Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Fisico-Matemáticas

Análisis de las simetrías de la teoría de norma asociada al estado generalizado de Kodama

Tesis presentada al

Posgrado en Física Aplicada

como requisito parcial para la obtención del grado de

Maestro en Ciencias Física Aplicada

por

Omar de Jesús Cabrera Rosas

asesorado por

Dr. Alberto Escalante Hernández

Puebla Pue.
Noviembre de 2014

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Fisico-Matemáticas

Análisis de las simetrías de la teoría de norma asociada al estado generalizado de Kodama

Tesis presentada al

Posgrado en Física Aplicada

como requisito parcial para la obtención del grado de

Maestro en Ciencias Física Aplicada

por

Omar de Jesús Cabrera Rosas

asesorado por

Dr. Alberto Escalante Hernández

Puebla Pue.
Noviembre de 2014

Título: Análisis de las simetrías de la teoría de norma asociada al estado generalizado de Kodama
Estudiante: Omar de Jesús Cabrera Rosas

COMITÉ

Dr. J. Jesús Toscano Chávez
Presidente

Dr. Roberto Cartas Fuentevilla
Secretario

Dr. Gilberto Tavares Velasco
Vocal

Vocal

Dr. Alberto Escalante Hernández
Asesor

Resumen

En este trabajo se desarrolla el análisis hamiltoniano del acoplamiento de Relatividad General más Chern-Simons y posteriormente se analiza el estado generalizado de Kodama. Se considera como primer caso la acción de Palatini acoplada con el término topológico de Chern-Simons y se hace uso de un parámetro de tipo Barbero-Immirzi real; se obtienen las constricciones de la teoría así como los paréntesis de Dirac para las variables canónicas. En el segundo caso se estudia el estado generalizado de Kodama constituido por la acción de Chern-Simons, Chern-Simons dual y el término topológico de Nieh-Yan. Dicho estado depende de una conexión y de una tétrada, a diferencia del estado original de Kodama que sólo depende de la conexión. Se conoce en la literatura que el estado original de Kodama vista como una teoría de campo en 3 dimensiones, carece de grados de libertad físicos. De esta manera, en este trabajo se desarrolla el análisis hamiltoniano de la teoría asociada al estado generalizado de Kodama para conocer las simetrías relevantes de la teoría. Para permitir un cálculo directo en este caso, se hace una descomposición de la conexión en términos de sus partes autodual y anti-autodual.

Introducción

Las teorías de unificación no son un tópico nuevo en la física. Desde principios del siglo XX con el surgimiento de la teoría cuántica, la teoría de la Relatividad de Einstein, y el refinamiento de la teoría electromagnética, surgió la idea de tener una teoría completa que las englobara a todas ellas.

Uno de los grandes problemas que ha surgido es que Mecánica Cuántica (MC) y Relatividad General (RG) tienen enfoques conceptuales distintos y aunque ambas estan fundadas en conceptos profundos bien establecidos, es necesario ampliar sus dominios para estudiar fenómenos que involucren problemas tanto de carácter cuántico así como de carácter gravitacional. Por un lado, el modelo estándar y sus extensiones han probado de manera eficaz la empatía existente entre la relatividad especial y la mecánica cuántica, y por lo tanto sería razonable que esta concordancia existiera también con la contraparte gravitacional.

La importancia de lograr este objetivo radica en que, si existe un modo eficaz para cuantizar RG, esto implicaría la existencia de la partícula de interacción gravitatoria: el gravitón. Aunque siendo honestos, esta sería una de tantas metas que podrían lograrse durante este proceso. Fundamentalmente, el entendimiento profundo del fenómeno gravitacional podría arrojar respuestas que muestren la pauta hacia nueva física.

Desde principios de los 80 se dió un auge en la conceptualización de Relatividad General como una teoría de campos. Con los trabajos de Sen y Ashtekar [1], el objetivo consistió en un nuevo entendimiento de sus fundamentos sin hacer uso de conceptos adicionales tales como dimensiones extra o la introducción de nuevos grados de libertad de manera artificial, sino que se emplearon los principios básicos de RG y la teoría cuántica de campos [2]. Uno de los principales pilares para esta reformulación, consistió en entender la invariancia ante difeomorfismos de Relatividad General (el grupo de simetría de la teoría), lo que condujo a establecer que la métrica no podía conceptualizarse desde un punto de vista fijo, sino dinámico. Éste es el enfoque de *loop quantum gravity*, el cual se basa en hamiltonizar RG para posteriormente realizar una cuantización canónica de la teoría.

Sin embargo, este desarrollo no se ha presentado sin la aparición de obstáculos. Es decir, los conceptos que han surgido bajo este enfoque no encajan directamente con aquellos que ya se tenían en la teoría cuántica de campos usual, los cuales han probado ser existosos no solo a nivel teórico sino experimental. Lo anterior implica la necesidad de crear un entendimiento más profundo que permita conciliar las dos concepciones: la gravitatoria y la cuántica.

Uno de los resultados más sorprendentes ha sido el de proponer a RG como una teoría independiente del fondo, pues es bien sabido que la teoría se construye tomando a la métrica como concepto fundamental en sus ecuaciones. Aunque lo anterior parece contradictorio, puede entenderse tomando en cuenta que dado que la teoría es invariante ante difeomorfismos, el especificar una métrica rompe las simetrías de RG, lo cual no es algo permisible bajo esta formulación.

Además, los modelos cosmológicos que existen en la actualidad, indican la necesidad de este enfoque, pues las observaciones hechas sugieren que el espacio-tiempo es discreto a la escala de Planck, pues los fenómenos cuántico-gravitatorios (por ejemplo agujeros negros) parecen tener este comportamiento [3].

Hay que observar que Relatividad General es una teoría singular, *i.e.*, una teoría con constriccio-

nes en su dinámica. Es por lo tanto necesario hacer uso del *algoritmo de Dirac-Bergmann* para sistemas singulares y es esencial tomar en cuenta que el entender los conceptos que surgen mediante el proceso de hamiltonización no es trivial. Por un lado, las constricciones como tal , pueden aparecer en un sistema físico arbitrario, y es importante identificarlas, pues los grados de libertad del sistema se ven modificados por ellas. Por otro lado en el caso de RG, la presencia de éstas puede provenir mediante la inclusión de términos de carácter topológico. Los términos topológicos no poseen grados de libertad, y sin embargo modifican la dinámica del sistema [4, 5].
Es importante observar que aunque las ecuaciones de movimiento para RG están bien establecidas, en realidad la lagrangiana de la teoría puede sufrir modificaciones a través de estos términos que no contribuyen en nada a las ecuaciones de movimiento, y aunque en principio, no aportan nada a la dinámica del sistema a nivel clásico, esto no querría decir que lagrangianas con las mismas ecuaciones, representen la misma teoría. A nivel cuántico la situación es aún más delicada pues estos términos sí determinan distintos tipos de posibles cuantizaciones para la teoría, y además modifican las constricciones del sistema.
Por otra parte, la dinámica en 4 dimensiones vuelve todo más complejo, por lo que ha sido necesario abordar la problemática tratándola de manera un poco menos ambiciosa, usando modelos no en 4 dimensiones, sino en 3, de tal modo que los resultados que se obtengan a este nivel indiquen la pauta que deba de seguirse para buscar las simetrías en la teoría formal cuadridimensional.
Esto al contrario de restringir los resultados, permite observar qué propiedades se preservan de un modelo a otro, lo que implica identificar a aquellas que posean un carácter más general. Por lo anterior, nuestro trabajo consistirá en hacer uso de un modelo tridimensional en el cual se desarrollará el análisis de la simetrías; aunque este modelo se le suele llamar "de juguete", la información que surja de este desarrollo nos ayudará a definir las simetrías que gobiernan al sistema dinámico.
Con todo lo anterior a la mano, podemos entonces hablar de cómo esta organizado este trabajo: en el primer Capítulo hacemos una revisión del algoritmo de Dirac-Bergmann para sistemas singulares, debido a que RG es una teoría que presenta restricciones. En el segundo Capítulo se revisan los conceptos necesarios sobre variedades y formas diferenciales, que servirán para replantear la formulación usual de Relatividad General en términos de un lenguaje sin uso de la métrica.
En el tercer Capítulo se estudia la formulación de Palatini para RG, la cual consiste en proyectar la teoría a un sistema rígido de referencia, el cual sustituirá el uso de la métrica. En el cuarto Capítulo se desarrolla el acoplamiento de Relatividad General con el término topológico de Chern-Simons haciendo uso de $SU(2)$ como grupo interno, y se obtienen los paréntesis de Dirac que en trabajos posteriores se usarán para la identificación de las observables del sistema. En la siguiente sección se desarrolla el análisis del estado de Kodama; se da una introdución breve de cómo está construido este estado, y se habla un poco de los factores que permiten el definirlo como un estado físico. Posteriormente se analizan las simetrías de la teoría de norma asociada al estado generalizado de Kodama, que se construye con el acoplamiento de los términos topológicos de Chern-Simons, Chern-Simons dual y Nieh-Yan. Para este caso se usa como grupo interno a $SO(3,1)$ lo que ayudará a definir el término topológico de Chern-Simons dual en esta representación.
Para que las simetrías de la teoría puedan reducirse de manera más rápida, se transforma el acoplamiento a un caso más sencillo que permita identificar sus constricciones. El caso al que se reduce este problema es a uno del tipo de gravedad exótica [4].
Finalmente en el último capítulo se dan las conclusiones obtenidas en el desarrollo de este trabajo, así como las perspectivas que se tienen bajo esta formulación.

Índice general

Capítulo 1

Formalismo hamiltoniano para sistemas singulares: algoritmo de Dirac-Bergmann

En el contexto de la mecánica clásica analítica, existen dos formulaciones fundamentales que desarrollan un estudio estricto de los sitemas mecánicos: la formulación de Lagrange y la de Hamilton. Las simetrías en la formulación de Lagrange juegan un papel muy importante, y en este formalismo aparecen de forma casi explícita al introducirlas en la lagrangiana. A su vez, la mecánica de Hamilton también las toma en cuenta, y el enfoque que toma esta formulación, sirve para analizarlas con más profundidad.
Existe por lo tanto un vínculo establecido entre ambas formulaciones mediante lo que se conoce como una transformación de Legendre, de tal modo que toda la información que se posea en el método lagrangiano se traslade intacta al formalismo hamiltoniano, e incluso sean visibles más simetrías presentes en el problema físico que se estudie.
Por otra parte, en la formulación de Hamilton es necesario definir los momentos canónicos asociados a cada coordenada del sistema, pero estos pueden no ser todos independientes entre si [14]. Cuando esto ocurre, se dice que el sistema mecánico con el que se trabaja es un *sistema singular*. Trataremos de detallar el estudio de sistemas singulares y describiremos lo más claramente posible en qué consiste el llamado *algoritmo de Dirac Bergmann* para tales sistemas.

1.1. Sistemas singulares

En un problema mecánico es necesario introducir la información del mismo a través de lo que se denominan como coordenadas generalizadas $q^i = q^i(t)$ con $i = 1, 2, ..., N$ siendo N el numero de grados de libertad del sistema. El sistema requiere además el calcular las llamadas velocidades generalizadas $\dot{q}^i$, que no son más que la derivada temporal de las coordenadas del mismo nombre. Con todo lo anterior, puede entonces construirse la Lagrangiana del sistema, que es la funcional que contiene toda la información del sistema físico. Es en términos de la lagrangiana que podemos construir la acción del sistema dada por

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)dt, \tag{1.1}$$

donde $q \equiv q^i = q^i(t)$. El principio de Hamilton pide que la variación de la acción respecto a las trayectorias que sigue el problema mecánico sea extremal, es decir

$$\delta S = 0. \tag{1.2}$$

Este requerimiento equivale a que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0, \tag{1.3}$$

las cuales son conocidas como ecuaciones de *Euler-Lagrange*.
Podemos desarrollar explícitamente las ecuaciones (1.3), lo que nos lleva a

$$\ddot{q}^j \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i} = \frac{\partial L}{\partial q^i} - \dot{q}^j \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i}, \tag{1.4}$$

donde las $\ddot{q}$ son las aceleraciones calculadas en base a las coordenadas generalizadas y a partir de aquí usaremos la convención de suma sobre índices repetidos. Definimos los momentos canónicos como

$$p_i := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}. \tag{1.5}$$

La definición de los momentos canónicos es necesaria pues el objetivo es transformar el problema descrito en la formulación lagrangiana a la formulación hamiltoniana. Una transformación de Legendre está definida como

$$H(q^i, p_i) = (p_i \dot{q}^i - L)\Big|_{\dot{q}^i = p_i}, \tag{1.6}$$

donde $H(q^i, p_i)$ es la hamiltoniana del sistema.
Es decir, en principio, si logramos transformar todas las velocidades $\dot{q}$ en términos de los momentos canónicos p, habremos pasado con éxito del formalismo lagrangiano al hamiltoniano.
De la ecuación (1.4) podemos identificar lo que definiremos como la matriz hessiana W_{ij} dada por

$$W_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}, \tag{1.7}$$

y esta definición tiene un propósito: resulta que la matriz hessiana indica si la teoría con la que se trabaja es singular o no; si el determinanate de W es distinto de cero, la teoría es regular (todas las velocidades generalizadas son invertibles en términos de las coordenadas y momentos canónicos), si es igual a cero, la teoría es singular. Más aún, el rango de esta matriz indica el número de ecuaciones independientes en la teoría.
Formalmente lo anterior puede enunciarse como sigue: las aceleraciones $\ddot{q}$ a un tiempo dado podrán determinarse de manera única sí y sólo sí la matriz W_{ij} puede invertirse, es decir si

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}\right) \neq 0. \tag{1.8}$$

En este trabajo, nos interesa estudiar teorías singulares.

1.2. Constricciones primarias

El hecho de que la Hessiana sea singular, indica que en el sistema existen constricciones. Las constricciones no dejan ver explícitamente los grados de libertad reales del problema y por lo tanto es esencial identificarlas y clasificarlas para obtener la información relevante del sistema mecánico. El primer paso es definir las constricciones que se obtienen del hecho de que la matriz W_{ij} no sea invertible, y equivale a que los momentos (1.5) no sean todos independientes, lo que implica la existencia de relaciones del tipo

$$\phi_m(q, p) = 0, \tag{1.9}$$

con $m = 1, \dots M$. A estas relaciones se les llaman *constricciones primarias*, y surgen de la definición misma de los momentos canónicos.

Por otro lado, es necesario saber cuantas de estas relaciones aparecerán; se estudia entonces el rango de la matriz W. Si su rango es igual a $N-M$, entonces hay M ecuaciones independientes en (1.7), todo esto en el espacio de configuraciones. De hecho, esto trae como consecuencia que en el espacio fase se defina una subvariedad conocida como *superficie de constricciones primarias* la cual tiene dimensión $2N-M$, y a la que se denotará por Γ_C.
Observemos entonces que dado que se ha hecho un mapeo a una variedad de dimensión menor (partimos de un espacio de dimensión $2N$ y llegamos a uno dimensión $2N-M$), la transformación que invierte p's y $\dot{q}$'s es multivaluada. Es por lo tanto necesario introducir parámetros extra que compensen esta situación. Deberán ser al menos M parámetros que identifiquen los puntos que no tuvieron correspondencia en la nueva variedad. Estos parámetros son los llamados *multiplicadores de Lagrange*, y serán denotados por λ^m.
Finalmente observemos que para que las restricciones sean independientes y definan la subvariedad que caracteriza al sistema, es necesario que se satisfaga la *condición de regularidad*, es decir, que el rango de la matriz jacobiana sea constante e igual a M.
Con todas las condiciones anteriores a la mano, definiremos entonces las características que se requieren para las funciones establecidas en la subvariedad Γ_C.

1.3. Igualdades fuertes y débiles

Para estudiar con profundidad las teorías singulares, es necesario observar que la dinámica que se obtiene mediante la hamiltonización canónica en este tipo de teorías, tiene que tomar en cuenta que los grados de libertad del sistema deben que ser identificados cuidadosamente. Las constricciones aparecen de manera implícita en la lagrangiana, y es necesario identificarlas para realizar un conteo adecuado de los grados de libertad físicos.
Entonces se necesita extender la hamiltoniana que se calcule, entendiendo que si una teoría es singular, entonces en la hamiltoniana extendida deberán existir constricciones en las ecuaciones de movimiento. Es decir, la dinámica real se encuentra no sobre la variedad completa de la que se partió, sino en la subvariedad Γ_C. Esto equivale a que las constricciones se anulen en Γ_C, pero eso no implica que tengan que valer cero en la variedad completa [14].
Para definir lo anterior de manera formal, enunciemos el siguiente teorema:

Teorema
Si una función suave G del espacio fase vale cero sobre Γ_C, entonces $G = g^m\phi_m$ para ciertas funciones g^m.[1]

Entonces una función que se anule en Γ_C necesariamente tendrá que provenir de una combinación lineal de constricciones.
Mediante el teorema anterior, podemos ahora clasificar a las funciones que aparezcan en este contexto. Usemos la siguiente definición:
Definición. Una función $F(q,p)$ definida localmente en Γ_C es débilmente cero ($F \approx 0$) [14] si:

$$F(q,p)\Big|_{\Gamma_C} = 0, \tag{1.10}$$

y fuertemente cero ($F = 0$) si

$$F(q,p)\Big|_{\Gamma_C} = 0 \qquad \text{y} \qquad \left(\frac{\partial F}{\partial q}, \frac{\partial F}{\partial p}\right)\Big|_{\Gamma_C} = 0. \tag{1.11}$$

En particular puede hablarse de igualdad débil o fuerte entre funciones del espacio fase. Dos funciones F y G que coincidan en Γ_C se dice que son *débilmente iguales* ($F \approx G$). En cambio,

[1] La demostración de este teorema puede encontrarse en el primer capítulo de Henneaux M. and Teitelboim C., *Quantization of gauge systems* (Princeton University, 1992):8-9

una ecuación en la que la igualdad permanezca en todo el espacio fase se le llama *igualdad fuerte*, condición que se expresa como

$$F \approx G \qquad \Leftrightarrow \qquad F - G = c^j(q,p)\phi_j. \tag{1.12}$$

1.4. Hamiltonización y el paréntesis de Poisson

En la ecuación (1.6) habíamos hablado de cómo se define la transformación de Legendre que permite obtener la hamiltoniana del sistema. Emplearemos una terminología acorde al formalismo y de ahora en adelante, a esta ecuación le llamaremos *hamiltoniana canónica*, definida como

$$H_C = \dot{q}^i p_i - L. \tag{1.13}$$

Si se evalúa el cambio de H_C inducido por las variaciones independientes de las posiciones y velocidades se obtiene

$$\delta H_C = \dot{q}^i \delta p_i - \delta q^i \frac{\partial L}{\partial q^i}, \tag{1.14}$$

lo que muestra que las variaciones de H_C dependen de las variaciones de q's y p's (que equivale a que H_C dependa de q's y p's). Esto implica que el determinar H_C no pueda hacerse de manera única, sino a través de variaciones que preserven las constricciones primarias $\phi^j \approx 0$. En conclusión, la hamiltoniana canónica solo está bien definida en la variedad de constricciones y puede ser extendida fuera de ella. Podemos entonces realizar el cambio

$$H_C \longrightarrow H_C + \lambda^i(q,p)\phi_i. \tag{1.15}$$

La transformación realizada a H_C nos permite definir lo que se conoce como *hamiltoniana primaria* que está definida mediante

$$H_P := H_C + \lambda^i(q,p)\phi_i. \tag{1.16}$$

Con esto, las ecuaciones de Lagrange en forma hamiltoniana quedan expresadas como

$$\begin{aligned} \dot{q}^i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} + \lambda^j \frac{\partial \phi_j}{\partial p_i}, \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q^i} - \lambda^j \frac{\partial \phi_j}{\partial q^i}, \end{aligned} \tag{1.17}$$

y se satisface la condición $\phi_j(q,p) = 0$.

Ahora, es necesario observar el modo en el que se traduce todo lo obtenido al lenguaje de los paréntesis de Poisson. Recordemos entonces que para dos funciones f y g del espacio fase, el paréntesis de Poisson entre ellas está definido como

$$\{f,g\} = \frac{\partial f}{\partial q^j}\frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial g}{\partial q^j}\frac{\partial f}{\partial p_j}. \tag{1.18}$$

En especial, la evolución temporal de una función $F = F(q,p)$ en el espacio fase puede calcularse mediante

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial q^i}\dot{q}^i + \frac{\partial F}{\partial p_i}\dot{p}_i + \frac{\partial F}{\partial t}, \tag{1.19}$$

y si F no depende explícitamente del tiempo (nuestro caso de interés), el tercer término de la ecuación (1.19) desaparece. Por otro lado, dado que las constricciones satisfacen que $\phi_j \approx 0$ y haciendo uso de las ecuaciones (1.17) $\dot{F}$ puede escribirse como

$$\begin{aligned}\dot{F} &= \frac{\partial F}{\partial q^i}\left(\frac{\partial H_C}{\partial p_i}+\lambda^j\frac{\partial \phi_j}{\partial p_i}\right)-\frac{\partial F}{\partial p_i}\left(\frac{\partial H_C}{\partial q^i}+\lambda^j\frac{\partial \phi_j}{\partial q^i}\right)\\ &=\{F,H_C\}+\lambda^j\{F,\phi_j\}\\ &=\{F,H_C+\lambda^j\phi_j\}\\ &=\{F,H_P\},\end{aligned} \tag{1.20}$$

donde se ha tomado en cuenta que $\{F,\lambda^j\phi_j\}=\lambda^j\{F,\phi_j\}$ en la superficie de constricciones. En particular si este proceso se aplica a las constricciones primarias, se obtiene

$$\dot{\phi}_j=\{\phi_j,H_P\}=\{\phi_j,H_C\}+\lambda^j\{\phi_i,\phi_j\}\approx 0, \tag{1.21}$$

y a esta relación se le conoce como la *condición de consistencia* sobre las constricciones primarias. Lo anterior no es más que el requerimiento de que las constricciones se preserven en el tiempo.
Si al definir y desarrollar la ecuación (1.21) sucede que existen relaciones entre p's y q's que son independientes de las constricciones primarias, entonces a estas nuevas relaciones se les llama *constricciones secundarias*. Estas últimas surgen como consecuencia de haber tomado las condiciones de consistencia sobre las constricciones primarias.
Definamos los objetos $h_i=\{\phi_i,H_c\}$ y $F_{ij}=\{\phi_i,\phi_j\}$ pues nos serán útiles para el análisis de los casos que pueden presentarse al tratar de resolver el sistema de ecuaciones relacionado con los multiplicadores de Lagrange:

- **Caso I**. $\det(h_i)\neq 0$ y $\det(F_{ij})\neq 0$.
  La matriz F es invertible, y por lo tanto pueden despejarse todos los multiplicadores, y estos quedan expresados como
  $$\lambda^j\approx-(F_{ij})^{-1}h_j=F^{ij}h_j, \tag{1.22}$$
  de tal modo que dada una función arbitraria del espacio fase f se tendrá que
  $$\dot{f}=\{f,H_C\}-\{f,\phi_i\}F^{ij}\{\phi_j,H_C\}, \tag{1.23}$$
  entonces el sistema esta totalmente resuelto.

- **Caso II**. $\det(h_i)\neq 0$ y $\det(F_{ij})=0$.
  Dado que $\det(F_{ij})=0$, entonces la matriz F tendrá rango K lo que implica que existan $(N-M)-K$ vectores nulos linealmente independientes $e_i^{(\mu)}$, tal que al contraerlos con F se tiene que $e_i^{(\mu)}F_{ij}=0$, con $\mu=1,2,\ldots,N-M-K$. Entonces la ecuación para los multiplicadores queda como
  $$e_i^{(\mu)}h_i+\lambda^j e_i^{(\mu)}F_{ij}\approx 0 \qquad \Rightarrow \qquad e_i^{(\mu)}h_i\approx 0. \tag{1.24}$$
  Por lo tanto se define un nuevo número de constricciones, las cuales ahora son constricciones secundarias que nuevamente restringen la dinámica a una subvariedad de dimensión menor que Γ_C, con lo que aún no se han determinado todos los multiplicadores, sino solo K de ellos. La arbitrariedad de estas funciones es relevante en teorías de norma.

- **Caso III**. $\det(h_i)=0$ y $\det(F_{ij})\neq 0$.
  Se obtiene la solución trivial $\lambda\approx 0$, lo que nos conduce a $0\approx 0$. Para evadir esto se impone que $\det(F_{ij})\approx 0$.

- **Caso IV**. $\det(h_i)=0$ y $\det(F_{ij})=0$.
  Un sistema de ecuaciones homogéneo donde sólo pueden determinarse débilmente $N-M-K$ multiplicadores. No se estudiará esta situación en nuestro trabajo.

Consideremos entonces el caso II, en donde aparecen constricciones secundarias y el ciclo del algoritmo se repite. Para establecer que hemos entrado en una etapa análoga a la que se inició, se puede construir un hamiltoniano secundario, el cual ahora incluye a las constricciones primarias y secundarias, con lo que

$$H_{(2)} = H_c + \lambda^j \Phi_j, \tag{1.25}$$

donde a $H_{(2)}$ se le puede llamar hamiltoniana secundaria y en este caso las Φ_j engloban a constricciones primarias y secundarias obtenidas hasta este punto.
Como ya habíamos visto, el ciclo prosigue si a las constricciones secundarias se les imponen nuevas condiciones de consistencia, con lo que se obtendrán constricciones terciarias (nuevamente se genera otra subvariedad de dimensión menor a las previas). El proceso concluye cuando ya no se obtienen más restricciones.
A las constricciones secundarias, terciarias y subsecuentes se les llama colectivamente constricciones secundarias.

1.5. Condiciones sobre los multiplicadores y la hamiltoniana total

Dado que en principio se han obtenido todas las constricciones del sistema mecánico, se tiene que

$$\dot{\phi}_\alpha = \{\phi_\alpha, H_T\} = \{\phi_\alpha, H_C\} + \lambda^\beta \{\phi_\alpha, \phi_\beta\}, \tag{1.26}$$

donde se usan ahora índices griegos para enfatizar que se han obtenido todas las restricciones del sistema y se ha definido la *hamiltoniana total* del sistema como $H_T = H_C + \lambda^j \phi_j$. La ecuación (1.26) es un sistema lineal de ecuaciones cuya solución general para los multiplicadores tiene la forma

$$\lambda^\mu = U^\mu + V^\mu, \tag{1.27}$$

con U^μ una solución particular del sistema y V^μ la solución más general del sistema, la cual está dada por

$$V^\nu \{\phi_\mu, \phi_\nu\} \approx 0. \tag{1.28}$$

Puesto que V^μ es la solución general del sistema, puede escribirse como una combinación lineal de soluciones independientes v_i, es decir, $V^\mu = v^i V_i^\mu$, donde $i = 1, 2, \ldots, I$ con I el número de soluciones independientes. Entonces los multiplicadores pueden expresarse como

$$\lambda^\mu = U^\mu + v^i V_i^\mu. \tag{1.29}$$

Las funciones v^i son totalmente arbitrarias lo que permite realizar la siguiente separación en los multiplicadores: aquellos fijos, determinados por las condiciones de consistencia, y los que permanecen indeterminados. Haciendo uso de esta separación, la hamiltoniana total puede escribirse como

$$\begin{aligned} H_T &= H_C + \lambda^\mu \phi_\mu = H_C + (U^\mu + v^i V_i^\mu)\phi_\mu \\ &= (H_C + U^\mu \phi_\mu) + v^i V_i^\mu \phi_\mu = H' + v^i \phi_i, \end{aligned} \tag{1.30}$$

donde hemos definido $H' := H_C + U^\mu \phi_\mu$ y $v^i V_i^\mu \phi_\mu = v^i \phi_i$. Al hacer esta separación se puede analizar ahora la evolución temporal de cualquier función del espacio fase

$$\begin{aligned} \dot{F} &= \{F, H_T\} = \{F, H'\} + \{F, v^i \phi_i\} \\ &= \{F, H'\} + v^i \{F, \phi_i\}. \end{aligned} \tag{1.31}$$

Entonces estas ecuaciones están determinadas hasta I funciones arbitrarias (los v^i's), lo que implica que la evolución de F no sea única, sino que existen funciones arbitrarias que hay que fijar antes de especificar claramente esa evolución.

1.6. Constricciones de primera y segunda clase

Es necesario ahora clasificar las constricciones obtenidas mediante un concepto más útil: se define una función F como función de primera clase si su paréntesis de Poisson es débilmente cero con todas las restricciones de la teoría, entonces

$$\{F, \phi_\mu\} \approx 0. \tag{1.32}$$

Si no se cumple esta condición entonces F es de segunda clase.
Si F es de primera clase se satisface la igualdad fuerte

$$\{F, \phi_\mu\} = f_\mu^\nu \phi_\nu. \tag{1.33}$$

Resulta que las funciones de primera clase son invariantes ante el paréntesis de Poisson, esto se enuncia en el siguiente teorema:

Teorema

El paréntesis de Poisson de dos funciones de primera clase es una función de primera clase.[2]

Ahora, introducimos una notación que será útil en adelante. A las constricciones que cumplan con la ecuación (1.32) se les denotará por γ y serán de primera clase. En cambio a aquellas cuyo paréntesis de Poisson sea distinto de cero con al menos una de las restricciones serán de segunda clase y se denotarán por χ.
Es importante observar que las constricciones de primera clase pueden ser combinaciones de primarias o secundarias. Si J es el número total de constricciones obtenidas, entonces el proceso para clasificarlas consiste en obtener los vectores nulos de la matriz cuyas entradas son los paréntesis de Poisson entre las restricciones, contraerlos con las J restricciones y hallar las constricciones de primera clase adecuadas.
Partiendo de que la matriz $W_{J\times J}$ está dada como

$$W_{\alpha\beta} = \{\phi_\alpha, \phi_\beta\}, \tag{1.34}$$

el proceso se desarrolla como sigue: si el determinante de $W_{\alpha\beta} = 0$, entonces el rango de W es R, con lo que la nulidad de W es $J - R$; lo anterior implica que hay $J - R$ vectores nulos ω_r, con $r = 1, \ldots, J - R$, tal que

$$\omega_r^\alpha \{\phi_\alpha, \phi_\beta\} \approx 0, \tag{1.35}$$

y al hacer uso de la definición de vectores nulos se tiene que

$$\{\omega_r^\alpha \phi_\alpha, \phi_\beta\} \approx 0 \qquad \forall \phi_\beta \in \Phi, \tag{1.36}$$

donde $\Phi = \{\phi_\beta \,|\phi_\beta$ restricción primaria, secundaria, terciaria, etc.$\}$. Entonces la forma explícita de las restricciones de primera clase está dada como

$$\gamma_r := \omega_r^\alpha \phi_\alpha. \tag{1.37}$$

Con lo cual podemos escribir la matriz W en términos de las constricciones calculadas. Esto es

$$W \doteq \begin{pmatrix} \{\phi_0,\phi_0\} & \{\phi_0,\phi_1\} & \cdots & \{\phi_0,\phi_J\} \\ \{\phi_1,\phi_0\} & \{\phi_1,\phi_1\} & \cdots & \{\phi_1,\phi_J\} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \{\phi_J,\phi_0\} & \{\phi_J,\phi_1\} & \cdots & \{\phi_J,\phi_J\} \end{pmatrix}, \tag{1.38}$$

y en términos de las constricciones de primera y segunda clase se tiene que esta matriz equivale a

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C_{\alpha\beta} \end{pmatrix}, \tag{1.39}$$

donde $C_{\alpha\beta}$ es una matriz $R \times R$ antisimétrica e invertible sobre la superficie de constricciones. Es importante observar que el número de restricciones de segunda clase, no es más que el rango de W.

[2]Este teorema también se encuentra en Henneaux M. and Teitelboim C., *Quantization of gauge systems*: 12-13

1.7. Transformaciones de norma

Se había comentado que el clasificar a las constricciones en aquellas de primera y segunda clase, era debido a que esta definición poseía más utilidad que la que originalmente se había hecho. En la ecuación (1.29) se observó que los multiplicadores de lagrange están determinados hasta constantes arbitrarias v^i. Esto implica que esas mismas constantes aparezcan en la hamiltoniana total, lo que equivale a decir que no todas las p's y q's que aparezcan serán observables físicas. Es decir, a pesar de que el estado físico estará bien determinado si p's y q's lo están, en sentido inverso la conclusión no es cierta, *i.e.*, hay más de un conjunto de variables canónicas que generan el mismo estado físico. Observemos entonces lo que sucede con la evolución temporal de alguna función $f(q,p)$ en un cierto intervalo δt. Sea

$$\begin{aligned} f(\delta t) &= f(0) + \dot{f}\delta t = f(0) + \{f, H_T\}\delta t \\ &= f(0) + [\{f, H'\} + v^i\{f, \gamma_i\}]\delta t. \end{aligned} \tag{1.40}$$

Entonces, es posible que la ecuación (1.40) pueda escribirse en términos de otros parámetros $v^{i\prime}$, es decir

$$f'(\delta t) = f(0) + [\{f, H'\} + v^{i\prime}\{f, \gamma_i\}]\delta t, \tag{1.41}$$

y si se calcula la diferencia entre ellas se tendrá que

$$\delta f(\delta t) = \{f, \gamma_i\}\delta v^i, \tag{1.42}$$

es decir, se ha generado una transformación que no altera el estado físico del sistema, en otras palabras, una transformación de norma. Se dice entonces que las constricciones de primera clase generan transformaciones de norma.
En base a lo anterior, se tienen entonces los siguientes resultados generales:

1. El paréntesis de Poisson $\{\phi_i, \phi_j\}$ de cualesquiera dos constricciones primarias de primera clase genera una transformación de norma.

2. El paréntesis de Poisson $\{\phi_i, H'\}$ de cualquier constricción primaria de primera clase con la hamiltoniana de primera clase H', genera una transformación de norma.

Aunque hay muchas constricciones secundarias que al parecer cumplen lo mismo, no es posible inferir de estas consideraciones que toda constricción de primera clase, pero secundaria, es una generadora de norma. Sin embargo, se postula en general que *toda* constricción de primera clase es generadora de transformaciones de norma; a este postulado se le conoce como *la conjetura de Dirac*.

1.8. Grados de libertad

Una de las metas del algoritmo ha sido identificar los grados de libertad reales del sistema físico. Estos no son más que el número de variables independientes que definen y describen al sistema. La regla general para realizar el cálculo de ellos, está dada por

$$GL = \frac{1}{2}[V_c - R_s - 2R_p], \tag{1.43}$$

donde GL es el número de grados de libertad físicos, V_c es el número de variables canónicas, R_s el número de constricciones de segunda clase originales y R_p el número de restricciones de primera clase. El factor $1/2$ se introduce para evitar el doble conteo de variables, y el hecho de que las R_p se dupliquen, se debe a que cumplen dos funciones: son constricciones y generadoras de transformaciones de norma.

1.9. Hamiltoniana extendida y el paréntesis de Dirac

Se introduce la hamiltoniana extendida, la cual se construye mediante todas las constricciones encontradas y clasificadas en aquellas de primera y segunda clase. La hamiltonianan extendida está definida como

$$H_E = H_C + U^\alpha \chi_\alpha + v^\beta \gamma_\beta, \tag{1.44}$$

con $\alpha = 1, \ldots, R$ y $\beta = 1, \ldots, J - R$ y donde U^α es la solución particular de las ecuaciones inhomogéneas (1.26) y v^α las soluciones independientes del sistema homogéneo (1.28).
En base a la hamiltoniana extendida es que se desarrollará toda la evolución del sistema. Es decir, en este contexto las funciones del espacio fase evolucionan mediante

$$\dot{F} = \{F, H_E\} \approx \{F, H_C\} + U^\alpha \{F, \chi_\alpha\} + v^\beta \{F, \gamma_\beta\}, \tag{1.45}$$

de tal modo que al desarrollar este proceso, las condiciones de consistencia para las χ's y γ's no arrojen nuevas constricciones. Es decir, las condiciones de consistencia lucen ahora como

$$\dot{\chi}_\alpha \approx \{\chi_\alpha, H_C\} + U^\beta \{\chi_\alpha, \chi_\beta\} \approx 0, \tag{1.46}$$

y

$$\dot{\gamma}_\mu \approx \{\gamma_\mu, H_C\} \approx 0. \tag{1.47}$$

Observamos entonces que la ecuación (1.46) se puede escribir como

$$U^\beta \approx -C^{\beta\alpha} \{\chi_\alpha, H_C\}, \tag{1.48}$$

donde $C^{\beta\alpha} = (C_{\alpha\beta})^{-1}$, y recordando que $C_{\alpha\beta}$ es la matriz de constricciones de segunda clase.
Todo esto nos permite definir lo que se conoce como el *paréntesis de Dirac*. Si F y G son dos funciones en el espacio fase, entonces el paréntesis de Dirac está dado como

$$\{F, G\}_D := \{F, G\} + \{F, \chi^\alpha\}(C_{\alpha\beta})^{-1}\{\chi^\beta, G\}, \tag{1.49}$$

el cual tiene las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned}
\{F, G\}_D &= -\{G, F\}_D, && (1.50)\\
\{F, aG + bK\}_D &= a\{F, G\}_D + b\{F, K\}_D, && (1.51)\\
\{F, GK\}_D &= F\{G, K\}_D + G\{F, K\}_D, && (1.52)\\
\{F, \{G, K\}_D\}_D &= \{G, \{K, F\}_D\}_D + \{K, \{F, G\}_D\}_D, && (1.53)
\end{aligned}$$

que son las mismas que posee el paréntesis de Poisson. Además de las propiedades adicionales

$$\begin{aligned}
\{F, G\}_D &\approx \{F, G\}, && (1.54)\\
\{F, \{G, K\}_D\}_D &\approx \{F, \{G, K\}\}, && (1.55)
\end{aligned}$$

donde en la primera ecuación G es de primera clase y F es arbitraria, mientras que en la segunda F y G son de primera clase y K es arbitraria.

1.10. Observables

Es necesario que definamos el concepto de observable. En este contexto una observable clásica es una función definida en la subvariedad de constricciones, que es invariante de norma. En otras palabras, es una función $\mathcal{O}$ del espacio fase cuyo paréntesis de Dirac es débilmente cero con las constricciones de primera clase, es decir

$$\{\mathcal{O}, \gamma_\alpha\}_D \approx 0. \tag{1.56}$$

Esta definición es a nivel teórico, es decir, en nuestro trabajo no se intenta darle un significado experimental a ellas. Es importante señalar que las observables clásicas, podrían no serlo a nivel cuántico.

Capítulo 2

Conexiones, formas diferenciales y curvatura

Aunque el objetivo de este trabajo no es hacer un análisis de la teoría de variedades diferenciales, es necesario tratar con algunos conceptos que serán útiles para el trabajo que se desarrollará. Recordemos que Relatividad General basa su lenguaje en términos de los conceptos definidos mediante la geometría diferencial. Por otro lado, dado que se va a estudiar el comportamiento de RG mediante un formalismo que se asemeja mucho a la formulación establecida en Yang-Mills, lo inicial sería observar como está formulada la teoría en términos de métricas y conexiones, para posteriormente proyectarla a un lenguaje análogo al de esta teoría de campos.
El beneficio de introducir este tipo de formulación en RG consiste en que, cuando se trabaja directamente con la teoría en términos de la métrica, ésta no puede tratarse de manera explícita como una teoría de conexiones. Si se desea entender a la teoría de esta manera, es entonces necesario transformarla a un nuevo lenguaje.
El objetivo es entonces, entender a RG como una teoría de campos pero en términos de conexiones, partiendo de sus simetrías fundamentales. Para lograr esta meta se acude entonces a las llamadas teorías BF (background field ó "con campo de fondo") que han probado ser una herramienta muy útil en el análisis de la dinámica de diversos sistemas físicos. Puede entonces pensarse que, de ser posible que RG pueda trasladarse a un lenguaje como éste, las dificultades que aparecen al lidiar con la métrica puedan evadirse, usando ahora como variables dinámicas a una tétrada y a la conexión en la variedad de fondo.
Para comenzar con este análisis estudiaremos cómo aplicar este formalismo a Relatividad General y el modo en el que se pueden definir los nuevos objetos que se utilizarán para nuestros fines.

2.1. Conexiones y Derivada Covariante

Asumimos que se tiene establecida una variedad de fondo M así como los objetos que residen en ella; entonces procedamos a definir los conceptos que permitirán construir algunos de los objetos matemáticos en los que se basan las teorías que aquí se estudien.
Primero, en la variedad pueden definirse campos vectoriales y funciones. Nos interesa definir los siguientes conjuntos:

- E que es un haz vectorial definido sobre la variedad M,
- $\Gamma(E)$ que es el conjunto de todas las secciones de E,
- $\mathcal{V}(M)$ es el conjunto de los campos vectoriales definidos sobre M,

- $C^\infty(M)$ el conjunto de las funciones infinitamente diferenciables sobre M
- U un subconjunto abierto de M,

en seguida los emplearemos para definir nuestros objetos.
Comencemos con el concepto de *conexión*. De modo heurístico podemos decir que una conexión es una regla para calcular las derivadas direccionales de campos vectoriales sobre M. Tenemos entonces que:
Definición. Una conexión D en M es un mapeo que asigna a cada campo vectorial v sobre M, una función $D : \Gamma(E) \to \Gamma(E)$ y satisface las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} D_v(\alpha s + t) &= \alpha D_v s + D_v t, \\ D_{(v+w)} s &= D_v s + D_w s \\ D_{(fv)} s &= f D_v s \\ D_v(fY) &= v[f]s + f D_v s \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde $v, w \in \mathcal{V}(M)$, $s, t \in \Gamma(E)$, $f \in C^\infty(M)$ y α un escalar. El campo vectorial definido por $D_v s$ recibe el nombre de *derivada covariante* de s respecto de v.
Si e_i es una base de las secciones de E sobre U, entonces en coordenadas se tiene que

$$D_\mu := D_{\partial_\mu}, \tag{2.2}$$

de tal modo que esta derivada puede ser expresada como una combinación lineal de funciones $A^i_{\mu j}$ en U, y toma la forma

$$D_\mu e_j := A^i_{\mu j} e_i, \tag{2.3}$$

donde a estas funciones se las llama componentes del potencial vectorial o componentes de la *conexión* A.

2.2. Curvatura

La curvatura de una conexión D mide la diferencia en el conmutador de derivadas covariantes. Dados dos campos vectoriales v y w en M definimos la *curvatura* $F(v, w)$ como el operador sobre secciones de E dado por

$$F(v, w)s = D_v D_w s - D_w D_v s - D_{[v,w]} s, \tag{2.4}$$

o definido como

$$F(v, w) = [D_v, D_w] - D_{[v,w]}, \tag{2.5}$$

donde este objeto tiene las siguientes propiedades

$$\begin{aligned} F(u, v) &= -F(v, u), \\ F(fv, w) &= fF(v, w), \\ F(v, fw) &= fF(v, w). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Si se desarrolla la curvatura en términos de coordenadas locales x^μ, y haciendo uso de las componentes para la conexión A, ésta puede escribirse del siguiente modo

$$F^j_{\mu\nu i} = \partial_\mu A^j_{\nu i} - \partial_\nu A^j_{\mu i} + A^j_{\mu k} A^k_{\nu i} - A^j_{\nu k} A^k_{\mu i}, \tag{2.7}$$

relación que puede simplificarse si se suprimen los índices internos i, j, k y la expresión luce como

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]. \tag{2.8}$$

2.3. Formas diferenciales y operaciones exteriores

El cálculo de conexiones y curvatura puede simplificarse usando formas diferenciales. Para esto tendremos que definirlas. Se define una 1-forma sobre una variedad M como un mapeo de $\mathcal{V}(M)$ a $C^\infty(M)$, en otras palabras una 1-forma ω se aplica a campos vectoriales v, para dar como resultado una función. Se debe satisfacer

$$\begin{aligned} \omega(v+w) &= \omega(v+w)+\omega(w) \\ \omega(fv) &= f\omega(v). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Si se analiza en términos de coordenadas, cualquier 1-forma diferencial ω sobre U puede escribirse como

$$\omega = \omega_\mu dx^\mu. \tag{2.10}$$

El concepto de 1-forma puede generalizarse, haciendo uso del *producto wedge* (o producto exterior) entre 1-formas. Por ejemplo dado un sistema de coordenadas en U, puede definirse

$$dx^\sigma \wedge dx^\rho := dx^\sigma \otimes dx^\rho - dx^\rho \otimes dx^\sigma, \tag{2.11}$$

la cual es ahora una 2-forma , y donde se observa que esta operación es antisimétrica, pues satisface

$$\omega \wedge \mu = -\mu \wedge \omega. \tag{2.12}$$

Si se sigue el proceso de multiplicar 1-formas mediante $\wedge$, se obtienen 2-formas, 3-formas hasta llegar a las p-formas. Entonces, se denota al espacio de las p-formas en M como $\Omega^p(M)$, de tal modo que si $\omega \in \Omega^p(M)$, ω puede expandirse en coordenadas como

$$\omega = \frac{1}{p!}\omega_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_p} dx^{\nu_1} dx^{\nu_2} \cdots dx^{\nu_p}, \tag{2.13}$$

donde $\omega_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_p}$ es totalmente antisimétrico en sus índices.
Se generaliza ahora el producto wedge que se usó en la ecuación (2.11). Sea $\omega \in \Omega^p(M)$ y $\mu \in \Omega^q(M)$ y $\nu \in \Omega^r(M)$, entonces el producto exterior tendrá las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} \omega \wedge \omega &= 0, \\ \omega \wedge \mu &= (-1)^{pq}\mu \wedge \omega, \\ (\omega \wedge \mu) \wedge \nu &= \omega \wedge (\mu \wedge \nu). \end{aligned} \tag{2.14}$$

Finalmente podemos crear otra operación aplicable a formas diferenciales. La *derivada exterior* o *diferencial* es el mapeo $d : \Omega^p(M) \longrightarrow \Omega^{p+1}(M)$ tal que si $\omega \in \Omega^p(M)$ se define como

$$d\omega := \frac{1}{p!}\partial_\rho(\omega_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_p}) dx^\rho \wedge dx^{\nu_1} dx^{\nu_2} \cdots dx^{\nu_p}. \tag{2.15}$$

La derivada exterior tiene además las siguientes propiedades: si $\omega \in \Omega^p(M)$ y $\mu \in \Omega^q(M)$ entonces

$$d(d\omega) = d^2\omega = 0, \tag{2.16}$$
$$d(\omega \wedge \mu) = d\omega \wedge \mu + (-1)^p \omega \wedge d\mu. \tag{2.17}$$

Con todo lo anteriormente definido, estamos en posibilidades de traducir todos los conceptos de conexiones y curvatura, a este lenguaje.

2.4. Derivada exterior covariante y curvatura

Aunque ya se han definido las bases para construir la curvatura y sus propiedades, todo esto es más simple y directo si se reescribe en términos de formas diferenciales. Puede definirse la 2-forma de curvatura como

$$F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^{\mu} \wedge dx^{\nu}, \tag{2.18}$$

Si se toma en cuenta ahora que dada una p-forma s E-valuada es un mapeo $s : \mathcal{V} \to \Gamma(E)$, entonces definimos la derivada exterior covariante d_D como

$$d_D s(v) := D_v s, \tag{2.19}$$

y en coordenadas locales $x^{\mu} \in U$

$$d_D s = D_{\nu} s \otimes dx^{\nu}. \tag{2.20}$$

Lo anterior no es más que una generalización de d, de tal modo que

$$d_D(s_I \otimes dx^I) = D_{\nu} s_I \otimes dx^{\mu} \wedge dx^I, \tag{2.21}$$

donde ahora a los índices internos los hemos caracterizado con letras mayúsculas. Esto puede traducirse a una notación sin coordenadas, en términos de la diferencial exterior que ya conocíamos y de la conexión A. Dada una 1-forma de conexión A y una forma diferencial arbitraria ω entonces

$$d_D \omega := d\omega + A \wedge \omega. \tag{2.22}$$

Por otro lado, una propiedad interesante de la derivada exterior covariante, es que a diferencia de la derivación exterior que ya se había definido, donde $d^2 = 0$, d_D *no es cero* cuando se aplica dos veces, sino lo que mide es la desviación entre formas, en otras palabras, la curvatura. Veámos que si η es una forma E-valuada, entonces

$$\begin{aligned} d_D^2 \eta &= d_D(D_{\nu} s_I \otimes dx^{\nu} \wedge dx^I) = D_{\mu} D_{\nu} s_I \otimes dx^{\mu} \wedge dx^{\nu} \wedge dx^I \\ &= \frac{1}{2}[D_{\mu}, D_{\nu}] s_I \otimes dx^{\mu} \wedge dx^{\nu} \wedge dx^I \\ &= \frac{1}{2} F_{\mu\nu} s_I \otimes dx^{\mu} \wedge dx^{\nu} \wedge dx^I \\ &= F \wedge \eta, \end{aligned} \tag{2.23}$$

donde se han usado las propiedades antisimétricas del producto wedge y la definición (2.18) para la curvatura.

Nos resultará útil definir un conmutador generalizado a formas diferenciales y generalizar también la regla (2.17). Si ω y μ son una p-forma y q-forma E-valuadas respectivamente, definimos el conmutador *gradado* entre formas diferenciales como

$$[\omega, \mu] := \omega \wedge \mu - (-1)^{pq} \mu \wedge \omega, \tag{2.24}$$

y la derivada covariante exterior actúa como

$$d_D(\omega \wedge \mu) = d_D \omega \wedge \mu + (-1)^p \omega \wedge d_D \mu. \tag{2.25}$$

Si desarrollamos la ecuación (2.22) para ω

$$\begin{aligned} d_D^2 \omega &= d_D(d\omega + A \wedge \omega) \\ &= d^2 \omega + A \wedge d\omega + d(A \wedge \omega) + A \wedge A \wedge \omega \\ &= A \wedge d\omega + dA \wedge \omega - A \wedge d\omega + A \wedge A \wedge \omega \\ &= (dA + A \wedge A) \wedge \omega, \end{aligned} \tag{2.26}$$

y comparamos con la ecuación (2.23) se observa que

$$F = dA + A \wedge A, \tag{2.27}$$

con lo que hemos obtenido la 2-forma diferencial que representa a la curvatura sin necesidad de usar coordenadas.

2.5. Identidades de Bianchi

Si u, v y w son campos vectoriales sobre M la identidad de Bianchi nos dice que

$$[D_u, [D_v, D_w]] + [D_v, [D_w, D_u]] + [D_w, [D_u, D_v]] = 0, \tag{2.28}$$

y sabiendo que en coordenadas $[D_\mu, D_\nu] = F_{\mu\nu}$ obtenemos otra forma para la identidad de Bianchi

$$[D_\mu, F_{\nu\lambda}] + [D_\nu, F_{\lambda\mu}] + [D_\lambda, F_{\mu\nu}] = 0. \tag{2.29}$$

Es decir, hemos expresado esta identidad en términos de la curvatura. Más aún, se puede escribir de manera más compacta haciendo uso de la derivada exterior covariante. Observemos que si escribimos explícitamente la derivada exterior covariante F tendremos

$$d_D F = \frac{1}{3!}(D_\mu F_{\nu\lambda} + D_\nu F_{\lambda\mu} + D_\lambda F_{\mu\nu}) \otimes dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\lambda, \tag{2.30}$$

que al igualarla a cero y usando la ecuación (2.29) puede transformarse en la ecuación (2.28). Por lo tanto en términos de formas diferenciales la identidad de Bianchi simplemente equivale a

$$d_D F = 0. \tag{2.31}$$

En el siguiente capítulo estudiaremos el modo en el cual todo lo anterior puede aplicarse a Relatividad General para transformar las ecuaciones de esta teoría (escritas en el lenguaje tensorial usual), en términos de conexiones y curvatura pero construido todo esto sin el uso de la métrica. El objetivo, como ya hemos mencionado, es permitir que la teoría pueda ser vista directamente como una teoría de conexiones, para posteriormente hacer un análisis completo de las simetrías que ésta posee.

Capítulo 3

Formulación de Palatini de la Relatividad General

Los conceptos de curvatura, conexión y demás elementos que se han definido, son tópicos que se analizan con el uso de geometría diferencial. Pero debemos observar algo muy importante: en ningún momento hasta este punto ha sido necesario introducir el concepto de métrica.
En la teoría de Einstein la situación es muy distinta, pues la métrica es el ingrediente fundamental para construir los objetos con los que se trabaja: conexión y curvatura dependen directamente de ella. La diferencia fundamental es que Relatividad General no está construida en una variedad abstracta que solo sirve como escenario para la dinámica de la teoría, sino parte de que la variedad M representa al *espacio-tiempo mismo*, es decir una entidad física en sus propios términos, y las ecuaciones dinámicas se construyen en el haz tangente de esta variedad.
Por lo tanto, los entes que se operan en esta teoría no son más que tensores definidos sobre M, cuyas propiedades representan las características físicas que la teoría introduce en sus fundamentos.
La necesidad de entender a Relatividad General como una teoría usual de conexiones, obliga en esta formulación, a darle más énfasis al concepto de *conexión*, en vez de al de métrica. En este contexto, la métrica funge un papel secundario, mientras que la conexión y la tétrada, codifican la información física relevante en la teoría.
Para comenzar con este análisis, asumiremos que son conocidas las propiedades del lenguaje tensorial en el que RG se construye, por lo tanto no profundizaremos mucho en estos detalles, sino que nos enfocaremos en tratar de entender como traducir la formulación original de Relatividad General, al lenguaje sin métrica que hemos desarrollado en las secciones anteriores.

3.1. Relatividad General: ecuaciones de Einstein

En relatividad General el espacio-tiempo M es una variedad Lorentziana con una conexión de Levi-Civita ∇ donde se define el tensor de curvatura de Riemann como la curvatura asociada a tal conexión. En este caso la conexión se expresa mediante los símbolos de Christoffel $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ (análogos al potencial A en secciones anteriores) dados por

$$\nabla_\alpha \partial_\beta := \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}\partial_\gamma, \tag{3.1}$$

y que en componentes se expresa a través del *tensor métrico* (ó métrica) g como

$$\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}g^{\gamma\delta}(\partial_\alpha g_{\beta\delta} + \partial_\beta g_{\delta\alpha} - \partial_\delta g_{\alpha\beta}). \tag{3.2}$$

Por otra parte la *curvatura de Riemann* $R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}$ (análoga a F) definida sobre una base local de campos vectoriales está dada como

$$R(e_\beta, e_\gamma)e_\delta = R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}e_\alpha. \tag{3.3}$$

En componentes, la curvatura de Riemann puede calcularse como

$$R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} = \partial_\alpha\Gamma^{\alpha}_{\gamma\delta} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\delta} + \Gamma^{\sigma}_{\gamma\delta}\Gamma^{\alpha}_{\beta\sigma} - \Gamma^{\sigma}_{\beta\delta}\Gamma^{\alpha}_{\gamma\sigma}. \tag{3.4}$$

Las contracciones de la curvatura de Riemann dan lugar a otros objetos que físicamente son útiles, tal como el tensor de Ricci

$$R^{\gamma}{}_{\alpha\gamma\beta} := R_{\alpha\beta} \tag{3.5}$$

y la curvatura escalar

$$R^{\alpha}{}_{\alpha} := g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} = R. \tag{3.6}$$

Con todo esto, puede construirse otro tensor particularmente importante en RG: el *tensor de Einstein*, definido como

$$G_{\alpha\beta} := R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R, \tag{3.7}$$

mediante el cual se pueden escribir las ecuaciones dinámicas para la teoría. Es decir, las ecuaciones de movimiento para relatividad general se escriben como

$$G_{\mu\nu} = 8\pi\kappa T_{\mu\nu}, \tag{3.8}$$

donde $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía y momento.

3.2. La acción de Einstein-Hilbert

Las ecuaciones dinámicas de RG pueden obtenerse mediante principios variacionales, partiendo de una acción que contiene la información de la teoría. Si M es una variedad orientada con una métrica g semi riemanniana en ella, la *acción de Einstein-Hilbert* está definida como

$$S(g) = \int_M R \text{ vol} = \int_M R|\text{det}g|d^4x \tag{3.9}$$

con "vol" la forma diferencial del elemento de volúmen asociado con g.
Si se desarrolla la variación de esta acción respecto a la métrica g, y se hace uso de las relaciones

$$\begin{gathered} \delta\text{vol} = -\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}(\delta g^{\alpha\beta})\text{vol} \\ \text{y} \\ \delta R = R_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta} + \nabla^\alpha\omega_\alpha, \end{gathered} \tag{3.10}$$

con ω la 1-forma dada por $\omega_\alpha = g^{\mu\nu}\nabla_\alpha g_{\mu\nu} - \nabla^\beta\delta g_{\alpha\beta}$, se puede ver que

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_M (\delta R)\text{vol} + R\delta(\text{vol}) \\ & \int_M \left(R_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta} + \nabla^\alpha\omega_\alpha - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta}\right), \end{aligned} \tag{3.11}$$

y si se toma en cuenta que el término $\nabla^\alpha\omega_\alpha$ es una divergencia total, que vale cero debido a que se trabaja en un contexto en el cual M no posee frontera, se tiene que

$$\int_M \left(R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta}\right) = 0, \tag{3.12}$$

es decir, lo anterior es válido si las ecuaciones de Einstein

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta} = 0 \tag{3.13}$$

se cumplen.
Esto no es más que la obtención "clásica" de las ecuaciones de Einstein en el vacío, a partir de la acción de Einstein-Hilbert; nos interesará observar con más detalle, cómo estas ecuaciones se pueden expresar en un lenguaje carente de métrica.

3.3. La acción de Palatini

Nos será útil entonces definir la acción de Palatini que no es más que la acción de Einstein-Hilbert reescrita en términos de la conexión y de lo que llamaremos un campo de fondo (en vez de en términos de la métrica g). Supongamos que se tiene una variedad n-dimensional M, orientada y difeomórfica a $\mathbb{R}^n$. Físicamente esta variedad no es más que un subespacio del espacio-tiempo.
La idea en el formalismo de Palatini es trabajar en el haz trivial $M \times \mathbb{R}$ que en este caso se emplea como sustituto del haz tangente de la variedad. Es decir

$$e : TM \longrightarrow M \times \mathbb{R}, \tag{3.14}$$

entonces un campo de fondo no es más que el campo vectorial que se usará para proyectar la teoría. A este campo de fondo se le denotará por e, y si M es tridimensional a e se le llama una *triada*, si en cambio es de dimensión 4, e es una *tétrada*.
Una sección de s de $M \times \mathbb{R}^n$ puede escribirse en términos de los generadores del grupo ξ como

$$s = s^I \xi_I, \tag{3.15}$$

observando que en este caso a $\mathbb{R}^n$ se le llama espacio interno debido a lo cual a los índices mayúsculos I se les llama índices internos.
Al aplicar el mapeo a secciones ξ_I se obtiene la base de campos vectoriales $e(\xi_I)$ sobre M, que en términos de coordenadas se expresa como

$$e(\xi_I) = e^\mu_I \partial_\mu := e_I, \tag{3.16}$$

donde e^μ_I son funciones en M.
Puede entonces definirse un producto interno entre secciones de M dado por

$$\eta(s, s') = \eta_{IJ} s^I s'^J, \tag{3.17}$$

donde η_{IJ} esta dado como

$$\eta_{IJ} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \tag{3.18}$$

y se le llama la métrica interna. Subimos o bajamos índices mediante η_{IJ} o su inversa η^{IJ}.
Si ahora tuviéramos una métrica de Lorentz g en M, podemos tener productos entre campos vectoriales en M mediante

$$g(v, w) = g_{\mu\nu} v^\mu w^\nu, \tag{3.19}$$

y decimos que el campo vectorial e es ortonormal si los campos e_I lo son, es decir

$$g(e_I, e_J) = \eta_{IJ}, \tag{3.20}$$

con lo que puede verse que

$$\eta_{IJ} = g(e_I, e_J) = g_{\mu\nu} e^{\mu}_I e^{\nu}_J. \tag{3.21}$$

Hace falta ahora establecer una conexión D en el haz trivial $M \times \mathbb{R}^n$, todo esto para algún potencial vectorial A como:

$$D_v s = (v(s^J) + A_{\mu}{}^{J}{}_{I} v^{\mu} s^I)\xi_J, \tag{3.22}$$

con lo que entonces se construye la curvatura relacionada a la conexión D como

$$F^{IJ}_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A^{IJ}_\beta - \partial_\beta A^{IJ}_\alpha + A_\alpha{}^{IK} A_{\beta K}{}^{J} - A_\alpha{}^{JK} A_{\beta K}{}^{I}, \tag{3.23}$$

donde $A^{IJ}_\mu = -A^{JI}_\mu$.
Con todo lo anteriormente desarrollado, es hora de establecer las relaciones entre las ecuaciones construidas a partir de la métrica y éstas que se han calculado. Lo primero es observar que la conexión $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ transforma como

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = A_\beta{}^{J}{}_{I} e^I_\gamma e^\gamma_J, \tag{3.24}$$

lo que implica que la curvatura pueda escribirse como

$$R^\alpha{}_{\beta\gamma}{}^{\delta} = F^{IJ}_{\beta\gamma} e^\alpha_I e^\delta_J, \tag{3.25}$$

y de la relación (3.21) se tiene que

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{IJ} e^I_\alpha e^J_\beta, \tag{3.26}$$

lo que nos permitirá "traducir" la acción de Einstein-Hilbert a este lenguaje: ésta es la acción de Palatini.
Haciendo uso del campo e, la acción de Palatini es

$$S[e, A] = \int_M e^\mu_I e^\nu_J F^{IJ}_{\mu\nu} \mathrm{vol} = \int_M e \wedge e \wedge F, \tag{3.27}$$

notando que el elemento de volúmen ahora depende de la tétrada e.
Si además tomamos en cuenta que la primera de las ecuaciones en (3.10) puede escribirse en términos de e como

$$\delta\mathrm{vol} = -e^I_\alpha (\delta e^\alpha_I)\mathrm{vol}, \tag{3.28}$$

puede desarrollarse la variación de la acción (3.27) para obtener las ecuaciones que equivaldrán a las de Einstein obtenidas en la sección anterior. En este caso la variación se realiza respecto a la tétrada e lo que implica que

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_M \Big((\delta e^\alpha_I) e^\beta_J F^{IJ}_{\alpha\beta} + e^\alpha_I (\delta e^\beta_J) F^{IJ}_\alpha - e^K_\gamma (\delta e^\gamma_K e^\alpha_I e^\beta_J F^{IJ}_{\alpha\beta}) \Big) \mathrm{vol} \\ & 2\int_M \left(e^\beta_J F^{IJ}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} e^\alpha_I e^\beta_J e^\gamma_K F^{JK}_{\beta\gamma} \right), \end{aligned} \tag{3.29}$$

es decir

$$e^\beta_J F^{IJ}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} e^\alpha_I e^\beta_J e^\gamma_K F^{JK}_{\beta\gamma} = 0, \tag{3.30}$$

las cuales son completamente equivalente a las ecuaciones (3.13). Es decir, se han obtenido las ecuaciones de Einstein en este nuevo contexto.

Capítulo 4

Estado de Kodama

Nos interesa estudiar el comportamiento de Relatividad General al acoplarse con términos topológicos. Al añadir a la acción de Palatini este tipo de términos, la dinámica de la teoría no se modifica, pero a nivel de las constricciones (y por lo tanto de las observables) si.
Aunque este modelo es lo que se podrá considerar como “modelo de juguete”, las simetrías que arroje el análisis ayudarán a comprender de qué modo se afecta la dinámica interna de la teoría; es decir, no al nivel de las ecuaciones de movimiento (pues sabemos que éstas no serán modificadas por esos acoplamientos), sino lo que ocurre en las relaciones de conmutación y las observables analizadas desde el punto de vista del formalismo de Dirac.
En particular analizaremos el acoplamiento de la acción de Palatini con el término topológico de Chern-Simons, haciendo uso de un parámetro de tipo Barbero-Immirzi, se desarrolla el proceso usando como grupo interno a SU(2), y se analizan las relaciones de conmutación a través de los paréntesis de Dirac surgidos como consecuencia del acoplamiento.
En el segundo caso de estudio se calculan las constricciones en el estado generalizado de Kodama constituido por los términos topológicos de Chern-Simons, Chern-Simons dual y Nieh-Yan. Aunque se usa como grupo interno a $SO(3,1)$, veremos que el proceso requiere ciertas simplificaciones para poder analizar de manera más ágil las simetrías de la acción que se estudia.

4.1. Acoplamiento de Relatividad General más el término topológico de Chern-Simons

El término topológico de Chern-Simons se establece mediante la acción

$$S_{[C-S]}[\omega] = \int_M \omega \wedge d\omega + \frac{2}{3}\omega \wedge \omega \wedge \omega, \tag{4.1}$$

donde ω es la 1-forma de conexión de la teoría. Introducimos ahora a e que es la 1-forma para la triada (el campo de proyección) y F la 2-forma de curvatura construida a partir de la conexión ω mediante

$$F = d\omega + \omega \wedge \omega. \tag{4.2}$$

Recordemos también que en 3 dimensiones la acción que representa a relatividad general está dada por

$$S_{[RG]}[e,\omega] = \int_M e \wedge F[\omega], \tag{4.3}$$

recordemos que esta es la acción obtenida en el capítulo anterior en la formulación de Palatini. Es importante observar que ésta es la versión tridimensional de la ecuación (3.27).

Ahora, en el trabajo desarrollado en [7] se modifica la acción para gravedad en 3 dimensiones con constante cosmológica Λ, y se transforma en una teoría de Chern-Simons, introduciéndo un parámetro s, que reproduzca las ecuaciones de movimiento para gravedad en tres dimensiones.
Posteriormente, fijando el parámetro $s = 0$ y tomando el caso límite para $|\Lambda| = 1$ se simplifican los paréntesis de Poisson obtenidos para esta teoría y se propone que la acción que genera esta dinámica esté dada por

$$S_\gamma = 2\int_M e_i \wedge F_i[\omega] + \frac{1}{\gamma} S_{[C-S]}(\omega). \tag{4.4}$$

En nuestro trabajo desarrollaremos el análisis de las simetrías de la acción (4.4), mediante el uso estricto del algoritmo de Dirac. No introduciremos ningún parámetro que modifique la teoría, sino que se hará todo el desarrollo para observar lo que ocurre con ella al nivel de los paréntesis de Dirac. Entonces, el acoplamiento que nos interesa es

$$\begin{aligned} S[e,\omega] &= 2S_{[RG]} + \frac{1}{\gamma} S_{[C-S]} \\ &= 2\int e \wedge F + \frac{1}{\gamma}\int \left(\omega \wedge d\omega + \frac{2}{3}\omega \wedge \omega \wedge \omega\right) \\ &= 2\int e^i \wedge F_i[\omega] + \frac{1}{\gamma}\int \left(\omega^i \wedge d\omega_i + \frac{2}{3}\epsilon_{ijk}\omega^i \wedge \omega^j \wedge \omega^k\right), \end{aligned} \tag{4.5}$$

en la representación de SU(2) y con γ un parámetro de tipo Barbero-Immirzi.
Es necesario observar cuales son las ecuaciones dinámicas de esta teoría. Para lograr esto, tomamos las variaciones respecto a ω y a e; obtenemos las ecuaciones de movimiento respectivas dadas por:

$$\begin{aligned} &De + \frac{1}{\gamma} F = 0, \\ &F = 0, \end{aligned} \tag{4.6}$$

las cuales corresponden a las ecuaciones de movimiento para Relatividad General en 3 dimensiones.
Comenzaremos ahora con el proceso de hamiltonización de la teoría, tomando en cuenta que ésta es una teoría singular. Por lo tanto deberemos de llevar a cabo nuestro análisis haciendo uso del formalismo de Dirac para sistemas singulares.
Partimos de lo elemental: hacemos la descomposición $2+1$ de la acción (4.5) tomando en cuenta que $\omega^i = \omega^i_\mu dx^\mu$ y $e^i = e^i_\mu dx^\mu$ donde $\mu = 0,1,2$ representan los índices de espacio e $i = 0,1,2$ representan los índices internos de grupo, tendremos entonces

$$S[e,\omega] = \int \epsilon^{0ab}\left[\frac{1}{2}e^i_0 F_{iab} + e^i_b \dot{\omega}_{ia} + e^i_a D_b \omega_{i0} + \frac{1}{2\gamma}(\omega^i_0 F_{iab} + \omega^i_b \dot{\omega}_{ia})\right] d^3x, \tag{4.7}$$

con $F_{iab} = \partial_a \omega_{ib} - \partial_b \omega_{ia} + \epsilon_{ijk}\omega^j_a \omega^k_b$, y donde se ha definido la derivada covariante en esta representación como

$$D_a {t_b}^i{}_j = \partial_a {t_b}^i{}_j + {\epsilon^i}_{lk}\omega^l_a {t_b}^k{}_j + {\epsilon_{jl}}^k \omega^l_a t^i{}_k.$$

Usamos la convención de que los índices latinos del inicio del alfabeto se usan como índices de espacio, mientras que aquellos de la mitad del alfabeto representan índices internos de grupo.
Por lo tanto, la densidad lagrangiana que se estudiará es

$$\mathcal{L} = \epsilon^{0ab}\left[\frac{1}{2}e^i_0 F_{iab} + \dot{\omega}_{ia}\left(e^i_b + \frac{\omega^i_b}{2\gamma}\right) + \omega_{i0}\left(D_a e^i_b + \frac{F^i_{ab}}{2\gamma}\right)\right]. \tag{4.8}$$

Como ya habíamos mencionado, esta teoría es singular, y de acuerdo al análisis es necesario calcular la matriz hessiana, recordando que ésta está dada por

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu e^i_\alpha)\partial(\partial_\mu e^j_\beta)}, \qquad \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu e^i_\alpha)\partial(\partial_\mu \omega^j_\beta)}, \qquad \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \omega^i_\alpha)\partial(\partial_\mu \omega^j_\beta)}, \tag{4.9}$$

matriz que en este caso es de 18×18, y es idénticamente cero, lo que implica que la nulidad sea 18 y por lo tanto se esperen el mismo número de constricciones primarias en el inicio del cálculo. Procedemos ahora a obtener los momentos canónicos dados por

$$p_i^\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{e}_\alpha^i} \qquad \text{y} \qquad \pi_i^\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\omega}_\alpha^i}, \tag{4.10}$$

con lo que tendremos

$$\begin{aligned} p_i^0 &= 0, \\ p_i^a &= 0, \\ \pi_i^0 &= 0, \\ \pi_i^a &= \eta^{ab}\left(e_{ib} + \frac{\omega_{ib}}{2\gamma}\right), \end{aligned} \tag{4.11}$$

donde $\eta^{ab} \equiv \epsilon^{0ab}$. Con lo que las constricciones primarias estan dadas por

$$\begin{aligned} \varphi_i^0 &:= p_i^0 \approx 0, \\ \varphi_i^a &:= p_i^a \approx 0, \\ \phi_i^0 &:= \pi_i^0 \approx 0, \\ \phi_i^a &:= \pi_i^a - \eta^{ab}\left(e_{ib} + \frac{\omega_{ib}}{2\gamma}\right) \approx 0. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Proseguimos con el proceso de hamiltonización, lo que sigue es construir la hamiltoniana canónica. Recordemos que ésta está dada como

$$H_C = \int \mathcal{H}_C d^2x = \int [p_i^\alpha \dot{e}_\alpha^i + \pi_i^\alpha \dot{\omega}_\alpha^i - \mathcal{L}]\Big|_{p,\pi} d^2x, \tag{4.13}$$

y explícitamente al desarrollar el cálculo, la hamiltonianana canónica queda como

$$\begin{aligned} H_C &= -\int d^2x \left[\frac{1}{2}\eta^{ab} e_0^i F_{iab} + \omega_0^i \left(D_a \pi_i^a + \frac{\eta^{ab}}{2\gamma}\partial_a \omega_{ib}\right)\right] \\ &= -\int d^2x \left[\omega_0^i D_a \pi_i^a + \frac{1}{2}\eta^{ab}\left(e_0^i F_{iab} + \frac{\omega_0^i}{\gamma}\partial_a \omega_{ib}\right)\right]. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Nos interesa ahora el calcular la hamiltoniana primaria del sistema. Tenemos entonces que sumar las constricciones que permitirán desarrollar el proceso. Sea

$$H_P = H_C + \int d^2x [\lambda_a^i \varphi_i^a + \tilde{\lambda}_a^i \phi_i^a], \tag{4.15}$$

con λ los multiplicadores asociados a φ's y $\tilde{\lambda}$ los relacionados con ϕ's. Por otro lado, tomemos en cuenta que los paréntesis de Poisson elementales para la triada y la conexión estan dados por

$$\begin{aligned} \{e_a^i(x), p_j^b(y)\} &= \delta_j^i \ \delta_a^b \ \delta^2(x-y), \\ \{\omega_a^i(x), \pi_j^b(y)\} &= \delta_j^i \ \delta_a^b \ \delta^2(x-y). \end{aligned} \tag{4.16}$$

Tenemos que calcular la matriz de constricciones cuyo rango nos ayudará a determinar los multiplicadores de Lagrange que puedan conocerse. Esto es

$$W^{\alpha\beta} \doteq \begin{pmatrix} \{\varphi_i^0(x), \varphi_j^0(y)\} & \{\varphi_i^0(x), \varphi_j^a(y)\} & \{\varphi_i^0(x), \phi_j^0(y)\} & \{\varphi_i^0(x), \phi_j^a(y)\} \\ \{\varphi_i^a(x), \varphi_j^0(y)\} & \{\varphi_i^a(x), \varphi_j^b(y)\} & \{\varphi_i^a(x), \phi_j^0(y)\} & \{\varphi_i^a(x), \phi_j^b(y)\} \\ \{\phi_i^0(x), \varphi_j^0(y)\} & \{\phi_i^0(x), \varphi_j^a(y)\} & \{\phi_i^0(x), \phi_j^0(y)\} & \{\phi_i^0(x), \phi_j^a(y)\} \\ \{\phi_i^a(x), \varphi_j^0(y)\} & \{\phi_i^a(x), \varphi_j^b(y)\} & \{\phi_i^a(x), \phi_j^0(y)\} & \{\phi_i^a(x), \phi_j^b(y)\} \end{pmatrix}, \tag{4.17}$$

y tomando en cuenta que los paréntesis de Poisson entre constricciones distintos de cero estan dados por

$$\begin{aligned} \{\phi_i^a(x), \varphi_j^b(y)\} &= -\eta^{ab}\delta_{ij}\delta^2(x-y), \\ \{\phi_i^a(x), \phi_j^b(y)\} &= -\frac{1}{\gamma}\eta^{ab}\delta_{ij}\delta^2(x-y), \end{aligned} \tag{4.18}$$

la matriz queda como

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{\gamma} \end{pmatrix} \eta^{ab}\delta_{ij}\delta^2(x-y). \tag{4.19}$$

Esta matriz tiene rango igual a 12 y nulidad igual a 6, es decir, esperamos encontrar 6 constricciones secundarias en base a las condiciones de consistencia de las primarias que ya se han obtenido.
Desarrollemos ahora las condiciones de consistencia para las ϕ's. Si sabemos que $\Phi = (\varphi, \phi)$ es una constricción, entonces su evolución temporal está dada como

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}^\alpha(x) &= \{\Phi^\alpha(x), H_P\} \\ &= \int d^2y \{\Phi^\alpha(x), \mathcal{H}_C(y)\} + \int d^2y \left[\lambda_\beta^i \{\Phi^\alpha(x), \varphi_i^\beta\}(y) + \tilde{\lambda}_\beta^i \{\Phi^\alpha(x), \phi_i^\beta(y)\}\right], \end{aligned} \tag{4.20}$$

con lo que las condiciones de consistencia quedan como

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_i^0 = \{\varphi_i^0(x), H_P\} \approx 0 \qquad &\Rightarrow \qquad \psi_i := \frac{1}{2}\eta^{ab}F_{iab} \approx 0, \\ \dot{\phi}_i^0 = \{\phi_i^0, H_P\} \approx 0 \qquad &\Rightarrow \qquad \Psi_i := D_a\pi_i^a + \frac{\eta^{ab}}{2\gamma}\partial_a\omega_{ib} \approx 0. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Ahora podemos calcular las condiciones de consistencia relacionadas con los multiplicadores de Lagrange, las cuales dan como resultado

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_i^a = \{\varphi^a, H_P\} \approx 0 \qquad &\Rightarrow \qquad \tilde{\lambda}_b^j \approx 0, \\ \dot{\phi}_i^a = \{\phi_i^a, H_P\} \approx 0 \qquad &\Rightarrow \qquad \eta^{ab}\left[\partial_b e_{i0} + \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\omega_b^j\left(e_{i0} - \frac{\omega_{i0}}{\gamma}\right) - \lambda_{ib}\right] \approx 0. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Hemos llegado a un punto en el cual los multiplicadores de Lagrange pueden ser despejados. Por lo tanto esta teoría no necesita nuevas condiciones de consistencia sobre las constricciones y por lo tanto no surgen constricciones terciarias.
Tendremos que clasificar ahora a las constricciones obtenidas en las de primera clase y de segunda

clase. Calculemos entonces los paréntesis de Poisson entre ellas para identificarlas. Las constricciones que tienen paréntesis de Poisson distinto de cero entre ellas son

$$\begin{aligned}
\{\varphi_i^a(x), \phi_j^b(y)\} &= -\eta^{ab}\delta_{ij}\delta^2(x-y) \\
\{\phi_i^a(x), \phi_j^b(y)\} &= -\frac{1}{\gamma}\eta^{ab}\delta_{ij}\delta^2(x-y) \\
\{\phi_i^a(x), \psi_j(y)\} &= \eta^{ab}[\delta_{ij}\partial_b\delta^2(x-y) + \epsilon_{ijk}\omega_b^k\delta^2(x-y)] \\
\{\phi_i^a(x), \Psi_j(y)\} &= \epsilon_{ijk}\left(\pi_a^k - \frac{\eta^{ab}}{2\gamma}\omega_b^k\right)\delta^2(x-y) \\
\{\psi_i(x), \Psi_j(y)\} &= \frac{1}{2}\eta^{ab}\epsilon_{ijk}F_{ab}^k\delta^2(x-y) \\
\{\Psi_i(x), \Psi_j(y)\} &= \epsilon_{ijk}\left(D_a\pi^{ka} + \frac{\eta^{ab}}{2\gamma}\partial_a\omega_b^k\right)\delta^2(x-y).
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Con lo anterior podemos construir la matriz con la cual se clasificarán las restricciones de primera y segunda clase.
Al hacer el desarrollo se obtiene una matriz de 24×24, la cual posee rango igual a 12 y nulidad igual a 12; entonces deberemos obtener 12 constriciones de segunda clase. Calculamos los vectores nulos de esta matriz, y estos se contraen con las constricciones encontradas. Al proceder con este cálculo se han obtenido las siguientes 12 constricciones de primera clase

$$\begin{aligned}
&\gamma_{1i}^0 := p_i^0 \approx 0, \\
&\gamma_{2i}^0 := \pi_i^0 \approx 0, \\
&\gamma_{1i} := \frac{1}{2}\eta^{ab}F_{iab} + D_a p_i^a \approx 0, \\
&\gamma_{2i} := D_a\pi_i^a + \frac{1}{2\gamma}\eta^{ab}\partial_a\omega_{ib} + \epsilon_{il}{}^k e_a^l p_k^a \approx 0,
\end{aligned} \tag{4.24}$$

y las 12 restantes de segunda clase

$$\begin{aligned}
&\chi_{1i}^a := p_i^a, \\
&\chi_{2i}^a := \pi_i^a - \eta^{ab}\left(e_{ib} + \frac{\omega_{ib}}{2\gamma}\right).
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Finalmente, se calculan los paréntesis de Poisson entre las constricciones de primera y segunda clase, esto da como resultado

$$
\begin{aligned}
&\{\gamma_{1i}(x), \gamma_{1j}(y)\} = 0, \\
&\{\gamma_{1i}(x), \gamma_{2j}(y)\} = \epsilon_{ijk}\left(\frac{1}{2}\eta^{ab}F^{k}_{ab} + D_a p^{ka}\right)\delta^2(x-y) = \epsilon_{ijk}\gamma^k_1\delta^2(x-y), \\
&\{\gamma_{1i}(x), \chi^a_{1i}(y)\} = 0, \\
&\{\gamma_{1i}(x), \chi^a_{2j}(y)\} = \epsilon_{ijk}p^{ka}\delta^2(x-y) = \epsilon_{ijk}\chi^{ka}_1\delta^2(x-y), \\
&\{\gamma_{2i}(x), \gamma_{2j}(y)\} = \epsilon_{ijk}\left(D_a\pi^{ka} + \frac{\eta^{ab}}{2\gamma}\partial_a\omega^k_b + \epsilon^k{}_l{}^n e^l_a p^a_n\right)\delta^2(x-y) = \epsilon_{ijk}\gamma^k_2\delta^2(x-y) \\
&\{\gamma_{2i}(x), \chi^a_{1j}(y)\} = \epsilon_{ijk}p^{ka}\delta^2(x-y) = \epsilon_{ijk}\chi^{ka}_1\delta^2(x-y), \\
&\{\gamma_{2i}(x), \chi^a_{2j}(y)\} = \epsilon_{ijk}\left[\pi^{ka} - \eta^{ab}\left(e^k_b + \frac{\omega^k_b}{2\gamma}\right)\right]\delta^2(x-y) = \epsilon_{ijk}\chi^{ka}_2\delta^2(x-y), \\
&\{\chi^a_{1i}(x), \chi^b_{1j}(y)\} = 0, \\
&\{\chi^a_{1i}(x), \chi^b_{2j}(y)\} = -\eta^{ab}\delta_{ij}\delta^2(x-y), \\
&\{\chi^a_{2i}(x), \chi^b_{2j}(y)\} = -\frac{\eta^{ab}}{\gamma}\delta_{ij}\delta^2(x-y),
\end{aligned}
\tag{4.26}
$$

donde se ha visto que el álgebra entre constricciones es cerrada bajo el paréntesis de Poisson. Si realizamos ahora un recuento de lo que se ha obtenido, observamos que hay 18 variables dinámicas independientes (nueve ω^i_α y nueve e^i_α), 12 constricciones de primera clase y 12 de segunda. Contamos ahora los grados de libertad físicos en esta teoría haciendo uso de la relación (1.43) se obtiene que

$$GL = \frac{1}{2}[V_c - R_s - 2R_p] = \frac{1}{2}(36 - 12 - 2\times 12) = 0.$$

Esta teoría es topológica, no genera grados de libertad.
Dado que nos interesa identificar cuáles son las observables (desde el enfoque de Dirac), es necesario que obtengamos los paréntesis de Dirac que genera la teoría. Para esto procedemos ahora a escribir la matriz $C_{\alpha\beta}$ cuyas entradas son los paréntesis de Poisson entre las restricciones de segunda clase. Tomando en cuenta que esta matriz está dada por

$$C_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \{\chi^a_{1i}(x), \chi^b_{1j}(y)\} & \{\chi^a_{1i}(x), \chi^b_{2j}(y)\} \\ \{\chi^a_{2i}(x), \chi^b_{1j}(y)\} & \{\chi^a_{2i}(x), \chi^b_{2j}(y)\} \end{pmatrix}, \tag{4.27}$$

que al calcularla explícitamente nos lleva a

$$C_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \frac{1}{\gamma} \end{pmatrix}\eta^{ab}\delta_{ij}\delta^2(x-y), \tag{4.28}$$

y su inversa está dada por

$$C^{-1}_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\gamma} & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\eta_{ab}\delta^{ij}\delta^2(x-y). \tag{4.29}$$

Con lo que pueden calcularse ahora los paréntesis de Dirac entre las variables dinámicas y sus momentos. Si recordamos que el paréntesis de Dirac está definido como

$$\{A(x), B(y)\}_D = \{A(x), B(y)\} - \int dudv \{A(x), \zeta^\alpha(u)\} C^{-1}_{\alpha\beta}(u,v) \{\zeta^\beta(v), B(y)\}, \tag{4.30}$$

entonces las relaciones de conmutación de Dirac se expresan del siguiente modo:

$$\begin{aligned}
&\{e^a_i(x), e^b_j(y)\}_D = -\frac{1}{\gamma}\delta_{ij}\eta^{ab}\delta^2(x-y),\\
&\{p^a_i(x), p^b_j(y)\}_D = 0,\\
&\{e^a_i(x), p^b_j(y)\}_D = 0,\\
&\{\omega^a_i(x), \omega^b_j(y)\}_D = 0,\\
&\{\pi^a_i(x), \pi^b_j(y)\}_D = 0,\\
&\{\omega^a_i(x), \pi^b_j(y)\}_D = \delta_{ij}\eta^{ab}\delta^2(x-y),\\
&\{e^a_i(x), \omega^b_j(y)\}_D = \delta_{ij}\eta^{ab}\delta^2(x-y),\\
&\{e^a_i(x), \pi^b_j(y)\}_D = -\frac{1}{2\gamma}\delta_{ij}\eta^{ab}\delta^2(x-y),\\
&\{\omega^a_i(x), p^b_j(y)\}_D = 0.
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Observemos que al acoplar las teorías no obtenemos los mismos resultados que en el caso de las teorías individuales. Específicamente podemos hacer una tabla comparativa entre la teoría de Palatini [13], la de Chern-Simons pura [5] y lo desarrollado en nuestro trabajo, de tal modo que puede observarse cómo se modifican las relaciones de conmutación al nivel de los paréntesis de Dirac:

	Palatini (RG)	**Chern-Simons**	**RG + Ch-S**
$\{e, e\}_D$	✓	No e	×
$\{e, \Pi_e\}_D$	×	No e	✓
$\{\Pi_e, \Pi_e\}_D$	✓	No e	✓
$\{e, A\}_D$	×	No e	×
$\{A, A\}_D$	✓	×	✓
$\{A, \Pi_A\}_D$	×	✓	×
$\{A, \Pi_e\}_D$	✓	No e	✓
$\{e, \Pi_A\}_D$	✓	No e	×
$\{\Pi_A, \Pi_A\}_D$	✓	✓	✓

donde para simplificar la notación definimos los momentos canónicos como

$$\Pi_e := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{e}} \quad \text{y} \quad \Pi_A := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}},$$

× indica las relaciones que no conmutan, mientras que ✓ denota las que si lo hacen, y se ha denotado que en el caso de Chern-Simons la teoría no depende de la triada e.
Obervamos entonces que las relaciones de conmutación en las teorías individuales no se superponen en el acoplamiento, y de hecho en ninguno de los tres casos coinciden simultáneamente. Lo

desarrollado en nuestro trabajo, no se había reportado en la literatura.
Es debido al parámetro γ que en el acoplamiento no pueden hacerse conmutativas ciertas relaciones, pues de hacerse cero este parámetro surgirían divergencias en el cálculo.
Por otro lado, comparando nuestros resultados con los obtenidos en [7], lo que hemos desarrollado se ha hecho de manera explícita siguiendo el algoritmo estricto de Dirac, y se ha llevado a cabo el análisis de tal modo que se han obtenido todas las simetrías relevantes para esta teoría. Además, mediante el cálculo estricto de constricciones, se han obtenido los grados de libertad de ésta, la cual es topológica, lo que no era evidente sabiendo que cada una de las teorías en el acoplamiento individualmente lo es.

4.2. El estado de Kodama

De acuerdo a lo que comentamos en el capítulo 3, el beneficio de analizar RG mediante el formalismo ADM, consiste en que al establecerla en términos del lenguaje de Hamilton, el espacio-tiempo puede verse como una variedad de la forma $\Sigma \times \mathbb{R}$, en donde Σ es la variedad tridimensional que representa al espacio.
En la formulación de LQG, después de realizar la hamiltonización e identificación de las constricciones de RG (lo que se desarrolló de manera simplificada en el capítulo anterior), se procede al desarrollo de la cuantización canónica de la teoría. Es decir, las coordenadas y momentos canónicos se promueven a operadores y se definen los estados cuánticos que establecerán al sistema. Este proceso no es trivial, pues debido a las complicaciones que se han presentado en el desarrollo de la cuantización para gravedad, dado que en la formulación ADM las restricciones no son polinómicas.
Por otra parte, Ashtekar [11] propuso la introdución de *nuevas variables*, lo que implicó la complexificación de las variables dinámicas de la teoría. Por ende, lo anterior condujo a interpretar la teoría como *gravedad compleja*, que a su vez implica que a las variables y operadores se les tengan que imponer condiciones de realidad [8] que permitan entender la física codificada en la teoría.
La complexificación de Ashtekar [11] implicó la definición de variables duales y antiduales, mediante la introdución del *operador estrella de Hodge interno* definido mediante

$$ {}_*T^{IJ} := \frac{1}{2}\epsilon^{IJKL}T_{KL}, \tag{4.32} $$

donde las ϵ^{IJKL} son las constantes de estructura del álgebra de Lie para el grupo interno $SO(3,1)$.
Imponiendo las condiciones adecuadas para que las variables sean reales, puede mostrarse que en las "nuevas variables" definidas en la formulación de Ashtekar, la conexión A es *autodual* es decir, satisface

$$ {}_*A = iA, \tag{4.33} $$

de tal modo que puede redefinirse el momento canónico conjugado de A. Éste está definido como

$$ E^i_a = q^{1/2} e^i_a, \tag{4.34} $$

donde q es el determinante de la métrica en 3 dimensiones surgida en la descomposición ADM, y en esta nueva notación los índices a, b, c son índices epaciales y los índices $i, j, ...$ ahora representan índices internos. Siguiendo el desarrollo con estas nuevas variables y reemplazando a A^i_a y E^a_i con los respectivos operadores que les correspondan, las constricciones obtenidas en (**??**) pueden escribirse (en términos de operadores) como [10]

$$ \begin{aligned} \hat{C} &= \epsilon^{ijk}\hat{E}^a_i\hat{E}^b_j\hat{F}_{abk}, && \text{(Constricción escalar)} \\ \hat{C}_a &= \hat{E}^b_i\hat{F}^i_{ab}, && \text{(Constricción vectorial)} \\ \hat{G}_i &= \hat{D}_a\hat{E}^a_i, && \text{(Constricción de Gauss)} \end{aligned} \tag{4.35} $$

y la forma del operador $\hat{F}^i_{ab}$ está dada por [2]

$$\frac{\delta\Psi[A]}{\delta A_{ai}} = \frac{3}{2\Lambda}\epsilon^{abc}\hat{F}^i_{bc}\Psi[A], \tag{4.36}$$

con Λ es la constante cosmológica, de tal modo que la solución a la ecuación (4.36) es

$$\Psi_K(A) = \mathcal{N}e^{\frac{3}{2\Lambda}\int Y[A]}, \tag{4.37}$$

donde la constante de normalización $\mathcal{N}$ sólo depende de la topología [24]; éste es el *estado de Kodama*. Kodama [9] mostró que este estado cuántico resuelve las constricciones de Relatividad General (4.35); sin embargo el verdadero obstáculo ha sido su interpretación física.
Debido a la complexificación del espacio fase durante el proceso de construcción del estado, la consecuencia ha sido que éste estado presente violaciones a las distintas simetrías físicas necesarias para la interpretación del mismo. Por lo tanto en la actualidad se busca generalizarlo de tal modo que puedan removerse las inconsistencias que presenta [8].
El objetivo de nuestro trabajo no es hacer una revisión detallada del proceso de cuantización o el de construcción del estado de Kodama, mucho menos otorgarle una interpretación más profunda que la que posee en este contexto. Nos interesa saber solamente que este estado es el que resuelve las constricciones de RG en este contexto.

4.3. El estado generalizado de Kodama

En la definición del estado de Kodama, dada por la ecuación (4.37), el argumento de la exponencial que ahí aparece, se constituye solamente por la acción de Chern-Simons. En la formulación de Holst para RG, la acción con la que se trabaja contiene a la acción de Palatini (que se estudió en capítulos anteriores), junto con los invariantes topológicos de Holst y Nieh-Yan.
En este caso, el estado físico que resuelve las constricciones para la teoría Holst, es lo que se conoce como el *estado generalizado de Kodama* [8]. Este estado se define como

$$\Psi[e, A] = \mathcal{N} \exp\left[\int \frac{1}{2\alpha} S_{[C-S]}[A] + \frac{1}{2\beta} S_{[*C-S]}[A] + \frac{\beta}{\alpha} S_{[N-Y]}[e]\right], \tag{4.38}$$

donde $\mathcal{N}$ es una constante de normalización, $S_{[C-S]}[A]$ es la acción de Chern-Simons, $S_{*[C-S]}[A]$ es la de Chern-Simons dual y $S_{[N-Y]}[e]$ es la acción asociada al invariante topológico de Nieh-Yan.
Nuestro objetivo es analizar directamente las simetrías que surgen de la teoría de norma asociada a este estado, es decir, estudiaremos la acción

$$S[e, A] = \int \frac{1}{2\alpha} S_{[C-S]}[A] + \frac{1}{2\beta} S_{[*C-S]}[A] + \frac{\beta}{\alpha} S_{[N-Y]}[e], \tag{4.39}$$

vista como una teoría de norma. Es importante aclarar que dado que se introducirá el término topológico de Chern-Simons dual, se tiene la necesidad de usar como grupo interno a $SO(3,1)$, lo cual se puede observar en la definición del operador estrella de Hodge (4.32).
En la representación $SO(3,1)$ los términos que abordaremos están dados por:

Chern-Simons

$$S_{[C-S]}[A] = \int A^{IJ} dA_{IJ} + \frac{2}{3} A^{IJ} \wedge A_{JK} \wedge A^K{}_I = \int Y[A], \tag{4.40}$$

Chern-Simons dual

$$S_{[*C-S]}[A] = \int \epsilon^{IJKL} (A_{IJ} dA_{KL} + \frac{2}{3} A_I{}^N \wedge A_{NJ} \wedge A_{KL}) = \int {}^*Y[A], \tag{4.41}$$

Nieh-Yan

$$S_{[N-Y]}[e] = \int e_I \wedge De^I, \tag{4.42}$$

donde $A^{IJ} = A^{IJ}_\mu dx^\mu$ nuevamente es la 1-forma de conexión valuada en el álgebra de Lie para $SO(3,1)$, $e^I = e^I_\mu dx^\mu$ es la triada para el campo de proyección y $D_\mu T_\nu{}^I{}_J = \partial_\mu T_\nu{}^I{}_J + A_\mu{}^I{}_L T_\nu{}^L{}_J - A_\mu{}^L{}_J T_\nu{}^I{}_L$ es la derivada covariante en esta representación; los índices mayúsculos (de grupo) van como $I, J, ... = 0,1,2,3$ y los griegos (espaciales) como $\mu = 0,1,2$.
Si retomamos entonces la acción (4.39), tenemos

$$S[e, A] = \int_M (\tilde{\alpha} Y[A] + \tilde{\beta}\ {}^*Y[A] + \sigma e \wedge De), \tag{4.43}$$

donde hemos redefinido las constantes de acoplamiento como $\tilde{\alpha} \equiv 1/2\alpha$, $\tilde{\beta} \equiv 1/2\beta$ y $\sigma \equiv \beta/\alpha$, con lo que las ecuaciones de movimiento para este acoplamiento estan dadas como

$$\begin{aligned}
\frac{\delta S[e, A]}{\delta A^{IJ}_\mu} &:= \epsilon^{\mu\nu\sigma}\Big[\Big(\tilde{\alpha} F_{\nu\sigma IJ}[A] + \tilde{\beta} \epsilon_{IJKL} F^{KL}_{\nu\sigma}[A]\Big) - \sigma e_{\nu I} e_{\sigma J} \\
&\quad + \frac{4}{3}\tilde{\beta}(\epsilon_{INKL} A_{\nu J}{}^N - \epsilon_{INJL} A_{\nu K}{}^N) A^{KL}_\sigma\Big] = 0, \qquad (4.44) \\
\frac{\delta S[e, A]}{\delta e^I_\mu} &:= \epsilon^{\mu\nu\sigma} D_\nu e_{\sigma I} = 0.
\end{aligned}$$

De estas ecuaciones, se tiene entonces que la dinámica del acoplamiento es complicada, y esto se debe a cómo se acoplan $Y[A]$ y ${}^*Y[A]$. Para sortear este problema, es necesario introducir el concepto de *conexión de Lorentz autodual*.
Se define el *dual interno de Hodge* para una conexión de Lorentz como

$$({}_*A)^{IJ}_{\alpha} := \frac{1}{2}\epsilon^{IJKL}A_{\alpha KL}, \tag{4.45}$$

y se definen las partes *autodual* (${}^+A$) y *antiautodual* (${}^-A$) de A (como se mencionó en (4.33)) como el mapeo de Hodge aplicado a A que satisface

$${}_*{}^{\pm}A = \pm i^{\pm}A. \tag{4.46}$$

Con lo anterior, la conexión de Lorentz A puede separarse en términos de sus partes autodual y anti-autodual como

$$A = {}^+A + {}^-A, \tag{4.47}$$

donde explícitamente ${}^+A$ y ${}^-A$ están definidas mediante

$${}^{\pm}A^{IJ}_{\alpha} := \frac{1}{2}\left(A^{IJ}_{\alpha} \mp \frac{i}{2}\epsilon^{IJKL}A_{\alpha KL}\right). \tag{4.48}$$

Observemos solamente cómo se acoplan $Y[A]$ y ${}^*Y[A]$: puede tomarse una combinación lineal de acciones construidas mediante $Y[A]$ y ${}^*Y[A]$, tomando la acción

$$S^{\pm}[A] = \int \frac{1}{2}\left(Y[A] \mp \frac{i}{2}{}^*Y[A]\right). \tag{4.49}$$

Explícitamente tenemos que

$$S^{\pm}[A] = \int \frac{1}{2}\left[A^{IJ}dA_{IJ} + \frac{2}{3}A^{IJ} \wedge A_{JK} \wedge A^{K}{}_{I} \mp \frac{i}{2}\epsilon^{IJKL}\left(A_{IJ}dA_{KL} + \frac{2}{3}A_{I}{}^{N} \wedge A_{NJ} \wedge A_{KL}\right)\right]. \tag{4.50}$$

Usando ahora la definición (4.48), estas acciones equivalen a las densidades lagrangianas dadas como

$$\mathcal{L}^{\pm} = \epsilon^{\alpha\beta\mu}\left({}^{\pm}A^{IJ}_{\alpha}\partial_{\beta}{}^{\pm}A_{\mu IJ} + \frac{2}{3}\,{}^{\pm}A^{IJ\pm}_{\alpha}A_{\beta JK}{}^{\pm}A_{\mu}{}^{K}{}_{I}\right), \tag{4.51}$$

es decir, se ha logrado separar el problema en términos de conexiones ${}^+A$ y ${}^-A$.
Es decir, de las acciones (4.51), vemos que

$$\begin{aligned} \int Y[A] &= S^{+}[A] + S^{-}[A], \\ \int {}_*Y[A] &= i(S^{+}[A] - S^{-}[A]), \end{aligned} \tag{4.52}$$

con lo cual la acción (4.43) puede escribirse como

$$S[e, A] = \int \mu\mathcal{L}^{+} + \nu\mathcal{L}^{-} + \sigma e \wedge De, \tag{4.53}$$

donde $\mu = \tilde{\alpha} + i\tilde{\beta}$ y $\nu = \tilde{\alpha} - i\tilde{\beta}$.
Siguiendo con el procedimiento, puede elegirse una combinación adecuada entre $\mathcal{L}^{+}$ y $\mathcal{L}^{-}$, que permita desarrollar la dinámica del acoplamiento, de tal modo que se transforme a alguna forma

más simple de abordar. En este caso elegimos que la combinación solo quede en términos de ${}^+A$, y tomamos entonces la acción

$$S[{}^+A,e] = \frac{1}{2}\int \Big[Y[{}^+A] + e\wedge D^+e \Big], \tag{4.54}$$

donde α un escalar y $D^{\pm}e = de + {}^{\pm}A\wedge e$.
Si desarrollamos las ecuaciones de movimiento mediante la variación de la acción (4.54) obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\delta S[{}^+A,e]}{\delta {}^+A_\mu^{IJ}} : &\qquad \epsilon^{\mu\nu\sigma}(F[{}^+A]_{\nu\sigma IJ} - e_{\nu I}e_{\sigma J}) = 0, \\ \frac{\delta S[{}^+A,e]}{\delta e_\mu^I} : &\qquad \epsilon^{\mu\nu\sigma}D_\nu^+ e_\sigma^I = 0, \end{aligned} \tag{4.55}$$

donde $F_{\mu\nu IJ}[{}^+A] := {}^+F_{\mu\nu IJ} = \partial_\mu {}^+A_{\nu IJ} - \partial_\nu {}^+A_{\mu IJ} + {}^+A_{\mu I}{}^K\ {}^+A_{\nu KJ} - {}^+A_{\nu I}{}^K\ {}^+A_{\mu KJ}$, ecuaciones que reproducen la dinámica ya observada en secciones anteriores, solo que esta vez mediante el uso de ${}^+A$.
Al hacer esta descomposición en la acción (4.54), resulta casi directo el desarrollo pues entonces el problema se ha reducido a la forma

$$S[e,A]_{exotica} = \frac{1}{2}\int_M A^{IJ}dA_{IJ} + \frac{2}{3}A^{IK}\wedge A_{KL}\wedge A^L{}_I + \int_M \frac{\Lambda}{2}e_I\wedge De^I, \tag{4.56}$$

caso que se ha desarrollado y resuelto de manera completa en [4]. Recordemos entonces que las ecuaciones de movimiento para este caso están dadas por

$$\begin{aligned} \frac{\delta S[A,e]}{\delta A_\mu^{IJ}} : &\qquad \epsilon^{\mu\nu\sigma}(F[A]_{\nu\sigma IJ} - \Lambda e_{\nu I}e_{\sigma J}) = 0, \\ \frac{\delta S[A,e]}{\delta e_\mu^I} : &\qquad \epsilon^{\mu\nu\sigma}\Lambda D_\nu e_\sigma^I = 0, \end{aligned} \tag{4.57}$$

donde $F_{\mu\nu IJ} = \partial_\mu A_{\nu IJ} - \partial_\nu A_{\mu IJ} + A_{\mu I}{}^K A_{\nu KJ} - A_{\nu I}{}^K A_{\mu KJ}$. Es decir, la dinámica es la misma que en nuestro problema, solamente que esta acción está evaluada en la parte dual (o antidual) de la conexión A, y con $\Lambda = 1$. Este desarrollo nos permite observar la dinámica de cada uno de los elementos que se incorporan en las densidades lagrangianas (4.51), pues se puede ver que en realidad son esta misma acción pero en términos de ${}^+A$ (ó ${}^-A$ si así se hubiera hecho la elección).
Si se analiza esta acción, entonces las constricciones de primera clase para la acción (4.54) están dadas por

$$\begin{aligned} \gamma_I^0 &= \Pi_I^0 \approx 0, \\ \gamma_{IJ}^0 &= \Pi_{IJ}^0 \approx 0, \\ \gamma_I &= -2D_a^+\ \Pi_I^a + D_a^+\ \phi_I^a + e_a^J\phi_{IJ}^a \approx 0 \\ \gamma_{IJ} &= D_a^+\phi_{IJ}^a + \frac{\epsilon^{0ab}}{2}{}^+F_{abIJ} + \frac{1}{2}(\Pi_I^a e_{aJ} - \Pi_J^a e_{aI}) \approx 0, \end{aligned} \tag{4.58}$$

donde se ha tomado en cuenta que

$$\Pi_{IJ}^\alpha := \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\dot{{}^+A})},$$

y además, las constricciones primarias en términos de las cuales se construyen las restricciones de primera y segunda clase para esta acción se definieron como

$$\begin{aligned}\phi_I^a &:= \Pi_I^a - \frac{1}{2}\epsilon^{0ab}e_{bI} \ \text{ y}\\ \phi_{IJ}^a &:= \Pi_{IJ}^a - \frac{1}{2}\epsilon^{0ab+}A_{bIJ}.\end{aligned} \tag{4.59}$$

Por lo tanto, al proceder con el cálculo, se obtiene que las constricciones de segunda clase están dadas por

$$\begin{aligned}\chi_I^a &= \Pi_I^a - \frac{1}{2}\epsilon^{0ab}e_{bI} \approx 0,\\ \chi_{IJ}^a &= \Pi_{IJ}^a - \frac{1}{2}\epsilon^{0ab+}A_{bIJ} \approx 0,\end{aligned} \tag{4.60}$$

En base a las constricciones obtenidas es que se desarrollan los paréntesis de Dirac para esta teoría, mediante la definición (4.30), en este caso se tiene que

$$\begin{aligned}
\{e_a^I(x), \Pi_J^b(y)\}_D &= \frac{1}{2}\delta_a^b\delta_J^I\delta^2(x-y),\\
\{e_a^I(x), e_b^I(y)\}_D &= \eta^{IJ}\epsilon_{0ab}\delta^2(x-y),\\
\{\Pi_I^a(x), \Pi_J^b(y)\}_D &= \frac{1}{4}\eta_{IJ}\epsilon^{0ab}\delta^2(x-y),\\
\{{}^+A_a^{IJ}(x), \Pi_{KL}^b(y)\}_D &= \frac{1}{4}\delta_a^b(\delta_K^I\delta_L^J - \delta_L^I\delta_K^J)\delta^2(x-y),\\
\{{}^+A_a^{IJ}(x), {}^+A_b^{KL}(y)\}_D &= \frac{1}{2}(\eta^{IK}\eta^{JL} - \eta^{IL}\eta^{JK})\epsilon_{0ab}\delta^2(x-y),\\
\{\Pi_{IJ}^a(x), \Pi_{KL}^b(y)\}_D &= \frac{1}{8}(\eta_{IK}\eta_{JL} - \eta_{IL}\eta_{JK})\epsilon^{0ab}\delta^2(x-y),\\
\{e_a^I(x), {}^+A_b^{JK}(y)\}_D &= 0,\\
\{e_a^I(x), \Pi_{JK}^b(y)\}_D &= 0,\\
\{{}^+A_a^{IJ}(x), \Pi_K^b(y)\}_D &= 0.
\end{aligned} \tag{4.61}$$

Con este anáisis hemos observado que el estado generalizado de Kodama posee parte de las simetrías de gravedad exótica, pero evaluado solamente en la parte autodual de la conexión. Es decir, no ha sido en la conexión completa, que deberá incluir a la parte anti-autodual de ella.

Por lo que se ve de este desarrollo, la parte antidual se comportará de la misma manera que lo ha hecho la parte dual. Esto sugiere que la teoría completa también sea topológica, aunque en realidad deberá desarrollarse el análisis usando la conexión completa. Sin embargo, aunque en este cálculo nos hemos restringido solo a la parte dual, se han obtenido simetrías relevantes de la teoría de norma asociada al estado generalizado de Kodama: se desarrolló la estructura completa de las constricciones y el álgebra que satisfacen, y a partir de las constricciones de segunda clase se han obtenido los paréntesis de Dirac que serán útiles para la comprensión de la teoría. Por otro lado, las transformaciones de norma obtenidas para esta teoría permitirán la correcta identificación de observables en el proceso de cuantización de la misma.

Nuevamente, podemos realizar una tabla que permita observar el comportamiento de las relaciones de conmutación de esta teoría. En este caso comparamos la teoría de Kodama (Chern-Simons), para observar cuales de las relaciones de conmutación se han preservado; recordamos que el símbolo $\times$ indica en cuales casos los paréntesis de Dirac no conmutan:

	Kodama (Ch-S)	**Kodama Gen.**(en ^+A)
$\{e, e\}_D$	No e	$\times$
$\{e, \Pi_e\}_D$	No e	$\times$
$\{\Pi_e, \Pi_e\}_D$	No e	$\times$
$\{e, A\}_D$	No e	$\checkmark$
$\{A, A\}_D$	$\times$	$\times$
$\{A, \Pi_A\}_D$	$\checkmark$	$\times$
$\{A, \Pi_e\}_D$	No e	$\checkmark$
$\{e, \Pi_A\}_D$	No e	$\checkmark$
$\{\Pi_A, \Pi_A\}_D$	$\checkmark$	$\times$

Es necesario mencionar que el análisis que se desarrolló para esta acción, fue simplificado de tal modo que nos reservamos a trabajar solamente con la parte autodual de la conexión A. Sin embargo, deberá de tomarse en cuenta posteriormente la parte anti-autodual de ella para ejecutar un estudio más profundo de este estado. Aún así, la información que aporta este análisis será de mucha utilidad para observar el comportamiento de la teoría, así como de las simetrías que esta posee.

Capítulo 5

Conclusiones

En nuestro trabajo, se desarrolló un análisis para el acoplamiento de Relatividad General más el término topológico de Chern-Simons, y se pudo observar cómo se modifican las relaciones de conmutación de la teoría, a pesar de que las ecuaciones de movimiento no se alteran, respecto a las de la teoría pura. A diferencia de lo reportado en [7] el tratamiento se hizo mediante el uso estricto del algoritmo de Dirac-Bergmann, sin hacer alguna suposición previa, respecto a cómo definir las variables canónicas del sistema.
Al identificar las constricciones de esta teoría, se realizó el conteo de grados de libertad de la misma, y al menos en la parte autodual para la conexión A, la teoría es topológica. Más aún, al clasificar las constricciones en aquellas de primera y segunda clase, se pudieron construir los paréntesis de Dirac adecuados para la teoría y se observó la manera en que se modifican las relaciones de conmutación para la triada y la conexión, así como para los momentos canónicos correspondientes a ellas. Por otro lado, se ha observado cómo se modifican las relaciones de conmutación en las teorías puras, y puede ahora compararse con los resultados y simetrías del acoplamiento que aquí se desarrolla. Todo lo anterior, no había sido reportado en la literatura.
En el segundo caso de estudio, la teoría que representa el estado generalizado de Kodama dada por la ecuación (4.43), originalmente se desarrolló el cálculo estricto para obtener las constricciones de la teoría. El proceso resulto muy engorroso y se procedió a simplificar el cálculo introduciendo los conceptos de conexión autodual ${}^{+}A$ y anti-autodual ${}^{-}A$.
Esto permitió separar la acción de estudio en una combinación de acciones de tipo exótico, pero evaluada cada una en términos de ${}^{+}A$ y ${}^{-}A$; se eligió trabajar solamente en la parte autodual de la conexión y a partir de ahí analizar las simetrías de esta teoría de norma. Basándose en el trabajo llevado a cabo en [4], se observó que esta teoría posee simetrías similares a la acción exótica estudiada en [4], pero en términos solamente de la parte autodual de la conexión A. Partiendo de una teoría de norma en la cual se tiene solo la teoría de Chern-Simons y el invariante topológico de Nieh-Yan, se pudo reducir el problema a una acción que posee dinámica análoga a gravedad en 3 dimensiones. Debido a la simetría que presentan la parte dual y antidual de la conexión A, es posible que la parte antidual también sea una teoría topológica, aunque se deberá hacer posteriormente el análisis usando la conexión completa, para conocer todas sus simetrías. Sin embargo, las simetrías y resultados obtenidos en este trabajo, al igual que en el primer caso de estudio, no se habían reportado, lo cual será útil para posteriores análisis.

Bibliografía

[1] Abhay Ashtekar, *New Hamiltonian formulation of general relativity* Phys. Rev. D 36. (1987)

[2] L.Smolin, *Quantum Gravity with a positive cosmological constant*(perimeter. Inst. Theor. Phys and Waterloo U.,2002)

[3] Abhay Ashtekar, *Loop Quantum Cosmology: An Overview* Gen.Rel.Grav.41:707-741 (2009)

[4] Escalante A., J. Manuel Cabrera, *Hamiltonian Dynamics of an exotic action for gravity in three dimensions* Annals Phys. (2014)

[5] Escalante A., (2009a). *The Chern-Simons state for topological invariants*, Physics Letters B

[6] Escalante A., L. Carbajal, *Hamiltonian Study for Chern-Simons and Pontryagin theories* Annal Phys. 326 (2011)

[7] Bonzom, Valentin et al. Class.Quant.Grav. 25 (2008)

[8] Randono A., *Generalizing the Kodama state I: Construction* (Texas U., Ctr. Relativity) (2006)

[9] H. Kodama, Prog. Theor. Phys. 80, 1024(1988); Phys. Rev. D42(1990)2548

[10] J. Baez and J. Muniain , *Gauge Fields, Knots and Gravity*, (World Scientific, 1994)

[11] Abhay Ashtekar, *New Variables for Classical and Quantum Gravity* Phys. Rev. Lett. 57, 2244

[12] García-Compean H. et al, *Remarks on 2+1 self-dual Chern-Simons gravity* Phys.Rev. D61 (2000)

[13] Escalante A,, O. Rodriguez, *Hamiltonian dynamics and gauge symmetry for three-dimensional Palatini theory with cosmological constant* JHEP05 (2014)

[14] Henneaux M. and Teitelboim C., *Quantization of gauge systems* (Princeton University, 1992)

[15] Escalante A. et al, *Hamiltonian study for Chern-Simons and Pontryagin theories* Annals Phys. 326 (2011) 323-339

[16] Nakahara M., *Geometry, Topology and Physics*, 2nd ed.(IOP publishing Ltd, 2003)

[17] Nash C. and Sen S., *Topology And Geometry For Physicists*, (Academic Press Inc, 1983)

[18] Thieman T., *Modern Canonical Quantum General Relativity*, (Cambridge University Press, 2007)

[19] Escalante A. et al, *A pure Dirac's canonical analysis for four-dimensional BF theories* Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.09,1250053 (2012)

[20] R. Arnowitt, S. Deser, and C. W. Misner, *The dynamics of general relativity in Gravitation: an introduction to current research* (L. Witten, ed.), pp. 227-265, Wiley, 1962

[21] R. Gambini and J. Pullin, *Loop, Knots, Gauge theories and Quantum gravity* (Cambridge University Press, Cambidge, 1996).

[22] S. Weinberg. *The Quantum Theory of Fields* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1996), Vols I-II

[23] D. M. Gitman and I. V. Tyutin, *Quantization of field with contraints*, (Berlin, Germany: Springer. (Springer series in nuclear and particles physics, 1990)

[24] C. Soo, *Wave function of the Universe and Chern-Simons Perturbation Theory*

[25] A. Hanson, T. Regge and C. Teitelboim. *Constrained Hamiltonian Systems* (Accademia Nazionale dei Lincei, Roma, 1978)

[26] A. Ashtekar. *Lectures on non-perturbative canonical gravity* (Advanced Series in Astrophysics and Cosmology-Vol. 6, World Scientific, 1991)

[27] Dirac, P.A.M. *Lectures on Quantum Mechanics*, (New York: Dover Publications, 1964)

Bibliografía