Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Aplicación de los números complejos, dobles y duales en la mecánica lagrangiana

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

LICENCIADO EN FÍSICA

por

Luis Ángel Capulin Tlaltecatl

Asesorado por

Gerardo F. Torres del Castillo

Puebla Pue.
17 de octubre de 2022

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Aplicación de los números complejos, dobles y duales en la mecánica lagrangiana

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

Licenciado en Física

por

Luis Ángel Capulin Tlaltecatl

Asesorado por

Gerardo F. Torres del Castillo

Puebla Pue.
17 de octubre de 2022

Título: Aplicación de los números complejos, dobles y duales en la mecánica lagrangiana
Estudiante: Luis Ángel Capulin Tlaltecatl

COMITÉ

Dr. Gilberto Silva Ortigoza
Presidente

Dra. Iraís Rubalcava García
Secretario

Dr. Héctor Novales Sánchez
Vocal

Dra. Mercedes Velázquez Quesada
Vocal

Gerardo F. Torres del Castillo
Asesor

Agradecimientos

A mi madre, por todo su cariño y apoyo incondicional, a Néstor, por todo lo que me ha brindado, al Dr. Gerardo Torres del Castillo, a quien considero un modelo a seguir y quien me ha permitido trabajar junto a él en el desarrollo de este trabajo.

Resumen

Se presenta una forma alternativa para resolver las ecuaciones diferenciales asociadas a cuatro sistemas mecánicos específicos: el oscilador armónico isótropo bidimensional, una partícula cargada en un campo magnético uniforme, una partícula en un campo gravitacional uniforme y el oscilador armónico repulsivo. Este método se basa en el uso de las simetrías variacionales y los números complejos, duales y dobles para hallar constantes de movimiento asociadas a dichos sistemas.

Introducción

Desde la publicación de *Philosophiæ naturalis principia mathematica* a mediados del siglo XVII por Isacc Newton, han surgido formalismos alternativos que intentan abordar el estudio de los sistemas mecánicos desde otro punto de vista. Algunos de estos formalismos resultan con ciertas ventajas sobre otros, como es el caso del formalismo Lagrangiano, introducido por Joseph Louis de Lagrange casi 100 años después de la publicación de la obra de Newton. En este nuevo formalismo, Lagrange pone en segundo plano el aspecto geométrico de los problemas, dejando de lado el análisis minucioso de todas las fuerzas que interactúan con los sistemas mecánicos que se estudian y fijando su interés en el aspecto analítico de los problemas, proponiendo un método que se basa en hallar las energías cinética (K) y potencial (U) para construir una función L denominada Lagrangiana, la cual posee toda la información dinámica del sistema. Es importante mencionar que ambos formalismos son totalmente equivalentes, ya que se basan en los mismos principios físicos, sin embargo, en cada caso se aborda con distintas herramientas matemáticas pero ambos tienen un mismo objetivo, el hallar las ecuaciones de movimiento que describen la evolución de los sistemas mecánicos que se estudian.

Para resolver las ecuaciones diferenciales asociadas a los sistemas mecánicos de interés existen distintos métodos, dependiendo del tipo de ecuación que se tenga. En este trabajo mostraremos que el hallar constantes de movimiento para cada sistema mecánico de interés, facilita la resolución de las ecuaciones diferenciales asociadas a estos. Para hallar dichas constantes, haremos uso de las familias uniparamétricas de cambio de coordenadas $(q_i^{'}, t^{'})$ que son simetrías variacionales de L, lo que quiere decir que cumplen con la ecuación

$$L(q_i^{'}, \frac{dq_i^{'}}{dt^{'}}, t^{'})\frac{dt^{'}}{dt} = L(q_i, \frac{dq_i}{dt}, t) + \frac{dF(q_i, t, s)}{dt}$$

Mostraremos también que con el uso de los números complejos, duales y dobles, el hallar las cantidades conservadas de los sistemas de interés que aquí se muestran, resulta mucho más sencillo. Comenzaremos con los números complejos, definidos como $z \equiv x+iy$, con la propiedad de que $i^2 = -1$, estos se emplearán para abordar los ejemplos del oscilador armónico isótropo bidimensional y una partícula cargada en un campo magnético uniforme, posteriormente, para el sistema de una partícula en un campo gravitacional uniforme emplearemos los números duales definidos como $z \equiv x + \varepsilon y$, con la propiedad de que $\varepsilon^2 = 0$, y finalmente, para el oscilador armónico repulsivo, emplearemos los números dobles definidos como $z \equiv x + jy$, con la propiedad de que $j^2 = 1$. En cada caso, comenzaremos reescribiendo las ecuaciones diferenciales asociadas a nuestros sistemas en términos de los nuevos números, posteriormente, hallaremos una función Lagrangiana asociada a estas ecuaciones para, finalmente, hallar las cantidades conservadas asociadas a dichos sistemas. Esta información será empleada para solucionar las ecuaciones diferenciales, y se mostrará que con este método, estas se pueden reescribir de una forma más sencilla.

Índice general

Capítulo 1

Conceptos Básicos del Formalismo Lagrangiano

La mecánica Lagrangiana, llamada así en honor a Joseph-Louis de Lagrange, ofrece una formulación alternativa al enfoque Newtoniano de la mecánica clásica, esto permite que el estudio de los sistemas mecánicos de interés resulte más sencillo ya que, en muchos casos, es posible simplificar de manera significativa los cálculos necesarios para describir el comportamiento de dichos sistemas. A diferencia de la mecánica de Newton, la mecánica Lagrangina se enfoca principalmente en encontrar las energías cinética (K) y potencial (U) asociadas al sistema y no en cada fuerza con la que interactúa, esto permite construir la función Lagrangiana asociada al sistema, la cual, al ser sustituida en las ecuaciones de Lagrange, nos permite calcular las ecuaciones de movimiento, más aún, la función Lagrangiana nos permite obtener información adicional del sistema, en especial, las simetrías que éste posee.

1.1. Principio de D'Alembert

Para estudiar los sistemas mecánicos, es necesario clasificar las fuerzas presentes en dos grupos; por un lado, las fuerzas de constricción $\mathbf{F}^{\text{constr}}$, son aquellas que determinan la configuración del sistema, y por otro lado, las fuerzas aplicadas $\mathbf{F}^{\text{apl}}$, son la suma de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo α-ésimo que no son fuerzas de constricción. Las *coordenadas generalizadas*, que forman un conjunto que contiene parámetros numéricos independientes entre sí $(q_1, ..., q_n)$ donde n es el número de *grados de libertad*, nos permite describir la configuración de nuestro sistema mecánico en cada instante, ya que gracias a estas, es posible especificar la forma de los vectores de posición $\mathbf{r}_\alpha(q_1, ..., q_n)$ de cada uno de los cuerpos que conforman nuestro sistema mecánico. El principio de D'Alembert establece que

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \mathbf{F}_\alpha^{\text{constr}} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q_i} = 0; \qquad \alpha = 1, 2, ..., N; \qquad i = 1, ..., n \tag{1.1}$$

y, por lo tanto, de la segunda ley de Newton se sigue que

$$\sum_{\alpha=1}^{N} (m_\alpha \ddot{\mathbf{r}}_\alpha - \mathbf{F}_\alpha^{\text{apl}}) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q_i} = 0 \tag{1.2}$$

donde el subíndice α distingue a los cuerpos del sistema.

1.2. Ecuaciones de Lagrange

Las ecuaciones de Lagrange son resultado de combinar el principio de D'Alembert y la segunda ley de Newton. En primer lugar, suponemos que los vectores de posición de los cuerpos que forman el sistema pueden ser escritos en términos de un conjunto de n parámetros independientes $(q_1, q_2, ..., q_n)$ y posiblemente del tiempo, es decir

$$\mathbf{r}_\alpha(q_i, t) \tag{1.3}$$

esto es equivalente a decir que los vectores de posición satisfacen ciertas ecuaciones de constricción. Empleando el cálculo vectorial se demuestra (ver p. ej. Referencia [1]) que la Ecuación (1.2) se puede escribir de la forma

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathrm{K}}{\partial q_i} = Q_i \tag{1.4}$$

donde

$$\mathrm{K} \equiv \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{1}{2} m_\alpha \dot{\mathbf{r}}_\alpha \cdot \dot{\mathbf{r}}_\alpha \tag{1.5}$$

es la energía cinética del sistema y

$$Q_i \equiv \sum_{\alpha=1}^{N} \mathbf{F}_\alpha^{\mathrm{apl}} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q_i} \tag{1.6}$$

Note que la energía cinética no depende de las coordenadas elegidas, mientras que Q_i sí. En muchos de los problemas que se abordan en la mecánica Lagrangiana, las fuerzas generalizadas son derivables de un potencial, es decir, existe una función $U(q_i, t)$ de tal forma que

$$Q_i = -\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial q_i} \tag{1.7}$$

La existencia del potencial no depende de las coordenadas empleadas sino que es una propiedad del sistema mecánico que se estudia. Al sustituir la Ecuación (1.7) en la Ecuación (1.4) se tiene que

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial (\mathrm{K\text{-}U})}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial (\mathrm{K\text{-}U})}{\partial q_i} = 0, \tag{1.8}$$

que puede ser escrito como,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \tag{1.9}$$

donde

$$L \equiv \mathrm{K} - \mathrm{U} \tag{1.10}$$

La función L es conocida como la Lagrangiana del sistema y las Ecuaciones (1.9) son llamadas la ecuaciones de Lagrange, las cuales, se pueden escribir de forma más explícita como

$$\frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{q}_i} + \frac{\partial^2 L}{\partial q_j \partial \dot{q}_i}\dot{q}_j + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_i}\ddot{q}_j - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \tag{1.11}$$

con suma implícita sobre índices repetidos.

1.3. Lagrangiana Asociada a una EDO de Segundo Orden

Un resultado importante del formalismo Lagrangiano es que para cualquier EDO de segundo orden se pueden encontrar un número infinito de funciones Lagrangianas que conducen a esa ecuación. Para hallar dichas funciones suponemos que

$$\ddot{q} = f(q, \dot{q}, t) \tag{1.12}$$

es una EDO de segundo orden, la cual, puede o no corresponder a un sistema mecánico. Ahora, al sustituir la Ecuación (1.12) en la Ecuación (1.11) se tiene que

$$\frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{q}} + \frac{\partial^2 L}{\partial q \partial \dot{q}}\dot{q} + f(q, \dot{q}, t)\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \tag{1.13}$$

en la cual, buscamos una función $L(q, \dot{q}, t)$ que satisfaga la Ecuación (1.3). Al definir

$$M \equiv \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2} \tag{1.14}$$

y al derivar la Ecuación (1.13) se tiene que

$$\frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial M}{\partial q}\dot{q} + f(q, \dot{q}, t)\frac{\partial M}{\partial \dot{q}} = -M\frac{\partial f}{\partial \dot{q}} \tag{1.15}$$

la cual es una EDP lineal de primer orden para $M(q, \dot{q}, t)$. Esta ecuación puede resolverse usando el *método de las características de Lagrange,* sin embargo, en algunos casos se puede encontrar una solución no trivial de manera sencilla. Nótese que la Ecuación (1.15) se puede escribir como

$$\frac{dM}{dt} = -M\frac{\partial f}{\partial \dot{q}} \tag{1.16}$$

y su solución depende de la forma que tenga la función f.

Capítulo 2

Cantidades Conservadas

La función Lagrangiana provee de toda la información dinámica de un sistema mecánico, de la cual se pueden deducir las ecuaciones de movimiento que determinan la evolución del sistema. Durante esta evolución las $2n$ cantidades q_i y $\dot{q}_i$ $(i = 1, 2, ..., n)$ varían con el tiempo, sin embargo, existen algunas funciones de estas cantidades cuyos valores permanecen constantes y solo dependen de las condiciones iniciales. Estas funciones son conocidas como *constantes de movimiento* e independientemente de que tengan un significado físico o geométrico, el conocer estas funciones resulta útil en la resolución de las ecuaciones de movimiento.

En algunos casos las constantes de movimiento se pueden encontrar por simple inspección cuando la función Lagrangiana no depende explícitamente del tiempo (ver ref. [4]) o tiene alguna *coordenada ignorable*. Las coordenadas ignorables son aquellas que no aparecen de manera explícita cuando escribimos la función Lagrangiana del sistema, sin embargo, el que exista una coordenada ignorable no está sujeto a la forma del sistema mecánico sino que depende fuertemente del sistema de coordenadas elegido. Como se verá más adelante, una forma alternativa para hallar las constantes de movimiento del sistema mecánico es buscar familias uniparamétricas de transformaciones de coordenadas que dejen invariante a la función Lagrangiana.

2.1. Simetrías Variacionales

Se dice que $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ es invariante bajo el reemplazo de $q_i \mapsto q_i^{'}(q_j, t)$ si

$$L(q_i, \dot{q}_i, t) = L(q_i^{'}, \dot{q}_i^{'}, t) \tag{2.1}$$

sin embargo, nos interesaremos en una familia de cambio de coordenadas más amplia dada por

$$q_i^{'} = q_i^{'}(q_j, t, s), \qquad t^{'} = t^{'}(q_j, t, s)$$

llamada *familia uniparamétrica de cambio de coordenadas*, esto debido a que depende de un parámetro s, el cual es un número real. Una de estas familias es una simetría variacional de L si (ver ref. [1])

$$L(q_i^{'}, \frac{dq_i^{'}}{dt^{'}}, t^{'})\frac{dt^{'}}{dt} = L(q_i, \frac{dq_i}{dt}, t) + \frac{dF(q_i, t, s)}{dt} \tag{2.2}$$

donde F es alguna función. Estamos interesados en demostrar que, con cada familia uniparamétrica de simetrías variacionales para una Lagrangiana dada, se puede hallar cierta cantidad conservada, para ello, supondremos que tenemos una familia uniparamétrica que es simetría variacional de $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ para la cual cuando $s = 0$ se tiene que

$$q_i^{'}(q_j, t, 0) = q_i, \qquad t^{'}(q_j, t, 0) = t$$

al derivar parcialmente en ambos lados a la Ecuación (2.2) respecto de s y evaluar en $s = 0$ se tiene

$$\frac{\partial L}{\partial q_i}\frac{\partial q_i^{'}}{\partial s}\bigg|_{s=0} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{dq_i^{'}}{dt'}\right)\bigg|_{s=0} + \frac{\partial L}{\partial t}\frac{\partial t^{'}}{\partial s}\bigg|_{s=0} + L\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{dt^{'}}{dt}\right)\bigg|_{s=0} = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{dF}{dt}\right)\bigg|_{s=0} \tag{2.3}$$

aquí, conviene definir

$$\eta_i \equiv \frac{\partial q_i^{'}}{\partial s}\bigg|_{s=0} = \eta_i(q_j, t), \qquad \xi \equiv \frac{\partial t^{'}}{\partial s} = \xi(q_j, t), \qquad G \equiv \frac{\partial F}{\partial s}\bigg|_{s=0} = G(q_i, t) \tag{2.4}$$

lo cual conduce a

$$\frac{\partial L}{\partial q_i}\eta_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{d\eta_i}{dt} - \dot{q}_i\frac{d\xi}{dt}\right) + \frac{\partial L}{dt}\xi + L\frac{d\xi}{dt} = \frac{dG}{dt} \tag{2.5}$$

en este caso si las $n+1$ funciones η_i y ξ satisfacen la ecuación anterior, se dice que son los generadores infinitesimales de una simetría variacional. Para mostrar que con cualquier familia de simetrías variacionales se puede hallar una cantidad conservada usaremos el hecho de que, la Ecuación (2.5) se puede reescribir como

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\eta_i - \xi\left(\dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L\right) - G\right] = \left(\eta_i - \xi\dot{q}_i\right)\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i}\right) \tag{2.6}$$

que cuando las ecuaciones de Lagrange se cumplen, es decir

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \tag{2.7}$$

se tiene que

$$\frac{d}{dt}\left[\eta_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \xi\left(\dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L\right) - G\right] = 0 \tag{2.8}$$

lo que significa que lo que está dentro de los corchetes se conserva, ya que su derivada con respecto al tiempo vale cero, y se denota por ψ

$$\psi \equiv \eta_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \xi\left(\dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L\right) - G \tag{2.9}$$

Nótese que la función ψ puede depender solo de q, $\dot{q}$ y t.

Capítulo 3

Aplicaciones

3.1. Números complejos

Un número complejo, denotado por z, se define como

$$z \equiv x + iy$$

donde $x, y \in \mathbb{R}$ y el número imaginario i tiene la propiedad de que $i^2 = -1$. Estos números forman un campo no ordenado y su utilidad en este caso radica en que, al buscar las simetrías de algunos sistemas físicos de interés, se logran importantes simplificaciones algebraicas.

3.1.1. Oscilador Armónico Isótropo Bidimensional

Consideremos un cuerpo de masa m y a su vector de posición $\vec{r}$ que, en coordenadas cartesianas, tiene la forma

$$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{x}\hat{\imath} + \dot{y}\hat{\jmath} \tag{3.1}$$

La energía cinética K y potencial U del sistema están dadas por

$$\mathrm{K} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2), \qquad \mathrm{U} = \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2) \tag{3.2}$$

por lo tanto, la función Lagrangiana del sistema tiene la forma

$$L = \frac{1}{2}m[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - \omega^2(x^2 + y^2)] \tag{3.3}$$

sustituyendo a L en las ecuaciones de Lagrange tenemos

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\{\frac{1}{2}m[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - \omega^2(x^2 + y^2)]\}}{\partial\dot{x}}\right) - \frac{\partial\{\frac{1}{2}m[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - \omega^2(x^2 + y^2)]\}}{\partial x} = m\ddot{x} + m\omega^2 x = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\{\frac{1}{2}m[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - \omega^2(x^2 + y^2)]\}}{\partial\dot{y}}\right) - \frac{\partial\{\frac{1}{2}m[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - \omega^2(x^2 + y^2)]\}}{\partial y} = m\ddot{y} + m\omega^2 y = 0\end{gathered} \tag{3.4}$$

que son las ecuaciones de movimiento de nuestro sistema. La definición $z \equiv x + iy$ nos permite escribir las ecuaciones (3.4) como una sola

$$m\ddot{z} = -m\omega^2 z \tag{3.5}$$

Para hallar a la función Lagrangiana, $\mathcal{L}$, que nos genere la Ecuación (3.5) emplearemos lo visto en la Sección 1.3. En este caso $\ddot{z} = f(z, \dot{z}, t)$, y como f no depende explícitamente de $\dot{z}$ entonces

$$\frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial M}{\partial q}\dot{q} + f(q, \dot{q}, t)\frac{\partial M}{\partial \dot{q}} = 0 \tag{3.6}$$

y por lo tanto,

$$\frac{dM}{dt} = 0 \tag{3.7}$$

lo cual nos permite encontrar una solución para la Ecuación (3.6) ya que $M = \alpha$, donde α es una constante por determinar. Al emplear Ecuación (1.14) se tiene que

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\alpha\dot{z}^2 + g\dot{z} + h \tag{3.8}$$

donde $g = g(z, t)$ y $h(z, t)$. Sustituyendo a $\mathcal{L}$ en las ecuaciones de Lagrange, se encuentra que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial(\frac{1}{2}k\dot{z}^2 + g\dot{z} + h)}{\partial \dot{z}}\right] - \frac{\partial(\frac{1}{2}k\dot{z}^2 + g\dot{z} + h)}{\partial z} \\ \frac{d}{dt}\left(k\dot{z} + g\right) - \dot{z}\frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial z} = 0 \\ k\ddot{z} + \frac{\partial g}{\partial t} - \frac{\partial h}{\partial z} = 0 \end{aligned} \tag{3.9}$$

donde al hacer $g = 0$, por conveniencia, y sustituir el valor de $\ddot{z}$, dado por la Ecuación (3.5), se tiene que

$$-kz\omega^2 = \frac{\partial h}{\partial z} \qquad \rightarrow \qquad h = -\frac{1}{2}k\omega^2 z^2 \tag{3.10}$$

Sustituyendo el valor de h en la ecuación (3.9), y comparando con la ecuación (3.5), se ve que al hacer $\alpha = m$ se tiene que

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 z^2 \tag{3.11}$$

que es una Lagrangiana compleja del sistema mecánico.

Para hallar las cantidades conservadas de nuestro sistema mecánico sustituimos a $\mathcal{L}$ en la Ecuación (2.5), para esto, conviene factorizar a $(\frac{1}{2}m)$ y renombrarlo como k

$$\begin{aligned} \frac{\partial[k(\dot{z}^2 - \omega^2 z^2)]}{\partial q_i}\eta_i + \frac{\partial[k(\dot{z}^2 - \omega^2 z^2)]}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{d\eta_i}{dt} - \dot{q}_i\frac{d\xi}{dt}\right) + \frac{\partial[k(\dot{z}^2 - \omega^2 z^2)]}{dt}\xi + \\ [k(\dot{z}^2 - \omega^2 z^2)]\frac{d\xi}{dt} = \frac{dG}{dt} \end{aligned} \tag{3.12}$$

que desarrollando y simplificando lleva a,

$$\left[2k\frac{\partial \eta}{\partial z} - k\frac{\partial \xi}{\partial t}\right]\dot{z}^2 + \left[2k\frac{\partial \eta}{\partial t} - k\omega^2 z^2\frac{\partial \xi}{\partial z}\right]\dot{z} - k\frac{\partial \xi}{\partial z}\dot{z}^3 - 2k\omega^2 z\eta - k\omega^2 z^2\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial z}\dot{z} \tag{3.13}$$

y al igualar los polinomios en la variable $\dot{z}$ que aparecen en ambos miembros de la ecuación, se obtienen las siguientes igualdades

$$\frac{\partial \xi}{\partial z} = 0 \tag{3.14}$$

$$2\frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{\partial \xi}{\partial t} = 0 \tag{3.15}$$

$$2k\frac{\partial \eta}{\partial t} - k\omega^2 z^2 \frac{\partial \xi}{\partial z} = \frac{\partial G}{\partial z} \tag{3.16}$$

$$-2k\omega^2 z\eta - k\omega^2 z^2 \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial G}{\partial t} \tag{3.17}$$

la Ecuación (3.14) implica que $\xi = A(t)$, donde $A(t)$ es una función que depende solo del tiempo y de la Ecuación (3.15) se tiene que

$$\eta = \frac{1}{2}\frac{dA}{dt}z + B(t) \tag{3.18}$$

donde $B(t)$ es una función que también depende únicamente del tiempo. De las Ecuaciones (3.16) y (3.17) se puede ver que

$$\frac{\partial G}{\partial z} = k\left(\frac{d^2A}{dt^2}z + 2\frac{dB}{dt}\right), \qquad \frac{\partial G}{\partial t} = -2k\omega^2\left(\frac{dA}{dt}z^2 + B(t)z\right) \tag{3.19}$$

En este punto, resulta importante destacar que la condición de que las derivadas cruzadas de la función G sean iguales entre sí es una condición que hemos impuesto, en este caso, esto conduce a que

$$\frac{d^3A}{dt^3}z + 2\frac{d^2B}{dt^2} = -2\omega^2 B - 4\omega^2\frac{dA}{dt}z \tag{3.20}$$

y al igualar los polinomios en la variable z que aparecen en ambos miembros de la ecuación se obtiene que

$$\frac{d^3A}{dt^3} = -4\omega^2\frac{dA}{dt} \tag{3.21}$$

$$\frac{d^2B}{dt^2} = -\omega^2 B \tag{3.22}$$

La Ecuación (3.21) es una ecuación diferencial lineal ordinaria de tercer orden y la Ecuación (3.22) es una ecuación diferencial lineal ordinaria de segundo orden, las cuales, tienen como solución (ver ref. [3])

$$A(t) = c_1\cos(2\omega t) + c_2\sin(2\omega t) + c_3, \qquad B(t) = (c_4 + ic_5)\cos(\omega t) + (c_6 + ic_7)\sin(\omega t) \tag{3.23}$$

respectivamente, por lo tanto, las funciones ξ y η tienen la forma

$$\xi = c_1\cos(2\omega t) + c_2\sin(2\omega t) + c_3 \tag{3.24}$$

$$\eta = -\omega z[c_1\sin(2\omega t) - c_2\cos(2\omega t)] + (c_4 + ic_5)\cos(\omega t) + (c_6 + ic_7)\sin(\omega t) \tag{3.25}$$

Para hallar la función G usamos que

$$\frac{\partial G}{\partial z} = \frac{1}{2}m\left(\frac{d^2A}{dt^2}z + 2\frac{dB}{dt}\right), \tag{3.26}$$

$$\frac{\partial G}{\partial t} = -m\omega^2[-2c_1\omega\sin(2\omega t)z^2 + 2c_2\omega\cos(2\omega t)z^2 + (c_4 + ic_5)\cos(\omega t)z + (c_6 + ic_7)\sin(\omega t)z] \quad (3.27)$$

donde se ha sustituido el valor de $k = \frac{1}{2}m$. Al desarrollar las derivadas tenemos que

$$G = m\{-\omega^2 z^2[c_1\cos(2\omega t) + c_2\sin(2\omega t)] - (c_4 + ic_5)\omega z\sin(\omega t) + (c_6 + ic_7)\omega z\cos(\omega t)\} \quad (3.28)$$

por lo tanto, la función ψ está dada por

$$\begin{aligned}\psi = \{-\omega z[c_1\sin(2\omega t) - c_2\cos(2\omega t)] + (c_4 + ic_5)\cos(\omega t) + (c_6 + ic_7)\sin(\omega t)\}\{m\dot{z}\}- \\ \{c_1\cos(2\omega t) + c_2\sin(2\omega t) + c_3\}\{\frac{1}{2}m\dot{z}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 z^2)\}- \\ \{-\omega^2 z^2[c_1\cos(2\omega t) + c_2\sin(2\omega t)] - (c_4 + ic_5)\omega z\sin(\omega t) + (c_6 + ic_7)\omega z\cos(\omega t)\}\end{aligned} \quad (3.29)$$

donde $c_1, c_2, ..., c_7$ son constantes reales arbitrarias. Para hallar las cantidades conservadas, hacemos a cada una de las siete constantes igual a uno, y el resto igual a cero, por lo que se obtiene

$$\psi_1 = -m\omega z\dot{z}\sin(2\omega t) + \cos(2\omega t)\left[\frac{1}{2}m(\omega^2 z^2 - \dot{z}^2)\right] \quad (3.30)$$

$$\psi_2 = \omega m z\dot{z}\cos(2\omega t) - \frac{1}{2}m\sin(2\omega t)(\dot{z}^2 + \omega^2 z^2) + m\omega^2 z^2\sin(2\omega t) \quad (3.31)$$

$$\psi_3 = -\frac{1}{2}m\left(\dot{z}^2 + \omega^2 z^2\right) \quad (3.32)$$

$$\psi_4 = m\dot{z}\cos(2\omega t) + m\omega z\sin(\omega t) \quad (3.33)$$

$$\psi_5 = im[\cos(\omega t)\dot{z} + \omega z\sin(\omega t)] \quad (3.34)$$

$$\psi_6 = m[-\omega z\cos(\omega t) + \sin(\omega t)\dot{z}] \quad (3.35)$$

$$\psi_7 = im[\dot{z}\sin(\omega t) - \omega z\cos(\omega t)] \quad (3.36)$$

donde las funciones ψ_i son las cantidades conservadas para la función $\mathcal{L}$. Nótese que para demostrar que las funciones anteriores corresponden a constantes de movimiento, es necesario mostrar que la derivada respecto al tiempo para cada función ψ es cero, si tomamos a ψ_1 y la derivamos respecto del tiempo

$$\begin{aligned}\frac{d\psi_1}{dt} &= -2\omega^2 m z\dot{z}\cos(2\omega t) - m\omega\sin(2\omega t)(z\ddot{z} + \dot{z}^2) \\ &= \cos(2\omega t)[-m\dot{z}\ddot{z} - \omega^2 m z\dot{z}] - \sin(2\omega t)[m\omega z\ddot{z} + m\omega^3 z^2]\end{aligned} \quad (3.37)$$

al usar la Ecuación (3.5) se puede mostrar que las cantidades dentro de los corchetes son cero y por lo tanto, como se esperaba, la derivada temporal es cero. Análogamente, esto se puede hacer para cada función ψ.

Debemos tomar en cuenta que las funciones ψ no necesariamente corresponden a cantidades de interés físico o geométrico, sin embargo, nuestro interés ahora se centra en usarlas para resolver las ecuaciones diferenciales de nuestro sistema mecánico. Al tomar ψ_4 se tiene que

$$\dot{z}\cos(\omega t) + \omega z\sin(\omega t) = c \quad (3.38)$$

que es una ecuación lineal ordinaria de primer grado que tiene como solución

$$z = \alpha_1\cos(\omega t) + \alpha_2\sin(\omega t) \quad (3.39)$$

Al regresar a las coordenadas xy se llega a que

$$x = c_1\cos(\omega t) + c_2\sin(\omega t) \quad (3.40)$$

$$y = c_3\cos(\omega t) + c_4\sin(\omega t) \quad (3.41)$$

Nótese que en este problema la ventaja de encontrar las cantidades conservadas radica en que se pasó de tener que resolver una ecuación linear ordinaria de segundo orden (Ecuación 3.5) a resolver una ecuación lineal ordinaria de primer orden (Ecuación 3.38)

3.1.2. Partícula Cargada en un Campo Magnético Uniforme

Consideremos una partícula cargada inmersa en un campo magnético uniforme, la fuerza que la partícula experimenta está dada por

$$\vec{F} = \frac{e}{c}(\vec{v} \times \vec{B}) = \frac{e}{c}\begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ 0 & 0 & B_0 \end{vmatrix} = \frac{e}{c}B_0(\dot{y}\hat{\imath} - \dot{x}\hat{\jmath})$$

donde m es la masa de la partícula, c es la velocidad de la luz, e es la carga de la partícula y B_0 es la magnitud del campo magnético a lo largo del eje $\hat{z}$. Las ecuaciones de movimiento, por lo tanto, tienen la forma

$$m\ddot{x} = m\omega_c\dot{y}, \qquad m\ddot{y} = -m\omega_c\dot{x}, \tag{3.42}$$

donde

$$\omega_c \equiv \frac{e}{mc}B_0$$

al usar nuevamente la definición de número complejo, podemos escribir las ecuaciones de movimiento en una sola

$$m\ddot{z} = -mi\omega_c\dot{z} \tag{3.43}$$

que es una *ecuación diferencial ordinaria de segundo orden.*

Para encontrar una Lagrangiana que nos genere la Ecuación 3.43 usaremos que

$$\frac{\partial M}{\partial t} + \dot{z}\frac{\partial M}{\partial z} + f\frac{\partial M}{\partial \dot{z}} = -M\frac{\partial M}{\partial \dot{z}} \tag{3.44}$$

donde $f(z, \dot{z}, t) = -i\omega_c\dot{z}$. Al proponer a $M = m\mathrm{e}^{\omega_c it}$ la Ecuación (3.44) se cumple idénticamente, por lo tanto, al usar la Ecuación (1.14) se tiene que

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{z}^2\mathrm{e}^{i\omega_c t} + g\dot{z} + h \tag{3.45}$$

donde $g = g(z,t)$ y $h = h(z,t)$. Al sustituir a $\mathcal{L}$ en las ecuaciones de Lagrange

$$(i\omega_c\dot{z} + \ddot{z})\mathrm{e}^{i\omega_c t} + \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial z} = 0 \tag{3.46}$$

y al tomar a g y h igual a cero se tiene que

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\mathrm{e}^{i\omega_c t}\dot{z}^2 \tag{3.47}$$

que es una función Lagrangiana compleja para nuestro sistema mecánico.

Para hallar las funciones η, ξ y G sustituimos $\mathcal{L}$ en la Ecuación (2.5)

$$me^{i\omega_c t}\dot{z}\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}+\dot{z}\frac{\partial \eta}{\partial z}\right) - \frac{m}{2}\mathrm{e}^{i\omega_c t}\dot{z}^2\left(\frac{\partial \xi}{\partial t} + \dot{z}\frac{\partial \xi}{\partial z}\right) + \frac{m}{2}i\omega_c\mathrm{e}^{i\omega_c t}\dot{z}^2\xi = \frac{\partial G}{\partial t} + \dot{z}\frac{\partial G}{\partial z} \tag{3.48}$$

donde al desarrollar se tiene

$$me^{i\omega_c t}\left[\dot{z}\frac{\partial \eta}{\partial t} + \dot{z}^2\left(\frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{1}{2}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{1}{2}i\omega\xi\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial \xi}{\partial z}\dot{z}^3\right] = \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial z}\dot{z} \tag{3.49}$$

y al igualar los polinomios en la variable $\dot{z}$ que aparecen en ambos miembros de la ecuación tenemos

$$\frac{\partial \xi}{\partial z} = 0 \tag{3.50}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{1}{2}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{1}{2} i\omega_c \xi = 0 \tag{3.51}$$

$$m\mathrm{e}^{i\omega_c t}\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial G}{\partial z} \tag{3.52}$$

de las Ecuaciones (3.50) y (3.52) se tiene que

$$\xi = A(t) \tag{3.53}$$

$$\eta = \frac{1}{2}\frac{dA}{dt}z - \frac{1}{2}i\omega_c A z + B(t) \tag{3.54}$$

donde las funciones A y B dependen únicamente del tiempo.

En este punto, exigimos que las derivadas parciales cruzadas de la función G sean iguales entre sí, de donde se obtiene que

$$\left[\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^3 A}{\mathrm{d}t^3} + \frac{\omega_c^2}{2}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}\right]z + \left[i\omega_c \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}^2 B}{\mathrm{d}t^2}\right] = 0 \tag{3.55}$$

y al igualar los polinomios en la variable z que aparecen en ambos miembros de la ecuación se encuentra que

$$\frac{\mathrm{d}^3 A}{\mathrm{d}t^3} + \omega_c^2\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}^2 B}{\mathrm{d}t^2} + i\omega_c\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{3.56}$$

por lo tanto

$$A(t) = c_1\cos(\omega_c t) + c_2\sin(\omega_c t) + c_3 \tag{3.57}$$

donde c_1, c_2 y c_3 son constantes reales y

$$B(t) = c_4 + ic_5 + (c_6 + ic_7)\mathrm{e}^{-i\omega_c t} \tag{3.58}$$

donde $c_4, ..., c_7$ son constantes reales.

De las Ecuaciones (3.50-3.52), (3.57) y (3.58) se encuentra que

$$\xi = c_1\cos(\omega_c t) + c_2\sin(\omega_c t) + c_3 \tag{3.59}$$

$$\eta = \frac{1}{2}\omega_c z(-c_1 i\mathrm{e}^{-i\omega_c t} + c_2\mathrm{e}^{-i\omega_c t} - c_3 i) + c_4 + ic_5 + (c_6 + ic_7)\mathrm{e}^{-i\omega_c t} \tag{3.60}$$

$$G = m\left[-(c_1 + ic_2)\frac{\omega_c^2 z^2}{4} - (c_6 + ic_7)i\omega_c z\right] \tag{3.61}$$

Para hallar las cantidades conservadas es necesario sustituir a η, ξ, G y $\mathcal{L}$ en la Ecuación (2.9), y se obtiene que

$$\begin{aligned}\psi = \{-\omega z[c_1\sin(2\omega t) - c_2\cos(2\omega t)] + (c_4 + ic_5)\cos(\omega t) + (c_6 + ic_7)\sin(\omega t)\}\{m\dot{z}\} - \\ \{c_1\cos(2\omega t) + c_2\sin(2\omega t) + c_3\}\{\frac{1}{2}m\dot{z}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 z^2\} - \\ \{-\omega^2 z^2[c_1\cos(2\omega t) + c_2\sin(2\omega t)] - (c_4 + ic_5)\omega z s\sin(\omega t) + (c_6 + ic_7)\omega z\cos(\omega t)\}\end{aligned} \tag{3.62}$$

Veamos que no es necesario calcular todas las cantidades conservadas, de hecho, el objetivo de usar las simetrías variacionales es el de simplificar los cálculos, por ello, veremos que si hacemos a $c_4 = 1$ y todas las demás constantes igual a cero, se tiene que

$$\psi_4 = m\mathrm{e}^{i\omega_c t}\dot{z} \tag{3.63}$$

que es una cantidad conservada.

Al usar la definición de z y de la función exponencial compleja

$$\mathrm{e}^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$$

donde i es la unidad imaginaria, se puede ver que como ψ_4 es una constante, su derivada respecto del tiempo debe ser igual a cero, más aún

$$\dot{x}\cos(\omega_c t) + \dot{x}i\sin(\omega_c t) + \dot{y}i\cos(\omega_c t) - \dot{y}\sin(\omega_c t) = \lambda \tag{3.64}$$

donde $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$. Al separar la parte real y la parte compleja se encuentra que

$$\dot{x}\cos(\omega_c t) - \dot{y}\sin(\omega_c t) = \lambda_1 \tag{3.65}$$
$$\dot{x}\sin(\omega_c t) + \dot{y}\cos(\omega_c t) = \lambda_2 \tag{3.66}$$

que es un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden que tiene como solución

$$x = \lambda_1 + c_1\sin(\omega_c t) - c_2\cos(\omega_c t) \tag{3.67}$$
$$y = \lambda_2 + c_2\sin(\omega_c t) + c_1\cos(\omega_c t) \tag{3.68}$$

Para este sistema mecánico se pasó de resolver un *sistema de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden* a un *sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden.*

3.2. Números Duales

Un número dual, denotado por z, se define (ver ref. [2]) como

$$z \equiv x + \varepsilon y$$

donde $x, y \in \mathbb{R}$ y ε tiene la propiedad de que $\varepsilon^2 = 0$. En esta sección, se mostrará que su uso es útil en la búsqueda de cantidades conservadas.

3.2.1. Partícula en un Campo Gravitacional Uniforme

Consideremos una partícula de masa m, situada en un campo gravitacional uniforme en la dirección del vector $\hat{\jmath}$, las fuerzas que actúan sobre dicha partícula están dadas por

$$F_y = -mg, \qquad F_x = 0 \tag{3.69}$$

de donde se deducen las ecuaciones de movimiento para nuestro sistema mecánico, que en coordenadas cartesianas tienen la forma

$$m\ddot{x} = 0, \qquad m\ddot{y} = -mg \tag{3.70}$$

donde g es la aceleración gravitacional. Al emplear la definición $z \equiv x + \varepsilon y$ las ecuaciones (3.70) se pueden escribir como una sola

$$m\ddot{z} = -\varepsilon mg \tag{3.71}$$

Para hallar la función Lagrangiana que nos genere la ecuación (3.71) usamos que

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{z}^2} = M \tag{3.72}$$

donde M debe satisfacer la ecuación

$$\frac{dM}{dt} = M\frac{\partial f}{\partial \dot{z}} \tag{3.73}$$

donde $f(z, \dot{z}, t)$ no depende explícitamente de $\dot{z}$, por lo tanto

$$\frac{dM}{dt} = 0 \tag{3.74}$$

y esto resulta conveniente para hallar la solución de la ecuación (3.72), ya que $M = k$, donde k es una constante por determinar. Ahora es fácil ver que

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}k\dot{z}^2 + w\dot{z} + h \tag{3.75}$$

donde $w = w(z, t)$ y $h = h(z, t)$. Al sustituir a $\mathcal{L}$ en las ecuaciones de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial(\frac{1}{2}k\dot{z}^2 + w\dot{z} + h)}{\partial \dot{z}}\right] - \frac{\partial(\frac{1}{2}k\dot{z}^2 + w\dot{z} + h)}{\partial z} = 0 \tag{3.76}$$

se puede ver que,

$$k\ddot{z} + \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial h}{\partial z} = 0 \tag{3.77}$$

y al hacer, por conveniencia, $w = 0$ tenemos que

$$k\ddot{z} = \frac{\partial h}{\partial z} \tag{3.78}$$

Note que, para que $\mathcal{L}$ nos genere la ecuación (3.71), podemos hacer $k = m$ y

$$\frac{\partial h}{\partial z} = -\varepsilon m g \tag{3.79}$$

es decir,

$$h = -\varepsilon m g z \tag{3.80}$$

por lo tanto,

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\dot{z}^2 - \varepsilon m g z \tag{3.81}$$

que es una función Lagrangiana en término de los números duales.

Para hallar las cantidades conservadas de nuestro sistema mecánico, sustituimos a $\mathcal{L}$ en la Ecuación (2.5)

$$-\varepsilon m g \eta + m\dot{z}\left(\frac{d\eta}{dt} - \dot{z}\frac{d\xi}{dt}\right) + \left(\frac{m}{2}\dot{z}^2 - \varepsilon m g z\right)\frac{d\xi}{dt} = \frac{dG}{dt} \tag{3.82}$$

que al desarrollar se tiene

$$-\varepsilon m g \eta + m\frac{\partial \eta}{\partial t}\dot{z} + m\frac{\partial \eta}{\partial z}\dot{z}^2 - \frac{m}{2}\frac{\partial \xi}{\partial t}\dot{z}^2 - \frac{m}{2}\frac{\partial \xi}{\partial z}\dot{z}^3 - \varepsilon m g z\frac{\partial \xi}{\partial t} - \varepsilon m g z\frac{\partial \xi}{\partial z}\dot{z} = \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial z}\dot{z} \tag{3.83}$$

y al igualar los coeficientes de los polinomios en la variable $\dot{z}$ de la ecuación (3.83), encontramos que

$$-\frac{m}{2}\frac{\partial \xi}{\partial z} = 0 \tag{3.84}$$

esto implica que

$$\xi = A(t) \tag{3.85}$$

donde A es una función real de una sola variable.

$$m\frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{m}{2}\frac{\partial \xi}{\partial t} = 0 \tag{3.86}$$

$$m\frac{\partial \eta}{\partial t} - \varepsilon mgz\frac{\partial \xi}{\partial z} = \frac{\partial G}{\partial z} \tag{3.87}$$

$$-\varepsilon mg\eta - \varepsilon mgz\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial G}{\partial t} \tag{3.88}$$

De las Ecuaciones (3.86) y (3.87) se puede ver que

$$\eta = \frac{z}{2}\frac{dA}{dt} + B(t) \tag{3.89}$$

donde B y A son funciones que dependen solo de t.

Al emplear condición de igualdad entre las derivadas parciales cruzadas de G y las Ecuaciones (3.87) y (3.88) se encuentra que

$$\frac{1}{2}\frac{d^3A}{dt} + \frac{d^2B}{dt} = \frac{-3\varepsilon g}{2}\frac{dA}{dt} \tag{3.90}$$

de donde, al igualar los polinomios en la variable z que aparecen en ambos miembros de la ecuación se llega a que

$$\frac{1}{2}\frac{d^3A}{dt^3} = 0 \tag{3.91}$$

$$\frac{d^2B}{dt^2} = \frac{-3\varepsilon g}{2}\frac{dA}{dt} \tag{3.92}$$

de ahí que

$$A = c_7t^2 + c_6t + c_3 \tag{3.93}$$

$$B = -\varepsilon g\left(\frac{1}{2}c_7t^3 + \frac{3}{4}c_6t^2\right) + (c_4 {+}_5)t + (c_1 + \varepsilon c_2) \tag{3.94}$$

y por lo tanto

$$\xi = c_7t^2 + c_6t + c_3 \tag{3.95}$$

$$\eta = z(c_7t + \frac{1}{2}c_6) - \varepsilon g\left(\frac{1}{2}c_7t^3 + \frac{3}{4}c_6t^2\right) + (c_4 {+}_5)t + (c_1 + \varepsilon c_2) \tag{3.96}$$

$$G = m[-c_1\varepsilon gt + c_4(z - \frac{1}{2}\varepsilon gt^2) + c_5\varepsilon z - \frac{2}{3}c_6\varepsilon gtz + c_7(\frac{1}{2}z^2 - \frac{3}{2}\varepsilon gt^2z)] \tag{3.97}$$

La función ψ está dada por

$$\begin{aligned}\psi = \{z(c_7t + \frac{1}{2}c_6) - \varepsilon g\left(\frac{1}{2}c_7t^3 + \frac{3}{4}c_6t^2\right) + (c_4 {+}_5)t + (c_1 + \varepsilon c_2)\}\{m\dot{z}\}\\ \{-\{c_7t^2 + c_6t + c_3\}\{\frac{m}{2}\dot{z}^2 + \varepsilon mgz\} - m[-c_1\varepsilon gt +\}\\ \{c_4(z - \frac{1}{2}\varepsilon gt^2) + c_5\varepsilon z - \frac{2}{3}c_6\varepsilon gtz + c_7(\frac{1}{2}z^2 - \frac{3}{2}\varepsilon gt^2z)]\}\end{aligned} \tag{3.98}$$

Al tomar a $c_1 = 1$ y todas las demás constantes igual al cero se tiene que

$$m\dot{z} + m\varepsilon gt = \lambda \tag{3.99}$$

donde $\lambda = \lambda_1 + \varepsilon\lambda_2$. De la ecuación anterior se puede hallar que

$$\dot{x} = c_1 \tag{3.100}$$
$$\dot{y} = -gt + c_1 \tag{3.101}$$

que tienen como solución

$$x = c_1 t + c_2 \tag{3.102}$$
$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + c_1 t + c_2 \tag{3.103}$$

Como en los ejemplos anteriores, el uso de los números duales en este caso, nos ayudó a reducir el orden de las ecuaciones diferenciales asociadas al sistema, pasando de ecuaciones de segundo orden orden a ecuaciones de primer orden.

3.3. Números Dobles

Un número doble, denotado por z, se define (ver ref. [2])como

$$z \equiv x + jy$$

donde $x, y \in \mathbb{R}$ y j tiene la propiedad de que $j^2 = 1$. En esta sección, se mostrará que su uso es de utilidad en la búsqueda de cantidades conservadas.

3.3.1. Oscilador Armónico Repulsivo

En este ejemplo, el vector de posición de nuestro sistema mecánico está dado por $\mathbf{r} = \dot{x}\hat{\imath} + \dot{y}\hat{\jmath}$ y su energía cinética (K) y potencial U tienen la forma

$$\mathrm{K} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2), \qquad \mathrm{U} = -\frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2) \tag{3.104}$$

donde m es la masa de la partícula y ω es una constante real.

La función Lagrangiana tiene la forma

$$L = \frac{1}{2}m[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \omega^2(x^2 + y^2] \tag{3.105}$$

la cual, se puede emplear para calcular las ecuaciones de movimiento del sistema, que están dadas por

$$m\ddot{x} = m\omega^2 x \tag{3.106}$$
$$m\ddot{y} = m\omega^2 y \tag{3.107}$$

las cuales, utilizando la definición de número doble, se pueden escribir como una sola

$$m\ddot{z} = m\omega^2 z \tag{3.108}$$

Para hallar la función Lagrangiana que nos genere la Ecuación (3.108) emplearemos la Ecuación (1.6), en la cual, $f(z, \dot{z}, t) = \omega^2 z$ y como f no depende explícitamente de $\dot{z}$, se encuentra que

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}k\dot{z}^2 + g\dot{z} + h \tag{3.109}$$

donde $g = g(z,t)$, $h = (z,t)$ y k es una constante. Al sustituir a $\mathcal{L}$ en las ecuaciones de Lagrange se encuentra que

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{z}^2 + \omega^2 z^2) \tag{3.110}$$

la cual, es una función Lagrangiana en términos de los números dobles para nuestro sistema mecánico.

Al sustituir a $\mathcal{L}$ en la Ecuación (2.5) se tiene que

$$-\frac{1}{2}m\frac{\partial \xi}{\partial z}\dot{z}^3 + \left(m\frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{1}{2}m\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)\dot{z}^2 + \left(m\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{1}{2}m\omega^2\frac{\partial \xi}{\partial z}z^2\right)\dot{z} + \\ m\omega^2\eta z + \frac{1}{2}m\omega^2\frac{\partial \xi}{\partial z}z^2 = \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial t}\dot{z} \tag{3.111}$$

De lo anterior, al igualar los polinomios en la variable $\dot{z}$ que aparecen en ambos miembros de la ecuación, se encuentra que

$$\frac{\partial \xi}{\partial z} = 0, \quad \rightarrow \quad \xi = A(t) \tag{3.112}$$

$$\frac{1}{2}\frac{dA}{dt} = \frac{\partial \eta}{\partial z}, \quad \rightarrow \quad \eta = \frac{1}{2}\frac{dA}{dt}z + B(t) \tag{3.113}$$

$$m\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial G}{\partial z} \tag{3.114}$$

$$m\omega^2\left(z\eta + \frac{1}{2}\frac{dA}{dt}z^2\right) = \frac{\partial G}{\partial t} \tag{3.115}$$

Ahora, al imponer la condición de igualdad entre las parciales cruzadas de la función G, se encuentra que

$$m\left(\frac{1}{2}\frac{d^3A}{dt^3}z + \frac{d^2B}{dt^2}\right) = m\omega^2\frac{dA}{dt}z + m\omega^2 B + m\omega^2\frac{dA}{dt}z \tag{3.116}$$

y al igualar los polinomios en la variable z que aparecen en ambos miembros de la ecuación se halla que

$$\frac{d^2B}{dt^2} = \omega^2 B \tag{3.117}$$

$$\frac{d^3A}{dt^3} = 4\omega^2\frac{dA}{dt} \tag{3.118}$$

Las ecuaciones anteriores tienen como solución

$$A(t) = c_1e^{2\omega t} + c_2e^{-2\omega t} + c_3, \qquad B(t) = (c_4 + jc_5)e^{\omega t} + (c_6 + jc_7)e^{-\omega t} \tag{3.119}$$

donde $c_1, ..., c_7$ son númros reales. Las expresiones para ξ, η, y G tienen la forma

$$\xi = c_1e^{2\omega t} + c_2e^{-2\omega t} + c_3 \tag{3.120}$$

$$\eta = \frac{1}{2}(2c_1\omega e^{2\omega t} - 2c_2\omega e^{-2\omega t})z + (c_4 + jc_5)e^{\omega t} + (c_6 + jc_7)e^{-\omega t} \tag{3.121}$$

$$G = m\omega^2 z^2(c_1e^{2\omega t} + c_2e^{-2\omega t}) + mz\omega[(c_4 + jc_5)e^{\omega t} - (c_6 + jc_7)e^{-\omega t}] \tag{3.122}$$

Al sustituir a $\mathcal{L}$, η, ξ, y G en la función ψ se encuentra que

$$\psi = [\frac{1}{2}(2c_1\omega e^{2\omega t} - 2c_2\omega e^{-2\omega t})z + (c_4 + jc_5)e^{\omega t} + (c_6 + jc_7)e^{-\omega t}][m\dot{z}] - \\ c_1e^{2\omega t} + c_2e^{-2\omega t} + c_3[\tfrac{1}{2}m\dot{z}^2 - \tfrac{1}{2}m\omega^2 z^2] -$$

$$\{m\omega^2 z^2(c_1 e^{2\omega t} + c_2 e^{-2\omega t}) + mz\omega[(c_4 + jc_5)e^{\omega t} - (c_6 + jc_7)e^{-\omega t}]\} \quad (3.123)$$

donde al hacer $c_4 = 0$, y todas las demás constantes igual a cero,

$$\psi = me^{\omega t}(\dot{z} - z\omega) \quad (3.124)$$

que es una constante de movimiento.

De la ecuación

$$e^{\omega t}(\dot{z} - z\omega) = \alpha_1 + j\alpha_3, \quad (3.125)$$

se sigue que

$$e^{\omega t}(\dot{x} - \omega x) = \alpha_1 \quad (3.126)$$

$$e^{\omega t}(\dot{y} - \omega y) = \alpha_3 \quad (3.127)$$

que tienen como solución (ver ref. [3])

$$x = \alpha_1 e^{\omega t} + \alpha_2 e^{-\omega t} \quad (3.128)$$

$$y = \alpha_3 e^{\omega t} + \alpha_4 e^{-\omega t} \quad (3.129)$$

donde $\alpha_1, ..., \alpha_4$ son números reales.

Como se puede ver en este ejemplo, el emplear el uso de las cantidades conservadas, hace posible que las ecuaciones diferenciales del sistema pasen de ser de segundo a primer orden, lo que facilita su resolución. Nótese que es importante el elegir una cantidad conservada adecuada, ya que en caso contrario las ecuaciones diferenciales pueden complicarse.

Capítulo 4

Conclusiones

Durante el desarrollo de este trabajo se ha visto que el formalismo Lagrangiano ha sido de gran utilidad para hallar las ecuaciones diferenciales asociadas a cada sistema mecánico, esto, en contraste con la mecánica de Newton, en la cual, los métodos que se emplean están fuertemente ligados a la geometría del sistema, y en algunas ocasiones, puede resultar más laboriosos el hallar dichas ecuaciones. El uso de los números complejos, duales y dobles nos ha permitido escribir las ecuaciones diferenciales asociadas a cada sistema de una manera más simple, esto resulta útil a la hora de hallar las cantidades conservadas mediante el uso simetrías variacionales. Veamos que en el Ejemplo (3.1.2 **Partícula Cargada en un Campo Magnético Uniforme**) se puede ver que al sustituir la Ecuación (3.43) en la Ecuación (2.5) se obtienen las Ecuaciones(3.50-3.52), que son sólo tres ecuaciones, mientras que si utilizamos las Ecuaciones (3.42), que están en sus coordenadas originales xy, se encontrarían las condiciones

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \xi}{\partial x} &= 0 \\
\frac{\partial \xi}{\partial y} &= 0 \\
\frac{\partial \eta_1}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial \xi}{\partial t} &= 0 \\
\frac{\partial \eta_2}{\partial y} - \frac{1}{2}\frac{\partial \xi}{\partial t} &= 0 \\
\frac{\partial \eta_1}{\partial y} - \frac{1}{2}\frac{\partial \eta_2}{\partial x} &= 0 \\
\frac{\partial \eta_1}{\partial t} + \frac{\omega_c}{2}\left(x\frac{\eta_2}{\partial x} - \eta_2 - y\frac{\partial \eta_1}{\partial x}\right) &= \frac{1}{m}\frac{\partial G}{\partial x} \\
\frac{\partial \eta_2}{\partial t} + \frac{\omega_c}{2}\left(y\frac{\eta_1}{\partial y} - \eta_1 - x\frac{\partial \eta_2}{\partial y}\right) &= \frac{1}{m}\frac{\partial G}{\partial y} \\
\frac{\omega_c}{2}\left(x\frac{\eta_2}{\partial t} - y\frac{\partial \eta_1}{\partial t}\right) &= \frac{1}{m}\frac{\partial G}{\partial t}
\end{aligned}$$

que son 8 ecuaciones que pueden resultar más laboriosas.

Bibliografía

1. G.F. Torres del Castillo, *An Introduction to Hamiltonian Mechanics.* (Springer, Cham, 2018). https://doi.org/10.1007/978-3-319-95225-3
2. I. M. Yaglom, *Complex Numbers in Geometry.* (Academic Press, 1968)
3. G. F. Simmons, *Differential Equations With Applications And Historical Notes*, 2da. Ed. (McGraw-Hill, Inc., 1991)
4. Landau y Lifshitz, *Curso de Física Teórica. Mecánica. Vol. 1.* 2da. Ed. (Editorial Reverté, S. A., 1994)