



# Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

---

## Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

---

El papel de la cáustica en la formación de imágenes.

Tesis presentada al

### **Posgrado de Física Aplicada**

como requisito parcial para la obtención del grado de

### **Doctor en ciencias (Física Aplicada)**

por

M.C. Salvador Alejandro Juárez Reyes

asesorado por

Dr. Gilberto Silva Ortigoza

Puebla Pue.  
Septiembre 2018





# Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

---

## Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

---

El papel de la cáustica en la formación de imágenes.

Tesis presentada al

### **Posgrado de Física Aplicada**

como requisito parcial para la obtención del grado de

### **Doctor en ciencias (Física Aplicada)**

por

M.C. Salvador Alejandro Juárez Reyes

asesorado por

Dr. Gilberto Silva Ortigoza

Puebla Pue.  
Septiembre 2018



## COMITÉ

---

Dr. Gerardo Francisco Torres del Castillo  
Presidente

---

Dr. Maximino Luis Arroyo Carrasco  
Secretario

---

Dr. Carlos Ignacio Robledo Sánchez  
Vocal

---

Dra. María Alicia López Osorio  
Vocal

---

Dr. Jorge Castro Ramos  
Vocal

---

Dra. María del Rosario Pastrana Sánchez  
Suplente

---

Dr. Gilberto Silva Ortigoza  
Asesor



## AGRADECIMIENTOS

A la persona más importante de mi vida, mi madre. *In memoriam.*



# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>v</b>
<b>Introducción</b>	<b>vii</b>
0.1. El proceso de formación de imágenes múltiples . . . . .	xI
0.2. Región cáustica . . . . .	xIV
0.3. Cambio de topología . . . . .	xVI
0.4. Caustic-Touching-Theorem . . . . .	xVII
0.5. La aplicación del teorema a pruebas experimentales . . . . .	xVII
0.5.1. Pruebas de Foucault, del alambre y de Ronchi; y su relación . . . . .	xVIII
0.5.2. Pruebas ópticas nulas . . . . .	xxI
0.6. Estructura . . . . .	xxII
<b>1. La óptica geométrica desde las ecuaciones de Maxwell</b>	<b>1</b>
1.1. Propagación del campo electromagnético . . . . .	1
1.2. Ecuaciones de Maxwell y la velocidad de la radiación . . . . .	2
1.3. Energía de un campo electromagnético . . . . .	3
1.4. Promediando la energía electromagnética en el tiempo . . . . .	4
1.5. Ecuación iconal . . . . .	6
1.6. Dirección de propagación de la luz y frentes de onda geométricos . . . . .	7
1.7. La ley de refracción como un problema de frontera . . . . .	8
1.8. Caustic-Touching theorem . . . . .	9
1.9. Planteamiento del problema . . . . .	12
1.10. Función $k$ . . . . .	14
1.11. Frentes de onda . . . . .	15
1.12. Superficie cáustica . . . . .	16
<b>2. Imágenes en una lente plano-parabólica</b>	<b>17</b>
2.1. Planteamiento del problema . . . . .	17
2.2. Función $k$ . . . . .	20
2.3. Frentes de onda . . . . .	20
2.4. Conjuntos crítico y cáustico . . . . .	20
2.5. Ecuaciones para la rejilla nula de Ronchi y de Ronchi (subestructurada) . . . . .	21
2.6. Resultados numéricos . . . . .	22
2.7. Análisis de la estructura de la imagen en pruebas ópticas . . . . .	24
2.7.1. Prueba nula del alambre y prueba nula de Ronchi . . . . .	24
2.7.2. Prueba de Ronchi (subestructurada, con la rejilla en la cara plana) . . . . .	28
<b>3. Rompimiento de la equivalencia topológica entre objeto e imagen ante contacto no tangente con la cáustica</b>	<b>31</b>
3.1. Superficie cáustica . . . . .	32
3.2. Construyendo la imagen . . . . .	32

<b>4. Prueba analítica del alambre y subestructurada de Ronchi</b>	<b>37</b>
4.1. Planteamiento del problema . . . . .	37
4.2. Región cáustica para una lente plano convexa . . . . .	37
4.3. Patrón analítico . . . . .	38
4.4. De nuevo, ejemplo en lente plano-parabólica . . . . .	38
4.5. Análisis de todas las configuraciones para la prueba del alambre . . . . .	39
4.5.1. Configuraciones conocidas para el plano objeto e imagen (plano de detección fuera de la cáustica) . . . . .	40
4.5.2. Plano objeto y plano de detección, ambos dentro de la región cáustica . . . . .	44
<b>5. Diseño de la rejilla convencional general de Ronchi y su ronchigrama analítico asociado</b>	<b>49</b>
5.1. Planteamiento del problema . . . . .	49
5.2. Representación matemática de la rejilla de Ronchi . . . . .	49
5.3. Representación analítica del ronchigrama . . . . .	51
5.4. Calculando ronchigramas: ejemplos . . . . .	52
5.5. Analizando el ronchigrama para todas las configuraciones posibles. . . . .	55
5.5.1. Plano de detección fuera de la cáustica, plano de la rejilla dentro y fuera de la región cáustica . . . . .	56
5.5.2. Configuraciones donde ambos el plano de la rejilla y el plano de detección, intersectan la región cáustica. . . . .	62
<b>6. Lente helicoidal</b>	<b>69</b>
6.1. Planteamiento . . . . .	69
6.2. Representación de la lente, sus características y propiedades . . . . .	69
6.3. Frentes de onda . . . . .	71
6.4. Superficie cáustica . . . . .	71
6.5. Resultados numéricos . . . . .	71
6.6. Rejilla nula del alambre, y cálculo del ronchigrama cuando la rejilla está en la cara y en la prueba convencional . . . . .	78
6.7. Rejillas nulas . . . . .	78
6.8. Ronchigramas, colocando la rejilla en la cara plana . . . . .	82
6.9. Ronchigramas de la configuración convencional . . . . .	82
<b>7. Conclusiones</b>	<b>89</b>
<b>A. Demostración de la sección 1.11</b>	<b>97</b>
<b>B. Parametrización de la segunda superficie refractante, sección 2.1</b>	<b>99</b>

# Resumen

Se presenta en términos simples en qué consiste el proceso de formación de imágenes múltiples y el primer estudio analítico que se hizo respecto al tema (el *caustic-touching theorem* de M. Berry) donde se clasifica la generación de imágenes secundarias de acuerdo a cómo se generan (de tipo hiperbólico o de tipo elíptico), desde la óptica geométrica. Se muestra que efectivamente como predice el teorema, hay disrupción de la imagen cuando el objeto entra en contacto con una superficie cáustica imaginaria y se aplica esto a pruebas ópticas nulas no interferométricas, complementando el estudio que el autor del teorema hace aplicándolo a sistemas ópticos naturales de enfocamiento de luz (el sol visto en un eclipse desde la luna, el sol visto desde una capa de inversión atmosférica y visto también reflejado en la superficie del mar). Sin embargo en este trabajo se demuestra que esta disrupción no sólo está relacionada con cáusticas imaginarias sino también con cáusticas reales. Más allá, se demuestra que las proyecciones reales y virtuales de éstas superficies cáusticas son fundamentales en el proceso de formación de imágenes múltiples y el colapso de imágenes en puntos, también se muestra el rol que juega la superficie formada por los rayos marginales. Para ello se obtuvieron expresiones analíticas para el campo vectorial de los rayos refractados, para los frentes de onda, para la función  $k$  y para la superficie cáustica, referentes una lente plano-convexa genérica. Con éstas se obtuvieron expresiones analíticas que representan la imagen de un objeto unidimensional y a través de éstas últimas se generaron simulaciones que resultarían de una adaptación dinámica de la prueba del alambre. Con las anteriores se hizo un análisis exhaustivo de la equivalencia topológica entre el objeto y su imagen para todas las configuraciones posibles del sistema óptico. Se desarrollaron parametrizaciones para todas las rejillas de Ronchi simétricas y a través de la información de la prueba del alambre se obtuvo la expresión analítica para el ronchigrama, válida en cualquier configuración del sistema óptico (incluso cuando ambos la rejilla y el plano de detección estén ambos en la región cáustica). Por último, se analizaron todas las pruebas ópticas del alambre (la prueba nula, la prueba directa con la rejilla en la cara plana y la prueba directa con ambos planos objeto y de detección colocados después de la lente) para una lente helicoidal que se usa para generar vórtices ópticos, y de nuevo a través de simulaciones de una adaptación dinámica de la prueba se estudió la disrupción de la imagen para esta lente.

Palabras clave: *Pruebas ópticas, disrupción de la imagen, cáustica, ronchigrama, vórtice óptico.*



# Introducción

*La óptica geométrica es o bien muy simple, o bien demasiado complicada*  
- R. Feynman

Desde que se comprobó que la luz es radiación electromagnética, y toda vez que se conoce que la dinámica de la misma queda descrita por las ecuaciones de Maxwell (pensando en términos clásicos) podríamos haber pensado que no tiene mucho sentido seguir estudiando a la luz con una colección de modelos (limitados todos ellos) y que la atención debería dirigirse a buscar nuevas formas (al menos numéricas) de resolver el problema de la forma más general posible. En otras palabras, podríamos pensar que debemos concentrar los esfuerzos en desarrollar formalismos genéricos y dejar atrás al menos a los métodos de la óptica que son obsoletos, la pregunta es: ¿en qué punto se puede decir que un método es obsoleto?

La respuesta más inmediata (probablemente la que daría alguien ajeno a la investigación, incluyendo a los estudiantes primerizos de ciencias) sería que es obsoleto cuando otro modelo describe aquellos fenómenos que el primero no puede y que también generaliza al primero; sin embargo en el mundo de la Física (y otras ciencias) sabemos bien que la obsolescencia no es tan drástica, porque a pesar de tener un modelo más general el primero no es obsoleto mientras siga siendo válido en un rango de aplicabilidad. En otras palabras, un modelo puede no abandonarse mientras logre dar predicciones “suficientemente buenas”. Como simple ejemplo la mecánica newtoniana, a pesar de conocer sus limitaciones es perfectamente útil para describir gran parte de la dinámica que tienen los cuerpos celestes.

En otros casos, los modelos a pesar de saberlos inexactos, se siguen usando porque resulta mucho más viable su utilización, por ejemplo, en un motor de combustión interna, a pesar de saberse que la pérdida de calor en el entorno es mucho mayor que lo que predice la termodinámica, su eficiencia térmica sigue siendo modelada prácticamente con la misma herramienta de hace más de un siglo porque desarrollar un modelo más realista conlleva complicaciones grandes. En ese tenor podemos hablar de la óptica geométrica, aquella rama de la óptica donde se omite la naturaleza ondulatoria de la luz, imaginando que la longitud de onda es ínfima, o sea el caso límite  $\lambda_0 \rightarrow 0$ . Para este caso la propagación de la luz queda modelada por *rayos*, es decir, en general líneas curvas que se propagan en el espacio. Aunque se pueda imaginar esta aproximación como imprecisa y obsoleta, aún tiene un grado de validez impresionante, como lo estableció el profesor emérito del *College of Optical Sciences* de la Universidad de Arizona O. N. Stavroudis en [1]... “ya sea que lo aprobemos o no, la óptica geométrica mantiene una posición única en la tecnología moderna. Sigue siendo el único medio conveniente por el cual las propiedades brutas de un sistema óptico se pueden describir en términos de sus parámetros de diseño”. Por otro lado el también profesor del *College of Optical Sciences*, del *Institute of Optics* de la Universidad de Rochester N. Y. y desarrollador de Polaroid D. S. Goodman decía ... “La óptica geométrica es objeto de estudio abstracto y un cuerpo de conocimiento necesario para el diseño y la ingeniería. El tema de la óptica geométrica es pequeño, ya que se puede derivar tanto de un solo principio, el de Fermat; y grande, ya que las consecuencias son infinitas y no demasiado obvias. La óptica geométrica es engañosa en el sentido de que mucho de lo que parece simple está cargado de contenido e implicaciones, como podría sugerirse por el hecho de que algunos de los resultados más básicos requerían que personas como Newton y Gauss los

descubrieran... La justificación real del uso de rayos es que, como otros modelos exitosos en la Física, los rayos son indispensables para nuestro pensamiento, a pesar de sus deficiencias”.

La óptica geométrica es fundamental para describir tanto la reflexión con la refracción de la luz, gracias a ella es posible explicar por qué las imágenes en un espejo convexo son más pequeñas que el objeto y se ven más cerca del espejo que el objeto, es posible explicar porque las imágenes en un espejo cóncavo por el contrario, lucen más grandes que el objeto y a la vez más lejanas del espejo que el objeto mismo, pero más aún explica porque a cierta distancia la imagen en este último espejo se invierte. Gracias a la óptica geométrica es posible explicar cómo una lente divergente modifica una imagen completa<sup>1</sup> haciéndola más pequeña y como una lente convergente puede invertir la imagen, explica por ejemplo cómo es que un pez cerca de la superficie del agua “observa” al mirar hacia arriba todo el escenario fuera del agua compactado y el entorno que le rodea (dentro del agua) ambos a la vez; explica los destellos de colores que se generan al iluminar un diamante, explica por qué funciona una cámara estenopeica, cómo se forman los espejismos, explica cómo al mirar una puesta de sol lo seguimos viendo minutos después de que ha bajado del horizonte y por qué al estar el sol cerca del horizonte se observa con una forma elíptica, explica cómo se forma el arcoiris, y cómo y por qué cuando existen dos arcoiris uno de ellos es menos nítido y tiene los colores invertidos. Así que no debe sorprendernos que a través de ella haya sido posible el diseño microscopios, telescopios, antenas de recepción de ondas genéricas, sistemas óptico complejos análogos, fibras ópticas, etc.

Las características principales de la óptica geométrica pueden extraerse de básicamente tres cimientos, el principio de Fermat, la ley de reflexión y la ley de refracción. A los últimos dos se puede llegar partiendo del primero<sup>2</sup>, sin embargo aunque muchos textos parten de ahí, al autor le parece que queda planteado como algo no muy bien fundamentado, casi místico. Partir de que la naturaleza obliga a la luz a elegir la trayectoria que optimiza el tiempo sin decir más y demostrar con hechos geométricos que se llega a ambas leyes de deflexión, parece que plantea algo hasta metafísico: ¿cómo sabe la luz en cada instante por dónde viajar de modo que la trayectoria final sea aquella que le lleva mínimo tiempo? Por otro lado podemos decir que tanto la ley de reflexión como de refracción son resultados obtenidos a través de la observación, de la experimentación, y la respuesta es perfectamente válida, sin embargo partiendo de ahí, la óptica geométrica queda como un modelo sin la mayor gracia. Al autor le parece mucho más respetuoso plantear parte de los razonamientos que condujeron a la óptica geométrica, hacer una breve revisión histórica que permita apreciar el conocimiento actual y por qué tardó miles de años en desarrollarse, además de confrontar (como lo hicieron en los dos siglos recientes) todo el involucramiento de ideas y como se fueron desenmarañando.

Podemos comenzar diciendo que los primeros espejos estaban hechos de cobre pulido, bronce y después de una aleación de cobre rica en estaño. Ejemplares de éstos han sobrevivido desde el antiguo Egipto (un espejo en perfectas condiciones fue desenterrado junto con algunas herramientas en los cuartos de los trabajadores cercanos a la pirámide de Sesotris II, cerca del año 1900 A. C. En el valle del Nilo. Los filósofos griegos Pitágoras, Demócrito, Empédocles, Platón, Aristóteles y otros, desarrollaron ya algunas teorías de la naturaleza de la luz (no debería extrañarnos). La propagación rectilínea y cómo puede cambiar su dirección fue desde entonces conocida como ley de reflexión y enunciada por Euclides (~300 A. C.) en su libro “Catóptrica”<sup>3</sup>. **Hero de Alejandría intentó explicar este fenómeno al afirmar que la luz viaja a través del camino más cercano entre dos puntos**, él argumentó su hipótesis de forma muy interesante pues aseguró que *la naturaleza nunca hace nada en vano*, note que esta afirmación se parece mucho a un principio extremal muy importante con el que nos encontraremos después. Tampoco debería sorprendernos que igual que mucha de la tecnología, se haya descubierto “La lente que quema” de manera empírica, ésta no es más que una lente positiva usada en supuesto para incendiar, fue mencionada por Aristófanes en su comedia “Las nubes” (~424 A. C.). **El aparente “doblamiento”**

<sup>1</sup>de un objeto a escalas grandes respecto de la longitud de onda, claro está

<sup>2</sup>más fácilmente para un medio con índice de refracción constante

<sup>3</sup>hasta aquí no se tenía idea de que la luz se puede deflectar en trayectorias curvas

**de los objetos parcialmente sumergidos en agua fue ya mencionado en “La república” de Platón.** Nosotros bien sabemos ahora, no es otro fenómeno que el de la refracción de la luz (igual que en la lente incendiaria). Ésta fue estudiada por Cleómedes (~50 D.C.) y más tarde por Claudio Ptolomeo de Alejandría (~130 D.C.) quien incluso tabuló mediciones bastante precisas de los ángulos de incidencia y refracción para algunos medios. El filósofo romano Séneca (3 A. C.- 65 D. C.) por su parte señaló que un “globo de vidrio” lleno de agua puede ser usado para magnificar imágenes. El historiador Plinio (23-79 D. C.) también registró que los romanos poseían “lentes incendiarias”, incluso algunas esferas de vidrio fueron encontradas en ruinas romanas, una lente plano-convexa, por ejemplo, fue recuperada en Pompeya.

Después de la caída del imperio romano de occidente (~475 D.C.) que aproximadamente marca el inicio de la “edad oscura”, casi no hubo progreso científico en Europa. Poco después cuando la dominación de la cultura greco-romana-cristiana en las tierras que abarcaban el Mediterráneo, cedieron el paso al mundo árabe a través de la conquista, el centro de la erudición se movió precisamente a éste, acá es donde la óptica fue estudiada y extendida especialmente por Alhacén (~1000 D. C.). Se creó que pudo haber inventado la cámara estenopeica, estudió profusamente espejos esféricos y parabólicos y en el primer tratado amplio sobre lentes registrado en la historia hace una descripción detallada de la óptica del ojo humano; aunque no hay consenso general, hay quien cree que llegó a la ley de refracción pero que no hizo públicos sus descubrimientos. Por muchos (sobre todo en Oriente) es considerado el padre de la óptica.

Hacia la última parte del siglo trece, Europa apenas comenzaba a despertar su estupor intelectual, el trabajo de Alhacén fue traducido al latín y tuvo gran impacto en los escritos de Robert Grosseteste (1175-1253) y del matemático polaco Vitello, quienes reavivaron el estudio de la óptica. Sus trabajos fueron conocidos por el franciscano Roger Bacon (1215-1294) quien es considerado por algunos como el primer científico en el sentido actual. Parece que él fue quien inició la idea de corregir la visión a través de lentes y aún más abrió la posibilidad de combinar lentes para formar un “telescopio”. Bacon también tenía ya cierta comprensión de la forma en que los rayos atraviesan una lente. Después de su muerte la óptica de nuevo languideció. A pesar de esto, pinturas de mediados del siglo catorce representan a monjes usando anteojos. Por esa época los alquimistas fueron capaces de fabricar espejos modernos vertiendo amalgama líquida de estaño y mercurio en la parte posterior de las placas de vidrio. **Leonardo da Vinci** (1452-1519) describió la cámara oscura y más allá, un hecho poco conocido revela que **fue el primero en describir gráficamente la formación de una cáustica en un espejo cóncavo, describiendo a la luz con rayos.** Podemos decir a estas alturas que acá termina el primer periodo de la óptica (note que básicamente hasta este punto todo el enfoque de la óptica era geométrico) pero aún queda la mejor parte que corre a partir del siglo diecisiete (tanto para la óptica geométrica como para la óptica física).

No está claro quién inventó el telescopio, pero en los registros históricos quedó sentado que en 1608 Hans Lippershey solicitó la patente. Galileo (1564-1642) escuchó acerca de la invención y en algunos meses pudo construir su propio instrumento puliendo las lentes a mano. El microscopio compuesto fue inventado justo por el mismo tiempo por Zacharias Janssen (1588-1632). El ocular cóncavo del microscopio fue remplazado por una lente convexa por Francisco Fontana (1580-1656) y un cambio similar en el telescopio fue introducido por Johannes Kepler (1571-1630). En 1611, Kepler publicó su “Dióptrica”. Él descubrió la reflexión total interna y llegó a la aproximación paraxial de la ley de refracción. Hizo un tratamiento de óptica de primer orden para sistemas de lentes delgadas y en su libro describe la operación detallada de ambos telescopios; Kepleriano (ocular positivo) y Galileano (ocular negativo).

Pero no hay que caer en el aburrimiento, expuesta la parte empírico-experimental viene la mejor parte.

**Willebrord Snellius Van Royen** (no justificadamente traducido como Snell e incluso Snel) fue profesor en la universidad de Leiden en Países Bajos, y quien **pudo describir con toda formalidad el proceso de refracción a través de la ley que lleva su nombre, éste logro lo consiguió de forma empírica** y conforma uno de los grandes momentos de la óptica [2]. Su descubrimiento determina

nada menos que la forma precisa en cómo los rayos son redireccionados al atravesar la frontera entre dos medios ópticos.

Ahora vamos a entretarnos con una controversia interesante. Resulta que **el primero en publicar la ley de refracción fue Descartes**, presenta ésta en "Le Monde ou Traité de la Lumière" que fue completado en 1633 pero no fue publicado sino hasta algunos años después. Sin embargo se sabe que Snellius la obtuvo antes de 1621, el problema es que él murió antes de publicarla y sus resultados fueron descubiertos entre sus notas no antes de 1632. Incluso un cargo de plagio fue hecho debido a que se sospechó que Descartes no había llegado a esa ley sino por la influencia de los escritos de Snellius.

A pesar de ello lo cierto es que tenemos que darle crédito a Descartes por varias de sus hipótesis, al menos por la originalidad del contenido. Descartes propuso; primero, que la luz se propaga en rayos y que ésta tiene velocidad infinita (Aristóteles ya lo pensaba) y segundo, que los eventos asociados a ella podían ser descritos en términos mecánicos, es decir, que podían explicarse en términos de partículas en movimiento, colisiones de ellas, presiones, etc. Hábilmente creó una analogía entre la hidrostática y la propagación de la luz que al mismo tiempo viene de la mecánica y es consistente con su noción de velocidad infinita. Especuló que la luz es una presión aplicada a un medio transparente por un objeto luminoso. Los rayos estarían en la dirección de la fuerza. La presión sería aplicada a través de todo el medio en exactamente el mismo tiempo. Este "fluido hidráulico" que él llamó *el segundo elemento*, era inelástico e incompresible, y sería lo que transmitiría esta presión instantáneamente. Su hipótesis mecánica de la luz la reforzó al recordar que Hero de Alejandría demostró que el ángulo de incidencia era el mismo que el ángulo de reflexión, análogo a lo que mecánicamente sucede (como rebota en una banda una bola de billar).

Para la ley de refracción, Descartes también pensó en términos mecánicos, El consideró que la luz penetra más fácilmente en medios más densos que en medios menos densos. Después de todo, la luz sólo podría generarse en un medio material y entre más material hubiera podría propagarse más fácilmente<sup>4</sup>. Desde un argumento enlazado a éste derivó la ley de Snell, el seno del ángulo de incidencia (desde la normal a la interfaz) es proporcional al seno del ángulo de refracción (desde la normal a la interfaz también):

$$\text{sen } \theta_i = k \text{ sen } \theta_r \quad (1)$$

Una diferencia crucial en el análisis físico que hicieron del problema, radica en que **Snell por su lado dijo que  $k$  es una magnitud que caracteriza el medio**; cuando la luz entra (desde el aire) al vidrio,  $k$  es más grande que uno y cuando sale es menor que uno, así de simple. **Sin embargo Descartes supuso que  $k$  debía ser la razón entre las velocidades**, y para que tuviera sentido supuso:

$$k = \frac{v_r}{v_i} \quad (2)$$

Hasta aquí queda la prueba de la ley de refracción, donde mencionaremos sólo como una curiosidad, que la derivación de Descartes nunca fue aceptada ni por Fermat, ni por Huygens y Leibnitz.

Convencido Fermat de que la prueba de Descartes no tenía ningún mérito y que incluso consideró un fraude, se propuso llegar a su propia derivación de la ley de refracción. Partió de suponer que la luz se

<sup>4</sup>Probablemente parte de esto fue lo que despertó sospechas, por un lado la velocidad es infinita, pero aún así viaja más rápido en un medio que en otro

propaga con velocidad finita, además recordó a Hero de Alejandría (en **la noción de una trayectoria mínima**). Sin embargo aunque esta hipótesis funciona bien para reflexión, obviamente no es el postulado adecuado para refracción. Pero lo que él necesitaba era un postulado que trabajara bien para ambos casos de deflexión. Así fue como **Fermat llegó a su principio del tiempo mínimo**. La trayectoria de la luz que conecta a dos puntos fijos es aquella para la que el tiempo, no la longitud, es mínimo. En [1] sugieren que después de años de trabajo seguramente Fermat se sintió decepcionado al llegar a la conocida ley de refracción de Snell, a título personal lo dudo, entre las cosas que pueden dar más tranquilidad a quien elabora un trabajo de investigación está el hecho de que el trabajo tenga consistencia con los resultados ampliamente conocidos y validados. Pero regresando a Fermat, sus resultados al igual que los de Descartes, relacionaban a las velocidades de la luz en los medios con la constante de proporcionalidad  $k$  pero con una diferencia inmensa:

$$k = \frac{v_i}{v_r} \quad (3)$$

de donde se concluye que efectivamente, la luz viaja más lento en los medios más densos.

Podríamos seguir hablando de la historia de la óptica, porque aparte de interesante por si misma estoy seguro que entretenidas desavenencias siguieron aconteciendo, pero para nuestros fines es suficiente parar en este punto pues ya hemos establecido históricamente los cimientos de la óptica geométrica. A partir de aquí, nos enfocaremos en dejar claro tanto los objetivos como la información necesaria para desarrollar el trabajo de investigación que soporta esta tesis.

## 0.1. El proceso de formación de imágenes múltiples

El proceso de formación de imágenes es en general muy complejo [3–7], a pesar de que la óptica geométrica ofrece las dos herramientas fundamentales para entender *localmente* como la luz se redirige, poder construir una imagen no puntual a partir del objeto, y más aún, poder reconstruir el objeto a partir de la imagen es casi imposible. Observe la figura 1, es una foto casera tomada por el autor de un cenote, observe como se forma la imagen de cada segmento de vegetación (que son verticales y casi rectos) tiene una imagen principal correspondiente deformada. Hasta este no punto no hay nada nuevo, para el lector esta “disrupción” de la imagen como bien la llama M. Berry es completamente cotidiana. Sin embargo, resulta que además de la imagen “principal” que es una deformación del objeto, se generan otras imágenes que corresponden cada una a partes del objeto, en otras palabras, **se generan imágenes múltiples**. Estas imágenes tienen la propiedad de no tener extremos aún cuando el objeto sí los tenga. Si tenemos como ejemplo un objeto unidimensional (una curva) que no sea cerrado, estas imágenes secundarias siempre resultan ser curvas cerradas. Solicito su atención para ver la figura 1 de nuevo y concentrarse en las flechas rojas y verdes. Las flechas rojas señalan un tipo particular de curvas cerradas imagen, éstas son *generadas desde un punto aislado de la imagen principal*. Las flechas verdes señalan el otro tipo, son curvas cerradas imagen que *se generan desde una singularidad de la curva principal*. Aunque a veces no es tan evidente la diferencia entre ambos; por ejemplo, en la figura reffig:stick se muestra la imagen (a la derecha) de un palito de madera (a la izquierda) después de que la luz se ha reflejado y refractado, a primera vista parece no haber imágenes secundarias aisladas. Esto lo expondremos posteriormente y en detalle matemático, pero ya el problema de imágenes múltiples se ha tornado interesante. La única contribución analítica sería para explicarlo fue desarrollada por M. Berry y publicada en 1986, y la aplicó a sistemas ópticos de enfocamiento natural de la luz y de ahí partiremos para seguir dejando las cosas con claridad, pero antes tenemos que explicar aquellos conceptos que él en su proceder aborda. Pues él concluye algo muy poco intuitivo y es que la disrupción de la imagen está relacionada con la superficie cáustica del observador. Así que empecemos por definir región cáustica.



Figura 1: Las flechas rojas señalan curvas cerradas imagen generadas desde un punto aislado de la imagen principal. Las flechas verdes señalan curvas cerradas imagen que se generan desde una singularidad de la curva principal.



Figura 2: Imagen (a la derecha) de un palito de madera (a la izquierda) después de que la luz se ha reflejado y refractado.

## 0.2. Región cáustica

La región cáustica es una de las características más elegante de la luz, y es de hecho la única observable que predice la óptica geométrica. En todo formalismo los rayos son una simplificación al igual que los frentes de onda, que ciertamente no existen, pues ninguno de los dos se puede detectar aisladamente, sólo matemáticamente tienen sentido, sin embargo eso no impide que conformen el vehículo para extraer información de los sistemas ópticos (entre otras cosas la cáustica). Así que, a pesar de las limitaciones que tiene el modelo que es su germen y a pesar de que el ojo no puede captar rayos individualmente ¡la región cáustica sí se puede ver<sup>5</sup> y cotidianamente! La figura 3 corresponde a la proyección de la cáustica formada por una jarra de vidrio convencional (llena de agua) al ser iluminada por un foco también convencional. ¿Pero qué es la cáustica? Pues literalmente significa “quemar”. Físicamente corresponde a la colección de todos los puntos donde se enfoca la luz (puntos focales) así que su primera aplicación fue precisamente la de concentrar energía luminosa para justamente quemar. En este punto el lector debe haber conectado una relación de significado entre los denominados puntos focales con lo que se aprende en óptica básica como focos de las lentes. Justamente una lente convergente corresponde a una idealización de un sistema óptico donde la cáustica es únicamente un punto; a este punto se le denomina foco (puede tener dos, si las caras no tienen el mismo radio de curvatura). Sin embargo aunque esa simplificación reduce las dificultades matemáticas, es bien sabido que esa es una aproximación válida únicamente cuando la lente es *delgada* o bien, cuando se está trabajando muy cerca del eje óptico (aproximación paraxial) de modo que en el caso general las lentes convergentes no tienen propiamente un foco<sup>6</sup>. Así, cualquier sistema óptico (incluyendo a las lentes convergentes) que tenga la propiedad de enfocar luz, tendrá asociado todo un conjunto de esos puntos focales.

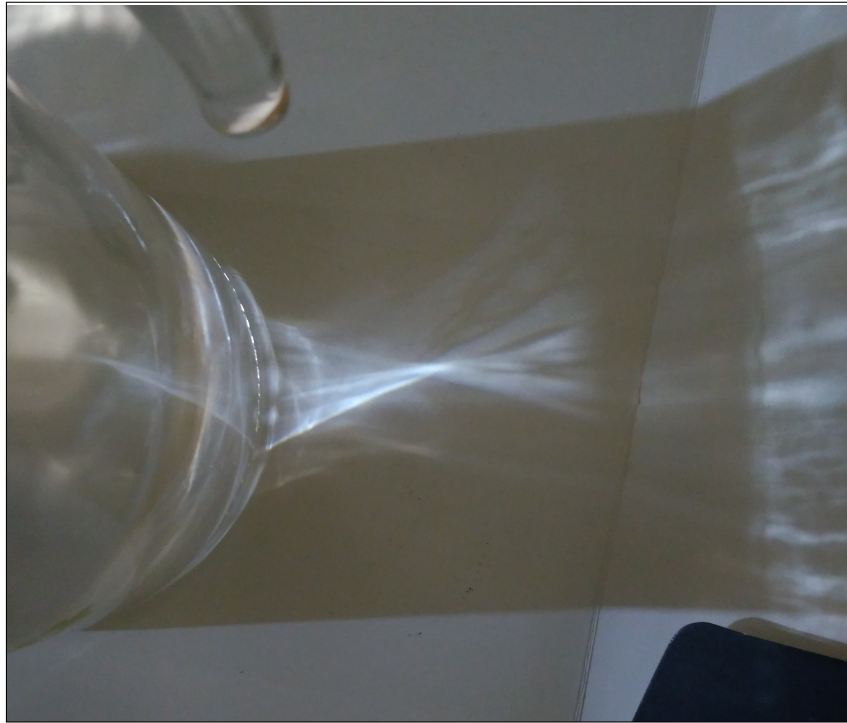


Figura 3: Cáustica generada por refracción en una jarra de vidrio.

<sup>5</sup>obviamente para el espectro visible

<sup>6</sup>a no ser que haya sido diseñada sin aberraciones, sin embargo en los hechos prácticos nunca se tiene una lente que tenga un foco perfecto

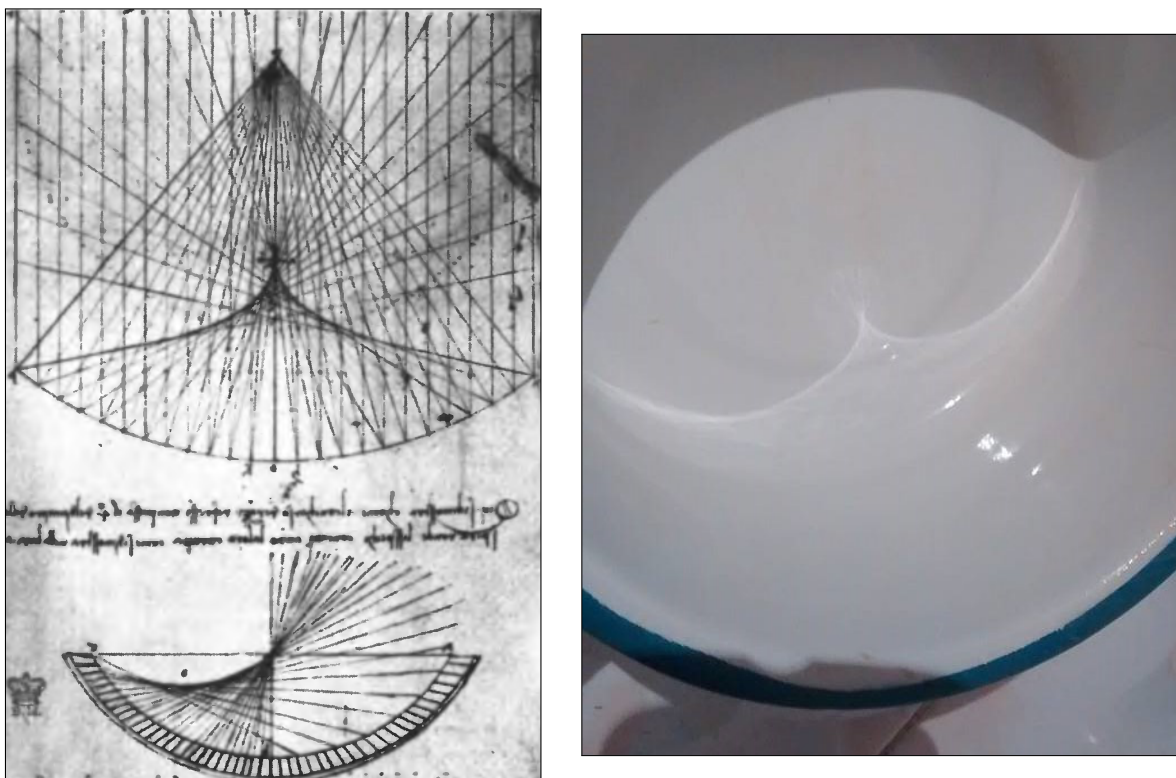


Figura 4: (a) "Fig 2.1(c) The first known drawing of a caustic, by Leonardo da Vinci c. 1508 (British Library: codex Arundel 263, folio 87 v)"(p.11). En [8], J.Nye,1999, IOP, Philadelphia. (b) La misma cáustica en un recipiente de acero porcelanizado convencional.

La figura 4(a) corresponde al primer dibujo conocido de una cáustica, fue realizado por Leonardo da Vinci cerca de 1508 y está actualmente en la biblioteca británica [8]. De éste se puede concluir que da Vinci imaginó que la propagación de luz se da a través de rayos y trazando uno a uno representó de que forma se daría, así al menos gráficamente se convenció de que debía ser la “envolvente” de los rayos. Sin embargo aunque las cáusticas se presentan como en el ejemplo anterior de forma cotidiana (como puede confirmarse en el mismo caso que representó da Vinci y que el autor de este trabajo fotografió en el recipiente en el que calienta agua para el café, figura 4(b)) en muchos libros se tocan de forma muy escueta o ni siquiera se abordan [2, 9–12]. En general las cáusticas pueden manifestarse en formas geométricas diferentes y no es trivial saber como se forman ni sus propiedades [13–34], por ejemplo en la figura 5(a) se muestra la fotografía de la cáustica formada por la tapa de plástico de un recipiente de crema corporal, la figura 5(b) corresponde a la cáustica formada por un vaso de vidrio convencional lleno de agua. En ambos casos (igual que en la figura 3) la fuente de luz era sólo un foco. ¡Incluso el premio nobel Max Born cuya área de trabajo fue la óptica erró al describir la formación de una cáustica generada por una lente biconvexa (figura 6)!

Intuitivamente podríamos pensar que la cáustica puede ser una región cualquiera en el espacio, desde un punto hasta un pequeño volumen, sin embargo matemáticamente se demostró que como **ésta es la envolvente de un campo vectorial** debe ser una superficie. La herramienta matemática que permitió clasificarlas y conocer sus propiedades es la teoría de catástrofe, que fue introducida por Thom entre 1969 y 1972 y desarrollada notablemente por Arnold por 1975 [36, 37]. Esta teoría consiste en un muy riguroso estudio de las singularidades de mapeos diferenciables. Tales mapeos son justamente del tipo que describen la evolución de un frente de onda, y resulta que **la superficie cáustica también puede entenderse**

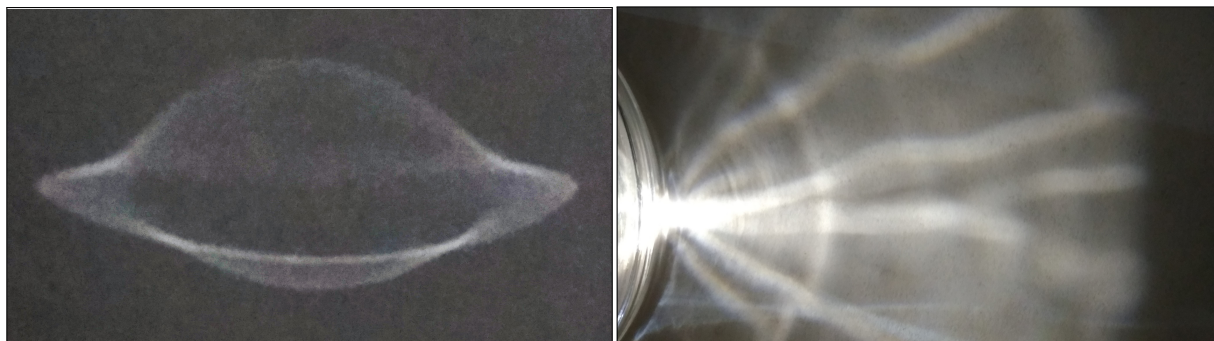


Figura 5: (a) Cáustica generada por una tapa de plástico, iluminada por un foco. (b) Cáustica generada por un vaso de vidrio lleno de agua.

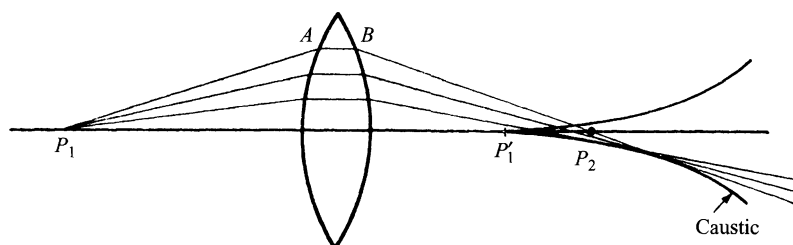


Figura 6: "Fig.3.13 Caustic formed by rays from an axial point source after passing through a lens" (p.139). En [35], J.Born, E. Wolf, 1999, Cambridge Press, U.K.

como el conjunto de puntos que conforman las singularidades y autointersecciones de los frentes de onda. J. F. Nye y M. Berry y su muy conocido grupo de investigación en Bristol fueron quienes ya las clasificaron y las estudiaron, incluso experimentalmente han reproducido todas, así que no es de extrañarse que Berry fuera quien determinó cómo la interacción con este tipo de superficie genera cambios en la imagen en su teorema.

### 0.3. Cambio de topología

A nosotros nos interesa entender el concepto de cambio de topología de manera cualitativa y no en un lenguaje tan formal, el hacer una descripción intuitiva de dicho concepto bastará para los fines de este trabajo. Restringiremos dicho estudio a superficies bidimensionales en tres dimensiones para extrapolar los conceptos a objetos unidimensionales.

Imaginemos una superficie de algún material idealmente elástico (como una "sábana" de plastilina), podríamos cambiar la forma de ésta evidentemente de muchas maneras; y podemos entender que ello se llevaría a cabo mediante "transformaciones" aplicadas a la superficie original, entendido esto; podríamos clasificar estas transformaciones básicamente en dos tipos: continuas y no continuas. En general y formalmente la continuidad es un concepto bastante elaborado, sin embargo si nos restringimos a aplicarlo a superficies se puede entender como una propiedad de la transformación tal que al ser aplicada en cada punto que conforme la superficie, los puntos infinitesimalmente cercanos a dicho punto permanezcan también infinitesimalmente cercanos a dicho punto después de la transformación. Resumiríamos ello diciendo que las transformaciones serán aquellas en las que ni se superpongan puntos de la superficie, ni haya rupturas en la misma al aplicar la transformación.

Por ejemplo podríamos estirar la “sábana” elástica para aumentar el área de su superficie, o “achatar” las esquinas hasta que tenga forma de disco, o bien estirla de forma tal que tenga más esquinas de las cuatro que originalmente teníamos, y todas serían transformaciones continuas; pero si hubiéramos pegado dos orillas opuestas para formar un cilindro, o si la hubiéramos dividido en dos, o hecho un agujero en medio; no hubiéramos llevado a cabo transformaciones continuas.

Por otro lado, las transformaciones a las que nos queremos limitar son aún más particulares. Se exige que para cada transformación continua, exista una transformación inversa. Esto significa que siempre es posible regresar a la forma original sin violar las restricciones de continuidad, siguiendo el proceso inverso. Esto precisamente define a los homeomorfismos, y cuando a través de ellas se puede “pasar” de una superficie a otra, se dice que estas superficies son topológicamente equivalentes.

Al extrapolar lo anterior a objetos unidimensionales, diremos que; dos curvas son topológicamente equivalentes si se puede transformar una en la otra de forma reversible, sin conectar o desconectar puntos. Así, **cuando a un objeto unidimensional se le aplicó una transformación cuyo resultado es otro objeto unidimensional que ya no es topológicamente equivalente al objeto inicial, diremos que hubo un cambio en la topología .**

## 0.4. Caustic-Touching-Theorem

Ahora está todo definido para poder establecer este teorema de M. Berry

*- Ocurren cambios en la topología de la imagen, cuando el objeto entra en contacto tangente con la región cáustica asociada con la familia de rayos de luz imaginarios “emitidos” por el observador.* - Con ayuda de la figura 7 podemos entender claramente el teorema, en la primera imagen se grafica al observador detectando la imagen de un objeto que está en otro medio óptico diferente de donde él está ubicado, debido a este cambio de medio óptico sabemos que habrá deflexión (note que el teorema funciona con reflexión también) y con ello habrá disrupción de la imagen. Ahora, el teorema responde a la forma en la que esa disrupción se da, pero para llegar a ello hay que pasar por un paso intermedio, se debe sustituir al observador por una fuente puntual y calcular la cáustica que esta fuente genera en el segundo medio (que es donde está el objeto), esto corresponde a la segunda imagen de la figura 7. Ahora bien, regresando a la primera imagen, el observador detectará cambios de topología entre el objeto y su imagen cuando el primero toque la segunda. Nada intuitivo, pero queda claro que en el caso donde los medios ópticos tienen el mismo índice, no hay deflexión y efectivamente el objeto y su imagen no sufren cambio.

Berry ocupó el teorema para explicar como se ve el sol desde dos ejemplos; cuando se ve desde la luna en un eclipse o desde una capa de inversión atmosférica, o bien éste cuando se refleja en el mar , generando en este último caso un fractal de dimensión 2!

## 0.5. La aplicación del teorema a pruebas experimentales

Aunque obviamente es muy interesante el trabajo de Berry, no trabajó nada que pudiera asociarse al análisis de pruebas ópticas. Para nosotros fue muy satisfactorio percatarnos que su teorema es directamente aplicable a pruebas no interferométricas nulas, y que usándolo es posible explicar resultados que aunque ya conocidos, no estaban completamente entendidos. Una vez que confirmamos que el teorema explicaba la disrupción de la imagen en esas pruebas, dicho teorema fue la motivación principal para abordar configuraciones del sistema más generales y que consisten en la aplicación de pruebas no interferométricas directas. Estos resultados muy interesantes los pudimos publicar en propia autoría. Pero para eso explicamos primero en que consisten estas pruebas ópticas.

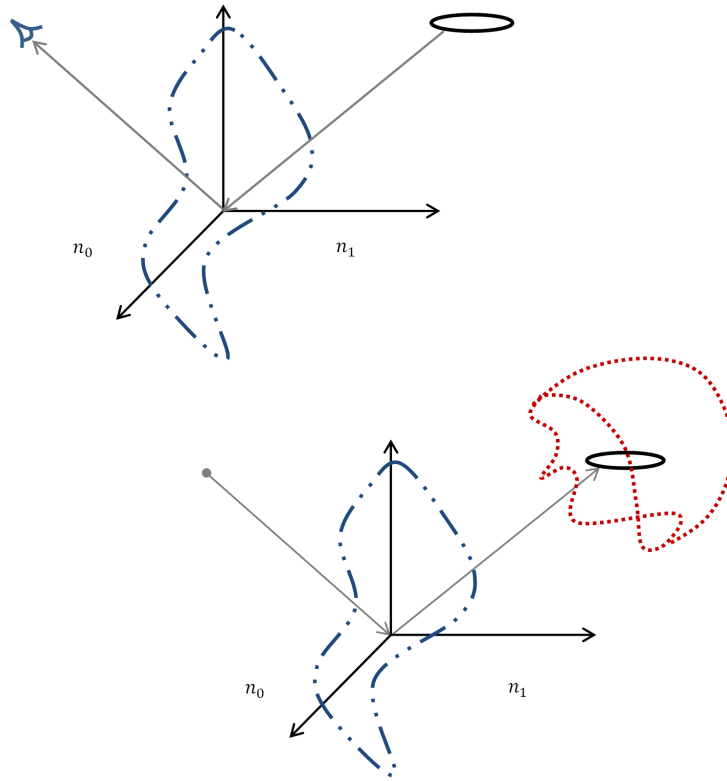


Figura 7: Configuración de un sistema óptico del *caustic-touching theorem* de M. Berry.

Una prueba óptica no es otra cosa que un procedimiento desarrollado para probar un sistema óptico. Los sistemas ópticos son en general cualquier conjunto de componentes que modifique el estado de la luz, entre los más simples están los espejos y las lentes que únicamente deflectan la luz, pero pueden ser mucho más complejos como los polarizadores, las pantallas LCD o incluso los interferómetros o las lentes gravitacionales. Las pruebas ópticas no interferométricas son las más simples porque precisamente no requieren un interferómetro para su ejecución. Las más conocidas son la prueba de Foucault, la del alambre, la de Ronchi y la de Hartmann [38–40] y han sido ampliamente estudiadas por [41–44, 44–72] sin embargo a pesar de que la primera de ellas tiene más de siglo y medio y las dos siguientes casi un siglo, siguen siendo un tema de actualidad y que ha extendido su influencia debido a su directa y fácil aplicación incluso a otro tipo de sistemas físicos como son los haces de electrones [73, 74] o los lentes gravitacionales [75–79]; estas pruebas nos permiten obtener información esencial tanto de espejos como de lentes bajo prueba, particularmente el centro de curvatura y la presencia de aberraciones en los frentes de onda; éstas últimas importantísimas [80–83] entre otros temas en el estudio de la óptica del ojo [84–91].

### 0.5.1. Pruebas de Foucault, del alambre y de Ronchi; y su relación

Ahora, ¿cómo se aplican? Naturalmente comenzaremos con la prueba de León Foucault y cómo la usó, resulta que él descubrió que se podía probar la calidad, esto es, detectar las irregularidades de un espejo con un arreglo muy simple (de armar, no de concebir, claro está); vea la figura 8(a). Colocó el espejo, iluminándolo con una fuente puntual<sup>7</sup> que colocó a una distancia pequeña de donde aproximadamente estaba el centro de curvatura. Equidistante al centro<sup>8</sup> colocó el ojo, con una navaja muy próxima delante de éste, así detectó un patrón muy parecido a la figura 8(b). Esta imagen fue tomada de [38] y al menos

<sup>7</sup>usando un “pinhole”

<sup>8</sup>en un plano meridional

al autor de esta tesis le pareció muy sorprendente, nada que intuitivamente esperara.

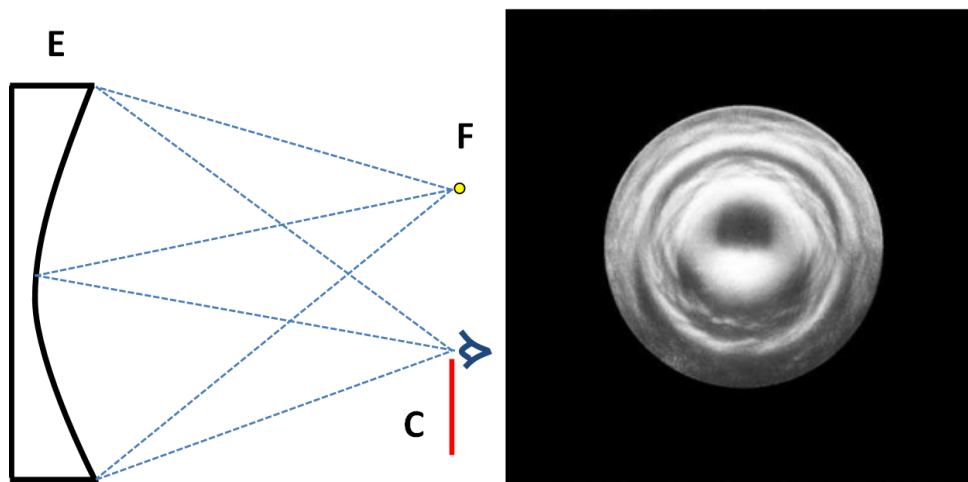


Figura 8: (a) Esquema de la prueba de Foucault para espejos. (b) "Figure 8.7 Foucault graph of an irregular mirror" (p.279). En [38], D. Malacara, 2007, John Wiley and Sons, New Jersey, U.S.A.

Pero esta prueba también sirve para probar lentes. En particular la forma tradicional de ejecutarlas (la prueba directa) para lentes se muestra en la primera imagen de la figura 9, consiste colocar la fuente puntual de luz, la lente bajo prueba, la cuchilla y el observador. En este punto debemos explicar los otros dos arreglos de la figura 9. Éstos representan la ejecución de las otras dos pruebas ópticas para la misma lente, como queda claro, lo único que cambia es el "objeto" con el que se prueba la lente, donde en lugar de una navaja se coloca un alambre o bien una rejilla (que se puede ver como no otra cosa que un arreglo de alambres). Pero como probaremos, muestran equivalencias entre ellas. Para probar espejos esféricos la prueba de Foucault arroja información muy fácil de interpretar, el patrón pasa de ser claro a oscuro al tocar el foco del espejo, sin embargo no es muy útil al probar espejos esféricos porque muchos errores no se detectan porque las sombras no son completamente nítidas (esto es transparente desde la óptica física) aunque a pesar de ello es posible encontrar con esta prueba los extremos de la región cáustica. Por otro lado la prueba del alambre resuelve ese problema que tiene la prueba de Foucault, su patrón es mucho más nítido y arroja información cuantitativa que se puede interpretar directamente, al comparar el patrón "perfecto" con el patrón experimental.

Pero como la intención de este trabajo es dejar todo lo más claro posible, vamos a regresar la atención a la figura 9 para después explicar más adelante que entenderemos como patrón. En esta figura podemos ver la similitud entre ellas, en la prueba de Foucault se utiliza una navaja para bloquear los rayos de luz refractados, podemos pensar esta navaja como una superposición continua de alambres, de la figura esto es muy claro. La prueba con la rejilla de Ronchi fue implementada por Vasco Ronchi [41] y consistió en un arreglo de alambre equidistantes, o sea una superposición discreta de alambres; actualmente consiste de una serie de bandas oscuras intercaladas con bandas transparentes e impresas en una superficie de vidrio o plástico, ver figura 10. También pueden diseñarse rejillas que no tengan esa periodicidad entre las bandas, se pueden elegir de modo que no tengan el mismo grosor o que no sean equidistantes, a estas se les denomina rejillas subestructuradas de Ronchi [57, 58] y serán del tipo que abordaremos en el capítulo 2. A los patrones de bandas que resultan de esta prueba se les denomina ronchigramas<sup>9</sup>.

<sup>9</sup>Desde el enfoque de óptica física las franjas son interpretadas como un patrón de interferencia producido por algunos frentes de onda una vez que han pasado por la rejilla de interferencia, mientras desde la óptica geométrica son interpretadas como sombras de las líneas que conforman la rejilla de Ronchi. Cuando la frecuencia de la rejilla no es muy grande las dos predicen el mismo resultado.

Una vez expuesto lo anterior, queda claro que las otras pruebas pueden ser generadas a través de la información que proporciona la prueba del alambre (incluyendo las pruebas de bi-Ronchi y Hartmann que no serán tocadas aquí). Así que esta prueba puede entenderse como el germen de todas las demás, he ahí su importancia.

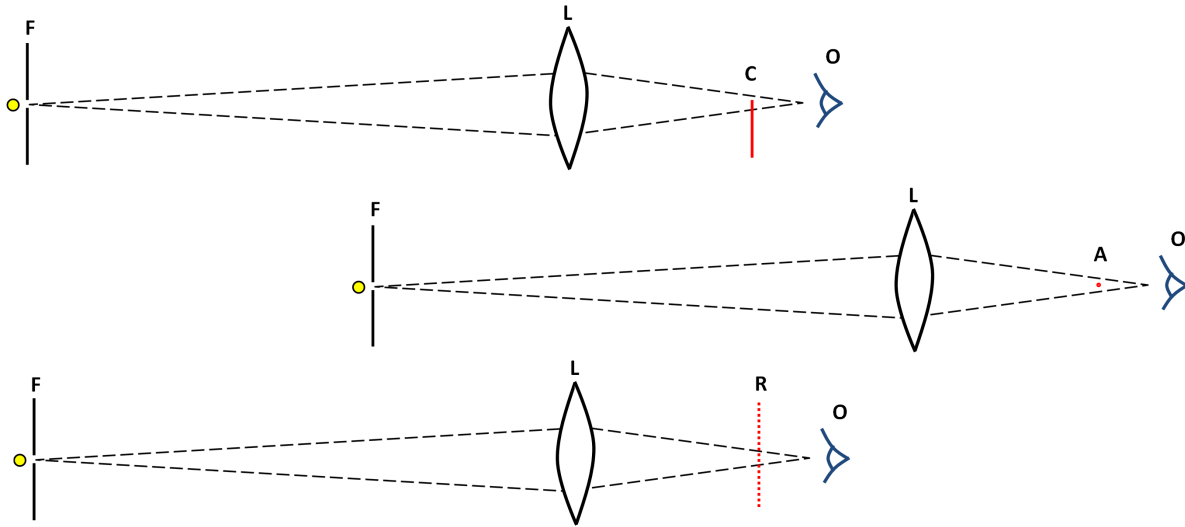


Figura 9: Pruebas de Foucault, del alambre y de Ronchi.

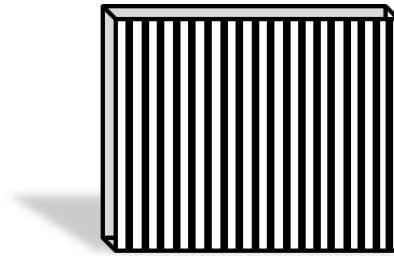


Figura 10: Rejilla de Ronchi.

Por si el análisis geométrico anterior no termina de convencer al lector (y ojalá así sea) consideramos importante mostrar como los patrones de la pruebas de Foucault y del alambre arrojan información similar, en la figura 11 se muestran patrones experimentales de ambas pruebas. Estas imágenes fueron tomadas de [38]

La única pregunta abierta es: ¿y cómo se utiliza el patrón obtenido para identificar las irregularidades en la lente? Para contestarla tenemos que hacer dos cosas; primero tenemos que definir el **plano objeto** como aquel en donde se coloca o bien el alambre, o bien la navaja, o bien la rejilla; y al **plano imagen o de detección** como aquel en donde registramos el patrón (o imagen) y que en general es donde se coloca una cámara de detección CCD para obtener patrones que no pierdan intensidad (hacemos notar que se sustituye el CCD por el ojo del observador, sería carente de sentido seguir aplicando la prueba a como las limitaciones del siglo anterior lo permitían). Segundo, definido lo anterior, tenemos que regresar a una discusión anterior, resulta que para “sistemas ópticos perfectos” (lentes o espejos con un punto focal) la aplicación de la prueba arrojaría un patrón que pasa de tener regiones iluminadas a un patrón completamente oscuro al colocar el objeto justo en el foco. Sin embargo como ya expusimos, los sistemas ópticos

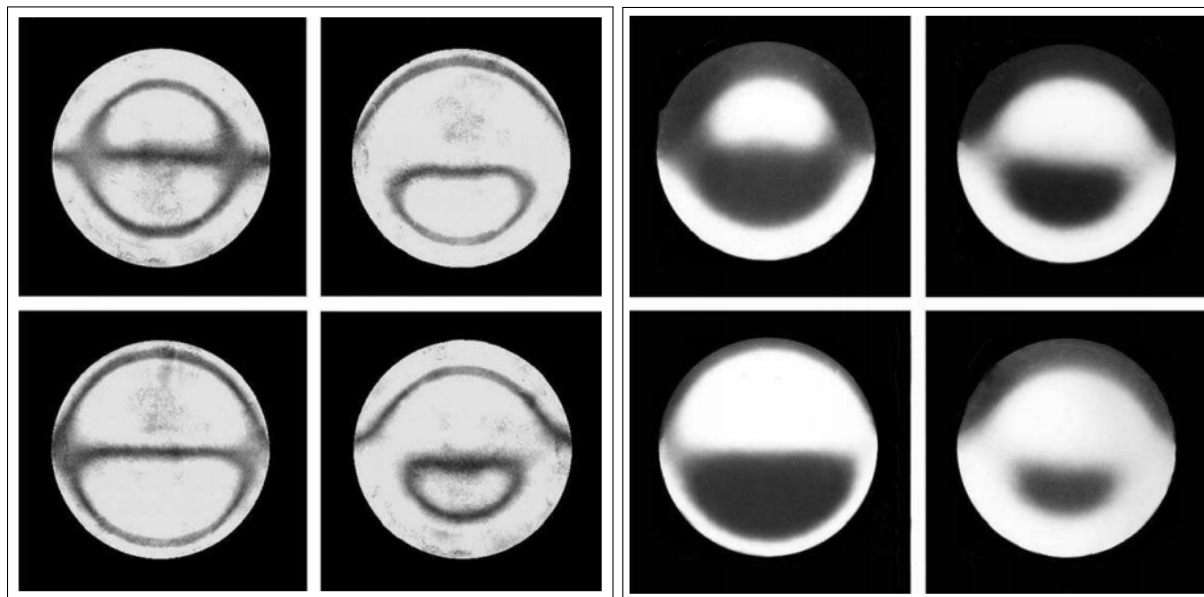


Figura 11: (a) "Figure 8.20 Shadow patterns obtained with the wire test" (p.296). En [38], D. Malacara, 2007, John Wiley and Sons, New Jersey, U.S.A. (b) "Figure 8.21 Shadow patterns obtained with the knife test. Notice the similarity to the patterns in Figure 8.20" (p.297). En [38], D. Malacara, 2007, John Wiley and Sons, New Jersey, U.S.A

perfectos no existen y si se logra aproximarse mucho a uno, el sistema óptico antes de ser corregido arroja todo un patrón de zonas oscuras e iluminadas *mezcladas* tal como se mostró en las figuras 8, 11(a), 11(b). Ahora diremos una de las cosas más importantes de este trabajo, **todo sistema óptico que tenga asociada una superficie cáustica no puntual, aunque sea perfecto en su simetría, generará patrones deformados**. Así que la respuesta a la pregunta inicial es muy simple, la aplicación de estas pruebas ópticas consiste en comparar la imagen que resulta del experimento con la imagen ideal calculada.

Al margen de lo anterior, es importante decir que experimentalmente resulta bastante fácil utilizar como frentes de onda incidentes a frentes planos, de hecho colimar un haz es una labor hasta cotidiana en un laboratorio de óptica; aunque se puede usar una fuente puntual luminosa, no hay pérdida de generalidad al elegir trabajar con frentes de onda planos en lugar de esféricos. También es usual (por simplicidad) orientar los tres planos paralelamente, es decir, el plano donde se ubica la lente, el plano objeto y el plano imagen. Vea la figura 4.1, donde se exponen estos planos junto a la rejilla y al patrón.

Algo sumamente importante, es que como expone [41], **también es posible aplicar la prueba directa pero con una modificación, colocando el objeto antes de la lente**.

### 0.5.2. Pruebas ópticas nulas

Hay otra modificación de las pruebas ópticas anteriores (del alambre y de Ronchi) denominada prueba nula, esta prueba consiste en determinar la forma que debe tener una rejilla (denominada rejilla nula), de modo tal que ahora **el patrón de bandas (la imagen de dicha rejilla) sea un arreglo de líneas o bandas paralelas equidistantes**. Al aplicar esta prueba la rejilla es la que queda conformada de bandas deformadas, en la figura 13 se muestra un ejemplo de rejilla nula de Ronchi.

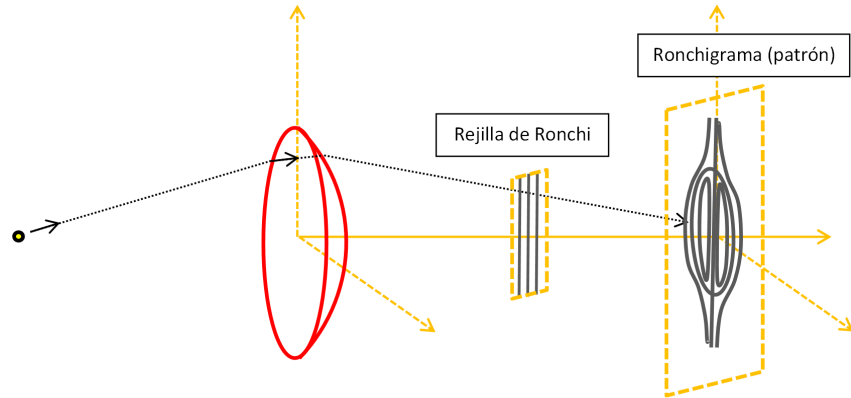


Figura 12: Esquema de la prueba de Ronchi para una lente plano-convexa. Ahora denotados los planos objeto e imagen.

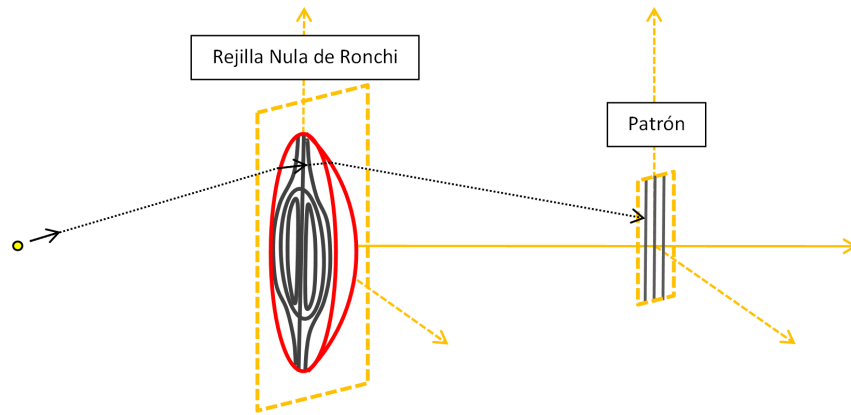


Figura 13: Esquema de la prueba nula de Ronchi para una lente plano-convexa.

## 0.6. Estructura

El trabajo se presenta de la forma siguiente: en el primer capítulo se establece toda la fundamentación matemática necesaria, sin dejar lugar a ambigüedades, para entender tanto las bases del planteamiento del problema como la teoría que las soporta. Partiendo de la representación más general de la luz que son las ecuaciones de Maxwell se construye la óptica geométrica (elegimos hacerlo así porque es una vía mucho más formal que partir de principios y resultados experimentales, más formal y elegante). Entre otras cosas queda expuesto que no es necesario tomar aproximaciones más allá de tomar a la longitud de onda tendiendo a cero en un campo electromagnético armónico en el tiempo. Posteriormente se desmenuza el *caustic touching theorem* de M. Berry; y en la tercera parte de este capítulo se expone nuestro formalismo, básicamente desarrollamos la matemática que representa refracciones múltiples. Exponemos como se calcula el campo vectorial que representa a los rayos refractados, la parametrización de los frentes de onda y la representación de la superficie cáustica.

En el segundo capítulo, exponemos cómo la prueba nula del alambre (y extrapolando, la nula de Ronchi) puede estudiarse directamente con el *caustic touching theorem*. Desarrollamos analíticamente como ejemplo el problema de la doble refracción que se tiene al iluminar una lente plano-parabólica con una fuente puntual colocada en el eje óptico. Se desarrollan la representación de los rayos, los frentes de

onda, la función  $k$  y el conjunto crítico y cáustico para esta lente. Se desarrolla la representación analítica de la prueba de Ronchi subestructurada (en la cara plana de la lente) y también la representación analítica de la prueba nula de Ronchi. Se presentan resultados numéricos usando las fórmulas generales mencionadas y se calculan todos los ronchigramas y rejillas nulas para cada configuración posible (en relación a la superficie cáustica). Es decir, para ambas pruebas se colocó al plano imagen; antes de la cáustica, intersectando una de las ramas de la cáustica, intersectando las dos ramas, y fuera de la cáustica). Posteriormente analizamos la topología de la imagen, confirmando que para las rejillas nulas cada configuración queda completamente explicada por el *caustic touching theorem* y presentamos el análisis de la imagen también, para los ronchigramas, donde a pesar de no ser abordable con dicho teorema, se presenta cambio de topología en la imagen y patrones muy diferentes a los que se presentan en la prueba nula, se clasifica de que tipo son.

En el tercer capítulo partimos de la motivación de un posible contraejemplo al *caustic touching theorem* para dejar demostrado al final del mismo que ciertamente puede haber rompimiento de la equivalencia topológica de la imagen aún cuando no haya contacto tangente entre la superficie cáustica y el objeto. Mostramos que hay configuraciones que satisfacen la configuración de teorema, pero que en ellas el contacto tangente no es una condición necesaria para el cambio de topología. Para mostrarlo comenzamos por calcular la superficie cáustica de un sistema parecido al del capítulo anterior pero que ofrece más facilidades de simetría. Se modifica el mapeo que representa al patrón de la prueba nula para obtener uno punto a punto (ya no un mapeo de objetos unidimensionales) y se explica a través del cálculo de imágenes puntuales (donde con esto ya hemos evitado el requisito de tangencia) como es que una imagen reconstruida puede romper la equivalencia topológica con su objeto. Se muestran dos ejemplos muy ilustrativos.

En el cuarto capítulo abordamos la prueba de mayor interés experimental, la prueba directa del alambre. Hacemos un estudio exhaustivo de esta prueba para una lente plano-convexa con simetría de revolución (pero por lo demás, genérica). Para ejecutar tal estudio calculamos la representación de la superficie cáustica para una lente genérica de este tipo, note que al ser la representación de la lente muy general, su correspondiente cáustica es igualmente general. Posteriormente desarrollamos el patrón analítico y reportamos que inesperadamente éste se puede expresar en dependencia directa de las características del sistema óptico y de la magnitud de una de las ramas de la cáustica (la que tiene forma de aguja). Con este patrón analítico que es válido en cualquier configuración, calculamos un conjunto de simulaciones que representan la adaptación dinámica de esta prueba óptica (cuando el alambre cambia su posición de forma continua en el plano transversal, cubriendo toda la pupila de salida) tomando como ejemplo una lente plano-parabólica. Mostramos un conjunto porque en este estudio abordamos todas las posibles configuraciones que puede tomar el sistema óptico; esto es, cuando ambos planos objeto e imagen intersectan: dos, una o ninguna rama de la superficie cáustica (incluyendo los focos marginal y paraxial). La riqueza de este análisis es mucho mayor a lo presentado en el capítulo tercero porque acá ambos planos pueden simultáneamente intersectar la región focal. Con estas simulaciones analizamos la estructura topológica del patrón, comprobamos que hay más cambios de los que se presentan cuando el *caustic touching theorem* es aplicable. Explicamos como se da el cambio de topología y presentamos el rol que juegan las proyecciones reales y virtuales de la cáustica en este cambio.

En el capítulo quinto se aplican los resultados del capítulo anterior para establecer el patrón analítico de la prueba directa convencional de Ronchi (no subestructurada). Para esto, se obtienen todas las representaciones posibles de la rejilla de Ronchi, y se muestra como a través de éstas y con el patrón analítico de la prueba del alambre, se llega a la representación general del ronchigrama para una lente plano-convexa con simetría de revolución. Se muestra la simplicidad del formalismo abordando con éste tres ejemplos (uno de ellos con un perfil muy complejo) incluyendo por completez el de la lente plano-parabólica. Con este patrón analítico desarrollamos simulaciones donde ahora cambiamos de forma continua el plano de detección y demostramos que el patrón preserva la misma estructura cuando el plano se mantiene dentro del mismo rango respecto de la región focal.

En el capítulo sexto presentamos el análisis de la prueba del alambre (y su extensión a la prueba de Ronchi subestructurada) para una lente helicoidal que experimentalmente se aplica a la generación de vórtices ópticos [92, 93]. Para este fin, aplicamos nuestro método y obtenemos, como en capítulos anteriores, el campo de los rayos refractados, la representación de los frentes de onda y la superficie cáustica. Para hacer el análisis del patrón de la prueba, se utilizan los resultados generales anteriores sustituyéndoles valores numéricos que corresponden a parámetros reales que tienen las lentes comerciales de este tipo (también se utilizan valores reales para la fuente con que se ilumina). Posteriormente se reportan las tres pruebas que se han analizado para lentes plano-convexas, para esta lente: la prueba nula, la prueba directa en la cara plana y la prueba directa. Por último se analiza la equivalencia topológica entre el alambre y su patrón para cada configuración posible, otra vez a partir de la adaptación dinámica de la prueba y se identifica el rol que tiene la región focal en este cambio.

Finalmente, se presentan las conclusiones del trabajo, la bibliografía y los apéndices de éste.

# Capítulo 1

## La óptica geométrica desde las ecuaciones de Maxwell

### 1.1. Propagación del campo electromagnético

El objetivo de este capítulo es clarificar con toda formalidad matemática los conceptos físicamente explicados en la introducción, partiremos de la suposición de que el lector conoce los principios de la electrodinámica y que le es completamente familiar la aseveración de que un campo electromagnético es consecuencia de la presencia de cargas (o corrientes de carga) y que queda completamente representado por  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$ , el *vector eléctrico* y la *inducción magnética* respectivamente. Tomaremos como entendido que el lector sabe que significan las magnitudes vectoriales  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{H}$ ; correspondientes a la *densidad de corriente*, el *desplazamiento eléctrico* y el *vector magnético*, respectivamente.

Por último, asumimos que el lector sabe que estos cinco campos vectoriales están relacionados (junto con sus derivadas espaciales y temporales, la velocidad de la luz y la densidad de carga libre) a través de las ecuaciones de Maxwell que son

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{H} - \frac{1}{c} \dot{\mathbf{D}} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, & \nabla \cdot \mathbf{D} &= 4\pi \rho, \\ \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \dot{\mathbf{B}} &= 0, & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0.\end{aligned}\tag{1.1}$$

Y si además el material donde se propaga el campo es isótropo (las propiedades físicas son la mismas en todas las direcciones) se cumple que

$$\begin{aligned}\mathbf{j} &= \sigma \mathbf{E}, \\ \mathbf{D} &= \epsilon \mathbf{E}, \\ \mathbf{B} &= \mu \mathbf{H}.\end{aligned}\tag{1.2}$$

Donde  $\sigma$  es la *conductividad específica*,  $\epsilon$  es la *permitividad dieléctrica* y  $\mu$  la *permeabilidad magnética*. Las ecuaciones (1.3) son conocidas como *relaciones constitutivas* o *ecuaciones materiales*.

CAPÍTULO 1. LA ÓPTICA GEOMÉTRICA DESDE LAS ECUACIONES DE  
MAXWELL

1.2. ECUACIONES DE MAXWELL Y LA VELOCIDAD DE LA RADIACIÓN

## 1.2. Ecuaciones de Maxwell y la velocidad de la radiación

Si confinamos nuestra atención a cuando el campo electromagnético se propaga en un medio donde no hay ni cargas ni corrientes eléctricas ( $\mathbf{j} = \rho = 0$ ), y sustituimos  $\mathbf{B}$  desde (1.3) en (1.2), dividimos ambos lados por  $\mu$  y aplicamos el operador rotacional obtenemos

$$\nabla \times \left( \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{E} \right) + \frac{1}{c} \nabla \times \dot{\mathbf{H}} = 0 \quad (1.3)$$

Ahora diferenciamos la primera ecuación de (1.2) con respecto al tiempo, usamos la ecuación material para  $\mathbf{D}$  y eliminamos  $\nabla \times \dot{\mathbf{H}}$  de entre la ecuación resultante y (1.2), esto da

$$\nabla \times \left( \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{E} \right) + \frac{\epsilon}{c} \ddot{\mathbf{E}} = 0 \quad (1.4)$$

Si usamos las identidades

$$u\mathbf{v} = u\nabla\mathbf{v} \times (\nabla u) \times \mathbf{v}, \quad (1.5)$$

$$\nabla \times (\nabla \times) = \nabla(\nabla \cdot) - \nabla^2. \quad (1.6)$$

entonces (1.4) se convierte en

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \ddot{\mathbf{E}} + \nabla \ln \mu \times \nabla \times \mathbf{E} - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) = 0 \quad (1.7)$$

También desde (1.2), usando de nuevo (1.3) para  $\mathbf{D}$  y aplicando la identidad

$$\nabla \cdot (u\mathbf{v}) = u\nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla u \quad (1.8)$$

encontramos que

$$\epsilon \nabla \cdot \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \nabla \epsilon = 0 \quad (1.9)$$

por lo tanto (1.7) puede escribirse

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \ddot{\mathbf{E}} + \nabla \ln \mu \times (\nabla \times \mathbf{E}) + \nabla(\mathbf{E} \cdot \nabla \ln \epsilon) = 0 \quad (1.10)$$

De manera similar podemos obtener una ecuación para  $\mathbf{H}$  donde

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \ddot{\mathbf{H}} + \nabla \ln \epsilon \times (\nabla \times \mathbf{H}) + \nabla(\mathbf{E} \cdot \nabla \ln \mu) = 0 \quad (1.11)$$

Si en particular el medio es homogéneo,  $\nabla \ln \epsilon = \nabla \ln \mu = 0$  y de estas dos últimas ecuaciones se llega a que

**CAPÍTULO 1. LA ÓPTICA GEOMÉTRICA DESDE LAS ECUACIONES DE  
MAXWELL**

1.3. ENERGÍA DE UN CAMPO ELECTROMAGNÉTICO

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \ddot{\mathbf{E}} = 0, \quad \nabla^2 \mathbf{H} - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \ddot{\mathbf{H}} = 0 \quad (1.12)$$

Y es fácil identificar a la ecuación de onda, en [35] incluso utilizan el término “ecuación de movimiento ondulatorio” para que quede completamente claro. De aquí directamente se concluye que la velocidad a la que las ondas electromagnéticas se propagan es

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}. \quad (1.13)$$

Ahora podemos ir un poco más lejos y regresar a la ley de refracción de Snell y que después confirmó Fermat. Como mencionamos en la introducción, la conclusión final es que el seno del ángulo de incidencia es directamente proporcional al ángulo de refracción y que la constante que los relaciona no es otra cosa que el cociente de las velocidades con las que se propaga la luz en cada uno de los medios, así podemos definir el formalmente el *índice de refracción absoluto*<sup>1</sup> como

$$n = \frac{c}{v}. \quad (1.14)$$

Y usando (1.13), es transparente que

$$n = \sqrt{\epsilon\mu}. \quad (1.15)$$

### 1.3. Energía de un campo electromagnético

La teoría electromagnética interpreta a la intensidad de la luz como el flujo de energía del campo, por lo que de nuevo (si se quiere hacer el tratamiento lo más formal y general posible) son indispensables las ecuaciones de Maxwell para poder llegar a la ley que gobierna a la energía.

Partiendo de (1.2) y (1.3) se puede llegar a

$$\mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H} - \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{D}} + \frac{1}{c} \mathbf{H} \cdot \dot{\mathbf{B}}. \quad (1.16)$$

Por una bien conocida identidad vectorial, el término de la izquierda puede ser expresado como la divergencia del producto vectorial de  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{E}$ , es decir

$$\mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H} - \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E} = -\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}). \quad (1.17)$$

Y de las dos anteriores tenemos

$$\frac{1}{c} (\mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{D}} + \mathbf{H} \cdot \dot{\mathbf{B}}) + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} + \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = 0 \quad (1.18)$$

<sup>1</sup>En algunos textos como [35] se utiliza el término “índice de refracción” para denotar el cociente de los índices de refracción absolutos

# CAPÍTULO 1. LA ÓPTICA GEOMÉTRICA DESDE LAS ECUACIONES DE MAXWELL

## 1.4. PROMEDIANDO LA ENERGÍA ELECTROMAGNÉTICA EN EL TIEMPO

Cuando multiplicamos esta ecuación por  $c/4\pi$ , integramos a través de un volumen arbitrario y aplicamos el teorema de Gauss, esto da

$$\frac{1}{4\pi} \int (\mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{D}} + \mathbf{H} \cdot \dot{\mathbf{B}}) dV + \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} dV + \frac{c}{4\pi} \int (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dS = 0. \quad (1.19)$$

Donde la última integral es tomada en la frontera del volumen y  $\mathbf{n}$  es el vector normal unitario. La ecuación anterior es una consecuencia de las ecuaciones de Maxwell, por lo tanto es válida siempre y representa precisamente *la ley de energía*. Ahora discutiremos el caso en el que las relaciones materiales son satisfechas. Sustituyendo (1.3) en los términos de la primera integral de la ecuación anterior resulta

$$\frac{1}{4\pi} (\mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{D}}) = \frac{1}{4\pi} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon \mathbf{E}) = \frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon \mathbf{E}^2) = \frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}), \quad (1.20)$$

$$\frac{1}{4\pi} (\mathbf{H} \cdot \dot{\mathbf{B}}) = \frac{1}{4\pi} \mathbf{H} \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\mu \mathbf{H}) = \frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial t} (\mu \mathbf{H}^2) = \frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}).$$

Definiendo

$$w_e = \frac{1}{8\pi} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}, \quad w_m = \frac{1}{8\pi} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}, \quad (1.21)$$

y agrupando

$$W = \int (w_e + w_m) dV, \quad (1.22)$$

vemos que (1.19) se puede escribir como

$$\frac{dW}{dt} + \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} dV + \frac{c}{4\pi} \int (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dS = 0. \quad (1.23)$$

Donde  $W$  representa a la energía total contenida dentro del volumen, así que  $w_e$  es identificado como la *densidad de energía eléctrica* y  $w_m$  como la *densidad de energía magnética* del campo.

## 1.4. Promediando la energía electromagnética en el tiempo

En general es un hecho que al propagarse la onda electromagnética habrá variaciones de sus magnitudes en el tiempo. Las frecuencias de la luz dentro del espectro visible, por ejemplo, son del orden de  $10^{15} \text{s}^{-1}$  y esto tendrá la implicación obvia de oscilaciones cuantitativas de las densidades de energía. Pero si inteligentemente nos fijamos en intervalos de tiempo muy grandes comparados con el periodo de fundamental de la onda  $\tau = 2\pi/\omega$ , o sea intervalos  $-T \ll t \ll T$ , podemos obtener valiosa información de donde lucía muy difícil. Empecemos tomando un campo general armónico en el tiempo

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \Re\{\mathbf{E}_0(\mathbf{r})e^{-i\omega t}\} = \frac{1}{2}[\mathbf{E}_0(\mathbf{r})e^{-i\omega t} + \mathbf{E}_0^*(\mathbf{r})e^{-i\omega t}] \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \Re\{\mathbf{H}_0(\mathbf{r})e^{-i\omega t}\} = \frac{1}{2}[\mathbf{H}_0(\mathbf{r})e^{-i\omega t} + \mathbf{H}_0^*(\mathbf{r})e^{-i\omega t}] \end{aligned} \quad (1.24)$$

**CAPÍTULO 1. LA ÓPTICA GEOMÉTRICA DESDE LAS ECUACIONES DE  
MAXWELL**  
1.4. PROMEDIANDO LA ENERGÍA ELECTROMAGNÉTICA EN EL TIEMPO

---

donde evidentemente  $\mathbf{E}_0$  y  $\mathbf{H}_0$  son en general complejos. Ahora, sabemos que el promedio integral de una función continua  $f$  en el intervalo  $[a, b]$  es

$$\langle f \rangle = \frac{\int f(x) dx}{b - a}. \quad (1.25)$$

Así, el *promedio temporal de la densidad de energía eléctrica* en el intervalo  $[-T, T]$  resulta

$$\langle w_e \rangle = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \frac{\epsilon}{8\pi} \mathbf{E}^2 dt = \frac{\epsilon}{8\pi} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \frac{1}{4} [\mathbf{E}_0^2 e^{-2i\omega t} + 2\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_0^* + \mathbf{E}_0^{*2} e^{2i\omega t}] dt \quad (1.26)$$

Por otro lado

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^T e^{-2i\omega t} dt = -\frac{1}{4i\omega T} [e^{-2i\omega t}]_{-T}^T = \frac{1}{4\pi} \frac{\tau}{T} \text{sen} 2\omega T \quad (1.27)$$

Donde hemos supuesto  $T \gg \tau$ , de modo que  $\frac{\tau}{T}$  es despreciable, y así la integral que involucra el término  $e^{-2i\omega t}$  se puede desestimar. Algo similar sucede con la integral que involucra el término  $e^{2i\omega t}$ . Finalmente se tiene

$$\langle w_e \rangle = \frac{\epsilon}{16\pi} \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_0^* \quad (1.28)$$

Análogamente se puede obtener el *promedio temporal de la densidad de energía magnética*

$$\langle w_m \rangle = \frac{\mu}{16\pi} \mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{H}_0^* \quad (1.29)$$

Y para el vector de Poynting

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{S} \rangle &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dt \\ &= \frac{c}{4\pi} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \frac{1}{4} [\mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0 e^{-2i\omega t} + \mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0^* + \mathbf{E}_0^* \times \mathbf{H}_0 + \mathbf{E}_0^* \times \mathbf{H}_0^* e^{2i\omega t}] dt \\ &\simeq \frac{c}{16\pi} (\mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0^* + \mathbf{E}_0^* \times \mathbf{H}_0) \end{aligned} \quad (1.30)$$

$$\therefore \langle \mathbf{S} \rangle = \frac{c}{8\pi} \Re \{ \mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0^* \} \quad (1.31)$$

## 1.5. Ecuación iconal

Ya sabemos que un campo genérico armónico en el tiempo en un medio isotrópico no conductor puede representarse por la parte real de

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E}_0(\mathbf{r})e^{-i\omega t}, \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{H}_0(\mathbf{r})e^{-i\omega t},\end{aligned}\tag{1.32}$$

Esto viene de (1.24). Los vectores (en general complejos)  $\mathbf{E}_0$  y  $\mathbf{H}_0$  dependen de la posición ( $\mathbf{r}$ ). Por otro lado, estos vectores complejos  $\mathbf{E}_0$  y  $\mathbf{H}_0$  satisfacen las ecuaciones de Maxwell en su forma no dependiente del tiempo, así que al sustituir (1.32) en (1.2), en regiones del espacio libre de cargas y corrientes ( $\mathbf{j} = \rho = 0$ ) y donde el medio es homogéneo, las ecuaciones resultan

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{H}_0 + ik_0\epsilon\mathbf{E}_0 &= 0, & \nabla \cdot \epsilon\mathbf{E}_0 &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{E}_0 - ik_0\mu\mathbf{H}_0 &= 0, & \nabla \cdot \mu\mathbf{H}_0 &= 0,\end{aligned}\tag{1.33}$$

Donde han sido usadas las relaciones que caracterizan a la materia de la que consiste el medio  $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ , además  $k_0 = \omega/c = 2\pi/\lambda_0$ , siendo  $\lambda_0$  la longitud de onda en el vacío.

Sin pérdida de generalidad [35] podemos decir que en un medio óptico de índice de refracción  $n = \sqrt{\epsilon\mu}$  un campo electromagnético bastante general es de la forma

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_0 &= \mathbf{e}(\mathbf{r})e^{ik_0\Phi(\mathbf{r})}, \\ \mathbf{H}_0 &= \mathbf{h}(\mathbf{r})e^{ik_0\Phi(\mathbf{r})},\end{aligned}\tag{1.34}$$

En este punto en [35] afirma que  $\Phi(r)$  es el “*el camino óptico*”, sin embargo no hay nada que pueda indicar formalmente hasta este punto que eso es, así que para nosotros únicamente es una función real dependiente de la posición. Por otro lado,  $\mathbf{e}(\mathbf{r})$  y  $\mathbf{h}(\mathbf{r})$  son campos vectoriales que en general pueden ser complejos. Es claro que (1.34) al sustituirse en las ecuaciones de Maxwell nos conducirá a un conjunto de relaciones entre  $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{h}$  y  $\Phi$ .

Usando identidades vectoriales en (1.34) llegamos a

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{H}_0 &= (\nabla \times \mathbf{h} + ik_0\nabla\Phi \times \mathbf{h})e^{ik_0\Phi}, \\ \nabla \times \mathbf{E}_0 &= (\nabla \times \mathbf{e} + ik_0\nabla\Phi \times \mathbf{e})e^{ik_0\Phi}, \\ \nabla \cdot \mu\mathbf{H}_0 &= (\mu\nabla \cdot \mathbf{h} + \mathbf{h} \cdot \nabla\mu + ik_0\mu\mathbf{h} \cdot \nabla\Phi)e^{ik_0\Phi}, \\ \nabla \cdot \epsilon\mathbf{E}_0 &= (\epsilon\nabla \cdot \mathbf{e} + \mathbf{e} \cdot \nabla\epsilon + ik_0\epsilon\mathbf{e} \cdot \nabla\Phi)e^{ik_0\Phi}.\end{aligned}\tag{1.35}$$

Así las ecuaciones de Maxwell (1.33) se simplifican en

$$\begin{aligned}\nabla\Phi \times \mathbf{h} + \epsilon\mathbf{e} &= -\frac{1}{ik_0}\nabla \times \mathbf{h}, & \mathbf{e} \cdot \nabla\Phi &= -\frac{1}{ik_0}(\mathbf{e} \cdot \nabla\log\epsilon + \nabla \cdot \mathbf{e}), \\ \nabla\Phi \times \mathbf{e} - \mu\mathbf{h} &= -\frac{1}{ik_0}\nabla \times \mathbf{e}, & \mathbf{h} \cdot \nabla\Phi &= -\frac{1}{ik_0}(\mathbf{h} \cdot \nabla\log\mu + \nabla \cdot \mathbf{h}).\end{aligned}\tag{1.36}$$

## CAPÍTULO 1. LA ÓPTICA GEOMÉTRICA DESDE LAS ECUACIONES DE MAXWELL

### 1.6. DIRECCIÓN DE PROPAGACIÓN DE LA LUZ Y FRENTE DE ONDA GEOMÉTRICOS

Y como estamos interesados en la solución que resulta al tomar valores muy grandes de  $k_0$ , todos los términos a la derecha de cada ecuación en (1.37) tienden a cero. Por tanto las ecuaciones de Maxwell se reducen a

$$\nabla\Phi \times \mathbf{h} + \varepsilon\mathbf{e} = 0, \quad (1.37)$$

$$\nabla\Phi \times \mathbf{e} - \mu\mathbf{h} = 0, \quad (1.38)$$

$$\mathbf{e} \cdot \nabla\Phi = 0, \quad (1.39)$$

$$\mathbf{h} \cdot \nabla\Phi = 0. \quad (1.40)$$

Despejando  $\mathbf{h}$  de (1.38) y sustituyéndola en (1.37) resulta

$$\frac{1}{\mu} [\nabla\Phi \times (\nabla\Phi \times \mathbf{e})] + \varepsilon\mathbf{e} = 0. \quad (1.41)$$

Usando una identidad vectorial la ecuación anterior se puede escribir como

$$\frac{1}{\mu} [(\mathbf{e} \cdot \nabla\Phi)\nabla\Phi - \mathbf{e}(\nabla\Phi)^2] + \varepsilon\mathbf{e} = 0. \quad (1.42)$$

Por último usando (1.39) y que en general  $\mathbf{e}$  no tiene por que ser cero, la anterior se reduce a

$$(\nabla\Phi)^2 = n^2 \quad (1.43)$$

o explícitamente,

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2 = n^2(x, y, z). \quad (1.44)$$

$\Phi$  es definida como la *función iconal* y a la ecuación (1.43) se le conoce como *ecuación iconal*. En esta ecuación queda contenida la información de la propagación de la luz en el modelo geométrico de la óptica, y al igual que el principio de Fermat, constituye una de las formas más elegantes de desarrollar la teoría geométrica de la luz.

## 1.6. Dirección de propagación de la luz y frentes de onda geométricos

En la sección 4 se derivaron los promedios temporales de las densidades de energía eléctrica y magnética, usando (1.34) quedan dadas por

$$\langle w_e \rangle = \frac{\epsilon}{16\pi} \mathbf{e} \cdot \mathbf{e}^* \quad \langle w_m \rangle = \frac{\mu}{16\pi} \mathbf{h} \cdot \mathbf{h}^* \quad (1.45)$$

Y usando (1.37) y (1.38) en la anterior, obtenemos

$$\langle \omega_e \rangle = \frac{1}{16\pi} \nabla\Phi \cdot (\mathbf{e} \times \mathbf{h}^*) = \langle \omega_m \rangle. \quad (1.46)$$

Esto implica que desde el marco geométrico de la óptica, los promedios temporales de las densidades eléctrica y magnética son iguales. Sustituyendo (1.34) en (1.31) se tiene

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{c}{8\pi} \text{Re}(\mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0^*). \quad (1.47)$$

# CAPÍTULO 1. LA ÓPTICA GEOMÉTRICA DESDE LAS ECUACIONES DE MAXWELL

## 1.7. LA LEY DE REFRACCIÓN COMO UN PROBLEMA DE FRONTERA

Donde al usar (1.39) y  $\epsilon\mu = n^2$  el promedio temporal del vector de Poynting se reduce a

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{2c}{n^2} \langle \omega_e \rangle \nabla \Phi = \frac{c}{n^2} \langle \omega \rangle \nabla \Phi \quad (1.48)$$

Donde ( $\langle \omega \rangle = \langle \omega_e \rangle + \langle \omega_m \rangle$ ). De la ecuación anterior podemos sacar dos conclusiones muy fuertes. Para la primera tenemos que recordar que la dirección en la que el campo electromagnético se propaga es en todo momento perpendicular tanto a  $\mathbf{E}$  como a  $\mathbf{B}$ , de modo que esta dirección es la misma que la del vector de Poynting [94–96]. Una consecuencia inmediata es que desde el marco de la óptica geométrica  $\langle \mathbf{S} \rangle$  indica la dirección en que se propaga la luz, que precisamente deben corresponder a líneas en general curvas (debido a los cambios en el índice de refracción en el medio); y a través de la ecuación anterior podemos ver que **la luz se propaga en dirección de  $\nabla \Phi$** , es decir, los rayos se propagan en dirección de  $\nabla \Phi$ . La otra conclusión involucra lo anterior, Dado que el gradiente de una función siempre es perpendicular a las curvas de nivel de dicha función, aquellas superficies que conformen las curvas de nivel de  $\Phi$ , esto es

$$\Phi(\mathbf{r}) = \text{constante} \quad (1.49)$$

**corresponden a los frentes de onda geométricos** (por definición, aquellas superficies perpendiculares al campo vectorial de los rayos de luz). También los frentes de onda son definidos como aquellas superficies formadas por todos los puntos que están al mismo camino óptico (siguiendo el campo vectorial de los rayos), o sea superficies de camino óptico constante. De modo que  $\Phi$  **tiene que ser precisamente, el camino óptico.**

### 1.7. La ley de refracción como un problema de frontera

Ahora veremos cuál es el comportamiento de los rayos cuando pasan abruptamente de un medio óptico homogéneo a otro, en [35] se deja en claro que precisamente quienes plantearon esta forma muy elegante de llegar a las leyes de refracción y de reflexión fueron Sommerfeld y Runge. Al parecer del autor, es la vía más formal por encima del principio de Fermat. Esta forma consiste en utilizar un proceder análogo a cuando se derivan las condiciones relacionadas a los cambios en el campo electromagnético al cruzar una discontinuidad del medio.

Dado que la dirección de propagación de la luz es un vector unitario  $\mathbf{s}$  dado por

$$\mathbf{s} = \frac{\nabla \Phi}{\|\nabla \Phi\|} \quad (1.50)$$

Pero de la ecuación iconal podemos concluir que

$$n\mathbf{s} = \nabla \Phi \quad (1.51)$$

Entonces, de cálculo básico sabemos que

$$\nabla \times n\mathbf{s} = 0 \quad (1.52)$$

Donde al integrar sobre un elemento de área  $A$  con lados  $P_1, Q_1$  y  $P_1, P_2$ , donde la longitud de  $P_1, Q_1$  y  $P_2, Q_2$  es  $\Delta s$ , y la longitud de  $P_1, P_2$  y  $Q_1, Q_2$  es  $\Delta h$ ; como se muestra en la figura 1.1 Aplicando el teorema de Stokes

$$\int_A (\nabla \times n\mathbf{s}) \cdot d\mathbf{S} = \oint n\mathbf{s} \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad (1.53)$$

Tomando el límite cuando  $\Delta h \rightarrow 0$ , donde  $\mathbf{t}, \mathbf{b}$  y  $\eta_{12}$  son los vectores unitarios que conforman la base mostrada en la figura 1.1 (note que  $\eta_{12}$  es el vector normal unitario a la superficie que separa los medios, y donde dicho vector apunta del primer medio al segundo); se obtiene de la anterior

$$(n_1 \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{t}_1 + n_2 \mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{t}_2) \Delta s = 0 \quad (1.54)$$

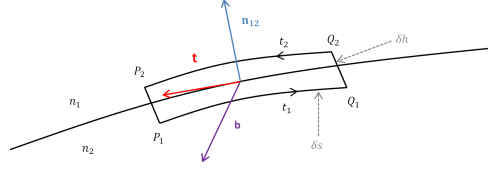


Figura 1.1: Elemento de área A que cruza los medios ópticos.

y sustituyendo

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_1 &= -\mathbf{t} = -\mathbf{b} \times \eta_{12} \\ \mathbf{t}_2 &= \mathbf{t} = \mathbf{b} \times \eta_{12} \end{aligned} \quad (1.55)$$

y usando que  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ , la ecuación (1.54) resulta

$$\mathbf{b} \cdot [\eta_{12} \times (n_2 \mathbf{s}_2 - n_1 \mathbf{s}_1)] = 0 \quad (1.56)$$

y como  $\mathbf{b}$  es un vector unitario diferente de cero es obvio que

$$\eta_{12} \times (n_2 \mathbf{s}_2 - n_1 \mathbf{s}_1) = 0 \quad (1.57)$$

donde al reagrupar términos y usar que  $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \text{Sen} [\text{Ang}\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}]$  encontramos que

$$n_2 \text{sen}\theta_2 = n_1 \text{sen}\theta_1 \quad (1.58)$$

de donde es evidente que  $\theta_1$  es el ángulo entre el rayo incidente y la normal a la superficie,  $\theta_2$  es aquel entre el rayo refractado y la normal.

## 1.8. Caustic-Touching theorem

Sea un objeto unidimensional  $L$  (figura 1.2a) perteneciente a una superficie (el espacio objeto) con coordenadas  $\Omega = (\Omega_1, \Omega_2)$  y sea  $L$  dada por

$$L(\Omega) = 0 \quad (\text{Objeto}) \quad (1.59)$$

La imagen formada por deflexión de la luz será una curva  $R$  (figura 1.2b) perteneciente al espacio (imagen) con coordenadas  $\omega = (\omega_1, \omega_2)$  que etiquetan las direcciones de los rayos entrando en el ojo. Así la formación de la imagen es un mapeo entre  $\omega$  y  $\Omega$ . Para cada punto "objeto" hay varios rayos alcanzando el ojo. Pero el rayo dejando el ojo en dirección  $\omega$  llega a un único punto  $\Omega$ ; por consiguiente estos rayos pueden ser representados por la función univaluada

$$\Omega = \Omega(\omega) \quad (\text{rayos}) \quad (1.60)$$

La ecuación de la imagen  $R$  es obtenida al sustituir (1.60) en (1.59)

$$L[\Omega(\omega)] = R(\omega) = 0 \quad (\text{imagen}) \quad (1.61)$$

La topología de  $R$  cambia cuando un punto estacionario de la función  $R(\omega)$  se mueve al contorno cero - Ecuación (1.61) -. Cuando tal evento ocurre

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial \omega_1} &= \frac{\partial L}{\partial \Omega_1} \frac{\partial \Omega_1}{\partial \omega_1} + \frac{\partial L}{\partial \Omega_2} \frac{\partial \Omega_2}{\partial \omega_1} = 0, \\ \frac{\partial R}{\partial \omega_2} &= \frac{\partial L}{\partial \Omega_1} \frac{\partial \Omega_1}{\partial \omega_2} + \frac{\partial L}{\partial \Omega_2} \frac{\partial \Omega_2}{\partial \omega_2} = 0 \end{aligned} \quad (1.62)$$

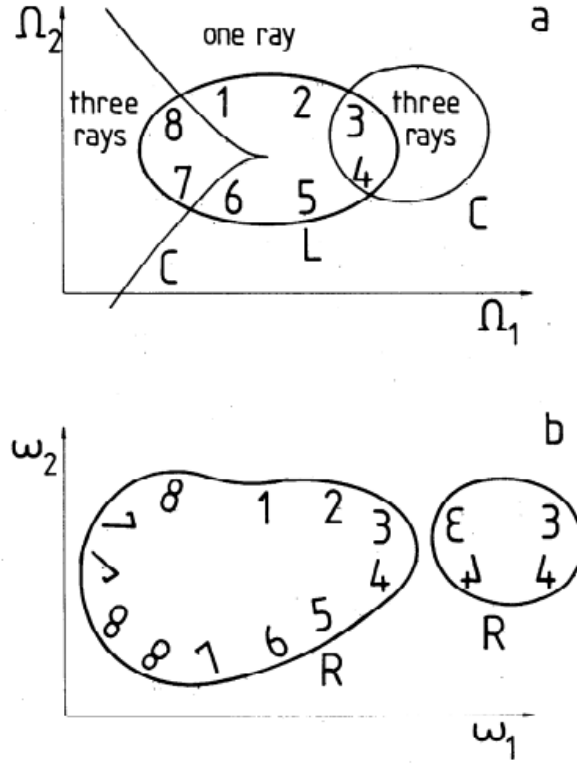


Figura 1.2: (a) Espacio objeto. (b) Espacio imagen.

lo que puede ser escrito como

$$\frac{\partial\Omega_1/\partial\omega_1}{\partial\Omega_2/\partial\omega_1} = \frac{\partial\Omega_1/\partial\omega_2}{\partial\Omega_2/\partial\omega_2} = -\frac{\partial L/\partial\Omega_2}{\partial L/\partial\Omega_1} \quad (1.63)$$

La primera de las ecuaciones impone la desaparición del jacobiano del mapeo desde  $\omega$  a  $\Omega$ , esto es

$$\frac{\partial(\Omega_1, \Omega_2)}{\partial(\omega_1, \omega_2)} = 0 \quad (\text{caustica}) \quad (1.64)$$

Pero esta es también una condición para el enfocamiento de los rayos - Ecuación (1.61) - , esto es, para  $\Omega$  perteneciente a la *caústica* de los rayos partiendo del ojo: en el espacio  $\Omega$  esto es una curva  $C$  (figura 1.2a), a la cual podemos llamar *caústica del ojo*.

Por lo tanto la ecuación de cambio de topología - ecuación (1.63) - implica un “encuentro” entre  $C$  y  $L$ . Más allá, esto implica que  $C$  “tocó” a  $L$ . Para mostrar esto primero observemos que la dirección de  $L$  en  $\Omega$  es, de la ecuación (1.59)

$$\frac{d\Omega_2}{d\Omega_1} = -\frac{\partial L/\partial\Omega_1}{\partial L/\partial\Omega_2} \quad (1.65)$$

**CAPÍTULO 1. LA ÓPTICA GEOMÉTRICA DESDE LAS ECUACIONES DE  
MAXWELL**

1.8. CAUSTIC-TOUCHING THEOREM

La dirección de  $C$  en  $\Omega$  es encontrada desde la ecuación (1.60)

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega_2}{d\Omega_1} &= \frac{(\partial\Omega_2/\partial\omega_1)d\omega_1 + (\partial\Omega_2/\partial\omega_2)d\omega_2}{(\partial\Omega_1/\partial\omega_1)d\omega_1 + (\partial\Omega_1/\partial\omega_2)d\omega_2} \\ &= \frac{\partial\Omega_2/\partial\omega_1}{\partial\Omega_1/\partial\omega_1} \left( \frac{1 + (d\omega_2/d\omega_1) [(\partial\Omega_2/\partial\omega_2)/(\partial\Omega_2/\partial\omega_1)]}{1 + (d\omega_2/d\omega_1) [(\partial\Omega_1/\partial\omega_2)/(\partial\Omega_1/\partial\omega_1)]} \right) \\ &= \frac{\partial\Omega_2/\partial\omega_1}{\partial\Omega_1/\partial\omega_1} \end{aligned} \tag{1.66}$$

donde esta última ecuación viene de la ecuación (1.64). Note que en  $C$  la dirección de desplazamiento  $d\Omega$  es independiente de  $d\omega$ , porque una región dos dimensional infinitesimal en  $\omega$  es enfocada sobre una línea en  $\Omega$ .

Ahora la ecuación que resulta del primer y tercer miembro de (1.63) muestra que (1.66) y (1.65) son lo mismo, así que el cambio de topología de  $R$  implica que  $C$  y  $L$  son paralelos en su “encuentro”, esto es, ellos se “tocaron”. Esto es el caustic-touching theorem.

Para entender mejor el teorema, fijémonos que  $C$  separa regiones del espacio  $\Omega$  de acuerdo al número de rayos que alcanzan éstas emergiendo desde el ojo, cruzando  $C$  podemos ver que típicamente el número de rayos cambia en  $\pm 2$ . Si la línea objeto  $L$  cruza  $C$ , segmentos en cada lado son mapeados diferente número de veces en la imagen  $R$ . Por ejemplo en la figura 1.2a se muestra que una cáustica dividiendo  $\Omega$  en dos regiones de tres rayos y una de un solo rayo, y un objeto  $L$  cuyos puntos son etiquetados del 1 al 8 intersectando  $C$ ; en la imagen  $R$  (figura 1.2b) cada uno de los puntos de un rayo 1, 2, 5, 6 es mapeado a una sola imagen, y cada uno de los puntos de tres rayos 3, 4, 7, 8 es mapeado a una imagen tres veces. Una de las imágenes de la vecindad de cada punto siendo invertida.

Sea un objeto puntual en la vecindad de la línea  $C$  etiquetado como “dentro” o “fuera” si éste es alcanzado por un número más grande o menor de rayos, respectivamente. Ésta es la base para distinguir dos formas en las que la topología de la imagen puede cambiar, las cuales corresponden al punto estacionario de  $R(\omega)$  siendo un extremo (contorno local elíptico) o un punto de inflexión (contorno local hiperbólico). En el caso elíptico,  $L$  toca a  $C$  desde afuera, y el cambio de topología consiste en el nacimiento (o aniquilación) de una nueva curva cerrada como imagen, emergiendo desde un punto aislado, como se ilustra en la figura 1.3(I). En el caso hiperbólico,  $L$  toca a  $C$  desde adentro, y el cambio de topología consiste en la desconexión (o fusión) de dos regiones finitas de la imagen en una auto-intersección de  $R$ , como se ilustra en la figura 1.3(II).

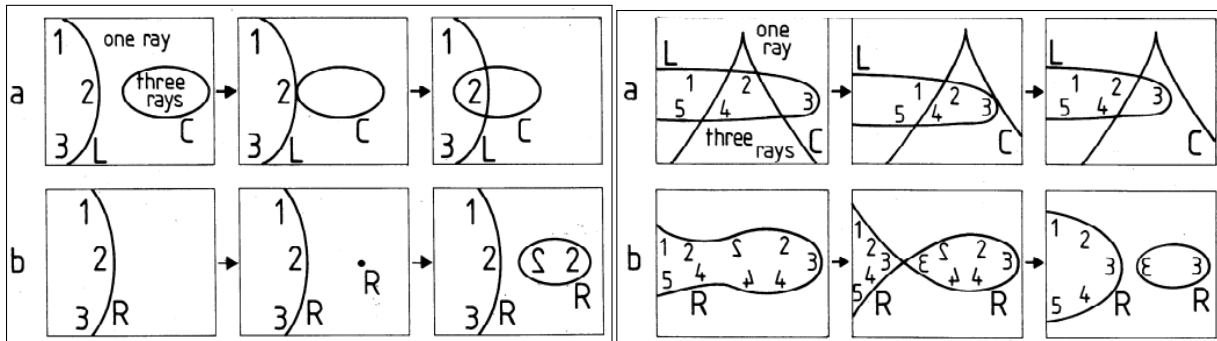


Figura 1.3: (I) Generación de una curva cerrada desde un punto aislado. (II) Generación de una curva cerrada desde una singularidad.

Las múltiples imágenes que aparecen de un objeto extendido difieren en forma importante de como

aparecen las de objetos infinitesimales; el número de imágenes tiene que ser par. Esto queda ilustrado en la figura 1.2*b* aunque cada punto de  $L$  es mapeado una o tres veces, la curva  $L$  tiene dos curvas imagen  $R$ . Números pares de curvas imagen aparecen cuando  $L$  entra en contacto a “horcajadas” con un segmento “suave” de la cáustica  $C$ , como se ve en el lado derecho de la figura 1.2*a*. Por supuesto, una de las dos imágenes consiste de dos subimágenes de sólo parte del objeto (etiquetado como 3 y 4 en la figura 1.2) yuxtapuestas y de opuesta paridad, aunque este hecho no es notorio cuando el objeto no tiene rasgos característicos como el disco solar o un quasar de pobre resolución.

El caustic-touching theorem implica que no cada encuentro entre  $C$  y  $L$  causa que la topología de  $R$  cambie. En la figura 1.2*a*, por ejemplo, el segmento del objeto etiquetado 6781 intersecta dos veces a  $C$ , pero su imagen en la figura 1.2*b* es la línea sola 678877781; si la parte cúspide de  $C$  fuera movida a al izquierda de modo que ya no intersectara a  $L$ , la imagen 6781 continuaría siendo una línea porque nunca hubo “tocamiento” (sólo un “pellizco”). En efecto, en la curva imagen de un objeto que no tiene rasgos distintivos, no hay rasgos distintivos acerca de aquellos puntos correspondientes a intersecciones de  $L$  con  $C$ ; por ejemplo, la curva cerrada  $R$  en el lado derecho de la figura 1.2*b* es perfectamente suave en los dos puntos (entre los dos 3 y entre los dos 4) que corresponden al extremo final del segmento de línea (34 en la figura 1.2*a*) cuya imagen es la curva cerrada.

## 1.9. Planteamiento del problema

Teniendo un sistema físico descrito por dos medios ópticos homogéneos con índices de refracción constantes  $n_0$  y  $n_1$  respectivamente, y separados por una interfaz (una superficie suave localmente) dada por  $z = f(x, y)$ . En el medio óptico con índice  $n_0$  nosotros colocamos una fuente de luz puntual caracterizando su posición por el vector  $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$ ; el rayo de luz emitido por dicha fuente en la dirección y refractado en  $\mathbf{r} = (x, y, f(x, y))$  queda descrito por:

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{r} + \mu \hat{R}_0, \quad (1.67)$$

donde  $\mu$  es la distancia a lo largo del rayo de luz refractado, es decir; es un parámetro que caracteriza puntos sobre el rayo de luz.  $\hat{R}_0$  indica la dirección de refracción en la superficie y está dado por la ley de refracción en forma vectorial por:

$$\hat{R}_0 = \gamma_0 \hat{I} + \Omega_0 \hat{N}_0, \quad (1.68)$$

con  $\hat{N}_0$  el vector normal a la superficie  $z = f(x, y)$  y:

$$\gamma_0 \equiv \frac{n_0}{n_1}, \quad (1.69)$$

$$\Omega_0 \equiv -\gamma_0 (\hat{I} \cdot \hat{N}_0) - \sqrt{1 - \gamma_0^2 [1 - (\hat{I} \cdot \hat{N}_0)^2]}. \quad (1.70)$$

Para obtener una expresión explícita para  $\hat{R}$  se necesita calcular tanto  $\hat{I}$  como  $\hat{N}_0$ , de la figura 1.4:

$$\hat{I} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{s}}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|}. \quad (1.71)$$

Para obtener un campo vectorial perpendicular a la superficie refractante nosotros definiremos la función:

$$G(x, y, z) = f(x, y) - z, \quad (1.72)$$

Esta función tiene la particularidad de que una superficie de nivel de la misma es precisamente la parametrización de la superficie refractante, esto es;  $z = f(x, y)$  y por consiguiente el campo vectorial

que buscamos estaría dado por  $\vec{N}_0 = \nabla G$ , o de otro modo:

$$\hat{N}_0 = \frac{\nabla G}{|\nabla G|} \quad (1.73)$$

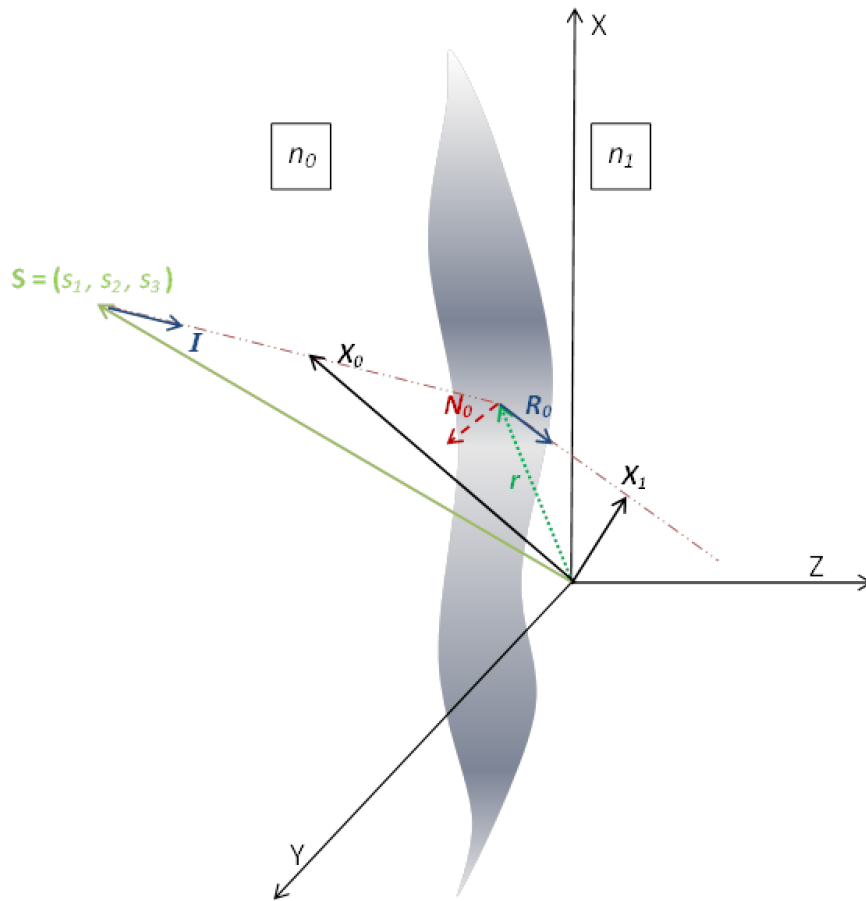


Figura 1.4: sistema óptico para una refracción.

Extendiendo los resultados de este sistema físico al problema que se abordará en este trabajo, que consiste en un sistema óptico donde se tienen tres medios ópticos con diferentes índices de refracción y separados entre sí por dos interfaces suaves arbitrarias. En este sistema resulta evidente que habrá una refracción por cada superficie, la figura 2.17 es la representación gráfica de dicho sistema:

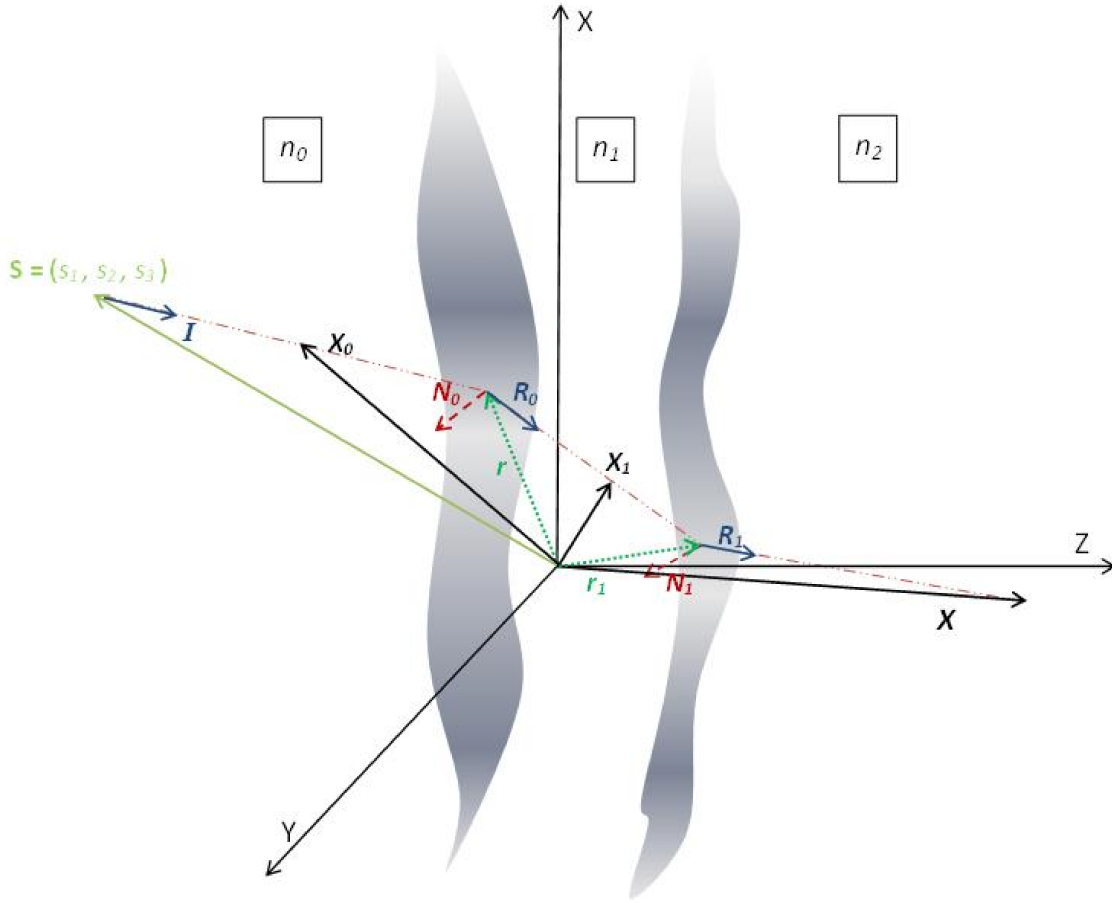


Figura 1.5: sistema óptico para dos refracciones.

Los puntos que etiquetarían la evolución de los rayos de luz en los tres medios ópticos respectivamente, estarán descritos por las ecuaciones:

$$\mathbf{X}_0 = \mathbf{s} + \eta \hat{I}, \quad (1.74)$$

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{r} + \mu \hat{R}_0, \quad (1.75)$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{r}_1 + l \hat{R}_1. \quad (1.76)$$

donde  $\eta$  etiqueta puntos sobre el rayo emitido en el medio con índice de refracción  $n_0$ ; análogamente  $l$  etiqueta puntos sobre el rayo refractado en el medio con índice de refracción  $n_2$ .

Resulta evidente que al pasar del segundo al tercer medio óptico, el vector  $\hat{R}_0$  jugará el papel del rayo incidente.

## 1.10. Función k

La función característica,  $\Phi(\mathbf{X}) = \Phi(X, Y, Z)$ , representa el camino óptico desde un cierto punto en el espacio objeto hasta el punto en el espacio de la imagen cuyas coordenadas son  $X, Y$  y  $Z$ . Esto es:

$$\Phi = n_0(\mathbf{r} - \mathbf{s}) \cdot \hat{I} + n_1(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}) \cdot \hat{R}_0 + n_2(\mathbf{X} - \mathbf{r}_1) \cdot \hat{R}_1, \quad (1.77)$$

y la podemos reescribir de la siguiente forma:

$$\Phi = n_2 \mathbf{X} \cdot \hat{R}_1 + k, \quad (1.78)$$

donde  $k$  es la función que estamos buscando y está dada por:

$$k(\mathbf{s}, x, y) \equiv n_0 |\mathbf{r} - \mathbf{s}| + n_1 |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}| - n_2 \mathbf{r}_1 \cdot \hat{R}_1. \quad (1.79)$$

La función  $k$  depende de los medios, caracterizados por los índices de refracción correspondientes, la posición de la fuente de luz puntual,  $\mathbf{s}$ , y la forma de la superficie refractante, pero como en nuestro sistema óptico hay dos refracciones, depende de cada una de ellas  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{r}_1$  respectivamente. Es necesario puntualizar que la función  $k$  engloba toda la información del sistema óptico que no está en dependencia de las coordenadas que etiquetan a los puntos en el medio con índice de refracción  $n_2$ .

Para finalizar esta sección remarcaremos el significado físico de la función  $k$ , el primer término que aparece  $n_0 |\mathbf{r} - \mathbf{s}|$ , corresponde al camino óptico desde la posición de la fuente puntual  $\mathbf{s}$  al punto donde se da la primera refracción  $\mathbf{r}$  (es decir, en la primera superficie), el segundo término  $n_1 |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}|$  corresponde al camino óptico desde donde se dio la primera refracción hasta el punto en la segunda superficie donde tiene lugar la segunda refracción, y el tercer término  $n_2 \mathbf{r}_1 \cdot \hat{R}_1$  es el camino óptico desde el punto de la segunda refracción hasta un punto  $P$  en el tercer medio óptico, este punto está colocado precisamente sobre el rayo refractado y está contenido también en un plano normal a la dirección de dicho rayo, este plano tiene la peculiaridad de contener también al origen del sistema de coordenadas. Por último, el término  $n_2 \mathbf{X} \cdot \hat{R}_1$  en (1.78) denota el camino óptico desde ese punto  $P$  hasta el punto  $\mathbf{X}$  en el cual la iconal  $\Phi$  es evaluada.

## 1.11. Frentes de onda

En general los frentes de onda además de la interpretación que se manejará a continuación, relacionándolos con  $\Phi$ , se pueden entender como un mapeo entre dos subconjuntos de  $R^3$ , uno con coordenadas  $(x, y, \tau)$  en el dominio, y el otro en la imagen caracterizado por  $(X, Y, Z)$ .

Empezaremos haciendo notar que la familia de frentes de onda asociados con la integral completa de la ecuación iconal, dada en (1.78) es:

$$n_2 \mathbf{X} \cdot \hat{R}_1 + k = \tau, \quad (1.80)$$

donde  $\tau$  es una constante real.

Por definición, la envolvente de esta familia de frentes de onda está dada por todos los puntos  $\mathbf{X}$  tales que satisfacen estas dos condiciones:

$$n_2 \mathbf{X} \cdot \hat{R}_{1x} + k_x = 0 \quad (1.81)$$

$$n_2 \mathbf{X} \cdot \hat{R}_{1y} + k_y = 0 \quad (1.82)$$

donde  $\hat{R}_{1x}$ ,  $k_x$  y  $\hat{R}_{1y}$ ,  $k_y$  denota las derivadas parciales de  $\hat{R}_1$  y  $k$  con respecto a  $x$  y  $y$  respectivamente.

Los puntos que satisfacen las ecuaciones (1.81) y (1.82) están descritos por:

$$\mathbf{X} = \mathbf{r}_1 + \left[ \frac{\tau}{n_2} - \frac{n_0}{n_2} |\mathbf{r} - \mathbf{s}| - \frac{n_1}{n_2} |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}| \right] \hat{R}_1 \quad (1.83)$$

como se demuestra en el apéndice A.

Es importante enfatizar el significado geométrico de la envolvente de la familia de frentes dada por (1.80) que acabamos de calcular, obsérvese que para valores fijos de  $x$  y  $y$  dicha ecuación describe una familia *uniparamétrica* de frentes de onda planos, cuyo vector normal está dado por  $\hat{R}_1$ , donde cada plano de dicha familia está caracterizado por un valor de  $\tau$ . Eso implica que en cada punto del medio óptico caracterizado por  $n_2$  pasan tantos planos como diferentes valores pueden tomar  $x$  y  $y$ .

Remarcamos que el frente de onda asociado con los rayos de luz refractados y caracterizado por  $\tau = \tau_0$  con  $\tau_0$  dada, es la envolvente de esta familia de frentes de onda planos.

Utilizando los argumentos anteriores, de (1.81) y (1.82), y como  $\hat{R}_1 \cdot \hat{R}_{1x} = 0$ ,  $\hat{R}_1 \cdot \hat{R}_{1y} = 0$ ; concluimos que para valores fijos de  $x$  y  $y$ , el correspondiente punto del frente de onda  $\tau = \tau_0$  está dado por la intersección de tres planos mutuamente ortogonales.

Es importante resaltar que la familia de frentes de onda descritos por (1.83), son aquellos asociados con la integral general de la ecuación iconal, dicha solución puede obtenerse resolviendo para  $x$  y  $y$  de (1.81) y (1.82) en función de las coordenadas de  $\mathbf{X}$  y sustituyéndolas en (1.83).

## 1.12. Superficie cáustica

De manera completamente general, siendo  $h: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  un mapeo diferenciable, con  $\mathcal{M}$  y  $\mathcal{N}$  variedades diferenciables, el conjunto de puntos en  $\mathcal{M}$  donde  $h$  no es localmente uno a uno es definido como el conjunto crítico de dicho mapeo, y la imagen del conjunto crítico define el conjunto cáustico de  $h$ .

De acuerdo con la definición anterior, el conjunto crítico del mapeo dado por la Ec.(1.83), es decir, el conjunto de puntos en el espacio dominio con coordenadas  $(x, y, \tau)$  tal que el mapeo no es localmente uno a uno, se obtiene de la siguiente condición:

$$J(x, y, \tau) = \det \left( \frac{\partial(X, Y, Z)}{\partial(x, y, \tau)} \right) = \left( \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x} \right) \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial y} \times \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \tau} \right) = 0. \quad (1.84)$$

Aunque ya lo mencionamos, físicamente la superficie cáustica será una región en el espacio donde los frentes de onda refractados sean singulares, o equivalentemente; dada una familia de rayos de luz en un medio óptico, la cáustica asociada con esta familia está dada por la envolvente de tal familia de rayos; es decir, la cáustica corresponde a las regiones formadas por todos los puntos focales. Otra forma de verlos es ésta: si consideráramos un “haz” de rayos de luz refractados (un conjunto de ellos muy cercanos y no paralelos entre si), la condición (1.84) determina las regiones donde el área de las secciones transversales de esos haces es cero.

## Capítulo 2

# Imágenes en una lente plano-parabólica

### 2.1. Planteamiento del problema

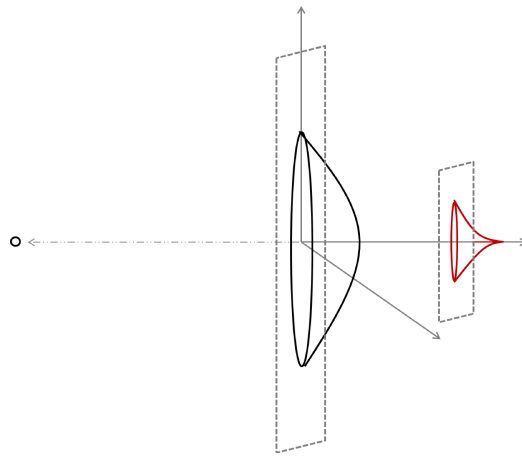


Figura 2.1: Sistema óptico bajo estudio.

Desde la introducción hemos dejado claro que el objetivo del trabajo es analizar el proceso de formación de imágenes múltiples en el proceso de refracción. Como en cualquier tema de investigación, por cuestiones de tiempo y no de interés, se ve el investigador en la necesidad de acotar el tema y evidentemente de abordarlo desde sus ramificaciones más sencillas. Así, una vez que desarrollamos en el capítulo anterior el método general para refracciones múltiples, no queda más que meterle números para poder analizar la estructura de la imagen, y a continuación corroborar (cuando es posible) los resultados que nuestro modelo arroje con lo conocido en la literatura. Expuesto lo anterior presentamos en la figura 2.1 el sistema óptico que decidimos estudiar. Más adelante demostraremos que nuestro método nos permite de forma directa, estudiar las pruebas ópticas relacionadas con los planos mostrados en la figura 2.1; cuando el plano objeto se encuentra en el plano de la derecha y el plano de detección en el de la izquierda, y también cuando el plano objeto se encuentra en el plano de la derecha y el plano de detección en el de la izquierda.

**CAPÍTULO 2. IMÁGENES EN UNALENTE PLANO-PARABÓLICA**  
2.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

---

Este sistema óptico consiste en colocar la fuente puntual en una posición negativa sobre el eje  $Z$  de nuestro sistema de referencia, es decir;  $\mathbf{s} = (0, 0, s_3)$ . Como parte de los objetivos, estaba el analizar un sistema óptico que permitiera tanto la verificación experimental, como la aplicación futura de los resultados, por tanto se analizó el caso de una lente real de forma plano-parabólica hecha de vidrio e inmersa en el vacío (recordando que el aire tiene un índice de refracción muy cercano al índice del vacío), que fue colocada haciendo coincidir su eje óptico con el eje  $Z$ , y la superficie plana con el plano  $XY$ .

Siguiendo con la notación del capítulo anterior

$$\hat{N}_0 = -\hat{k}, \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \hat{I} &= \frac{\mathbf{r} - \mathbf{s}}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|} \\ &= \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + s_3^2}} \right) \hat{i} + \left( \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + s_3^2}} \right) \hat{j} - \left( \frac{s_3}{\sqrt{x^2 + y^2 + s_3^2}} \right) \hat{k} \\ &= \left( \frac{\rho \cos \phi}{\sqrt{\rho^2 + s_3^2}} \right) \hat{i} + \left( \frac{\rho \sin \phi}{\sqrt{\rho^2 + s_3^2}} \right) \hat{j} - \left( \frac{s_3}{\sqrt{\rho^2 + s_3^2}} \right) \hat{k}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

La dirección del rayo refractado está dada por  $\hat{R}_0$ , el cual se obtiene mediante la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \hat{R}_0 &= \gamma_0 \hat{I} + \Omega_0 \hat{N} \\ &= \frac{\rho \cos \phi \gamma_0}{\sqrt{\rho^2 + s_3^2}} \hat{i} + \frac{\rho \sin \phi \gamma_0}{\sqrt{\rho^2 + s_3^2}} \hat{j} + \frac{\epsilon}{\sqrt{\rho^2 + s_3^2}} \hat{k}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

donde

$$\Omega_0 = -\frac{s_3 \gamma_0 + \epsilon}{\sqrt{\rho^2 + s_3^2}}, \quad (2.4)$$

$$\gamma_0 = \frac{n_0}{n_1} \quad (2.5)$$

$$\epsilon = \sqrt{\rho^2(1 - \gamma_0^2) + s_3^2}. \quad (2.6)$$

Siguiendo la misma idea se obtendría el caso para dos refracciones, en donde el vector que indica la posición de la segunda refracción es calculado mediante una parametrización en coordenadas polares. La expresión de  $\mathbf{r}_1$  en términos de  $u$  y  $v$  es

$$\mathbf{r}_1 = u\hat{i} + v\hat{j} + \left( b - \frac{u^2 + v^2}{2a} \right) \hat{k}. \quad (2.7)$$

**CAPÍTULO 2. IMÁGENES EN UNALENTE PLANO-PARABÓLICA**  
2.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

---

donde  $b$  es la altura de la lente y  $a$  el radio de curvatura del paraboloide medido en el vértice. Ahora ya podemos hacer el cálculo para la segunda refracción. La dirección del rayo refractado en la primera refracción será tomada como la dirección del rayo incidente para la segunda refracción, es decir  $\hat{R}_1 = \hat{I}$ .

El vector unitario normal ahora es calculado como

$$\hat{N}_1 = \frac{\nabla G}{|\nabla G|}, \quad (2.8)$$

donde  $G$  representa una función que en cierta superficie de nivel coincide con la superficie de refracción, en este caso

$$G = b - \frac{u^2 + v^2}{2a} - z, \quad (2.9)$$

Así

$$\Rightarrow \hat{N}_1 = - \left( \frac{\Theta \cos(\phi)}{\sqrt{a^2 + \Theta^2}} \right) \hat{i} - \left( \frac{\Theta \sin(\phi)}{\sqrt{a^2 + \Theta^2}} \right) \hat{j} - \left( \frac{a}{\sqrt{a^2 + \Theta^2}} \right) \hat{k}. \quad (2.10)$$

la dirección del rayo refractado cuando ocurre la segunda refracción es

$$\begin{aligned} \hat{R}_1 = & \left( \frac{\cos \phi [a^2 \rho \gamma_0 \gamma_1 - \Theta(a \epsilon \gamma_1 - \mu)]}{(a^2 + \Theta^2) \sqrt{\rho^2 + s_3^2}} \right) \hat{i} \\ & + \left( \frac{\sin \phi [a^2 \rho \gamma_0 \gamma_1 - \Theta(a \epsilon \gamma_1 - \mu)]}{(a^2 + \Theta^2) \sqrt{\rho^2 + s_3^2}} \right) \hat{j} \\ & + \left( \frac{a(\mu - \Theta \rho \gamma_0 \gamma_1) + \Theta^2 \epsilon \gamma_1}{(a^2 + \Theta^2) \sqrt{\rho^2 + s_3^2}} \right) \hat{k}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

es decir

$$\hat{R}_1 = g(\Theta, \rho) \cos \phi \hat{i} + g(\Theta, \rho) \sin \phi \hat{j} + j(\Theta, \rho) \hat{k}, \quad (2.12)$$

donde

$$\mu = \sqrt{\rho(\rho(a^2 + \Theta^2) + \gamma_1^2(\gamma_0^2 \rho(\Theta^2 - a^2) + 2a\gamma_0\Theta\epsilon - \Theta^2\rho)) + s_3^2(\Theta^2(1 - \gamma_1^2) + a^2)}, \quad (2.13)$$

$$\gamma_1 = \frac{n_1}{n_2}. \quad (2.14)$$

Mediante la Ec.(1.76), encontramos que el rayo de luz refractado (después de la segunda refracción) debido a la simetría puede ser escrito como

$$\mathbf{X} = \Gamma(\rho, l) \hat{\rho} + \mathcal{U}(\rho, l) \hat{k}, \quad (2.15)$$

donde

$$\Gamma(\rho, l) = \Theta(\rho) + g(\Theta, \rho)l, \quad (2.16)$$

$$\mathcal{U}(\rho, l) = h(\Theta) + j(\Theta, \rho)l. \quad (2.17)$$

$g(\Theta, \rho), j(\Theta, \rho)$  dadas por (2.12) y  $h(\Theta), \Theta(\rho)$  determinadas en el apéndice B.

## 2.2. Función $k$

Como se menciona en la subsección 2.4.2, la función  $k$ , estaría dada por la Ec.(1.79), quedando en términos de  $\mathbf{s}, \mathbf{r}, \mathbf{r}_1$  y  $\hat{R}_1$ , sustituyendo las expresiones se obtiene.

$$k(\mathbf{s}, x, y) \equiv n_0 \sqrt{\rho^2 + s_3^2} + n_1 \sqrt{(\Theta - \rho)^2 + \left(b - \frac{\Theta^2}{2a}\right)^2} - n_2 \mathbf{r}_1 \cdot \hat{R}_1.$$

## 2.3. Frentes de onda

Los frentes de onda refractados, se obtienen utilizando las ecuaciones (2.12), (2.6) y (2.13), están dados por

$$\mathbf{X} = \mathbf{r}_1 + \left[ \frac{\tau}{n_2} - \frac{n_0}{n_2} \sqrt{\rho^2 + s_3^2} - \frac{n_1}{n_2} \sqrt{(\Theta - \rho)^2 + \left(b - \frac{\Theta^2}{2a}\right)^2} \right] \hat{R}_1.$$

## 2.4. Conjuntos crítico y cáustico

Empleando la definición de conjunto crítico, comenzaremos por calcular el Jacobiano, para lo cual utilizaremos la Ec.(2.15), esto es

$$\begin{aligned} J &= \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \rho} \cdot \left[ \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \phi} \times \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial l} \right] \\ &= \left[ \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial \rho} \cos \phi \right) \hat{i} + \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial \rho} \sin \phi \right) \hat{j} + \left( \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \rho} \right) \hat{k} \right] \cdot \left[ \left( \Gamma \cos \phi \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial l} \right) \hat{i} + \left( \Gamma \sin \phi \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial l} \right) \hat{j} + \left( \Gamma \frac{\partial \Gamma}{\partial l} \right) \hat{k} \right] \\ &= \Gamma \frac{\partial \Gamma}{\partial \rho} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial l} - \Gamma \frac{\partial \Gamma}{\partial l} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \rho} \\ &= \Gamma \left[ \frac{\partial \Gamma}{\partial \rho} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial l} - \frac{\partial \Gamma}{\partial l} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \rho} \right] \\ \therefore \Gamma \left[ \frac{\partial \Gamma}{\partial \rho} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial l} - \frac{\partial \Gamma}{\partial l} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \rho} \right] &= 0. \end{aligned} \quad (2.18)$$

**CAPÍTULO 2. IMÁGENES EN UNALENTE PLANO-PARABÓLICA**  
**2.5. ECUACIONES PARA LA REJILLA NULA DE RONCHI Y DE RONCHI**  
**(SUBESTRUCTURADA)**

---

Tomando la primera de las soluciones,  $\Gamma = 0$ , se encuentra la primera rama del conjunto crítico

$$l_1 = -\frac{\Theta(a^2 + \Theta^2)\sqrt{\rho^2 + s_3^2}}{a^2\rho\gamma_0\gamma_1 + (\mu - a\epsilon\gamma_1)}, \quad (2.19)$$

que junto con la ecuación (1.76) genera la primera rama del conjunto cáustico, que corresponde a una rama de tipo “aguja” (note que es un objeto unidimensional, por eso lleva el nombre “needle” en inglés, ver figura 2.7)

$$\mathbf{X}_1 = \left( b - \frac{\Theta^2}{2a} - \frac{\Theta(a^2 + \Theta^2)\sqrt{\rho^2 + s_3^2}}{a^2\rho\gamma_0\gamma_1 + (\mu - a\epsilon\gamma_1)} \right) \hat{k}. \quad (2.20)$$

Para determinar la otra parte del conjunto crítico se empleó tanto (2.18) como (2.16), y (2.17), al resultar muy larga la expresión únicamente se dejará indicada, quedando entendido que al sustituir  $\Theta$  y realizar las derivadas correspondientes se encuentra la expresión completa

$$l_2 = \frac{g(\Theta, \rho) \frac{dh(\Theta)}{d\rho} - j(\Theta, \rho) \frac{d\Theta}{d\rho}}{j(\Theta, \rho) \frac{dg(\Theta, \rho)}{d\rho} - g(\Theta, \rho) \frac{dj(\Theta, \rho)}{d\rho}}, \quad (2.21)$$

y la expresión de la segunda rama del conjunto cáustico al sustituir la anterior en (1.76). Ésta genera una rama de tipo “cúspide girada” (“spun cusp”, ver figura 2.7).

## 2.5. Ecuaciones para la rejilla nula de Ronchi y de Ronchi (subestructurada)

En nuestro caso particular, necesitamos determinar el mapeo entre puntos en la superficie plana de la lente (la primera interface) y puntos en un segundo plano colocado en el tercer medio óptico; esto es, después de la segunda interface. Para ello es necesario entender la correspondencia entre un punto en la superficie plana de la lente y sus imágenes en un plano de observación (caracterizado por un valor constante  $z_0$ ). Para este propósito en lugar de  $l$  nosotros usamos una nueva parametrización en (1.76) en términos de  $z_0$ ,

$$\begin{aligned} X(x, y, z_0) &= u(x, y) + [z_0 - g(u(x, y), v(x, y))] \left( \frac{\hat{\mathbf{R}}_2 \cdot \hat{x}}{\hat{\mathbf{R}}_2 \cdot \hat{z}} \right), \\ Y(x, y, z_0) &= v(x, y) + [z_0 - g(u(x, y), v(x, y))] \left( \frac{\hat{\mathbf{R}}_2 \cdot \hat{y}}{\hat{\mathbf{R}}_2 \cdot \hat{z}} \right), \\ Z(x, y, z_0) &= z_0. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Este conjunto de ecuaciones describe la representación paramétrica de un mapeo entre dos subconjuntos de  $\mathcal{R}^3$ , donde  $(x, y, z_0)$  son las coordenadas etiquetando los puntos en el espacio dominio y  $(X, Y, Z)$  son las coordenadas locales en el espacio codominio. Equivalentemente las ecuaciones (2.22), pueden ser vistas como una familia uniparamétrica de mapeos entre subconjuntos de  $\mathcal{R}^2$ , donde cada mapeo está caracterizado por un valor particular de  $z_0$ , mapea los puntos  $(x, y, 0)$  en el plano  $z = 0$  a puntos en el plano  $z = z_0$ .

Para calcular la rejilla nula de Ronchi, en el plano  $z = z_0$  introducimos un nuevo sistema coordenado  $(T_x, T_y, z_0)$  con  $T_x$  paralelo al eje  $x$  y  $T_y$  paralelo al eje  $y$ . Así que una franja de la rejilla estaría dada por

$$\begin{aligned}
 T_x &= T_y \tan \Lambda + n, \\
 T_y &= T_y, \\
 T_z &= z_0,
 \end{aligned}
 \tag{2.23}$$

Donde  $n = \pm 1, \pm 2, \dots$  y  $\Lambda$  es el ángulo entre las franjas y el eje  $T_y$  positivo. Esto es; en este caso suponemos que conocemos el ronchigrama, es cual es un arreglo de líneas rectas paralelas y nosotros queremos obtener la rejilla que debe ser colocada en el plano  $z = 0$ . La rejilla con esta propiedad como ya dijimos es conocida como rejilla nula de Ronchi. **Note que en realidad cada  $n$  etiqueta un alambre, es decir, construimos la rejilla mapeando cada alambre**

De esta forma nosotros empezamos con una franja Eq. (2.23) caracterizada por un valor dado de  $n$ , entonces seleccionamos un punto en esta franja y nos fijamos en el conjunto de puntos en el plano  $z = 0$  tales que estos puntos y el punto en la franja son conectados a través de un rayo refractado. Haciendo esto para cada punto en la franja obtenemos las franjas curvas de la rejilla nula de Ronchi asociadas con la franja elegida del ronchigrama. Usando las ecuaciones (2.22) y (2.23) encontramos todos los puntos en el plano  $z = 0$  que están conectados vía un rayo refractado con los puntos en la franja dada por Ec. (2.23) localizada en el plano  $z = z_0$ , y están dados por  $(x, y, 0)$ , donde  $x$  y  $y$  son soluciones para

$$Y(x, y, s_3, \gamma_0, \gamma_1) = X(x, y, s_3, \gamma_0, \gamma_1) \tan \Lambda + n, \tag{2.24}$$

con las restricciones  $x_{min} \leq x \leq x_{max}$  y  $y_{min} \leq y \leq y_{max}$ , las cuales están determinadas por la pupila de entrada. (Donde nosotros suponemos que: las superficies refractantes y las franjas son conocidas, entonces en esta ecuación las variables desconocidas son  $x$  y  $y$ .)

## 2.6. Resultados numéricos

Una vez encontradas las ecuaciones que describen al sistema físico, el análisis numérico se elaboró tomando los siguientes valores para cada parámetro; como ya se explicó  $n_0 = 1$  (vacío),  $n_1 = 1,58$  (vidrio) y  $n_2 = 1$  (vacío), además  $b=30$  mm,  $a=116.28$  mm y  $s_3=-1$  m; graficando esta información, se reporta lo siguiente:

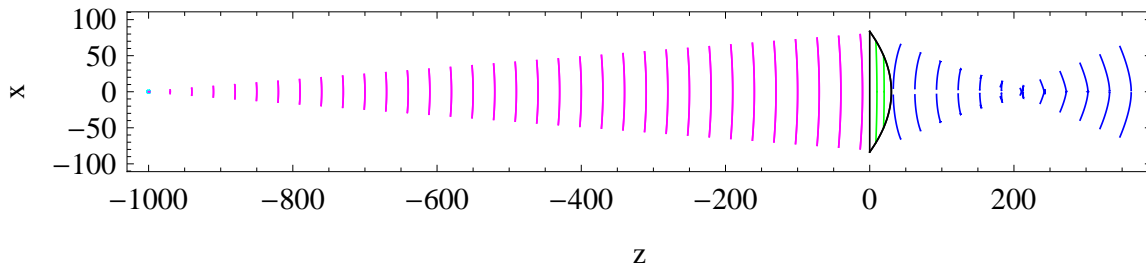


Figura 2.2: Frentes de onda proyectados en el plano XZ.

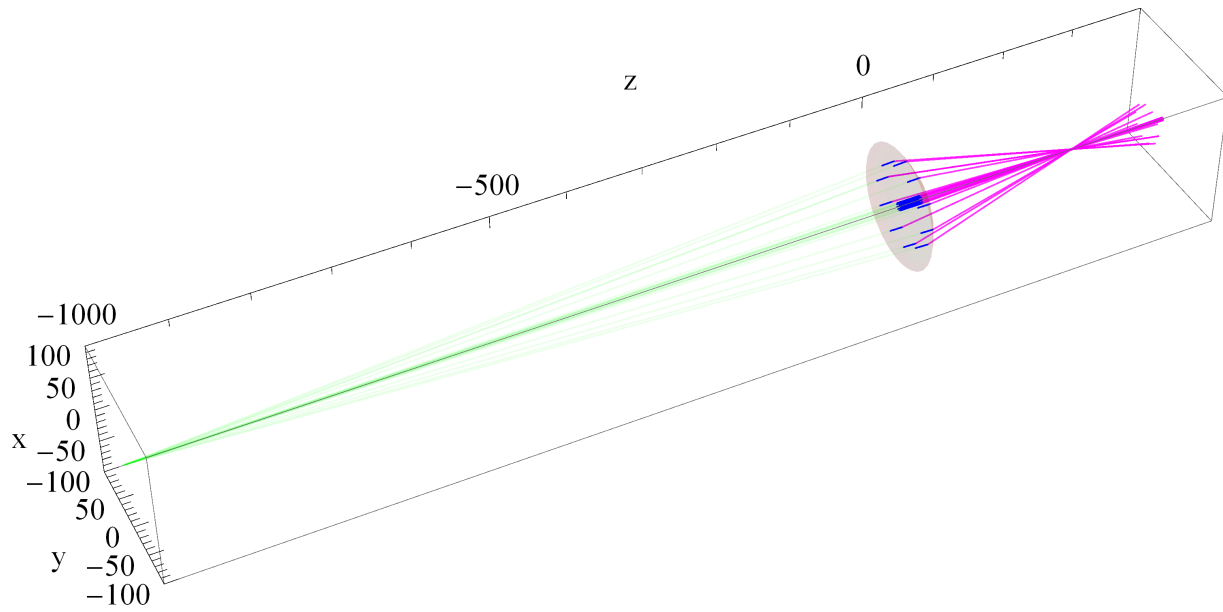


Figura 2.3: Rayos incidentes y refractados en un acercamiento.

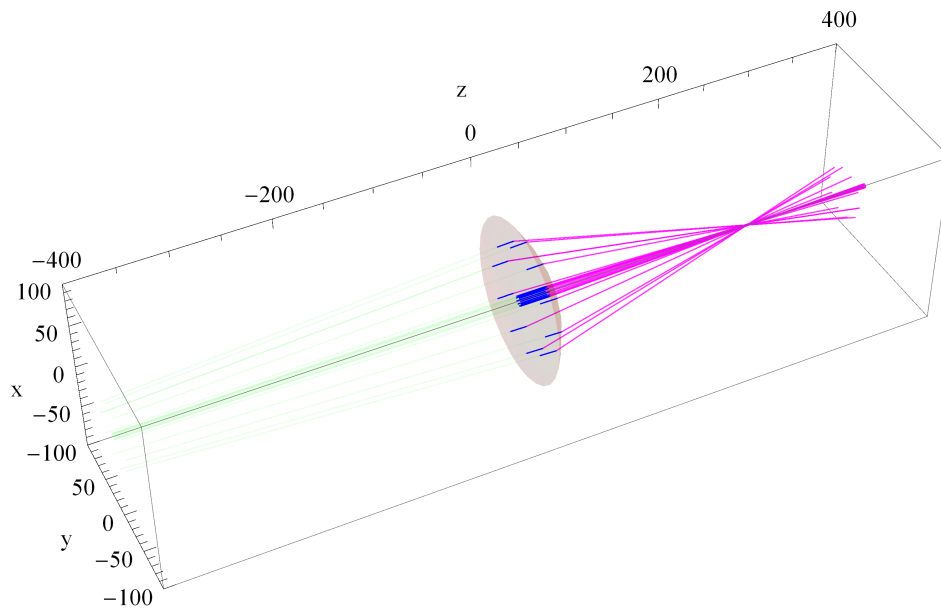


Figura 2.4: Rayos incidentes y refractados.

Formación de la región cáustica, como la envolvente de los rayos refractados, o bien; como la región donde los frentes de onda son singulares.

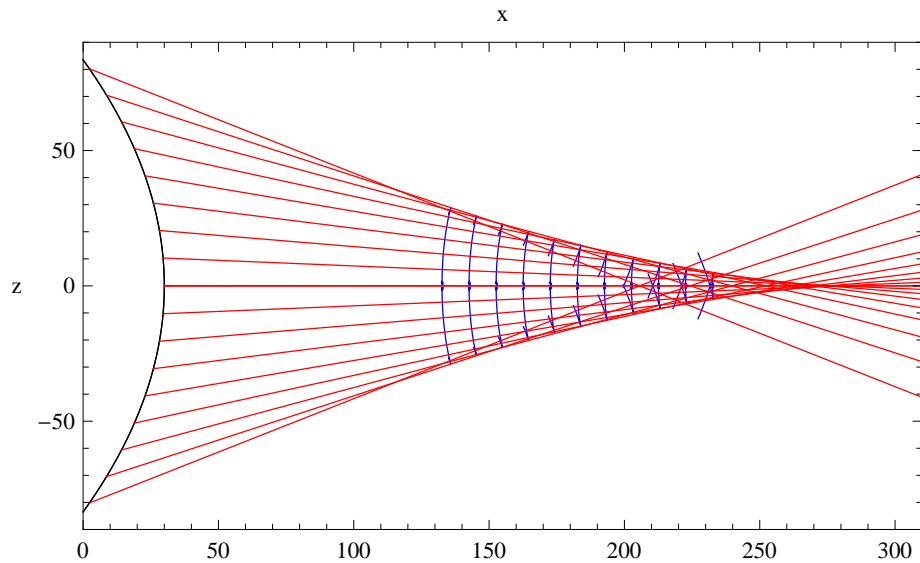


Figura 2.5: Formación de la cáustica

## 2.7. Análisis de la estructura de la imagen en pruebas ópticas

### 2.7.1. Prueba nula del alambre y prueba nula de Ronchi

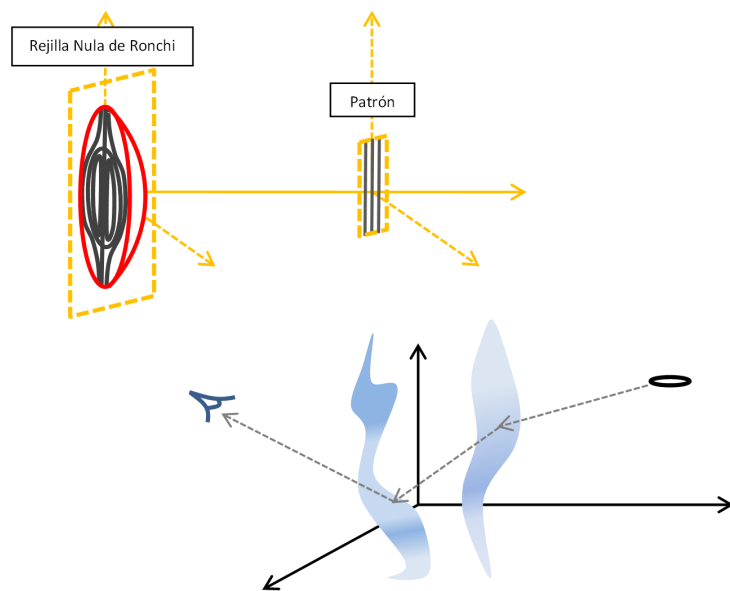


Figura 2.6: Correspondencia de la prueba nula con la configuración del *caustic-touching theorem*.

En la figura 2.6 se han colocado dos imágenes que previamente mostramos en la introducción: la primera representa la ejecución de la prueba nula de Ronchi para una lente plano-convexa y la segunda es la configuración del *caustic-touching theorem* para una doble refracción. No es sino hasta este punto

## CAPÍTULO 2. IMÁGENES EN UNALENTE PLANO-PARABÓLICA

### 2.7. ANÁLISIS DE LA ESTRUCTURA DE LA IMAGEN EN PRUEBAS ÓPTICAS

---

que podemos establecer claramente su relación, y ésta es que la primera imagen es un caso particular de la segunda. Note que el diseño de la rejilla nula se hace *conociendo la forma del patrón en el tercer medio*, o sea que se “calcula” la forma que debe tener la rejilla, en el primer medio, para que al refractarse la luz genere ese patrón. En otras palabras, teniendo la información inicial en el tercer medio se obtiene la información en el primer medio, y esa es precisamente la configuración a la que el *caustic-touching theorem* se puede aplicar. Así, a través del *caustic-touching theorem* podremos explicar como se da la disrupción de la imagen (y con ello la generación de imágenes múltiples y el colapso y desaparición de éstas) en la prueba nula del alambre y por extensión también en la prueba nula de Ronchi. Ahora desarrollaremos los gráficos que corresponden a la prueba, partiendo de lo expuesto en la sección 1.5, con los valores numéricos que caracterizan al sistema.

**Nota:** Tenga en consideración que para ocupar el *caustic-touching theorem* en la prueba nula, el rol del objeto en el teorema corresponde a la imagen de alambre de la prueba nula (y viceversa), no los confunda en la discusión de cada uno de los gráficos que sigue abajo.

En la figura 2.7 se muestra el sistema óptico, la posición de la lente y la cáustica que se forma colocando la fuente de luz puntual a  $-1\text{m}$  de distancia como ya se explicó, se muestran las posiciones de los planos de detección que se usaron en el análisis. Éstos fueron colocados paralelos al plano  $XY$  en:  $50\text{ mm}$ ,  $160\text{ mm}$ ,  $240\text{ mm}$  y  $300\text{ mm}$ . Para cada uno de los siguientes gráficos ha sido colocado el plano objeto a la izquierda y el plano imagen a la derecha. Para poder interpretar el patrón con absoluta facilidad se ha coloreado cada imagen del color del alambre que le corresponde. Estos gráficos fueron tomados como “fotografías” de simulaciones hechas a partir de una adaptación dinámica de la prueba. Fueron graficados el conjunto crítico (en la cara plana de la lente) y el conjunto cáustico correspondiente al anterior (en el plano de observación) en líneas punteadas en gris para la rama “cúspide girada”, y en negro para la rama “aguja”.

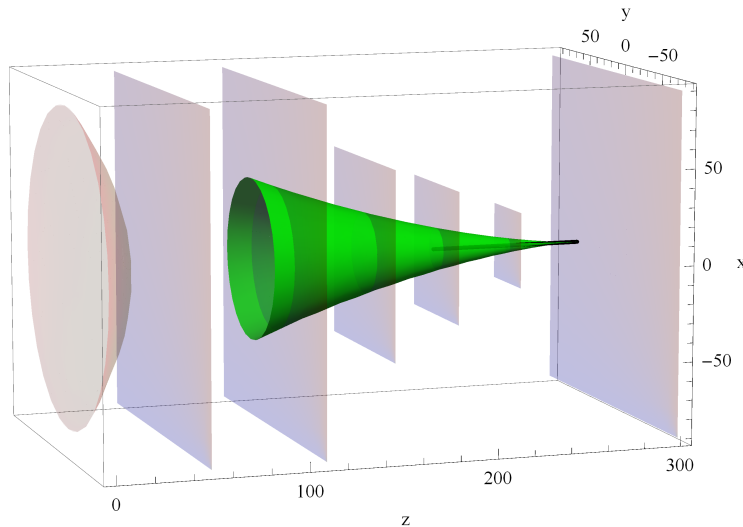


Figura 2.7: Posición de los planos de análisis en el sistema físico

Fijando el plano de observación en  $z=50\text{ mm}$ , figura 2.8 (como ya se vió, fuera de la región cáustica) se obtuvieron los siguientes gráficos, donde se aprecia de inmediato que *no hay cambio de topología* entre objeto e imagen.

Al colocar el plano de observación en  $z=160\text{ mm}$ , figura 2.9, ciertamente se puede notar un cambio

**CAPÍTULO 2. IMÁGENES EN UNA LENTE PLANO-PARABÓLICA**  
**2.7. ANÁLISIS DE LA ESTRUCTURA DE LA IMAGEN EN PRUEBAS ÓPTICAS**

---

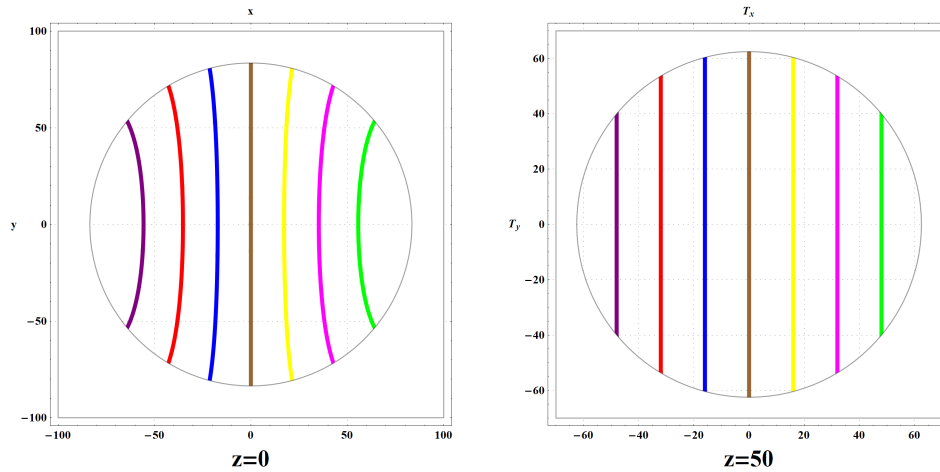


Figura 2.8: Calculando la rejilla cuando el patrón se registre antes de la superficie cáustica.

de topología desde que se analizan el primer y el último gráfico, pues sería una curva cerrada la que generaría como imagen dicho segmento de recta. Note que esta curva cerrada emerge de un punto ubicado precisamente en el conjunto crítico, esto es algo muy importante. Posteriormente al cambiar de posición el alambre hacia el origen, vemos que se requeriría una curva abierta para llegar al segmento de línea recta en el patrón. Recalcamos que en este plano de observación únicamente se está dando intersección con la rama de la cáustica “cúspide girada”. Sin embargo puntualizamos también que *si restringiéramos el área de observación a aquella circunscrita por el conjunto crítico, parecería que no hay ningún cambio de topología entre el objeto y la imagen, pero al analizar la estructura completa del patrón hay posiciones para las que sí lo hay.*

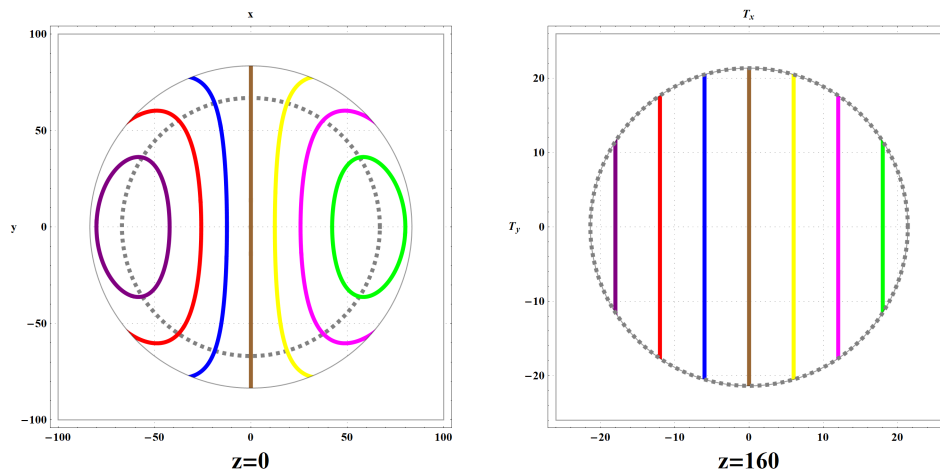


Figura 2.9: Calculando la rejilla cuando plano imagen intersece una rama de la superficie cáustica.

Estudiando qué pasa con el plano de observación en  $z=240$  mm, figura 2.10 (en donde existe intersección con las dos ramas de la cáustica) ya *aparecen objetos múltiples necesarios para crear sólo una imagen*, una curva cerrada junto con una curva abierta, para crear un solo segmento de recta. Sin embargo ello

**CAPÍTULO 2. IMÁGENES EN UNALENTE PLANO-PARABÓLICA**  
**2.7. ANÁLISIS DE LA ESTRUCTURA DE LA IMAGEN EN PRUEBAS ÓPTICAS**

---

se da a *partir del contacto tangente de la imagen con la rama de la cáustica “aguja”*. Esto lo predice el *caustic-touching theorem*. Tal cual es un ejemplo de cambio de topología donde emerge una curva cerrada desde un punto aislado (caso elíptico). Un caso muy especial corresponde a cuando la imagen del alambre está sobre el eje óptico, en este caso *todo el objeto circunferencia que coincide con la rama del conjunto crítico que genera la rama de la cáustica “aguja”* genera a su vez como imagen *únicamente al punto central* del segmento de la línea imagen.

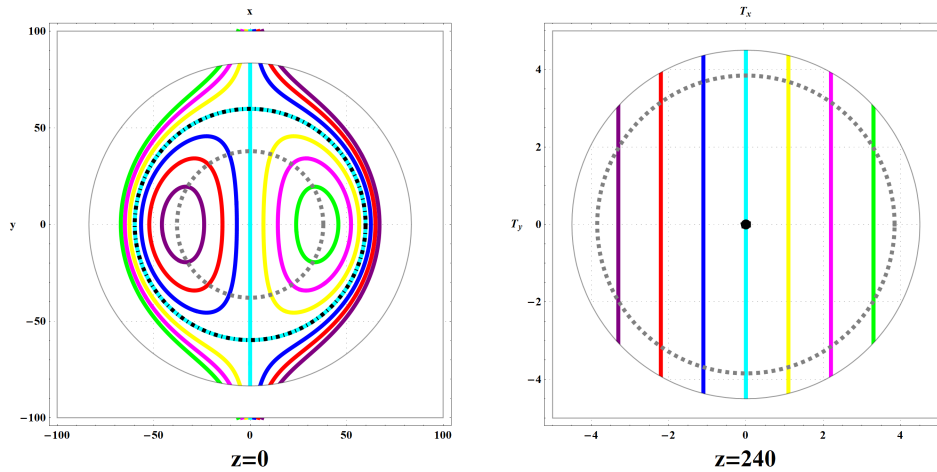


Figura 2.10: Calculando la rejilla cuando plano imagen intersece las dos ramas de la superficie cáustica.

Colocando el plano de observación en  $z = 300$  mm, figura 2.11, al estar fuera de contacto de ambas ramas de la región cáustica; *no hay cambio de topología*; únicamente se nota el efecto de *inversión* de la imagen respecto al objeto.

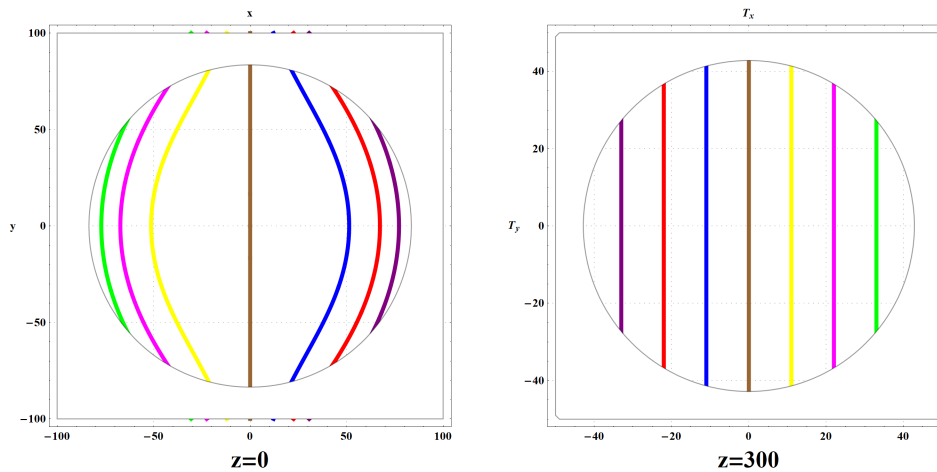


Figura 2.11: Calculando la rejilla cuando plano imagen esté más allá del foco paraxial.

### 2.7.2. Prueba de Ronchi (subestructurada, con la rejilla en la cara plana)

Pero como expusimos al inicio de capítulo, también es posible estudiar el sistema óptico ahora tomando en la figura 2.1 al arreglo de alambre rectos en la cara plana de la lente y calculando su imagen en un plano en el tercer medio. Esto corresponde a la prueba directa colocando al objeto en la cara plana de la lente. Es fácil corroborar que el *caustic-touching theorem* ya no es aplicable a esta configuración. Sin embargo sí se presentan cambios de topología entre objeto e imagen en ciertas configuraciones.

Comenzaremos estudiando cuando la pantalla está en  $z = 50$  mm, vea figura 2.12. Es claro que no hay cambio de topología entre el objeto y la imagen. Debe recalcar que en  $z = 50$  mm, el plano de observación no tiene intersección con la región cáustica.

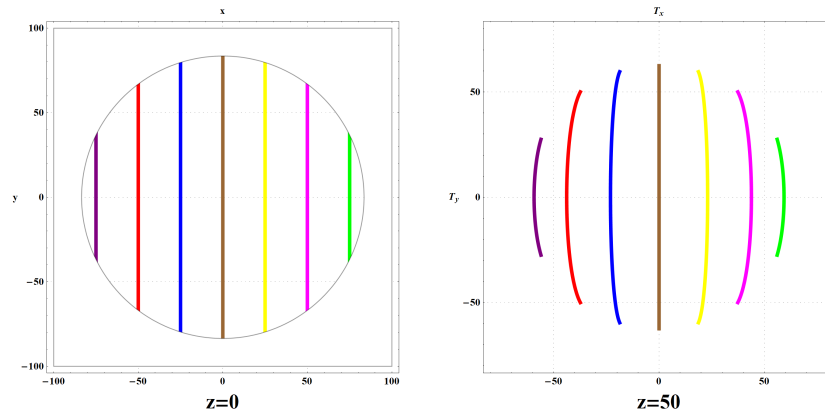


Figura 2.12: Colocando el plano de detección antes de la región cáustica.

Colocando el plano de observación en  $z = 110$  mm, en la figura (2.13) se puede notar que únicamente hay intersección con la rama “cúspide girada”. A pesar de existir este “contacto” del plano de observación con parte de la región cáustica, *no hay cambio en la topología*.

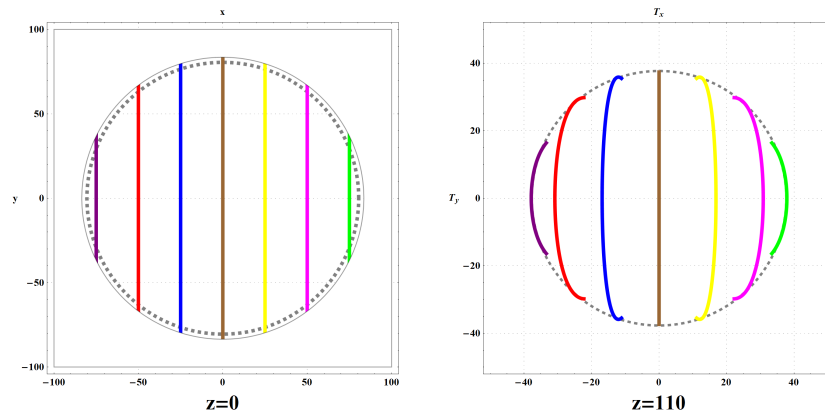


Figura 2.13: El plano de detección intersectando una rama de la región cáustica.

A continuación el plano de observación en  $z = 160$  mm, vea figura 2.14, donde aún está en contacto sólo con una rama de la cáustica. Aunque *tampoco* existe cambio en la topología, sí podemos deducir

**CAPÍTULO 2. IMÁGENES EN UNALENTE PLANO-PARABÓLICA**  
**2.7. ANÁLISIS DE LA ESTRUCTURA DE LA IMAGEN EN PRUEBAS ÓPTICAS**

---

mucho acerca del comportamiento entre el objeto, la imagen, y la relación entre ambos con el conjunto crítico y el conjunto cáustico, podemos notar de las primeras y últimas imágenes que al estar *el objeto fuera del conjunto crítico, la imagen nunca toca la pupila de salida*. Por otro lado, al estar en *contacto tangente* dicho objeto con el conjunto crítico implica que *la imagen será tangente a la cáustica, en un solo punto*, cuando el objeto *intersecta el conjunto crítico en dos puntos* la imagen *toca a la pupila de salida en dos puntos*

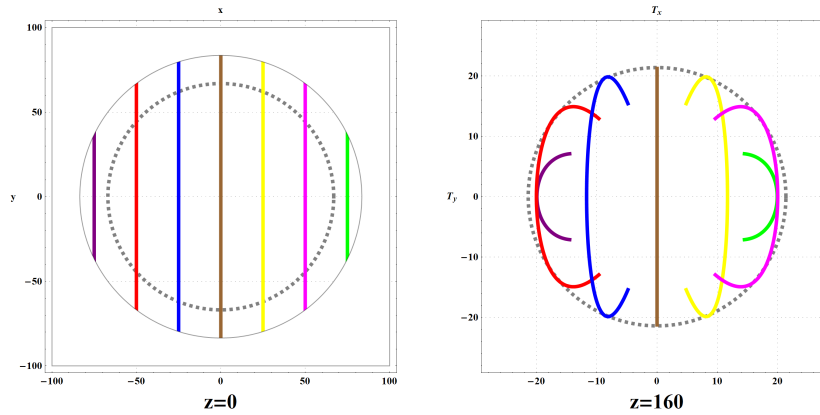


Figura 2.14: Colocando el plano de detección intersectando una rama de la región cáustica.

En los siguientes gráficos, resultantes con el plano de observación en  $z=200$  mm, vea figura 2.15, el plano de detección intersecta las dos ramas de la región cáustica, y aparecen curvas con autointersecciones (como los que aparecerían en el caso hiperbólico, cuando se cumple el *caustic-touching theorem*) sin embargo como la parte del conjunto crítico (en negro) que genera la rama de la cáustica que es un segmento de recta queda prescrito muy cerca de la región de los rayos marginales, *todas las curvas imagen tienen autointersección*. Se puede concluir además un punto muy importante; que *el cambio de topología se da cuando el plano imagen entra en contacto con las dos ramas de la región cáustica*.

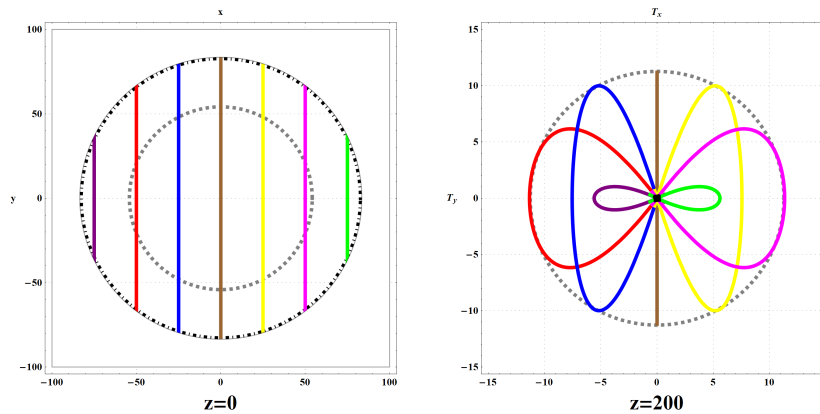


Figura 2.15: El plano de detección intersectando ambas ramas de la región cáustica.

Cuando el plano de observación está en  $z=240$  mm (contacto con las dos ramas, como en el anterior, figura 2.16), se aprecian mucho mejor efectos que en el caso anterior son limitados. La elección de este

**CAPÍTULO 2. IMÁGENES EN UNA LENTE PLANO-PARABÓLICA**  
**2.7. ANÁLISIS DE LA ESTRUCTURA DE LA IMAGEN EN PRUEBAS ÓPTICAS**

---

plano se hizo al notar que aquí se aprecian las dos ramas del conjunto crítico, más alejadas del radio de la lente. Al aprovechar este hecho, podemos analizar las líneas tangentes a estas circunferencias. Al *estar fuera del conjunto crítico, no hay cambio de topología*, como se aprecia en la primera y última imagen. Pero cuando es *tangente al conjunto crítico correspondiente al segmento de recta de la cáustica, aparece una singularidad en la curva imagen*. Y cuando al cambiar de posición el objeto de forma que *toque la misma parte de conjunto crítico en dos puntos, aparece un cambio de topología de tipo hiperbólico* (aparece una curva cerrada imagen secundaria a partir de una singularidad, una curva de tipo “Tschirnhausen’s cubic” [97]). Sin embargo al ser tangente a la otra parte del conjunto crítico y mantener contacto en dos puntos con la parte que genera el segmento de recta, *no hay otro cambio en la topología*; únicamente la curva imagen que ya es cerrada por el efecto del primer contacto, es tangente a la otra rama de la cáustica (la “cúspide girada”). Y al pasar el objeto a una posición donde toca en dos puntos, ambas circunferencias (las dos partes de conjunto crítico), la parte cerrada de la curva toca en dos puntos la parte de la cáustica cuya proyección es un circunferencia, en dos puntos.

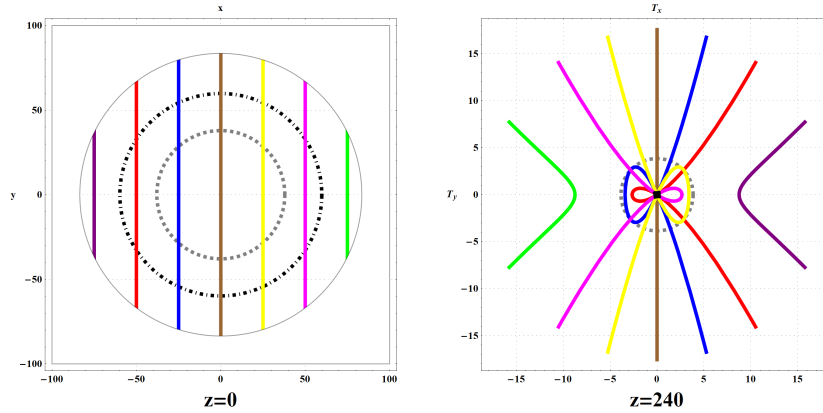


Figura 2.16: El plano de detección intersectando ambas ramas de la región cáustica.

Colocando el plano de observación en  $z = 300$  mm, vea figura 2.17 al estar fuera de contacto de ambas ramas de la región cáustica; *no hay cambio de topología*; únicamente se nota el efecto de *inversión* de la imagen respecto al objeto.

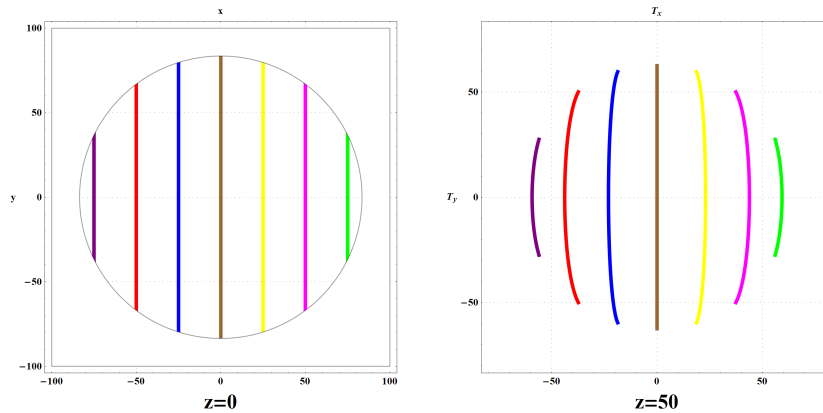


Figura 2.17: Colocando el plano de detección más allá del foco paraxial.

## Capítulo 3

# Rompimiento de la equivalencia topológica entre objeto e imagen ante contacto no tangente con la cáustica

En el capítulo anterior nosotros pudimos comprobar una de las hipótesis más interesantes acerca del “caustic-touching theorem” y es aquella que predice que se presentará cambio de topología entre un objeto y su imagen (en nuestro caso en el proceso de refracción) cuando se dé un contacto de tipo tangente entre el objeto y la superficie cáustica (en particular es transparente la razón de esto para la prueba nula). ¿Pero qué pasaría si el contacto entre ellos no fuera del tipo tangencial? Observe en la figura 3.1 las dos posibilidades, hemos trabajado con el primer caso en el capítulo anterior (recuerde la prueba nula), ¿Pero cómo se modificaría la imagen si el alambre es introducido en la cáustica como se muestra en el segundo esquema de la figura 3.1? Para abordar el problema de la forma más simple posible plantearemos de

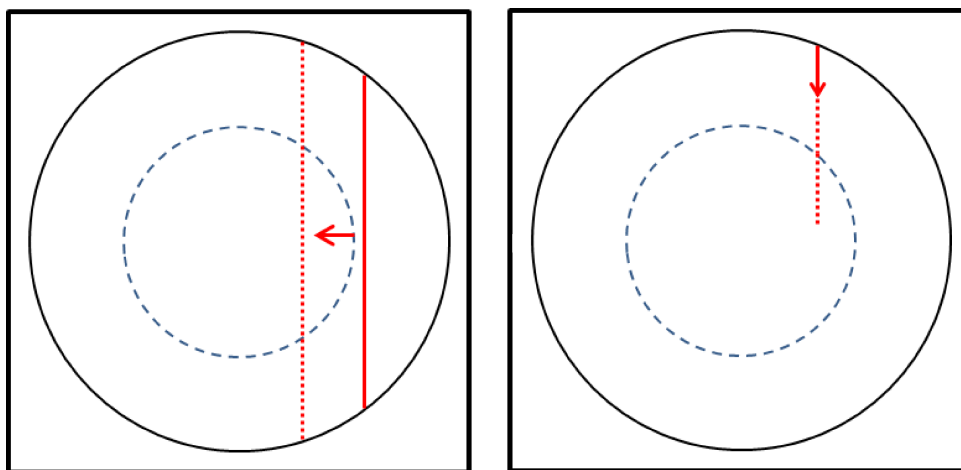


Figura 3.1: Tipos diferentes de contacto entre la superficie cáustica y un objeto unidimensional.

nuevo el caso de una lente plano parabólica con los mismos valores numéricos pero ahora iluminada por un frente de onda plano, esta simetría simplificará los cálculos (figura 3.2).

**CAPÍTULO 3. ROMPIMIENTO DE LA EQUIVALENCIA TOPOLÓGICA ENTRE  
OBJETO E IMAGEN ANTE CONTACTO NO TANGENTE CON LA CÁUSTICA**  
3.1. SUPERFICIE CÁUSTICA

---

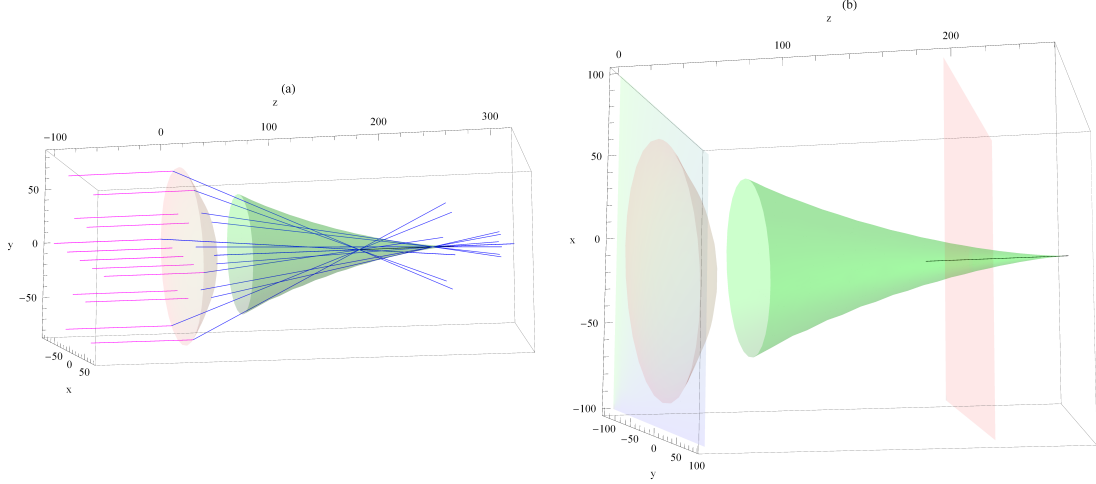


Figura 3.2: (a) Sistema óptico con la familia de rayos (b) Plano objeto ( $z_0 = 195$ ) y plano imagen ( $z = 0$ ).

### 3.1. Superficie cáustica

Cualquier punto en el tercer medio óptico quedará representado a través de

$$\mathbf{X} = \left[ \frac{l\rho \left( \sqrt{a^2 - (\gamma^2 - 1)\rho^2} - a\gamma \right)}{a^2 + \rho^2} + \rho \right] \hat{\rho} + \left[ l \left( \frac{a \left( \sqrt{a^2 - (\gamma^2 - 1)\rho^2} - a\gamma \right)}{a^2 + \rho^2} + \gamma \right) - \frac{\rho^2}{2a} + b \right] \hat{z} \quad (3.1)$$

Y de ahí, ambas ramas de la cáustica quedan descritas por

$$\mathbf{X}_{c+} = \left[ \frac{(\gamma^2 - 1)\rho^3}{a^2} \right] \hat{\rho} + \left[ \frac{2a^3 + 2a^2\gamma\sqrt{a^2 - (\gamma^2 - 1)\rho^2} - 2\gamma(\gamma^2 - 1)\rho^2\sqrt{a^2 - (\gamma^2 - 1)\rho^2} - 3a(\gamma^2 - 1)\rho^2}{2a^2(\gamma^2 - 1)} + b \right] \hat{z} \quad (3.2)$$

$$\mathbf{X}_{c-} = \left[ \frac{\gamma\sqrt{a^2 - (\gamma^2 - 1)\rho^2}}{\gamma^2 - 1} + \frac{a}{\gamma^2 - 1} - \frac{\rho^2}{2a} + b \right] \hat{z} \quad (3.3)$$

### 3.2. Construyendo la imagen

Ahora caracterizaremos el plano objeto  $XY$  por  $z = z_0$  y determinaremos las imágenes en el plano  $xy$  correspondiendo con  $z = 0$ , para ello claramente necesitamos encontrar todos los puntos  $(x, y)$  tales que al ser mapeados por el mapeo “refracción” denotado desde ahora por  $R$ , nos envíen a  $XY$ . Si cambiamos a coordenadas polares  $x = \rho \cos \phi$  y  $y = \rho \sin \phi$  obtenemos de forma explícita

$$\begin{aligned} X(\rho, \phi, z_0) &= \frac{\rho \cos(\phi) (2a^3\gamma + 2a^2\iota - 2ab\iota + 2a\gamma\rho^2 + 2a\iota z_0 + \iota\rho^2)}{2a(a^2\gamma + a\iota + \gamma\rho^2)}, \\ Y(\rho, \phi, z_0) &= \frac{\rho \sin(\phi) (2a^3\gamma + 2a^2\iota - 2ab\iota + 2a\gamma\rho^2 + 2a\iota z_0 + \iota\rho^2)}{2a(a^2\gamma + a\iota + \gamma\rho^2)}, \\ Z(\rho, \phi, z_0) &= z_0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

**CAPÍTULO 3. ROMPIMIENTO DE LA EQUIVALENCIA TOPOLÓGICA ENTRE  
OBJETO E IMAGEN ANTE CONTACTO NO TANGENTE CON LA CÁUSTICA**  
3.2. CONSTRUYENDO LA IMAGEN

---

donde

$$\iota(\rho) = \sqrt{a^2 - (\gamma^2 - 1)\rho^2} - a\gamma \quad (3.5)$$

Necesitábamos establecer este mapeo porque es conveniente entender cómo la imagen (o imágenes) son construidas *punto a punto* y en esta forma combinar la información *local* para formar la imagen entera. Esto es completamente diferente a lo hecho en el capítulo anterior porque en ese caso buscamos *parametrizar el objeto completo*. De esta forma evitamos el concepto de tangencia. Si fijamos valores fijos para  $X = T_x$  y  $Y = T_y$  y observamos la dependencia angular entre estas dos expresiones, podemos determinar que el conjunto solución de estas ecuaciones está dado por puntos en el plano  $xy$  que comparten la misma dirección, esto es; están orientadas en el ángulo

$$\phi_0 = \arctan(T_y/T_x) \quad (3.6)$$

y por otro lado

$$\sqrt{T_x^2 + T_y^2} = \frac{\rho(2a^3\gamma + 2a^2\iota - 2abi + 2a\gamma\rho^2 + 2a\iota z_0 + \iota\rho^2)}{2a(a^2\gamma + a\iota + \gamma\rho^2)} \quad (3.7)$$

donde éstas últimas determinan completamente todos los puntos tales que  $(x, y) = R(T_x, T_y)$ .

Para este caso donde iluminamos con un frente de onda plano, hemos elegido  $z_0 = 195$  porque en esta posición el plano objeto tiene contacto con las dos ramas de la cáustica, que como se demostró en el capítulo anterior, es donde ocurre el cambio de topología más interesante (figura 3.2). En la siguiente figura se muestra la intersección del plano  $T_x T_y$  (plano objeto) con las dos ramas de la superficie cáustica: el círculo punteado y el punto central. En el correspondiente plano  $xy$  (plano imagen) aparecen las dos ramas del conjunto crítico con los colores correspondientes a las dos del conjunto cáustico. El análisis se inicia conforme calculamos las imágenes de objetos puntuales  $(T_x, T_y)$  en diferentes posiciones respecto de la proyección de la cáustica.

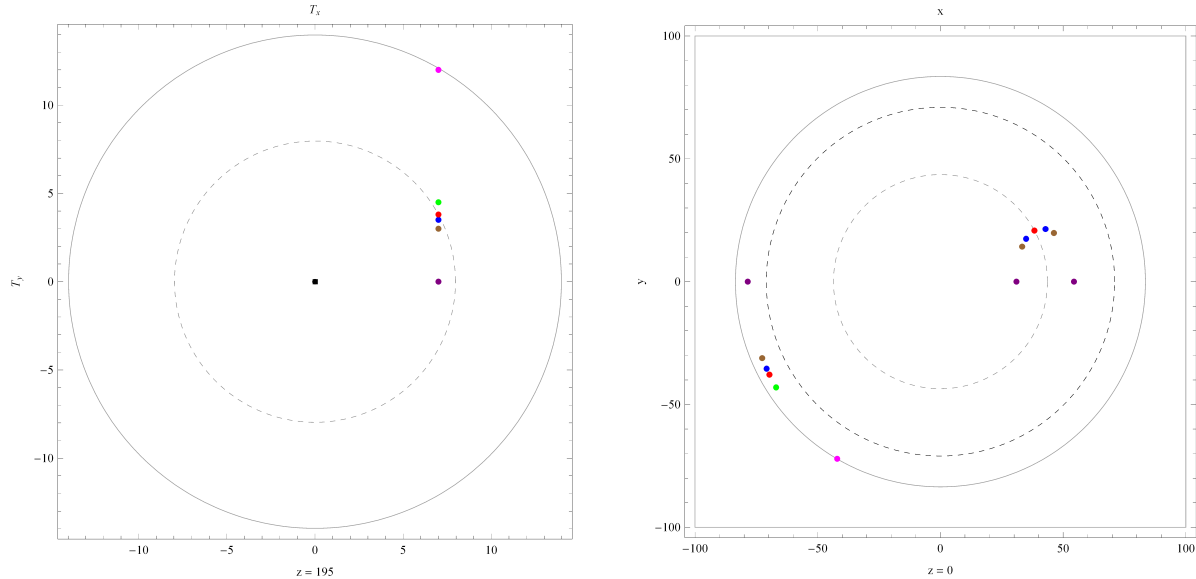


Figura 3.3: (a) Objetos puntuales en  $z_0 = 195$  (b) Múltiples imágenes de cada objeto puntual registradas en  $z = 0$ ).

**CAPÍTULO 3. ROMPIMIENTO DE LA EQUIVALENCIA TOPOLÓGICA ENTRE  
OBJETO E IMAGEN ANTE CONTACTO NO TANGENTE CON LA CÁUSTICA**  
3.2. CONSTRUYENDO LA IMAGEN

Ahora podemos ver la interesante correspondencia entre objeto e imagen, conforme nos fijamos en puntos más cercanos a la cáustica desde lejos de ella (todos sobre el eje  $T_x$ ) vemos que cuando aún se encuentran fuera de ella (puntos magenta y verde) cada uno tiene una sola imagen, el mapeo es *uno a uno*. Sin embargo tan pronto como entra en contacto con la región cáustica (punto rojo) aparecen *dos correspondientes imágenes*, es decir; se ha roto la *correspondencia uno a uno*. Finalmente cuando el objeto está dentro de la región cáustica (azul, café y púrpura) la correspondencia es *uno a tres*.

Con esta información somos capaces de reconstruir la imagen entera de un objeto continuo sin comprometernos con el concepto de tangencia, y podemos concluir algo muy importante, podemos ver un *cambio topológico entre un objeto y su imagen a pesar de no poder definir tangencia entre el objeto y la superficie cáustica*, como ejemplo la siguiente figura en donde si nosotros imaginamos que el contacto fue

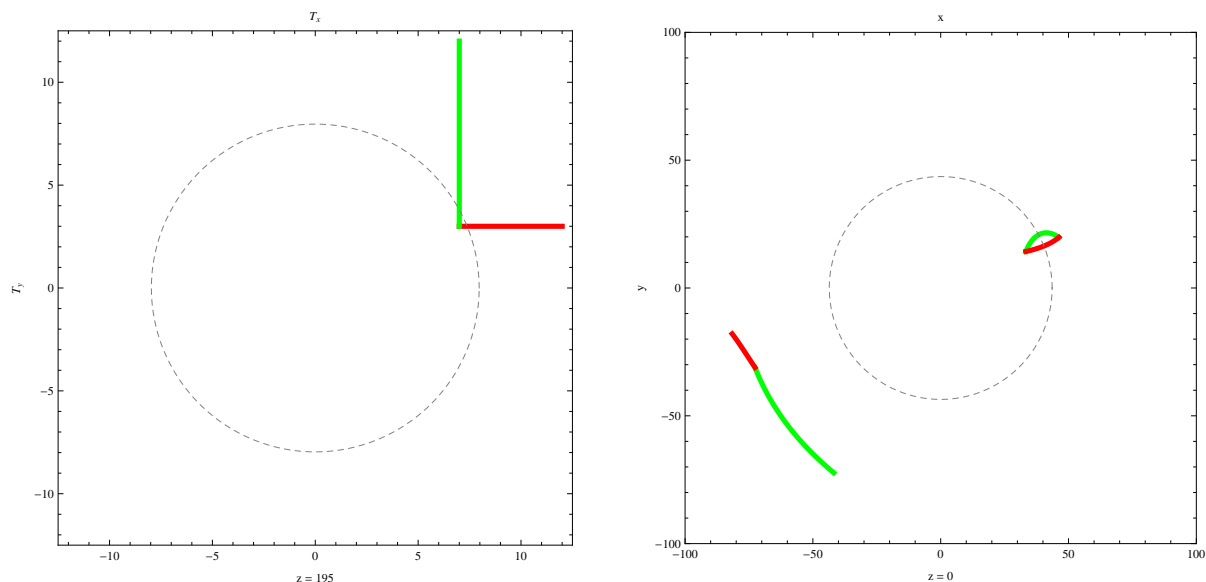


Figura 3.4: Cambio de topología entre el objeto y la imagen sin contacto tangente del objeto con la superficie cáustica.

comenzado en la esquina, evidentemente no se puede definir tangencia, sin embargo una vez que el contacto se da y el objeto ha sido colocado en una posición final se presenta de nuevo cambio en la topología (dos imágenes corresponden a un solo objeto; de nuevo una curva cerrada y una abierta). Otro ejemplo ilustrativo resulta de tomar como objeto a una curva de tipo cúspide, evidentemente en la singularidad no es posible definir tangencia y sin embargo al entrar en contacto con la superficie cáustica hay cambio de topología.

**CAPÍTULO 3. ROMPIMIENTO DE LA EQUIVALENCIA TOPOLÓGICA ENTRE  
OBJETO E IMAGEN ANTE CONTACTO NO TANGENTE CON LA CÁUSTICA**  
3.2. CONSTRUYENDO LA IMAGEN

---

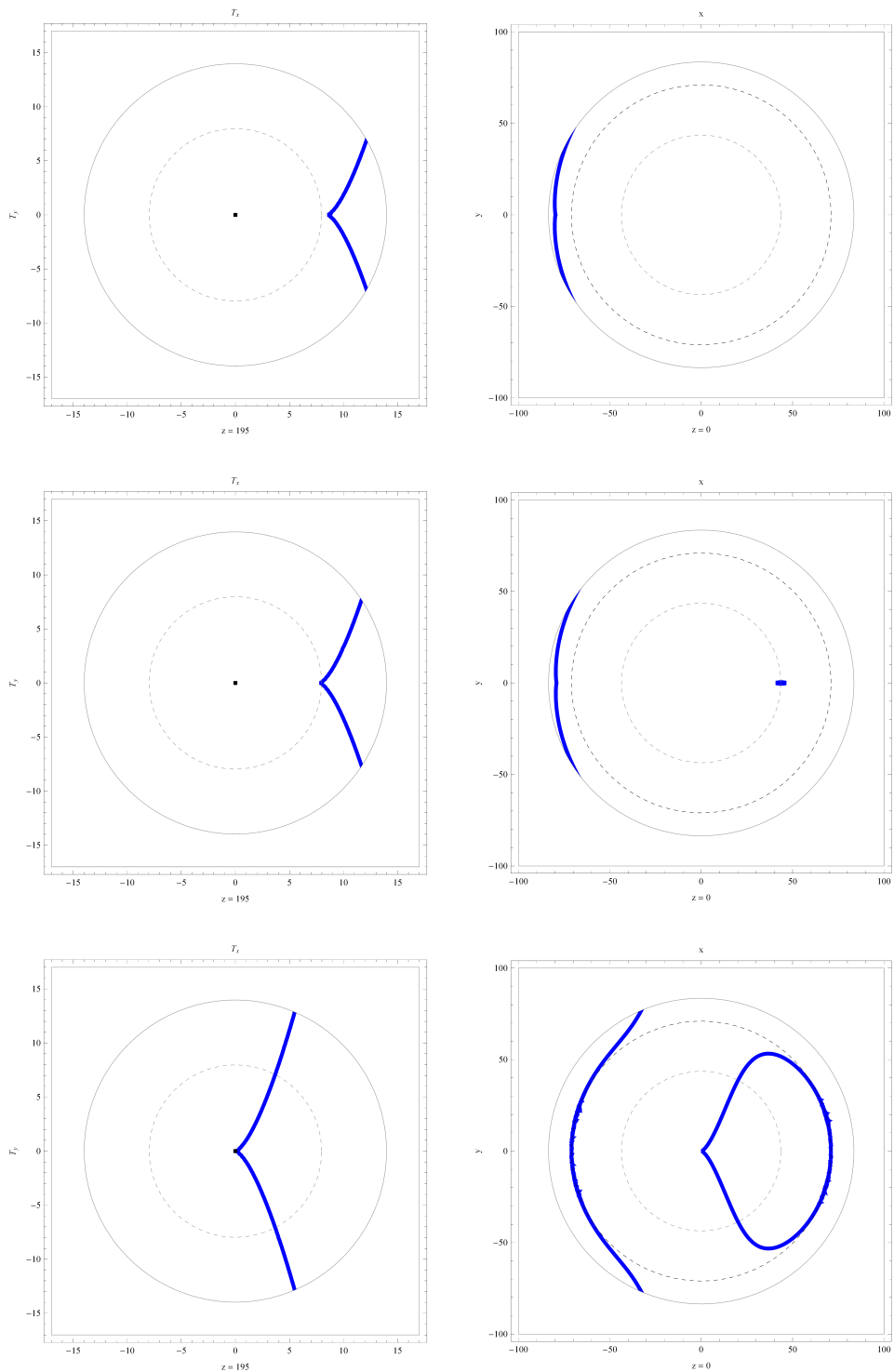


Figura 3.5: Curva de tipo cúspide y su imagen, hay cambio de topología incluso si no se puede definir tangencia.



## Capítulo 4

# Prueba analítica del alambre y subestructurada de Ronchi

### 4.1. Planteamiento del problema

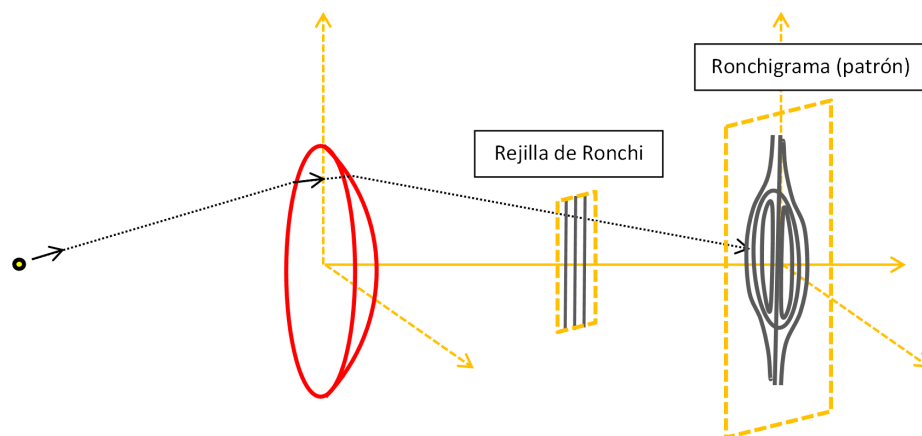


Figura 4.1: Prueba convencional de Ronchi, ambos planos objeto e imagen están en el mismo medio

En este capítulo abordamos la prueba directa del alambre y la extrapolamos a Ronchi (vea figura 4.1) ya que nos hemos percatado que existen configuraciones de interés experimental que no corresponden a la configuración en la que el *caustic-touching theorem* es aplicable, nos propusimos estudiar la formación de imágenes múltiples de la manera más general posible. Así que nos enfocamos en aplicar nuestro método a una lente plano-convexa que tuviera el único requisito de tener simetría de revolución, incluso más general que las representadas con la fórmula de lente esférica. Nuestro objetivo es estudiar de nuevo todas las configuraciones posibles, incluyendo aquellas que no se habían estudiado antes, y tener una herramienta que nos siga permitiendo interpretar la estructura de la imagen del alambre. Otro objetivo fue obtener simulaciones que nos permitieran seguir la reconstrucción de la imagen paso a paso.

### 4.2. Región cáustica para una lente plano convexa

Siguiendo el procedimiento de la sección 1.12 la superficie cáustica para una superficie resultante con simetría de revolución resulta

$$\mathbf{X}_{c+} = \left[ f - \frac{\rho + \gamma\rho\sqrt{1 - (\gamma^2 - 1)f'^2}}{f'(\gamma^2 - 1)} \right] \hat{z}, \quad (4.1)$$

$$\mathbf{X}_{c-} = \left[ \rho + \frac{[(\gamma^2 - 1)f'^2 - 1]f'}{f''} \right] \hat{\rho} + \left[ f + \frac{[(\gamma^2 - 1)f'^2 - 1](1 + \gamma\sqrt{1 - (\gamma^2 - 1)f'^2})}{f''(\gamma^2 - 1)} \right] \hat{z}. \quad (4.2)$$

### 4.3. Patrón analítico

Partiendo de la sección 2.5, podemos cambiar un poco la notación para obtener

$$X_0(x, y) = x + [z_0 - f(x, y)] \left( \frac{\hat{\mathbf{R}}(x, y) \cdot \hat{x}}{\hat{\mathbf{R}}(x, y) \cdot \hat{z}} \right), \quad (4.3)$$

$$Y_0(x, y) = y + [z_0 - f(x, y)] \left( \frac{\hat{\mathbf{R}}(x, y) \cdot \hat{y}}{\hat{\mathbf{R}}(x, y) \cdot \hat{z}} \right).$$

donde hemos colocado subíndices a  $(X, Y)$  sólo para denotar que estos puntos están sobre el plano  $Z = z_0$ . Esto es, la ecuación anterior puede verse como una familia uniparamétrica de mapeos, con parámetro  $z_0$ , de  $\mathcal{R}^2$  a  $\mathcal{R}^2$ , esto es,  $\Gamma_{z_0}: (x, y) \rightarrow (X_0, Y_0)$ . Segundo, sobre el plano  $Z = z_0$  colocamos un segmento de línea recta (la representación del alambre) dada por  $X_0 = n$ , con  $n$  siendo una constante, y nos fijamos en los puntos  $(x_n, y_n)$  tales que  $(n, Y_0) = \Gamma_{z_0}: (x_n, y_n)$ . Para el caso particular de simetría de revolución, un cálculo directo muestra que

$$x_n = \rho \left[ \frac{n(\gamma^2 f'^2 - 1)}{(z_0 - X_{c+})(1 - \gamma\sqrt{1 - (\gamma^2 - 1)f'^2})f'} \right], \quad (4.4)$$

$$y_n = \pm \rho \sqrt{1 - \left[ \frac{n(\gamma^2 f'^2 - 1)}{(z_0 - X_{c+})(1 - \gamma\sqrt{1 - (\gamma^2 - 1)f'^2})f'} \right]^2},$$

Donde  $\rho^2 = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Finalmente, la expresión analítica del patrón  $(X_1, Y_1)$  sobre el plano  $Z = z_1$  del alambre está dado por  $(X_1, Y_1) = \Gamma_{z_1}(x_n, y_n)$ . Esto es, por

$$X_1 = \left[ \frac{z_1 - X_{c+}}{z_0 - X_{c+}} \right] n, \quad (4.5)$$

$$Y_1 = \pm \left[ \frac{z_1 - X_{c+}}{z_0 - X_{c+}} \right] \sqrt{\left[ \frac{(1 - \gamma\sqrt{1 - (\gamma^2 - 1)f'^2})f'}{\gamma^2 f'^2 - 1} (z_0 - X_{c+}) \right]^2 - n^2}.$$

Note que para  $z_1 = z_0$ , la imagen es idéntica a la representación del objeto y más importante aún, la imagen es proporcional a la magnitud de la rama de la cáustica que es un segmento de línea recta  $\mathbf{X}_{c+}$ .

### 4.4. De nuevo, ejemplo en lente plano-parabólica

Como fue mostrado en el capítulo anterior, para el caso de esta lente (donde  $f = b - \frac{\rho^2}{2a}$ ) la región cáustica generada al iluminar con frentes de onda planos resulta

$$\mathbf{X}_{c+} = \left[ \frac{\gamma\sqrt{a^2 - (\gamma^2 - 1)\rho^2}}{\gamma^2 - 1} + \frac{a}{\gamma^2 - 1} + b - \frac{\rho^2}{2a} \right] \hat{z}, \quad (4.6)$$

**CAPÍTULO 4. PRUEBA ANALÍTICA DEL ALAMBRE Y SUBESTRUCTURADA DE  
RONCHI**  
4.5. ANÁLISIS DE TODAS LAS CONFIGURACIONES PARA LA PRUEBA DEL ALAMBRE

---

$$\mathbf{X}_{c-} = \left[ \frac{(\gamma^2 - 1) \rho^2}{a^2} \right] \hat{\rho} + \left[ \frac{2a^3 + 2a^2\gamma\sqrt{a^2 - (\gamma^2 - 1) \rho^2} - 2\gamma(\gamma^2 - 1) \rho^2\sqrt{a^2 - (\gamma^2 - 1) \rho^2} - 3a(\gamma^2 - 1) \rho^2}{2a^2(\gamma^2 - 1)} + b \right] \hat{z}. \quad (4.7)$$

donde al sustituir las anteriores en 4.5 obviamente arrojan el patrón analítico. Tomaremos los mismos valores numéricos que en los anteriores capítulos  $b = 30$  mm,  $a = 116,28$  mm,  $n_0 = 1,58$  (vidrio),  $n_1 = 1$  (vacío).

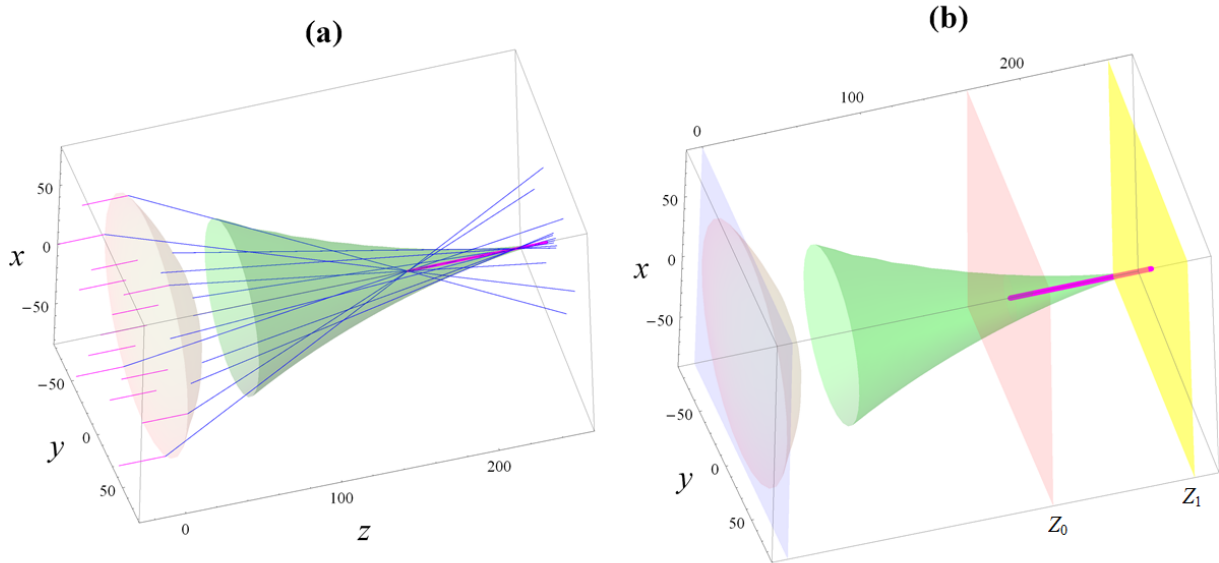


Figura 4.2: En a) son representados algunos rayos marginales en azul,  $\mathbf{X}_{c-}$  en verde y  $\mathbf{X}_{c+}$  en magenta. en b) el plano  $z = 0$ , el plano objeto en  $z = z_0$ , y el plano de detección en  $z = z_1$ .

## 4.5. Análisis de todas las configuraciones para la prueba del alambre

Para poder determinar bajo que circunstancias el objeto no es topológicamente equivalente a su imagen, en otras palabras, describir completamente la formación de imágenes múltiples y el colapso de imágenes en puntos; necesitamos identificar la **proyección de la intersección de la superficie cáustica** con un plano  $Z = z_0$  (que obviamente es una curva cerrada o un punto) a través del campo vectorial  $\hat{\mathbf{R}}$  y registrada sobre el plano  $z_1$ . Denotadas desde ahora por  $P[\mathbf{X}_{c+}]$  y  $P[\mathbf{X}_{c-}]$  para las dos ramas y donde en general  $P : z_0 \rightarrow z_1$ . De la misma manera es necesario identificar la **proyección virtual** (de la intersección de la cáustica y  $z_1$ ) que se daría ahora desde  $z_1$  hasta  $z_0$  a través de  $\hat{\mathbf{R}}$  pero en sentido contrario del campo vectorial, es decir, como si el rayo de luz evolucionara en sentido contrario de donde físicamente se propaga (por ello es denominada virtual, es en el mismo sentido que se calculan ramas virtuales de una superficie cáustica). En adelante  $PV[\mathbf{X}_{c+}]$  y  $PV[\mathbf{X}_{c-}]$  y donde en general  $PV : z_1 \rightarrow z_0$ .

## CAPÍTULO 4. PRUEBA ANALÍTICA DEL ALAMBRE Y SUBESTRUCTURADA DE RONCHI

### 4.5. ANÁLISIS DE TODAS LAS CONFIGURACIONES PARA LA PRUEBA DEL ALAMBRE

Las pupilas de salida tanto en  $z_0$  como en  $z_1$  están coloreadas en azul para cuando corresponden a la región marginal (en acuerdo con la figura 5.6) o en verde para cuando intersecta la rama  $\mathbf{X}_{c-}$ . Las intersecciones reales de  $z_0$  y  $z_1$  con la cáustica (ambas ramas, en verde o magenta de acuerdo de nuevo con la figura 5.6) y con la región marginal (azul) son indicadas en color sólido. Las proyecciones  $P[\mathbf{X}_{c+}]$  y  $P[\mathbf{X}_{c-}]$  y las proyecciones virtuales  $PV[\mathbf{X}_{c+}]$  y  $PV[\mathbf{X}_{c-}]$  son indicadas con la línea punteada del color correspondiente a la rama asociada.

#### 4.5.1. Configuraciones conocidas para el plano objeto e imagen (plano de detección fuera de la cáustica)

Empezaremos tratando los casos bien conocidos y reportados en la literatura, por ejemplo [38, 40], esto es; cuando el plano objeto es colocado en las siguientes posiciones arbitrarias: antes de la cáustica, intersectando una rama de la cáustica, en el foco marginal, intersectando ambas ramas de la cáustica y finalmente en el foco paraxial; y el plano imagen (que correspondería a la posición del CCD) siempre fuera de la región cáustica (alejándose de la lente y más allá del foco paraxial).

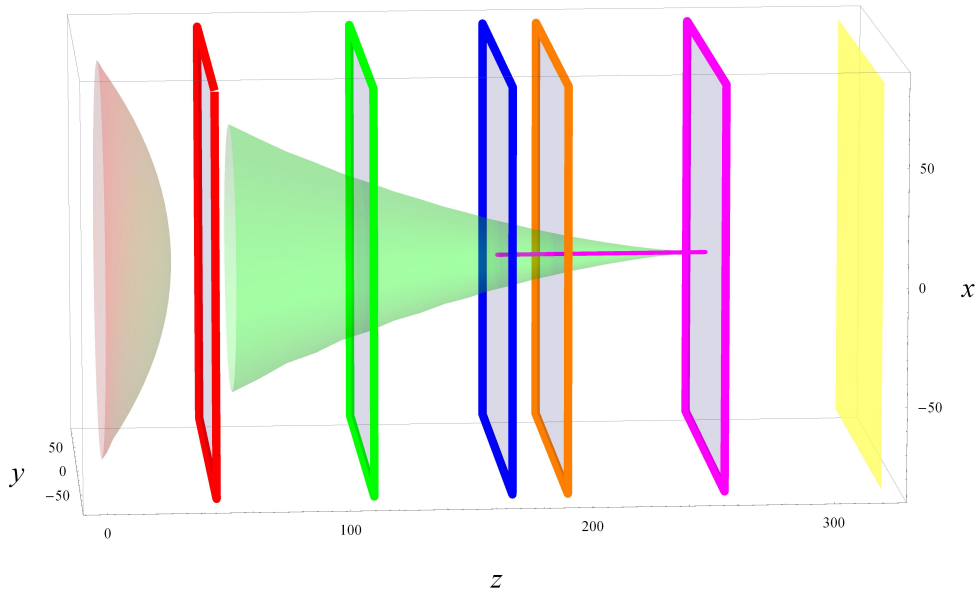


Figura 4.3: Planos objeto en diferentes posiciones asociadas con la cáustica (marcos de color), en el extremo derecho el plano de detección

Los primeros cinco planos con el marco coloreado en la figura 4.3 están asociados a los distintos planos objeto ( $z_0$ ) mencionados en el párrafo anterior; el plano sin marco que está hasta la derecha corresponde al plano de detección ( $z_1$ ) y fue el mismo usado para los cinco planos objeto. De modo que en los gráficos que viene a continuación se presentan del lado izquierdo uno de los planos objeto de la figura 4.3 en su correspondiente color y del lado derecho el plano imagen. En cada plano objeto se colocaron tres alambres (coloreados también para identificar sus imágenes con facilidad).

CAPÍTULO 4. PRUEBA ANALÍTICA DEL ALAMBRE Y SUBESTRUCTURADA DE RONCHI

4.5. ANÁLISIS DE TODAS LAS CONFIGURACIONES PARA LA PRUEBA DEL ALAMBRE

Analizando la primera configuración  $z_0 = 45, z_1 = 320$ , podemos ver que la relación entre los tres alambres y sus imágenes es de equivalencia topológica, por cada alambre (segmento de línea recta) se registra una sola imagen que también es una curva abierta, para visualizar la adaptación dinámica de la prueba donde la posición del alambre cambia de forma continua ver VIDEO1. En esta configuración la pupila de salida queda determinada en ambos planos por los rayos marginales.

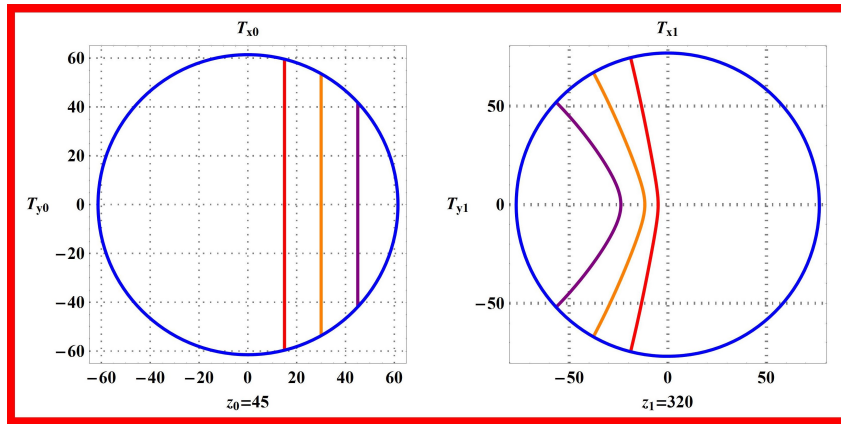


Figura 4.4: Plano objeto antes de la cáustica, plano de detección después de la cáustica.

Para la configuración  $z_0 = 110$  y  $z_1 = 320$ ,  $z_0$  intersecta a la rama de la cáustica  $\mathbf{X}_{c-}$ , y esta intersección determina la pupila de salida para este plano. La intersección entre  $z_0$  y  $\mathbf{X}_{c-}$  determina el primer cambio topológico entre el alambre y su imagen; para aquellos alambres que tocan el círculo marginal ambos objeto e imagen son topológicamente equivalentes (imágenes roja y anaranjada), sin embargo cuando el alambre no tiene contacto con el círculo marginal la equivalencia topológica es rota. Como imagen resulta una curva abierta (imagen morada). Precisamente cuando el alambre entra a la pupila la imagen es un punto localizado en  $P[\mathbf{X}_{c-}]$ . Para aclarar este hecho, ver VIDEO2, conforme el alambre se mueve dentro de la pupila de salida vemos que la curva cerrada imagen se expande (emergiendo desde un punto en  $P[\mathbf{X}_{c-}]$ ). Cuando el alambre toca el círculo marginal, esta curva abierta imagen es tangente al círculo marginal ahora en el plano  $z_1$ ; después de esto, conforme el alambre se sigue moviendo la curva cerrada imagen se desenvuelve en una curva abierta.

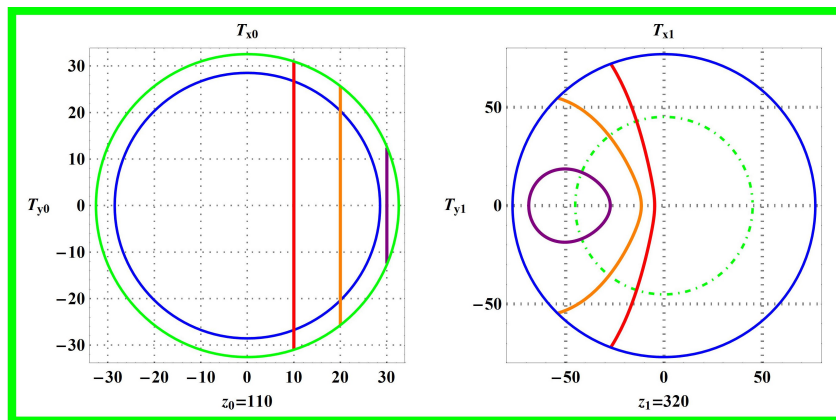


Figura 4.5: Plano objeto intersectando una rama de la cáustica, plano de detección fuera de ésta.

## CAPÍTULO 4. PRUEBA ANALÍTICA DEL ALAMBRE Y SUBESTRUCTURADA DE RONCHI

### 4.5. ANÁLISIS DE TODAS LAS CONFIGURACIONES PARA LA PRUEBA DEL ALAMBRE

Para la configuración  $z_0$  justo en el foco marginal y  $z_1 = 320$ , la pupila de salida en el plano objeto está dada de nuevo por la intersección con  $\mathbf{X}_{c-}$ . Este caso es similar a cuando  $z_0 = 110$ , sin embargo en este caso la región marginal entera ha colapsado en un único punto y por esta razón las imágenes son todas curvas cerradas. Es importante recalcar que cuando el alambre está justo sobre el foco marginal su imagen es la frontera de la pupila de salida en el plano  $z_1 = 320$ , o sea que esta curva cerrada particular es ese círculo, ver VIDEO3.

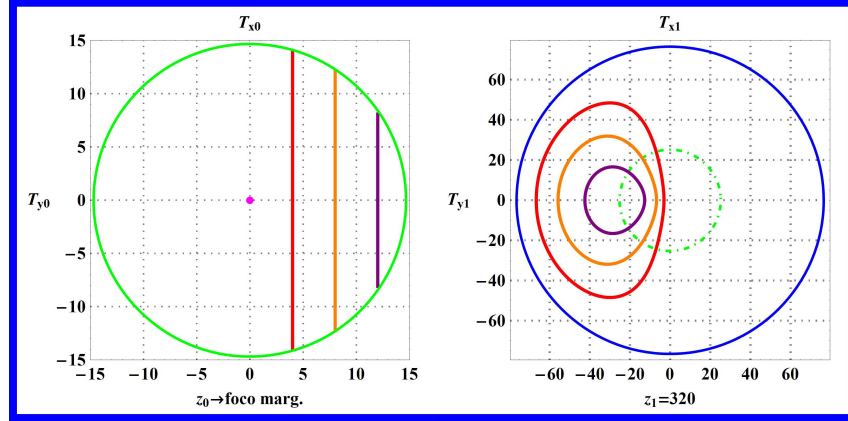


Figura 4.6: Plano objeto en el foco marginal, plano de detección después de la cáustica.

En la configuración  $z_0 = 210$  y  $z_1 = 320$ , el plano objeto intersecta ambas ramas de la superficie cáustica. Si no hay contacto entre el alambre y  $\mathbf{X}_{c-}$ , entonces hay equivalencia topológica entre el objeto y su imagen (la imagen es una curva abierta, vea la curva morada); sin embargo, cuando el alambre es tangente a  $\mathbf{X}_{c-}$  ya no son más topológicamente equivalentes, porque una imagen puntual aparece (este punto, sobre  $P[\mathbf{X}_{c-}]$ ). Conforme el alambre está más cerca de  $\mathbf{X}_{c-}$ , la imagen puntual evoluciona en una curva cerrada (ver imágenes roja y anaranjada). En estos casos hay dos imágenes: una curva cerrada y otra abierta para cada alambre. Es importante recalcar que las dimensiones de la curva cerrada imagen son determinadas por  $P[\mathbf{X}_{c+}]$  porque esta curva siempre está circunscrita esta proyección siempre. En ese caso particular podemos ver la relevancia de ambas  $P[\mathbf{X}_{c-}]$  y  $P[\mathbf{X}_{c+}]$  en el proceso de formación de imágenes múltiples, ver VIDEO4.

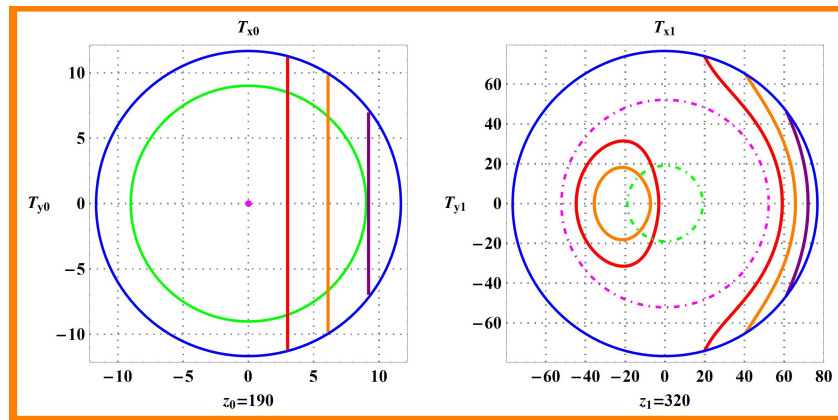


Figura 4.7: Plano objeto intersectando las dos ramas de la cáustica, plano de detección más allá de ésta.

# CAPÍTULO 4. PRUEBA ANALÍTICA DEL ALAMBRE Y SUBESTRUCTURADA DE RONCHI

## 4.5. ANÁLISIS DE TODAS LAS CONFIGURACIONES PARA LA PRUEBA DEL ALAMBRE

Cuando analizamos  $z_0$  en el foco paraxial y  $z_1 = 320$ , no habrá cambio de topología entre el alambre y su imagen, pues esta configuración corresponde al caso límite de la anterior donde ambas ramas de la cáustica colapsan en un punto, como consecuencia ambas proyecciones colapsan también, dejando como imagen únicamente una curva abierta, ver VIDEO5.

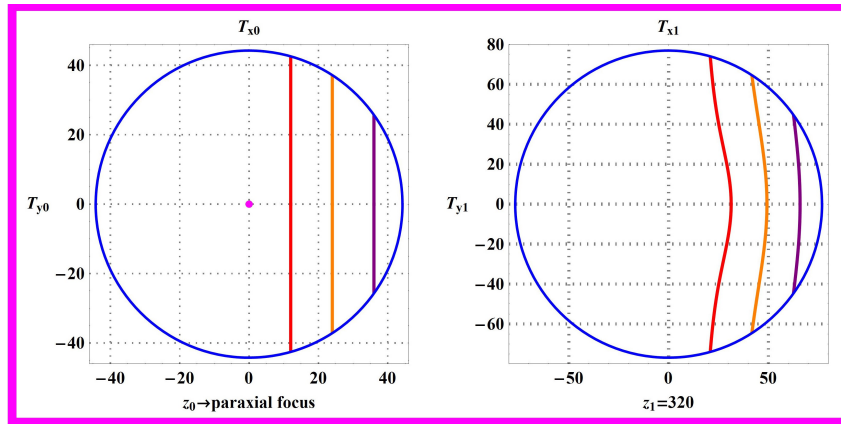


Figura 4.8: Plano objeto en el foco paraxial, plano de detección después de la cáustica.

**CAPÍTULO 4. PRUEBA ANALÍTICA DEL ALAMBRE Y SUBESTRUCTURADA DE  
RONCHI**  
4.5. ANÁLISIS DE TODAS LAS CONFIGURACIONES PARA LA PRUEBA DEL ALAMBRE

**4.5.2. Plano objeto y plano de detección, ambos dentro de la región cáustica**

Ahora analizamos las nuevas configuraciones donde ambos (o al menos una de ellos) planos objeto e imagen, pueden intersectar la región cáustica. Estas configuraciones dan nuevos patrones muy interesantes, donde la topología de la imagen es completamente diferente a la de las configuraciones previas. Empezando con la primera configuración  $z_0 = 45, z_1 = 135$ . Aquí, el plano objeto está fuera de la región cáustica mientras el plano imagen intersecta la rama  $\mathbf{X}_{c-}$  (su pupila de salida). Para esta configuración la correspondencia entre el alambre y su imagen es siempre uno a uno y por ellos son topológicamente equivalentes. Sin embargo,  $PV[\mathbf{X}_{c-}]$  determina las propiedades de la imagen, porque cuando el alambre no toca  $PV[\mathbf{X}_{c-}]$  la imagen es una curva que no toca la frontera de su pupila de salida. Cuando el alambre toca  $PV[\mathbf{X}_{c-}]$  entonces la imagen es tangente a  $\mathbf{X}_{c-}$ ; y cuando el alambre intersecta  $PV[\mathbf{X}_{c-}]$  en dos puntos, la imagen correspondiente toca dos puntos de la frontera de la pupila de salida, ver VIDEO6.

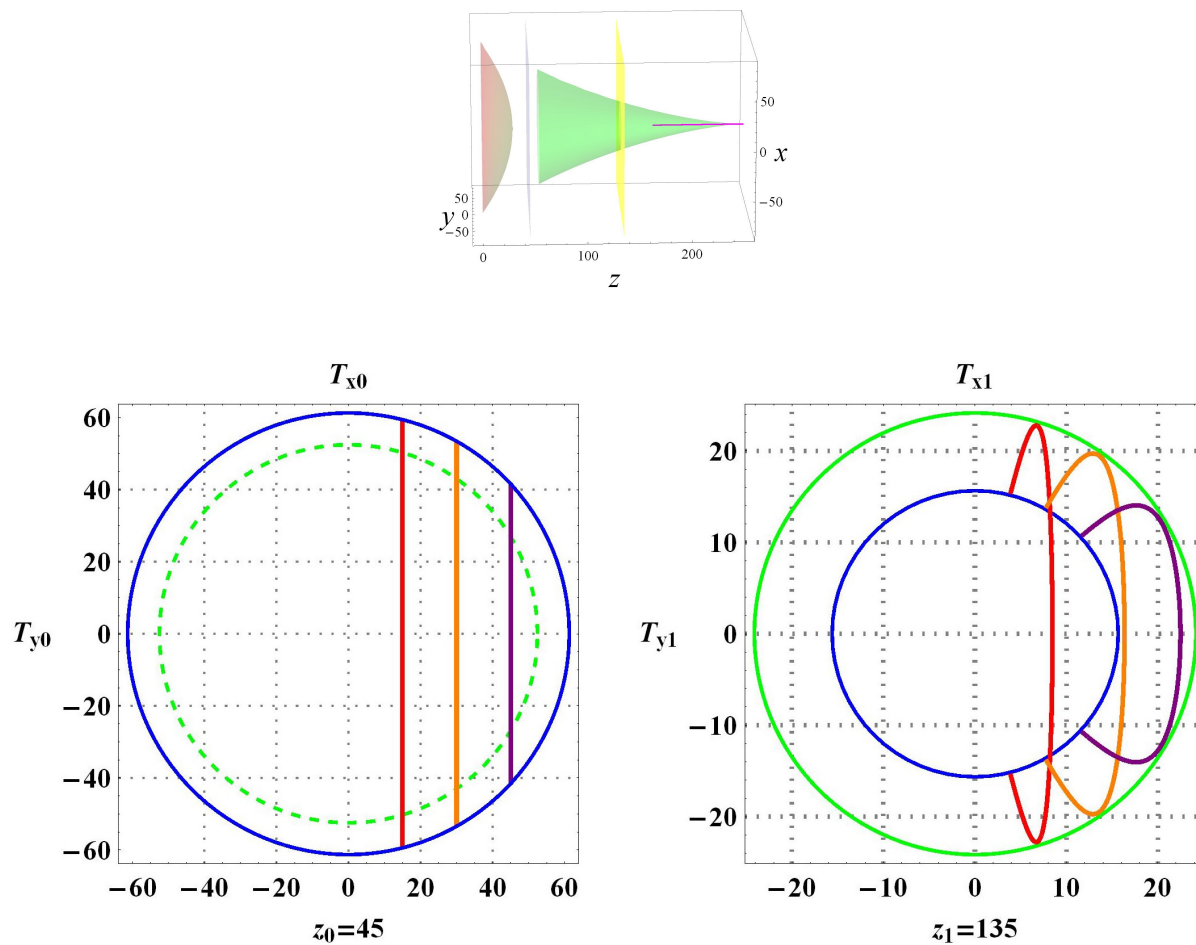


Figura 4.9: Plano objeto antes de la cáustica, plano de detección intersectando una rama de la cáustica.

## CAPÍTULO 4. PRUEBA ANALÍTICA DEL ALAMBRE Y SUBESTRUCTURADA DE RONCHI

### 4.5. ANÁLISIS DE TODAS LAS CONFIGURACIONES PARA LA PRUEBA DEL ALAMBRE

Para la configuración  $z_0 = 45, z_1 = 200$ , donde el plano objeto sigue fuera de la región de enfocamiento mientras el plano imagen intersecta a las dos ramas de la cáustica ( $\mathbf{X}_{c-}$  y  $\mathbf{X}_{c+}$ ), las proyecciones  $PV[\mathbf{X}_{c-}]$  y  $PV[\mathbf{X}_{c+}]$  juegan un rol mayor en la descripción de la estructura topológica del patrón. Esto es, cuando el alambre no toca ni  $PV[\mathbf{X}_{c-}]$  ni a  $PV[\mathbf{X}_{c+}]$ , hay equivalencia topológica entre el objeto y su imagen. Sin embargo cuando el alambre toca tangencialmente a  $PV[\mathbf{X}_{c+}]$  una singularidad aparece en una curva imagen (justamente en  $\mathbf{X}_{c+}$ ; o sea, en el plano  $z_1$ ). Cuando el alambre intersecta a  $PV[\mathbf{X}_{c+}]$  en dos puntos, la singularidad previa evoluciona y la imagen resultante es una curva del tipo “Tschirnhausen’s cubic” [97]; esta es una curva con una autointersección, implicando que la estructura topológica de la imagen ha cambiado. Ahora, si el contacto entre el alambre y  $PV[\mathbf{X}_{c-}]$  es tangente, entonces la sección correspondiente de la curva cerrada imagen toca a su vez  $\mathbf{X}_c$  en forma tangente también; si el alambre intersecta a  $PV[\mathbf{X}_{c-}]$  en dos puntos, entonces la sección correspondiente de la curva cerrada imagen toca a  $\mathbf{X}_c$  en dos puntos. Note que la sección de la curva cerrada imagen está circunscrita por  $\mathbf{X}_c$ , ver VIDEO7. La  $PV[\mathbf{X}_{c+}]$  determina los cambios de topología de la imagen, mientras que  $PV[\mathbf{X}_{c-}]$  determina la condición de tangencia entre la imagen y la intersección del plano imagen con la rama de la cáustica  $\mathbf{X}_{c-}$

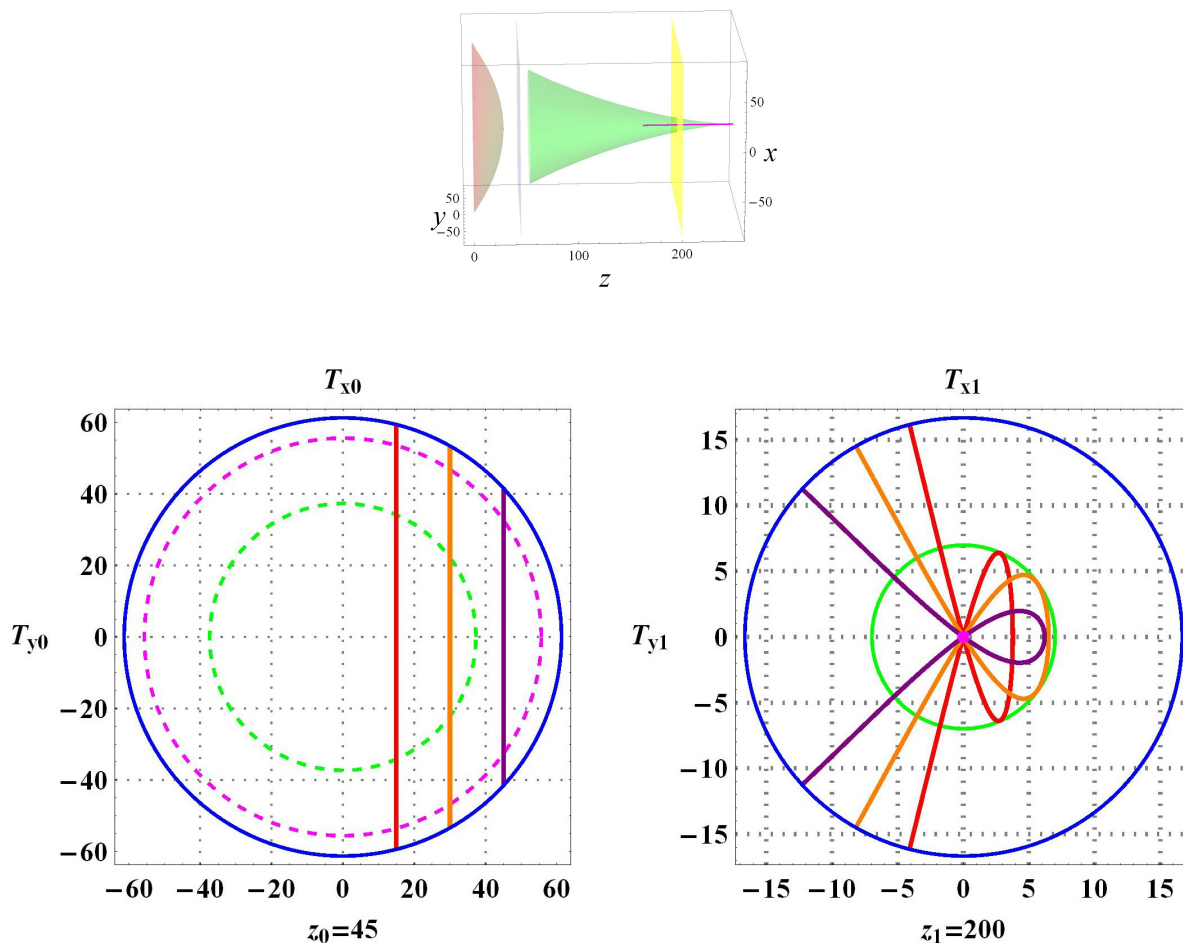


Figura 4.10: Plano objeto antes de la cáustica, plano de detección intersectando las dos ramas de la cáustica.

## CAPÍTULO 4. PRUEBA ANALÍTICA DEL ALAMBRE Y SUBESTRUCTURADA DE RONCHI

### 4.5. ANÁLISIS DE TODAS LAS CONFIGURACIONES PARA LA PRUEBA DEL ALAMBRE

En la tercera configuración  $z_0 = 110$  y  $z_1 = 150$  ambos planos objeto e imagen intersectan  $\mathbf{X}_{c-}$  (es la pupila de salida de ambos) así que existen ambos  $P[\mathbf{X}_{c-}]$  y  $PV[\mathbf{X}_{c-}]$ . Cuando el alambre toca tangencialmente a  $PV[\mathbf{X}_{c-}]$  la curva cerrada imagen toca a  $\mathbf{X}_{c-}$  en forma tangente; si el alambre intersecta en dos puntos a  $PV[\mathbf{X}_{c-}]$  entonces la curva cerrada imagen toca a  $\mathbf{X}_{c-}$  en dos puntos (curva morada). Justo cuando el alambre toca tangencialmente la región marginal en  $z_0$ , la curva cerrada imagen toca la región marginal en  $z_1$ ; y cuando el alambre intersecta la región marginal en dos puntos la curva cerrada imagen se transforma en una curva abierta (imágenes anaranjada y roja). Por lo tanto, en esta configuración hay cambio de topología también. Note que de nuevo, el papel de  $P[\mathbf{X}_{c-}]$  es indicar dónde se generan las imágenes que son curvas cerradas, ver VIDEO8. El tipo de contacto entre el alambre y la intersección del plano objeto y la región marginal determina si la imagen es una curva abierta o cerrada.

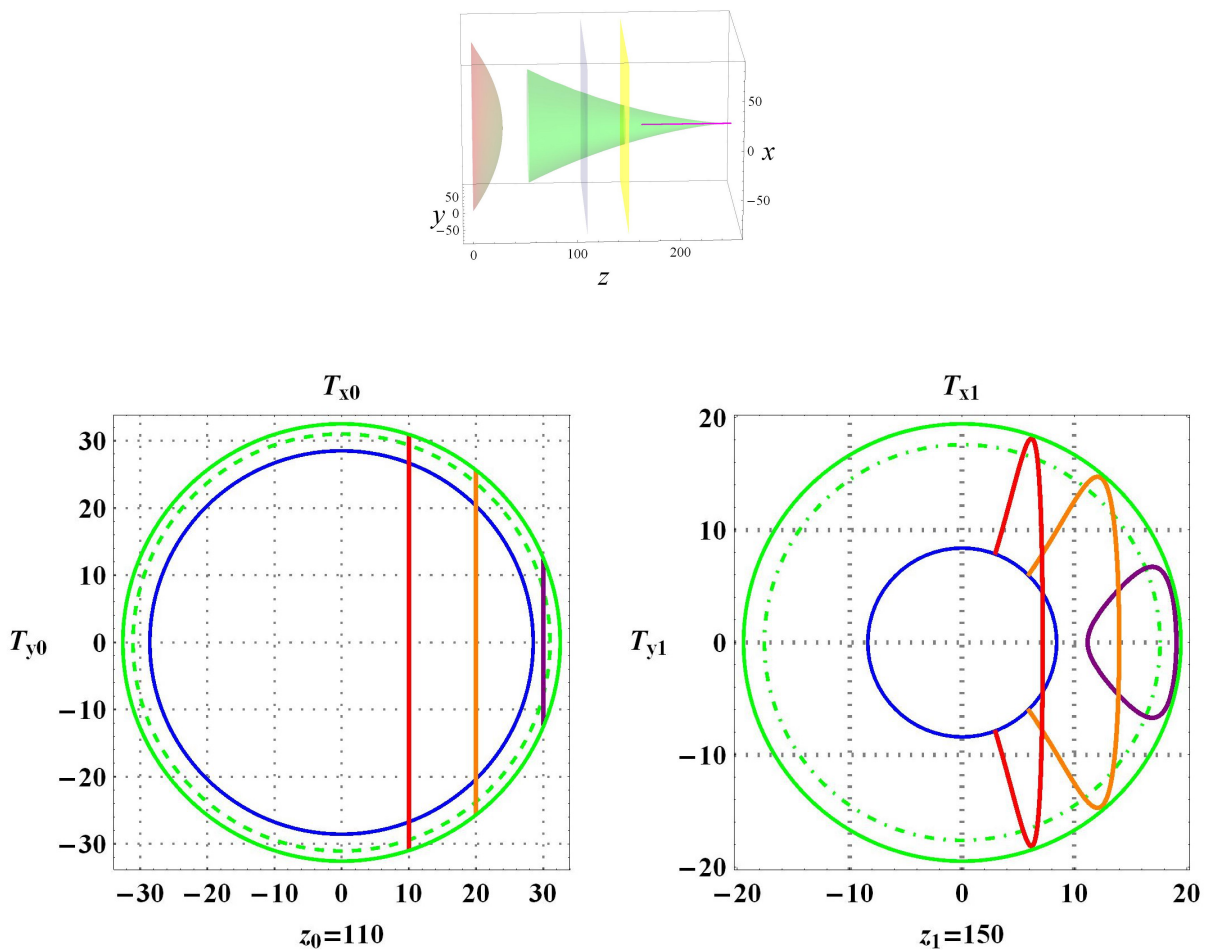


Figura 4.11: Planos objeto y de detección intersectando la misma rama de la cáustica.

## CAPÍTULO 4. PRUEBA ANALÍTICA DEL ALAMBRE Y SUBESTRUCTURADA DE RONCHI

### 4.5. ANÁLISIS DE TODAS LAS CONFIGURACIONES PARA LA PRUEBA DEL ALAMBRE

En la cuarta configuración  $z_0 = 110, z_1 = 215$ , el plano objeto intersecta  $\mathbf{X}_{c-}$  mientras el plano imagen intersecta ambas ramas de la cáustica. Por lo tanto,  $P[\mathbf{X}_{c-}]$  en  $z_1$ ,  $PV[\mathbf{X}_{c+}]$  y  $PV[\mathbf{X}_{c-}]$  en  $z_0$  determinan la naturaleza del patrón. Estos nuevos patrones son más interesantes que los previos porque una curva cerrada imagen con autointersección aparece (dos secciones cerradas). Cuando el alambre no tiene contacto con las proyecciones virtuales ni con la región marginal, la imagen corresponde a una curva cerrada (generada desde  $P[\mathbf{X}_{c-}]$ ). Tan pronto como el alambre toca tangencialmente a  $PV[\mathbf{X}_{c+}]$ , una singularidad sobre  $\mathbf{X}_{c+}$  aparece en la curva cerrada imagen; quedando una curva cerrada similar a una de tipo “piriforme” [97]. Cuando el alambre intersecta a  $PV[\mathbf{X}_{c+}]$  en dos puntos y no toca la región marginal, en la imagen emerge otra sección que es una curva cerrada desde la singularidad que tenía la primera (imagen morada); la imagen resultante es del tipo “eight-curve” [97]. Justo cuando el alambre toca tangencialmente la región marginal, la sección que conformaba la curva cerrada inicial de la imagen es tangente a la pupila de salida. También cuando el alambre intersecta la región marginal en dos puntos, esta sección cerrada inicial es rota, y la imagen resultante se convierte en una de tipo “Tschirnhausen’s cubic” como la que aparece en la segunda de estas nuevas configuraciones (imágenes roja y anaranjada). Si el alambre toca tangencialmente a  $P[\mathbf{X}_{c-}]$  entonces la segunda sección cerrada de la imagen toca tangencialmente a  $\mathbf{X}_{c-}$ . Y si el alambre intersecta a  $P[\mathbf{X}_{c-}]$  en dos puntos entonces esta segunda sección toca a  $\mathbf{X}_{c-}$ . Note que en todo momento esta segunda sección cerrada de la imagen esta circunscrita por  $\mathbf{X}_{c-}$ , ver VIDEO9

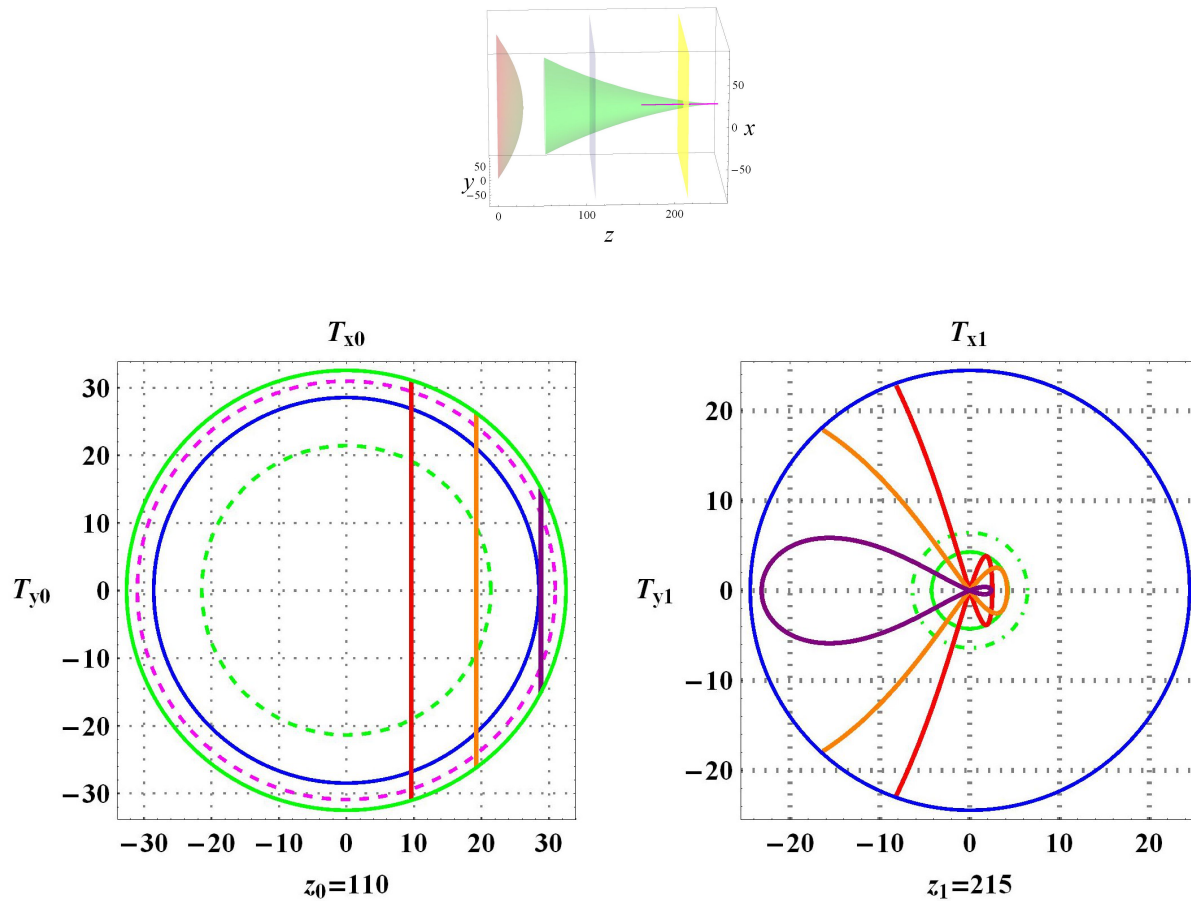


Figura 4.12: Plano objeto intersectando una rama de la cáustica, plano de detección intersectando ambas ramas de la cáustica.

**CAPÍTULO 4. PRUEBA ANALÍTICA DEL ALAMBRE Y SUBESTRUCTURADA DE RONCHI**

**4.5. ANÁLISIS DE TODAS LAS CONFIGURACIONES PARA LA PRUEBA DEL ALAMBRE**

Finalmente, presentamos la quinta configuración  $z_0 = 190, z_1 = 210$ , donde *ambos planos intersectan ambas ramas de la cáustica*. Las pupilas de salida están determinadas por la región marginal. En el plano  $z_0$ , determinamos ambas  $PV[\mathbf{X}_{c-}]$  y  $PV[\mathbf{X}_{c+}]$ ; y en  $z_1$  determinamos  $P[\mathbf{X}_{c-}]$  y  $P[\mathbf{X}_{c+}]$ . El alambre y su imagen son topológicamente equivalentes mientras el alambre no tiene contacto ni con las ramas de la cáustica ni con sus proyecciones virtuales. Tan pronto como el alambre toca tangencialmente a  $\mathbf{X}_{c-}$ , un imagen puntual aparece sobre  $P[\mathbf{X}_{c-}]$  (imágenes moradas): la equivalencia topológica está rota. Cuando el alambre intersecta a  $\mathbf{X}_{c-}$  en dos puntos, la imagen puntual evoluciona en una curva cerrada. Justo como en las configuraciones anteriores, el contacto entre el alambre y  $PV[\mathbf{X}_{c-}]$  en forma tangente o en dos puntos, determina si el contacto entre la curva cerrada imagen y  $\mathbf{X}_{c-}$  es en forma tangente o en dos puntos, respectivamente. En cuanto el alambre toca  $PV[\mathbf{X}_{c+}]$  en forma tangente, una singularidad aparece en la curva cerrada imagen (curva cerrada anaranjada); de nuevo, esta imagen es una curva de tipo “piriforme” [97]. Pero otro cambio de topología ocurre en la imagen cuando el alambre intersecta a  $PV[\mathbf{X}_{c+}]$  en dos puntos, la singularidad en la curva cerrada imagen evoluciona en otra sección cerrada; esta curva con autointersección es del tipo “eight-curve” [97] (curva roja.) Note que la primera sección cerrada está circunscrita por  $\mathbf{X}_{c-}$  mientras la segunda sección cerrada está circunscrita por  $P[\mathbf{X}_{c+}]$ , ver VIDEO10.

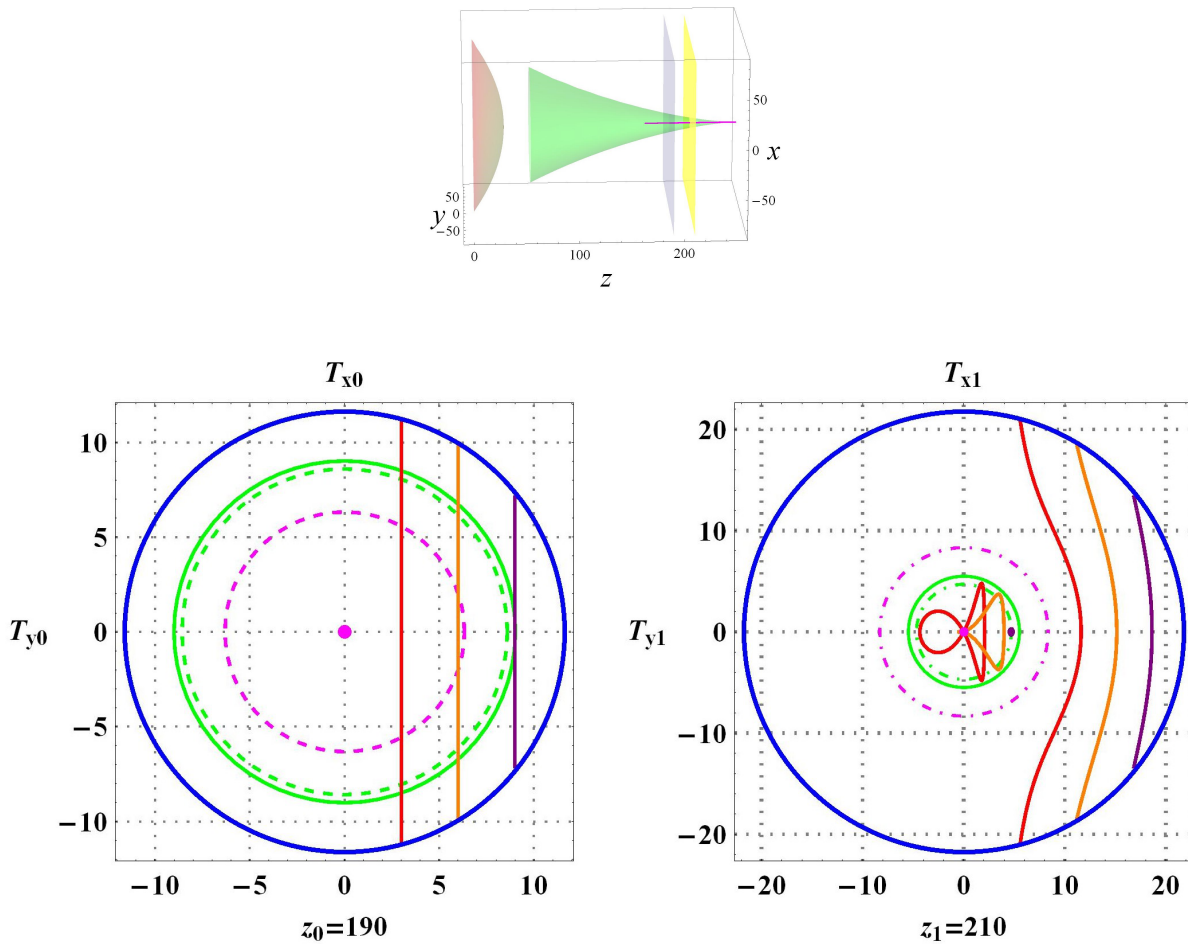


Figura 4.13: Planos objeto e imagen intersectando ambas ramas de la cáustica.

## Capítulo 5

# Diseño de la rejilla convencional general de Ronchi y su ronchigrama analítico asociado

### 5.1. Planteamiento del problema

En este capítulo perseguimos tres objetivos importantes: primero un método matemático general de diseño de rejillas de Ronchi; y segundo, generalizar el resultado principal del capítulo anterior para obtener el ronchigrama analítico asociado a esas rejillas; tercero, determinar cuál de las pruebas es mejor (o para qué configuraciones es una mejor que otra), para ello analizamos rejillas de mayor y menor frecuencia. Buscamos entender como cambia la estructura del patrón completo cuando la posición del plano de detección es cambiada de forma continua sobre el eje óptico, pero manteniéndose en el mismo rango de contacto con la superficie cáustica

### 5.2. Representación matemática de la rejilla de Ronchi

En general, es posible construir una rejilla de Ronchi de diferentes maneras de acuerdo a nuestras necesidades, los parámetros principales que podemos cambiar son la frecuencia de la rejilla, la posición de la franja principal y la inclinación medida desde un eje en un plano transversal al eje óptico. Debido a que nuestro sistema óptico posee simetría de revolución entonces es innecesario abordar esta inclinación de la rejilla. Comenzamos abordando la característica de la frecuencia de la rejilla, caracterizaremos ello con el número de franjas, así este dato será información de entrada. Otra información inicial para el diseño de la rejilla está determinada por la naturaleza del sistema óptico, y es su pupila de salida. Es común colocar la rejilla de tal modo que su franja central quede perfectamente alineada, esta franja puede escogerse o bien transparente o bien opaca, abordamos ambas para obtener un entendimiento más claro de los correspondientes ronchigramas

Las siguientes cuatro representaciones corresponden a rejillas perfectamente ajustadas a la pupila de salida. Las primeras dos tienen más franjas opacas que transparentes y las otras dos tienen más transparentes que opacas. A partir de estas representaciones pueden ser diseñadas aquellas rejillas donde las franjas inicial y final están sólo parcialmente contenidas a la pupila de salida. Ver figura 5.1(e).

La representación corresponderá a rejillas colocadas en in plano  $T_x, T_y$ . Por simplicidad , las franjas serán tomadas alineadas con el eje  $T_y$ . Si queremos una rejilla con una franja central opaca, tendremos un número impar  $2M + 1$  de franjas opacas. Si elegimos que además tenga  $2M$  franjas transparentes, y tenemos una pupila de salida E; la rejilla queda representada por:

**CAPÍTULO 5. DISEÑO DE LA REJILLA CONVENCIONAL GENERAL DE RONCHI  
Y SU RONCHIGRAMA ANALÍTICO ASOCIADO**  
5.2. REPRESENTACIÓN MATEMÁTICA DE LA REJILLA DE RONCHI

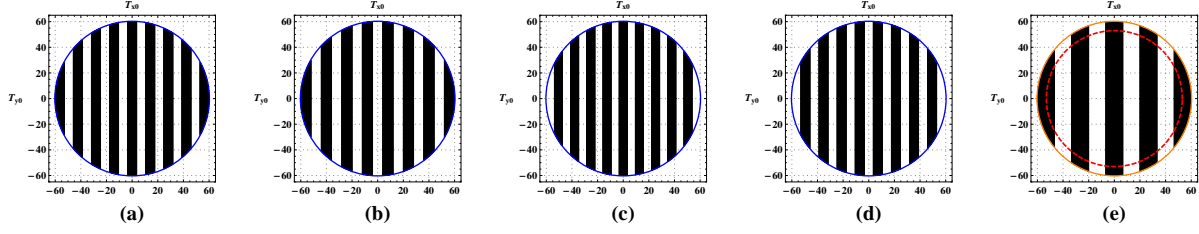


Figura 5.1: Todas las rejillas simétricas posibles de Ronchi.

$$T_x = (mw) + u \quad \text{donde} \quad m \in \mathbb{Z} \mid \|m\| \leq M \quad (5.1)$$

$$u \in \mathbb{R} \mid \|u\| \leq \frac{w}{4} \quad (5.2)$$

y el ancho de casa franja  $w$  es

$$w = \frac{E}{M + \frac{1}{4}}. \quad (5.3)$$

donde  $T_y^2 \leq \|E^2 - T_x^2\|$  (para todas las rejillas). En la figura 5.1(a) nosotros mostramos un ejemplo de este tipo de rejilla para  $E = 60$  y  $M = 4$ .

De la misma forma, si elegimos que la franja central sea transparente, podemos representar el número de franjas opacas con un número par  $2M$ . Si escogemos que tenga  $2M - 1$  franjas transparentes, entonces las rejilla puede representarse por:

$$T_x = (m - \frac{1}{2})w + u \quad \text{donde} \quad m \in \mathbb{Z} \mid 1 - M \leq m \leq M \quad (5.4)$$

$$u \in \mathbb{R} \mid \|u\| \leq \frac{w}{4} \quad (5.5)$$

y ahora el ancho de cada franjas es  $w$  es

$$w = \frac{E}{M - \frac{1}{4}}. \quad (5.6)$$

En la figura 5.1(b) nosotros presentamos un ejemplo de este tipo de rejilla.

Si escogemos que la rejilla tenga una franja central opaca,  $2M + 1$  franjas opacas y  $2(M + 1)$  franjas transparentes, entonces la rejilla está representada por

$$T_x = (mw) + u \quad \text{donde} \quad m \in \mathbb{Z} \mid \|m\| \leq M \quad (5.7)$$

$$u \in \mathbb{R} \mid \|u\| \leq \frac{w}{4} \quad (5.8)$$

y el ancho de cada franja  $w$  es

$$w = \frac{E}{M + \frac{3}{4}}. \quad (5.9)$$

ver figura 5.1(c).

Finalmente, si nosotros escogemos la franja central transparente,  $2M$  franjas opacas y  $2M + 1$  franjas transparentes, la rejilla resultante es

$$T_x = (m - \frac{1}{2})w + u \quad \text{donde} \quad m \in \mathbb{Z} \mid 1 - M \leq m \leq M \quad (5.10)$$

$$u \in \mathbb{R} \mid \|u\| \leq \frac{w}{4} \quad (5.11)$$

**CAPÍTULO 5. DISEÑO DE LA REJILLA CONVENCIONAL GENERAL DE RONCHI  
Y SU RONCHIGRAMA ANALÍTICO ASOCIADO**  
5.3. REPRESENTACIÓN ANALÍTICA DEL RONCHIGRAMA

---

y el ancho de cada franja  $w$  es

$$w = \frac{E}{M + \frac{1}{4}}, \quad (5.12)$$

un ejemplo de este tipo de rejilla es presentado en la figura 5.1(d).

Por otro lado, si se requiere obtener una rejilla que no se ajuste completamente a la pupila de salida, como la parte del gráfico circunscrita por el círculo punteado rojo en la figura 5.1(e), donde las franjas inicial y final están sólo parcialmente contenidas en la pupila de salida, nosotros podemos tomar una pupila de salida imaginaria más grande (para cualquiera de los casos previos) y podemos encontrar una relación entre la pupila de salida real y la imaginaria, de esta forma resolvemos el problema general del diseño de la rejilla. Escencialmente, debemos dar una restricción a la pupila imaginaria tal que sus franjas inicial y final permanezcan dentro de la pupila de salida como franjas más delgadas que la otras en la rejilla. las condiciones para una rejilla con  $2M + 1$  franjas opacas y  $2M$  transparentes es

$$E_i < E \frac{4M + 1}{4M - 1} \quad (5.13)$$

para una rejilla con  $2M$  franjas opacas y  $2M-1$  franjas transparentes

$$E_i < E \frac{4M - 1}{4M - 3} \quad (5.14)$$

para una rejilla con  $2M+1$  franjas opacas y  $2(M+1)$  franjas transparentes

$$E_i < E \frac{4M + 3}{4M + 1} \quad (5.15)$$

para una rejilla con  $2M$  franjas opacas y  $2M+1$  franjas transparentes

$$E_i < E \frac{4M + 1}{4M - 1} \quad (5.16)$$

### 5.3. Representación analítica del ronchigrama

Finalmente y generalizando el resultado del capítulo anterior, la representación analítica del ronchigrama  $(X_1, Y_1)$  en el plano  $Z = z_1$  de la rejilla colocada en  $Z = z_0$  es

$$X_1 = \left[ \frac{z_1 - X_{c+}(\rho)}{z_0 - X_{c+}(\rho)} \right] G, \quad (5.17)$$

$$Y_1 = \pm \left[ \frac{z_1 - X_{c+}(\rho)}{z_0 - X_{c+}(\rho)} \right] \sqrt{\left[ \frac{(1 - \gamma \sqrt{1 - (\gamma^2 - 1)f'^2(\rho)})f'(\rho)}{\gamma^2 f'^2(\rho) - 1} (z_0 - X_{c+}(\rho)) \right]^2 - G^2}.$$

Donde sólo es necesario reemplazar  $G$  por  $T_x$ . De la ecuación (5.17) es claro que el patrón depende directamente de: la rama de la cáustica  $X_{c+}$ , el perfil de la lente y el índice de refracción de ésta. Resaltamos que la cáustica toma un rol fundamental en el cálculo del ronchigrama y por consiguiente en su forma, aún cuando tanto la rejilla como el plano de detección estén fuera de la región cáustica.

La parametrización más simplificada del patrón, se obtiene sustituyendo la ecuación (4.1) en (5.17) y

resulta ser:

$$X_1 = \frac{\left[ (z_1 - f)f'(\gamma^2 - 1) + \rho \left[ 1 + \gamma\sqrt{1 - (\gamma^2 - 1)f'^2} \right] \right] G}{(z_0 - f)f'(\gamma^2 - 1) + \rho \left[ 1 + \gamma\sqrt{1 - (\gamma^2 - 1)f'^2} \right]}, \quad (5.18)$$

$$Y_1 = \left[ (z_1 - f)f'(\gamma^2 - 1) + \rho \left[ 1 + \gamma\sqrt{1 - (\gamma^2 - 1)f'^2} \right] \right] \sqrt{\left[ \frac{(1 - \gamma\sqrt{1 - (\gamma^2 - 1)f'^2})f'}{f'^2\gamma^2 - 1} \right]^2 - \left[ \frac{G}{(z_0 - f)f'(\gamma^2 - 1) + \rho \left[ 1 + \gamma\sqrt{1 - (\gamma^2 - 1)f'^2} \right]} \right]^2}.$$

Note que cuando  $z_1 = z_0$ , el ronchigrama es idéntico a la representación de la rejilla de Ronchi.

## 5.4. Calculando ronchigramas: ejemplos

Con la finalidad de mostrar la simplicidad y generalidad de nuestro algoritmo presentamos en esta sección tres ejemplos. El primero de ellos es una lente plano-esférica (elegimos ésta por ser ampliamente estudiada) de radio 60 y representada de forma general por  $f = \sqrt{60 - \rho^2}$ . Sustituyendo esta función y usando los valores numéricos  $n_l = 1,5$  (vidrio),  $n_m = 1$  (vacío),  $z_0 = 70$  (antes del foco marginal), y  $z_1 = 300$  (más allá del foco paraxial) en las ecuaciones (4.1,4.2) nosotros obtenemos la superficie caústica mostrada en la figura 5.2:

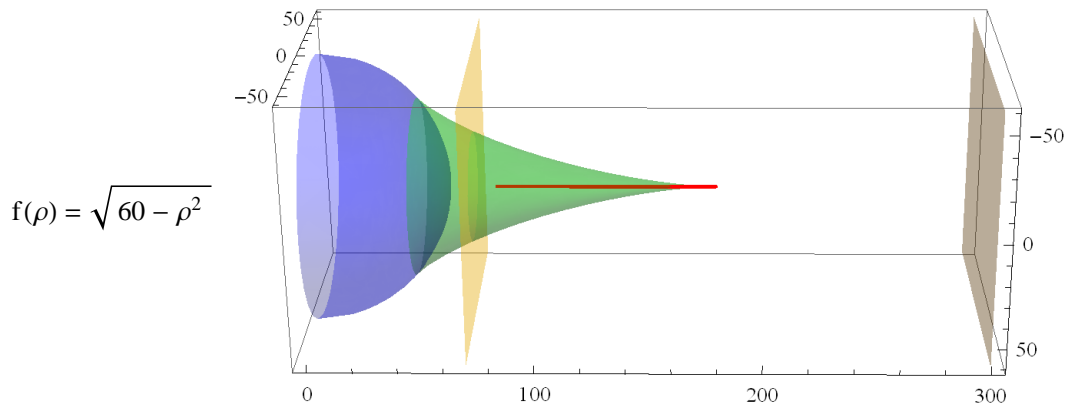


Figura 5.2: Sistema óptico con una lente plano-esférica.

Sustituyendo los mismos valores en las ecuaciones (5.18) nosotros escogemos una rejilla del primer tipo con  $E=20$ , donde  $20 < \rho$  Pupila de salida, y obtenemos el ronchigrama mostrado en la figura 5.3:

**CAPÍTULO 5. DISEÑO DE LA REJILLA CONVENCIONAL GENERAL DE RONCHI  
Y SU RONCHIGRAMA ANALÍTICO ASOCIADO**  
5.4. CALCULANDO RONCHIGRAMAS: EJEMPLOS

---

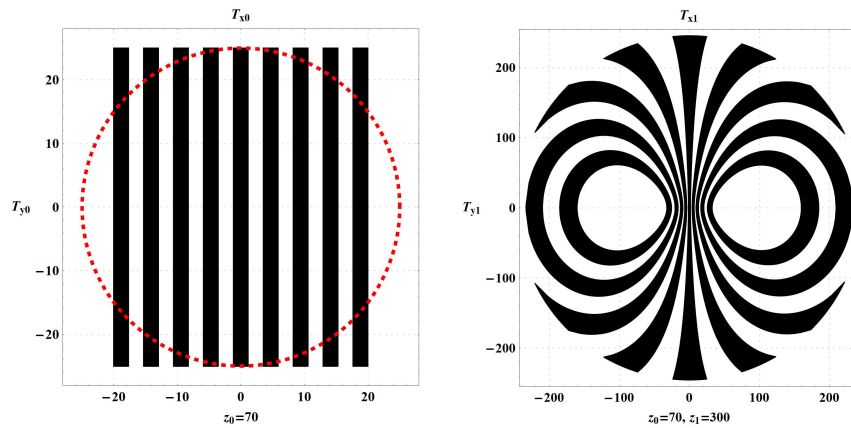


Figura 5.3: Ronchigrama para una lente plano esférica, en línea punteada en rojo es mostrada la intersección de la superficie marginal

Para el segundo ejemplo escogimos una lente con un perfil más elaborado, representado por  $f = \exp\left(-\left[\frac{\rho}{10}\right]^2\right) - \left(\frac{\rho}{\sqrt{10}}\right)^2$ . Sustituyendo esta función y usando los valores numéricos  $n_l = 1,5$  (vidrio),  $n_m = 1$  (vacío),  $z_0 = 10,0909$  (justo en el foco paraxial), and  $z_1 = 13$  (más allá del foco paraxial) en las ecuaciones (4.1,4.2) obtenemos la superficie cáutica mostrada en la figura 5.4:

$$f(\rho) = \exp\left[-\left(\frac{\rho}{10}\right)^2\right] - \left(\frac{\rho}{\sqrt{10}}\right)^2$$

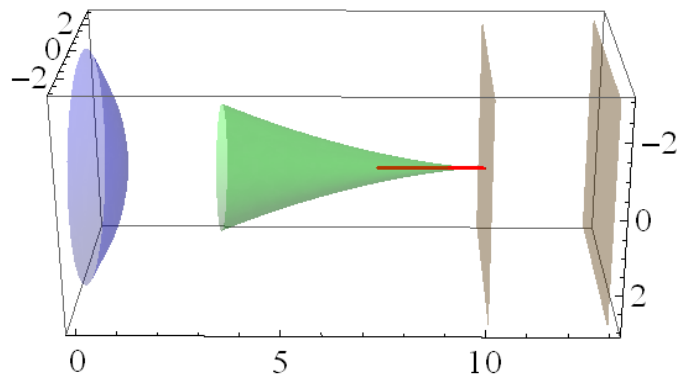


Figura 5.4: Sistema óptico con una lente plano-convexa con un perfil más elaborado

Sustituyendo los mismos valores en las ecuaciones (5.18) escogemos una rejilla del cuarto tipo con  $E=1.17608$  que coincide con la pupila de salida y obtenemos el ronchigrama mostrado en la figura 5.5:

**CAPÍTULO 5. DISEÑO DE LA REJILLA CONVENCIONAL GENERAL DE RONCHI  
Y SU RONCHIGRAMA ANALÍTICO ASOCIADO**  
5.4. CALCULANDO RONCHIGRAMAS: EJEMPLOS

---

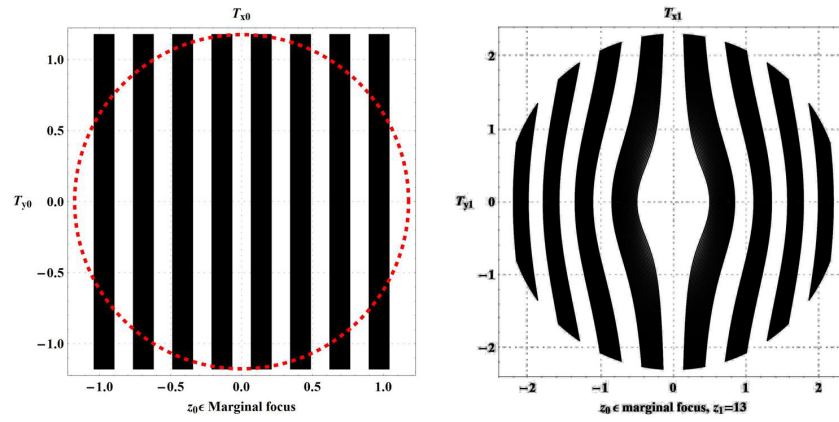


Figura 5.5: Ronchigrama para una lente plano-convexa, con la línea punteada en rojo es mostrada la intersección de la superficie marginal

Para el último ejemplo (y por continuidad con los capítulos anteriores) nosotros escogimos una lente plano-parabólica, para este ejemplo desarrollamos exhaustivamente cada configuración del sistema óptico.

### 5.5. Analizando el ronchigrama para todas las configuraciones posibles.

De nuevo y por consistencia con los capítulos anteriores, en los siguientes gráficos las intersecciones entre los planos (objeto e imagen) y la región marginal, son coloreadas en azul (de acuerdo a a 5.6), las intersecciones de estos planos y la región cáustica son coloreados en magenta o verde (de acuerdo a a 5.6 también). Recordemos que en 5.17 fue mostrado el rol fundamental de la cáustica sobre el ronchigrama; sin embargo, como ya mostramos en el capítulo anterior las proyecciones de la cáustica son indispensables para entender características muy particulares acerca de las franjas imagen. Sólo para recordar, estas proyecciones consisten en mapear la intersección de la superficie cáustica con el plano de la rejilla sobre el plano de detección, a través del campo vectorial  $\hat{\mathbf{R}}$ . Denotamos estas proyecciones por  $P[\mathbf{X}_{c+}]$  y  $P[\mathbf{X}_{c-}]$ . Por consistencia también estas proyecciones son coloreadas del color correspondiente a la rama de la cáustica, pero con una línea punteada.

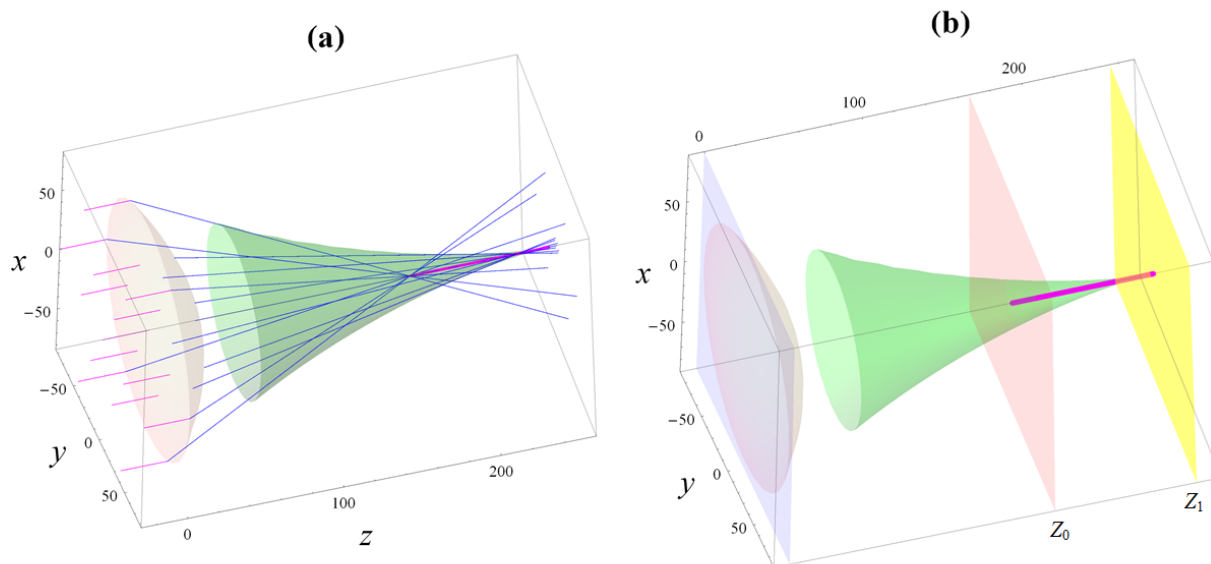


Figura 5.6: En a) son representados algunos rayos marginales en azul,  $\mathbf{X}_{c-}$  en verde y  $\mathbf{X}_{c+}$  en magenta. en b) el plano  $z = 0$ , el plano objeto en  $z = z_0$ , y el plano de detección en  $z = z_1$ .

**CAPÍTULO 5. DISEÑO DE LA REJILLA CONVENCIONAL GENERAL DE RONCHI  
Y SU RONCHIGRAMA ANALÍTICO ASOCIADO**  
**5.5. ANALIZANDO EL RONCHIGRAMA PARA TODAS LAS CONFIGURACIONES POSIBLES.**

**5.5.1. Plano de detección fuera de la cáustica, plano de la rejilla dentro y fuera de la región cáustica**

En esta sección abordamos las configuraciones conocidas del sistema óptico [38, 40, 45], el plano de detección en todo momento está fuera de la región focal, mientras el plano de la rejilla está cubriendo todas las posibilidades: I) antes de la superficie cáustica, II) intersectando una de las ramas de la cáustica, III) en el foco marginal, IV) intersectando ambas ramas de la cáustica y finalmente V) en el foco paraxial; vea los números romanos en la figura 5.7. El ronchigrama fue calculado en dos planos de detección correspondientes a  $z_1 = 300$  and  $z_1 = 370$ , denotados por A) y B) en la figura 5.7, para confirmar que el patrón es consistente bajo condiciones equivalentes (note que la región marginal determinará la pupila de salida en el plano del ronchigrama para cada caso).

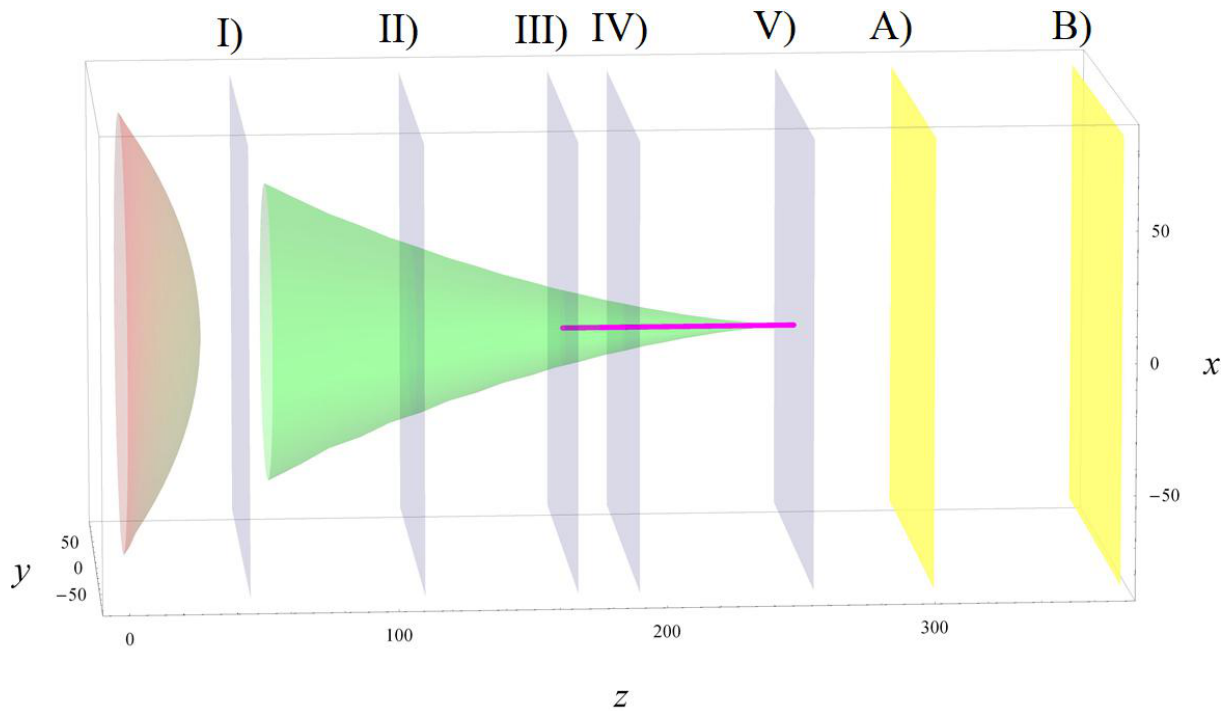


Figura 5.7: En romanos las posiciones del plano de la rejilla, A) y B) los planos de detección.

**CAPÍTULO 5. DISEÑO DE LA REJILLA CONVENCIONAL GENERAL DE RONCHI  
Y SU RONCHIGRAMA ANALÍTICO ASOCIADO**  
5.5. ANALIZANDO EL RONCHIGRAMA PARA TODAS LAS CONFIGURACIONES POSIBLES.

En la configuración I) donde  $z_0 = 45$  (figura 5.8) en (Ia) y (Ib) son tomados  $z_0$  and  $z_1$  con los mismos valores, la diferencia consiste en la frecuencia de la rejilla. De la misma manera, (Ic) y (Id) difieren en la frecuencia de la rejilla. Como está reportado en la literatura, la pupila de salida está determinada por la región marginal en ambos planos (de la rejilla y de detección), además, el ronchigrama no presenta franjas cerradas como imagen (vea `BeforeCaustic_LF.gif` y `BeforeCaustic_HF.gif`).

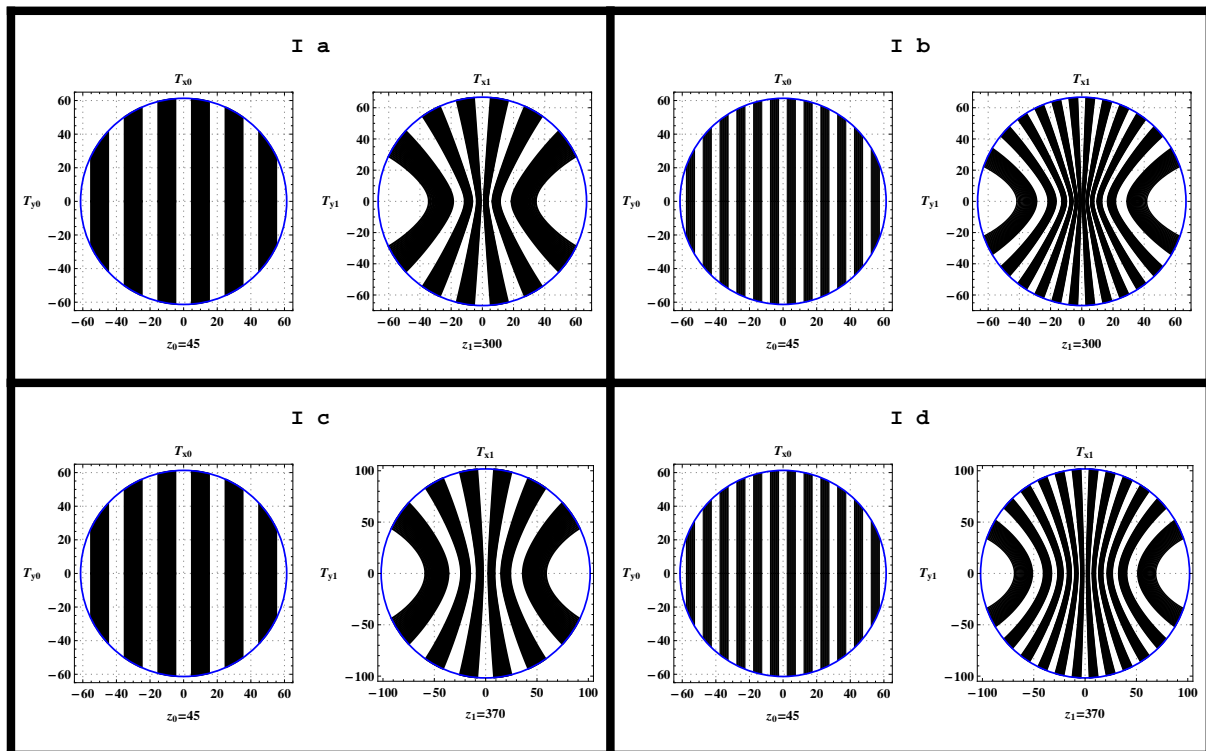


Figura 5.8: Si la rejilla está antes de la cáustica, el patrón no presenta franjas cerradas como imagen.

**CAPÍTULO 5. DISEÑO DE LA REJILLA CONVENCIONAL GENERAL DE RONCHI  
Y SU RONCHIGRAMA ANALÍTICO ASOCIADO**  
5.5. ANALIZANDO EL RONCHIGRAMA PARA TODAS LAS CONFIGURACIONES POSIBLES.

---

En la configuración II), donde  $z_0 = 110$  (figura 5.9) notamos la relevancia de la región marginal, al lado izquierdo de (IIa), (IIb), (IIc) y (IId) las franjas que quedan fuera de la región marginal presentan franjas cerradas como imagen (la pupila de salida para estos planos de la rejilla están determinados por la cáustica). Además, podemos notar en el lado derecho de los gráficos que estas franjas cerradas imagen son generadas precisamente sobre  $P[\mathbf{X}_{c-}]$  (vea OneBranch.LF.gif y OneBranch.HF.gif).

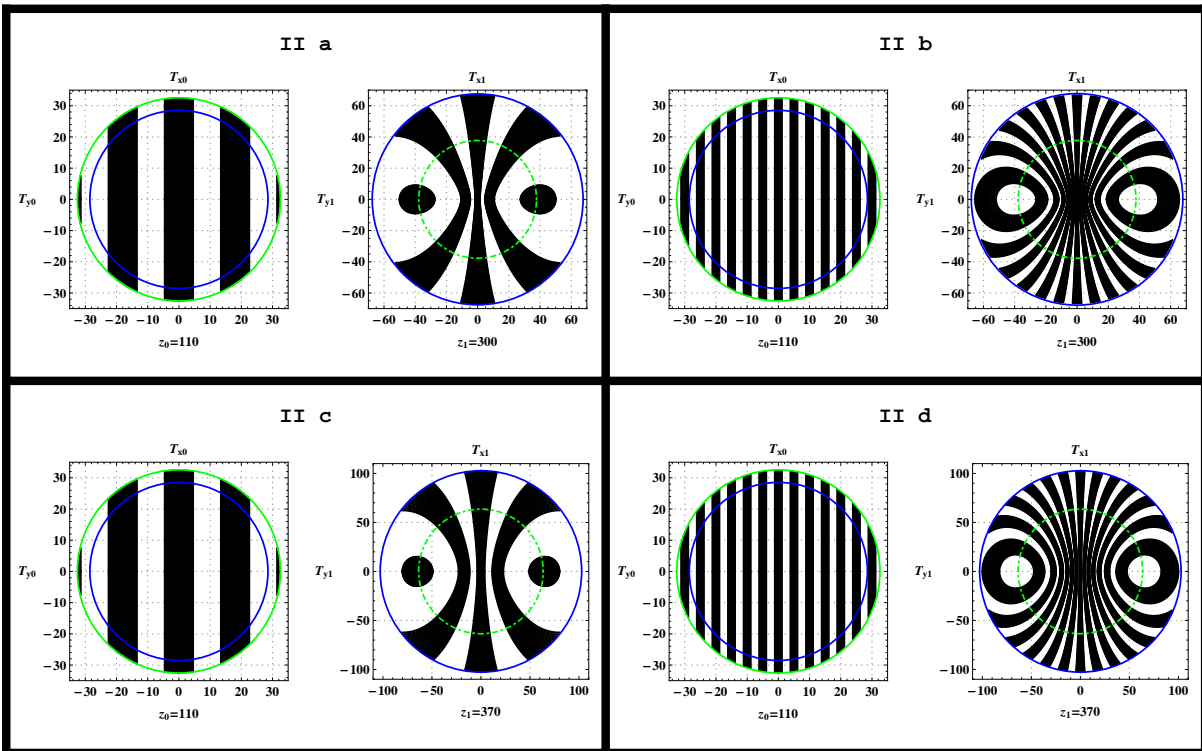


Figura 5.9: Si la rejilla intersecta una rama, el patrón tiene franjas cerradas y franjas abiertas como imagen; las franjas cerradas están sobre  $P[\mathbf{X}_{c-}]$ .

**CAPÍTULO 5. DISEÑO DE LA REJILLA CONVENCIONAL GENERAL DE RONCHI  
Y SU RONCHIGRAMA ANALÍTICO ASOCIADO**  
5.5. ANALIZANDO EL RONCHIGRAMA PARA TODAS LAS CONFIGURACIONES POSIBLES.

Para la configuración III) donde  $z_0$  es colocado en el foco marginal (figura 5.10), de nuevo la pupila de salida en el plano de la rejilla es determinado por  $\mathbf{X}_{c-}$ . Esta configuración tiene una relación directa con la anterior, esta configuración puede ser vista como un caso límite donde la región marginal entera ha colapsado en un único punto, esto implica que todas las franjas imagen sean cerradas. Nótese que la posición de las franjas cerradas está directamente relacionada con la proyección  $P[\mathbf{X}_{c-}]$  (vea `MarginalFocus_LF.gif` y `MarginalFocus_HF.gif`).

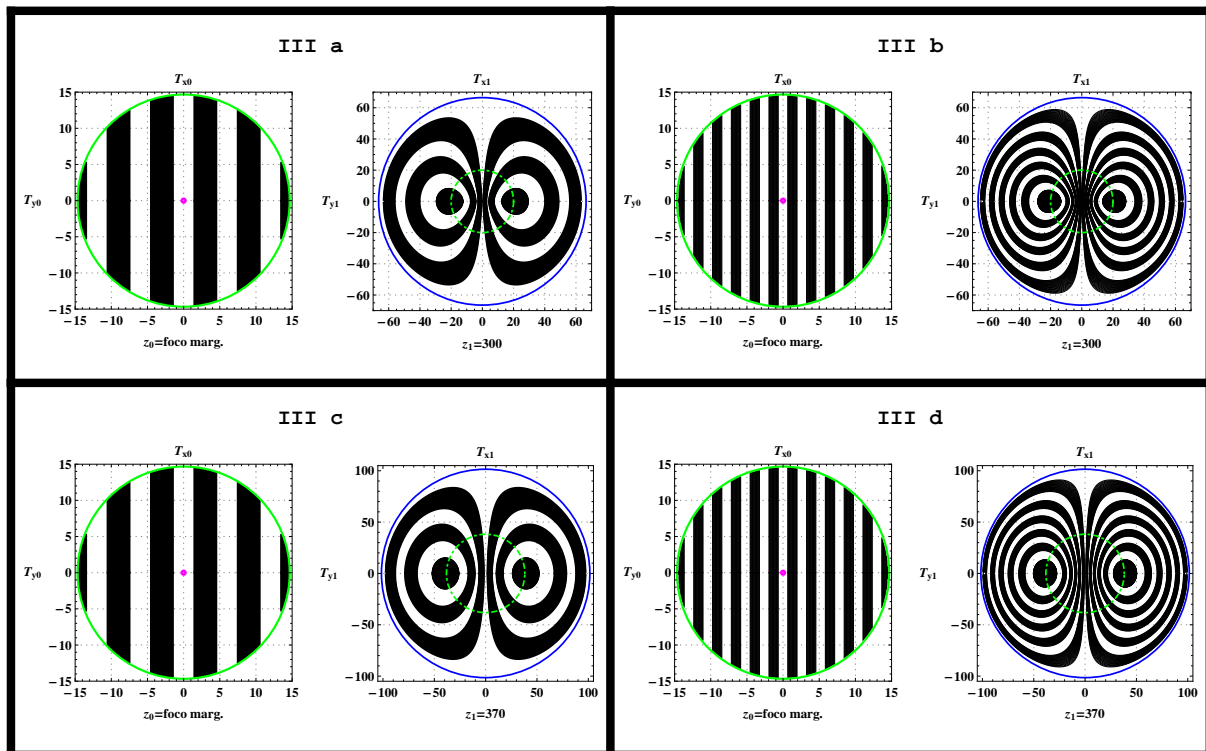


Figura 5.10: El patrón sólo tiene franjas cerradas imagen.

**CAPÍTULO 5. DISEÑO DE LA REJILLA CONVENCIONAL GENERAL DE RONCHI  
Y SU RONCHIGRAMA ANALÍTICO ASOCIADO**  
5.5. ANALIZANDO EL RONCHIGRAMA PARA TODAS LAS CONFIGURACIONES POSIBLES.

---

Para la configuración IV), con  $z_0 = 210$ , ambas ramas de la cáustica intersecta el plano de la rejilla, sin embargo solamente la intersección con  $\mathbf{X}_{c-}$  determina dos imágenes para una sola franja como puede verse en la figura 5.11. En (IVa) y (IVc) las franjas centrales tiene asociadas las franjas cerradas del centro y las franjas deformadas del centro. De manera similar, en (IVb) y (IVd) las cuatro franjas centrales tiene asociadas las cuatro franjas cerradas imagen y las cuatro franjas deformadas. Nuevamente, las franjas cerradas emergen de la proyección  $P[\mathbf{X}_{c-}]$ . La otra proyección de la cáustica  $P[\mathbf{X}_{c+}]$  delimita las regiones de imágenes abiertas e imágenes cerradas, además, todas las franjas cerradas están circunscritas por esta proyección (vea TwoBranches\_LF.gif y TwoBranches\_HF.gif).

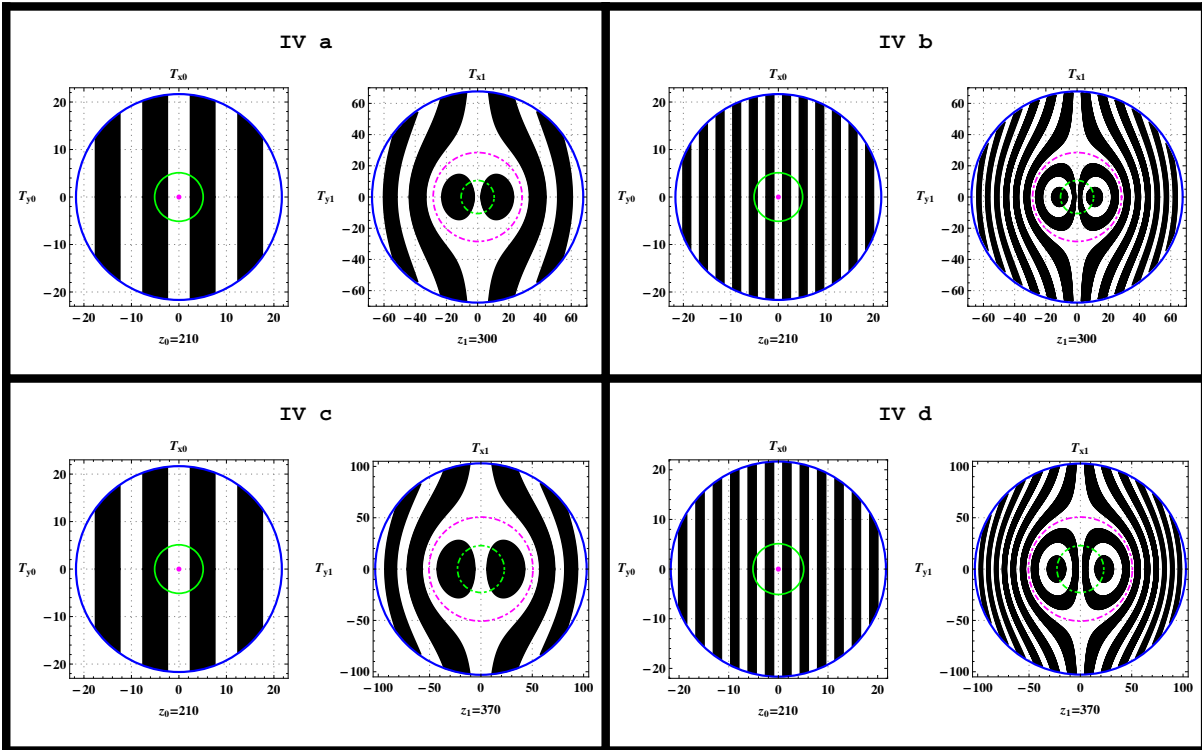


Figura 5.11: De nuevo las franjas cerradas se generan sobre  $P[\mathbf{X}_{c-}]$ , mientras  $P[\mathbf{X}_{c+}]$  delimita las dos regiones de las imágenes.

CAPÍTULO 5. DISEÑO DE LA REJILLA CONVENCIONAL GENERAL DE RONCHI  
 Y SU RONCHIGRAMA ANALÍTICO ASOCIADO  
 5.5. ANALIZANDO EL RONCHIGRAMA PARA TODAS LAS CONFIGURACIONES POSIBLES.

Cuando  $z_0$  es tomado en el foco paraxial (configuración V)), es obtenido un patrón que no contiene franjas cerradas. Este hecho puede ser explicado desde la configuración anterior y tomando el caso límite en el que  $\mathbf{X}_{c-}$  colapsa en un solo punto, como consecuencia no habrá franjas cerradas como imagen (vea ParaxialFocus\_LF.gif and ParaxialFocus\_HF.gif).

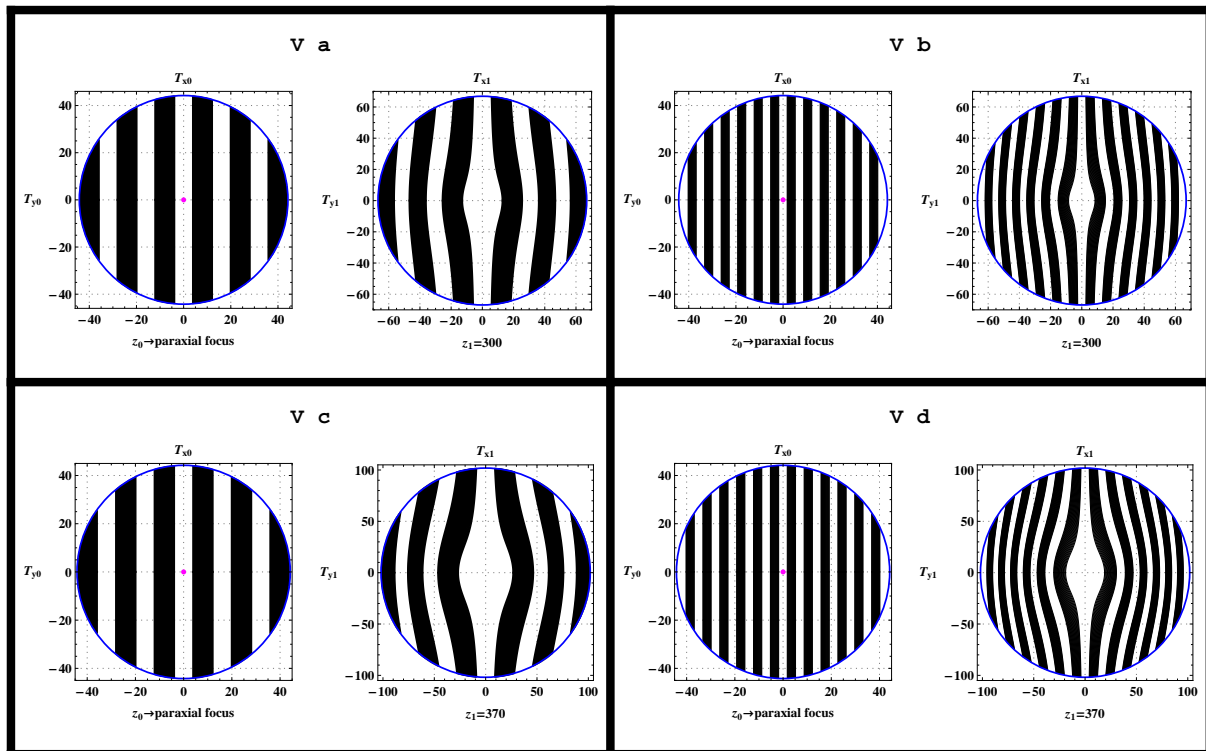


Figura 5.12: Esta configuración es un caso límite de la configuración anterior, donde  $P[\mathbf{X}_{c+}]$  ha colapsado en un punto (junto con las franjas cerradas imagen).

## CAPÍTULO 5. DISEÑO DE LA REJILLA CONVENCIONAL GENERAL DE RONCHI Y SU RONCHIGRAMA ANALÍTICO ASOCIADO

### 5.5. ANALIZANDO EL RONCHIGRAMA PARA TODAS LAS CONFIGURACIONES POSIBLES.

#### 5.5.2. Configuraciones donde ambos el plano de la rejilla y el plano de detección, intersectan la región cáustica.

Los gráficos de abajo corresponden a los ronchigramas obtenidos de aquellas configuraciones descritas en la figura 5.13. Están relacionados a través del mismo número romano (como en la sección anterior). Desde el inicio es posible notar que los ronchigramas no tienen ninguna similitud con los de la sección previa; además, es necesario poner atención a otro tipo de proyección (aunque ya la usamos en el capítulo anterior), la proyección virtual. Esta proyección virtual consiste en mapear la intersección de la cáustica con el plano de detección sobre el plano de la rejilla, a través del campo de luz refractado.

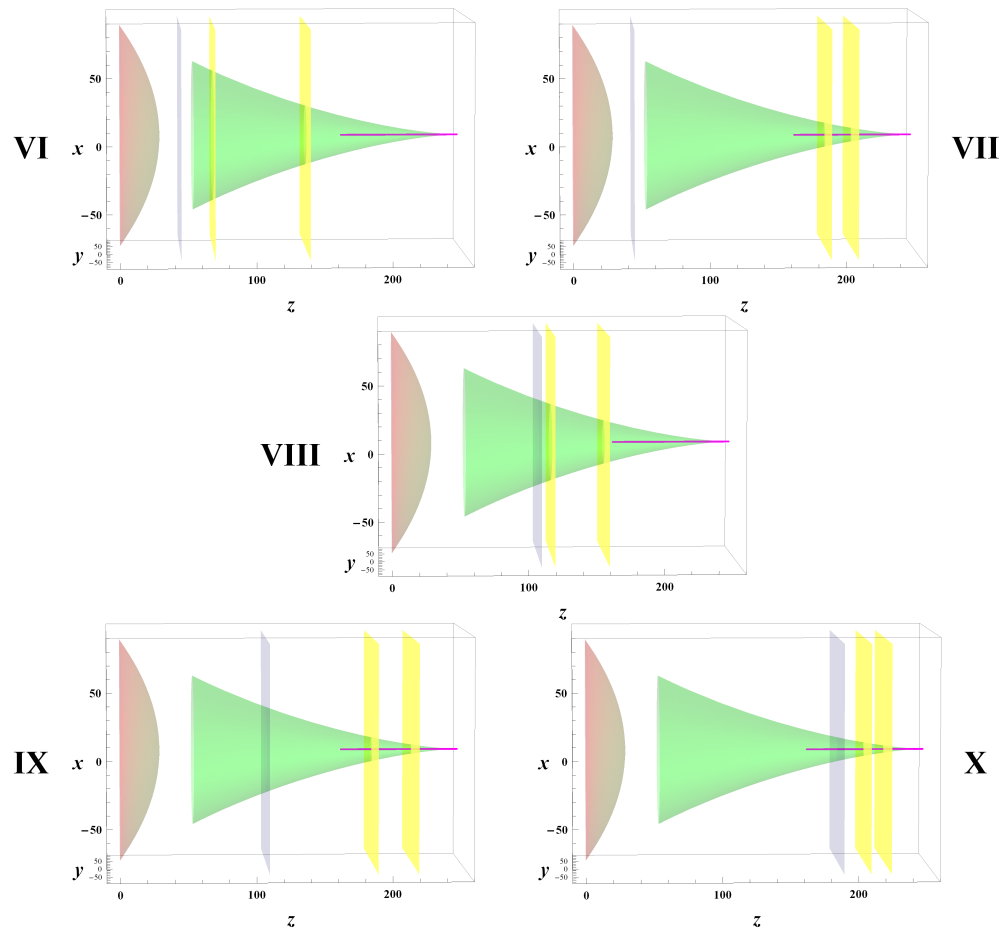


Figura 5.13: Configuraciones donde ambos el plano de la rejilla y el plano de detección, intersectan la región cáustica.

**CAPÍTULO 5. DISEÑO DE LA REJILLA CONVENCIONAL GENERAL DE RONCHI Y SU RONCHIGRAMA ANALÍTICO ASOCIADO**  
**5.5. ANALIZANDO EL RONCHIGRAMA PARA TODAS LAS CONFIGURACIONES POSIBLES.**

Iniciamos con la configuración VI, donde el plano de la rejilla está fuera de la cáustica y el plano de detección intersecta  $\mathbf{X}_{c-}$  (esta intersección determina la pupila de salida en aquel plano); el ronchigrama es formado sólo por franjas abiertas, la región marginal delimita dos regiones en el patrón, una de ellas donde la curvatura de la franja cambia un poco y la otra donde las franjas del patrón se superponen. Si una franja de la rejilla está dentro de la proyección virtual  $VP[\mathbf{X}_{c-}]$  su imagen (que es una franja deformada) toca la pupila de salida en dos puntos simétricos, mientras si la franja está fuera de  $VP[\mathbf{X}_{c-}]$  su franja deformada ni siquiera puede tocar la pupila de salida (vea `BeforeCaustic_OneBranch_LF.gif` y `BeforeCaustic_OneBranch_HF.gif`).

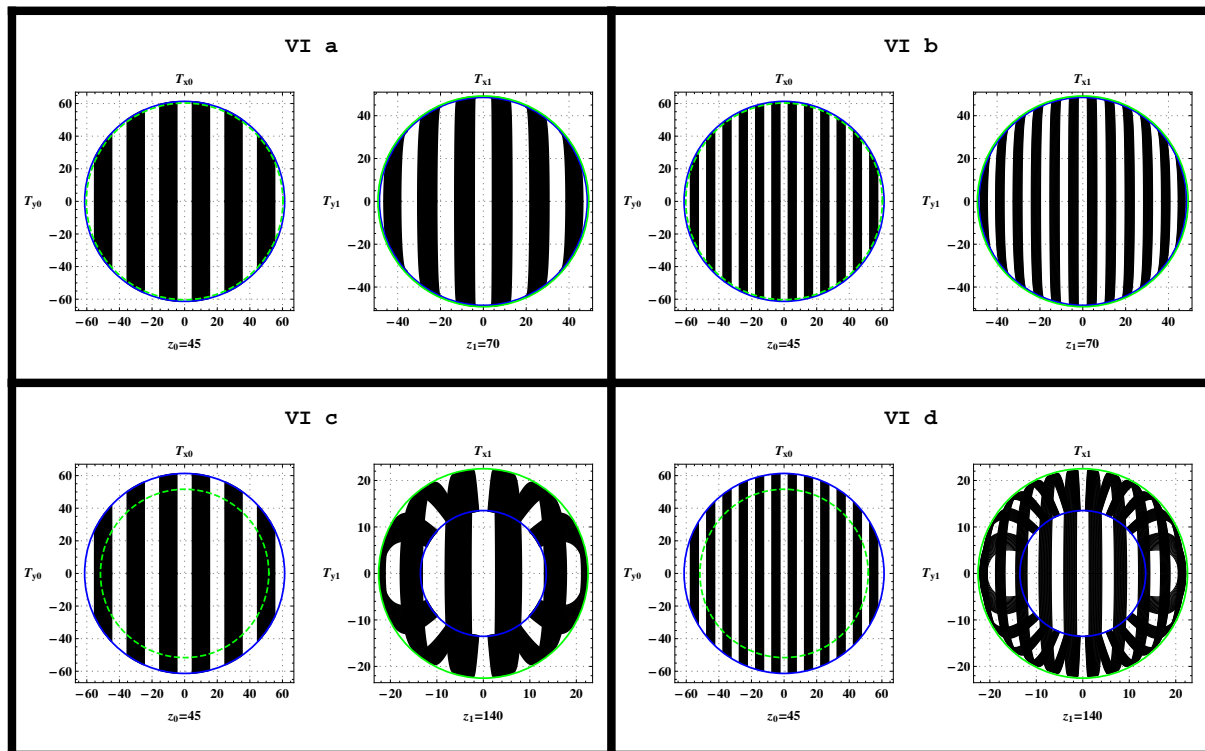


Figura 5.14: Dentro de la región marginal el patrón es más claro,  $VP[\mathbf{X}_{c-}]$  determina si la franja imagen toca la pupila de salida una o dos veces.

**CAPÍTULO 5. DISEÑO DE LA REJILLA CONVENCIONAL GENERAL DE RONCHI  
Y SU RONCHIGRAMA ANALÍTICO ASOCIADO**  
5.5. ANALIZANDO EL RONCHIGRAMA PARA TODAS LAS CONFIGURACIONES POSIBLES.

---

Para la configuración VII en la que el ronchigrama es calculado entre los focos marginal y paraxial, mientras la rejilla está antes de la región focal, la otra proyección virtual  $VP[\mathbf{X}_{c+}]$  juega un importante rol en la interpretación del patrón; en la figura 5.15 podemos ver que la mayoría de las franjas deformadas en el ronchigrama se convierten en curvas del tipo Tschirnhausen's cubic [97] (curvas con una auto-intersección), en (VII a) esto es más claro. Si la franja de la rejilla cruza  $VP[\mathbf{X}_{c+}]$ , su franja imagen deformada tendrá esta forma; mientras, si la franja de la rejilla está fuera de  $VP[\mathbf{X}_{c+}]$  su franja imagen se convierte en una franja sin auto-intersección, como puede corroborarse en (VII d) (vea `BeforeCaustic_TwoBranches_LF.gif` y `BeforeCaustic_TwoBranches_HF.gif`).

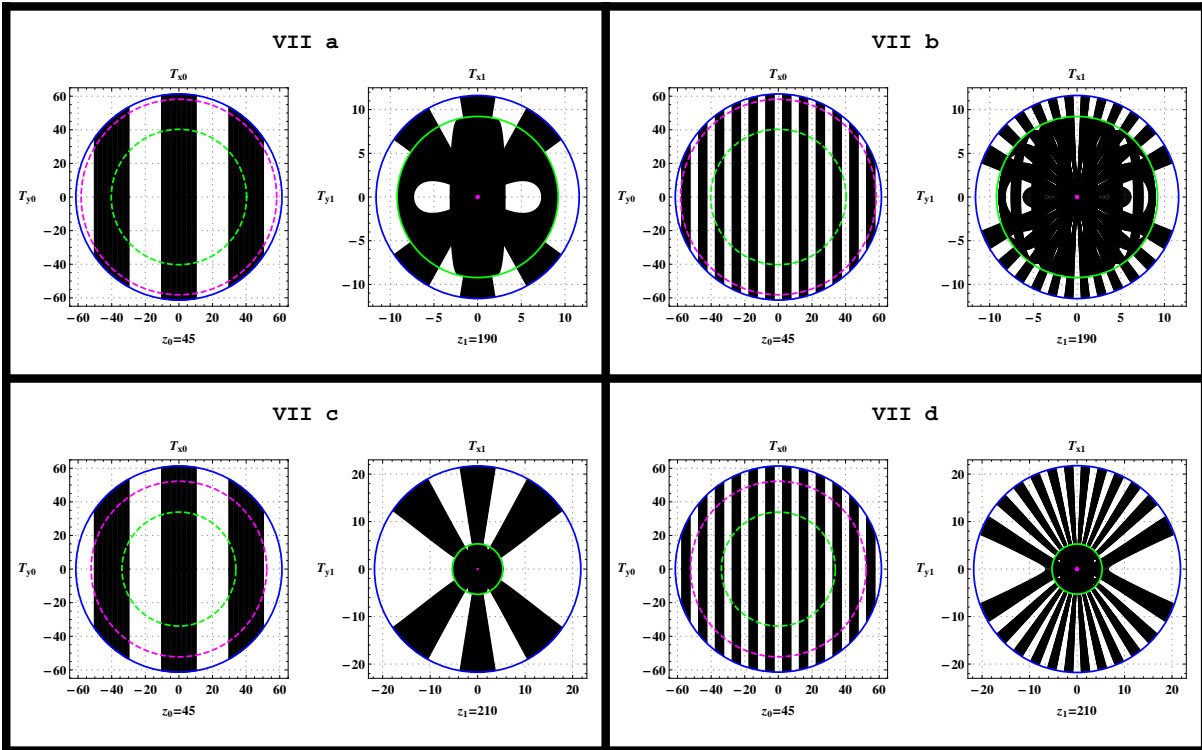


Figura 5.15:  $VP[\mathbf{X}_{c+}]$  determina si la franja imagen tiene o no auto-intersecciones.

**CAPÍTULO 5. DISEÑO DE LA REJILLA CONVENCIONAL GENERAL DE RONCHI  
Y SU RONCHIGRAMA ANALÍTICO ASOCIADO**  
5.5. ANALIZANDO EL RONCHIGRAMA PARA TODAS LAS CONFIGURACIONES POSIBLES.

En la configuración VIII, el plano de la rejilla y el plano de detección intersectan  $\mathbf{X}_{c-}$  (esta intersección justamente define sus pupilas de salida) los ronchigramas resultantes se parecen un poco a aquellos de la configuración VI, sin embargo, en esta configuración los ronchigramas tienen franjas cerradas también. En la figura 5.16 puede notarse en (VIII a), (VIII c), y (VIII d) que para aquellas franjas de la rejilla situadas fuera de la región marginal hay curvas cerradas imagen asociadas a ellas. Además, en (VIII c) puede verse que las franjas cerradas en el ronchigrama no tocan la pupila de salida, esto ocurre porque las franjas asociadas a estas imágenes en la rejilla están fuera de proyección virtual  $P[\mathbf{X}_{c-}]$ . Las franjas cerradas imagen están de nuevo generadas desde  $P[\mathbf{X}_{c-}]$  (see `OneBranch_OneBranch_LF.gif` y `OneBranch_OneBranch_HF.gif`).

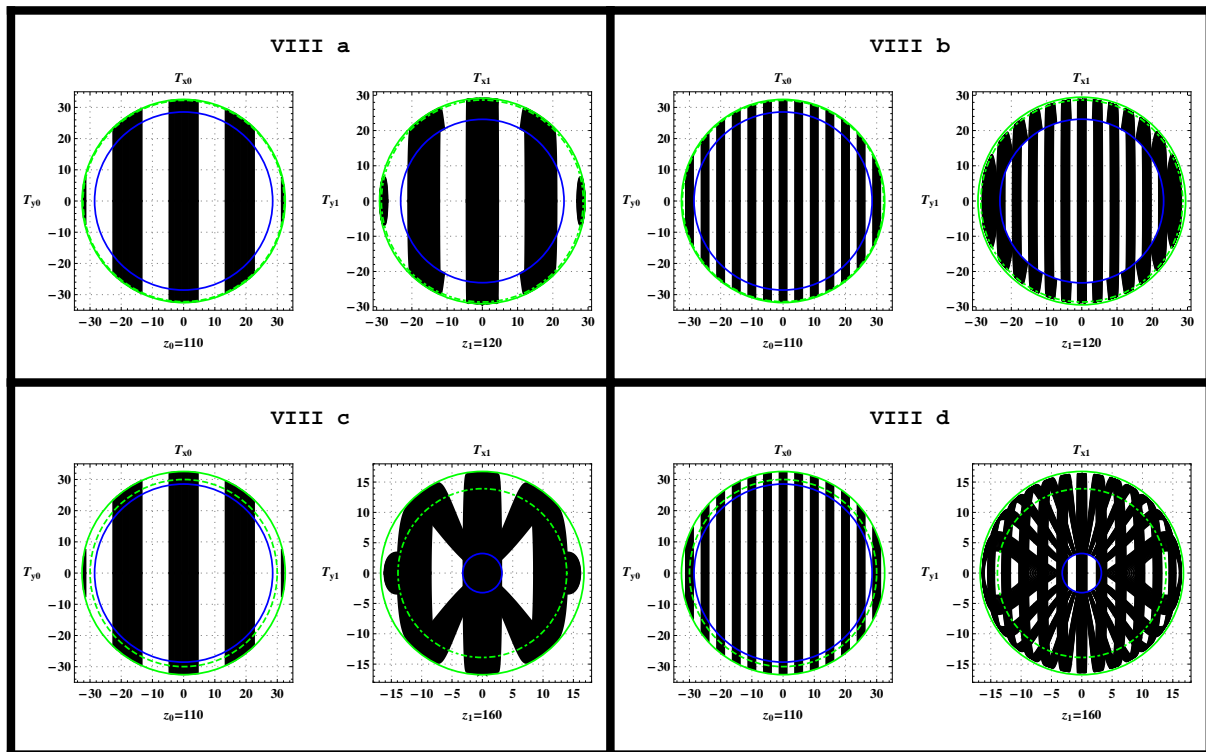


Figura 5.16: Si la franja está fuera de la región marginal, su imagen es cerrada; nuevamente el patrón es más claro dentro de la región marginal.

**CAPÍTULO 5. DISEÑO DE LA REJILLA CONVENCIONAL GENERAL DE RONCHI  
Y SU RONCHIGRAMA ANALÍTICO ASOCIADO**  
5.5. ANALIZANDO EL RONCHIGRAMA PARA TODAS LAS CONFIGURACIONES POSIBLES.

---

Para IX, el plano de la rejilla intersecta  $\mathbf{X}_{c-}$ , mientras el plano de detección intersecta ambas  $\mathbf{X}_{c-}$  y  $\mathbf{X}_{c+}$ . Vea la figura 5.17, los patrones consisten en franjas del tipo Tschirnhausen's cubic además de franjas cerradas. De nuevo  $P[\mathbf{X}_{c-}]$  determina en donde las franjas cerradas se generan. Las franjas abiertas en el ronchigrama resultarán en franjas del tipo Tschirnhausen's cubic cuando las franjas asociadas en la rejilla cruzan la región marginal. Aquellas franjas en las rejillas que están fuera de  $VP[\mathbf{X}_{c+}]$  las curvas cerradas imagen no tocan el centro del patrón (vea IX c) (`OneBranch_TwoBranches_LF.gif` y `OneBranch_TwoBranches_HF.gif`).

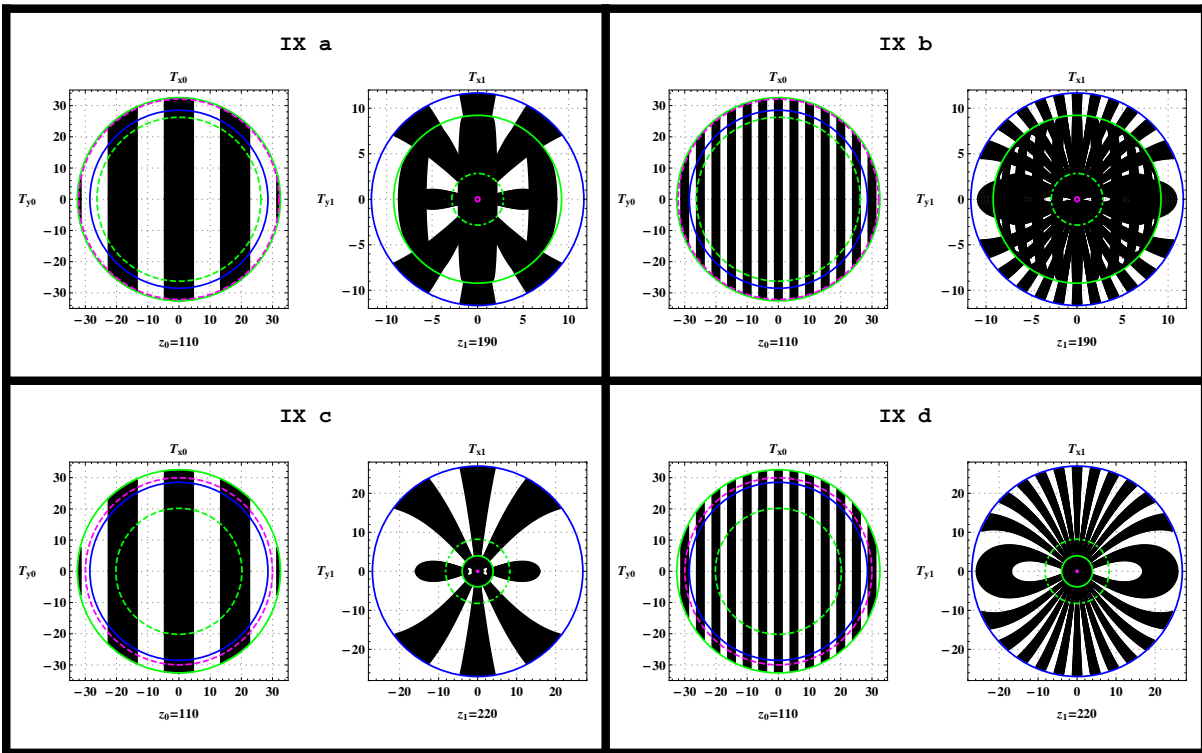


Figura 5.17: El patrón tiene franjas con auto-intersecciones y franjas cerradas también.

**CAPÍTULO 5. DISEÑO DE LA REJILLA CONVENCIONAL GENERAL DE RONCHI  
Y SU RONCHIGRAMA ANALÍTICO ASOCIADO**  
5.5. ANALIZANDO EL RONCHIGRAMA PARA TODAS LAS CONFIGURACIONES POSIBLES.

Finalmente, para la configuración X, tanto el plano de la rejilla y el plano de detección están entre los focos, para ambos planos la región marginal determina sus pupilas de salida. Las franjas de la rejilla que están fuera de  $\mathbf{X}_{c-}$  tendrán asociadas solamente una franja abierta como imagen. Las franjas que cruzan  $\mathbf{X}_{c-}$  tendrán también una imagen como una curva de tipo piriforme [97] donde una de estas curvas cerradas está circunscrita por  $\mathbf{X}_{c-}$  y la otra por  $P[\mathbf{X}_{c+}]$ , además,  $P[\mathbf{X}_{c+}]$  delimita las dos regiones para la imagen, aquella donde sólo hay franjas cerradas y aquella donde hay sólo franjas abiertas (vea `TwoBranches_TwoBranches_LF.gif` y `TwoBranches_TwoBranches_HF.gif`).

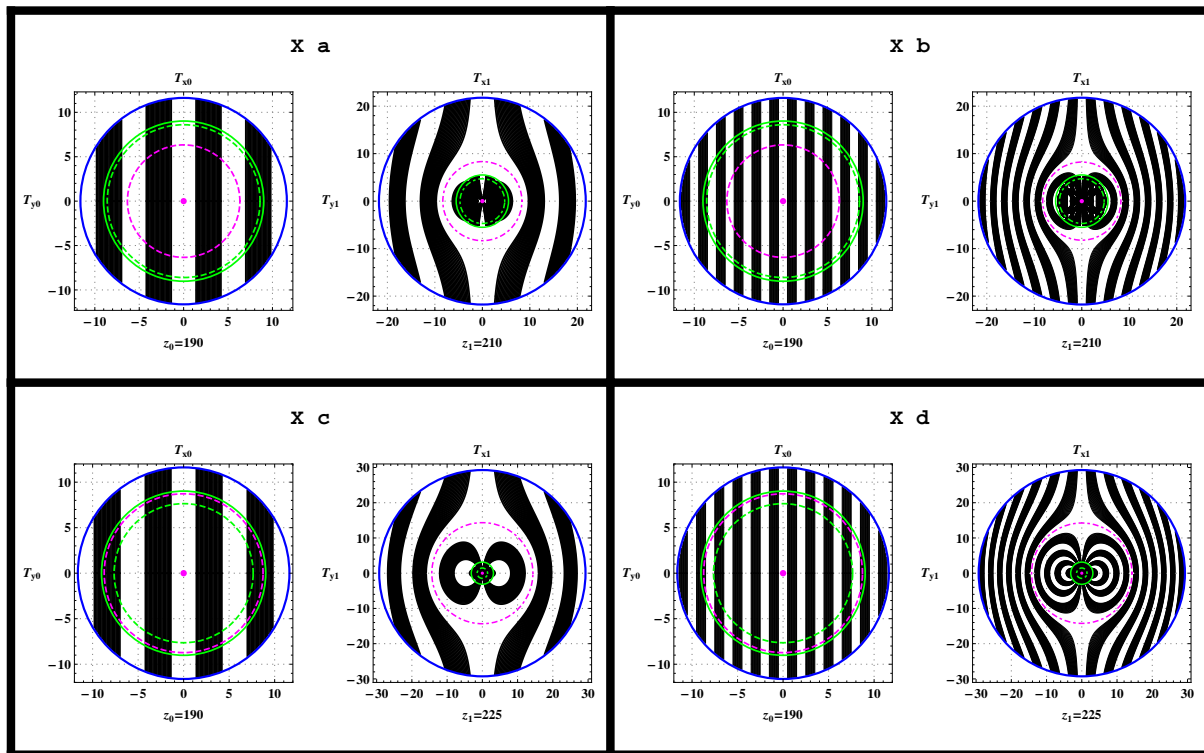


Figura 5.18: El ronchigrama tiene franjas imagen de dos tipos, abiertas y de tipo “eight-curve”.



# Capítulo 6

## Lente helicoidal

### 6.1. Planteamiento

En este capítulo presentamos los cálculos necesarios para construir el patrón que resulta de aplicar la prueba del alambre a una lente helicoidal, usada para la generación de vórtices ópticos; y las simulaciones aplicando este método a esta lente, en cada configuración posible a tres pruebas ópticas abordadas en capítulos anteriores; la prueba nula del alambre, la prueba directa del alambre en la cara plana, y la prueba del alambre más general que consiste en colocar ambos planos (objeto e imagen) a distancia diferente de cero de la lente. Sin pérdida de generalidad y sabiendas de su interés experimental, iluminamos para lo anterior esta lente con un haz colimado (frentes de onda planos). Nuestro objetivo primario es determinar si desde el enfoque de la óptica geométrica se puede extraer información de valor a través de estas pruebas ópticas, a pesar de que un vórtice óptico no tiene significado desde este modelo geométrico; analizamos también cómo se da el proceso de formación de imágenes. Demostramos lo fundamental que resulta tanto la cáustica como sus proyecciones reales y virtuales en el proceso de formación de la imagen, y de nuevo analizamos por primera vez aquellas regiones donde ambos planos (objeto e imagen) están dentro de la región cáustica simultáneamente.

### 6.2. Representación de la lente, sus características y propiedades

En general una superficie helicoidal está representada por

$$S = \rho \cos(\phi) \hat{i} + \rho \sin(\phi) \hat{j} + c \phi \hat{k} \quad (6.1)$$

Donde  $c$  es la constante relacionada con la altura de la lente, aunque tomarla de forma arbitraria puede arrojar información interesante, es obvio que aquel caso que resulta más importante para analizar es el que corresponde a lentes que experimentalmente se ocupan y (como ya mencionamos) cuya aplicación es la generación de vórtices ópticos. En estas lentes reales  $c \propto \lambda, n$  (la longitud de onda y el índice de refracción), en general la altura de la lente es del mismo orden que la longitud de onda de diseño, así, cada lente helicoidal es fabricada específicamente para cada longitud de onda particular.

Ahora bien, la dependencia de la altura de la lente está en función de la carga topológica de ésta. Esta característica no es otra cosa que el número de rampas que hay en el ciclo completo de  $2\pi$  de la superficie difractiva de la lente y tiene que ver entre otros efectos con el radio del

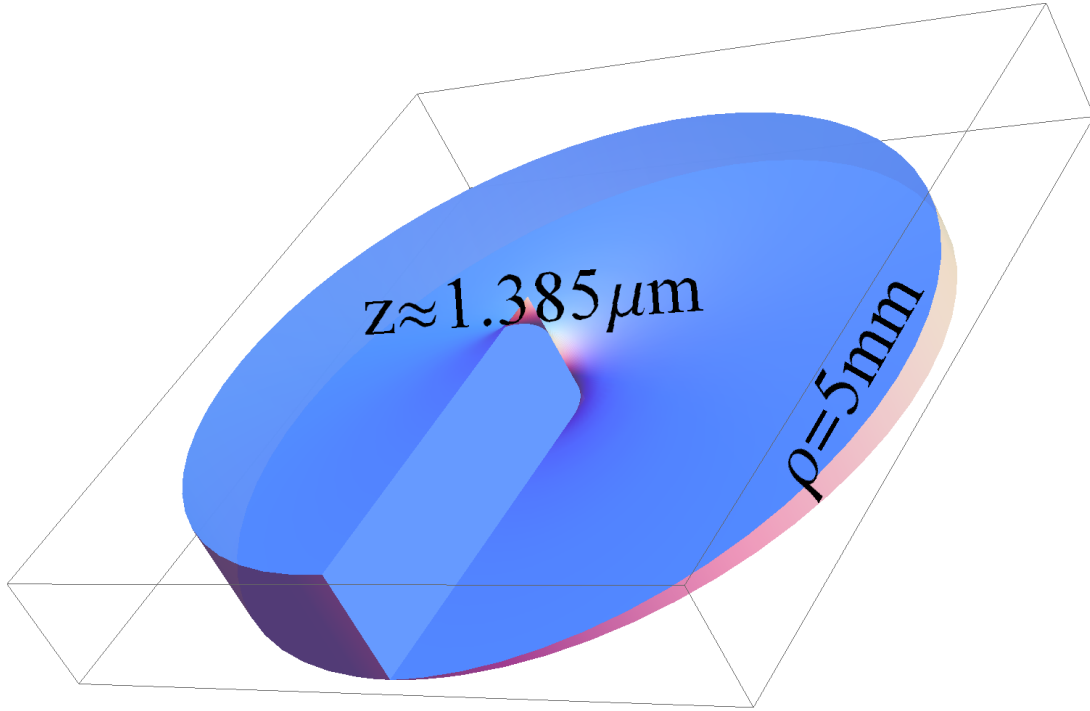


Figura 6.1: Lente helicoidal, note la diferencia entre los órdenes de magnitud entre el eje  $x$  y el eje  $z$ , en la realidad la lente es prácticamente plana

anillo que resulta como patrón de intensidad. Para nuestro ejemplo se tomó la carga topológica como unitaria y la longitud de onda como  $633 \cdot 10^{-9} \text{ m}$ , de modo que la altura de la lente resulta  $633 \cdot 10^{-9} / 0,457 \text{ m}$ , ver figura 6.1. Para esta lente se requiere como entrada un haz colimado (TEM00), o sea, un haz gaussiano; no es plausible iluminarlo con una fuente puntual.

Siguiendo nuestro formalismo expuesto en la sección 1.9, con un cálculo directo obtenemos que el campo vectorial que conforma la dirección de los rayos refractados estado por

$$\hat{R} = \left( \frac{\sqrt{(1-\gamma^2)c^2 + \rho^2} - \gamma\rho}{c^2 + \rho^2} \right) (\rho\hat{k} - c\hat{\phi}) + \gamma\hat{k} \quad (6.2)$$

Así, de manera directa obtenemos que siguiendo la trayectoria del campo vectorial refractado, cualquier punto que ya ha pasado por la lente está representado por

$$\mathbf{X} = \rho\hat{\rho} + \frac{(\gamma\rho - \sqrt{(1-\gamma^2)c^2 + \rho^2})lc}{c^2 + \rho^2}\hat{\phi} + \left( \frac{(\sqrt{(1-\gamma^2)c^2\rho^2 + \rho^4} - \gamma\rho^2)l}{c^2 + \rho^2} + l\gamma + c\phi \right)\hat{k} \quad (6.3)$$

### 6.3. Frentes de onda

Usando de nuevo lo expuesto en la sección 1.11, encontramos que los frentes de onda son

$$\begin{aligned}
 \mathbf{X}_w = & \left( \frac{c \sin(\phi) (\gamma \rho - \sqrt{\rho^2 - c^2 (\gamma^2 - 1)}) (\gamma \sqrt{c^2 \phi^2 - \tau})}{c^2 + \rho^2} + \rho \cos(\phi) \right) \hat{i} \\
 & + \left( \frac{c \cos(\phi) (\sqrt{\rho^2 - c^2 (\gamma^2 - 1)} - \gamma \rho) (\gamma \sqrt{c^2 \phi^2 - \tau})}{c^2 + \rho^2} + \rho \sin(\phi) \right) \hat{j} \\
 & + \left( c \phi - \frac{(\rho \sqrt{\rho^2 - c^2 (\gamma^2 - 1)} + \gamma c^2) (\gamma \sqrt{c^2 \phi^2 - \tau})}{c^2 + \rho^2} \right) \hat{k}
 \end{aligned} \tag{6.4}$$

### 6.4. Superficie cáustica

Y para la región cáustica, siguiendo la sección 1.12, sus dos ramas son

$$\begin{aligned}
 \mathbf{X}_{c+} = & \left( \rho \cos(\phi) - \sin(\phi) \sqrt{(1 - \gamma^2) c^2 + \rho^2} \right) \hat{i} + \left( \rho \sin(\phi) + \cos(\phi) \sqrt{(1 - \gamma^2) c^2 + \rho^2} \right) \hat{j} \\
 & + \left( \frac{\rho (\sqrt{(1 - \gamma^2) c^2 + \rho^2} + \gamma \rho) - c^2 (\gamma^2 - 1) (\gamma - \phi)}{c (\gamma^2 - 1)} \right) \hat{k}
 \end{aligned} \tag{6.5}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{X}_{c-} = & \left( \rho \cos(\phi) + \sin(\phi) \sqrt{(1 - \gamma^2) c^2 + \rho^2} \right) \hat{i} + \left( \rho \sin(\phi) - \cos(\phi) \sqrt{(1 - \gamma^2) c^2 + \rho^2} \right) \hat{j} \\
 & + \left( \frac{c^2 (\gamma^2 - 1) (\gamma + \phi) - \rho (\sqrt{(1 - \gamma^2) c^2 + \rho^2} + \gamma \rho)}{c (\gamma^2 - 1)} \right) \hat{k}
 \end{aligned} \tag{6.6}$$

### 6.5. Resultados numéricos

Debido a que la altura de la lente es  $633 * 10^{-9} / 0,457 m$ ,  $c = 220,449 * 10^{-9} m$ . Por otro lado  $\gamma$  es el cociente del índice de refracción del vidrio que comercialmente se usa (fused silica), calculado para la longitud de onda del haz incidente;  $n_{f.s.}(\lambda = 633 * 10^{-9} m)$  entre el índice de refracción del vacío. El radio de la lente también se tomó con el valor que experimentalmente se ocupa. Aunque las empresas que las hacen las pueden fabricar hasta

un radio de 10 cm, la medida estándar es 5 mm y es ésta la que tomamos. La razón principal, es que las dimensiones que manejan los haces de esa longitud de onda es precisamente 5 mm.

Nota: observe que en la figura 6.1 la representación gráfica de la lente no tiene la misma escala en los ejes. Si fuera graficada con las dimensiones numéricas reales no se notaría la cara helicoidal.

Por la razón anterior, también los gráficos de a continuación tienen un reajuste en los ejes, para poder visualizar sus características principales. Las dos ramas de la cáustica junto con la lente se muestran en el siguiente diagrama, note que para fines estéticos la lente ha sido colocada de modo que el eje  $z$  apunta hacia arriba. Así se aprecia la forma en la que las dos ramas están unida a la lente y unidas entre si también.

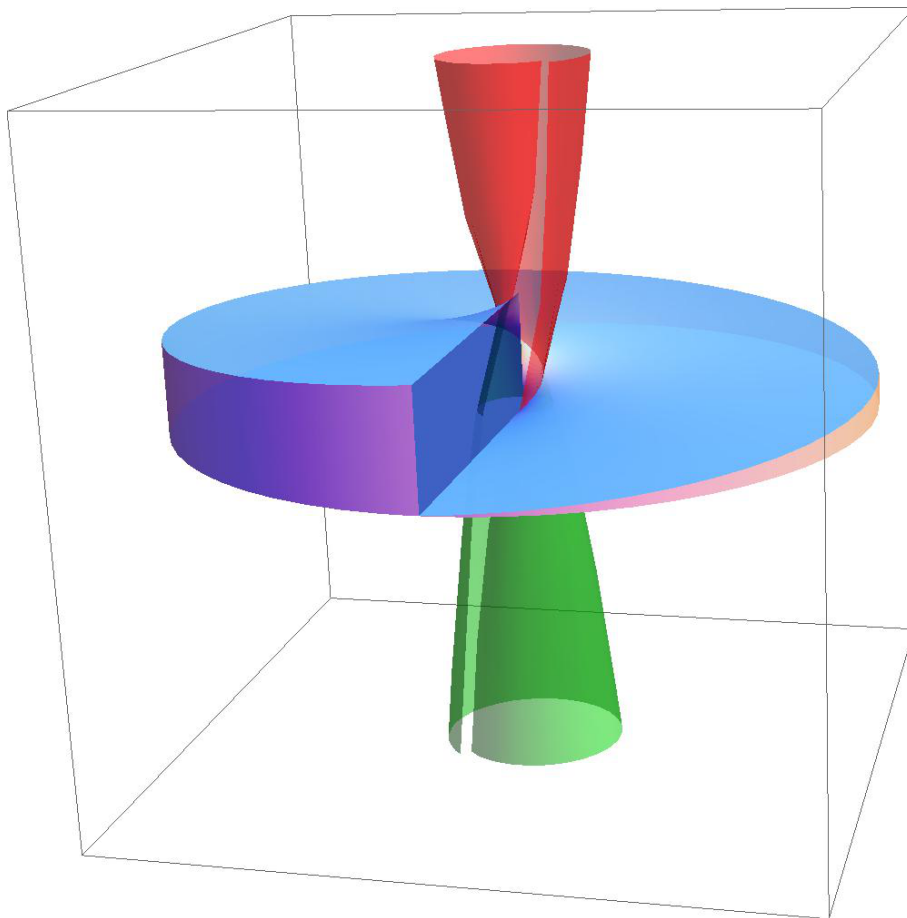


Figura 6.2: Lente helicoidal y las dos ramas de la cáustica.

En el próximo gráfico ilustramos dos hechos muy importantes, primero ilustramos un corte transversal de la rama positiva de la cáustica (rojo); y segundo, mostramos la región central (entre las líneas grises) que corresponde al rango para  $\rho$  donde hay reflexión total interna. En otras palabras, en ese cilindro no pasa ningún rayo de luz. Coherentemente no hay aportación del campo vectorial refractado a la formación de la superficie cáustica en esa región.

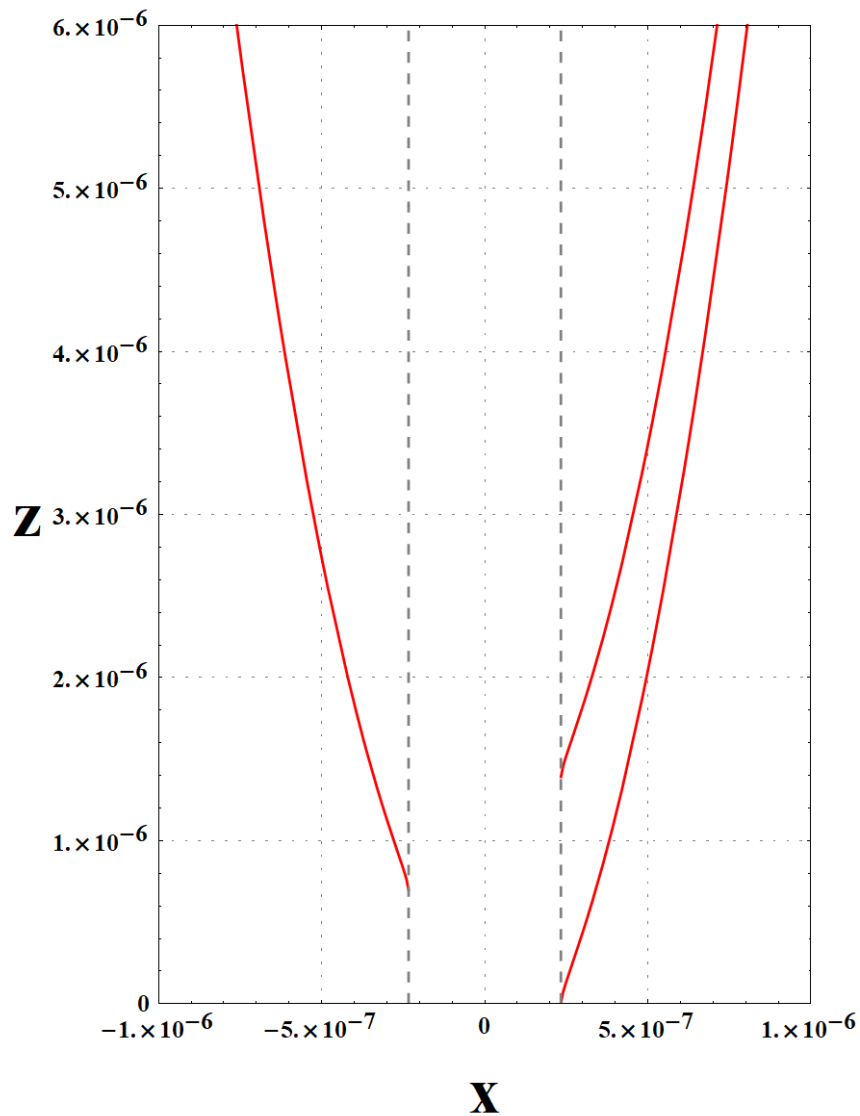


Figura 6.3: Corte transversal de la cáustica y región de reflexión total interna.

Uno de los gráficos en los que se aprecia mejor la información física del sistema óptico es el siguiente, se aprecia como siendo paralelos al eje óptico los rayos incidentes, son deflectados después de la lente, y como la envolvente de ese conjunto de rayos conforma la superficie cáustica.

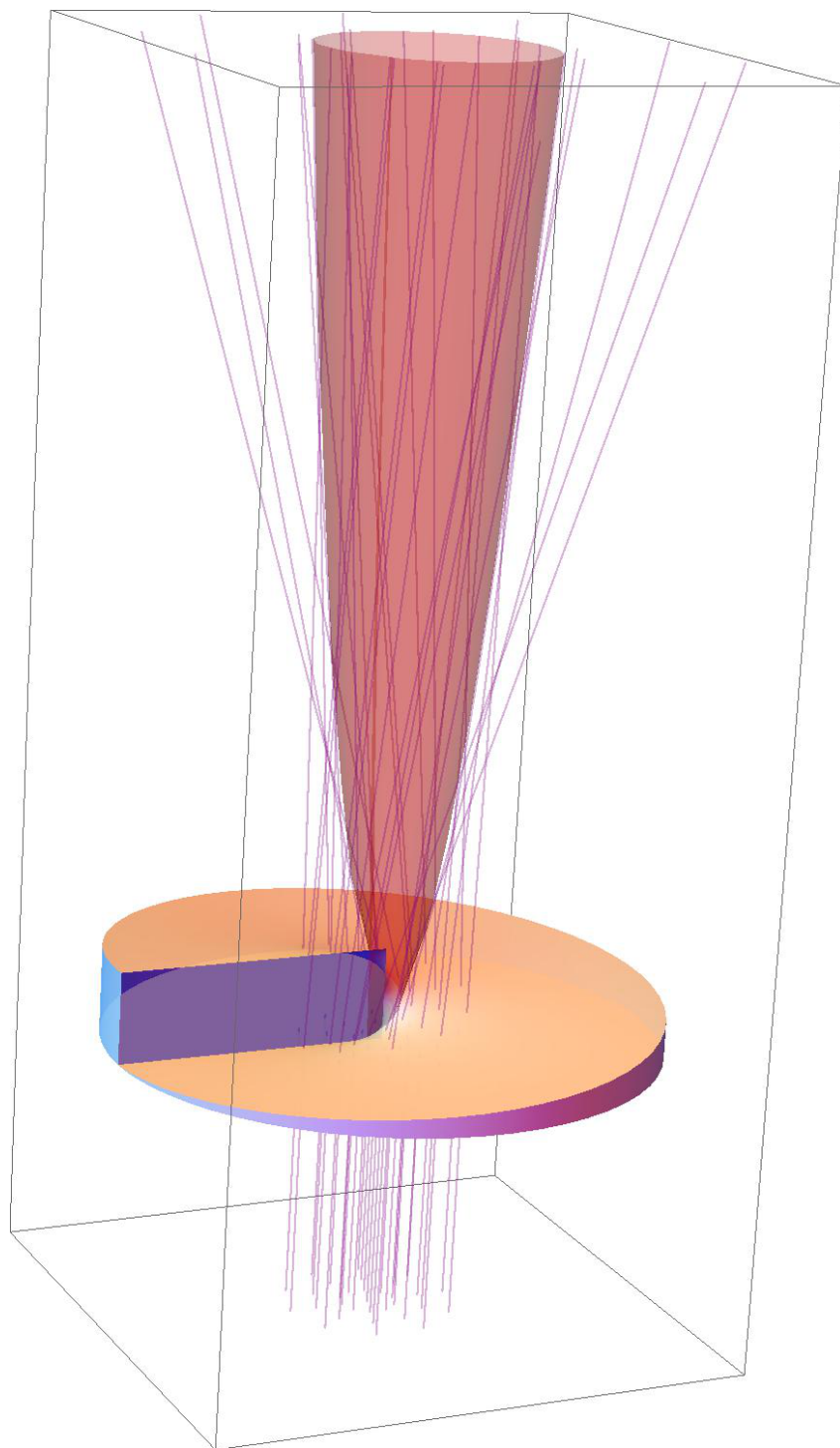


Figura 6.4: Lente helicoidal, los rayos incidentes y refractados, y la cáustica.

Aunque en el anterior se puede apreciar el comportamiento de los rayos siguiendo su propagación sobre el eje longitudinal, es necesario observar como lucen cuando son graficados en un plano transversal a este eje. Entre lo más notable, el desfaseamiento de la parte no continua de la lente con la sección no continua de la cáustica, el cilindro interior sin rayos, y como se comporta la componente angular del campo vectorial de los rayos.

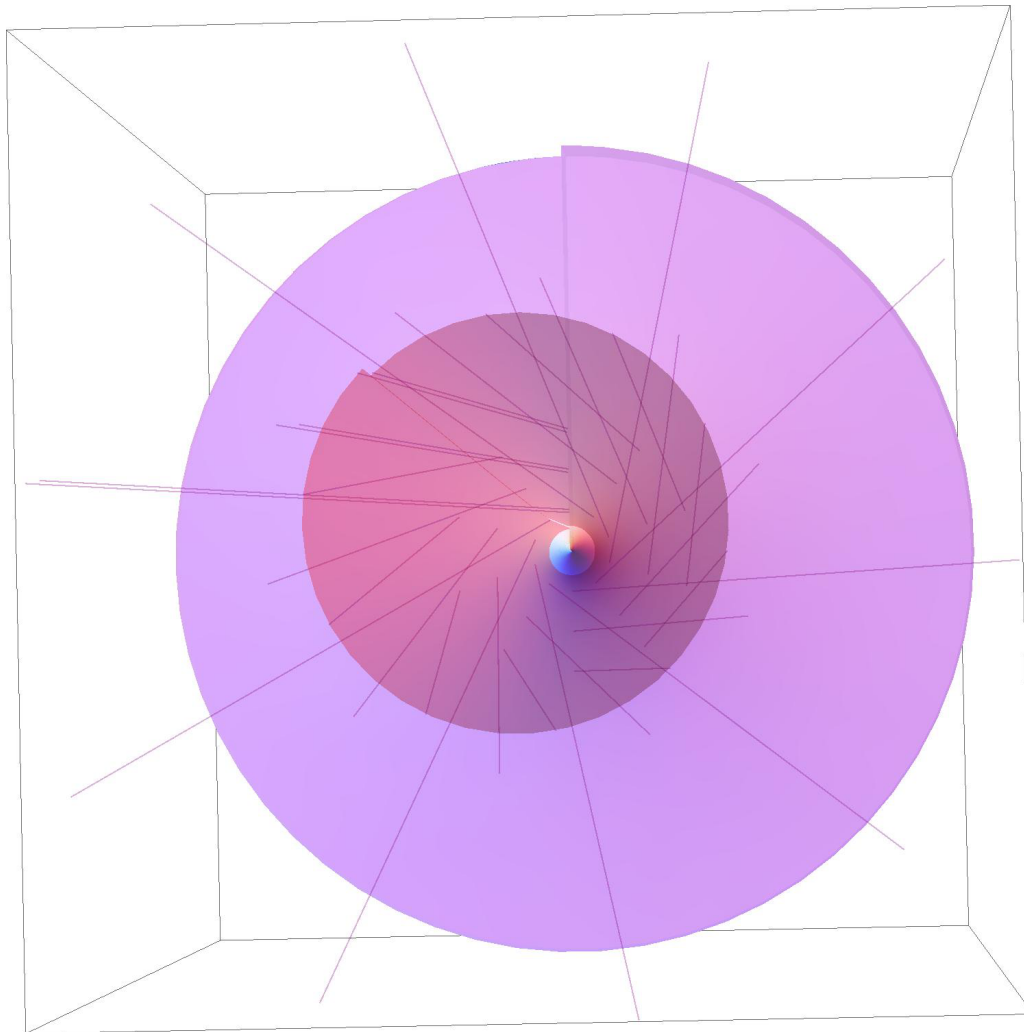


Figura 6.5: Lente helicoidal, cáustica y rayos refractados, note la parte interior donde no pasa ningún rayo, ello es debido a la reflexión total interna.

Los frentes de onda quedan representados abajo, desde la perspectiva que se muestran se pueden observar dos cosas; primero que cada frente consta de una superficie que tiene dos secciones diferentes muy claras, una más extensa que la otra, segundo, que hay una región entre ellas que es un pequeño hueco. Ahí precisamente se forma la cáustica. Recordemos que ésta última también corresponde a la colección de singularidades y autointersecciones de los frentes de onda. En este caso (distinto a lentes convergentes) no hay autointersecciones.

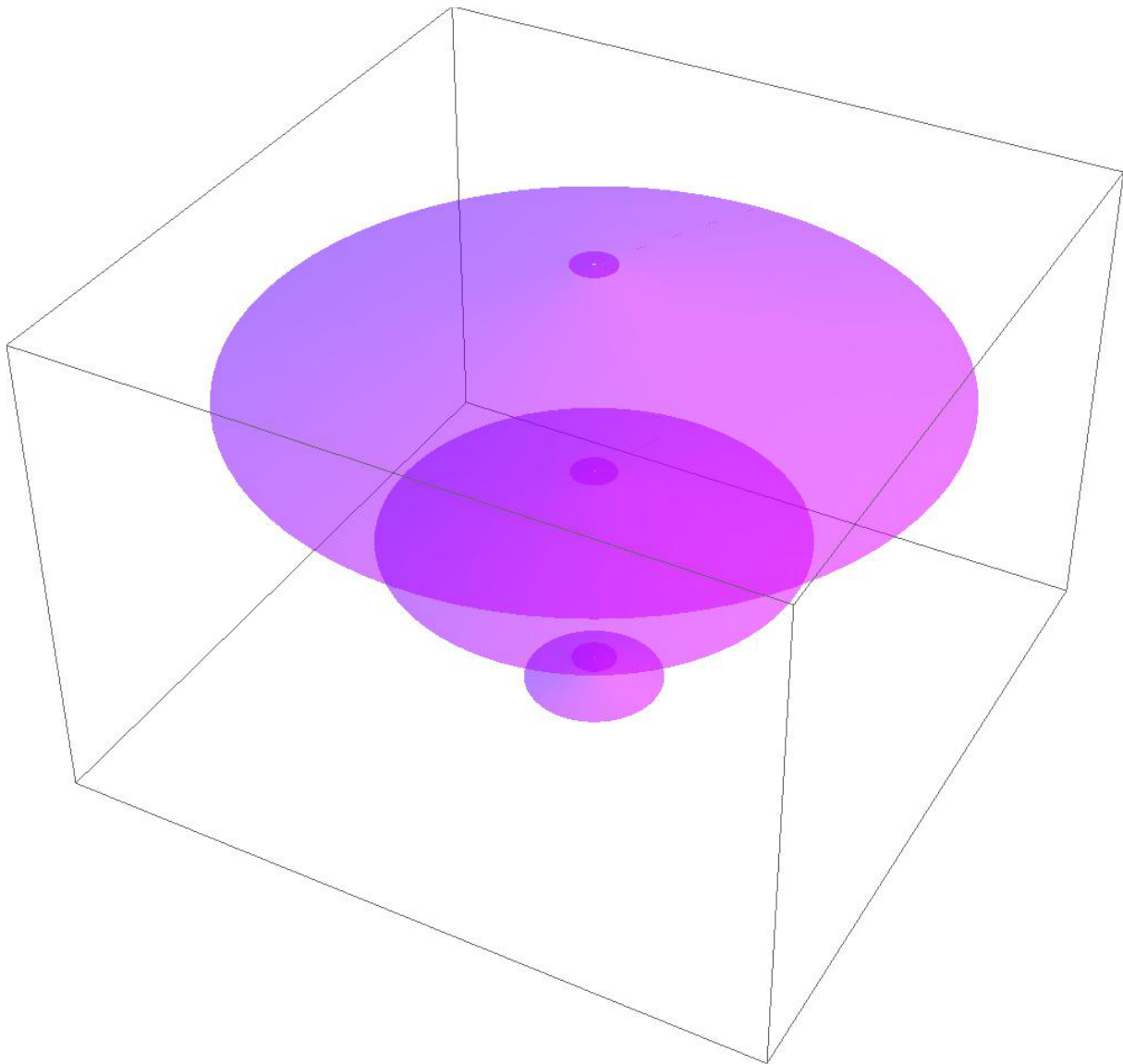


Figura 6.6: Frentes de onda, note el hueco central en ellos, en ese borde se forma la cáustica.

Desde otra perspectiva, queda clara la forma de las dos superficies, la más extensa de ellas corresponde casi a un cono, y la otras más pequeña es casi plana. Así queda más clara la singularidad de cada frente.

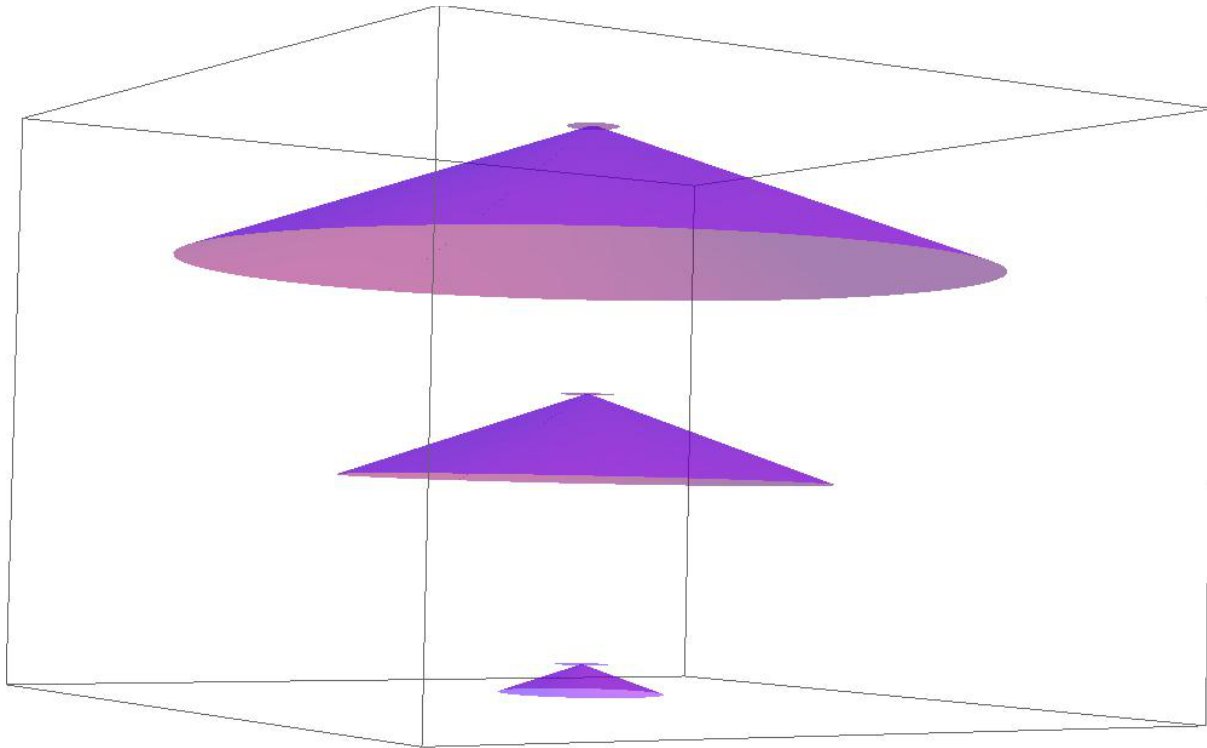


Figura 6.7: Frentes de onda, note que una sección es casi plana y la otra prácticamente es un cono.

## 6.6. Rejilla nula del alambre, y cálculo del ronchigrama cuando la rejilla está en la cara y en la prueba convencional

Siguiendo el procedimiento de la sección 2.5 obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \rho \cos(\phi) - (z_0 - c\phi) \frac{R_\phi}{R_z} \sin(\phi) \\ \mathbf{Y} &= \rho \sin(\phi) - (z_0 - c\phi) \frac{R_\phi}{R_z} \cos(\phi) \end{aligned} \quad (6.7)$$

Donde evidentemente hemos cambiado a coordenadas polares, no es difícil corroborar que este sistema de ecuaciones equivale a

$$\begin{aligned} (z_0 - c\phi)^2 f^2 + \rho^2 &= R^2 \\ \frac{(z_0 - c\phi)f}{\rho} &= \tan(\eta - \phi) \end{aligned} \quad (6.8)$$

Donde  $R^2 = X^2 + Y^2$  y  $f = \frac{R_\phi}{R_z}$ . Sin embargo como queremos la imagen de  $X = n$  donde  $n$  es una constante, queda claro que ese segmento de línea recta queda parametrizado con  $Y \in [Y_{min}, Y_{max}]$ . Pero donde además  $X = R \cos(\eta)$  y  $Y = R \sin(\eta)$ . Así que análogo a lo hecho en la sección 2.5 la rejilla nula estará dada por los puntos  $(\rho, \phi)$  tales que satisfacen 6.6 y

$$n = R \cos(\eta) \quad (6.9)$$

El ronchigrama que se genera al aplicar la prueba colocando la rejilla en la cara plana de la lente está dado directamente por el mapeo 6.7, eso es muy claro y viene de la sección 2.5. Para determinar el patrón de la prueba directa cuando tanto la rejilla como el plano de detección están después de la lente, basta seguir la sección 4.3 junto con lo anterior.

## 6.7. Rejillas nulas

El siguiente análisis corresponde a las figuras 6.8 y 6.9. En ellas se muestran los rejillas nulas para diferentes planos. Debido a que la altura de la lente es del orden de la longitud de onda, los rayos aunque cambian su dirección no se alejan mucho del eje óptico<sup>1</sup>. Como consecuencia la cáustica para este sistema óptico se prolonga una distancia gigantesca en la dirección de propagación (~248 metros). Si uno revisa la información que ofrecen las empresa que fabrican este tipo de lentes, se encuentra con que la caracterización del anillo de máxima intensidad es modificado de su radio original, pues colocan una lente convergente después de la lente helicoidal. Sin embargo no aclaran ni a que distancia de ésta ni cuál es su distancia focal (que como ahora sabemos, propiamente no existe más que en la idealización). De modo que consideramos hacer el análisis de la lente pura sin someterla a modificaciones que dejaran oculta cierta información. Toda vez que la cáustica comienza desde la superficie misma de la lente, no podemos hablar de configuraciones donde el plano de observación pudiera estar antes de la cáustica; además como ya se mostró, una rama de la cáustica resulta ser virtual. Por tanto sólo podemos hablar de dos situaciones; cuando el plano intersecta una rama y cuando no lo hace. Para analizar todas las pruebas tomamos los planos a estas distancias características de la cara plana de la lente: a 20m, 50m, 100m, 200m, 250m y 300m. En un diferente proceder a lo expuesto en capítulos anteriores, agrupamos los gráficos en grupos de tres y los analizaremos en grupos, porque varios de ellos contienen información similar. **Nota:** recuerde que en la prueba nula estudiamos como cambia de forma el

<sup>1</sup>mayoritariamente

objeto cuando cambia de posición su imagen (que debe ser siempre un segmento de línea recta).

Comenzando con las configuraciones donde el plano de detección está en  $z_1 = 20$ , resulta que los alambres muy pequeños en forma de herradura que están más cerca del centro son los objetos que al ser mapeados generan las curvas imagen que quedan fuera de la región marginal (ilustrada como en capítulos anteriores, con el círculo azul). Resulta que las herraduras pequeñas ubicadas arriba del origen de coordenadas corresponden a los dos segmentos fuera de la región marginal ubicados en el extremo izquierdo. Las dos que están bajo el origen corresponden a los del extremo derecho. Ahora, si nos fijamos en los segmentos que intersectan a la región marginal en el plano  $z_1$  pero que no intersectan a la cáustica vemos que la correspondencia no es uno a uno (hay cambio en la topología). Fijando la atención a aquel que está a la izquierda, le corresponde la herradura más grande de arriba del origen y la primera curva de izquierda a derecha en  $z$ . Justo cuando un segmento en  $z_1$  es tangente a la cáustica, en  $z$  la herradura se une a la curva que viene desde el exterior. Cuando el segmento en  $z_1$  está intersectando dos puntos de la cáustica, la herradura se parte al igual que el segmento exterior y se unen las secciones de una y otra pares; como puede confirmarse en los tres segmentos ubicados más al centro. Algo completamente análogo pasa con la configuración de  $z_1 = 50$ , pero acá el patrón es más grande y claro. Cuando tomamos  $z_1 = 100$  se aprecia que como los cinco segmentos más al centro intersectan a la cáustica en dos puntos, su correspondiente son las diez curvas que parecen patas de araña. Los dos segmentos de la izquierda y los dos de la derecha están asociados a las cuatro herraduras como ya explicamos para  $z_1 = 20$ . Cuando  $z_1 = 200$  sólo hay dos segmentos que no intersectan a la cáustica, por tanto sólo hay dos herraduras. Note que para esta configuración casi coinciden la cáustica y la región marginal. Para la configuración con  $z_1 = 250$  algo inesperado, sigue existiendo cambio de topología cuando en este plano ni siquiera hay cáustica. Y lo mismo pasa en  $z_1 = 300$ .

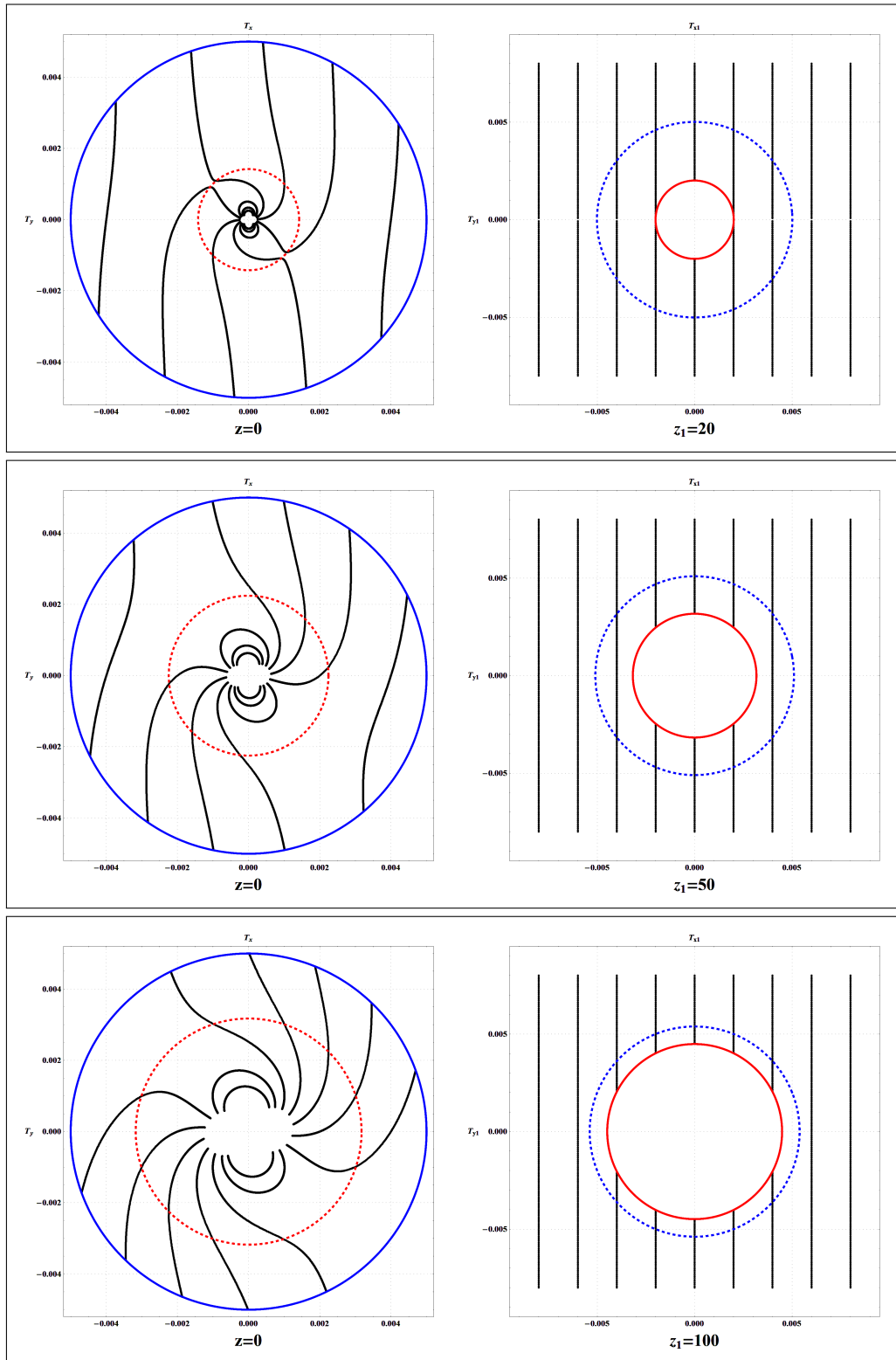


Figura 6.8: Rejillas nulas.

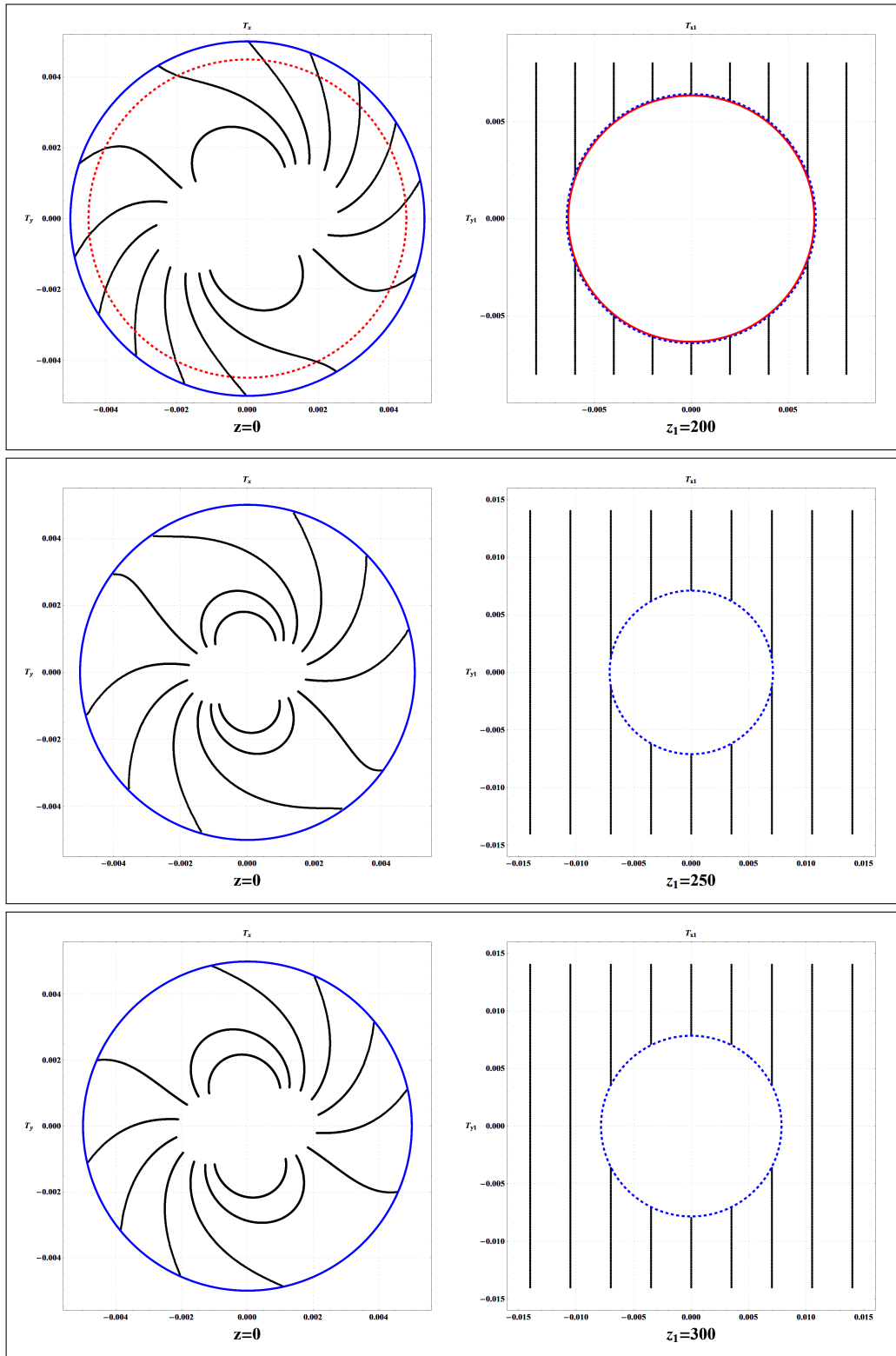


Figura 6.9: Rejillas nulas.

## 6.8. Ronchigramas, colocando la rejilla en la cara plana

De la configuración con  $z_1 = 20$  vemos que la imagen del alambre conforme se acerca al centro se curva cada vez más, esto puede verse de las dos primeras imágenes. Cuando el alambre toca de forma tangente a la proyección de la cáustica la imagen queda a su vez envolviendo una de la cáustica en  $z_1$ . Cuando el alambre intersecta a esa proyección en dos puntos la curva imagen se autointersecta después de evolucionar desde una singularidad. Esta curva imagen se desenvuelve hasta que se rompe en dos parte. En las configuraciones tomando a  $z_1 = 50$  y  $z_1 = 100$  podemos ver la misma dinámica, pero es posible notar que los extremos de la curvas están constreñidas a la proyección de los rayos que pasan por la frontera de la lente. En la configuración  $z_1 = 200$  podemos ver que al queda muy próximas la cáustica y la proyección de los rayos de la frontera de la lente, las imágenes correspondientes a los alambres más alejados del centro quedan casi envolviendo a la cáustica. En las configuraciones donde el plano de detección no intersecta la cáustica, aunque vemos que las imágenes tienen la misma estructura que cuando si hay intersección, las imágenes no envuelven a la cáustica.

## 6.9. Ronchigramas de la configuración convencional

En todas las configuraciones del ronchigrama podemos ver algo muy particular que no ocurre con una lente positiva, en estas configuraciones analizadas donde el plano objeto siempre intersecta a la superficie cáustica, la correspondencia entre objeto e imagen desde el inicio no es *uno a uno* y más allá, **nunca es uno a uno**. Aún cuando el objeto **no toque la cáustica**. De hecho se puede identificar una doble imagen para todo el arreglo de alambres, explicamos a continuación.

Comenzando con la configuración  $z_0 = 20$ ,  $z_1 = 30$  observamos que hay dos imágenes claras compuestas, una rejilla grande y una más pequeña ubicada en su centro. Pero explicando paso a paso como se construye la imagen compuesta, empezamos por identificar las imágenes que corresponden a los tres primeros alambres y a los tres últimos, sus imágenes en  $z_1$  para los tres de la izquierda son las tres curvas grandes junto a las tres pequeñas que empiezan desde la derecha. Análogamente con los tres de la derecha. Para las otras tres que quedan al centro podemos comenzar con aquellas dos que pasan a cada lado de la superficie cáustica y la tocan de forma tangente, para cualquiera de éstas sus imágenes (la línea grande y la pequeña) se tocan también de forma tangente. Pero después de este contacto entre las imágenes de un alambre tocando en forma tangente ocurre algo muy interesante, cuando el alambre se acerca un poco más al centro (intersectando ahora a la cáustica en dos puntos) las dos imágenes que se habían tocado antes se dividen en una curva situada arriba y otra situada abajo, que terminan en un “gancho”. Los extremos de estos gancho sorprendentemente también coinciden con la alineación de la rejilla pequeña. Esta explicación de los “ganchos” se ve mucho más clara cuando se observa la configuración  $z_0 = 20$ ,  $z_1 = 50$ , en ésta los tres objetos al centro intersectan a la cáustica en dos puntos. De la configuración donde  $z_0 = 20$ ,  $z_1 = 110$  es claro que la estructura del patrón se preserva aun si la proyección de la cáustica en  $z_1$  tiene un radio mayor a la proyección de los rayos de la frontera de la lente. De éstas tres ya se puede ver un patrón, conforme el plano de detección se aleja de la rejilla el patrón se “tuerce” más (en la última todos los ganchos están orientados al mismo lado) y la imagen compuesta (la rejilla pequeña deformada) se hace más pequeña. En las últimas tres configuraciones el patrón tiene la misma estructura aunque la rejilla pequeña se va haciendo aún más; de lo más interesante es que en las últimas dos el plano de detección ya no intersecta a la cáustica, pero sigue tendiendo la misma forma cada imagen del alambre. Para poder analizar lo que pasa en el centro del patrón en estas configuraciones donde  $z_1$  está más alejada de la rejilla se presentan acercamientos de éstas. Podemos ver que a partir de  $z_1 = 200$  las imágenes que conforman la rejilla pequeña ya no envuelven a la cáustica, ahora tiene forma de “herradura”. Note que en estos acercamientos el rango en  $y$  en el objeto ha sido tomado más pequeño (y por consiguiente también su imagen), por lo que los ganchos de las imágenes no son tan pronunciados.

**CAPÍTULO 6. LENTE HELICOIDAL**  
**6.9. RONCHIGRAMAS DE LA CONFIGURACIÓN CONVENCIONAL**

---

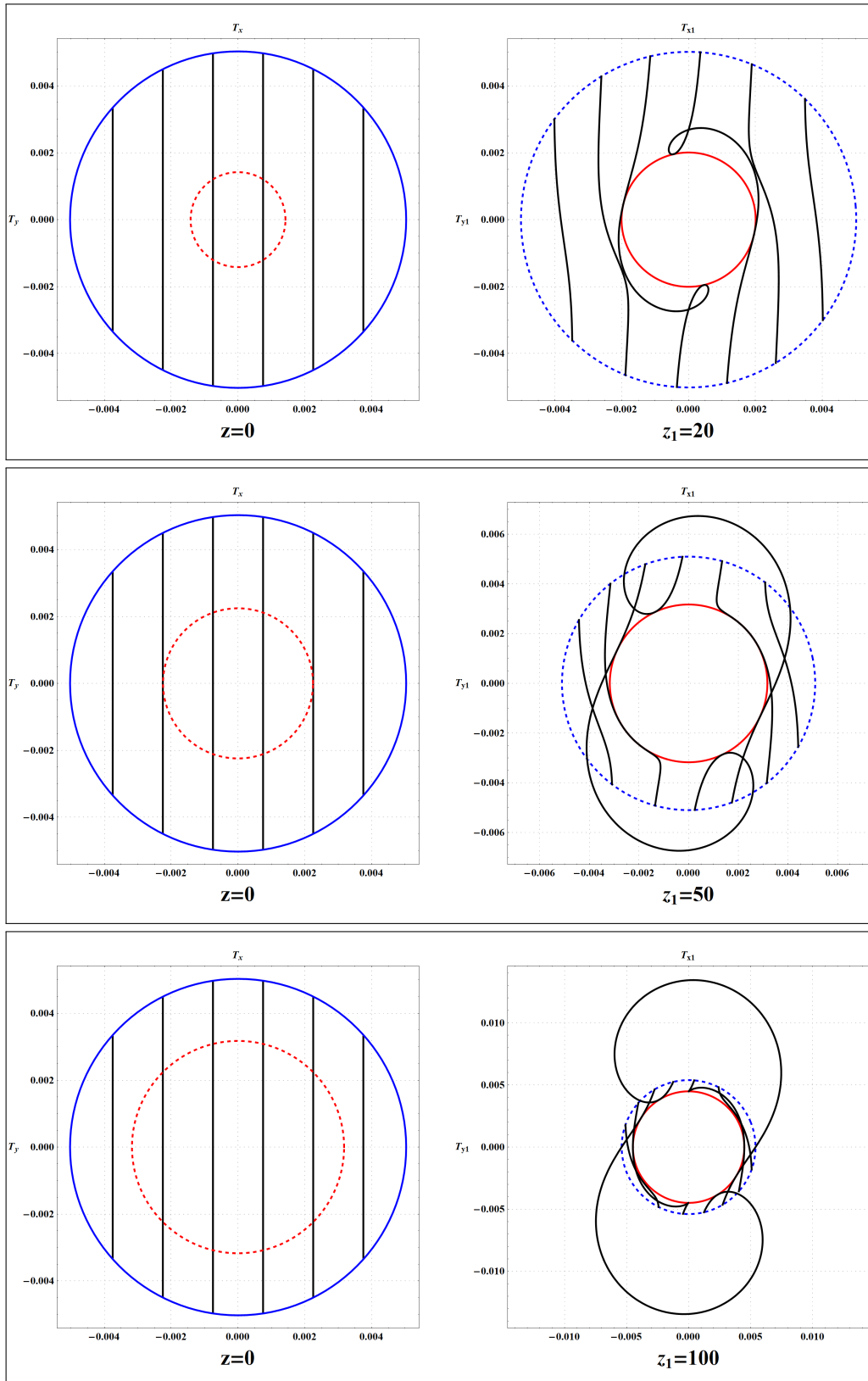


Figura 6.10: Ronchigramas con la rejilla en la cara plana.

CAPÍTULO 6. LENTE HELICOIDAL  
6.9. RONCHIGRAMAS DE LA CONFIGURACIÓN CONVENCIONAL

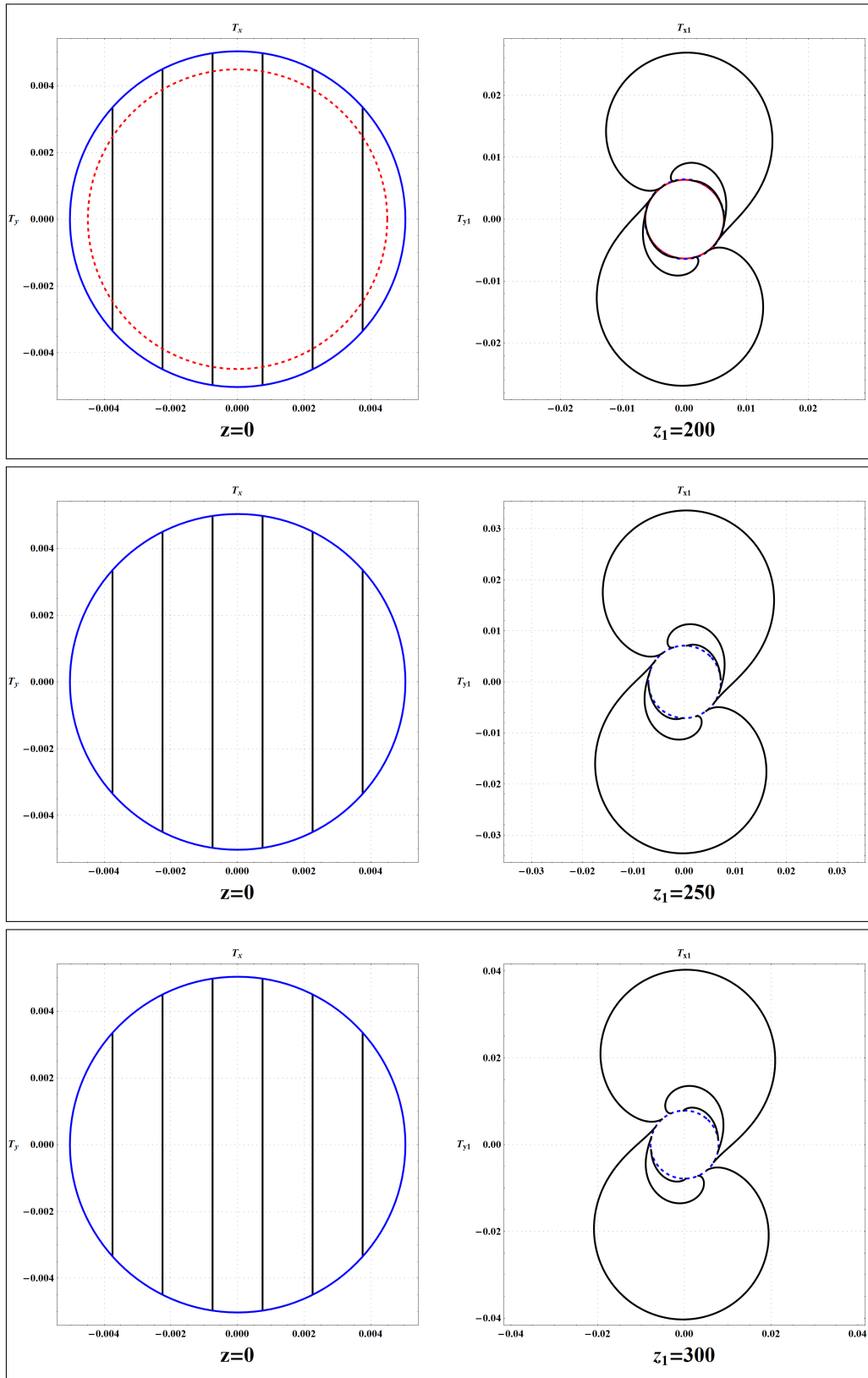


Figura 6.11: Ronchigramas con la rejilla en la cara plana.

**CAPÍTULO 6. LENTE HELICOIDAL**  
**6.9. RONCHIGRAMAS DE LA CONFIGURACIÓN CONVENCIONAL**

---

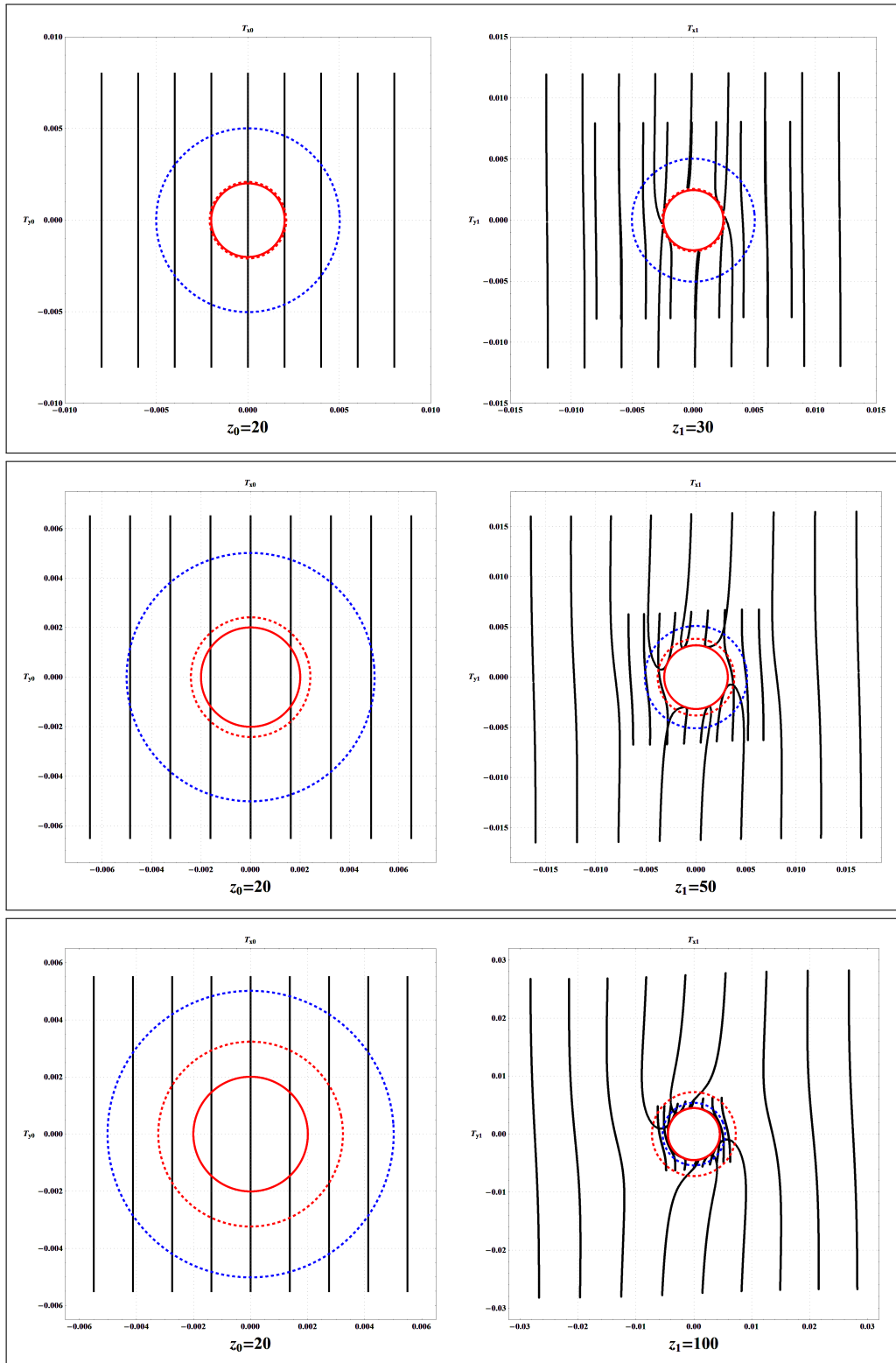


Figura 6.12: Ronchigramas de la prueba convencional.

CAPÍTULO 6. LENTE HELICOIDAL  
6.9. RONCHIGRAMAS DE LA CONFIGURACIÓN CONVENCIONAL

---

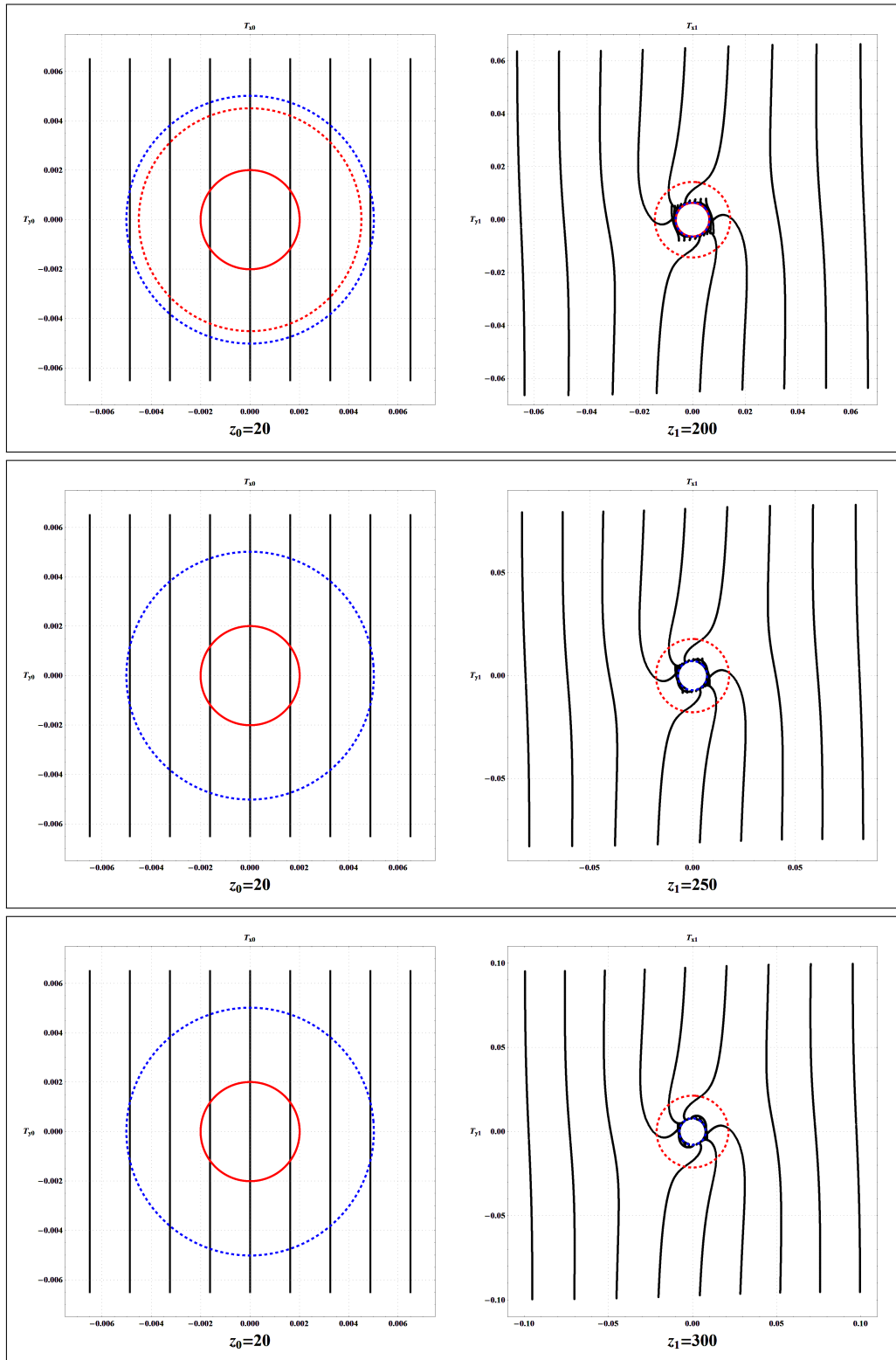


Figura 6.13: Ronchigramas de la prueba convencional.

**CAPÍTULO 6. LENTE HELICOIDAL**  
**6.9. RONCHIGRAMAS DE LA CONFIGURACIÓN CONVENCIONAL**

---

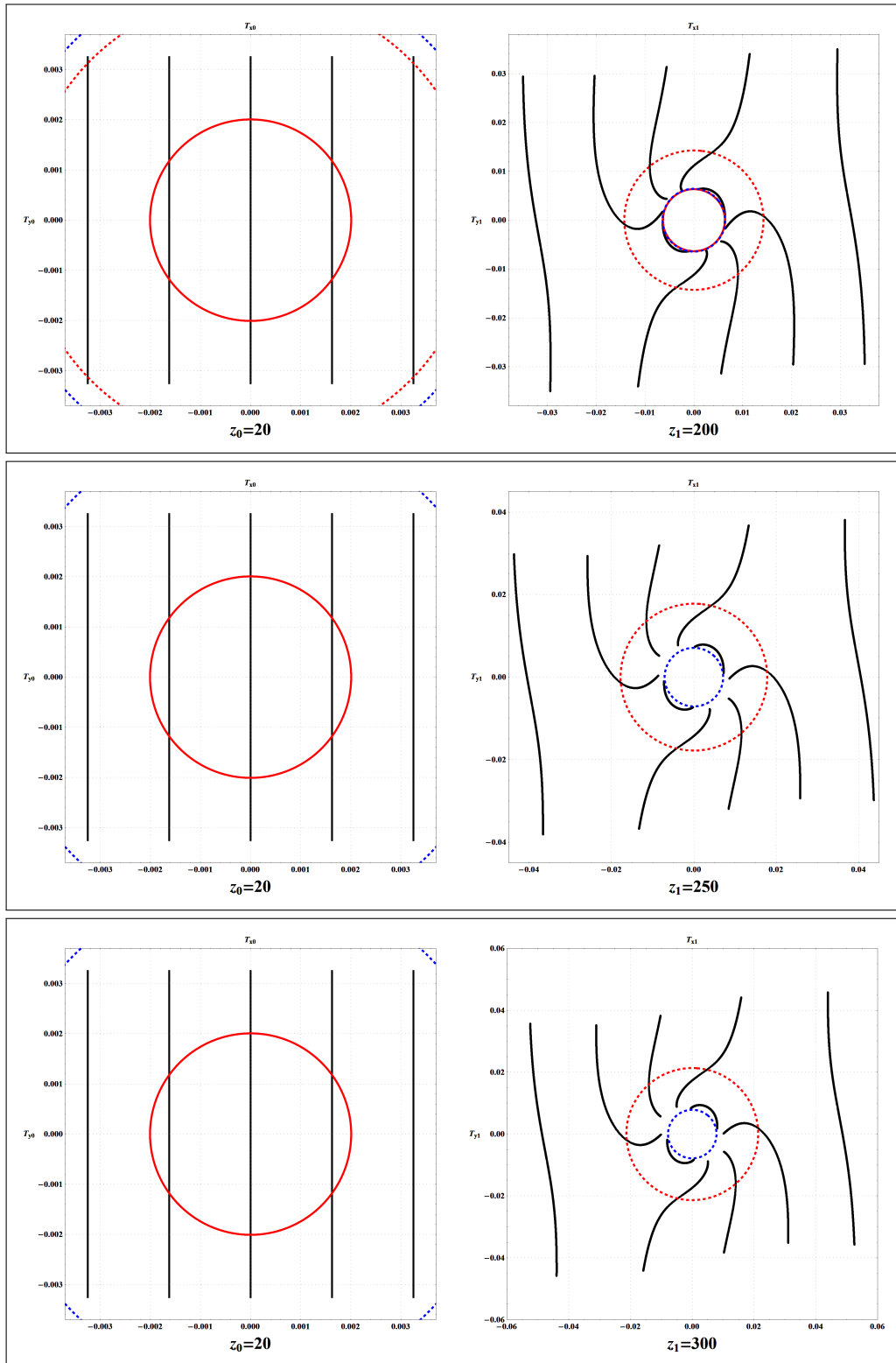


Figura 6.14: Acercamiento de la parte central de los ronchigramas anteriores.



## Capítulo 7

# Conclusiones

Partiendo de la ley de deflexión de la luz en forma vectorial, desarrollamos un método para abordar sistemas ópticos que consisten de refracciones múltiples. A través de este método encontramos la representación del campo vectorial de los rayos refractados, la parametrización de los frentes de onda y la representación de la superficie cáustica de forma completamente general. Aplicamos éstas a un caso particular, una lente plano-parabólica iluminada por una fuente puntual en el eje axial. Desarrollamos la prueba nula del alambre (y a través de ésta, una rejilla nula de Ronchi subestructurada) para este sistema óptico y demostramos que la ejecución de dicha prueba corresponde a un caso particular de la configuración que describe el *caustic-touching theorem* de M. Berry. Dado que este teorema establece las condiciones para las que habrá cambio de topología entre el objeto y la imagen en el proceso de deflexión de la luz y que están directamente relacionadas con la región cáustica o focal, analizamos esta prueba óptica cubriendo todas las configuraciones posibles que involucran esta superficie. Más precisamente, cuando el plano de detección es colocado: antes de la superficie cáustica, cuando intersecta una de las ramas, cuando intersecta las dos, y después de esta superficie. Posteriormente, desarrollamos la prueba directa del alambre (y por extensión, Ronchi subestructurada) para este sistema óptico, colocando la rejilla de prueba en la cara plana. Analizamos la correspondencia entre objeto e imagen y explicamos cómo es que se dan los cambio de topología. Encontramos que incluso en configuraciones que no corresponden a aquellas que plantea el teorema, existe disrupción de la imagen. Más allá, se presentan patrones completamente diferentes, incluyendo curvas del tipo *Tschirnhausen's cubic*. Para esta prueba directa de Ronchi también se abordaron todas las configuraciones posibles respecto de la región cáustica.

También demostramos que partiendo del mapeo que representa a la rejilla nula, se puede establecer otro mapeo que permita mapear objetos puntuales en imágenes puntuales, de este modo encontramos como reconstruir un objeto unidimensional y hacerlo interactuar con la superficie cáustica en una configuración equivalente a la anterior (pero ahora iluminada por frentes de onda planos). Con esta prueba nula demostramos que no en todos los casos, aún cuando se satisfagan las condiciones que plantea el teorema de Berry, es necesaria la condición de tangencia para que se presente rompimiento de la equivalencia topológica entre el objeto y su imagen. Hecho esto reconstruimos dos imágenes que permiten dilucidar lo anterior con claridad.

Posteriormente la prueba directa del alambre (donde ambos planos objeto e imagen están después de la lente). Presentamos la solución analítica a este problema, presentamos la representación analítica de la imagen donde ésta es válida para cualquier posición relativa de los planos objeto e imagen. Esta representación es válida además para lentes plano convexas de perfil general con simetría de revolución. Más precisamente, una vez que analizamos la prueba nula y la prueba directa con el plano objeto en la cara plana, donde sólo el plano imagen puede ser colocado en posiciones relativas respecto a la superficie cáustica; resolvemos este problema más general (y de ejecución experimental más sencilla). Se abordan primeramente los casos conocidos en la literatura encontrando una coincidencia completa a éstos, que

fueron calculados mediante otros métodos. Estos casos conocidos involucran libertad en la posición del plano objeto pero construyendo al plano imagen a estar más allá del foco paraxial (fuera de la región cáustica). Pero con nuestra parametrización fue posible calcular y analizar incluso las configuraciones donde ambos planos objeto e imagen intersectan la superficie cáustica; esto es, cuando ambos planos objeto e imagen intersectan: dos, una o ninguna rama de la superficie cáustica (incluyendo los focos marginal y paraxial). Todas las configuraciones nuevas arrojaron patrones que pudimos reportar por primera vez y que son detectables experimentalmente. Entre los patrones nuevos se encuentran curvas de tipo *Tschirnhausen's cubic* y *eight-curve*. Encontramos que no sólo la región focal produce cambios de topología sino también proyecciones de ella (tanto reales como virtuales), e incluso intersecciones del objeto con la región marginal y sus proyecciones. Analizamos la interrupción de la imagen usando simulaciones de una adaptación dinámica de la prueba y demostramos que mucha información del sistema óptico que queda oculta dentro de la imagen puede ser interpretada. Se reporta también que la imagen depende directamente de la magnitud de una de las ramas de la cáustica. Con este resultado principal, construimos la representación analítica del patrón completo cuando se ejecuta la prueba directa de Ronchi convencional (con bandas periódicas y equidistantes) para una lente del mismo tipo. Para esto, se obtienen todas las representaciones posibles de la rejilla de Ronchi. Posteriormente se muestra la generalidad y simpleza de la representación presentando tres ejemplos de lentes de diferentes perfiles, incluyendo para completitud en de la lente plano parabólica. Presentamos simulaciones pero ahora variando la posición del plano de detección y demostramos que el patrón preserva la misma estructura cuando el plano se mantiene dentro del mismo rango respecto de la región focal. Mostramos que la adaptación dinámica de la prueba del alambre es la mejor opción para analizar un sistema óptico.

Por último, aplicamos nuestro método a una lente helicoidal que experimentalmente se aplica a la generación de vórtices ópticos. Presentamos el campo de los rayos refractados, la representación de los frentes de onda y la superficie cáustica. Le aplicamos a este ejemplo las tres pruebas del alambre que abordamos para lentes plano-convexas: la prueba nula, la prueba directa en la cara plana y la prueba directa. Reportamos los resultados extrapolados a las tres pruebas subestructuradas de Ronchi. El análisis de esta lente se realizó tomando en cuenta los parámetros reales que se tienen en el laboratorio al trabajar con este sistema óptico. Por último se analiza la equivalencia topológica entre el alambre y su patrón para cada configuración posible, otra vez a partir de la adaptación dinámica de las pruebas y se identifica el rol que tiene la región focal en este cambio.

# Bibliografía

- [1] O. N. Stavroudis in *The Optics of Rays Wavefronts, and Caustics*, New York and London: Academic Press, Inc, 1972.
- [2] E. Hecht in *Optics*, Boston, United States: Addison Wesley, fourth ed., 1972.
- [3] E. Román-Hernández and G. Silva-Ortigoza, “Exact computation of image disruption under reflection on a smooth surface and ronchigrams,” *Applied Optics*, vol. 47, pp. 5500–5518, 2008. DOI:10.1364/AO.47.005500.
- [4] M. S. Longuet-Higgins, “Reflection and refraction at a random moving surface. i. pattern and paths of specular points,” *J. Op. Soc. Am.*, vol. 50.
- [5] L. P. Boivin, “Multiple imaging using various types of simple phase gratings,” *Applied Optics*, vol. 11, no. 18.
- [6] O. Bryngdahl, “Image formation using self-imaging techniques,” *J. Op. Soc. Am. A*, vol. 63, no. 4.
- [7] D. F. Z. Wen, A. Lambert, “Reconstruction of imagery reflected from water surface,” *Optics Express*, vol. 23, no. 17.
- [8] J. F. Nye in *Natural focusing and fine structure of light*, ch. 8, London, United Kingdom: IOP Publishing Ltd, first ed., 1999.
- [9] P. G. Hewitt in *Conceptual Physics*, Boston, United States: Pearson Addison Wesley, tenth ed., 2007.
- [10] R. Guenther in *Modern Optics*, Hoboken, New Jersey, U.S.A.: John Eiley and Sons, Inc, 1990.
- [11] R. P. Feynman in *Lectures on Physics*, vol. 1, www.feynmanlectures.caltech.edu: California Institute of Technology, 1963.
- [12] W. T. Welford in *Useful Optics*, Chicago, Illinois, U.S.A.: University of Chicago Press, 1991.
- [13] M. Berry and C. Upstill, “Catastrophe optics: Morphologies of caustics and their diffraction patterns,” *Progress in Optics*, vol. 18, pp. 257–346, 1980. DOI:10.1016/S0079-6638(08)70215-4.
- [14] C.-R. Gabriel Martinez-Niconoff, Jazmin Carranza Alejandro, “Caustics of diffraction fields,” *Optics Communications*, vol. 114.
- [15] J. A. Hoffnagle and D. L. Shealy, “Waves and thom’s theorem,” *Advances in Physics*, vol. 25, pp. 21–26, 1975. DOI:10.1080/00018737600101342.
- [16] L. C. n. Maximino Avendaño Alejo and I. Moreno, “Properties of caustics produced by a positive lens: meridional rays,” *J. Opt. Soc. Am. A.*, vol. 27, pp. 2252–2260, 2010. DOI:10.1364/JOSAA.27.002252.
- [17] P. O.-V. S. A. Juárez-Reyes and G. Silva-Ortigoza, “Wavefronts, light rays and caustic associated with the refraction of a spherical wave by two interfaces: the axicon and the plano-convex parabolic lenses,” *J. Opt.*, vol. 17, 2015. DOI:10.1088/2040-8978/17/6/065604.

- 
- [18] S. A. J.-R. I. J.-M. P. O.-V. G. S.-O. R. S.-O. Omar de Jesús Cabrera-Rosas, Ernesto Espíndola-Ramos and C. T. Sosa-Sánchez, “Wavefronts and caustic associated with durnin’s beams,” *J. Opt.*, vol. 19, 2016. DOI:10.1088/2040-8986/19/1/015603.
- [19] A. R. J. K. Csaba Petérfalvi, A. Pályi and J. Cserti, “Catastrophe optics of caustics in single and bilayer graphene: fine structure of caustic,” *arXiv:astro-ph/9504060*, 1995.
- [20] P. L. Marston, “Catastrophe optics of spheroidal drops and generalized rainbows,” *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, vol. 63, pp. 341–351, 1999. DOI: 10.1117/12.2026366.
- [21] J. K. M. A. Shah and S. Pattanaik, “Caustics mapping: An image-space technique for real-time caustics,” *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, vol. 13, no. 2.
- [22] R. D.-U. M. Avendaño Alejo and I. Moreno, “Caustics caused by refraction in the interface between an isotropic medium and a uniaxial crystal,” *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 25, no. 7.
- [23] E. M. Salomons, “Caustic diffraction fields in a downward refracting atmosphere,” *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 104, no. 3259.
- [24] L. C. n. M. Avendaño Alejo and I. Moreno, “Exact wavefronts and caustic surfaces produced by planar ripple lenses,” *Optics Express*, vol. 23, no. 17.
- [25] O. d. I. P. Jorge Castro-Ramos and G. Silva-Ortigoza, “Computation of the disk of least confusion for conic mirrors,” *Applied Optics*, vol. 43, pp. 6080–6089, 2004. DOI:10.1364/AO.43.006080.
- [26] J. C.-R. G. Silva-Ortigoza and A. Cordero-Dávila, “Exact calculation of the circle of least confusion of a rotationally symmetric mirror. ii,” *Applied Optics*, vol. 40, pp. 1021–1028, 2001. DOI:10.1364/AO.40.001021.
- [27] R. W. Hosken, “Circle of least confusion of a spherical reflector,” *Applied Optics*, vol. 46, pp. 3107–3117, 2007. DOI:10.1364/AO.46.003107.
- [28] D. L. Shealy and J. A. Hoffnagle, “Wavefront and caustic surfaces of refractive laser beam shaper,” *Novel Optical Systems Design and Optimization X*.
- [29] M. A. no Alejo, “Analytic formulas of the aspheric terms for convex-plano and plano-convex aspheric lenses,” *Proc. of SPIE Current Developments in Lens Design and Optical Engineering*, vol. 8841, 2013. DOI: 10.1117/12.2026366.
- [30] M. B. T. Pyne, “Beyond the thin lens approximation,” *arXiv:astro-ph/9504060*, 1995.
- [31] M. M.-A. P. O.-V. G. S.-O. R. S.-O. Jorge Castro-Ramos, Salvador Alejandro Juárez-Reyes and R. Suárez-Xique, “The refraction and reflection laws from a complete integral of the eikonal equation and Huygens’ principle,” *J. Opt.*, vol. 19, 2016. DOI:10.1088/2040-8986/19/1/015603.
- [32] O. N. Stavroudis in *The Mathematics of Geometrical and Physical Optics*, Weinheim, Alemania volume =: WILEY-VCH Verlag, 2006.
- [33] S. C. B. Vohnsen and D. Rativa, “Wavefront sensing with an axicon,” *Optics Letters*, vol. 36, pp. 846–848, 2001. DOI:10.1364/AO.39.004529.
- [34] Y. A. Kravtsov and Y. I. Orlov in *Caustics, catastrophes and wave fields*, ch. 3, Heidelberg, Germany: Springer-Verlag, second ed., 1999.
- [35] E. W. M. Born in *Principles of optics. Electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light*, Cambridge, U. K.: Cambridge University Press, 7 ed., 1972.
- [36] V. I. Arnold in *Catastrophe Theory*, ch. 8, Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, second ed., 1986.
-

- [37] S. M. G.-Z. V. I. Arnold and A. N. Varchenko in *Singularities of Differentiable Maps*, vol. 1, ch. 3, Boston: Birkhauser, first ed., 1985.
- [38] D. Malacara in *Optical Shop Testing*, ch. 8, 9, Hoboken, New Jersey, U.S.A.: Wiley-Interscience, third ed., 2007.
- [39] J. C. W. E. P. Goodwin in *Interferometric Optical Testing*, Bellingham, Washington, U.S.A.: SPIE Press, 2006.
- [40] in *Handbook of Practical Astronomy* (G. D. Roth, ed.), ch. 4, Berlin Heidelberg, Germany: Springer, first ed., 2009.
- [41] V. Ronchi, “Forty years of history of a grating interferometer,” *Applied Optics*, vol. 3, pp. 437–451, 1964. DOI:10.1364/AO.3.000437.
- [42] D. Malacara, “Geometrical ronchi test of aspherical mirrors,” *Applied Optics*, vol. 4, pp. 1371–1374, 1965. DOI:10.1364/AO.4.001371.
- [43] J. D.-A. Alberto Cordero-Dávila and V. Cabrera-Peláez, “Algorithm for the simulation of ronchigrams of arbitrary optical systems and ronchi grids in generalized coordinates,” *Applied Optics*, vol. 41, pp. 3866–3873, 2002. DOI:10.1364/AO.41.003866.
- [44] M. M.-A. P. O.-V. E. R.-H. G. S.-O. R. S.-O. R. S.-X. G. F. T. d. C. Salvador Alejandro Juárez-Reyes, Magdalena Marciano-Melchor and M. Velázquez-Quesada, “Wavefronts, caustic, ronchigram, and null ronchigrating of a plane wave refracted by an axicon lens,” *J. Opt. Soc. Am. A.*, vol. 31, 2014. DOI:10.1364/JOSAA.31.000448.
- [45] T. Yatagai, “Fringe scanning ronchi test for aspherical surfaces,” *Applied Optics*, vol. 23, pp. 3676–3679, 1984. DOI:10.1364/AO.23.003676.
- [46] H.-J. L. . S.-W. Kim, “Precision profile measurement of aspheric surfaces by improved ronchi test,” *Optical Engineering*, vol. 38, pp. 1041–1047, 1999. DOI:10.1117/1.602147.
- [47] M. V. Berry, “Disruption of images: the caustic-touching theorem,” *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 4, pp. 561–569, 1987. DOI:10.1364/JOSAA.4.000561.
- [48] M. M.-A.-E. R.-H.-J. G. S.-S. G. S.-O. R. S.-O. R. S.-X. Jorge Castro-Ramos, Magdalena Marciano-Melchor and J. M. Zárate-Paz, “Wavefronts, caustics, and ronchigrams of a spherical wave reflected by a spherical mirror,” *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 30, pp. 177–188, 2013. DOI:10.1364/JOSAA.30.000177.
- [49] S. A. J.-R. P. Ortega-Vidals and G. Silva-Ortigoza, “Internal structure of an optical null ronchi grating test for a plano-parabolic lens,” *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 33, pp. 44–51, 2016. DOI:10.1364/JOSAA.33.000044.
- [50] G. S.-O. Gabriel Martínez-Niconoff and R. Suárez-Xique, “Morphology of wave fronts and caustics associated with a circular wave refracted by an arbitrary curve: The two-dimensional axicon,” *Phys. Rev. A.*, vol. 90, 2014. DOI:10.1103/PhysRevA.90.053803.
- [51] G. S.-O.-O. d. J. C.-R. E. E.-R. Salvador Alejandro Juárez-Reyes, Citlalli Teresa Sosa-Sánchez and P. Ortega-Vidals, “The wire optical test: a thorough analytical study in and out of caustic surface, and advantages of a dynamical adaptation,” *J. Opt.*, vol. 20, 2018. DOI:10.1088/2040-8986/aaa719.
- [52] S. A. J.-R. Omar de J. Cabrera-Rosas, Paula Ortega-Vidals and G. Silva-Ortigoza, “Curvatures of the refracted wavefronts and ronchigrams for a plano arbitrary lens,” *J. Opt. Soc. Am. A.*, vol. 33, pp. 1760–1768, 2016. DOI:10.1364/JOSAA.33.001760.

- [53] J. A. Hoffnagle and D. L. Shealy, “Refracting the k-function: Stavroudis’s solution to the eikonal equation for multielement optical systems,” *J. Opt. Soc. Am. A.*, vol. 28, pp. 1312–1321, 2011. DOI:10.1364/JOSAA.28.001312.
- [54] M. A. n.-A.-L. C. n. Gabriel Castillo-Santiago, Diana Castán-Ricaño and R. Díaz-Uribe, “Design of hartmann type null screens for testing a plano-convex aspheric lens with a ccd sensor inside the caustic,” *Optics Express*, vol. 24, pp. 19405–19416, 2016. DOI:10.1364/OE.24.019405.
- [55] N. Q. L. C. n. Maximino Avendaño Alejo, Dulce González-Utrera and C. L. O. nez Romero, “Null ronchi-hartmann test for a lens,” *Optics Express*, vol. 18, pp. 21131–21137, 2010. DOI:10.1364/OE.18.021131.
- [56] G. S.-O. R. S.-O. Edwin Román-Hernández, José Guadalupe Santiago-Santiago and J. Velázquez-Castro, “Describing the structure of ronchigrams when the grating is placed at the caustic region: the parabolical mirror,” *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 27, pp. 832–845, 2010. DOI:10.1364/JOSAA.27.000832.
- [57] M. A. n. A. Diana Castán Ricaño, “Designing null screens type sub-structured ronchi to test a fast plano-convex aspheric lens,” *Proceeding, SPIE Optical Engineering and applications*, vol. 9195, 2014. DOI:10.1117/12.2062454.
- [58] M. I. P. M. y G. Rodríguez Zurita, “Propiedades de difracción en campo lejano de rejillas intercaladas de ronchi,” *Revista mexicana de FÁsica*, vol. 47, pp. 253–259, 2001.
- [59] A. C.-D. E. Luna-Aguilar, A. Cornejo-Rodríguez, “Prueba nula de ronchi-hartmann,” *Revista mexicana de FÁsica*, vol. 38, pp. 150–161, 1992.
- [60] R. W. P. J. A. Anderson, “Ronchi’s method of optical testing,” *Astrophysical Journal*, vol. 70, p. 175, 1929. DOI:10.1086/143213.
- [61] S. R. J. Arasa and N. Tomás, “Simple method for improving the sampling in profile measurements by use of the ronchi test,” *Applied Optics*, vol. 39, pp. 4529–4534, 2000. DOI:10.1364/AO.39.004529.
- [62] R. O. G. J. E. Greivenkamp, D. G. Smith and G. A. Williby, “Optical testing using shack-hartmann wavefront sensors,” *Optical Engineering for Sensing and Nanotechnology*.
- [63] R. D.-U.-E. P.-Z.-A. M. Z.-R. A. C.-R. F. S. Granados-Agustín a, O. Cardona-Núñez, “Analysis of the common characteristics of the hartmann, ronchi, and shack hartmann tests,” *Optik*, vol. 125, pp. 667–670, 2014. DOI:10.1016/j.ijleo.2013.07.056.
- [64] J. A. Hoffnagle and D. L. Shealy, “Refracting the k function: Stavroudis’s solution to the eikonal equation for multielement optical systems,” *J. Op. Soc. Am. A*, vol. 28.
- [65] F. G.-A. R. Díaz-Uribe1 and A. Cornejo-Rodríguez, “Classical hartmann test with scanning,” *Optics Express*, vol. 17, no. 16.
- [66] M. n.-A. R. D.-U. J. DelOlmo-Márquez, D. Castán-Ricaño, “Designing null phase screens to test a fast plano-convex aspheric lens,” *Proc of SPIE Optical Manufacturing and Testing XI*.
- [67] A. G.-G. M. A. n.-A.-R. D.-U. G. Castillo-Santiago, D. Castán-Ricaño, “Null screens type hartmann to test simple lenses,” *Proc of SPIE Optical Manufacturing and Testing XI*.
- [68] T. K. T. L. A. Sillanpaa, “Hartmann interferometric testing of large mirrors,” *Proc of SPIE Advanced Optical Manufacturing and Testing II*.
- [69] A. C.-R. A. Cordero-Davila and O. Cardona-Nunez, “Null hartmann and ronchi-hartmann tests,” *Applied Optics*, vol. 29, no. 31.
- [70] D. Malacara, “Hartmann test of aspherical mirrors,” *Applied Optics*, vol. 11, no. 1.

- [71] N. Q.-L. C. n. y. C. O. n.-R. M. Avendaño Alejo, D. González-Utrera, “Null ronchi-hartmann test for a lens,” *Optics Express*, vol. 18, no. 20.
- [72] L. ling Qin; Jing-chi Yu, “Research on hartmann test for progressive addition lenses,” *4th International Symposium on Advanced Optical Manufacturing*, vol. 7283.
- [73] T. N.-F. H. Y. N. Y. T. K. T. Takumi Sannomiya, Hidetaka Sawada, “Determination of aberration center of ronchigram for automated aberration correctors in scanning transmission electron microscopy,” *Ultramicroscopy*, vol. 135, pp. 71–79, 2013. DOI:10.1016/j.ultramic.2013.05.024.
- [74] P. D. N. A. I. K. S. J. P. A. R. Lupini, P. Wang, “Aberration measurement using the ronchigram contrast transfer function,” *Ultramicroscopy*, vol. 110, pp. 891–898, 2010. DOI:10.1016/j.ultramic.2010.04.006.
- [75] E. E.-R. S. A. J.-R. I. J.-M. A. M. P. O.-V. E. R.-H. G. S.-O. R. S.-O. Nora Bretón, Omar de Jesús Cabrera-Rosas, “Towards the ronchi test for gravitational lenses: the gravitoronchigram,” *J. Opt.*, vol. 19, 2017. DOI:10.1088/2040-8986/aa6cc7.
- [76] T. P. K. Simonetta Frittelli and E. T. Newman, “Image distortion from optical scalars in nonperturbative gravitational lensing,” *Phys. Rev. D.*, vol. 63, 2000. DOI:10.1103/PhysRevD.63.023007.
- [77] S. A. J.-R. C. T. S.-S.-E. E.-R. I. J.-M. Omar de J. Cabrera-Rosas, Paula Ortega-Vidals and G. Silva-Ortigoza, “Optical scalars and congruences of light rays: A link between beams and analytic aberrations,” *Phys. Rev. A.*, vol. 96, 2017. DOI:10.1103/PhysRevA.96.023852.
- [78] E. T. N. Simoneta Frittelli and G. Silva-Ortigoza, “The eikonal equation in flat space: Null surfaces and their singularities. i,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 40, 1998. DOI:10.1063/1.532777.
- [79] E. T. N. Simoneta Frittelli and G. Silva-Ortigoza, “The eikonal equation in asymptotically flat space times,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 40, 1999. DOI:10.1063/1.532705.
- [80] F. H. T. N. T. K. T. T. Y. K. T. T.-Y. O.-Y. T. K. T. H. Sawada, T. Sannomiya, “Measurement method of aberration from ronchigram by autocorrelation function,” *Applied Optics*, vol. 108.
- [81] H. H. Y. C. I. Crossfield, “Telescope wavefront aberration compensation with a deformable mirror in an adaptive optics system,” *Event: Lasers and Applications in Science and Engineering*, vol. 6105.
- [82] J. A. Díaz, “Primary aberrations of a thin lens with standard aspheres,” *Optical Design and Engineering*, vol. 5249, 2004. DOI:10.1086/143213.
- [83] O. C.-M. n. Gilberto Silva-Ortigoza, Magdalena Marciano-Melchor and R. Silva-Ortigoza, “Exact computation of the caustic associated with the evolution of an aberrated wavefront,” *J. Opt.*, vol. 4, 2002. DOI:10.1088/1464-4258/4/3/325.
- [84] T. O. T. M. S. T. S. A. M. F. F. Y. N. M. T. F. Y. H. T. Mihashi, “Apparent accommodation and corneal wavefront aberration in pseudophakic eyes,” *Investigative ophthalmology and visual science*, vol. 43, no. 9.
- [85] L. N. T. X. H. A. B. R. A. Applegate, “Accuracy and precision of objective refraction from wavefront aberrations,” *Journal of vision*, vol. 4, no. 4.
- [86] S. Y. T. M. K. M. T. S. T. O. Shiro Amano, Yuki Amano, “Age-related changes in corneal and ocular higher-order wavefront aberrations,” *American Journal of Ophthalmology*, vol. 137, no. 6.
- [87] T. K. T. M. Y. H. K. N. H. W. Y. T. Naoyuki Maeda, Takashi Fujikado, “Wavefront aberrations measured with hartmann-shack sensor in patients with keratoconus,” *American Journal of Ophthalmology*, vol. 109, no. 11.

- [88] R. H. F. T. X. S. J. E. Ji C.He, Pei Sun, “Wavefront aberrations in eyes of emmetropic and moderately myopic school children and young adults,” *Vision Research*, vol. 42, no. 8.
- [89] R. H. F. T. X. S. J. E. Ji C.He, Pei Sun, “Influence of intraocular lens tilt and decentration on wavefront aberrations,” *Journal of Cataract and Refractive Surgery*, vol. 30, no. 10.
- [90] N. M. T. O. Y. H. T. M. Teruhito Kuroda, Takashi Fujikado, “Wavefront analysis of higher-order aberrations in patients with cataract,” *Journal of Cataract and Refractive Surgery*, vol. 28, no. 13.
- [91] T. S. T. T. K. M. Tetsuro Oshika, Chikako Okamoto, “Contrast sensitivity function and ocular higher-order wavefront aberrations in normal human eyes,” *Ophthalmology*, vol. 113, no. 10.
- [92] I. D. Maleev and G. A. S. Jr, “Classical hartmann test with scanning,” *J. Opt. Soc. Am. B*, vol. 20, no. 6.
- [93] F. A. S. S. G. Garanin and Y. I. Malakhov, “Adaptive optics and optical vortices,” *Adaptative optics progress*, 2012. DOI:10.5772/53328.
- [94] J. D. Jackson in *Classical Electrodynamics*, Hoboken, New Jersey, U.S.A.: John Wiley and Sons, Inc, third ed., 1999.
- [95] F. J. M. J. R. Reitz in *Foundations of Electromagnetic Theory*, Massachusetts, USA: Adison-Wesley Publishing, 1960.
- [96] D. J. Griffiths in *Introduction to Electrodynamics*, New Jersey, USA: Prentice Hall, third ed., 1999.
- [97] C. G. Gibson in *Elementary geometry of differentiable curves*, ch. 2, Cambridge, United Kingdom: Cambridge University Press, first ed., 2001.

## Apéndice A

# Demostración de la sección 1.11

Sustituimos  $\mathbf{X}$  en 1.80

$$\begin{aligned}
 n_2 \left[ \mathbf{r}_1 + \left( \frac{\tau}{n_2} - \frac{n_0}{n_2} |\mathbf{r} - \mathbf{s}| - \frac{n_1}{n_2} |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}| \right) \hat{R}_1 \right] \cdot \hat{R}_1 + n_0 |\mathbf{r} - \mathbf{s}| + n_1 |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}| - n_2 \mathbf{r}_1 \cdot \hat{R}_1 &= \tau \\
 \implies n_2 \mathbf{r}_1 \cdot \hat{R}_1 + \tau - n_0 |\mathbf{r} - \mathbf{s}| - n_1 |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}| + n_0 |\mathbf{r} - \mathbf{s}| + n_1 |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}| - n_0 \mathbf{r}_1 \cdot \hat{R}_1 &= \tau \\
 &\implies \tau = \tau
 \end{aligned}$$

Ahora se sustituye en  $\mathbf{X}$  en 1.81

$$\begin{aligned}
 n_2 \mathbf{X} \cdot \hat{R}_{1x} + k_x &= 0 \\
 \implies n_2 \left[ \mathbf{r}_1 + \left( \frac{\tau}{n_2} - \frac{n_0}{n_2} |\mathbf{r} - \mathbf{s}| - \frac{n_1}{n_2} |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}| \right) \hat{R}_1 \right] \cdot \hat{R}_{1x} + k_x &= 0 \tag{A.1}
 \end{aligned}$$

donde  $k_x$  queda como

$$\begin{aligned}
 k_x &= n_0 \frac{\partial}{\partial x} |\mathbf{r} - \mathbf{s}| + n_1 \frac{\partial}{\partial x} |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}| - n_2 \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{r}_1 \cdot \hat{R}_1) \\
 &= n_0 \hat{I} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} + n_1 \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r})^2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}|} \right] - n_2 \mathbf{r}_{1x} \cdot \hat{R}_1 - n_2 \mathbf{r}_1 \cdot \hat{R}_{1x} \\
 &= n_0 \hat{I} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} + n_1 \left[ \frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r})}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}|} \right] (\mathbf{r}_{1x} - \mathbf{r}_x) - n_2 \mathbf{r}_{1x} \cdot \hat{R}_1 - n_2 \mathbf{r}_1 \cdot \hat{R}_{1x}
 \end{aligned}$$

sustituyendo las siguientes definiciones

$$\begin{aligned}
 \hat{R}_0 &= \frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r})}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}|} \\
 \hat{R}_0 &= \gamma_0 \hat{I} + \Omega \hat{N} \\
 \hat{R}_1 &= \gamma_1 \hat{R}_0 + \Omega_1 \hat{N}_1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_x &= n_0 \hat{I} \cdot \mathbf{r}_x - n_1 \hat{R}_0 \cdot \mathbf{r}_x + n_1 \hat{R}_0 \cdot \mathbf{r}_{1x} - n_2 \mathbf{r}_{1x} \cdot \hat{R}_1 - n_2 \mathbf{r}_1 \cdot \hat{R}_{1x} \\
 &= n_0 \hat{I} \cdot \mathbf{r}_x - n_0 \hat{I} \cdot \mathbf{r}_x - n_1 \Omega \hat{N} \cdot \mathbf{r}_x + n_1 \hat{R}_0 \cdot \mathbf{r}_{1x} - n_1 \mathbf{r}_{1x} \cdot \hat{R}_0 - n_2 \Omega_1 \mathbf{r}_{1x} \cdot \hat{N}_1 - n_2 \mathbf{r}_1 \cdot \hat{R}_{1x} \\
 &= -n_2 \mathbf{r}_1 \cdot \hat{R}_{1x}
 \end{aligned}$$

ya que  $\hat{R}_1 \cdot \hat{R}_1 = 1$  y  $\hat{R}_1 \cdot \hat{R}_{1x} = 0$ .

Regresando a la ecuación A.1 tenemos que

$$\begin{aligned} \Rightarrow n_2 \mathbf{r}_1 \cdot \hat{R}_{1x} + \left( \frac{\tau}{n_2} - \frac{n_0}{n_2} |\mathbf{r} - \mathbf{s}| - \frac{n_1}{n_2} |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}| \right) \hat{R}_1 \cdot \hat{R}_{1x} + k_x &= 0 \\ \Rightarrow n_2 \mathbf{r}_1 \cdot \hat{R}_{1x} - n_2 \mathbf{r}_1 \cdot \hat{R}_{1x} &= 0 \\ \Rightarrow 0 &= 0 \end{aligned}$$

queda demostrada la ecuación 1.81, de manera similar 1.82.

Con lo que nosotros hemos encontrado una expresión de los frentes de onda.

## Apéndice B

# Parametrización de la segunda superficie refractante, sección 2.1

La parametrización de la segunda refracción, tomando que  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  etiquetan puntos en el plano  $\mathbf{X}$   $\mathbf{Y}$ :

$$\mathbf{r}_1 = u\hat{i} + v\hat{j} + \left(b - \frac{u^2 + v^2}{2a}\right)\hat{k}$$

Por otro lado tenemos que la ecuación que caracteriza a los rayos de luz está dada por:

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \mathbf{r} + l\hat{R} \\ &= \rho \cos \phi \left(1 + \frac{l\gamma_0}{\sqrt{\rho^2 + s_3^2}}\right)\hat{i} + \rho \sin \phi \left(1 + \frac{l\gamma_0}{\sqrt{\rho^2 + s_3^2}}\right)\hat{j} + \frac{l\sqrt{s_3^2 + \rho^2(1 - \gamma_0^2)}}{\sqrt{\rho^2 + s_3^2}}\hat{k} \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

ahora se iguala componente a componente del vector de posición de la segunda refracción con la ecuación que etiqueta puntos de los frentes de onda, ya que el objetivo es escribir  $\mathbf{r}_1$  en términos de  $x$  y  $y$

$$u = \rho \cos \phi \left(1 + \frac{l\gamma_0}{\sqrt{\rho^2 + s_3^2}}\right) \quad (\text{B.2})$$

$$v = \rho \sin \phi \left(1 + \frac{l\gamma_0}{\sqrt{\rho^2 + s_3^2}}\right) \quad (\text{B.3})$$

$$b - \frac{u^2 + v^2}{2a} = \frac{l\sqrt{s_3^2 + \rho^2(1 - \gamma_0^2)}}{\sqrt{\rho^2 + s_3^2}} \quad (\text{B.4})$$

de las dos primeras ecuaciones anteriores y definiendo  $\Theta^2 = u^2 + v^2$ :

$$\Theta^2 = \rho^2 \left[1 + \frac{l\gamma_0}{\sqrt{\rho^2 + s_3^2}}\right]^2 \quad (\text{B.5})$$

despejando  $l$  de la penúltima ecuación y sustituyendo en esta última, resulta:

$$\Theta^2 = \rho^2 \left[ \frac{2a\sqrt{s_3^2 + \rho^2(1 - \gamma_0^2)} + (2ab - \Theta^2)\gamma_0}{2a\sqrt{s_3^2 + \rho^2(1 - \gamma_0^2)}} \right]^2 \quad (\text{B.6})$$

**APÉNDICE B. PARAMETRIZACIÓN DE LA SEGUNDA SUPERFICIE  
REFRACTANTE, SECCIÓN 2.1**

---

de donde al resolver para  $\Theta$  en función de  $\rho$

$$\Theta = \frac{\sqrt{a^2 ((1 - \gamma_0^2) \rho^2 + s_3^2) + 2a\gamma_0\rho^2 (b\gamma_0 + \sqrt{(1 - \gamma_0^2) \rho^2 + s_3^2})} - a\sqrt{(1 - \gamma_0^2) \rho^2 + s_3^2}}{\gamma_0\rho} \quad (\text{B.7})$$

$$\Theta = \frac{\eta - a\epsilon}{\gamma_0\rho} \quad (\text{B.8})$$

donde:

$$\eta = \sqrt{a^2 ((1 - \gamma_0^2) \rho^2 + s_3^2) + 2a\gamma_0\rho^2 (b\gamma_0 + \sqrt{(1 - \gamma_0^2) \rho^2 + s_3^2})} \quad (\text{B.9})$$

$$\epsilon = \sqrt{(1 - \gamma_0^2) \rho^2 + s_3^2} \quad (\text{B.10})$$

de donde queda determinado  $\mathbf{r}_1$  ahora en función de  $\rho$ , sin embargo para seguir abreviando notación lo seguiremos dejando indicado a través de  $\Theta$

$$\mathbf{r}_1 = \Theta \cos \hat{\phi}_i + \Theta \sin \hat{\phi}_j + \left(b - \frac{\Theta^2}{2a}\right) \hat{k} \quad (\text{B.11})$$

$$\mathbf{r}_1 = \Theta \cos \hat{\phi}_i + \Theta \sin \hat{\phi}_j + h(\Theta) \hat{k} \quad (\text{B.12})$$