q_2} - \frac{\partial Q_2}{\partial q_2}, \tag{3.75}$$

$$[p_1, p_2] = f = \frac{\partial Q_1}{\partial p_1} - \frac{\partial Q_2}{\partial p_1} - \frac{\partial Q_1}{\partial p_2} - \frac{\partial Q_2}{\partial p_2}. \tag{3.76}$$

Si Q_1 y Q_2 son independientes de los momentos, $[p_1, p_2]$ es trivialmente cero. Por otra parte, notemos que $[q_1, p_1]$ y $[q_1, p_2]$ son muy similares y solo se diferencian por un signo. Similarmente, $[q_2, p_1]$ y $[q_2, p_2]$ solo difieren por un signo. Por lo tanto, aprovecharemos esto para que a y b sean cero eligiendo la expresión

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{c}{2} q_1 + \frac{c}{2} q_2, \\ Q_2 &= -\frac{c}{2} q_1 + \frac{c}{2} q_2, \end{aligned} \tag{3.77}$$

donde c es un parámetro arbitrario. Por lo tanto, se tiene la transformación

$$\begin{aligned} P_1 &= p_1 + p_2, \\ P_2 &= p_1 - p_2, \\ Q_1 &= \frac{c}{2} q_1 + \frac{c}{2} q_2, \\ Q_2 &= -\frac{c}{2} q_1 + \frac{c}{2} q_2. \end{aligned} \tag{3.78}$$

Utilizando la transformación (3.78) en la ecuación (3.60) se obtiene que la nueva función hamiltoniana en función de las nuevas coordenadas y momentos generalizados puede escribirse como

$$K = \frac{c}{m}(P_1^2 - P_2^2). \tag{3.79}$$

Esta función hamiltoniana es prácticamente la de una partícula libre, sin embargo, difiere por un signo.

3.2.3. Ejemplo 6

Considerando nuevamente la transformacion (3.71) se tiene el sistema de EDP dado por (3.76). A diferencia del ejemplo pasado se considera una transformación tal que $c = 0$, y por lo tanto, se propone la transformación

$$\begin{aligned} P_1 &= p_1 + p_2, \\ P_2 &= p_1 - p_2, \\ Q_1 &= \frac{a}{2} q_1 + \frac{b}{2} q_2, \\ Q_2 &= \frac{a}{2} q_1 - \frac{b}{2} q_2, \end{aligned} \tag{3.80}$$

donde a y b son parámetros arbitrarios que toman valores reales. Utilizando la transformación (3.80) en la ecuación (3.60) se obtiene que la nueva función hamiltoniana en función de las nuevas coordenadas y momentos generalizados puede escribirse como

$$K = \frac{a}{8m}(P_1 + P_2)^2 + \frac{b}{8m}(P_1 - P_2)^2.$$

Considerando el caso en que $b = -a$, la función hamiltoniana anterior se reduce a

$$K = \frac{a}{2m} P_1 P_2.$$

Esta función hamiltoniana solo depende de los momentos y corresponde al producto de los mismos. Debido a que se origina a partir de la función hamiltoniana de una partícula libre, no es raro que no dependa de las coordenadas generalizadas.

3.2.4. Ejemplo 7

Se proponen las expresiones para Q_1 y Q_2 dadas por

$$Q_1 = a_1 q_1 p_1, \tag{3.81}$$
$$Q_2 = b_1 q_2 p_2. \tag{3.82}$$

Por lo tanto, el sistema de EDP dado por (3.53)-(3.58) se reduce a

$$[q_1, p_1] = a = a_1 p_1 \frac{\partial P_1}{\partial p_1} - a_1 q_1 \frac{\partial P_1}{\partial q_1}, \tag{3.83}$$
$$[q_1, p_2] = c = a_1 p_1 \frac{\partial P_1}{\partial p_2} - b_1 q_2 \frac{\partial P_2}{\partial q_1}, \tag{3.84}$$
$$[q_2, p_1] = c = b_1 p_2 \frac{\partial P_2}{\partial p_1} - a_1 q_1 \frac{\partial P_1}{\partial q_2}, \tag{3.85}$$
$$[q_2, p_2] = b = b_1 p_2 \frac{\partial P_2}{\partial p_2} - b_1 q_2 \frac{\partial P_2}{\partial q_2}, \tag{3.86}$$
$$[p_1, p_2] = f = a_1 q_1 \frac{\partial P_1}{\partial p_2} - b_1 q_2 \frac{\partial P_2}{\partial p_1}, \tag{3.87}$$
$$[q_1, q_2] = 0 = a_1 p_1 \frac{\partial P_1}{\partial q_2} - b_1 p_2 \frac{\partial P_2}{\partial q_1}. \tag{3.88}$$

Observando el sistema de EDP anterior, identificamos que si P_1 depende solo de p_1, q_1 y P_2 depende solo de p_2, q_2 se tiene que los paréntesis $[p_1, p_2]$, $[q_1, q_2]$, $[q_1, p_2]$ y $[q_2, p_1]$ son trivialmente cero. Por otra parte, si a y b son números reales, entonces P_1 y P_2 deben ser de la forma

$$P_1 = c_1 \ln q_1 + c_2 \ln p_1,$$
$$P_2 = d_1 \ln q_2 + d_2 \ln p_2.$$

Por lo tanto, se tiene que los valores de a y b están dados como

$$a = (c_2 - c_1) a_1, \tag{3.89}$$
$$b = (d_2 - d_1) b_1. \tag{3.90}$$

En el caso en que $c_2 = -c_1$ y $d_2 = -d_1$ se tiene la transformación

$$Q_1 = a_1 q_1 p_1,$$
$$Q_2 = b_1 q_2 p_2,$$
$$P_1 = c_1 \ln \frac{q_1}{p_1},$$
$$P_2 = d_1 \ln \frac{q_2}{p_2}. \tag{3.91}$$

La transformación (3.91) es canonoide, como se puede verificar observando la matriz M dada en la ecuación (3.52). Finalmente, sustituyendo la transformación (3.91) en (3.60) se obtiene la función hamiltoniana K en función de las nuevas coordenadas

$$K = -\frac{c_1}{m} Q_1 e^{-P_1/c_1} - \frac{d_1}{m} Q_2 e^{-P_2/d_1}. \tag{3.92}$$

Como se puede apreciar en la ecuación (3.92), sigue dependiendo de las coordenadas y momentos generalizado, sin embargo, la forma de la función hamiltoniana puede permitir encontrar más transformaciones que permitan asociar a ciertas funciones hamiltonianas con la de la partícula libre. A continuación se presenta el último ejemplo, de transformación canonoide.

3.3. Oscilador armónico simple bidimensional

Sea la función hamiltoniana correspondiente a un oscilador armónico simple en dos dimensiones

$$H = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{m\omega^2}{2}(q_1^2 + q_2^2), \tag{3.93}$$

donde m es la masa de la partícula y ω la frecuencia angular del oscilador. Además, las coordenadas q_i corresponden a las coordenadas cartesianas y las p_i a sus respectivos momentos. Utilizando la función hamiltoniana dada por (3.93) y la definición de la matriz Φ presentada en (2.18) se obtiene la siguiente matriz:

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m} \\ -m\omega^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -m\omega^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.94}$$

Suponiendo que las entradas de la matriz M son constantes, y que las matrices M y Φ conmutan, se debe cumplir la ecuación (2.21), lo que implica que

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{-e+fm^2\omega^2}{m} & 0 & 0 \\ \frac{e-fm^2\omega^2}{m} & 0 & \frac{-e+d}{m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{e-fm^2\omega^2}{m} \\ -cm\omega^2 + dm\omega^2 & 0 & \frac{-e+fm^2\omega^2}{m} & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Sin embargo, a diferencia de los ejemplos previos, supondremos que a, b, c, d, e, f son funciones de q_i, p_i y posiblemente t. Suponiendo que c, d, e y f son iguales a cero, se cumple que la matriz M y Φ conmutan.

Para que exista la función hamiltoniana K se debe cumplir la ecuación (2.13), utilizando las suposiciones anteriores, la expresión (2.13) se reduce a

$$-\frac{\partial a}{\partial p_1}(m\omega^2 q_1) - \frac{\partial a}{\partial p_2}(m\omega^2 q_2) + \frac{\partial a}{\partial q_1}\left(\frac{p_1}{m}\right) + \frac{\partial a}{\partial q_2}\left(\frac{p_2}{m}\right) = 0, \tag{3.95}$$

$$-\frac{\partial b}{\partial p_1}(m\omega^2 q_1) - \frac{\partial b}{\partial p_2}(m\omega^2 q_2) + \frac{\partial b}{\partial q_1}\left(\frac{p_1}{m}\right) + \frac{\partial b}{\partial q_2}\left(\frac{p_2}{m}\right) = 0. \tag{3.96}$$

Una solución del sistema anterior es

$$a = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q_1^2, \tag{3.97}$$

$$b = \frac{p_2^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q_2^2. \tag{3.98}$$

Además, para que M sea invertible se debe cumplir que $\det M = a^2b^2 \neq 0$. Por lo tanto, se tiene que la matriz M debe escribirse como

$$M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}. \tag{3.99}$$

Por lo tanto, para el caso particular (3.99) el sistema de ecuaciones (2.24) corresponde a

$$[q_1, p_1] = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}q_2^2 = \left[\frac{\partial Q_1}{\partial q_1}\frac{\partial P_1}{\partial p_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial q_1}\frac{\partial P_2}{\partial p_1}\right] - \left[\frac{\partial P_1}{\partial q_1}\frac{\partial Q_1}{\partial p_1} + \frac{\partial P_2}{\partial q_1}\frac{\partial Q_2}{\partial p_1}\right], \tag{3.100}$$

$$[q_1, p_2] = 0 = \left[\frac{\partial Q_1}{\partial q_1}\frac{\partial P_1}{\partial p_2} + \frac{\partial Q_2}{\partial q_1}\frac{\partial P_2}{\partial p_2}\right] - \left[\frac{\partial P_1}{\partial q_1}\frac{\partial Q_1}{\partial p_2} + \frac{\partial P_2}{\partial q_1}\frac{\partial Q_2}{\partial p_2}\right], \tag{3.101}$$

$$[q_2, p_1] = 0 = \left[\frac{\partial Q_1}{\partial q_2}\frac{\partial P_1}{\partial p_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial q_2}\frac{\partial P_2}{\partial p_1}\right] - \left[\frac{\partial P_1}{\partial q_2}\frac{\partial Q_1}{\partial p_1} + \frac{\partial P_2}{\partial q_2}\frac{\partial Q_2}{\partial p_1}\right], \tag{3.102}$$

$$[q_2, p_2] = \frac{p_2^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}q_2^2 = \left[\frac{\partial Q_1}{\partial q_2}\frac{\partial P_1}{\partial p_2} + \frac{\partial Q_2}{\partial q_2}\frac{\partial P_2}{\partial p_2}\right] - \left[\frac{\partial P_1}{\partial q_2}\frac{\partial Q_1}{\partial p_2} + \frac{\partial P_2}{\partial q_2}\frac{\partial Q_2}{\partial p_2}\right], \tag{3.103}$$

$$[p_1, p_2] = 0 = \left[\frac{\partial Q_1}{\partial p_1}\frac{\partial P_1}{\partial p_2} + \frac{\partial Q_2}{\partial p_1}\frac{\partial P_2}{\partial p_2}\right] - \left[\frac{\partial P_1}{\partial p_1}\frac{\partial Q_1}{\partial p_2} + \frac{\partial P_2}{\partial p_1}\frac{\partial Q_2}{\partial p_2}\right], \tag{3.104}$$

$$[q_1, q_2] = 0 = \left[\frac{\partial Q_1}{\partial q_1}\frac{\partial P_1}{\partial q_2} + \frac{\partial Q_2}{\partial q_1}\frac{\partial P_2}{\partial q_2}\right] - \left[\frac{\partial P_1}{\partial q_1}\frac{\partial Q_1}{\partial q_2} + \frac{\partial P_2}{\partial q_1}\frac{\partial Q_2}{\partial q_2}\right]. \tag{3.105}$$

Si a y b tienen los valores anteriores, la función hamiltoniana existe. Ahora, hay que determinar la función hamiltoniana en función de las coordenadas originales, considerando las soluciones (3.97) y (3.98) en (2.16) se cumple que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial K}{\partial q_1} &= \left(\frac{p_1^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}q_1^2\right)(m\omega^2 q_1), \\
\frac{\partial K}{\partial q_2} &= \left(\frac{p_2^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}q_2^2\right)(m\omega^2 q_2), \\
\frac{\partial K}{\partial p_1} &= \left(\frac{p_1^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}q_1^2\right)\left(\frac{p_1}{m}\right), \\
\frac{\partial K}{\partial p_2} &= \left(\frac{p_2^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}q_2^2\right)\left(\frac{p_2}{m}\right).
\end{aligned} \tag{3.106}$$

Resolviendo el sistema (3.106) utilizando el mismo método empleado al principio de este capítulo, se obtiene que

$$K = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{m\omega^2}{2}q_1^2 + \frac{p_1^2}{2m}\right)^2 + \left(\frac{m\omega^2}{2}q_2^2 + \frac{p_2^2}{2m}\right)^2\right]. \tag{3.107}$$

3.3.1. Ejemplo 8

Se propone la transformación de coordenadas dada por

$$\begin{aligned}
Q_1 &= b_1 q_1 + b_2 p_1, \\
Q_2 &= d_1 q_2 + d_2 p_2, \\
P_1 &= a_1 q_1^3 + a_2 p_1^3 + a_3 q_1^2 p_1 + a_4 q_1 p_1^2, \\
P_2 &= c_1 q_2^3 + c_2 p_2^3 + c_3 q_2^2 p_2 + c_4 q_2 p_2^2.
\end{aligned} \tag{3.108}$$

Sustituyendo la transformación (3.108) en el sistema de EDP (3.100)-(3.105), $[q_1, p_2]$, $[q_2, p_1]$, $[p_1, p_2]$ y $[q_1, q_2]$ son trivialmente cero. Por lo tanto, el sistema de EDP (3.100)-(3.105) se reduce a

$$[q_1, p_1] = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q_2^2 = b_1(3a_2p_1^2 + a_3q_1^2 + 2a_4q_1p_1) - (3a_1q_1^2 + 2a_3q_1p_1 + a_4p_1^2)b_2,$$
$$[q_2, p_2] = \frac{p_2^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q_2^2 = d_1(3c_2p_2^2 + c_3q_2^2 + 2c_4q_2p_2) - (3c_1q_2^2 + 2c_3q_2p_2 + c_4p_2^2)d_2,$$

o equivalentemente,

$$\frac{p_1^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q_2^2 = (3a_2b_1 - a_4b_2)p_1^2 + (a_3b_1 - 3a_1b_2)q_1^2 + (2a_4b_1 - 2a_3b_2)q_1p_1, \tag{3.109}$$
$$\frac{p_2^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q_2^2 = (3c_2d_1 - c_4d_2)p_2^2 + (c_3d_1 - 3c_1d_2)q_2^2 + (2c_4d_1 - 2c_3d_2)q_2p_2. \tag{3.110}$$

Por lo tanto, las condiciones para que se cumplan las ecuaciones (3.109) y (3.110) son

$$\begin{aligned} a_4 &= \frac{a_3b_2}{b_1}, \\ c_4 &= \frac{c_3d_2}{d_1}, \\ 3a_2b_1 - \frac{a_3b_2}{b_1} &= \frac{1}{2m}, \\ a_3b_1 - 3a_1b_2 &= \frac{m\omega^2}{2}, \\ 3c_2d_1 - \frac{c_3d_2}{d_1} &= \frac{1}{2m}, \\ c_3d_1 - 3c_1d_2 &= \frac{m\omega^2}{2}. \end{aligned}$$

Utilizando las condiciones anteriores en (3.108) se obtiene la transformación

$$\begin{aligned} Q_1 &= b_1q_1 + b_2p_1, \\ Q_2 &= d_1q_2 + d_2p_2, \\ P_1 &= \left(\frac{2a_3b_1 - m\omega^2}{6b_2}\right) q_1^3 + \left(\frac{b_1 + 2ma_3b_2}{6b_1^2}\right) p_1^3 + a_3q_1^2p_1 + \frac{a_3b_2}{b_1} q_1p_1^2, \\ P_2 &= \left(\frac{2c_3d_1 - m\omega^2}{6d_2}\right) q_2^3 + \left(\frac{d_1 + 2mc_3d_2}{6d_1^2}\right) p_2^3 + c_3q_2^2p_2 + \frac{c_3d_2}{d_1} q_1p_1^2, \end{aligned} \tag{3.111}$$

Esta transformación es canonoide, como se puede verificar. Sin embargo, para que no aparezcan raíces cúbicas al escribir la función hamiltoniana K (3.107) en función de las nuevas coordenadas, debemos añadir las condiciones

$$\begin{aligned} &(b_1q_1 + b_2p_1) \left(\frac{a_3b_1 - m\omega^2}{3b_1b_2} q_1^2 + \frac{b_1 + 2ma_3b_2}{3mb_1^2b_2} p_1^2\right) \\ &= \frac{a_3b_1 - m\omega^2}{3b_2} q_1^3 + \frac{b_1 + 2ma_3b_2}{3mb_1^2} p_1^2 + a_3q_1^2p_1 + \frac{a_3b_2}{b_1} q_1p_1^2, \\ &(d_1q_2 + d_2p_2) \left(\frac{c_3d_1 - m\omega^2}{3d_1d_2} q_2^2 + \frac{d_1 + 2mc_3d_2}{3md_1^2d_2} p_2^2\right) \\ &= \frac{c_3d_1 - m\omega^2}{3d_2} q_2^3 + \frac{d_1 + 2mc_3d_2}{3md_1^2} p_2^2 + c_3q_2^2p_2 + \frac{c_3d_2}{d_1} q_2p_2^2. \end{aligned}$$

Esto se cumple, si y solo si

$$a_3 - \frac{a_3 b_1 - m\omega^2}{3b_1} = 0, \tag{3.112}$$
$$\frac{a_3 b_2}{b_1} - \frac{b_1 + 2ma_3 b_2}{6mb_1 b_2} = 0, \tag{3.113}$$
$$c_3 - \frac{c_3 d_1 - m\omega^2}{3d_1} = 0, \tag{3.114}$$
$$\frac{c_3 d_2}{d_1} - \frac{d_1 + 2mc_3 d_2}{6md_1 d_2} = 0. \tag{3.115}$$

De las ecuaciones anteriores se obtiene que $b_1 = \pm m\omega\sqrt{(b_2-3)b_2}$, $d_1 = \pm m\omega\sqrt{(d_2-3)d_2}$, $c_3 = -\frac{m\omega^2}{2d_1}$ y $a_3 = -\frac{m\omega^2}{2b_1}$. Tomando $b_2 = d_2 = 4$ la transformación de coordenadas está dada por

$$\begin{aligned}
Q_1 &= m\omega q_1 + 4p_1, \\
Q_2 &= m\omega q_2 + 4p_2, \\
P_1 &= -\frac{m\omega^2}{12}q_1^3 - \frac{1}{2m^2\omega}p_1^3 - \frac{\omega}{2}q_1^2 p_1 - \frac{2}{m}q_1 p_1^2, \\
P_2 &= -\frac{m\omega^2}{12}q_1^3 - \frac{1}{2m^2\omega}p_1^3 - \frac{\omega}{2}q_1^2 p_1 - \frac{2}{m}q_1 p_1^2.
\end{aligned} \tag{3.116}$$

Utilizando la transformación (3.116) en la ecuación (3.107) se obtiene que la nueva función hamiltoniana en función de las nuevas coordenadas y momentos generalizados puede escribirse como

$$\begin{aligned}
K = &\frac{1}{2}\left(\frac{1}{98m}\left[\frac{241}{4}Q_1^2 - 31Q_1\sqrt{2Q_1^2 - 112m^2\omega\frac{P_1}{Q_1}} + 17\left(2Q_1^2 - 112m^2\omega\frac{P_1}{Q_1}\right)\right]\right)^2 \\
&+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{98m}\left[\frac{241}{4}Q_2^2 - 31Q_2\sqrt{2Q_2^2 - 112m^2\omega\frac{P_2}{Q_2}} + 17\left(2Q_2^2 - 112m^2\omega\frac{P_2}{Q_2}\right)\right]\right)^2,
\end{aligned}$$

esta función hamiltoniana no tiene coordenadas ignorables. Sin embargo, hay que destacar que ni K ni la transformación de coordenadas (3.116) depende explícitamente del tiempo, por lo tanto, K está asociada a una cantidad conservada C_1, es decir,

$$K = C_1.$$

Por otra parte, utilizando la matriz M (3.99) en la ecuación (2.25) con $k = 2$ se obtiene la cantidad conservada

$$\left(\frac{1}{2m}p_1^2 + \frac{m\omega}{2}q_1^2\right)^2 + \left(\frac{1}{2m}p_2^2 + \frac{m\omega}{2}q_2^2\right)^2 = C_2, \tag{3.117}$$

donde C_1 y C_2 son constantes. Utilizando la transformación de coordenadas (3.116) en la ecuación (3.117) se concluye que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left(\frac{1}{98m}\left[\frac{241}{4}Q_1^2 - 31Q_1\sqrt{2Q_1^2 - 112m^2\omega\frac{P_1}{Q_1}} + 17\left(2Q_1^2 - 112m^2\omega\frac{P_1}{Q_1}\right)\right]\right)^2 \\
&+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{98m}\left[\frac{241}{4}Q_2^2 - 31Q_2\sqrt{2Q_2^2 - 112m^2\omega\frac{P_2}{Q_2}} + 17\left(2Q_2^2 - 112m^2\omega\frac{P_2}{Q_2}\right)\right]\right)^2 = C_2,
\end{aligned}$$

y por ende,

$$K = C_2.$$

Aunque esto no proporciona información adicional, consiste en un ejemplo particular para mostrar la utilidad de buscar transformaciones canonoides. Además, se muestra una cantidad conservada que, a diferencia de lo que sucede con los ejemplos anteriores, no es trivial, al contar la matriz M (3.99) con entradas funcionalmente dependientes de q_i, p_i.

Capítulo 4

Conclusiones

Se presentaron ocho ejemplos concretos de transformaciones canonoides, los cuales son escasos en la literatura. En estos ejemplos se proponían dos de las cuatro expresiones de las transformaciones de coordenadas para facilitar su obtención, estando estas transformaciones de coordenadas asociadas a cantidades conservadas.

Como se presentó en el primer ejemplo, en caso de que haya simetría axial, es posible considerar una transformación de coordenadas en se aplique una reflexión a los momentos, en dicho caso la transformación es canonoide. En el último ejemplo se consideró una matriz que no tiene entradas constantes, con el fin de proponer una transformación que esté asociada con una cantidad conservada no trivial, como en los ejemplos anteriores. Finalmente, se consideró que ciertas expresiones de las transformaciones de coordenadas dependieran de solo algunas de las viejas coordenadas y momentos, con el fin de que el sistema de ecuaciones diferenciales parciales fuera más simple y permitiera encontrar alguna solución particular.

La ventaja presentada al utilizar transformaciones canonoides es que permite amplicar la cantidad de opciones disponibles que hacen triviales a la función hamiltoniana. Sin embargo, el no contar con una función generatriz dificulta su obtención. Además, no cualquier transformación canonoide proporciona una función hamiltoniana más simple. Finalmente, no se trabajaron más ejemplos en que las entradas de la matriz M fueran funcionalmente dependientes de las variables originales, que corresponden a los ejemplos en donde se obtiene mayor información del sistema al presentarse varias cantidades conservadas asociadas al método empleado, debido a su dificultad.

Bibliografía

[1] Gerardo F. Torres del Castillo. *An Introduction to Hamiltonian Mechanics.* Springer, 2018.

[2] Herbert Goldstein. *Mecánica Clásica.* Reverté, 1994.

[3] Jorge V. José and Eugene J. Saletan. *Classical dynamics: A contemporary approach.* Cambridge University Press, 1998.

[4] L. D. Landau and E. Lifshitz. *Mechanics: Volume 1.* Butterworth-Heinemann, 1976.

[5] S. T. Thornton and J. B. Marion. *Classical Dynamics of Particles and Systems.* Brooks/Cole Publishing Company., 2004.

[6] Arnold V. I. *Mathematical Methods of Classical Mechanics.* Springer-Verlag, 1989.