

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
POSTGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

LA TÉCNICA DE FORCING Y ALGUNAS APLICACIONES

TESIS

que para obtener el grado de

MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

Presenta:

SERGIO ATAYAN GARCÍA BALÁN

Directores de Tesis:

Manuel Ibarra Contreras

Iván Martínez Ruíz

Puebla, Pue.

10 de Julio de 2014

A Don Jesús y a Doña Concha II

*Set theory is the foundation of mathematics. All mathematical concepts are defined in terms of the primitive notions of set and membership. In axiomatic set theory we formulate a few simple axioms about these primitive notions in an attempt to capture the basic “obviously true” set-theoretic principles. From such axioms, all known mathematics may be derived. **However, there are some questions which the axioms fail to settle, and that failure is the subject of this book.***¹

¹K.Kunen refiriéndose a [13].

Agradecimientos

Antes que todo, agradezco a Dios por darle el entendimiento, la paciencia y la aceptación a mis padres de que yo no creo en dios. Agradezco a mis padres, porque todo lo bueno que soy se lo debo a sus ejemplos y acciones, porque me educaron y dieron sustento y lo siguen haciendo, y por hacer posible mi estancia en Toronto. Agradezco a mi familia, en especial a Ricardo, Yáscara, Andy y Naomi a quienes quiero mucho y me hacen sentir muy querido.

Agradezco a todos mis amigos que en mayor o menor forma me han ayudado a lo largo de esta etapa y han hecho más alegre mi vida y con quienes he aprendido y compartido muchas cosas, en especial a René, Nelson, Oscar, Jorge, Vianey, Héctor, Brenda, Sonia, Ana y toda la familia del laboratorio de lógica matemática.

Gracias a Rosy, Enrique, Edi, Migue, Sam, Marco, Monse y Bele, por hacerme sentir siempre como en casa, por los fines de semana, los paseos, y por compartir parte de sus vidas conmigo.

Agradezco a mis amigos (que también son mis directores de tesis), Manuel Ibarra e Iván Martínez por darme la libertad de hacer y dejar de hacer, por apoyarme cuando hice mi estancia y cuando empecé a trabajar, por la gran cantidad de tiempo que le han dedicado a la realización de esta tesis, por el seminario de los lunes donde se hablaba de forcing y de otras cosas de igual, o incluso mayor, importancia. Por enseñarme, instruirme y aconsejarme.

A mis sinodales Agustín Contreras, Alejandro Páramo, David Villa y Oleg Okunev, por sus valiosos comentarios sobre este trabajo. Agradezco también al profesor Juan Angoa, quien junto con mis sinodales, mostró siempre paciencia y buena voluntad en los foros de avance de tesis. A Elsa Puente por sus observaciones.

Gracias a Anahi, por ser parte importante en esta etapa de mi vida, por animarse a vencer sus miedos y por ayudarme a vencer los míos, por lo que es, y por lo que viene.

Finalmente, agradezco a esa gran porción de Mexicanos que con el pago (voluntario o involuntario), de sus impuestos, han financiado mis estudios de maestría (vía una beca CONACyT), y con quienes me comprometo para hacer de mi país un mejor lugar para todos.

Prefacio

La hipótesis del continuo (**HC**), fue uno de los problemas que Hilbert presentó como los más importantes (a resolver), en el Congreso Internacional de Matemáticos de 1900. **HC** nos dice que si tomamos un subconjunto infinito A de números reales, entonces existe una biyección entre A y \mathbb{N} o existe una biyección entre A y \mathbb{R} . Georg Cantor dedicó gran parte de su vida a probar la validez de **HC** sin tener éxito.

En 1940 Gödel construye un modelo de **ZFE** donde se valida **HC** dando así esperanzas al trabajo iniciado por Cantor. Sin embargo, en 1963 Paul Cohen construye un modelo de **ZFE** donde se verifica la negación de **HC**. Juntando estos dos resultados, obtenemos que **HC** es independiente de **ZFE**, lo cual quiere decir que trabajando en **ZFE** no podemos probar ni refutar **HC**. Como conclusión, Cantor jamás hubiera podido probar **HC**.

En este trabajo nos ocupamos de la técnica de forcing introducida por Cohen en su demostración de la consistencia de la negación de **HC**. Su importancia radica en la cantidad de aplicaciones que ha tenido desde su aparición. Resulta ser una herramienta muy eficaz en la construcción de diversos modelos de la teoría de conjuntos.

El enfoque que usamos aquí para presentar la técnica, se basa en la existencia de un modelo numerable y transitivo de una parte lo suficientemente grande de **ZFE**. Todo lo necesario para garantizar la existencia de dicho modelo es tratado a profundidad en los capítulos 1 y 2, donde también se hace una introducción a las pruebas de consistencia.

En el capítulo 3 se presenta la noción de forcing (o forzamiento), que resulta en la construcción de extensiones para modelos de la teoría de conjuntos.

A la manera de Cohen, se presenta un modelo para la negación de **HC** y, usando la técnica de forcing, también se construye un modelo para **HC**. En este mismo capítulo se muestra que es posible construir modelos donde **HC** se verifica, pero no así la hipótesis generalizada del continuo.

En la primera parte del capítulo 4 nos ocupamos de encontrar las condiciones suficientes que deben cumplir dos órdenes parciales para generar las mismas extensiones. En la segunda parte, presentamos algunas aplicaciones sencillas que tiene la técnica de forcing, como por ejemplo, la consistencia del principio combinatorio \diamond , la construcción de un modelo que colapsa cardinales (el colapso de Lévy), y la construcción de un modelo (forcing de los reales aleatorios), donde se verifica la negación de **HC** pero que tiene propiedades distintas al modelo presentado por Cohen.

El contenido de este trabajo sirve como punto de partida para cualquiera que quiera comprender resultados o pruebas de consistencia que involucren a la técnica de forcing, así como para aquellos que quieran adentrarse en el estudio actual de la teoría de conjuntos y los cardinales grandes.

Cabe aclarar que ninguno de los resultados aquí presentados son nuestros, y que el trabajo sigue un desarrollo basado en [13] y [14], libros de K. Kunen, a quien agradecemos profundamente. El mérito, de existir, consiste en presentar de manera más detallada algunos de los resultados enunciados en estas obras.

Contenido

| | |
|---|-----------|
| 0. Preliminares | 1 |
| 0.1. Notación y Conceptos Básicos | 1 |
| 0.2. Ordinales y Cardinales | 3 |
| 0.3. Los Axiomas de ZFE | 5 |
| 1. Los Conjuntos Bien Fundados | 9 |
| 1.1. Propiedades de los conjuntos bien fundados | 9 |
| 1.2. Relaciones Bien Fundadas | 15 |
| 1.3. El Axioma de Fundación | 18 |
| 1.4. Inducción y Recursión | 19 |
| 2. Pruebas de Consistencia | 27 |
| 2.1. Teoría de Modelos | 28 |
| 2.2. Modelos Para la Teoría de Conjuntos | 36 |
| 2.3. Nociones Absolutas | 44 |
| 2.4. Modelos para Pedazos de ZFE | 50 |
| 2.5. El Teorema del Reflejo | 55 |
| 3. La Técnica de Forcing | 61 |
| 3.1. Extensiones Genéricas | 62 |
| 3.2. $ZFE + \neg HC$ | 78 |
| 3.3. F_n de Cardinalidades Mayores | 87 |
| 3.4. $ZFE + HC$ | 91 |
| 4. Encajes y Aplicaciones | 95 |
| 4.1. Encajes | 95 |
| 4.2. Aplicaciones | 104 |
| 4.2.1. El Principio Maximal | 105 |

| | |
|--|------------|
| 4.2.2. La Consistencia de Diamante | 106 |
| 4.2.3. El Colapso de Lévy | 109 |
| 4.2.4. Forcing Aleatorio | 112 |
| Conclusiones | 115 |
| Bibliografía | 117 |
| Índice de Símbolos | 119 |
| Índice General | 121 |

Capítulo 0

Preliminares

Este capítulo tiene dos objetivos. El primero es establecer tanto la notación que se usará a lo largo del trabajo, como los conceptos, definiciones y resultados básicos sobre los que nos apoyaremos para desarrollar todo lo demás. El segundo objetivo consiste en presentar los axiomas de la teoría de conjuntos y algunas notaciones que nos serán de utilidad para trabajar con ellos.

0.1. Notación y Conceptos Básicos

A continuación listaremos los conceptos de los que partimos en este trabajo y que no definimos de manera explícita (por resultar familiares en el área). La mayoría de ellos se enseñan en un primer curso de teoría de conjuntos y se encuentran desarrollados de manera exhaustiva en [8], [9] y [11] o en cualquier libro básico de teoría de conjuntos.

- \emptyset - el conjunto vacío.
- \in - la relación de pertenencia.
- \subseteq - subconjunto.
- $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \exists, \forall$ - conectivos lógicos y cuantificadores.
- $x \cup y = \{z : z \in x \vee z \in y\}$ - la unión de dos conjuntos.
- $x \cap y = \{z : z \in x \wedge z \in y\}$ - la intersección de dos conjuntos.

- $x \setminus y = x \setminus y = x - y = \{z : z \in x \wedge z \notin y\}$ - la diferencia de dos conjuntos.
- $\bigcup \mathcal{F} = \{z : \exists Y \in \mathcal{F} (z \in Y)\}$ - la unión amalgamada.
- $\bigcap \mathcal{F} = \{z : \forall Y \in \mathcal{F} (z \in Y)\}$ - la intersección amalgamada.
- $\mathcal{P}(x) = \{y : y \subseteq x\}$ - el conjunto potencia de x .
- $\forall y (y \in x \rightarrow y \subset x)$ - x es un conjunto transitivo.
- R es una relación (transitiva, reflexiva, simétrica, que satisface la tricotomía, de equivalencia, bien fundada) sobre el conjunto A .
- R es un relación que (ordena parcialmente, ordena totalmente, bien ordena) al conjunto A .
- $f : X \rightarrow Y$ - f es una función de X a Y .
- $f[W] = f''W = \{y \in Y : \exists x \in W f(x) = y\}$ - la imagen de W bajo f .
- $f^{-1}Z = \{x \in X : f(x) \in Z\}$ la preimagen de Z bajo f .
- $dom(f)$ - dominio de una función f .
- $ran(f)$ el rango de una función f .
- $f \upharpoonright W$ - la restricción de una función f a un subconjunto W de su dominio.
- $\langle a_n : n \in \omega \rangle = (a_n)_{n \in \omega}$ - sucesión indicada por los números naturales.
- $\omega = \{0, 1, 2, \dots\}$ - el conjunto de los números naturales.
- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ - los conjuntos de números Naturales positivos, Enteros, Racionales, Reales y Complejos, respectivamente.
- **Ord** = **ON** - la clase de los ordinales . Usualmente, usaremos las primeras letras del alfabeto griego (α, β, γ , etc.), para denotar ordinales.
- **Card** - la clase de los cardinales . Por lo general, usaremos las letras κ, λ, θ , para denotar cardinales.
- $\aleph_0 = \omega_0$ - el primer cardinal transfinito.

- $\omega_1 = \aleph_1$ - el primer cardinal no numerable.
- **HC** - la hipótesis del continuo.
- **HCG** - la hipótesis del continuo generalizada .
- $\mathbf{V} = \{x : x = x\}$ - el universo, o la clase de todos los conjuntos.

0.1.1 Observación. Si bien en la axiomática de **ZFE** no existen las clases propias (tales como **Ord**, **Card**), nosotros hacemos uso de ellas solamente para abreviar ciertos enunciados que se pueden plantear formalmente dentro de **ZFE**. Por ejemplo, “ $x \in \mathbf{Ord}$ ” abrevia que x es un conjunto transitivo que está bien ordenado por \in ; y “ $A \subset \mathbf{Ord}$ ” abrevia que todos los elementos del conjunto A son ordinales.¹

0.2. Ordinales y Cardinales

En esta sección enlistamos una serie de definiciones y resultados útiles sobre ordinales y cardinales. Una demostración de cada resultado se puede encontrar en [14], o en algún otro libro de teoría de conjuntos.

0.2.1 Definición. ▪ z es un ordinal si y sólo si z es un conjunto transitivo y está bien ordenado por \in .

- β es un ordinal sucesor si y sólo si $\beta = \alpha + 1$, para algún α .
- β es un ordinal límite si y sólo si $\beta \neq 0$ y β no es un ordinal sucesor.
- β es un número natural si y sólo si cada $\alpha < \beta$ es 0 o un ordinal sucesor.

0.2.2 Definición. Un *cardinal* es un ordinal κ tal que para cada $\alpha < \kappa$ no existe una función inyectiva $f : \kappa \rightarrow \alpha$.

- κ^+ es el menor cardinal mayor que κ .
- κ es un cardinal sucesor si y sólo si $\kappa = \alpha^+$ para algún α .

¹En el apéndice de [12] se desarrollan resultados básicos de aritmética ordinal y cardinal siguiendo la axiomática de Bernays-Gödel que considera dos tipos de objetos, los conjuntos y las clases. Sin embargo, es un resultado importante que una proposición que involucra únicamente conjuntos, es demostrable en **ZFE** si y sólo si es demostrable en la axiomática de Bernays-Gödel.

- κ es un cardinal límite si y sólo si $\kappa > \omega$ y κ no es un cardinal sucesor.

0.2.3 Lema. Si una relación R bien ordena a A , existe un único $\alpha \in \mathbf{Ord}$ tal que $(A, R) \cong (\alpha, \in)$.

0.2.4 Definición. Si R bien ordena a A , $tipo(A, R)$ es el único $\alpha \in \mathbf{Ord}$ tal que $(A, R) \cong (\alpha, \in)$.

0.2.5 Definición. ▪ $\alpha + \beta = tipo(\{0\} \times \alpha \cup \{1\} \times \beta)$.

- $\alpha \cdot \beta = tipo(\beta \times \alpha)$.

Aquí se usa el orden lexicográfico (ver [14] página 29), para comparar parejas ordenadas de ordinales.

0.2.6 Definición. Sea α un ordinal y $C \subseteq \alpha$. Decimos que C es *cofinal en α* si para cada $\beta \in \alpha$ existe $\gamma \in C$ tal que $\beta \leq \gamma$. La *cofinalidad de α* , denotada por $cof(\alpha)$, es el menor ordinal γ tal que existe una función $f : \gamma \rightarrow \alpha$ cuyo rango es cofinal en α . Equivalentemente, $cof(\alpha) = \min\{|C| : C \text{ es un conjunto cofinal de } \alpha\}$.

0.2.7 Observación. Si α es un ordinal sucesor, digamos $\alpha = \beta + 1$, entonces el conjunto $\{\beta\} \subset \alpha$ es cofinal en α . Por lo tanto, $cof(\alpha) = 1$.

0.2.8 Definición. Un ordinal límite (o un cardinal) γ , se dirá:

- *regular*, si y sólo si $cof(\gamma) = \gamma$.
- *singular*, si y sólo si $cof(\gamma) < \gamma$.

0.2.9 Lema. Para ordinales α, γ, δ cualesquiera se tiene que:

1. $cof(cof(\gamma)) = cof(\gamma)$ (por tanto, $cof(\gamma)$ es regular).
2. Si γ es regular, entonces γ es un cardinal.
3. Si $\gamma = \aleph_\beta$, donde β es igual a 0 o es un ordinal sucesor, entonces γ es regular.
4. Si $\gamma = \aleph_\beta$, donde β es un ordinal límite, entonces $cof(\gamma) = cof(\beta)$.
5. Si $cof(\alpha) = \delta$, entonces existe una función estrictamente creciente $f : \delta \rightarrow \alpha$ cuyo rango es cofinal en α .

6. Si $f : \delta \rightarrow \alpha$ es una función estrictamente creciente cuyo rango es cofinal en α , entonces $\text{cof}(\delta) = \text{cof}(\alpha)$.

0.2.10 Teorema. Sea θ cualquier cardinal.

1. Si θ es regular, y \mathcal{F} es una familia de conjuntos tal que $|\mathcal{F}| < \theta$, y para cada $S \in \mathcal{F}$, $|S| < \theta$, entonces $|\bigcup \mathcal{F}| < \theta$.
2. Si $\text{cof}(\theta) = \lambda < \theta$, entonces existe una familia \mathcal{F} de subconjuntos de θ tal que $|\mathcal{F}| = \lambda$ y $\bigcup \mathcal{F} = \theta$, y para cada $S \in \mathcal{F}$, $|S| < \theta$.

0.2.11 Definición. ■ κ es *débilmente inaccesible* si y sólo si κ es un cardinal regular límite.

- (AE) κ es *fuertemente inaccesible* si y sólo si $\kappa > \omega$, κ es regular y para cada $\lambda < \kappa$ ($2^\lambda < \kappa$).

0.2.12 Lema. [de König](AE) Si κ es infinito y $\text{cof}(\kappa) \leq \lambda$, entonces $\kappa^\lambda > \kappa$.

0.2.13 Corolario. (AE) Si $\lambda \geq \omega$, entonces $\text{cof}(2^\lambda) > \lambda$.

0.2.14 Definición. Sea γ cualquier ordinal límite y fijemos $A \subseteq \gamma$. Diremos que

- A es *no acotado* en γ si y sólo si $\text{sup}(A) = \gamma$,
- A es *cerrado* en γ si y sólo si para cada ordinal límite $\nu \leq \gamma$ ocurre que $(\text{sup}(A \cap \nu) = \nu \rightarrow \nu \in A)$,
- A es *club* en γ si y sólo si A es cerrado y no acotado.

Además, diremos que $X \subseteq \gamma$ es un conjunto *estacionario* en γ si X intersecta a cada subconjunto club de γ .

0.3. Los Axiomas de ZFE

Ahora presentaremos los axiomas de la teoría de primer orden **ZFE**. Las siglas son por **Z**ermelo y **F**raenkel (quienes formularon los axiomas), y por el Axioma de **E**lección. En [8], [9], [11] y [15] se postula un axioma de existencia. Nosotros seguiremos el enfoque de [10] y [14] donde se toma como un hecho de la lógica que nuestro universo es no vacío (i. e. $\exists x (x = x)$), por tanto, no listaremos esto como axioma. Enunciamos algunos axiomas con variables libres para evitar que sean demasiado engorrosos, pero realmente estamos considerando las clausuras universales de éstos.

1 Axioma (Extensión).

$$\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y.$$

2 Axioma (Fundación).

$$\exists y (y \in x) \rightarrow \exists y (y \in x \wedge \neg \exists z (z \in x \wedge z \in y)).$$

3 Axioma (Comprensión). Para cada fórmula φ , sin y libre,

$$\forall v \exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow x \in v \wedge \varphi(x)).$$

4 Axioma (del Par).

$$\exists z (x \in z \wedge y \in z).$$

5 Axioma (de la Unión).

$$\exists A \forall Y \forall x (x \in Y \wedge Y \in \mathcal{F} \rightarrow x \in A).$$

6 Axioma (de Reemplazo). Para cada fórmula φ , sin B libre,

$$\forall x \in A \exists! y \varphi(x, y) \rightarrow \exists B \forall x \in A \exists y \in B \varphi(x, y).$$

Los últimos tres axiomas se pueden escribir de manera más sencilla utilizando algunas nociones conjuntistas. Empleando los axiomas 1, 3, 4 y 5, definamos \subseteq (subconjunto), \emptyset (también escrito como 0; el conjunto vacío), s (la función ordinal sucesor), \cap (intersección), y $SING(x)$ (x es un conjunto singular; es decir, x tiene un único elemento), de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} x \subseteq y &\Leftrightarrow \forall z (z \in x \rightarrow z \in y) \\ x = \emptyset &\Leftrightarrow \forall z (z \notin x) \\ y = s(x) &\Leftrightarrow \forall z (z \in y \leftrightarrow z \in x \vee z = x) \\ y = v \cap w &\Leftrightarrow \forall x (x \in y \leftrightarrow x \in v \wedge x \in w) \\ SING(x) &\Leftrightarrow \exists y \in x \forall z \in x (z = y).^2 \end{aligned}$$

²Notemos que $SING(x)$ no se refiere al conjunto cuyo único elemento es x , más bien, $SING(x)$ lo que nos dice es que x es un conjunto que tiene exactamente un elemento.

7 Axioma (Infinito).

$$\exists x (\emptyset \in x \wedge \forall y \in x (s(y) \in x)).$$

8 Axioma (del conjunto Potencia, o de Potencia).

$$\exists y \forall z (z \subseteq x \rightarrow z \in y).$$

9 Axioma (de Elección, o AE).³

$$\emptyset \notin F \wedge \forall x \in F \forall y \in F (x \neq y \rightarrow x \cap y = \emptyset) \rightarrow \exists C \forall x \in F (SING(C \cap x)).$$

Cualquiera de los libros citados al principio de esta sección nos ayuda a entender mejor los axiomas, en especial para Extensión, Comprensión, Par y Unión, se puede consultar [15].

En general, cuando hacemos demostraciones, no mencionamos explícitamente (junto con las hipótesis), cuáles axiomas estamos utilizando. Sin embargo, debido a que estamos interesados en la discusión de diversos modelos y pruebas de independencia, será de vital importancia ir viendo qué axiomas se van utilizando en determinados lugares durante el desarrollo de nuestro trabajo. Para eso, introducimos la siguiente notación:

0.3.1 Notación.

★ **ZFE** = Axiomas 1 - 9.⁴

★ **ZF** = Axiomas 1 - 8.

★ **ZE** y **Z** son **ZFE** y **ZF**, respectivamente, pero **SIN** el Axioma de Reemplazo.⁵

³Denotado también como **AC** por sus siglas en inglés (axiom of choice).

⁴**ZFE** se denota comúnmente como **ZFC**.

⁵**ZE** se denota también como **ZC**.

- ★ X^- denota a X SIN el Axioma de Fundación (por ejemplo, ZF^- es ZF SIN el Axioma de Fundación).
- ★ $X-P$ denota a X SIN el Axioma de Potencia.
- ★ $X-Inf$ denota a X SIN el Axioma de Infinito.

Cuando en lo sucesivo aparezca algún lema, teorema, definición, etc., con alguna de las teorías anteriores, significa que estamos trabajando en dicha teoría y, por tanto, no hacemos uso de los axiomas excluidos. Por ejemplo, si tenemos “**Lema ($ZF^- - P$)**”, significa que estamos trabajando en la teoría $ZF^- - P$, con lo cual, este resultado se obtiene sin el uso de los Axiomas de Fundación y Potencia.

Una vez que nos hemos puesto de acuerdo con la notación, conceptos y resultados básicos necesarios, estamos listos para iniciar con el estudio de los conjuntos bien fundados.

Capítulo 1

Los Conjuntos Bien Fundados

La clase de los conjuntos bien fundados nos dotará de nuestra primera prueba de consistencia (ver Teorema 2.2.17, página 43), de ahí la necesidad de estudiar sus propiedades. De esto nos ocuparemos en la primera sección. Posteriormente definiremos a las relaciones bien fundadas en la segunda sección, y estudiaremos algunas de sus propiedades que nos permitirán presentar en la tercera sección el Teorema 1.3.1 (página 19), que nos muestra las consecuencias que tiene para el universo \mathbf{V} asumir el A. de Fundación. En la última sección presentamos los Teoremas de inducción y recursión transfinita sobre relaciones bien fundadas (ver 1.4.6, página 21 y 1.4.7, página 21, respectivamente) y finalizamos con el Teorema del colapso de Mostowski (ver 1.4.15, página 25), que nos dice qué condiciones debemos pedirle a una relación \mathbf{R} sobre una clase \mathbf{A} (recordar la Observación 0.1.1, en la página 3), para obtener un isomorfismo hacia una clase transitiva \mathbf{M} con la \in , resultado que es indispensable para poder obtener un modelo numerable y transitivo de una buena parte de \mathbf{ZFE} (ver Corolario 2.5.5, página 57). Esto último se hará más claro conforme vayamos avanzando en el Capítulo .

1.1. Propiedades de los conjuntos bien fundados

1.1.1 Definición. Recursivamente definimos $R(\alpha)$ para $\alpha \in \mathbf{Ord}$ de la siguiente manera:

(a) $R(0) = 0$,

- (b) $R(\alpha) = \mathcal{P}(R(\beta))$ cuando α es un ordinal sucesor, a saber, $\alpha = \beta + 1$, para algún $\beta \in \mathbf{Ord}$,
- (c) $R(\alpha) = \bigcup_{\xi < \alpha} R(\xi)$ cuando α es un ordinal límite.
- (d) $\mathbf{BF} = \bigcup \{R(\alpha) : \alpha \in \mathbf{Ord}\}$ es la clase de los conjuntos bien fundados.¹ Así, si $x \in \mathbf{BF}$, diremos que x es un conjunto bien fundado.

El siguiente Lema nos muestra que $R(\alpha)$ es transitivo, una propiedad importante cuando trabajamos con modelos (ver Lema 2.2.10 en la página 40). En particular, más adelante estaremos interesados en mirar a $R(\alpha)$ como un modelo de ciertos axiomas de **ZFE** (ver Teorema 2.4.8 en la página 55).

1.1.2 Lema. Para cada $\alpha \in \mathbf{Ord}$:

- (a) $R(\alpha)$ es transitivo (i. e. $x \in R(\alpha) \Rightarrow x \subset R(\alpha)$),
- (b) Para todo $\xi \leq \alpha$ ($R(\xi) \subset R(\alpha)$).

Demostración. Se probarán (a) y (b) por inducción transfinita sobre α . Si $\alpha = 0$, entonces (a) y (b) se cumplen trivialmente.

Supongamos que el lema se cumple para todo $\beta < \alpha$ y veamos que se cumple para α .

Primer caso: α es un ordinal límite. Así, $R(\alpha) = \bigcup_{\xi < \alpha} R(\xi)$ y luego, si $\xi < \alpha$ entonces por la hipótesis inductiva $R(\xi) \subset \bigcup_{\lambda < \alpha} R(\lambda) = R(\alpha)$. Por lo tanto se cumple (b). Para obtener (a), sea $x \in R(\alpha)$. así, existe $\xi < \alpha$ tal que $x \in R(\xi)$. Luego, por hipótesis inductiva, $R(\xi)$ es transitivo, entonces $x \subset R(\xi) \subset R(\alpha)$. Por lo tanto, $R(\alpha)$ es transitivo.

Segundo caso: $\alpha = \beta + 1$. Así, por la hipótesis inductiva $R(\beta)$ es transitivo. Sea $x \in \mathcal{P}(R(\beta)) = R(\alpha)$. Luego, $x \subset R(\beta)$. Basta ver que $R(\beta) \subset \mathcal{P}(R(\beta))$. Sea $y \in R(\beta)$, entonces $y \subset R(\beta)$ y así $y \in \mathcal{P}(R(\beta))$. Entonces $R(\beta) \subset \mathcal{P}(R(\beta))$. Por lo tanto, $R(\alpha)$ es transitivo y, para todo $\beta < \alpha$, $R(\beta) \subset R(\alpha)$. \blacktriangle

1.1.3 Observación. Si $x \in \mathbf{BF}$, el menor α para el cual $x \in R(\alpha)$ debe ser un ordinal sucesor por la definición 1.1.1 (c).

1.1.4 Definición. Si $x \in \mathbf{BF}$, $\text{rank}(x)$ es el menor β tal que $x \in R(\beta + 1)$.

¹En la bibliografía se conoce como **WF** por sus siglas en inglés (well founded sets).

1.1.5 Observación. si $\beta = \text{rank}(x)$, entonces $x \in R(\beta + 1) = \mathcal{P}(R(\beta))$ y por tanto $x \subset R(\beta)$, $x \notin R(\beta)$ y para todo $\alpha > \beta$, $x \in R(\alpha)$.

1.1.6 Lema. Para cualquier α , $R(\alpha) = \{x \in \mathbf{BF} : \text{rank}(x) < \alpha\}$

Demostración. Para $x \in \mathbf{BF}$, $x \in R(\alpha) \Leftrightarrow \exists \beta < \alpha (x \in R(\beta + 1)) \Leftrightarrow \text{rank}(x) \leq \beta < \alpha$. ▲

1.1.7 Lema. Si $y \in \mathbf{BF}$, entonces

(a) $\forall x \in y (x \in \mathbf{BF} \wedge \text{rank}(x) < \text{rank}(y))$, y

(b) $\text{rank}(y) = \sup\{\text{rank}(x) + 1 : x \in y\}$.

Demostración. (a) Sea $x \in y$, como $y \in \mathbf{BF} \exists \beta \in \mathbf{Ord}$ tal que $y \in R(\beta)$. Como $R(\beta)$ es transitivo, $y \subset R(\beta)$ y así $x \in R(\beta)$. Además, sea $\beta_0 = \text{rank}(y)$, así $y \in R(\beta_0 + 1)$ y por tanto $y \subset R(\beta_0)$, y por el Lema 1.1.6 $\text{rank}(x) < \beta_0 = \text{rank}(y)$.

(b) Sea $\alpha = \sup\{\text{rank}(x) + 1 : x \in y\}$. Por (a), $\alpha \leq \text{rank}(y)$. Además, para cada $x \in y$, $\text{rank}(x) < \alpha$, por el Lema 1.1.6 $y \subset R(\alpha)$. Así $y \in R(\alpha + 1)$ y por tanto $\text{rank}(y) \leq \alpha$. ▲

El Lema que acabamos de probar nos dice que la clase \mathbf{BF} es transitiva, y podemos pensar que los elementos $y \in \mathbf{BF}$ han sido construidos por recursión transfinita, usando conjuntos bien fundados de rango más pequeño.

1.1.8 Observación.

- $x \in \mathbf{BF}(x \in x) \rightarrow \text{rank}(x) < \text{rank}(x)$. De aquí que si existe un x tal que $x \in x$ entonces $x \notin \mathbf{BF}$.
- $x, y \in \mathbf{BF}(x \in y \wedge y \in x) \rightarrow \text{rank}(x) < \text{rank}(y) < \text{rank}(x)$. Por lo tanto, si existen x, y tales que $(x \in y \wedge y \in x)$ entonces $(x \notin \mathbf{BF} \vee y \notin \mathbf{BF})$

El siguiente Lema muestra que cada ordinal es bien fundado y además, es su propio rango. Con lo primero, se tiene que $\mathbf{Ord} \subset \mathbf{BF}$, es decir, \mathbf{BF} es una clase propia.

1.1.9 Lema. (a) $\forall \alpha \in \mathbf{Ord} (\alpha \in \mathbf{BF} \wedge \text{rank}(\alpha) = \alpha)$

(b) $\forall \alpha \in \mathbf{Ord}(R(\alpha) \cap \mathbf{Ord} = \alpha)$.

Demostración. (a) Por inducción transfinita sobre α , supongamos que (a) se cumple para cada $\beta < \alpha$. Sea $\beta < \alpha$, así $\beta \in \mathbf{BF}$ y $rank(\beta) = \beta$, entonces $\beta \in R(\beta+1) \subset R(\alpha)$. De aquí que $\alpha \subset R(\alpha)$, luego $\alpha \in \mathcal{P}(R(\alpha)) = R(\alpha+1)$. Por lo tanto, $\alpha \in \mathbf{BF}$. Además, $rank(\alpha) = \sup\{rank(x) + 1 : x \in y\} = \sup\{\beta + 1 : \beta < \alpha\} = \alpha$. Por lo tanto, (a) se cumple para α .

(b) Se sigue de que $R(\alpha) = \{x \in \mathbf{BF} : rank(x) < \alpha\}$ y (a). Es decir, $R(\alpha) \cap \mathbf{Ord} = \{\beta \in \mathbf{Ord} : \beta < \alpha\} = \alpha$. \blacktriangle

A continuación veremos que \mathbf{BF} contiene no sólo a los ordinales sino también a los conjuntos que surgen por construcciones matemáticas usuales, ya que \mathbf{BF} es cerrado bajo estas construcciones.

1.1.10 Lema. (a) Si $x \in \mathbf{BF}$, entonces $\bigcup x$, $\mathcal{P}(x)$, $\{x\}$ están en \mathbf{BF} y el rango de estos conjuntos es menor o igual que $rank(x) + \omega$.

(b) Si $x, y \in \mathbf{BF}$ entonces $x \times y$, $x \cup y$, $x \cap y$, $\{x, y\}$, (x, y) y ${}^y x$ están en \mathbf{BF} , y el rango de estos conjuntos es menor o igual que

$$\max\{rank(x), rank(y)\} + \omega.$$

Demostración. (a) Sea $\alpha = rank(x)$, entonces $x \subset R(\alpha)$ (ya que $x \in R(\alpha + 1) = \mathcal{P}(R(\alpha))$), así $\mathcal{P}(x) \subset \mathcal{P}(R(\alpha)) = R(\alpha + 1)$, y luego $\mathcal{P}(x) \in \mathcal{P}(R(\alpha + 1)) = R(\alpha + 2)$. Además, como $\mathcal{P}(x) \subset R(\alpha + 1)$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(x)) \subset \mathcal{P}(R(\alpha + 1)) = R(\alpha + 2)$. Así, $\{x\} \in R(\alpha + 2)$ (ya que $\{x\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(x))$). Sea $a \in \bigcup x$, entonces existe un $y \in x$ tal que $a \in y$. Además $rank(a) < rank(y) < rank(x) = \alpha$, esto implica que $a \in R(rank(y)) \subset R(\alpha)$. Por lo tanto, $a \in R(\alpha)$. Luego, $\bigcup x \subset R(\alpha)$, y de aquí que $\bigcup x \in R(\alpha + 1)$.

(b) Sea $\alpha = \max\{rank(x), rank(y)\}$, entonces $x \in R(\alpha + 1)$, $y \in R(\alpha + 1)$ y por tanto, $\{x, y\} \in \mathcal{P}(R(\alpha + 1)) = R(\alpha + 2)$. También, si $x, y \subset R(\alpha + 1)$, entonces $(x \cup y)$ y $(x \cap y)$ son subconjuntos de $R(\alpha + 1)$ y por tanto, $(x \cup y), (x \cap y) \in R(\alpha + 2)$. Además, $\{x\} \in R(\alpha + 2)$ y así $(x, y) \in \mathcal{P}(R(\alpha + 2)) = R(\alpha + 3)$. Cada pareja ordenada de $x \cup y$ es elemento de $R(\alpha + 3)$, así $x \times y \subset R(\alpha + 3)$ y ${}^y x \subset R(\alpha + 3)$, por lo tanto, $x \times y \in R(\alpha + 4)$ y ${}^y x \in R(\alpha + 4)$. \blacktriangle

1.1.11 Observación. Usando el Lema anterior, no resulta complicado demostrar que los conjuntos $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ y \mathbb{C} son elementos de $R(\omega + \omega)$.

1.1.12 Lema. $\forall x(x \in \mathbf{BF} \leftrightarrow x \subset \mathbf{BF})$.

Demostración. $x \in \mathbf{BF} \rightarrow x \subset \mathbf{BF}$ ya que \mathbf{BF} es transitiva. Supongamos ahora que $x \subset \mathbf{BF}$, y sea $\alpha = \sup\{\text{rank}(y) + 1 : y \in x\}$. Así $x \subset R(\alpha) = \{y \in \mathbf{BF} : \text{rank}(y) < \alpha\}$, entonces $x \in R(\alpha + 1)$. \blacktriangle

1.1.13 Observación. Sea \mathbf{M} cualquier clase tal que $\forall x(x \subset \mathbf{M} \rightarrow x \in \mathbf{M})$. No es difícil probar por inducción transfinita que para cada $\alpha \in \mathbf{Ord}$ ($R(\alpha) \subset \mathbf{M}$). Luego, si $y \in \mathbf{BF}$, existe $\alpha \in \mathbf{Ord}$ tal que $y \in R(\alpha) \subset \mathbf{M}$. Por lo tanto, $\mathbf{BF} \subseteq \mathbf{M}$. Esto nos dice que \mathbf{BF} es la clase más pequeña que verifica el Lema 1.1.12.

1.1.14 Lema. $\forall n \in \omega (|R(n)| < \omega)$.

Demostración. Por inducción sobre n .

- $R(0) = 0$.
- Supongamos que $\forall m < n |R(m)| < \omega$. Sea $n \in \omega$ mayor que 0, entonces $\exists m \in \omega$ tal que $n = m + 1$. $|R(n)| = |R(m + 1)| = |\mathcal{P}(R(m))| = 2^{|R(m)|} < \omega$. \blacktriangle

1.1.15 Lema. $|R(\omega)| = \omega$.

Demostración. Usando **AE**, se tiene que la unión numerable de conjuntos numerables es numerable. Con esto y el Lema 1.1.14, se obtiene que $R(\omega)$ es numerable. Si queremos evitar **AE**, podemos construir una función inyectiva de $R(\omega)$ en ω . Para esto, primero debemos bien ordenar a cada $R(n)$ con $n \in \omega$. Esto se consigue por inducción sobre n . Si suponemos que tenemos un buen orden para $R(n)$, como $R(n + 1) = \mathcal{P}(R(n))$, identificamos a $\mathcal{P}(R(n))$ con ${}^{R(n)}2$, el conjunto de las funciones de $R(n)$ en 2 (esto se puede hacer ya que $|\mathcal{P}(R(n))| = |{}^{R(n)}2|$), y lo ordenamos lexicográficamente, lo cual resulta en un buen orden para $R(n + 1)$. Ahora ya sabemos que para cada $n \in \omega$ $R(n)$ es finito y se puede bien ordenar. Entonces podemos ver a cada $R(n)$ como $R(n) = \{a_{n,1}, a_{n,2}, \dots, a_{n,|R(n)|}\}$. Definamos ahora para cada $n \in \omega \setminus \{0\}$ a

$$f_n = \left\{ \left(a_{n,1}, 1 + \sum_{i=0}^{n-1} |R(i)| \right), \left(a_{n,2}, 2 + \sum_{i=0}^{n-1} |R(i)| \right), \dots, \left(a_{n,|R(n)|}, |R(n)| + \sum_{i=0}^{n-1} |R(i)| \right) \right\}.$$

Cada una de estas funciones f_n es una biyección de $R(n)$ a cierto segmento de los naturales. Si ahora definimos a $f : R(\omega) \rightarrow \omega$ como sigue:

$$\begin{aligned} 0 &\mapsto 0 \\ t &\mapsto f_{\text{rank}(t)}(t), \end{aligned}$$

es fácil verificar que f es inyectiva. Con lo cual se obtiene que $R(\omega)$ es numerable. \blacktriangle

1.1.16 Notación. Por la importancia que posee, como se verá más adelante (ver 2.4.6, página 54), al conjunto $R(\omega)$ también lo denotaremos como HF , por las iniciales de hereditariamente finitos.

Las cardinalidades de los conjuntos $R(\alpha)$ crecen de manera exponencial: $|R(\omega)| = \omega$, $|R(\omega + 1)| = 2^\omega$, $|R(\omega + 2)| = 2^{2^\omega}$, etcétera. Para ser más precisos demos la siguiente definición.

1.1.17 Definición (AE). \beth_α (léase beth), se define por recursión transfinita sobre $\alpha \in \mathbf{Ord}$ de la siguiente manera:

1. $\beth_0 = \omega$
2. $\beth_{\alpha+1} = 2^{\beth_\alpha}$
3. Para γ límite, $\beth_\gamma = \sup\{\beth_\alpha : \alpha < \gamma\}$.

1.1.18 Lema (AE). $|R(\omega + \alpha)| = \beth_\alpha$

Demostración. Por inducción transfinita sobre α . Si $\alpha = 0$, $|R(\omega + 0)| = |R(\omega)| = \omega = \beth_0$. Ahora supongamos que el enunciado se cumple para cada $\beta < \alpha$ y veamos que se cumple para α .

- Supongamos que $\alpha = \beta + 1$. Entonces $|R(\omega + \beta)| = \beth_\beta$ con lo cual $|R(\omega + \alpha)| = |\mathcal{P}(R(\omega + \beta))| = 2^{\beth_\beta} = \beth_{\beta+1} = \beth_\alpha$.
- Supongamos que α es límite. $R(\omega + \alpha) = \bigcup_{\beta < \alpha} R(\omega + \beta)$. Entonces $|R(\omega + \alpha)| = |\bigcup_{\beta < \alpha} R(\omega + \beta)| = |\sup\{R(\omega + \beta) : \beta < \alpha\}| = \sup\{|R(\omega + \beta)| : \beta < \alpha\} = \sup\{\beth_\beta : \beta < \alpha\} = \beth_\alpha$.

\blacktriangle

1.1.19 Lema (AE). (a) Todo grupo es isomorfo a un grupo en **BF**.

(b) Todo espacio topológico es homeomorfo a un espacio topológico en **BF**.

Demostración.

(a) Formalmente, un grupo es una pareja (G, \cdot) donde $\cdot : G \times G \rightarrow G$. Por los Lemas 1.1.10 y 1.1.12 se cumple que $(G, \cdot) \in \mathbf{BF} \leftrightarrow G \in \mathbf{BF} \leftrightarrow G \subset \mathbf{BF}$. Sea (G, \cdot) un grupo, sea $\alpha = |G|$ y sea $f : \alpha \rightarrow G$ una biyección. Definimos la operación $\circ : \alpha \times \alpha \rightarrow \alpha$ por $\xi \circ \eta = f^{-1}(f(\xi) \cdot f(\eta))$. Se verifica inmediatamente que (α, \circ) es grupo y $(\alpha, \circ) \cong (G, \cdot)$

(b) Sea (X, τ) un espacio topológico, sea $\beta = |X|$ y $g : \beta \rightarrow X$ una biyección. Definimos $a := \{g^{-1}[D] : D \in \tau\}$. De esta manera, también es fácil verificar que (β, a) es un espacio topológico y que $(\beta, a) \cong (X, \tau)$. \blacktriangle

Este Lema no puede ser probado sin **AE** (Ver (25) página 149 de [13]).

1.2. Relaciones Bien Fundadas

El concepto de relación bien fundada generaliza la noción de buen orden. Esta sección finaliza con un resultado (ver Lema 1.2.8, página 18) que nos dice que un conjunto x es bien fundado si y sólo si la pertenencia \in resulta ser bien fundada en el mínimo conjunto transitivo (ver Definición 1.2.5, página 16) que contiene a x . Las relaciones bien fundadas resultan importantes para resultados posteriores, verbigracia los teoremas de inducción y recursión transfinita (ver página 1.4.6).

1.2.1 Definición (ZF⁻). Una relación R es bien fundada en un conjunto A si y sólo si

$$\forall X \subset A [X \neq \emptyset \rightarrow \exists y \in X (\neg \exists z \in X (zRy))].$$

Tal y es llamado *R-minimal* en X .

Así, R es bien fundada en A si y sólo si cada subconjunto no vacío de A tiene un elemento *R-minimal*.

1.2.2 Observación. ■ En particular, si R es un orden total en A , entonces R es bien fundada en A si y sólo si R bien ordena a A .

- Como no pedimos que $R \subset A \times A$, entonces si R es bien fundada en A y $B \subset A$, entonces R es bien fundada en B .

- Si R no es un orden total, entonces el X de la Definición 1.2.1 podría tener más de un elemento R -minimal. Por ejemplo, la relación vacía 0 , es bien fundada en cualquier A y cualquier elemento $y \in X \subset A$ es 0 -minimal en X .

El siguiente lema nos empieza a dar cuenta del vínculo entre las relaciones bien fundadas y los conjuntos bien fundados.

1.2.3 Lema (\mathbf{ZF}^-). Si $A \in \mathbf{BF}$, entonces \in es bien fundada en A .

Demostración. Sea $0 \neq X \subset A \in \mathbf{BF}$. Tomamos $\alpha = \min\{\text{rank}(y) : y \in X\}$ y sea $y \in X$ tal que $\text{rank}(y) = \alpha$. Supongamos que existe $z \in X$ tal que $z \in y$. Entonces $z \in \mathbf{BF}$ y $\text{rank}(z) < \text{rank}(y)$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto y es \in -minimal en X . ▲

El recíproco no es cierto. Por ejemplo, si $x = \{y\}$, $y = \{x\}$ y $x \neq y$, entonces $y \notin \mathbf{BF}$ (ya que $(x \in y \wedge y \in x) \rightarrow \text{rank}(x) < \text{rank}(y) < \text{rank}(x)$). Pero \in es bien fundada en y ya que para cada $W \subset y$ no vacío, x es \in -minimal en W . Sin embargo, como un recíproco parcial tenemos:

1.2.4 Lema (\mathbf{ZF}^-). Si A es transitivo y \in es bien fundada en A entonces $A \in \mathbf{BF}$.

Demostración. Dadas las hipótesis, queremos ver que $A \in \mathbf{BF}$, pero como $A \in \mathbf{BF} \leftrightarrow A \subset \mathbf{BF}$, es suficiente mostrar que $A \subset \mathbf{BF}$. Supongamos que $A \not\subset \mathbf{BF}$. Sea $X = A \setminus \mathbf{BF} \neq 0$ y sea $y \in$ -minimal en X . Si $z \in y$, entonces $z \notin X$, pero como A es transitiva ($y \in A \rightarrow y \subset A$), $z \in A$, entonces $z \in \mathbf{BF}$. Así, $y \subset \mathbf{BF}$ y entonces $y \in \mathbf{BF}$, contradicción. Por lo tanto, $A \subset \mathbf{BF}$ y se tiene el resultado. ▲

Ahora mostraremos que A es un conjunto bien fundado si \in es bien fundada en la cerradura transitiva de A , que es el conjunto transitivo más pequeño que tiene a A como subconjunto. La siguiente definición precisa este concepto.

1.2.5 Definición (\mathbf{ZF}^- -P). 1. Por recursión sobre n definimos

- $\bigcup^0 A = A$.
- $\bigcup^{n+1} A = \bigcup(\bigcup^n A)$.

2. $\text{ctr}(A) = \bigcup\{\bigcup^n A : n \in \omega\}$. $\text{ctr}(A)$ se dirá la cerradura transitiva de A .

Observemos que $ctr(A) = A \cup \bigcup A \cup \bigcup^2 A \cup \dots$. Es decir, $ctr(A)$ tiene como elementos a los elementos de A , los elementos de los elementos de A , etc. Veamos a continuación algunas propiedades básicas de la clausura transitiva de un conjunto.

1.2.6 Lema (ZF⁻-P). (a) $A \subset ctr(A)$.

(b) $ctr(A)$ es transitivo.

(c) Si $A \subset T$ y T es transitivo, entonces $ctr(A) \subset T$.

(d) Si A es transitivo, entonces $ctr(A) = A$.

(e) Si $x \in A$, entonces $ctr(x) \subset ctr(A)$.

(f) $ctr(A) = A \cup \bigcup \{ctr(x) : x \in A\}$.

Demostración.

(a) Es inmediato de la definición.

(b) Sea $y \in ctr(A)$, entonces existe $n \in \omega$ tal que $y \in \bigcup^n A$, entonces $y \subset \bigcup(\bigcup^n A) = \bigcup^{n+1} A \subset ctr(A)$.

(c) Por inducción sobre n veamos que $\forall n \in \omega (\bigcup^n A \subset T)$. $\bigcup^0 A = A \subset T$. Supongamos que para $m \in \omega (\bigcup^m A \subset T)$, como T es transitivo, $\forall x \in \bigcup^m A (x \subset T)$, entonces $\bigcup(\bigcup^m A) = \bigcup^{m+1} A \subset T$. Por lo tanto, $ctr(A) \subset T$.

(d) Por (a), $A \subset ctr(A)$, además por (c), como A es transitivo y $A \subset A$ entonces $ctr(A) \subset A$.

(e) $x \in A \rightarrow x \in ctr(A) \rightarrow x \subset ctr(A)$, usando (c) $ctr(x) \subset ctr(A)$.

(f) Sea $T = A \cup \bigcup \{ctr(x) : x \in A\}$, veamos que T es transitivo. Si $z \in T$, entonces:

1. $z \in A \rightarrow z \subset ctr(z) \subset \bigcup \{ctr(x) : x \in A\} \subset T$.

2. $z \in \bigcup \{ctr(x) : x \in A\} \rightarrow \exists x \in A (z \in ctr(x))$ y por tanto $z \subset ctr(x) \subset T$.

Así, por (c) $ctr(A) \subset T$ y además, por (a), $A \subset ctr(A)$ y por (e), $\forall x \in A$ ($ctr(x) \subset ctr(A)$), esto implica que $\bigcup\{ctr(x) : x \in A\} \subset ctr(A)$. Por lo tanto, $T \subset ctr(A)$. Y con esto, ya tenemos la igualdad. \blacktriangle

El siguiente resultado caracteriza a los elementos de $R(\omega)$ como conjuntos bien fundados con clausura transitiva finita.

1.2.7 Lema (\mathbf{ZF}^-). $x \in R(\omega)$ si y sólo si $x \in \mathbf{BF}$ y $ctr(x)$ es finita.

De manera más general, tenemos la equivalencia entre (a) y (b) del siguiente lema.

1.2.8 Lema (\mathbf{ZF}^-). Para cualquier conjunto A , son equivalentes:

- (a) $A \in \mathbf{BF}$.
- (b) $ctr(A) \in \mathbf{BF}$.
- (c) \in es bien fundada en $ctr(A)$.

Demostración. (a) \rightarrow (b): Si $A \in \mathbf{BF}$, entonces veamos que para cada $n \in \omega$ ($\bigcup^n A \in \mathbf{BF}$). Por inducción sobre n . $\bigcup^0 A = A \in \mathbf{BF}$. Supongamos que $\bigcup^n A \in \mathbf{BF}$, como \mathbf{BF} es cerrado bajo \bigcup , entonces $\bigcup^{n+1} A = \bigcup(\bigcup^n A) \in \mathbf{BF}$. Por lo tanto, $ctr(A) \subset \mathbf{BF}$ y esto implica que $ctr(A) \in \mathbf{BF}$.

(b) \rightarrow (c): Como $ctr(A) \in \mathbf{BF}$, por el Lema 1.2.3, \in es bien fundada en $ctr(A)$.

(c) \rightarrow (a): Sabemos que $ctr(A)$ es transitivo, además por (c), \in es bien fundada en $ctr(A)$, luego, por el Lema 1.2.4 se tiene que $ctr(A) \in \mathbf{BF}$. Así $A \subset ctr(A) \subset \mathbf{BF} \rightarrow A \in \mathbf{BF}$. \blacktriangle

La definición de \mathbf{BF} hace uso del A. de Potencia, con lo cual, la equivalencia (c) es útil si se quiere dar una presentación de \mathbf{BF} trabajando en $\mathbf{ZF}^- - \mathbf{P}$.

1.3. El Axioma de Fundación

Así como lo enunciamos en la sección 0.3 (página 5), el A. de Fundación establece que:

$$\forall x[\exists y(y \in x) \rightarrow \exists y(y \in x \wedge \neg\exists z(z \in x \wedge z \in y))].$$

Equivalentemente, $x \neq 0 \rightarrow \exists y \in x(x \cap y = 0)$, es decir, cada subconjunto no vacío tiene un elemento \in -minimal.

El siguiente teorema nos dice que aceptar el A. de Fundación, es equivalente a restringir nuestro universo a la clase de los conjuntos bien fundados.

1.3.1 Teorema (\mathbf{ZF}^-). Son equivalentes:

- (a) El Axioma de Fundación.
- (b) $\forall A$ (\in es bien fundada en A).
- (c) $\mathbf{V} = \mathbf{BF}$.

Demostración. (a) \leftrightarrow (b). Es inmediato de la definición de relación bien fundada.

(b) \rightarrow (c). Sea $B \in \mathbf{V}$, por (b), para cada conjunto A , \in es bien fundada en A , en particular, \in es bien fundada en $ctr(B)$, luego, por el Lema 1.2.8, $B \in \mathbf{BF}$.

(c) \rightarrow (b). Sea $A \in \mathbf{V}$, luego $A \in \mathbf{BF}$. Por el Lema 1.2.3 \in es bien fundada en A . ▲

Recordando la Observación 1.1.11 (página 13), si estamos convencidos de que todas las matemáticas ocurren en \mathbf{BF} , tiene sentido adoptar como axioma “ $\mathbf{V} = \mathbf{BF}$ ”. No es que realmente creamos que \mathbf{V} es justamente \mathbf{BF} , simplemente estamos acotando el dominio de nuestro discurso a la clase \mathbf{BF} . En este sentido el A. de Fundación es distinto a los demás, puesto que no tiene aplicación en las matemáticas ordinarias, salvo por excluir ciertas patologías como el hecho de que no existe algún $x \in \mathbf{BF}$ tal que $x \in x$ (ver Observación 1.1.8, página 11).

1.4. Inducción y Recursión Sobre Relaciones Bien Fundadas

Si R es una relación bien fundada sobre el conjunto A (Definición 1.2.1), una prueba por inducción transfinita sobre R es una que establezca $\forall x \in A \phi(x)$ y esto puede hacerse probando que para cada $x \in A$

$$\forall y \in A(yRx \rightarrow \phi(y)) \rightarrow \phi(x).$$

Al cumplirse esto último, podemos garantizar que $\forall x \in A \phi(x)$, ya que de no ser cierto, $\{x \in A : \neg\phi(x)\}$ tendría un primer elemento y esto conduciría a una contradicción.

1.4.1 Definición (ZF⁻-P). Sean \mathbf{A} y \mathbf{R} clases, diremos que \mathbf{R} es bien fundada en \mathbf{A} si y sólo si

$$\forall X \subset A [X \neq \emptyset \rightarrow \exists y \in X (\neg \exists z \in X (z \mathbf{R} y))].$$

Esta definición es idéntica a la Definición 1.2.1 (página 15), salvo por el hecho de que aquí \mathbf{A} y \mathbf{R} son clases. Recordemos que por la Observación 0.1.1 (página 3), las clases sólo las ocupamos para abreviar sentencias dentro de la teoría de conjuntos. Si quisieramos justificar una prueba por inducción transfinita, necesitaríamos la existencia de un elemento \mathbf{R} -minimal de $\{x \in \mathbf{A} : \neg\phi(x)\}$, que podría ser una clase propia. Por lo tanto, necesitamos que las relaciones cumplan con la siguiente propiedad que nos resuelve dicho problema.

1.4.2 Definición (ZF⁻-P). \mathbf{R} es casi-conjunto sobre \mathbf{A} si y sólo si para todo $x \in \mathbf{A}$, $\{y \in \mathbf{A} : y \mathbf{R} x\}$ es un conjunto.

De esta definición podemos observar que \in es casi-conjunto en cualquier clase \mathbf{A} y que toda relación sobre un conjunto es casi-conjunto. Un resultado que se puede establecer de forma inmediata es el siguiente.

1.4.3 Lema (ZF⁻-P). Sea \mathbf{R} una relación sobre una clase \mathbf{A} y supongamos que tenemos definida una función $\Phi : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{Ord}$ tal que $x \mathbf{R} y \rightarrow \Phi(x) < \Phi(y)$ para cada $x, y \in \mathbf{A}$. Entonces \mathbf{R} es bien fundada en \mathbf{A} .

Demostración. Si $X \subseteq \mathbf{A}$, y $a \in X$ tal que $\Phi(a) = \min\{\Phi(x) : x \in X\}$, entonces a es \mathbf{R} -minimal en X , pues si existiera un $y \in X$ tal que $y \mathbf{R} a$ entonces $\Phi(y) < \Phi(a)$, lo cual contradice la minimalidad de $\Phi(a)$. \blacktriangle

1.4.4 Definición (ZF⁻-P). Si \mathbf{R} es casi-conjunto sobre \mathbf{A} y $x \in \mathbf{A}$, entonces

$$(a) \text{ pred}(\mathbf{A}, x, \mathbf{R}) = \{y \in \mathbf{A} : y \mathbf{R} x\}.$$

$$(b) \text{ pred}^0(\mathbf{A}, x, \mathbf{R}) = \text{pred}(\mathbf{A}, x, \mathbf{R}).$$

$$\text{pred}^{n+1}(\mathbf{A}, x, \mathbf{R}) = \bigcup \{\text{pred}(\mathbf{A}, y, \mathbf{R}) : y \in \text{pred}^n(\mathbf{A}, x, \mathbf{R})\}.$$

(c) $cl(\mathbf{A}, x, \mathbf{R}) = \bigcup \{pred^n(\mathbf{A}, x, \mathbf{R}) : n \in \omega\}$.

Todos estos son conjuntos. Notemos además que si \mathbf{R} es la relación \in y \mathbf{A} es transitivo entonces $pred(\mathbf{A}, x, \mathbf{R}) = x$, $pred^n(\mathbf{A}, x, \mathbf{R}) = \bigcup^n x$ y $cl(\mathbf{A}, x, \mathbf{R}) = ctr(x)$.

1.4.5 Lema (ZF⁻-P). Si \mathbf{R} es casi-conjunto sobre \mathbf{A} y $x \in \mathbf{A}$, entonces para toda $y \in cl(\mathbf{A}, x, \mathbf{R})$, $pred(\mathbf{A}, y, \mathbf{R}) \subset cl(\mathbf{A}, x, \mathbf{R})$.

Demostración. Si $y \in cl(\mathbf{A}, x, \mathbf{R})$, entonces existe $n \in \omega$ tal que $y \in pred^n(\mathbf{A}, x, \mathbf{R})$, entonces $pred(\mathbf{A}, y, \mathbf{R}) \subset pred^{n+1}(\mathbf{A}, x, \mathbf{R}) \subset cl(\mathbf{A}, x, \mathbf{R})$. \blacktriangle

1.4.6 Teorema (Inducción Transfinita; ZF⁻-P). Si \mathbf{R} es bien fundada y casi-conjunto sobre \mathbf{A} , entonces cada subclase no vacía \mathbf{X} de \mathbf{A} , tiene un elemento \mathbf{R} -minimal.

Demostración. Sea $x \in \mathbf{X}$. Si x no es \mathbf{R} -minimal sobre \mathbf{A} , entonces $\mathbf{X} \cap cl(\mathbf{A}, x, \mathbf{R})$ es un subconjunto no vacío de \mathbf{A} , luego $\exists y \in \mathbf{X} \cap cl(\mathbf{A}, x, \mathbf{R})$ \mathbf{R} -minimal. Por el Lema 1.4.5, y es \mathbf{R} -minimal en \mathbf{X} . \blacktriangle

1.4.7 Teorema (Recursión Transfinita; ZF⁻-P). Asíumase que \mathbf{R} es bien fundada y casi-conjunto sobre \mathbf{A} . Si $\mathbf{F} : \mathbf{A} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$, entonces hay una única $\mathbf{G} : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{V}$ tal que

$$\forall x \in \mathbf{A} \left[\mathbf{G}(x) = \mathbf{F}(x, \mathbf{G} \upharpoonright pred(\mathbf{A}, x, \mathbf{R})) \right] \quad (*)$$

Demostración. Para ser más breves, escribamos $pred(x)$ y $cl(x)$ en vez de $pred(\mathbf{A}, x, \mathbf{R})$ y $cl(\mathbf{A}, x, \mathbf{R})$, respectivamente.

Probemos primero que \mathbf{G} es única. Para esto, supongamos que existen \mathbf{G}_1 y \mathbf{G}_2 de \mathbf{A} en \mathbf{V} que verifican (*). Probemos por inducción transfinita sobre \mathbf{R} que $\mathbf{G}_1 = \mathbf{G}_2$. Sea $x \in \mathbf{A}$ y supongamos

$$\forall y \in A (y \mathbf{R} x \rightarrow \mathbf{G}_1(y) = \mathbf{G}_2(y)) \dots (1)$$

probemos que $\mathbf{G}_1(x) = \mathbf{G}_2(x)$. $\mathbf{G}_1(x) = \mathbf{F}(x, \mathbf{G}_1 \upharpoonright pred(x))$, pero por (1), $\mathbf{F}(x, \mathbf{G}_1 \upharpoonright pred(x)) = \mathbf{F}(x, \mathbf{G}_2 \upharpoonright pred(x)) = \mathbf{G}_2(x)$. Así, para cada $x \in \mathbf{A}$ $\mathbf{G}_1(x) = \mathbf{G}_2(x)$. Por lo tanto, $\mathbf{G}_1 = \mathbf{G}_2$ y, con esto, \mathbf{G} es única.

Veamos ahora que dicha \mathbf{G} existe. Diremos que un subconjunto $d \subset \mathbf{A}$ es cerrado si y sólo si $\forall x \in d (pred(x) \subset d)$. Veamos que cada $x \in \mathbf{A}$ está en algún conjunto cerrado. En efecto, sea $x \in \mathbf{A}$, $x \in \{x\} \cup cl(x)$ y si $t \in \{x\} \cup cl(x)$ tenemos que $(t = x \rightarrow pred(t) = pred(x) \subset \{x\} \cup cl(x))$ y $(t \in cl(x) \rightarrow t \in pred^n(x)$ para alguna $n \in \omega \rightarrow t \subset pred^{n+1}(x) \subset cl(x))$, con lo cual $\{x\} \cup cl(x)$ es cerrado. Si d es cerrado, llamemos g una d -aproximación si y sólo si g es una función con dominio d y

$$\forall x \in d \left[g(x) = \mathbf{F}(x, g \upharpoonright pred(x)) \right].$$

De la misma forma en la que probamos la unicidad de \mathbf{G} , se puede ver que si g es una d -aproximación y g' es una d' -aproximación, entonces

$$g \upharpoonright (d \cap d') = g' \upharpoonright (d \cap d') \dots (2).$$

Ahora probaremos por inducción transfinita sobre x que existe una $\{x\} \cup cl(x)$ -aproximación. Para esto, supongamos que para cada $y \mathbf{R} x$ existe una $\{y\} \cup cl(y)$ -aproximación y llamémosla g_y . Definamos $h = \bigcup \{g_y : y \mathbf{R} x\}$ y veamos que h es una $cl(x)$ -aproximación. En efecto, $dom(h) = \bigcup \{\{y\} \cup cl(y) : y \mathbf{R} x\} = cl(x)$ y, para cada $t \in cl(x)$, $h(t) = g_t(t) = \mathbf{F}(x, g_t \upharpoonright pred(x))$ y por (2), $\mathbf{F}(x, g_t \upharpoonright pred(x)) = \mathbf{F}(x, h \upharpoonright pred(x))$. Por lo tanto h es una $cl(x)$ -aproximación. De manera similar, se prueba que $H = h \cup \{\langle x, \mathbf{F}(x, h) \rangle\}$ es una $\{x\} \cup cl(x)$ -aproximación. Finalmente, definimos $\mathbf{G}(x) = g(x)$, donde g es la d -aproximación de algún (cualquier) cerrado d , que contenga a x . \blacktriangle

Como una generalización de la Definición 1.1.4 (página 10), tenemos a la siguiente definición. Adicionalmente, el lema posterior nos dice bajo qué condiciones ambas coinciden.

1.4.8 Definición (ZF⁻-P). Si \mathbf{R} es bien fundada y casi-conjunto sobre \mathbf{A} , defínase:

$$rank(x, \mathbf{A}, \mathbf{R}) = sup\{rank(y, \mathbf{A}, \mathbf{R}) + 1 : y \mathbf{R} x \wedge y \in \mathbf{A}\}.$$

1.4.9 Lema (ZF⁻-P). Si \mathbf{A} es transitiva y \in es bien fundada sobre \mathbf{A} , entonces $\mathbf{A} \subset \mathbf{BF}$ y $rank(x, \mathbf{A}, \in) = rank(x)$ para cada $x \in \mathbf{A}$.

Demostración. Supongamos $\mathbf{A} \not\subset \mathbf{BF}$, sea pues $x \in$ -minimal en $\mathbf{A} \setminus \mathbf{BF}$. Si $y \in x$, entonces $y \notin \mathbf{A} \setminus \mathbf{BF}$, pero $y \in \mathbf{A}$ ya que \mathbf{A} es transitiva. Así $y \in \mathbf{BF}$,

es decir, $x \subset \mathbf{BF}$ lo cual implica que $x \in \mathbf{BF}$, una contradicción. Por lo tanto, se tiene que $\mathbf{A} \subset \mathbf{BF}$.

Supongamos por un instante que $\{x \in \mathbf{A} : \text{rank}(x, \mathbf{A}, \in) \neq \text{rank}(x)\}$ es no vacío. Tomemos t , un elemento \in -minimal en este conjunto. Como $t \in \mathbf{BF}$, se tiene por una parte, $\text{rank}(t) = \sup\{\text{rank}(x) + 1 : x \in t\}$ y por otra $\text{rank}(t, \mathbf{A}, \in) = \sup\{\text{rank}(y, \mathbf{A}, \in) + 1 : y \in t \wedge y \in \mathbf{A}\}$ que coincide con $\text{rank}(t)$, lo cual contradice que t sea \in -minimal en $\{x \in \mathbf{A} : \text{rank}(x, \mathbf{A}, \in) \neq \text{rank}(x)\}$. Por lo tanto, se tiene que $\text{rank}(x, \mathbf{A}, \in) = \text{rank}(x)$ para cada $x \in \mathbf{A}$. \blacktriangle

La Definición 1.4.8 se podría usar para dar una definición de rank sobre \mathbf{BF} que no hace uso del A. de Potencia. La siguiente definición es otro ejemplo importante de recursión.

1.4.10 Definición (ZF⁻-P). Supongamos que \mathbf{R} es bien fundada y casi-conjunto sobre \mathbf{A} . Defínase recursivamente para $y \in \mathbf{A}$, $\text{mos}(y) = \text{mos}_{\mathbf{A}, \mathbf{R}} = \{\text{mos}(x) : x \in \text{pred}(\mathbf{A}, y, \mathbf{R})\}$. $\text{mos}_{\mathbf{A}, \mathbf{R}}$ es llamada *la función del colapso de Mostowski de \mathbf{A} , \mathbf{R}* . El rango de $\text{mos}_{\mathbf{A}, \mathbf{R}}$ (i. e. $\text{mos}''\mathbf{A}$), es llamado *el colapso de Mostowski de \mathbf{A} , \mathbf{R}* .

1.4.11 Lema (ZF⁻-P). Supongamos que \mathbf{R} es bien fundada y casi-conjunto sobre \mathbf{A} . Entonces,

- (a) $\forall x, y \in \mathbf{A}, (x\mathbf{R}y \rightarrow \text{mos}(x) \in \text{mos}(y))$.
- (b) $\text{mos}''\mathbf{A}$ es transitivo.
- (c) (ZF⁻) $\text{mos}''\mathbf{A} \subset \mathbf{BF}$.
- (d) (ZF⁻) Si $x \in \mathbf{A}$, entonces $\text{rank}(x, \mathbf{A}, \mathbf{R}) = \text{rank}(\text{mos}(x))$.

Demostración. (a) Supongamos que $x\mathbf{R}y$, entonces $\text{mos}(x) \in \{\text{mos}(x) : x \in \text{pred}(\mathbf{A}, y, \mathbf{R})\} = \text{mos}(y)$.

(b) Sea $t \in \text{mos}''\mathbf{A}$, entonces existe $y \in \mathbf{A}$ tal que $\text{mos}(y) = t$. Si $t = 0$ entonces $t \subset \text{mos}''\mathbf{A}$. Supongamos que $t \neq 0$, sea $x \in t = \text{mos}(y)$. Así, existe $w \in \text{pred}(\mathbf{A}, y, \mathbf{R})$ tal que $x = \text{mos}(w)$. Entonces $w \in \mathbf{A}$ por tanto $x = \text{mos}(w) \in \text{mos}''\mathbf{A}$. Con lo cual se tiene que $t \subset \text{mos}''\mathbf{A}$, es decir, $\text{mos}''\mathbf{A}$ es transitivo.

(c) Probaremos que para cada $x \in \mathbf{A}$ ($\text{mos}(x) \in \mathbf{BF}$) por inducción sobre

x . Si x_0 es \mathbf{R} -minimal en A , $mos(x_0) = 0 \in \mathbf{BF}$. Supongamos ahora que para cada $y \in \mathbf{A}(y\mathbf{R}x \rightarrow mos(y) \in \mathbf{BF})$. Esto implica que $mos(x) \in \mathbf{BF}$ y usando el Lema 1.1.12 (página 13), se tiene que $mos(x) \in \mathbf{BF}$. De esta manera, $mos''\mathbf{A} \subset \mathbf{BF}$.

(d) Se cumple que $rank(mos(x)) = \sup\{rank(t) + 1 : t \in mos(x)\} = \sup\{rank(mos(y)) + 1 : y\mathbf{R}x\}$. Así, haciendo inducción sobre x , se tiene de manera inmediata que $rank(mos(x)) = \sup\{rank(mos(y)) + 1 : y\mathbf{R}x\} = \sup\{rank(y, \mathbf{A}, \mathbf{R}) + 1 : y\mathbf{R}x \wedge y \in \mathbf{A}\} = rank(x, \mathbf{A}, \mathbf{R})$. \blacktriangle

1.4.12 Definición (\mathbf{ZF}^- -P). \mathbf{R} es extensional en \mathbf{A} si y sólo si

$$\forall x, y \in \mathbf{A} (\forall z \in \mathbf{A} (z\mathbf{R}x \leftrightarrow z\mathbf{R}y) \rightarrow x = y).$$

Esto es equivalente a decir que el A. de Extensión es verdadero en \mathbf{A} si \in es interpretada como \mathbf{R} .

1.4.13 Lema (\mathbf{ZF}^- -P). Si \mathbf{A} es transitivo, entonces la relación \in es extensional sobre \mathbf{A} .

Demostración. Notemos primero que una relación \mathbf{R} es extensional sobre \mathbf{A} si y sólo si

$$\forall x, y \in \mathbf{A} (x \neq y \rightarrow pred(\mathbf{A}, x, \mathbf{R}) \neq pred(\mathbf{A}, y, \mathbf{R})).$$

Así, si \mathbf{A} es transitivo, entonces $pred(\mathbf{A}, x, \in) = x$. Con lo cual, $x \neq y$ implica que $pred(\mathbf{A}, x, \mathbf{R}) \neq pred(\mathbf{A}, y, \mathbf{R})$. \blacktriangle

1.4.14 Lema. Suponga que \mathbf{R} es bien fundada y casi-conjunto sobre \mathbf{A} . Entonces:

1. Si $mos_{\mathbf{A}, \mathbf{R}}$ es inyectiva, entonces \mathbf{R} es extensional sobre \mathbf{A} .
2. Si \mathbf{R} es extensional sobre \mathbf{A} , entonces $mos : (\mathbf{A}, \mathbf{R}) \rightarrow (mos''\mathbf{A}, \in)$ resulta ser un isomorfismo (i. e. mos es inyectiva y $\forall x, y \in \mathbf{A} (x\mathbf{R}y \leftrightarrow mos(x) \in mos(y))$).

Demostración. (1) Si \mathbf{R} no es extensional sobre \mathbf{A} , entonces existen $a \neq b$ en \mathbf{A} tales que $pred(\mathbf{A}, a, \mathbf{R}) = pred(\mathbf{A}, b, \mathbf{R})$ lo cual implica que $mos(a) = mos(b)$, y por tanto, $mos_{\mathbf{A}, \mathbf{R}}$ no es inyectiva.

(2) Supongamos que \mathbf{R} es extensional sobre \mathbf{A} . Probaremos que mos es inyectiva. Para esto, definamos $T = \{a \in \mathbf{A} : \exists y \in \mathbf{A} [a \neq y \wedge mos(a) = mos(y)]\}$. Si $T = \emptyset$, entonces mos es inyectiva. Supongamos lo contrario, es decir, $T \neq \emptyset$. Aplicando inducción (ver Teorema 1.4.6, página 21), sea $x \in T$ \mathbf{R} -minimal en T . Fijemos $y \neq x$ tal que $mos(x) = mos(y)$. Como \mathbf{R} es extensional, tenemos dos casos:

Primer caso: Para algún $z \in \mathbf{A}$, $z\mathbf{R}x \wedge \neg(z\mathbf{R}y)$. Como $mos(z) \in mos(x) = mos(y)$, entonces $mos(z) = mos(w)$ para algún w tal que $w\mathbf{R}y$. Luego, $w \neq z$ y por tanto, z contradice la \mathbf{R} -minimalidad de x .

Segundo caso: Para algún $w \in \mathbf{A}$, $w\mathbf{R}y \wedge \neg(w\mathbf{R}x)$. Luego, existe z tal que $z\mathbf{R}x$ y $mos(z) = mos(w)$. También en este caso, z contradice la \mathbf{R} -minimalidad de x .

Por lo tanto, mos es inyectiva. Solo resta ver que para cualesquiera $x, y \in \mathbf{A}$ ($x\mathbf{R}y \leftrightarrow mos(x) \in mos(y)$). Sean $x, y \in \mathbf{A}$. $x\mathbf{R}y \rightarrow mos(x) \in mos(y)$ es inmediato de la definición de mos . Supongamos que $mos(x) \in mos(y)$, entonces existe t tal que ($t\mathbf{R}y \wedge mos(x) = mos(t)$), pero como ya probamos que mos es inyectiva, se tiene que $x = t$, con lo cual, $x\mathbf{R}y$. \blacktriangle

1.4.15 Teorema (del Colapso de Mostowski; \mathbf{ZF}^- - \mathbf{P}). Sea \mathbf{R} una relación bien fundada, casi-conjunto y extensional sobre \mathbf{A} , entonces existen una clase transitiva \mathbf{M} y un mapeo biyectivo $\mathbf{G} : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{M}$ tal que \mathbf{G} es un isomorfismo entre (\mathbf{A}, \mathbf{R}) y (\mathbf{M}, \in) . Además, \mathbf{M} y \mathbf{G} son únicos.

Demostración. La existencia está garantizada por el Lema 1.4.14, haciendo $mos_{\mathbf{A}, \mathbf{R}} = \mathbf{G}$ y $mos''_{\mathbf{A}, \mathbf{R}} \mathbf{A} = \mathbf{M}$. Si \mathbf{G}' y \mathbf{M}' también satisfacen el Teorema, entonces por inducción sobre x se verifica que $\mathbf{G}'(x) = \mathbf{G}(x)$ para cada $x \in \mathbf{A}$, lo cual implica también que $\mathbf{M}' = \mathbf{M}$. \blacktriangle

Para ejemplificar el Teorema anterior, supongamos que \mathbf{R} bien ordena a \mathbf{A} . Si \mathbf{A} es un conjunto, entonces \mathbf{M} es un ordinal. Si \mathbf{A} es una clase propia, entonces $\mathbf{M} = \mathbf{Ord}$.

Terminamos este capítulo demostrando tres lemas que ocuparemos más adelante y que competen a la relación de pertenencia (\in).

1.4.16 Lema. Suponga que \in es bien fundada y extensional sobre \mathbf{A} . Sea $T \subseteq \mathbf{A}$ transitivo. Entonces $mos_{\mathbf{A}, \in}(y) = y$ para cada $y \in T$.

Demostración. Sea $X = \{y \in T : mos(y) \neq y\}$. Si $X = \emptyset$, entonces se tiene el resultado. Supongamos que $X \neq \emptyset$ y sea $a \in$ -minimal en X . Entonces, por definición $mos(a) = \{mos(y) : y \in \mathbf{A} \wedge y \in a\}$. Notemos que si $y \in a$:

primero, como $a \in T$ y T es transitivo, $y \in T \subseteq \mathbf{A}$, es decir, $y \in \mathbf{A}$,

segundo, como a es \in -minimal en X , y $y \in a$, se tiene que $mos(y) = y$.

Así, $\{mos(y) : y \in \mathbf{A} \wedge y \in a\} = \{y : y \in a\} = a$, y así, $mos(a) = a$, lo cual es una contradicción. De aquí que $X = \emptyset$ y por tanto, para cada $y \in T$, $mos(y) = y$. \blacktriangle

1.4.17 Lema. Sean A y B conjuntos transitivos tal que $A \in \mathbf{BF}$, y sea $f : A \xrightarrow[1-1]{sobre} B$ un isomorfismo de (A, \in) a (B, \in) . Entonces $f = id_A$ y por tanto $A = B$.

Demostración. Sea $a \in A$ y supongamos que $f(a) = b$. Como f es un isomorfismo, se tiene:

$$\forall y \in B [y \in b \leftrightarrow \exists x \in A [x \in a \wedge f(x) = y]].$$

Como tanto A como B son transitivos, resultan redundantes “ $y \in B$ ” y “ $x \in A$ ”, por lo tanto, quitándolos tenemos $\forall y [y \in b \leftrightarrow \exists x [x \in a \wedge f(x) = y]]$. Por tanto, $f(a) = \{f(x) : x \in a\}$. Ahora, como A es bien fundada, de la definición de mos (ver Definición 1.4.10, página 23), podemos concluir que f es simplemente la función isomorfismo de Mostowski sobre (A, \in) , así, por el Lema 1.4.16, $f = id_A$. \blacktriangle

1.4.18 Lema. Si $A \in \mathbf{BF}$ y $(ctr(A) \cup \{A\}; \in) \cong (ctr(B) \cup \{B\}; \in)$ entonces $A = B$.

Demostración. Por el Lema 1.4.17, tenemos de manera inmediata que $ctr(A) \cup \{A\} = ctr(B) \cup \{B\}$. Además, como estamos suponiendo que $A \in \mathbf{BF}$, se tiene que A es el único elemento \in -maximal en $ctr(A) \cup \{A\}$, de aquí que $A = B$. \blacktriangle

Capítulo 2

Fundamentos para las Pruebas de Consistencia

En este capítulo nos ocuparemos de fundamentar lo necesario para las pruebas de consistencia. En la primera sección abordaremos la teoría de modelos, centrándonos en las nociones “ $\mathcal{A} \models \varphi$ ” y “ $\Gamma \vdash \varphi$ ”, veremos además cómo se relacionan estas nociones (ver Teorema Sonoro 2.1.18, página 35) y definiremos $\text{Con}(\Gamma)$ e $\text{Incon}(\Gamma)$ (página 2.1.17). En la segunda sección se presentan resultados que nos indican qué condiciones debemos pedirle a una clase M para que modele ciertos axiomas de la teoría de conjuntos; la sección termina con el Teorema 2.2.17 (página 43), que prueba la consistencia relativa del Axioma de Fundación ocupando la clase **BF** de los conjuntos bien fundados como modelo.

En la tercera sección revisamos qué conceptos de la teoría de conjuntos (desde ser un ordinal o una función, hasta bien ordenar o ser hereditariamente finito), se comportan como esperamos¹ en teorías más débiles que **ZF**. En la cuarta sección produciremos conjuntos que son modelos para casi todos los axiomas de **ZFE**. En la última sección de este capítulo presentamos el Teorema del Reflejo (ver 2.5.3, página 56), y algunas de sus consecuencias. Lo principal para nosotros es poder construir un conjunto transitivo y numerable que modela tanto de **ZFE** como nosotros queramos, este es el enfoque que usaremos (y por lo tanto el hecho más importante en el que nos sustentaremos), para presentar la técnica de Forcing en el siguiente capítulo.

¹Esperamos que estas nociones sean *absolutas* (ver Definición 2.2.4, página 37).

2.1. Lo Necesario de Teoría de Modelos

En esta sección, situándonos dentro de **ZFE** desarrollaremos lo básico de la teoría de modelos.²

La *lógica de predicados* (el estudio formal de la notación lógica), fue diseñada para desarrollar teorías axiomáticas formales. Una exposición detallada de ésta se puede encontrar en [16], y un estudio más enfocado a la teoría de conjuntos se presenta en [15]. Nosotros partimos de un conjunto \mathcal{L} de símbolos no lógicos que usaremos para construir fórmulas y sentencias. Cada símbolo en \mathcal{L} tiene una aridad específica que es un número natural, y un tipo específico, ya sea “símbolo predicativo” o “símbolo funcional”. El conjunto \mathcal{L} junto con las asignaciones de tipos y aridades será llamado lenguaje (o léxico). De manera más formal tenemos lo siguiente:

2.1.1 Definición. Un *lenguaje* para la lógica de predicados consiste de un conjunto \mathcal{L} (de símbolos no lógicos), particionado en los conjuntos disjuntos $\mathcal{L} = \mathcal{F} \cup \mathcal{P}$ (de *símbolos* funcionales y predicativos). \mathcal{F} y \mathcal{P} están particionados por aridad: $\mathcal{F} = \bigcup_{n \in \omega} \mathcal{F}_n$, y $\mathcal{P} = \bigcup_{n \in \omega} \mathcal{P}_n$. A los símbolos en \mathcal{F}_n se les llama símbolos funcionales n -arios. Los símbolos en \mathcal{P}_n son llamados símbolos predicativos n -arios. A los símbolos en \mathcal{F}_0 se les llama símbolos constantes y a los símbolos en \mathcal{P}_0 se les llama letras proposicionales.

Como un ejemplo informal para entender mejor a los símbolos funcionales y predicativos pensemos en lo siguiente, si A es un conjunto no vacío, $R \subseteq A \times A$ es una relación sobre A y $f : A \rightarrow A$ es una función, entonces R es un símbolo predicativo de aridad 2 ($R \in \mathcal{P}_2$) y f es un símbolo funcional de aridad 1 ($f \in \mathcal{F}_1$). Si R fuese subconjunto de A^n y $\text{dom}(f) \subseteq A^n$ entonces R y f tendrían aridad n .

En muchos usos elementales de la lógica, \mathcal{L} es finito, con lo cual la mayoría de los \mathcal{F}_n y \mathcal{P}_n son vacíos. Por ejemplo, para axiomatizar a la teoría de conjuntos, $\mathcal{L} = \mathcal{P}_2 = \{\in\}$. O para axiomatizar la teoría de grupos $\mathcal{L} = \mathcal{F}_2 = \{\cdot\}$, donde “ \cdot ” denota la operación del grupo.

²De hecho, **ZF⁻-P** es lo suficientemente robusto para construir las nociones básicas de la teoría de modelos. Haremos explícito el uso de los axiomas de Potencia y de Elección cuando éstos sean necesarios. El A. de fundación no es reelevante para la teoría de modelos, su importancia radica cuando se discuten modelos de la teoría de conjuntos.

Una vez que tenemos un lenguaje, necesitamos una *estructura* que *modele* las fórmulas del lenguaje.

2.1.2 Definición. Dado un lenguaje \mathcal{L} para la lógica de predicados, una estructura para \mathcal{L} (llamada \mathcal{L} -estructura), es una pareja $\mathfrak{A} = (A, I)$ tal que A es un conjunto no vacío (llamado el universo de \mathfrak{A}), e I es una función con dominio \mathcal{L} y con $I(s)$ que satisface (denotaremos a $I(s)$ por $s_{\mathfrak{A}}$):

1. si f es un símbolo funcional n -ario con $n > 0$, entonces $f_{\mathfrak{A}} : A^n \rightarrow A$.
2. si p es un símbolo predicativo n -ario con $n > 0$, entonces $p_{\mathfrak{A}} \subset A^n$.
3. si c es un símbolo funcional 0-ario entonces $c_{\mathfrak{A}} \in A$.
4. si p es un símbolo predicativo 0-ario entonces $p_{\mathfrak{A}} \in 2 = \{0, 1\} = \{F, V\}$.

En lo sucesivo, cuando escribamos \mathfrak{A} estaremos pensando en una \mathcal{L} -estructura, y si escribimos A estaremos pensando en el universo de \mathfrak{A} (a menos que se especifique lo contrario). De manera más particular, para la teoría de conjuntos tenemos:

2.1.3 Definición. Un \in -modelo es cualquier estructura $\mathfrak{A} = (A, E)$ para $\mathcal{L} = \{\in\}$ tal que $E = \{(a, b) \in A \times A : a \in b\}$. Un modelo transitivo es cualquier \in -modelo tal que A es transitivo.

Ahora que ya sabemos lo que es un modelo, necesitamos decir lo que entenderemos por “ φ es verdadero en \mathfrak{A} ” (o, “ \mathfrak{A} es un modelo para φ ”, lo que en símbolos se denota como “ $\mathfrak{A} \models \varphi$ ”); esto estará definido siempre y cuando φ sea una *sentencia*³ de \mathcal{L} y \mathfrak{A} sea una \mathcal{L} -estructura.⁴ Kunen (ver [14]), nos dice que una forma de verlo es por *relativización* (véase la Definición 2.2.6, página 38). Si φ es la sentencia $\forall x \exists y [x = y \cdot (y \cdot y)]$, y queremos ver si φ es cierto en una estructura \mathfrak{A} , simplemente la reescribimos *relativizando* (restringiendo), las variables x, y al universo A e interpretando “ \cdot ” como \mathfrak{A} nos dice que lo interpretemos. Con lo anterior en mente, es sencillo entender lo que significa “ φ es cierto en \mathbb{R} ” y “ φ es falso en \mathbb{Q} ”, aunque necesitamos cierto conocimiento en análisis y álgebra para demostrar afirmaciones que tengan esta forma.

³una fórmula sin variables libres.

⁴Recordemos que en la sección 0.3 (ver página 5), dijimos que todos los Axiomas de **ZFE** son sentencias.

En 1930 Tarski publicó dos estudios que tuvieron grandes consecuencias:

Definibilidad de la verdad: Este estudio muestra que trabajando en teoría de conjuntos, uno puede usar recursión para definir de manera rigurosa la noción “ $\mathfrak{A} \models \varphi$ ” como una propiedad de dos conjuntos, \mathfrak{A} y φ . La propiedad es falsa a menos que \mathfrak{A} sea una \mathcal{L} -estructura y φ una sentencia de la misma \mathcal{L} . El estudio de este “ \models ” condujo al desarrollo de la teoría de modelos. En estas condiciones, tiene sentido definir $\mathfrak{A} \models \Lambda$ (o \mathfrak{A} es un modelo para Λ), donde Λ es un conjunto infinito de sentencias (por ejemplo **ZFE**), como $\forall \varphi \in \Lambda (\mathfrak{A} \models \varphi)$.

Indefinibilidad de la verdad: Muestra que no podemos hacer lo anterior con modelos que son clases propias. Pensando en $\mathbf{V} = \{x : x = x\}$ la clase de los conjuntos, Tarski mostró que si φ es un Axioma de **ZFE** (o alguna sentencia), entonces no se puede definir “ $\mathbf{V} \models \varphi$ ” como una propiedad de “ φ ”. Definiremos la noción $\mathfrak{A} \models \varphi$ tratando de mostrar por qué la definición está justificada cuando A es un conjunto y por qué no lo está cuando A es una clase.

Nuestra definición será recursiva (sobre φ), pero a pesar de que nuestro objetivo es discutir la *verdad* de sentencias, nuestra recursión debe incluir fórmulas arbitrarias con variables libres. Por ejemplo si φ es $\forall x \exists y [x = y \cdot (y \cdot y)]$ y queremos explicar por qué es falso en \mathbb{Q} (es decir, $\mathbb{Q} \not\models \varphi$), debemos decir que si $\psi(x)$ es la fórmula $\exists y [x = y \cdot (y \cdot y)]$, entonces podemos encontrar un $a \in \mathbb{Q}$ ($a = 2$), tal que $\mathbb{Q} \not\models \psi[a]$.

Para poder lidiar con fórmulas con variables libres definimos lo siguiente:

2.1.4 Definición. Diremos que σ es una *asignación* para φ en A , si σ es una función con $\text{ran}(\sigma) \subseteq A$ y $\text{dom}(\sigma)$ es un conjunto finito de variables que incluye por lo menos todas las variables libres en φ .

Nos va a interesar definir de manera precisa la noción “ $\mathfrak{A} \models \varphi[\sigma]$ ” la cual depende de la pareja (φ, σ) . Para poder aplicar nuestro teorema sobre definiciones recursivas (ver Teorema 1.4.7, página 21), realmente estamos definiendo la función $\text{val}_{\mathfrak{A}}$ con $\text{ran}(\text{val}_{\mathfrak{A}}) = \{F, V\} = \{0, 1\}$ donde $\text{val}_{\mathfrak{A}}(\varphi)[\sigma] = V$ si y sólo si $\mathfrak{A} \models \varphi[\sigma]$. Para esto, primero requerimos discutir las valuaciones de *términos*⁵, es decir, definiremos $\text{val}_{\mathfrak{A}}(\tau)[\sigma] \in A$ siempre que τ sea

⁵un término se construye a partir de símbolos constantes, variables y/o símbolos funcionales en \mathcal{L} .

un término de \mathcal{L} y σ una asignación para τ en A , es decir, $dom(\sigma)$ contiene todas las variables de τ . Por ejemplo, si τ es el término $y \cdot (y \cdot y)$, entonces $val_{\mathbb{Q}}(\tau)[1,26] = 1,26 \cdot (1,26 \cdot 1,26) = 2,000376$. Necesitamos saber que $val_{\mathbb{Q}}(\tau)[b]$ nunca es exactamente 2 para poder concluir que $\mathbb{Q} \neq \psi[2]$ (así como definimos ψ en líneas arriba). De manera más formal:

2.1.5 Definición. Si \mathfrak{A} es una \mathcal{L} -estructura, entonces definimos $val_{\mathfrak{A}}(\tau)[\sigma] \in A$ siempre que τ sea un término de \mathcal{L} y σ una asignación para τ en A como sigue:

1. $val_{\mathfrak{A}}(x)[\sigma] = \sigma(x)$ cuando $x \in dom(\sigma)$.
2. $val_{\mathfrak{A}}(c)[\sigma] = c_{\mathfrak{A}}$ cuando c sea un símbolo constante.
3. $val_{\mathfrak{A}}(f(\tau_1, \dots, \tau_n))[\sigma] = f_{\mathfrak{A}}(val_{\mathfrak{A}}(\tau_1)[\sigma], \dots, val_{\mathfrak{A}}(\tau_n)[\sigma])$ cuando f sea un símbolo funcional n -ario con $n > 0$.

Así, para una \mathfrak{A} fija, si J es la colección de todas las parejas (τ, σ) tales que τ es un término de \mathcal{L} y σ es una asignación para τ en A , entonces estamos definiendo una función $val_{\mathfrak{A}} : J \rightarrow A$. Esta función existe por el Teorema 1.4.7, usando recursión sobre la relación R , donde $(\tau', \sigma')R(\tau, \sigma)$ si y sólo si τ' es un subtérmino propio de τ y $\sigma' = \sigma$. Esta R es tanto bien fundada (ver Definición 1.4.1, página 20), como set-like (ver Definición 1.4.2, página 20), ya que τ sólo tiene una cantidad finita de subtérminos. R seguirá siendo bien fundada y set-like aunque A sea una clase propia, de esta manera, la definición anterior seguirá siendo válida. Lo mismo ocurre con la siguiente definición de *verdad* para fórmulas atómicas⁶.

2.1.6 Definición. Si \mathfrak{A} es una \mathcal{L} -estructura, entonces definimos $val_{\mathfrak{A}}(\varphi)[\sigma] \in \{0, 1\} = \{F, V\}$ siempre que φ sea una fórmula atómica de \mathcal{L} y σ una asignación para φ en A como sigue:

1. $val_{\mathfrak{A}}(p)[\sigma] = p_{\mathfrak{A}}$ cuando p sea un símbolo predicativo 0-ario.
2. $val_{\mathfrak{A}}(p(\tau_1, \dots, \tau_n))[\sigma] = V$ si y sólo si $(val_{\mathfrak{A}}(\tau_1)[\sigma], \dots, val_{\mathfrak{A}}(\tau_n)[\sigma]) \in p_{\mathfrak{A}}$ cuando p sea un símbolo predicativo n -ario con $n > 0$.
3. $val_{\mathfrak{A}}(\tau_1 = \tau_2)[\sigma] = V$ si y sólo si $val_{\mathfrak{A}}(\tau_1)[\sigma] = val_{\mathfrak{A}}(\tau_2)[\sigma]$.

⁶las fórmulas atómicas son aquellas que carecen de cuantificadores y conectivos proposicionales.

El problema para definir la *verdad* de fórmulas en \mathbf{V} está en las variables cuantificadas. Para lidiar con ellas, definimos $\sigma + (y/a) = \sigma \upharpoonright (dom(\sigma) \setminus \{y\}) \cup \{(y, a)\}$. Así, $\sigma + (y/a)$ le asigna a y el valor a , y descarta (en caso de que $y \in dom(\sigma)$) el valor que σ le daba a y . Finalmente, tenemos:

2.1.7 Definición. Si \mathfrak{A} es una \mathcal{L} -estructura, entonces definimos $val_{\mathfrak{A}}(\varphi)[\sigma] \in \{0, 1\} = \{F, V\}$ siempre que φ sea una fórmula de \mathcal{L} y σ una asignación para φ en A como sigue:

1. $val_{\mathfrak{A}}(\neg\varphi)[\sigma] = 1 - val_{\mathfrak{A}}(\varphi)[\sigma]$.
2. $val_{\mathfrak{A}}(\varphi \wedge \psi)[\sigma]$, $val_{\mathfrak{A}}(\varphi \vee \psi)[\sigma]$, $val_{\mathfrak{A}}(\varphi \rightarrow \psi)[\sigma]$, y $val_{\mathfrak{A}}(\varphi \leftrightarrow \psi)[\sigma]$, se obtienen de $val_{\mathfrak{A}}(\varphi)[\sigma]$ y $val_{\mathfrak{A}}(\psi)[\sigma]$ usando las tablas de verdad usuales para $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$.
3. $val_{\mathfrak{A}}(\exists y\varphi)[\sigma] = V$ si y sólo si $val_{\mathfrak{A}}(\varphi)[\sigma + (y/a)] = V$ para algún $a \in A$.
4. $val_{\mathfrak{A}}(\forall y\varphi)[\sigma] = V$ si y sólo si $val_{\mathfrak{A}}(\varphi)[\sigma + (y/a)] = V$ para cada $a \in A$.

$\mathfrak{A} \models \varphi[\sigma]$ significa $val_{\mathfrak{A}}(\varphi)[\sigma] = V$. Si φ es una sentencia, entonces $val_{\mathfrak{A}}(\varphi)$ abrevia $val_{\mathfrak{A}}(\varphi)[\emptyset]$, y $\mathfrak{A} \models \varphi$ significa $val_{\mathfrak{A}}(\varphi) = V$. Si Λ es un conjunto de sentencias, entonces $\mathfrak{A} \models \Lambda$ significa $\forall \varphi \in \Lambda (\mathfrak{A} \models \varphi)$.

Nuevamente, fijemos \mathfrak{A} : Si K denota a la colección de todas las parejas (φ, σ) tales que φ es una fórmula de \mathcal{L} y σ es una asignación para φ en A , entonces estamos definiendo una función $val_{\mathfrak{A}} : K \rightarrow \{0, 1\}$. Igual que antes, $val_{\mathfrak{A}}$ existe por el Teorema 1.4.7, usando recursión sobre la relación R , donde $(\varphi', \sigma')R(\varphi, \sigma)$ si y sólo si φ' es una subfórmula propia de φ y R es tanto bien fundada como set-like siempre y cuando A sea un conjunto. R no es set-like cuando A es una clase propia, ya que hay una clase propia de posibles $\sigma' = \sigma + (y/a)$ al tener que considerar todos los posibles valores para y , con lo cual, nuestra definición no está justificada, y es justamente por esto, que no podemos decir $\mathbf{V} \models \varphi$.

2.1.8 Notación. Si \mathfrak{A} es una \mathcal{L} -estructura y φ es una fórmula de \mathcal{L} , con variables libres entre x_1, \dots, x_n , y además $a_1, \dots, a_n \in A$, entonces todas las siguientes denotan $\mathfrak{A} \models \varphi[\sigma]$, donde $\sigma = \{(x_1, a_1), \dots, (x_n, a_n)\}$:

- $A \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$,
- $(\varphi(a_1, \dots, a_n))^{\mathfrak{A}}$,

- $(\varphi(a_1, \dots, a_n))^A$.

Ahora definiremos *subestructura* y *subestructura elemental*, estas nociones serán muy importantes en lo que resta del trabajo.

2.1.9 Definición. Sean \mathfrak{A} y \mathfrak{B} \mathcal{L} -estructuras, entonces $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ significa $A \subseteq B$ y los símbolos funcionales y predicativos de \mathfrak{A} son las restricciones de los correspondientes símbolos funcionales y predicativos de \mathfrak{B} . Específicamente:

1. si f es un símbolo funcional n -ario con $n > 0$, entonces $f_{\mathfrak{A}} = f_{\mathfrak{B}} \upharpoonright A^n$.
2. si p es un símbolo predicativo n -ario con $n > 0$, entonces $p_{\mathfrak{A}} = p_{\mathfrak{B}} \cap A^n$.
3. si c es un símbolo constante, entonces $c_{\mathfrak{A}} = c_{\mathfrak{B}}$.
4. si p es una letra proposicional, entonces $p_{\mathfrak{A}} = p_{\mathfrak{B}} \in 2 = \{0, 1\} = \{F, V\}$.

\mathfrak{A} es llamado *subestructura* (o *submodelo*) de \mathfrak{B} y \mathfrak{B} es llamado una extensión de \mathfrak{A} .

2.1.10 Definición. Sean \mathfrak{A} y \mathfrak{B} \mathcal{L} -estructuras tal que $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. Si φ es una fórmula de \mathcal{L} , entonces $\mathfrak{A} \preceq_{\varphi} \mathfrak{B}$ significa que $\mathfrak{A} \models \varphi[\sigma]$ si y sólo si $\mathfrak{B} \models \varphi[\sigma]$ para todas las asignaciones σ de φ en A . $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$ (lo cual se leerá \mathfrak{A} es *subestructura elemental* o *submodelo elemental* de \mathfrak{B}), significa $\mathfrak{A} \preceq_{\varphi} \mathfrak{B}$ para toda fórmula φ de \mathcal{L} .

El siguiente resultado se sigue inmediatamente de las definiciones anteriores.

2.1.11 Lema. Si $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, entonces $\mathfrak{A} \preceq_{\varphi} \mathfrak{B}$ siempre que φ esté libre de cuantificadores y $val_{\mathfrak{A}}(\tau)[\sigma] = val_{\mathfrak{B}}(\tau)[\sigma]$ siempre que τ sea un término de \mathcal{L} y σ una asignación para τ en A .

2.1.12 Ejemplo. Sea $\mathcal{L} = \{<\}$ y consideremos los intervalos en \mathbb{R} con su orden usual, entonces $[0, 1] \subseteq [0, 2]$ es decir, los elementos de $[0, 1]$ están ordenados de la misma manera en $[0, 1]$ que en $[0, 2]$, pero $[0, 1] \not\preceq [0, 2]$ porque $[0, 1] \not\preceq_{\varphi} [0, 2]$ para alguna φ (Aquí, debido al Lema 2.1.11, φ no puede estar libre de cuantificadores).

En efecto, si φ es $\exists y(x < y)$ entonces $[0, 1] \not\preceq_{\varphi} [0, 2]$ ya que $[0, 2] \models \varphi[1]$ pero $[0, 1] \not\models \varphi[1]$.

El siguiente teorema es una herramienta muy importante en teoría de conjuntos, nos dice por ejemplo, que si \mathcal{L} es numerable, entonces siempre podemos encontrar una \mathfrak{A} numerable y tal que $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$. En este trabajo haremos uso de él en varias ocasiones. Una demostración puede ser encontrada en [15].

2.1.13 Teorema (Teorema de Löwenheim-Skolem-Tarski). Trabajando en \mathbf{ZFE}^- . Sea \mathfrak{B} cualquier estructura para \mathcal{L} . Fijemos κ tal que $\max\{|\mathcal{L}|, \aleph_0\} \leq \kappa \leq |B|$, y fijemos $S \subseteq B$ tal que $|S| \leq \kappa$. Entonces existe un $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$ tal que $S \subseteq A$ y $|A| = \kappa$.

Como una aplicación del Teorema 2.1.13, tenemos el siguiente lema que ocuparemos en la demostración del muy importante Corolario 2.5.5 (página 57).

2.1.14 Lema. Supongamos AE. Sea B un conjunto infinito tal que (B, \in) satisface el Axioma de Extensión. Sea κ cualquier cardinal infinito tal que $\kappa \leq |B|$. Fijemos $S \subseteq B$ tal que S es transitivo y $|S| \leq \kappa$. Entonces hay un conjunto transitivo M tal que $S \subseteq M$, $(M, \in) \equiv (B, \in)$ y $|M| = \kappa$. En particular, hay un conjunto transitivo y numerable M tal que $(M, \in) \equiv (B, \in)$.

Demostración. Por el Teorema de Löwenheim-Skolem-Tarski, sea $A \preceq B$ tal que $S \subseteq A$ y $|A| = \kappa$. Entonces, A satisface el A. de Extensión. Además, por el A. de Fundación, \in es bien fundada en A y por tanto podemos definir la función *mos* en A (ver Definición 1.4.10, página 23), y obtenemos un isomorfismo de (A, \in) sobre (M, \in) para algún conjunto transitivo M , (por el Lema 1.4.15, página 16). Además por el Lema 1.4.16, como S es transitivo, $mos(y) = y$ para cada $y \in S$, con lo cual $S \subseteq M$. Además $|M| = \kappa$ ya que *mos* es una biyección y $|A| = \kappa$ y $(M, \in) \equiv (A, \in) \equiv (B, \in)$ ya que $M \cong A$ y $A \preceq B$. Finalmente, para obtener un conjunto transitivo y numerable M tal que $(M, \in) \equiv (B, \in)$, basta hacer $\kappa = \aleph_0$ y $S = \emptyset$. \blacktriangle

Ahora diremos algo sobre pruebas formales y la noción $\Gamma \vdash \varphi$ donde Γ es un conjunto de sentencias de \mathcal{L} y φ es una sentencia de \mathcal{L} .

2.1.15 Definición. Si Γ es un conjunto de sentencias de \mathcal{L} , entonces una *prueba formal* en Γ es un sucesión finita no vacía de sentencias de \mathcal{L} , digamos $\varphi_0, \dots, \varphi_n$, tal que para cada i :

- $\varphi_i \in \Gamma$, o
- φ_i es un axioma lógico, o
- para ciertos $j, k < i$, φ_i se sigue de φ_j, φ_k por Modus Ponens⁷ (así, φ_k debe ser $(\varphi_j \rightarrow \varphi_i)$).

⁷De manera informal, Modus Ponens nos dice que si hemos probado “ φ ” y “ $\varphi \rightarrow \psi$ ”, entonces podemos concluir ψ .

Esta sucesión es una prueba formal de su última sentencia φ_n .

2.1.16 Definición. Si Γ es un conjunto de sentencias de \mathcal{L} y φ es una sentencia de \mathcal{L} , entonces $\Gamma \vdash \varphi$ si y sólo si hay una prueba formal de φ en Γ .

Ya que hemos definido la noción \vdash , ahora diremos lo que entenderemos por $\text{Con}(\Gamma)$ e $\text{Incon}(\Gamma)$:

2.1.17 Definición. Si Γ es un conjunto de sentencias de \mathcal{L} , $\text{Incon}(\Gamma)$ significa que $\Gamma \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$ para alguna sentencia φ de \mathcal{L} . $\text{Con}(\Gamma)$ significa $\neg\text{Incon}(\Gamma)$.

Los siguientes teoremas relacionan las nociones de \vdash y \models . Una prueba del Teorema Sonoro 2.1.18 se puede encontrar en [14], y el primero en probar el Teorema de Completez 2.1.19 fue Gödel en 1929. Kunen nos menciona en [14] que el Teorema de Completez no se usa mucho en teoría de conjuntos ya que generalmente se establece $\text{Con}(\Gamma)$ produciendo un modelo para Γ , y para esto sólo se usa el Teorema Sonoro. Sin embargo, el Teorema de Completez muestra que esta forma de probar $\text{Con}(\Gamma)$ resulta natural, ya que $\text{Con}(\Gamma)$ no puede ser cierto a menos que exista un modelo para Γ .

2.1.18 Teorema (Teorema Sonoro⁸). Sea Γ es un conjunto de sentencias de \mathcal{L} . Entonces

1. Si $\mathfrak{A} \models \Gamma$ para alguna \mathfrak{A} , entonces $\text{Con}(\Gamma)$.
2. Para cada sentencia ψ de \mathcal{L} : si $\Gamma \vdash \psi$ entonces ψ es verdadero en cada \mathfrak{A} tal que $\mathfrak{A} \models \Gamma$.

2.1.19 Teorema (Teorema de Completez⁹). Supongamos que todo conjunto puede ser bien ordenado. Si Γ es un conjunto de sentencias de \mathcal{L} , entonces

1. $\text{Con}(\Gamma)$ si y sólo si existe alguna \mathfrak{A} tal que $\mathfrak{A} \models \Gamma$.
2. Para cada sentencia ψ de \mathcal{L} : $\Gamma \vdash \psi$ si y sólo si ψ es verdadero en cada \mathfrak{A} tal que $\mathfrak{A} \models \Gamma$.

Contando con estos elementos de la teoría de modelos, en el siguiente capítulo nos enfocamos a producir modelos para la teoría de conjuntos.

⁸“Soundness Theorem” en inglés.

⁹“Completeness Theorem” en inglés.

2.2. Modelos Para la Teoría de Conjuntos

Empezamos esta sección definiendo las fórmulas Δ_0 , el lema que sigue a la Definición 2.2.1 nos da cuenta de la importancia de éstas.

2.2.1 Definición. Supongamos que \mathcal{L} contiene el símbolo \in más posible-mente otros símbolos predicativos y funcionales. Entonces las fórmulas Δ_0 de \mathcal{L} son las fórmulas construidas por las siguientes reglas:

- (a) Todas las fórmulas atómicas son fórmulas Δ_0 .
- (b) Si φ es una fórmula Δ_0 , y es una variable y τ es un término que no contiene a y , entonces

$$\forall y[y \in \tau \rightarrow \varphi] \quad \text{y} \quad \exists y[y \in \tau \wedge \varphi],$$

(las cuales abreviaremos por $\forall y \in \tau \varphi$ y $\exists y \in \tau \varphi$, respectivamente), son fórmulas Δ_0 .

- (c) Si φ es una fórmula Δ_0 entonces $\neg\varphi$ es una fórmula Δ_0 .

- (d) Si φ y ψ son fórmulas Δ_0 entonces también lo son

$$\varphi \vee \psi, \varphi \wedge \psi, \varphi \rightarrow \psi \text{ y } \varphi \leftrightarrow \psi.$$

2.2.2 Lema. Sea \mathcal{L} como en la Definición 2.2.1 y supongamos que $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. También supongamos que A es transitivo y $\in_A = \{(a, b) \in A \times A : a \in b\}$ y $\in_B = \{(a, b) \in B \times B : a \in b\}$. Entonces $\mathfrak{A} \preceq_{\varphi} \mathfrak{B}$ para todas las fórmulas φ de \mathcal{L} que son Δ_0 .

Demostración. Por inducción sobre φ . Cuando φ es atómica, por el Lema 2.1.11 (página 33), se tiene el resultado.

Supongamos que ψ y γ son fórmulas Δ_0 de \mathcal{L} . Por la Definición 2.2.1, si $\varphi \in \{\neg\psi, \psi \wedge \gamma, \psi \vee \gamma, \psi \rightarrow \gamma, \psi \leftrightarrow \gamma\}$, entonces φ es Δ_0 .

Para el paso inductivo para “ \exists ” supongamos que

$$\varphi(\vec{x}, z) \quad \text{es} \quad \exists y[y \in \tau(\vec{x}, z) \wedge \psi(\vec{x}, y, z)],$$

donde ψ es Δ_0 , y asumamos inductivamente que $\mathfrak{A} \preceq_{\psi} \mathfrak{B}$. Para cualquier n -ada \vec{a} de A y $c \in A$, $\tau_{\vec{a}, c}$ abreviará $\text{val}_{\mathfrak{A}}\tau[\vec{a}, c]$, que es lo mismo que $\text{val}_{\mathfrak{B}}\tau[\vec{a}, c]$ ya que $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. Entonces para tales \vec{a}, c ocurre:

$$A \models \varphi[\vec{a}, c] \leftrightarrow \exists b \in A \{b \in \tau_{\vec{a}, c} \wedge A \models \psi[\vec{a}, b, c]\}$$

$$\leftrightarrow \exists b \in B \{b \in \tau_{\vec{a},c} \wedge B \models \psi[\vec{a}, b, c]\} \leftrightarrow B \models \varphi[\vec{a}, c].$$

El segundo \leftrightarrow usa que $\mathfrak{A} \preceq_{\psi} \mathfrak{B}$ junto con el hecho de que A es transitivo y así $\tau_{\vec{a},c} \subseteq A \subseteq B$, de tal forma que “ $\exists b \in A$ ” y “ $\exists b \in B$ ” se pueden reemplazar por “ $\exists b$ ”.

De manera similar procedemos para “ \forall ”.

▲

2.2.3 Ejemplo. En la primera columna de la siguiente tabla podemos ver algunas nociones conjuntistas y en la segunda columna, una fórmula Δ_0 (casi Δ_0 para la tercera, cuarta y quinta línea), que es equivalente a la noción correspondiente.

| | |
|--|---|
| $x \subseteq y$ | $\forall z \in x (z \in y)$ |
| $\text{emp}(x)$ o $x = \emptyset$ | $\forall z \in x (z \neq z)$ |
| $y = s(x)$ | $x \in y \wedge x \subseteq y \wedge \forall z \in y (z = x \vee z \in x)$ |
| $\text{int}(v, w, y)$ o $y = v \cap w$ | $y \subseteq v \wedge y \subseteq w \wedge \forall x \in v (\forall x \in w (x \in y))$ |
| $\text{SING}(x)$ | $\exists y \in x \forall z \in x (z = y)$ |

Los primeros seis Axiomas (ver Sección 0.3, página 5), se escribieron usando $\mathcal{L} = \{\in\}$. Los restantes Axiomas no fueron presentados así, pero sí resultan ser (equivalentes a) fórmulas Δ_0 . Usando el Lema 2.2.2 y la siguiente Definición, si $M \subseteq \mathbf{V}$ es transitivo y φ es Δ_0 , entonces φ será absoluta para M .

2.2.4 Definición. (a) φ es absoluta para A, B si y sólo si $A \preceq_{\varphi} B$.

(b) φ es absoluta para A si y sólo si $A \preceq_{\varphi} \mathbf{V}$.

En las pruebas de consistencia relativa en teoría de conjuntos, tales como $\text{Con}(\mathbf{ZF}^-) \rightarrow \text{Con}(\mathbf{ZF})$ y $\text{Con}(\mathbf{ZF}) \rightarrow \text{Con}(\mathbf{ZFE} + \mathbf{HGC})$ interviene el uso de clases propias como modelos. De manera más general, las *interpretaciones relativas* (ver Definición 2.2.5), proveen de pruebas del tipo $\text{Con}(\Lambda) \rightarrow \text{Con}(\Gamma)$ para teorías axiomáticas que pudieran ser totalmente distintas a la teoría de conjuntos. Como nosotros estamos interesados en aplicaciones a la teoría de conjuntos, en lo sucesivo \mathcal{L} casi siempre será $\{\in\}$ excepto cuando se diga lo contrario. Λ denotará algunos axiomas de la teoría de conjuntos, Γ será algunos otros axiomas frecuentemente (pero no siempre), de la teoría de conjuntos. Por ejemplo, sea $\Lambda = \mathbf{ZF}^-$, $\Gamma = \mathbf{ZF}$ y consideremos $\mathcal{L} = \{\in\}$, entonces más adelante probaremos que $\text{Con}(\mathbf{ZF}^-) \rightarrow \text{Con}(\mathbf{ZF})$

(ver Teorema 2.2.17, página 43). Para hacerlo, trabajaremos en \mathbf{ZF}^- y definiremos la clase $M = \mathbf{BF}$ (ver Definición 1.1.1, página 9), y mostraremos que todos los axiomas de \mathbf{ZF} se verifican en M . Es fundamental notar aquí (como lo hicimos en la Observación 0.1.1, página 3), que la lógica formal no menciona “la clase de los conjuntos bien fundados”; más bien usa la fórmula $\mu(x)$ que dice que x es bien fundado.

Ilustremos un ejemplo donde $\mathcal{L} \neq \{\in\}$. Sea $\mathcal{L} = \{+, \cdot, 0\}$ y Λ los axiomas para la teoría de anillos escritos en este lenguaje. Podemos considerar a todo el universo $\mathbf{V} = \{x : x = x\}$ como modelo para Λ si interpretamos a $+$ como la diferencia simétrica ($A + B = A \setminus B \cup B \setminus A$), a \cdot como \cap y 0 como \emptyset . Esto nos produce una interpretación relativa de la teoría de anillos en la teoría de conjuntos. Explicaremos cómo es que a pesar de que \mathbf{V} es una clase propia, esta relativización nos produce una prueba de consistencia relativa para $\text{Con}(\mathbf{ZF}) \rightarrow \text{Con}(\Lambda)$. Es decir, si interpretamos a Λ de la manera descrita, y trabajamos en \mathbf{ZF} , podremos verificar los axiomas de la teoría de anillos.

La siguiente definición es importante para las pruebas de consistencia. Conceptualmente la noción de *relativización* es idéntica a la noción de estructura \mathfrak{A} (ver Definición 2.1.2, página 29), pero en este caso, el universo A podría ser una clase propia, con lo cual esta definición toma su lugar en la metateoría.

2.2.5 Definición. Si Λ es algún conjunto de axiomas en $\{\in\}$ para la teoría de conjuntos y \mathcal{L} es un lenguaje finito, se dirá que \mathfrak{A} es una *interpretación relativa* de \mathcal{L} en Λ si \mathfrak{A} consiste de una clase no vacía A junto con una asignación de entidades semánticas adecuadas $s^{\mathfrak{A}}$ para cada símbolo de \mathcal{L} . Específicamente:

1. si f es un símbolo funcional n -ario con $n > 0$, entonces $f^{\mathfrak{A}} : A^n \rightarrow A$,
2. si p es un símbolo predicativo n -ario con $n > 0$, entonces $p^{\mathfrak{A}} \subset A^n$,
3. si c es un símbolo funcional 0-ario entonces $c^{\mathfrak{A}} \in A$,
4. si p es un símbolo predicativo 0-ario entonces $p^{\mathfrak{A}} \in 2 = \{0, 1\} = \{F, V\}$,

2.2.6 Definición. Dada una interpretación relativa \mathfrak{A} como en la Definición 2.2.5, si τ es un término de \mathcal{L} y φ es una fórmula, entonces $\tau^{\mathfrak{A}}$ es el término y $\varphi^{\mathfrak{A}}$ es la fórmula que se obtienen reemplazando los diversos símbolos (f, p, c)

de \mathcal{L} por sus formas relativizadas ($f^{\mathfrak{A}}, p^{\mathfrak{A}}, c^{\mathfrak{A}}$), y relativizando todos los cuantificadores en A , es decir, reemplazando $\forall x \dots$ por $\forall x \in A \dots$ y $\exists x \dots$ por $\exists x \in A \dots$.

El siguiente Teorema, es conceptualmente idéntico al Teorema Sonoro (ver 2.1.18, página 35).

2.2.7 Lema. Sea \mathfrak{A} una interpretación relativa de \mathcal{L} en Λ , sean ψ y $\theta_1, \dots, \theta_k$ sentencias de \mathcal{L} y asúmase que $\{\theta_1, \dots, \theta_k\} \vdash \psi$. Entonces $\Lambda \vdash (\theta_1^{\mathfrak{A}}, \dots, \theta_k^{\mathfrak{A}}) \rightarrow \psi^{\mathfrak{A}}$.

El siguiente Corolario al Lema 2.2.7 es la base de muchas de las pruebas de consistencia relativa en la teoría de conjuntos.

2.2.8 Corolario. Sea \mathfrak{A} una interpretación relativa de \mathcal{L} en Λ . Sea Γ un conjunto de sentencias de \mathcal{L} y supongamos que podemos verificar $\Lambda \vdash \theta^{\mathfrak{A}}$ para cada axioma θ de Γ . Entonces, en la metateoría podemos concluir $\text{Con}(\Lambda) \rightarrow \text{Con}(\Gamma)$.

Recordemos que $\text{Incon}(\Gamma)$ significa que $\Gamma \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$ para alguna sentencia φ de \mathcal{L} y, $\text{Con}(\Gamma)$ significa $\neg\text{Incon}(\Gamma)$.

Demostración. En la metateoría, supongamos que tenemos una contradicción en Γ , así $\{\theta_1, \dots, \theta_k\} \vdash (\psi \wedge \neg\psi)$, donde $\theta_1, \dots, \theta_k$ son axiomas de Γ . Aplicando el Lema 2.2.7 $\Lambda \vdash (\psi \wedge \neg\psi)^{\mathfrak{A}}$ que es $\psi^{\mathfrak{A}} \wedge \neg\psi^{\mathfrak{A}}$, lo cual es una contradicción en Λ . Hemos probado que $\text{Incon}(\Gamma) \rightarrow \text{Incon}(\Lambda)$. Por lo tanto, $\text{Con}(\Lambda) \rightarrow \text{Con}(\Gamma)$. ▲

2.2.9 Definición. Sea M una clase cualquiera. Entonces para cualquier fórmula ϕ definimos ϕ^M , la relativización de ϕ en M , por inducción sobre ϕ como:

- (a) $(x = y)^M$ es $x = y$.
- (b) $(x \in y)^M$ es $x \in y$.
- (c) $(\phi \wedge \psi)^M$ es $\phi^M \wedge \psi^M$.
- (d) $(\neg\phi)^M$ es $\neg(\phi^M)$.
- (e) $(\exists x\phi)^M$ es $\exists x(x \in M \wedge \phi^M)$.

De nuevo, es pertinente tener en mente que como M es una clase, y estrictamente no podemos hablar de clases, M realmente es una fórmula $M(v)$, ϕ es otra fórmula, y ahora estamos definiendo, en la metateoría, una tercera fórmula ϕ^M . En el inciso (e), de manera más precisa, deberíamos poner $\exists x(M(x) \wedge \phi^M)$.

El siguiente resultado nos dice qué propiedades debemos pedirle a una clase M para que se satisfagan ciertos axiomas de la teoría de conjuntos.

2.2.10 Lema (ZF⁻-P). Para cualquier clase M :

1. Si M es transitivo, el Axioma de Extensión es verdadero en M .
2. Si $M \subseteq \mathbf{BF}$, entonces el Axioma de Fundación se cumple en M .
3. Si $\forall z \in M \forall y \subseteq z [y \in M]$, entonces el Axioma de Comprensión se cumple en M .
4. Si $\forall x, y \in M [\{x, y\} \in M]$, entonces el Axioma del Par se cumple en M .
5. Si $\forall \mathcal{F} \in M [\bigcup \mathcal{F} \in M]$, entonces el Axioma de la Unión se cumple en M .
6. Supongamos que M es transitivo y que para todas las funciones f : si $\text{dom}(f) \in M$ y $\text{ran}(f) \subseteq M$, entonces $\text{ran}(f) \in M$. Entonces el Axioma de Reemplazo se verifica en M .

Demostración. (1) El axioma de extensión relativizado a M es sólo la afirmación de que la relación \in es extensional en M . (Recordemos que R es extensional en A si y sólo si $\forall x, y \in A \text{ pred}(A, x, R) = \text{pred}(A, y, R) \rightarrow x = y$). Tomemos $x, y \in M$. Como M es transitivo, $x \subseteq M$ y así $\text{pred}(M, x, \in) = \{y \in M : y \in x\} = \{y : y \in x\}$. Haciendo explícito el uso del axioma de extensión (recordar que estamos trabajando en ZF⁻-P), podemos concluir que $\{y : y \in x\} = x$. Análogamente, $\text{pred}(M, y, \in) = y$. Por lo tanto, si $\text{pred}(M, x, \in) = \text{pred}(M, y, \in)$ entonces $x = y$. De esta manera, \in es extensional en M .

(2) El Axioma de Fundación relativizado a M es

$$\forall x \in M [\exists y \in M (y \in x) \rightarrow \exists y \in M (y \in x \wedge \neg \exists z \in M (z \in x \wedge z \in y))].$$

Sabemos que \in es bien fundada en **BF**. Tomemos y un elemento \in -minimal en $x \cap M$. Esta y , satisface los requerimientos.

(3) Fijemos primero una fórmula φ que no contenga a y libremente. φ podría contener a x, z libremente, junto con otras variables libres v_0, \dots, v_{n-1} , debido a esto la escribimos como $\varphi(x, z, v_0, \dots, v_{n-1}) = \varphi(x, z, \vec{v})$. Debemos verificar que

$$\forall z, v_0, \dots, v_{n-1} \in M \exists y \in M \forall x \in M [x \in y \leftrightarrow x \in z \wedge \varphi^M(x, z, \vec{v})]. \quad (*)$$

Veamos que esto ocurre si definimos $y = \{x \in z : \varphi^M(x, z, \vec{v})\}$. Primero notemos que usando el A. de Comprensión en $\mathbf{ZF}^- - \mathbf{P}$ junto con la fórmula $\varphi^M(x, z, \vec{v})$, dicho y , existe. Finalmente, por como definimos a y , resulta que $y \subseteq z$, usando nuestra hipótesis, $y \in M$ y por tanto, se verifica (*).

(4) El Axioma del Par relativizado a M queda de la siguiente manera:

$$\forall x, y \in M \exists z \in M [x \in z \wedge y \in z].$$

Tomemos $x, y \in M$, si hacemos $z = \{x, y\}$, por hipótesis $z \in M$.

(5) El Axioma de la Unión relativizado a M queda de la siguiente manera:

$$\forall \mathcal{F} \in M \exists A \in M \forall Y \in M \forall x \in M (x \in Y \wedge Y \in \mathcal{F} \rightarrow x \in A).$$

Sea $\mathcal{F} \in M$ y sean $Y, x \in M$ de tal manera que $Y \in \mathcal{F}$ y $x \in Y$. Si definimos $A = \bigcup \mathcal{F}$, entonces $x \in A$, y además, por hipótesis $A \in M$, que es lo que queríamos verificar.

(6) El A. de Reemplazo nos dice que para cada fórmula φ , sin B libre

$$\forall A [\forall x \in A \exists! y \varphi(x, y) \rightarrow \exists B \forall x \in A \exists y \in B \varphi(x, y)].$$

Supongamos que M es transitivo y que para todas las funciones f , si $\text{dom}(f) \in M$ y $\text{ran}(f) \subseteq M$, entonces $\text{ran}(f) \in M$. Supongamos además que $A \in M$ y $\forall x \in M [x \in A \rightarrow \exists! y \in M \varphi^M(x, y)]$. Necesitamos un $B \in M$ tal que $(\forall x \in A \exists y \in B \varphi(x, y))^M$. Sea f una función tal que $\text{dom}(f) = A$ y $f(x)$ es la única $y \in M$ tal que $\varphi^M(x, y)$. Entonces utilizando el A. de Reemplazo en $\mathbf{ZF}^- - \mathbf{P}$, aplicado a la fórmula $\varphi^M(x, y) \wedge y \in M$ existe el conjunto $\text{ran}(f)$ y de esta manera podemos justificar la existencia de la función f . Además, como $\text{ran}(f) \subseteq M$ se tiene que $\text{ran}(f) \in M$. Así, el B que necesitamos, es precisamente $\text{ran}(f)$. \blacktriangle

2.2.11 Corolario (ZF⁻-P). Los Axiomas de Extensión, Fundación, Comprensión, Par, Unión y Reemplazo se verifican en **BF**.

Demostración. Es fácil verificar, utilizando los resultados del capítulo 1, que todas estas condiciones se satisfacen. ▲

Ahora veamos qué debemos pedirle a M para tener el A. de Potencia.

2.2.12 Lema (ZF⁻). Sea M una clase transitiva. Entonces

$$\forall x \in M ((\mathcal{P}(x) \cap M) \in M) \rightarrow \text{se verifica el A. de Potencia en } M.$$

Adicionalmente, el recíproco de esta proposición se verifica si M satisface el Axioma de Comprensión.

Demostración. Como M es transitivo, la noción \subseteq es absoluta, entonces el A. de Potencia se verifica en M si y sólo si

$$\forall x \in M \exists y \in M \forall z \in M (z \subseteq x \rightarrow z \in y).$$

\rightarrow] Sea $x \in M$, hagamos $y = \mathcal{P}(x) \cap M$.

\leftarrow] Sea $x \in M$ entonces (A. de Potencia) ^{M} nos da un $y \in M$ tal que $\mathcal{P}(x) \cap M \subseteq y$. Usando el A. de Comprensión en M y la absolutez de \subseteq , se cumple que $\mathcal{P}(x) \cap M = \{z \in y : (z \subseteq x)^M\} \in M$. ▲

2.2.13 Corolario (ZF⁻). El Axioma de Potencia se verifica en **BF**.

Demostración. Sea $x \in \mathbf{BF}$, por el Lema 1.1.7 (página 11), para cada $y \subseteq x$, $y \in \mathbf{BF}$, por lo tanto $\mathcal{P}(x) \cap \mathbf{BF} = \mathcal{P}(x)$, y por (a) del Lema 1.1.10 (página 12), $\mathcal{P}(x) \in \mathbf{BF}$. ▲

El próximo Lema no es difícil de verificar y lo ocupamos para la demostración del Lema 2.2.15 que va en el mismo sentido que los Lemas 2.2.10 y 2.2.12.

2.2.14 Lema. Si M es cualquier modelo para los Axiomas de Extensión, Comprensión, Par y Unión, entonces \emptyset^M , S^M , \cap^M están definidas (donde S es la función sucesor). Además, si M es transitivo, entonces éstas son absolutas para M .

2.2.15 Lema. Sea M una clase transitiva y supongamos que los Axiomas de Extensión, Comprensión, Par y Unión se verifican en M . Entonces:

- El Axioma de Elección se verifica en M si y sólo si cada familia disjunta de conjuntos no vacíos en M , tiene un conjunto selectivo en M .
- El Axioma de Infinito se verifica en M si $\omega \in M$.

Demostración. Para que se verifique **AE** en M debemos mostrar que

$$\forall F \exists C [df(F) \rightarrow cs(C, F)],$$

donde $df(F) := \emptyset \notin F \wedge \forall x \in F \forall y \in F (x \neq y \rightarrow x \cap y = \emptyset)$. Lo cual nos dice que F es una familia disjunta de conjuntos no vacíos y $cs(C, F)$ es $\forall x \in F : (SING(C \cap x))$, que nos dice que C es un conjunto selectivo para F (Recordemos que $SING(x) \leftrightarrow (\exists y \in x \forall z \in x (z = y))$). Tanto df como cs son Δ_0 en las nociones \emptyset , \cap , $SING$ que por el Lema 2.2.14 son absolutas para M . Así $(\mathbf{AE})^M$ es equivalente a $\forall F \in M \exists C \in M [df(F) \rightarrow cs(C, F)]$.

El Axioma de Infinito se verifica en M si y sólo si $\exists x \in M (\varphi(x)^M)$, donde $\varphi(x) := \emptyset \in x \wedge \forall y \in x (S(y) \in x)$, pero φ es Δ_0 en las nociones \emptyset y S que son absolutas para M , así, podemos reemplazar el $(\varphi(x))^M$ por $\varphi(x)$. Así, si suponemos que $\omega \in M$, entonces se verifica $\varphi(\omega)$, por lo tanto, el Axioma de Infinito se cumple en M . ▲

2.2.16 Corolario (ZF⁻-P). El Axioma de Infinito se verifica en **BF**. Además, **AE** implica que **AE** se verifica en **BF**.

Demostración. $\omega \in \mathbf{BF}$, por lo tanto, Infinito se verifica en **BF**. Supongamos **AE**. Si $F \in \mathbf{BF}$ es una familia disjunta de conjuntos no vacíos, entonces F tiene un conjunto selectivo C . $C \cap \bigcup F$ es también un conjunto selectivo para F , y por los Lemas 1.1.7 y 1.1.10 (páginas 11 y 12, respectivamente), $C \cap \bigcup F \in \mathbf{BF}$. ▲

El siguiente Teorema, cosecha los frutos que hemos sembrado en el capítulo 1 y lo que llevamos de éste.

2.2.17 Teorema. Sea Γ alguna de las teorías **ZF-P**, **ZFE-P**, **ZF**, **ZFE**. Sea Γ^- , igual a Γ pero sin el Axioma de Fundación. Entonces $\text{Con}(\Gamma^-) \rightarrow \text{Con}(\Gamma)$.

Demostración. Usando los Corolarios 2.2.11, 2.2.13 y 2.2.16, podemos trabajar en Γ^- y probar cada Axioma de Γ relativizado a **BF**. ▲

2.3. Nociones Absolutas

El objetivo de esta sección es trabajar en teorías más débiles que **ZF** y ver qué nociones y conceptos resultan ser absolutos (ver Definición 2.2.4, página 37), para modelos transitivos de estas teorías. En lo siguiente, asumiremos el Axioma de Fundación a menos que se especifique lo contrario. Asumir el A. de Fundación simplificará nuestra discusión sobre modelos de la Teoría de Conjuntos, ya que el hecho de que la relación \in sea siempre bien fundada (Teorema 1.3.1, página 19), expande enormemente la colección de conceptos que se puede probar que son absolutos, como veremos más adelante.

2.3.1 Definición. TCB (Teoría de Conjuntos Básica) denota los Axiomas de Extensión, Fundación, Comprensión, Par, Unión, más la disyunción “se verifica el Axioma de Potencia o se verifica el Axioma de Reemplazo”.

2.3.2 Lema. Las siguientes nociones están definidas por fórmulas que TCB prueba que son equivalentes a fórmulas Δ_0 . Por lo tanto, son absolutas para cada modelo transitivo M de TCB (Ver 2.2.2, página 36 y 2.2.4 (b), página 37).

1. x es un conjunto transitivo.
2. x es un ordinal.
3. x es un ordinal sucesor.
4. $x = 0$.
5. x es un ordinal límite.
6. x es un número natural.
7. $x \subseteq \omega$.
8. $x = \omega$.

Demostración. (1) x es transitivo si y sólo si $\forall y \in x [y \subseteq x]$. Lo cual es equivalente a $\forall y \in x [\forall z \in y (z \in x)]$.

(2) x es un ordinal $\leftrightarrow x$ es transitivo $\wedge (\forall u \in x)(\forall v \in x)(u \in v \vee v \in u \vee u = v) \wedge (\forall u \in x)(\forall v \in x)(\forall w \in x)(u \in v \in w \rightarrow u \in w)$.

(3) x es un ordinal sucesor $\leftrightarrow x$ es un ordinal $\wedge (\exists y \in x)(\forall z \in x)(z = y \vee z \in y)$.

(4) $x = 0 \leftrightarrow \forall u \in x (u \neq u)$.

(5) x es un ordinal límite $\leftrightarrow x$ es un ordinal $\wedge (\forall u \in x)(\exists v \in x)(u \in v)$.

(6) x es un número natural $\leftrightarrow x$ es un ordinal $\wedge (x$ no es límite $\vee x = 0)$
 $\wedge (\forall u \in x)(u = 0 \vee u$ no es límite).

(7) $x \subseteq \omega \leftrightarrow \forall u \in x (u$ es un número natural).

(8) $x = \omega \leftrightarrow x$ es un ordinal límite $\wedge x \neq 0 \wedge \forall u \in x (u$ es un número natural).

▲

2.3.3 Lema. Las siguientes nociones son absolutas para modelos transitivos de TCB.

1. La función 0-aria \emptyset .
2. La función 1-naria S (sucesor).
3. La función binaria intersección \cap .
4. La función binaria unión \cup , las funciones 1-arias unión \bigcup e intersección \bigcap , donde definimos $\bigcap \emptyset = \emptyset$.
5. La relación ternaria $\{x, y\} = z$.
6. La función binaria pareja no ordenada $\{x, y\}$, la función unaria singular $\{x\}$ y la función binaria pareja ordenada (x, y) .
7. Las propiedades: z es una pareja ordenada y x es una relación.
8. $dom(x)$ y $ran(x)$.
9. Las propiedades: f es una función, f es inyectiva, f es sobreyectiva, y f es biyectiva.
10. La función binaria $f(x)$, definida como \emptyset a menos que f sea una función y $x \in dom(f)$.
11. La función binaria $x \times y$.
12. Si R es una relación sobre un conjunto A , son absolutas: R es transitiva, irreflexiva, reflexiva, satisface la tricotomía, simétrica, ordena parcialmente, ordena estrictamente, ordena totalmente, es relación de equivalencia, es un pre-orden.

Demostración. Para (1), (2) y (3) ya encontramos sus equivalencias en fórmulas que son (equivalentes a una) Δ_0 en el ejemplo 2.2.3 de la página 37.

(4)

$$z = x \cup y \leftrightarrow [\forall w \in z (w \in x \vee w \in y) \wedge x \subset z \wedge y \subset z].$$

$$y = \bigcup x \leftrightarrow [\forall v \in x (v \subseteq y) \wedge \forall w \in y \exists v \in x (w \in v)].$$

$$y = \bigcap x \leftrightarrow [\forall v \in x (y \subset v) \wedge \forall v \in x \forall z \in v (\forall w \in x (z \in w) \rightarrow z \in y) \wedge (x = 0 \rightarrow y = 0)].$$

(5) La definición de la noción $\{x, y\} = z$ es equivalente en TCB a la fórmula Δ_0 :

$$pno(x, y, z) : \quad x \in z \wedge y \in z \wedge \forall u \in z (u = x \vee u = y).$$

Donde $pno(x, y, z)$ denota a $z = \{x, y\}$.

(6) No es complicado mostrar que $\text{TCB} \vdash \forall x, y \exists! z pno(x, y, z)$, de esta manera, la función binaria pareja no ordenada es absoluta para modelos transitivos de TCB. Además, notemos que la función unaria singular $\{x\} = \{x, x\}$, y la función binaria pareja ordenada $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$ son composiciones de la función pareja no ordenada, y por lo tanto, son absolutas para modelos transitivos de TCB.

(7) Podemos decir que z es de la forma $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ si $\exists v \in z \exists x, y \in v [z = (x, y)]$. Esta última expresión es una composición de la función pareja ordenada, la cual ya probamos que es absoluta para modelos transitivos de TCB, por lo tanto la expresión: z es una pareja ordenada, también lo será. Procedemos de forma similar con x es una relación, observando simplemente que x es una relación si y sólo si $\forall z \in x [z]$ es una pareja ordenada.

(8)

$$\text{dom}(R) = \{x : \exists y [(x, y) \in R]\}, \quad \text{ran}(R) = \{y : \exists x [(x, y) \in R]\}.$$

Así, $\{\{x\}, \{x, y\}\} \in R$ implica que $\{x\}, \{x, y\} \in \bigcup R$ y $x, y \in \bigcup \bigcup R$, de esta forma, obtenemos $\text{dom}(R)$ y $\text{ran}(R)$ usando el A. de Unión y el A. de Comprensión (no usamos ni A. de Potencia ni A. de Reemplazo), notando por ejemplo para el dominio que

$$y = \text{dom}(R) \leftrightarrow \forall v \in y \exists w \in \bigcup \bigcup R [(v, w) \in R,] \quad y$$

$$\forall u, w \in \bigcup \bigcup R [(v, w) \in R \rightarrow v \in y].$$

Para el rango se hace algo similar y por tanto, se tienen que ambas son absolutas para modelos transitivos de TCB.

(9) Basta observar que son absolutas: f es una función si y sólo si

$$\forall x \in \text{dom}(f) \forall y, z \in \text{ran}(f)[(x, y) \in f \wedge (x, z) \in f \rightarrow y = z].$$

f es una función inyectiva si y sólo si f es una función y

$$\forall x, y \in \text{dom}(f) \forall z, t \in \text{ran}(f)[(x, z) \in f \wedge (y, t) \in f \wedge x \neq y \rightarrow z \neq t].$$

Procedemos de manera similar para f es sobreyectiva y f es una biyección.

(10) Es similar a (9), basta darnos cuenta que la función aplicación es realmente una función binaria $\text{apli}(f, x)$ la cual siempre escribimos como $f(x)$.

(11) $Z = X \times Y$ si y sólo si

$$[\forall z \in Z \exists x \in X \exists y \in Y (z = (x, y))] \wedge [\forall x \in X \forall y \in Y \exists z \in Z (z = (x, y))],$$

lo cual se puede ver que es absoluto.

(12) Veamos el caso R es un orden total en A , esto ocurre si y sólo si R es transitiva, irreflexiva y satisface la trocotomía en A . Cada una de estas propiedades se puede probar que es absoluta, y por lo tanto, se tiene la absolutéz de R es un orden total en A para modelos transitivos de TCB. Podemos proceder de manera similar con las demás. \blacktriangle

2.3.4 Lema. Las nociones “ R bien ordena a A ” y “ R es bien fundada en A ” son absolutas para modelos transitivos de **ZF-P**.

Demostración. Recordemos que “ R bien ordena a A ” si y sólo si R es un orden total en A y R es bien fundada en A . En el Lema 2.3.3, ya vimos que R es un orden total en A , así que basta verificar que “ R es bien fundada en A ” es absoluta (ver Definición 1.2.1, página 15). Sean $R, A \in M$, demostraremos que $(R \text{ es bien fundada en } A) \leftrightarrow (R \text{ es bien fundada en } A)^M$.

\rightarrow] Probaremos la contrarrecíproca. Sea $\psi(A, R, X)$ “ X es un subconjunto no vacío de A sin elementos R -minimales”. Si $\neg(R \text{ es bien fundada en } A)^M$, entonces hay un $X \in M$ tal que $(\psi(A, R, X))^M$. Esta última fórmula se puede ver que es absoluta, y por tanto, R no es bien fundada en A .

\leftarrow] El argumento anterior no se puede utilizar en esta parte, ya que podría existir un X que satisfaga la propiedad $\psi(A, R, X)$ y sin embargo, $X \notin M$. Así que mejor procedamos suponiendo $(R \text{ es bien fundada en } A)^M$, entonces, como M es modelo de **ZF**⁻ – **P** y R es bien fundada y set-like en A

existe una función *rank* (ver la Definición 1.4.8, página 22). Es decir, existe $\Phi \in M$ que satisface “ $\Phi : A \rightarrow \mathbf{Ord}$ es una función tal que $\forall x, y \in A (xRy \rightarrow \Phi(x) < \Phi(y))$ ”, y por lo que ya se ha probado anteriormente, el enunciado entre comillas es absoluto. De esta manera, utilizando el Lema 1.4.3 (página 20), la existencia de dicha Φ implica que R es bien fundada sobre A . ▲

Lo siguiente será probar que las funciones $\alpha + \beta$ y $\alpha \cdot \beta$ (ver la Sección 0.2), son absolutas.

2.3.5 Lema. Las funciones $\alpha + \beta$ y $\alpha \cdot \beta$ son absolutas para modelos transitivos de **ZF-P**.

Demostración. Si M es un modelo transitivo de **ZF-P** y $\alpha, \beta \in M$, entonces $\alpha +^M \beta$ y $\alpha \cdot^M \beta$ están bien definidos. Para probar la absolutez del producto, sea $\gamma = \alpha \cdot^M \beta$ y mostremos que $\gamma = \alpha \cdot \beta$. Aplicando la definición, sea $f \in M$ tal que en M es cierto que $f : \beta \times \alpha \rightarrow \gamma$ y f es un isomorfismo, donde $\beta \times \alpha$ está ordenado lexicográficamente. Veamos que “el orden lexicográfico” e “isomorfismo” son nociones absolutas. $<_L$ es el orden lexicográfico en $\beta \times \alpha$ si y sólo si

$$<_L = \{((s, t), (s', t')) \in (\beta \times \alpha) \times (\beta \times \alpha) : s \in s' \vee [s = s' \wedge t \in t']\}.$$

El cual es absoluto por lo visto anterioremente. Además $f : \beta \times \alpha \rightarrow \gamma$ es un isomorfismo si y sólo si f es biyectiva y

$$\forall x, y \in \beta \times \alpha [x <_L y \leftrightarrow f(x) \in f(y)].$$

Ya sabemos que ser biyectivo es absoluto, además la otra parte hace uso del orden lexicográfico el cual ya vimos que es absoluto. De esta manera, ser isomorfismo también es absoluto. En conclusión, f realmente es un isomorfismo que establece que $\gamma = \text{tipo}(\beta \times \alpha) = \alpha \cdot \beta$. Procedemos de manera similar para probar que la suma también es absoluta. ▲

2.3.6 Lema. Sea M un modelo transitivo para TCB. Entonces:

1. $[M]^{<\omega} \subseteq M$.
2. $HF \subseteq M$. (ver Notación 1.1.16, página 14).
3. $<^\omega M \subseteq M$.

Demostración. (1) Probaremos por inducción sobre $n \in \omega$ que $[M]^n \subseteq M$. Para $n = 1$, sabemos que si $x \in M$, entonces $\{x\}$ es absoluta y por tanto $\{x\} \in M$ con lo cual $[M]^1 \subseteq M$. Supongamos que $[M]^n \subseteq M$, y sea f tal que f es función y para cada $s, x \in M$, $f(s, x) = s \cup \{x\}$. Esta función es absoluta en M , así $\text{ran}(f) \subset M$, en particular si pensamos que s tiene cardinalidad n por nuestra hipótesis inductiva, $s \in M$, y así para cada $x \in M$, $s \cup \{x\} \in M$. con lo cual se tiene que $[M]^{n+1} \subseteq M$.

(2) Veamos por inducción sobre $n \in \omega$ que $R(n) \subseteq M$. $R(0) = \{0\} \subseteq M$. Supongamos que $R(n) \subseteq M$. $R(n+1) = \mathcal{P}(R(n))$. Como $R(n)$ es finito, $\mathcal{P}(R(n))$ es finito, usando (1) y la hipótesis inductiva se concluye que $R(n+1) \subseteq M$.

(3) Si $f : n \rightarrow M$, entonces $f \subseteq n \times M$, t como la función $t(i, x) = (i, x)$ es absoluta, entonces $f \subseteq M$, y f es finita. Así, usando (1), se tiene que $f \in M$.

▲

2.3.7 Lema. Las nociones “ x es finito” y “ x es hereditariamente finito” son absolutas para modelos transitivos de TCB si están definidas por las siguientes fórmulas

$$\text{Fin}(x) \leftrightarrow \exists n, f[\text{nat}(n) \wedge \text{biy}(f, n, t)],$$

$$\text{HrdFin}(x) \leftrightarrow \exists n, t, f[x \subseteq t \wedge \text{trans}(t) \wedge \text{nat}(n) \wedge \text{biy}(f, n, t)].$$

Aquí $\text{trans}(x)$ dice que x es transitivo, $\text{nat}(x)$ dice que x es un número natural y $\text{biy}(f, x, y)$ dice que f es una biyección de x a y .

Demostración. Sea $x \in M$, veamos $(\text{Fin}(x)) \leftrightarrow (\text{Fin}(x))^M$,

←] Como existen $n, f \in M$ tales que $(\text{nat}(n) \wedge \text{biy}(f, n, x))^M$ y tanto nat como biy son absolutas, se tiene $\text{Fin}(x)$.

→] Fijemos n, f tales que $(\text{nat}(n) \wedge \text{biy}(f, n, x))$. Entonces, por el Lema 2.3.6, $n, f \in M$, y como nat y biy son absolutas, se tiene $(\text{Fin}(x))^M$.

Usando argumentos similares al anterior, se verifica sin dificultad que

$$(\text{HrdFin}(x)) \leftrightarrow (\text{HrdFin}(x))^M.$$

▲

2.3.8 Lema. Suponga que M es una clase transitiva tal que el Axioma de Comprensión se verifica en M , y suponga que para cada subconjunto $x \subseteq M$, existe un $y \in M$ tal que $x \subseteq y$. Entonces todos los Axiomas de **ZF** se verifican en M .

Demostración. Podemos utilizar el Lema 2.2.10 para ver que se verifican los Axiomas del (1) al (6). Por ejemplo, para el Axioma 5 (Unión), sea $\mathcal{F} \in M$, como M es transitiva para cada elemento $x \in \mathcal{F}$, $x \in M$, y nuevamente, usando que M es transitiva, para cada $x \in \mathcal{F}$, $x \subseteq M$, lo cual implica que $\bigcup \mathcal{F} \subseteq M$. Usando la hipótesis, existe $y \in M$ tal que $\bigcup \mathcal{F} \subseteq y$. Haciendo uso del A. de Comprensión en M , podemos concluir que $\bigcup \mathcal{F} \in M$. Por el Lema 2.2.12, el Axioma 8 (Potencia), se verifica en M . Para el Axioma 7 (Infinito), usando el Lema 2.3.6, tenemos que $\omega \subseteq M$, luego, por hipótesis, para algún $y \in M$, $\omega \subseteq y$. Usando el A. de Comprensión en M , concluimos que $\omega \in M$.

▲

2.4. Modelos para Pedazos de ZFE: Los Conjuntos $H(\kappa)$ y $R(\gamma)$

En esta sección, trabajando dentro de **ZFE**, produciremos conjuntos que modelan casi todos los axiomas de **ZFE**, para esto, definiremos a continuación los conjuntos $H(\kappa)$ y veremos algunas de sus propiedades.

2.4.1 Definición. Para cualquier cardinal κ ,

$$H(\kappa) = \{x \in \mathbf{BF} : |ctr(x)| < \kappa\}.$$

Los elementos de $H(\kappa)$ se dirán hereditariamente de cardinalidad $< \kappa$. Como mencionamos en la Notación 1.1.16 (página 14), $H(\omega) = R(\omega) = HF$ es el conjunto de los conjuntos hereditariamente finitos. $H(\omega_1)$ es el conjunto de los conjuntos hereditariamente numerables. El siguiente Lema, nos muestra que para cada κ , $H(\kappa)$ es un conjunto y no una clase propia.

2.4.2 Lema. Para cualquier cardinal infinito κ , $H(\kappa)$ es de tamaño $2^{<\kappa}$ (donde $2^{<\kappa} = |\sup\{2^\lambda : \lambda < \kappa \wedge \lambda = |\lambda|\}|$), y $H(\kappa) \subseteq R(\kappa)$.

Demostración. Primero veamos que $H(\kappa) \subseteq R(\kappa)$. Para esto, tomemos $x \in H(\kappa)$. Como $R(\kappa) = \{x \in \mathbf{BF} : rank(x) < \kappa\}$, veamos que $rank(x) < \kappa$. Sea $t = ctr(x)$ y $S = \{rank(y) : y \in t\}$. Como para cada y , $rank(y) \in \mathbf{Ord}$, se tiene que $S \subset \mathbf{Ord}$. Verifiquemos que $S \in \mathbf{Ord}$. Para esto, denotemos por α al ordinal más pequeño que no pertenece a S . Entonces $\forall \gamma < \alpha$, $\gamma \in S$ y por tanto $\alpha \subset S$. Si $\alpha \neq S$, llamemos β al mínimo ordinal en S tal que $\alpha < \beta$. Luego, existe $y \in t$ tal que $rank(y) = \beta$. Como t es transitivo, $\forall z \in y$, $z \in t$

y entonces, $\forall z \in y$, $rank(z) < rank(y) = \beta$. Además, para cada $z \in y$, $rank(z) \neq \alpha$, pues $z \in t$ y $\alpha \notin S$. Por como definimos a β , ocurre que para cada $z \in y$, $rank(z) < \alpha$. Por lo tanto,

$$rank(y) = \sup\{rank(z) + 1 : z \in y\} \leq \alpha,$$

lo cual es una contradicción. De esta manera, $\alpha = S$. Ahora veamos que $rank(x) = \alpha$. Como $\alpha \in \mathbf{Ord}$, $rank(\alpha) = \alpha$ y por tanto

$$\alpha = rank(\alpha) = rank(S) = rank(\{rank(y) : y \in t\}) =$$

$$= \sup\{rank(rank(y)) + 1 : y \in t\} = \sup\{rank(y) + 1 : y \in t\},$$

y como para cada $y \in t = ctr(x)$ existe $z \in x$ tal que $rank(y) \leq rank(z)$, se tiene que $\sup\{rank(y) + 1 : y \in t\} \leq \sup\{rank(y) + 1 : y \in x\} = rank(x)$. Por tanto, $\alpha \leq rank(x)$. Por otra parte, $\{rank(y) + 1 : y \in x\} \subseteq \{rank(y) + 1 : y \in t\}$ y, por tanto, $rank(x) \leq \alpha$. Así, $rank(x) = \alpha$. Finalmente, observemos que $|\alpha| = |\{rank(y) + 1 : y \in t\}| \leq |t| < \kappa$ y esto implica que $\alpha < \kappa$, es decir, $rank(x) < \kappa$. Por tanto, $x \in R(\kappa)$ y así, $H(\kappa) \subseteq R(\kappa)$.

Ahora veamos que $|H(\kappa)| = 2^{<\kappa}$. Para esto, verifiquemos primero que $|H(\kappa)| \geq 2^{<\kappa}$, ésto se cumplirá si para cada $\lambda < \kappa$, $\mathcal{P}(\lambda) \subseteq H(\kappa)$, ya que esto nos diría que para cada $\lambda < \kappa$, $|H(\kappa)| \geq 2^\lambda$, puesto que el tamaño de $\mathcal{P}(\lambda)$ es precisamente 2^λ . Tomemos entonces $\lambda < \kappa$ y $t \in \mathcal{P}(\lambda)$, entonces $t \subseteq \lambda < \kappa$ y con esto, $|ctr(t)| \leq |ctr(\lambda)| = \lambda < \kappa$. Por tanto, $t \in H(\kappa)$ y así para cada $\lambda < \kappa$, $\mathcal{P}(\lambda) \subseteq H(\kappa)$, con lo cual $|H(\kappa)| \geq 2^{<\kappa}$.

Para ver que $|H(\kappa)| \leq 2^{<\kappa}$, definamos $F : H(\kappa) \rightarrow \bigcup\{\mathcal{P}((\lambda \times \lambda) : \lambda < \kappa)\}$ de la siguiente manera, para $x \in H(\kappa)$, sea $\lambda = |ctr(x) \cup \{x\}| < \kappa$. Por el Axioma de Elección, podemos escoger un relación $F(x) \subseteq \lambda \times \lambda$ tal que $(\lambda; F(x)) \cong (ctr(x) \cup \{x\}; \in)$. Como $\bigcup\{\mathcal{P}((\lambda \times \lambda) : \lambda < \kappa)\}$ es de tamaño $2^{<\kappa}$, si probamos que F es inyectiva, entonces tenemos lo que queremos. Hagámoslo. Sean $x, x' \in H(\kappa)$ tales que $F(x) = F(x')$. Así, existen $\lambda, \gamma < \kappa$ tales que $\lambda = |ctr(x) \cup \{x\}|$ y $\gamma = |ctr(x') \cup \{x'\}|$. Veamos que $\lambda = \gamma$, para esto, supongamos lo contrario. Así, sin pérdida de generalidad, pensemos que $\gamma < \lambda$. Como existe un isomorfismo φ entre $(\lambda; F(x))$ y $(ctr(x) \cup \{x\}; \in)$ y además $\gamma < \lambda$, se tiene que existe $t \in ctr(x) \cup \{x\}$ tal que $\varphi(\gamma) = t$. Si $t \neq 0$, existe $y \in t$ y además $y \in ctr(x) \cup \{x\}$, lo cual implica que existe $\alpha < \lambda$ tal que $\varphi(\alpha) = y$. Como $y \in t$ y φ

es un isomorfismo, ocurre que $(\alpha, \gamma) \in F(x) = F(x') \subseteq \gamma \times \gamma$, es decir $\gamma \in \gamma$, contradicción. Si $t = 0$, entonces $\varphi(\gamma + 1) \neq 0$ y haciendo algo similar llegamos a otra contradicción. Por lo tanto, $\lambda = \gamma$. Entonces $(ctr(x) \cup \{x\}; \in) \cong (\lambda; F(x)) = (\gamma; F(x')) \cong (ctr(x') \cup \{x'\}; \in)$. Por el Lema 1.4.18 (página 26), se tiene que $x = x'$ y por tanto F es inyectiva. Por todo lo anterior se tiene que $|H(\kappa)| = 2^{<\kappa}$, lo cual finaliza la prueba. \blacktriangle

La mayoría de las veces, $H(\kappa)$ es un subconjunto propio de $R(\kappa)$, excepto en el siguiente caso.

2.4.3 Lema. Si κ es un cardinal regular, $H(\kappa) = R(\kappa)$ si y sólo si $\kappa = \omega$ o κ es fuertemente inaccesible (abreviado F. I.).

Demostración. [\Leftarrow] Probemos que si $\kappa = \omega$ o κ es F. I. entonces $\forall \alpha < \kappa$ ($|R(\alpha)| < \kappa$). Si $\kappa = \omega$, por el Lema 1.2.7 (página 18), se verifica el resultado. Supongamos que κ es F. I. y probemos el resultado por inducción sobre $\alpha < \kappa$. Si $\alpha = 0$, $R(\alpha) = R(0) = 0 < \kappa$. Supongamos ahora que se verifica que para cada $\beta < \alpha$, ocurre que ($|R(\beta)| < \kappa$). Si $\alpha = \beta + 1$, $|R(\alpha)| = |\mathcal{P}(R(\beta))| = 2^{|R(\beta)|} < \kappa$. Si α es límite, $|R(\alpha)| = |\bigcup_{\beta < \alpha} R(\beta)| < \kappa$, ya que estamos tomando una unión menor que κ de conjuntos menores que κ y κ es regular. Por lo tanto, $\forall \alpha < \kappa$ ($|R(\alpha)| < \kappa$). Tomemos a $x \in R(\kappa)$, así $rank(x) = \alpha < \kappa$ implica $ctr(x) \subseteq R(\alpha)$, y por lo que acabamos de probar $|ctr(x)| \leq |R(\alpha)| < \kappa$, es decir, $x \in H(\kappa)$. Por tanto, $R(\kappa) \subseteq H(\kappa)$. Por el Lema 2.4.2, tenemos que $H(\kappa) = R(\kappa)$.

[\Rightarrow] Verifiquemos que si $\kappa > \omega$ es regular y no es F. I. entonces $H(\kappa) \neq R(\kappa)$. Supongamos entonces que $\kappa > \omega$ es regular y no es F. I., de esta manera, podemos encontrar $\lambda < \kappa$ tal que $2^\lambda \geq \kappa$. Y de aquí que

$$\kappa \leq 2^\lambda = |\mathcal{P}(\lambda)| \leq |ctr(\mathcal{P}(\lambda))|$$

y por tanto, $\mathcal{P}(\lambda) \in R(\kappa) \setminus H(\kappa)$. Es decir, $H(\kappa) \neq R(\kappa)$. \blacktriangle

2.4.4 Lema. Para cualquier κ infinito,

- (a) $H(\kappa)$ es transitivo.
- (b) $H(\kappa) \cap \mathbf{Ord} = \kappa$.
- (c) Si $x \in H(\kappa)$ entonces $\bigcup x \in H(\kappa)$.

(d) Si $x, y \in H(\kappa)$ entonces $\{x, y\} \in H(\kappa)$.

(e) $x \in H(\kappa)$ y $y \subset x$, entonces $y \in H(\kappa)$.

(f) (**AE**) Si κ es regular, entonces $\forall x (x \in H(\kappa) \leftrightarrow x \subset H(\kappa) \wedge |x| < \kappa)$.

Demostración. (a) Basta notar que $y \in x \rightarrow ctr(y) \subset ctr(x)$.

(b) $x \in H(\kappa) \cap \mathbf{Ord} \leftrightarrow x \in \mathbf{Ord}$ y $|ctr(x)| = |x| < \kappa \leftrightarrow x < \kappa$.

(c) Como $\bigcup x \subset ctr(x)$, se tiene que $ctr(\bigcup x) \subset ctr(x)$, entonces $x \in H(\kappa) \rightarrow |ctr(\bigcup x)| \leq |ctr(x)| < \kappa$. Por lo tanto, $\bigcup x \in H(\kappa)$.

(d) Notemos que

$$|ctr(\{x, y\})| = |ctr(x) \cup ctr(y) \cup \{x, y\}| \leq \max\{|ctr(x)|, ctr(y)\} < \kappa,$$

por lo tanto, $\{x, y\} \in H(\kappa)$.

(e) Observemos que $y \subset x \rightarrow |ctr(y)| \leq |ctr(x)|$. Con lo cual $y \in H(\kappa)$.

(f) Sea κ regular. Si $x \in H(\kappa)$ entonces cada elemento de x tiene clausura transitiva menor que κ y por tanto $x \subset H(\kappa)$, además $|x| \leq |ctr(x)| < \kappa$. Supongamos ahora que $x \subset H(\kappa)$ y $|x| < \kappa$. Como $ctr(x) = x \cup \bigcup\{ctr(y) : y \in x\}$, se tiene que $ctr(x)$ es una unión $< \kappa$ de conjuntos de cardinalidad $< \kappa$; como κ es regular, $|ctr(x)| < \kappa$, es decir, $x \in H(\kappa)$. \blacktriangle

Como nos muestra el siguiente teorema, el único Axioma que no se puede verificar en $H(\kappa)$ es el de Potencia.

2.4.5 Teorema (\mathbf{ZFE}^-). $H(\kappa) \models \mathbf{ZFE} - \mathbf{P}$ si κ es un cardinal regular no numerable.

Demostración. Sea κ un cardinal regular no numerable. Usando el Lema 2.2.10 (página 40), como $H(\kappa) \subset \mathbf{BF}$ y es transitivo, los Axiomas de Extensión y Fundación se verifican. Además, de manera inmediata por este mismo Lema, y el Lema 2.4.4, se verifican Los Axiomas de Unión, Par, Comprensión y Reemplazo. Adicionalmente, por (b) del Lema 2.4.4, como $\omega < \kappa$, $\omega \in H(\kappa) \cap \mathbf{Ord} = \kappa$, es decir, $\omega \in H(\kappa)$ y por el Lema 2.2.15 (página 42), el Axioma de Infinito se verifica. Usando nuevamente el Lema 2.2.15, para ver que el Axioma de Elección se verifica en $H(\kappa)$ es suficiente probar que

$$\forall F \in H(\kappa) \exists C \in H(\kappa)[df(F) \rightarrow cs(C, F)].$$

Sea $F \in H(\kappa)$ tal que $(df(F))^{H(\kappa)}$ y supongamos que C es un conjunto selectivo para F (el cual existe ya que estamos suponiendo **AE**), veamos

que $C \in H(\kappa)$. Para esto, notemos que $C = C \cap \bigcup F$. Luego, $ctr(C) = ctr(C \cap \bigcup F) \subseteq ctr(F)$. Y como $F \in H(\kappa)$, $C = C \cap \bigcup F \in H(\kappa)$. Por lo tanto, **AE** se verifica en $H(\kappa)$. \blacktriangle

Por otra parte, si nos restringimos a los conjuntos hereditariamente finitos, podemos verificar el A. de Potencia, pero no así el Axioma de Infinito. Por el contrario, se verifica que éste es falso:

2.4.6 Teorema (\mathbf{ZF}^-). $HF \models \mathbf{ZFE} - \mathbf{Inf}$, y el Axioma de Infinito es falso en HF .

Demostración. Al igual que en la prueba del Teorema 2.4.5, en HF se verifican los Axiomas de Extensión, Fundación, Par, Unión, Comprensión y Reemplazo. Por los Lemas 2.2.12 y 1.2.7 (páginas 42 y 18, respectivamente), el Axioma de Potencia también se verifica en HF . HF admite un buen orden sin suponer AE. Para esto, se define $E \subseteq \omega \times \omega$ por $nEm \leftrightarrow 2 \nmid [m2^{-n}]$, es decir, si hay un 1 en el n -ésimo lugar de la representación binaria de m (contando de derecha a izquierda). Así, $(R(\omega), \in) \cong (\omega, E)$. El isomorfismo Γ se define como $\Gamma(y) = \sum \{2^{\Gamma(x)} : x \in y\}$. El Axioma de Infinito es falso, ya que si existiera $x \in HF$ tal que $\emptyset \in x \wedge \forall y \in x (y \cup \{y\} \in x)$ entonces $rank(x) \geq \omega$, lo cual es una contradicción. \blacktriangle

Un resultado interesante es el siguiente.

2.4.7 Teorema (\mathbf{ZFE}). Si κ es regular y mayor que ω , entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

- (a) $H(\kappa)$ satisface **ZFE**.
- (b) $H(\kappa) = R(\kappa)$.
- (c) κ es fuertemente inaccesible.

Demostración. (b) \leftrightarrow (c). Ya lo tenemos por el Lema 2.4.2.

(b) \rightarrow (a). Para obtener esta implicación sólo falta ver que $H(\kappa)$ satisface el Axioma de Potencia. Esto ocurre si y sólo si

$$\forall x \in H(\kappa) \exists y \in H(\kappa) \forall z \in H(\kappa) (z \subset x \rightarrow z \in y).$$

Ya sabemos que $z \subset x \in H(\kappa) \rightarrow z \in H(\kappa)$, además $H(\kappa)$ verifica el Axioma de Comprensión (el cual nos permite pensar, en $H(\kappa)$, en el conjunto de los subconjuntos de x en $H(\kappa)$), así, AP se verifica si y sólo si

$\forall x \in H(\kappa) \quad \mathcal{P}(x) \in H(\kappa)$, lo cual es cierto ya que estamos suponiendo que $H(\kappa) = R(\kappa)$.

(a) \rightarrow (c). Veamos que $\neg(c) \rightarrow \neg(a)$. Es decir, si κ no es F. I. entonces $H(\kappa)$ no satisface **ZFE**. En efecto, acabamos de ver que AP se verifica en $H(\kappa)$ si y sólo si $\forall x \in H(\kappa) \quad \mathcal{P}(x) \in H(\kappa)$, pero si κ no es F. I., entonces existe $\lambda < \kappa$ tal que $2^\lambda \geq \kappa$, y $\lambda \in H(\kappa)$ pero $\mathcal{P}(\lambda) \notin H(\kappa)$, y por ende, $H(\kappa)$ no satisface **ZFE**. \blacktriangle

Por el artículo de Gödel de 1931 (ver [5]), **ZFE** no puede probar su propia consistencia. Así, dentro de **ZFE** no se puede demostrar la existencia de cardinales fuertemente inaccesibles (de poderse probar en **ZFE** la existencia de un κ que es F. I., por el teorema anterior, tendríamos que **ZFE** prueba su propia consistencia). Los $R(\alpha)$ como los definimos en 1.1.1 (página 9), también son conjuntos, por lo tanto, tampoco podemos esperar que algún $R(\alpha)$ nos modele todo **ZFE**. Sin embargo, estos conjuntos son una buena aproximación para modelar todo lo que queramos. Veamos el siguiente resultado.

2.4.8 Teorema (\mathbf{ZF}^-). $R(\gamma) \models \mathbf{Z}$ (**Z** es **ZF - Reemplazo**) siempre que γ sea un ordinal límite mayor que ω . Adicionalmente, en (\mathbf{ZFE}^-) , $R(\gamma) \models \mathbf{ZE}$.

Este teorema se demuestra usando las mismas ideas que en los resultados anteriores. Al igual que con los $H(\kappa)$, ocurre que $\mathbf{ZFE} \not\vdash \exists \gamma [R(\gamma) \models \mathbf{ZFE}]$, pues de lo contrario, **ZFE** es inconsistente. Nuestro objetivo en la siguiente sección será que para cualquier lista finita Λ de instancias de Reemplazo, $\mathbf{ZFE} \vdash \exists \gamma [R(\gamma) \models \mathbf{ZE} \cup \Lambda]$. Después de todo, cualquier demostración que hagamos en matemáticas (y en particular en teoría de conjuntos), consiste en una serie finita de pasos, en particular, ocupamos el A. de Reemplazo una cantidad finita de veces.

2.5. El Teorema del Reflejo

En esta sección presentamos el Teorema del Reflejo y sus principales consecuencias. En resumidas cuentas, a pesar de la incapacidad de tener un conjunto que nos modele todo **ZFE**, podemos encontrar un conjunto numerable y transitivo que nos modele tanto de **ZFE** como necesitemos. Este hecho será fundamental en el desarrollo del próximo capítulo.

2.5.1 Definición. Una lista de fórmulas $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}$ es cerrada bajo

subfórmulas si y sólo si cada subfórmula de todo φ_i está también en la lista y, ninguna fórmula de la lista usa el cuantificador universal “ \forall ”.

El siguiente lema nos será de mucha utilidad en la demostración del Teorema del Reflejo.

2.5.2 Lema. Sea $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}$ una lista de fórmulas de $\mathcal{L} = \{\in\}$ cerrada bajo subfórmulas. Sean A y B clases tales que $\emptyset \neq A \subseteq B$. Entonces, los siguientes enunciados son equivalentes:

1. $\bigwedge_{i < n} (A \preceq_{\varphi_i} B)$.
2. Para todas las fórmulas existenciales $\varphi_i(x_1, \dots, x_r)$ de la forma $\exists y \varphi_j(\vec{x}, y)$ lo siguiente es válido $\forall a_1, \dots, a_r \in A [\varphi_i^B(\vec{a}) \rightarrow \exists b \in A \varphi_j^B(\vec{a}, b)]$.

Demostración. (1 \rightarrow 2) Supóngase que $\varphi_i(x_1, \dots, x_r)$ es una fórmula existencial de la forma $\exists y \varphi_j(\vec{x}, y)$, sean $a_1, \dots, a_r \in A$ y supongamos $\varphi_i^B(\vec{a})$. Como $A \preceq_{\varphi_i} B$, tenemos que $\varphi_i^A(\vec{a})$ y entonces $\exists b \in A \varphi_j^A(\vec{a}, b)$ y como $A \preceq_{\varphi_j} B$, entonces $\exists b \in A \varphi_j^B(\vec{a}, b)$ que es lo que queríamos.

(2 \rightarrow 1) Supongamos (2) y probemos que $A \preceq_{\varphi_i} B$ por inducción sobre la longitud de φ_i . Si φ_i es atómica, que es el caso base, se tiene el resultado. Supongamos que hemos probado $A \preceq_{\varphi_j} B$ siempre que φ_j es más corto que φ_i . El paso inductivo para los conectivos proposicionales también es inmediato. Por lo tanto, supongamos que $\varphi_i(\vec{x})$ es existencial de la forma $\exists y \varphi_j(\vec{x}, y)$. Fijemos $a_1, \dots, a_r \in A$, queremos probar $\varphi_i^B(\vec{a}) \leftrightarrow \varphi_i^A(\vec{a})$. Supongamos $\varphi_i^B(\vec{a})$, por (2) tenemos $\exists b \in A \varphi_j^B(\vec{a}, b)$, usando la hipótesis inductiva tenemos $\exists b \in A \varphi_j^A(\vec{a}, b)$ y por tanto $\varphi_i^A(\vec{a})$. Supongamos ahora $\varphi_i^A(\vec{a})$, entonces $\exists b \in A \varphi_j^A(\vec{a}, b)$, por la hipótesis inductiva $\exists b \in A \varphi_j^B(\vec{a}, b)$ y por tanto $\varphi_i^B(\vec{a})$. \blacktriangle

2.5.3 Teorema (Teorema del Reflejo). Sea $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}$ cualquier lista de fórmulas de $\mathcal{L} = \{\in\}$. Supongamos que \mathbf{B} es una clase no vacía y $A(\xi)$ un conjunto para cada $\xi \in \mathbf{Ord}$ y supongamos que:

- I. $\xi < \eta \rightarrow A(\xi) \subseteq A(\eta)$.
- II. $A(\eta) = \bigcup_{\xi < \eta} A(\xi)$ para η límite.
- III. $\mathbf{B} = \bigcup_{\xi \in \mathbf{Ord}} A(\xi)$.

Entonces

$$\forall \xi \exists \eta > \xi [A(\eta) \neq \emptyset \wedge \bigwedge_{i < n} (A(\eta) \preceq_{\varphi_i} \mathbf{B}) \wedge \eta \text{ es un ordinal l\u00edmite}].$$

2.5.4 Observaci\u00f3n. ■ La aplicaci\u00f3n m\u00e1s conocida del Teorema 2.5.3 es cuando $\mathbf{B} = \mathbf{V}$ y $A(\xi) = R(\xi)$. Hemos probado que I, II y III se verifican para $R(\xi)$. III es precisamente el Axioma de Fundaci\u00f3n.

- Si \mathbf{B} es un conjunto, entonces para alg\u00fan ξ lo suficientemente grande, $A(\xi) = \mathbf{B}$ y el resultado es trivial.

Demostraci\u00f3n. (Del Teorema 2.5.3). Podemos asumir que nuestra lista es cerrada bajo subf\u00f3rmulas. Si no lo es, podemos reemplazar cada φ_i por una f\u00f3rmula l\u00f3gicamente equivalente que no use “ \forall ” (reemplazamos “ \forall ” por “ $\neg \exists \neg$ ”), y luego agregamos todas las subf\u00f3rmulas de cada f\u00f3rmula que aparece en la lista.

Para cada $\varphi_i(\vec{x})$ existencial (de la forma $\exists y \varphi_j(\vec{x}, y)$, donde \vec{x} denota una r -tupla; $r = r_i$), def\u00ednase $F_i : \mathbf{B}^r \rightarrow \mathbf{Ord}$ como sigue: si $\varphi_i^{\mathbf{B}}(\vec{a})$, entonces $F_i(\vec{a})$ es el menor ζ tal que $\exists b \in A(\zeta) \varphi_j^{\mathbf{B}}(\vec{a}, b)$. Si $\neg \varphi_i^{\mathbf{B}}(\vec{a})$, entonces $F_i(\vec{a}) = 0$.

Def\u00ednase $G_i : \mathbf{Ord} \rightarrow \mathbf{Ord}$ por $G_i(\xi) = \sup\{F_i(a_1, \dots, a_r) : a_1, \dots, a_r \in A(\xi)\}$ siempre que φ_i es existencial, con $r = r_i$. Cuando φ_i no es existencial, sea $G_i(\xi) = 0$.

Finalmente, sea $K(\xi) = \max\{\xi + 1, \max\{G_i(\xi) : i < n\}\}$. Ahora, sea $\xi \in \mathbf{Ord}$. Es suficiente producir un $\eta > \xi$ tal que $A(\eta) \neq \emptyset$ y que (2) del Lema 2.5.2 se verifique para $A(\eta)$ y \mathbf{B} .

Sea $\zeta_0 > \eta$ el menor ordinal tal que $A(\zeta_0) \neq \emptyset$ y sea $\zeta_{n+1} = K(\zeta_n)$. Entonces $\xi < \zeta_0 < \zeta_1 < \dots$. Sea $\eta = \sup\{\zeta_k : k \in \omega\}$. ▲

2.5.5 Corolario. Sea Λ un conjunto finito de Axiomas de **ZF**. Entonces

1. $\mathbf{ZF} \vdash \exists \eta [R(\eta) \models \mathbf{Z} \cup \Lambda]$.
2. $\mathbf{ZFE} \vdash \exists \eta [R(\eta) \models \mathbf{ZE} \cup \Lambda]$.
3. $\mathbf{ZFE} \vdash \exists M [M \models \mathbf{ZE} \cup \Lambda \wedge |M| = \aleph_0 \wedge M \text{ es transitivo}]$.

Demostraci\u00f3n. Para (1) y (2), Sea $\mathbf{B} = \mathbf{V}$ y $A(\xi) = R(\xi)$. Sea $\{\varphi_0, \dots, \varphi_{n-1}\} = \Lambda$. Apliquemos el Teorema 2.5.3 para obtener un ordinal l\u00edmite η mayor que ω , tal que $\bigwedge_{i < n} (R(\eta) \preceq_{\varphi_i} \mathbf{V})$. Como φ_i es un enunciado y un Axioma de **ZF**,

cada $(R(\eta) \preceq_{\varphi_i} \mathbf{V})$ implica que $\varphi_i^{R(\eta)} \leftrightarrow \varphi_i$ y por tanto $R(\eta) \models \varphi_i$ (ya que como estamos suponiendo \mathbf{ZF} , cada φ_i es verdadero). Además, por el Teorema 2.4.8 (página 55), ya sabemos que $\mathbf{ZF} \vdash (R(\eta) \models \mathbf{Z})$ y $\mathbf{ZFE} \vdash (R(\eta) \models \mathbf{ZE})$. Para (3), apliquemos el Lema 2.1.14 (página 34), a $(R(\eta), \in)$. \blacktriangle

2.5.6 Observación. \blacksquare Como $\mathbf{Z} = \mathbf{ZF}$ -Reemplazo, el Corolario 2.5.5 se pudo haber escrito con Λ un conjunto finito de instancias de Reemplazo.

- \blacksquare \mathbf{ZFE} no puede producir un modelo para \mathbf{ZFE} , pero puede producir un modelo transitivo numerable de una parte suficiente de \mathbf{ZFE} para probar todas las matemáticas conocidas.

En la demostración del Corolario 2.5.5, el único lugar donde ocupamos que φ_i es Axioma de \mathbf{ZF} , fue para concluir que $(\varphi_i^{R(\eta)} \leftrightarrow \varphi_i) \rightarrow R(\eta) \models \varphi_i$. Así, la misma demostración nos sirve para el siguiente Corolario.

2.5.7 Corolario. Sea Λ un conjunto finito de sentencias de $\mathcal{L} = \{\in\}$. Entonces

$$\mathbf{ZFE} \vdash \exists M [M \models \mathbf{ZE} \wedge |M| = \aleph_0 \wedge M \text{ es transitivo} \wedge \bigwedge_{i < n} (\varphi_i^M \leftrightarrow \varphi_i)].$$

Para sentencias, $\varphi_i^M \leftrightarrow \varphi_i$ es lo mismo que $M \preceq_{\varphi_i} \mathbf{V}$. En general, no podemos obtener un conjunto transitivo y pequeño M , que satisfaga $M \preceq_{\varphi_i} \mathbf{V}$ para fórmulas φ_i . (Ver II.5.6 de [13]). Quitando “transitivo”, tenemos este Corolario.

2.5.8 Corolario. Sea Λ un conjunto finito de fórmulas de $\mathcal{L} = \{\in\}$. Entonces

$$\mathbf{ZFE} \vdash \exists C [C \models \mathbf{ZE} \wedge |C| = \aleph_0 \wedge \bigwedge_{i < n} (C \preceq_{\varphi_i} \mathbf{V})].$$

El Siguiente teorema nos confirma lo que ya pensábamos, si suponemos la consistencia de \mathbf{ZF} o de alguna teoría más fuerte, entonces no podremos describirla completamente con una cantidad finita de axiomas.

2.5.9 Teorema. Si $\Gamma \supseteq \mathbf{ZF}$ es consistente, entonces Γ no es finitamente axiomatizable, esto significa que si $\Lambda \subset \Gamma$ es finito, entonces existe un enunciado ψ tal que $\Gamma \vdash \psi$ pero $\Lambda \not\vdash \psi$.

Demostración. Sea $\Gamma \supseteq \mathbf{ZF}$ consistente y Λ finito. Sea además, $\psi := \exists\eta(R(\eta) \models \Lambda)$. Podemos asumir, ampliando Λ si es necesario, que Λ prueba hechos básicos acerca $R(\eta)$ y \models . Entonces por el Teorema 2.5.3, $\Gamma \vdash \psi$, es decir, $\Gamma \vdash \exists\eta(R(\eta) \models \Lambda)$. Veamos que $\Lambda \not\vdash \psi$. Para esto, supongamos lo contrario, es decir, $\Lambda \vdash \psi$. Trabajando en Λ , sea η el mínimo ordinal tal que $R(\eta) \models \Lambda$, entonces sucede que $R(\eta) \models \psi$. Pero como η es el mínimo ordinal tal que $R(\eta) \models \Lambda$, entonces $\neg\exists\gamma \in \eta(R(\gamma) \models \Lambda)$, entonces se tiene que $\Lambda \vdash \neg\psi$. Así, Λ es inconsistente y por tanto, Γ es inconsistente, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\Lambda \not\vdash \psi$, que es lo que queríamos probar. \blacktriangle

El siguiente teorema es la versión conjuntista del Teorema 2.5.3.

2.5.10 Teorema (ZFE). Sea $\kappa > \omega$ un cardinal regular no numerable. Sea $A(\xi)$ un conjunto para cada $\xi \leq \kappa$, y supongamos que:

- I. $\xi < \eta \rightarrow A(\xi) \subseteq A(\eta)$.
- II. $A(\eta) = \bigcup_{\xi < \eta} A(\xi)$ para $\eta \leq \kappa$ límite.
- III. $|A(\xi)| < \kappa$ para cada $\xi < \kappa$, y $|A(\kappa)| = \kappa$.

Entonces

$$\forall \xi < \kappa \exists \eta [\xi < \eta < \kappa \wedge A(\eta) \neq \emptyset \wedge A(\eta) \preceq A(\kappa) \wedge \eta \text{ es un ordinal límite}].$$

Demostración. Es muy similar a la prueba del Teorema del Reflejo 2.5.3, poniendo κ en vez de **Ord** y $A(\kappa)$ en vez de **B**. Se definen las F_i , G_i y K de manera apropiada y para ver que tanto $G_i(\xi)$ como $K(\xi)$ son menores que κ , se usa la regularidad de éste. \blacktriangle

El siguiente corolario se desprende de manera inmediata del Teorema 2.5.10.

2.5.11 Corolario (ZFE). Si κ es un cardinal fuertemente inaccesible, entonces $\{\eta < \kappa : R(\eta) \preceq R(\kappa)\}$ es no acotado en κ .

2.5.12 Observación. Si κ es fuertemente inaccesible se tiene que $R(\eta) \preceq R(\kappa) \rightarrow R(\eta) \models \mathbf{ZFE}$, pero el recíproco no es cierto, ya que si γ es el menor ordinal tal que $R(\gamma) \models \mathbf{ZFE}$, entonces $R(\gamma) \models \neg\exists\eta[R(\eta) \models \mathbf{ZFE}]$, y por tanto, $R(\gamma) \not\preceq R(\kappa)$.

Capítulo 3

La Técnica de Forcing

La técnica de Forcing fue introducida por Paul Cohen (ver [4]), quien en 1962 partiendo de un modelo de **ZF** construyó otro modelo de **ZF** en donde el Axioma de Elección (**AE**) no se verifica, y partiendo de un modelo de **ZFE**, construyó otro modelo de **ZFE** donde la Hipótesis del Continuo (**HC**) no se verifica. Combinando esto con los resultados de Gödel (quien probó en [6] que **AE** es consistente con **ZF** y que **HC** es consistente con **ZFE**), finalmente se tuvo que **AE** es independiente de **ZF** y que **HC** es independiente de **ZFE**.

Esta técnica ha demostrado ser muy fructífera para producir una gran cantidad de modelos y pruebas de consistencia. La idea central del forcing consiste en extender un modelo transitivo de la teoría de conjuntos M (*modelo base*), adjuntando un nuevo conjunto G (un *conjunto genérico*), para obtener un modelo transitivo de la teoría de conjuntos más grande $M[G]$, llamado *extensión genérica*. El conjunto genérico es aproximado mediante *condiciones de forzamiento* en el modelo base, y una elección premeditada de las condiciones de forzamiento determina qué es cierto en la extensión genérica.

En la primera sección de este capítulo definiremos la noción de forcing, presentaremos las extensiones genéricas y verificaremos que éstas son modelos de **ZFE**, siempre y cuando partamos de un modelo de **ZFE**. En la segunda sección probaremos la consistencia de la negación de la hipótesis del continuo construyendo un conjunto que sea modelo de **ZFE** + \neg **HC**. Para conseguirlo, comenzaremos con M un modelo transitivo y numerable (lo cual abreviaremos mtn), de **ZFE** y probaremos que existe un conjunto $N \supseteq M$ modelo numerable y transitivo más grande (una extensión genérica de M)

que satisface $\mathbf{ZFE} + \neg\mathbf{HC}$. También, probaremos que es consistente que el tamaño del continuo sea, salvo algunas restricciones, del tamaño que nosotros queramos (ver Corolario 3.2.21). En la tercera sección se verá que es posible construir modelos que sí verifican \mathbf{HC} pero que no cumplen con \mathbf{HCG} (ver Sección 3.3).¹ En la última sección, damos una demostración explícita de la consistencia de $\mathbf{ZFE} + \mathbf{HC}$.

No olvidemos que cuando decimos “sea M un mtn de \mathbf{ZFE} ” en realidad tenemos en mente que M es un mtn de una parte lo suficientemente grande de \mathbf{ZFE} que abarca todo lo que en ese momento estemos interesados; esto lo tenemos garantizado por el Teorema del Reflejo 2.5.3 (página 56) y el Corolario 2.5.5 (página 57):

3.0.1 Notación. Si M es como en (3) del Corolario 2.5.5, diremos que M es un mtn de \mathbf{ZFE}^* .

3.1. Extensiones Genéricas

En esta sección nos ocuparemos de ciertos *conjuntos parcialmente ordenados* (ver Definición 3.1.2), fundamentales en la técnica de forcing. También definiremos a las *extensiones genéricas* (ver Definición 3.1.13), y el concepto de *forzar* (ver Definición 3.1.22), igual de importantes que los conjuntos parcialmente ordenados. Finalizamos con la prueba de que una extensión genérica de un modelo M de \mathbf{ZFE}^* sigue modelando a \mathbf{ZFE}^* (ver Teorema 3.1.31). Iniciaremos dando algunas definiciones que involucran principalmente conjuntos parcialmente ordenados y que juegan un papel importante en la construcción del forcing.

Para nuestra conveniencia, (\mathbb{P}, \leq) se dirá un *conjunto parcialmente ordenado* (abreviado como “*copo*”), si \leq es transitivo, reflexivo y es falso que existan $p, q \in \mathbb{P}$ tales que $(p \leq q \wedge q \leq p \wedge p \neq q)$.

3.1.1 Definición. 1. Un *copo de forcing* (también llamado noción de forcing), es una terna $(\mathbb{P}, \leq, \mathbb{1})$ donde (\mathbb{P}, \leq) es un copo y $\mathbb{1} \in \mathbb{P}$ es un elemento máximo ($\forall p \in \mathbb{P} p \leq \mathbb{1}$).

¹Recordemos que \mathbf{HC} es el enunciado $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, mientras que la *Hipótesis del Continuo Generalizada*, \mathbf{HCG} , es el enunciado $\forall \alpha [2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}]$.

2. Los elementos de \mathbb{P} serán llamados *condiciones del forcing* (o condiciones de forzamiento).
3. Diremos que p *extiende a* q (o que p es más fuerte que q), si $p \leq q$.
4. Si $p, q \in \mathbb{P}$, entonces se dicen *compatibles* (lo cual se escribirá $p \parallel q$), si tienen una *extensión común*; es decir, si existe $r \in \mathbb{P}$ tal que $r \leq p$ y $r \leq q$. Por el contrario, p y q son *incompatibles* (denotado por $p \perp q$) si no son compatibles.
5. Una *anticadena* es un subconjunto $A \subseteq \mathbb{P}$ cuyos elementos son incompatibles dos a dos ($\forall p, q \in A [p \neq q \rightarrow p \perp q]$). Además diremos que \mathbb{P} es ccc, o que tiene la ccc (condición de la cadena contable), si en \mathbb{P} , toda anticadena es numerable.
6. Un subconjunto $D \subseteq \mathbb{P}$ es *denso* si para cada condición en \mathbb{P} existe un elemento en D que la extiende; es decir, $\forall p \in \mathbb{P} \exists r \in D (r \leq p)$. Además diremos que $E \subseteq \mathbb{P}$ es *denso debajo de* p si para cada condición que extiende a p existe un elemento en E que la extiende; es decir, $\forall q \leq p \exists r \in E (r \leq q)$.

En (1), abusando de la notación cuando no haya lugar a dudas, omitiremos a “ \leq ” y a “ $\mathbb{1}$ ”, y nos referiremos solamente al “copo de forcing \mathbb{P} ” o al “copo \mathbb{P} ”. En (3), la expresión “ p extiende a q ” surge debido a que en muchas aplicaciones lo que se quiere es construir algo, y los elementos de \mathbb{P} son aproximaciones de lo que se quiere construir. Veamos la siguiente definición:

3.1.2 Definición. Para cualesquiera I, J : $F_n(I, J)$ es el conjunto de todas las *funciones parciales finitas de I en J* ; es decir, $p \in F_n(I, J)$ si y sólo si $p \in [I \times J]^{<\omega}$ y p es la gráfica de una función (es decir, si p es una función con $\text{dom}(p) \subseteq I$ finito y $\text{ran}(p) \subseteq J$). Si definimos a \leq como \supseteq y hacemos $\mathbb{1} = \emptyset$, entonces $F_n(I, J)$ es un copo de forcing.

3.1.3 Observación. $p \leq q$ si y sólo si $p \supseteq q$ si y sólo si p extiende a q como función. Además, p, q son compatibles si y sólo si existe una función $r \in F_n(I, J)$ tal que $r \supseteq p$ y $r \supseteq q$; si tal r existe, ocurre que $p \cup q \subseteq r$ y entonces $p \cup q \in F_n(I, J)$ y es una extensión común de p y q . De esta manera, $p \parallel q$ si y sólo si p, q son compatibles como funciones, es decir, coinciden en $\text{dom}(p) \cap \text{dom}(q)$. Podemos pensar a $p \in F_n(I, J)$ como una aproximación finita de una función $f : I \rightarrow J$ que estamos tratando de construir. De

manera informal, p expresa una *condición* que nuestra f necesita satisfacer, a saber, p nos dice “ $f \supseteq p$ ”.

A continuación diremos lo que se entenderá por filtro.

3.1.4 Definición. Sea \mathbb{P} un copo de forcing. Entonces $G \subseteq \mathbb{P}$ es un *filtro* sobre \mathbb{P} si y sólo si

1. $1 \in G$.
2. $\forall p, q \in G \exists r \in G [r \leq p \wedge r \leq q]$.
3. $\forall p, q \in \mathbb{P} [q \leq p \wedge q \in G \rightarrow p \in G]$.

Consideremos a M un mtn. Como dijimos al principio del capítulo, deseamos extender M a un mtn más grande N . Para esto nos será conveniente agregarle a M un filtro G sobre un copo de forcing $\mathbb{P} \in M$ que intersekte, de manera apropiada, una gran cantidad de conjuntos densos:

3.1.5 Definición. Dado un copo de forcing \mathbb{P} , G es \mathbb{P} -*genérico sobre* M si y sólo si G es un filtro sobre \mathbb{P} y $G \cap D \neq \emptyset$ para cada denso $D \subseteq \mathbb{P}$ tal que $D \in M$.

El siguiente lema nos muestra un par de propiedades curiosas de los filtros genéricos.

3.1.6 Lema. Supongamos que M es un modelo transitivo para \mathbf{ZFE}^* , $\mathbb{P} \in M$, $E \subset \mathbb{P}$, y $E \in M$. Si G es un filtro \mathbb{P} -genérico sobre M , entonces

(a) $G \cap E \neq \emptyset$ o $\exists q \in G \forall r \in E (r \perp q)$.

(b) Si $p \in G$ y E es denso debajo de p , entonces $G \cap E \neq \emptyset$.

Demostración. (a) Sea $D = \{p : \exists r \in E (p \leq r)\} \cup \{q : \forall r \in E (r \perp q)\}$. Veamos que D es denso. Sea $q \in \mathbb{P}$ y supongamos que $q \notin D$. Entonces existe $r \in E$ tal que r y q son compatibles. Si p es una extensión común de r y q , entonces p es una extensión de $r \in E$ y por tanto, $p \in D$. Así, D es denso, y por tanto, $G \cap D \neq \emptyset$. Sea $p \in G \cap D$, si p es tal que existe $r \in E$ con $p \leq r$, como, en particular, $p \in G$ se tiene que $r \in G$, por tanto $r \in G \cap E \neq \emptyset$. En otro caso, $p \in G$ es tal que para cada $r \in E$, $r \perp p$.

(b) Hagamos la prueba por contradicción, es decir, supongamos que $p \in G$, E es denso debajo de p y $G \cap E = \emptyset$. Entonces, por (a), fijemos $q \in G$ tal que

para cada $r \in E(r \perp q)$. Sea $q' \in G$ una extensión común de p y q . Como E es denso debajo de p y $q' \leq p$, sea $r \in E$ tal que $r \leq q'$, como $q' \leq q$, se tiene que $r \leq q$, lo cual contradice que $r \perp q$. Por lo tanto, $G \cap E \neq \emptyset$. ▲

El siguiente lema es importante, pues nos dice que siempre podemos encontrar un filtro \mathbb{P} -genérico sobre M . Aquí es indispensable el hecho de pedirle a nuestro modelo M que sea numerable.

3.1.7 Lema (Lema de la existencia de un filtro genérico). Sean M un mtn de $\mathbf{ZF} - \mathbf{P}^*$ y $\mathbb{P} \in M$ un copo de forcing. Entonces para cada $p \in \mathbb{P}$ existe un filtro G sobre \mathbb{P} tal que $p \in G$ y G es \mathbb{P} -genérico sobre M .

Demostración. Sea $p \in \mathbb{P}$. Denotemos por $\{D_n : n \in \omega\}$ al conjunto de densos $D \subseteq \mathbb{P}$ tales que $D \in M$; tenemos una cantidad numerable de dichos densos puesto que M es numerable. Por inducción, elijamos para cada $n \in \omega$ un elemento $p_{n+1} \in D_n$ con la propiedad $p_{n+1} \leq p_n$ y $p_0 = p$. Sea $G = \{q \in \mathbb{P} : \exists n \in \omega : p_n \leq q\}$. Notemos:

1. $p \in G$ ya que $p = p_0$ y $p_0 \leq p_0$.
2. Para cada $n \in \omega$, $p_{n+1} \leq p_n$ con lo cual $p_n \in G$ y por tanto, $G \cap D_n \neq \emptyset$.
3. Sean $q, r \in G$. Entonces existen $n, m \in \omega$ tales que $p_n \leq q$ y $p_m \leq r$. Si hacemos $k = \max\{n, m\}$, entonces $p_k \leq q$, $p_k \leq r$ y $p_k \in G$.
4. Supongamos que $q \in G$, $r \in \mathbb{P}$ y $q \leq r$, como $q \in G$, existe $n \in \omega$ tal que $p_n \leq q$, y como $q \leq r$, se tiene que $p_n \leq r$, con lo cual $r \in G$.

Por 4 y 3, G es un filtro; por 2, G es \mathbb{P} -genérico sobre M , y por 1, $p \in G$. ▲

El siguiente lema nos muestra que los filtros genéricos son maximales con respecto a la contención.

3.1.8 Lema. Sea $\mathbb{P} \in M$, si G y H son ambos filtros \mathbb{P} -genéricos sobre M y $G \subseteq H$, entonces $G = H$.

Demostración. Veamos que $H \subseteq G$. Supongamos que existe $p \in H \setminus G$, entonces $G \cap \{p\} = \emptyset$. Usando (a) del Lema 3.1.6, existe un $q \in G \subseteq H$ tal que $q \perp p$, lo cual es una contradicción, pues H es un filtro. Por lo tanto, $H \subseteq G$ y se tiene la igualdad. ▲

Un filtro genérico G es algo que quisieramos agregar a nuestro modelo M , pero si G ya es elemento de M , en realidad no estamos agregando nada nuevo. A continuación veamos una manera de solventar este problema.

3.1.9 Definición. Diremos que $r \in \mathbb{P}$ es un átomo del copo \mathbb{P} si y solo si no existen $p, q \in \mathbb{P}$ tales que $p \leq r$, $q \leq r$ y $p \perp q$.

Si \mathbb{P} tiene un átomo r , entonces M tiene filtros genéricos. Por ejemplo, no es complicado probar que $\{q \in \mathbb{P} : q \parallel r\}$ es un filtro genérico. Debido a esto, y sobre todo por el siguiente lema, estaremos más interesados en copos que no tengan átomos.

3.1.10 Lema. Si $\mathbb{P} \in M$ no tiene átomos y G es un filtro \mathbb{P} -genérico sobre M , entonces $G \notin M$.

Demostración. Supongamos que $G \in M$. Sea $D = \mathbb{P} \setminus G$, por la absolutez de la diferencia de conjuntos, $D \in M$. Ahora veamos que D es denso en \mathbb{P} . Sea $p \in \mathbb{P}$, entonces p no es un átomo, con lo cual, existen $q, r \in \mathbb{P}$ tales que $q \leq p$, $r \leq p$ y $q \perp r$. No puede ocurrir que tanto q como r estén en G , pues de ser así, como G es un filtro, serían compatibles. Por lo tanto, $q \in D$ o $r \in D$; con lo cual, D es denso y entonces, $G \cap D \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $G \notin M$. \blacktriangle

Necesitamos definir algunas cosas más para poder construir nuestra extensión N (que denotaremos por $M[G]$). De manera informal, podemos decir que $M[G]$ es el conjunto que consiste de todos los conjuntos que pueden construirse con G y elementos de M , usando “operaciones conjuntistas sencillas”. Cada elemento de $M[G]$ tendrá un “nombre” en M que describe como está construido:

3.1.11 Definición. τ es un \mathbb{P} -nombre si y sólo si τ es una relación y $\forall(\sigma, p) \in \tau$ [σ es un \mathbb{P} -nombre $\wedge p \in \mathbb{P}$]. $\mathbf{V}^{\mathbb{P}}$ es la clase de todos los \mathbb{P} -nombres.

De manera particular, nosotros nos fijaremos en $M^{\mathbb{P}}$ definido a continuación:

3.1.12 Definición. Si M es un modelo transitivo de $\mathbf{ZF} - \mathbf{P}$ y $\mathbb{P} \in M$, entonces $M^{\mathbb{P}} = \mathbf{V}^{\mathbb{P}} \cap M = \{\tau \in M : (\tau \text{ es un } \mathbb{P}\text{-nombre})^M\}$.

Pensando por un instante que tenemos “gente viviendo en M ”, ellos pueden decidir qué conjuntos son \mathbb{P} -nombres y discutir algunas de sus propiedades, pero ellos no tendrán acceso al filtro genérico G que es necesario tanto para saber qué es lo que los nombres nombran como para definir a $M[G]$. Veamos:

3.1.13 Definición. Si τ es un \mathbb{P} -nombre y $G \subseteq \mathbb{P}$, entonces por recursión definimos

$$\tau_G = \{\sigma_G : \exists p \in G : (\sigma, p) \in \tau\}.$$

A veces nos conviene denotar a τ_G como $val(\tau, G)$, debido a que es *la valoración de τ con respecto a G* . Cuando M sea un modelo transitivo de $\mathbf{ZF} - \mathbf{P}$ y $\mathbb{P} \in M$, definimos la *extensión genérica de M respecto de G* , denotada por $M[G]$, como

$$M[G] = \{\tau_G : \tau \in M^{\mathbb{P}}\}.$$

Lo primero que haremos notar es que $M[G]$ es transitivo y contiene todos los elementos de M .

3.1.14 Definición. Dado un copo de forcing $(\mathbb{P}, \leq, \mathbb{1})$, y cualquier conjunto x , definimos $\check{x} = \{(\check{y}, \mathbb{1}) : y \in x\}$. “ \check{x} ” se lee como “ x check”.

3.1.15 Lema. Supongamos que M es un modelo transitivo de $\mathbf{ZF} - \mathbf{P}$ tal que $\mathbb{P} \in M$ y G es un filtro sobre \mathbb{P} . Entonces:

1. $\forall x \in M[\check{x} \in M^{\mathbb{P}} \wedge val(\check{x}, G) = x]$.
2. $M[G] \supseteq M$.
3. $M[G]$ es transitivo.

Demostración. (1) Probemos primero por inducción que para cada $x \in M$, \check{x} es un \mathbb{P} -nombre. $\check{\emptyset} = \emptyset$. Supongamos que para cada $y \in x$, \check{y} es un \mathbb{P} -nombre. $\check{x} = \{(\check{y}, \mathbb{1}) : y \in x\}$, así, \check{x} es una relación y para cada $(\sigma, p) \in \check{x}$, $\sigma \in M^{\mathbb{P}}$ y $p \in \mathbb{P}$. Por lo tanto, \check{x} es un \mathbb{P} -nombre.

Ahora probemos por inducción que $\check{x}_G = x$. $\check{\emptyset}_G = \emptyset_G = \emptyset$. Ahora supongamos que para cada $y \in x$, $\check{y}_G = y$. Así, $\check{x}_G = \{\check{y}_G : y \in x\} = \{y : y \in x\} = x$.

(2) Se sigue de (1) ya que si $x \in M$, entonces $\check{x}_G = x \in M[G]$.

(3) Sea $x \in M[G]$, entonces existe $y \in M$ tal que $x = y_G = \{\sigma_G : \exists p \in G[(\sigma, p) \in y]\}$. Como M es transitivo, para cada $p \in G$ tal que $(\sigma, p) \in y$, $\sigma \in M$. Entonces, para cada $p \in G$ tal que $(\sigma, p) \in y$, $\sigma_G \in M[G]$. Así, $x = y_G \subseteq M[G]$. Por lo tanto, $M[G]$ es transitivo. \blacktriangle

Además de las propiedades anteriores, $M[G]$ es minimal:

3.1.16 Lema. Si M y G son como en el Lema 3.1.15, y N es un modelo transitivo de $\mathbf{ZF} - \mathbf{P}$ tal que $M \subseteq N$ y $G \in N$, entonces $M[G] \subseteq N$.

Demostración. Sea $a \in M[G]$, entonces existe $\tau \in M^{\mathbb{P}}$ tal que $\tau_G = a$. Como $M[G] \subseteq N$ y $G \in N$, se tiene que $\tau \in N$ y $G \in N$, entonces $\tau_G = \{\sigma_G : \exists p \in G[(\sigma, p) \in \tau]\} = (\tau_G)^N \in N$, es decir, $a \in N$. Por lo tanto, $M[G] \subseteq N$. \blacktriangle

Como hemos dicho antes, nosotros estamos interesados en filtros G tales que $G \notin M$. En dicho caso, a pesar de que en M no se conoce a G , se puede construir un nombre Γ que tiene que nombrar a G :

3.1.17 Definición. Dado un copo de forcing \mathbb{P} , defínase $\Gamma = \{(\check{p}, p) : p \in \mathbb{P}\}$.

3.1.18 Observación. Γ depende del copo \mathbb{P} .

- Con las hipótesis del Lema 3.1.15, Γ es un \mathbb{P} -nombre y $\Gamma_G = \{\check{p}_G : p \in G\} = \{p : p \in G\} = G$. Con lo cual también se concluye que $G \in M[G]$.

Nuestro siguiente objetivo es probar que efectivamente $M[G]$ modela a \mathbf{ZFE}^* . Sin embargo, esto no lo podremos hacer de forma inmediata, necesitaremos hacer uso del Lema de Definibilidad 3.1.27 y el Lema de Verdad 3.1.28. Así que por el momento nos contentaremos con probar que $M[G]$ es un modelo para los Axiomas de Extensión, Fundación, Par y Unión. La siguiente definición y el siguiente lema nos serán de utilidad para probar que en $M[G]$ se verifica el Axioma del Par.

3.1.19 Definición. $up(\sigma, \tau) = \{(\sigma, \mathbb{1}), (\tau, \mathbb{1})\}$ y

- $op(\sigma, \tau) = up(up(\sigma, \sigma), up(\sigma, \tau))$.

3.1.20 Lema. Supongamos que M es un modelo transitivo de $\mathbf{ZF} - \mathbf{P}$ tal que $\mathbb{P} \in M$ y G es un filtro sobre \mathbb{P} . Si $\sigma, \tau \in M^{\mathbb{P}}$, entonces $up(\sigma, \tau), op(\sigma, \tau) \in M^{\mathbb{P}}$, $val(up(\sigma, \tau), G) = \{\sigma_G, \tau_G\}$, y $val(op(\sigma, \tau), G) = (\sigma_G, \tau_G)$.

Ahora ya estamos en condiciones de probar lo siguiente.

3.1.21 Lema. Supongamos que M es un modelo transitivo de $\mathbf{ZF} - \mathbf{P}$ tal que $\mathbb{P} \in M$ y G es un filtro sobre \mathbb{P} . Entonces $M[G]$ es un modelo para los Axiomas de Extensión, Fundación, Par y Unión.

Demostración. Por el Lema 3.1.15, $M[G]$ es transitivo. Así, usando (1) del Lema 2.2.10 (página 40), se tiene que en $M[G]$ se verifica el A. de Extensión. Además como estamos suponiendo $\mathbf{ZF} - \mathbf{P}$ (en particular el A. de Fundación), por (2) del Lema 2.2.10 se tiene que en $M[G]$ también se verifica el A.

de Fundación.

Para ver que el A. del Par se verifica en $M[G]$, sean $a, b \in M[G]$, entonces existen $\sigma, \tau \in M^{\mathbb{P}}$ tales que $\sigma_G = a$ y $\tau_G = b$, entonces $up(\sigma, \tau) \in M^{\mathbb{P}}$. Usando el Lema 3.1.20 se tiene que $(up(\sigma, \tau))_G = \{\sigma_G, \tau_G\} = \{a, b\} \in M[G]$.

Veamos ahora que en $M[G]$ se verifica el A. de la Unión. Por la manera en que enunciamos el A. de la Unión (ver Axioma 5, página 6), es suficiente demostrar que para cada $a \in M[G]$ existe un $b \in M[G]$ tal que $\bigcup a \subseteq b$ (ya que si eso ocurre y tomamos un $y \in a$ y un $x \in y$, se tiene que $x \in \bigcup a \subseteq b$ y por tanto $x \in b$; lo cual nos dice que este Axioma se verifica). Sea $a \in M[G]$ y $\tau \in M^{\mathbb{P}}$ tal que $a = \tau_G$. Sea $\pi = \bigcup dom(\tau)$ y $b = \pi_G$. Notemos que $dom(\pi)$ es el conjunto de las primeras coordenadas de τ . Por la definición de \mathbb{P} -nombre, se tiene que π es un \mathbb{P} -nombre, y $\pi \in M$ por la absolutez de \bigcup . Con lo cual, $b \in M[G]$. Si $c \in a = \tau_G$, entonces $c = \sigma_G$ para algún $\sigma \in dom(\tau)$. Así, $\sigma \subseteq \pi$. Luego, por la definición de π_G , $c = \sigma_G \subseteq \pi_G = b$. Por lo tanto, $\bigcup a \subseteq b$. \blacktriangle

Para ver que en $M[G]$ se validan el resto de los Axiomas, necesitaremos algunas definiciones y resultados extras. Es momento de definir una de las nociones centrales en este trabajo:

3.1.22 Definición. Sea M un mtn de $\mathbf{ZF} - \mathbf{P}$, \mathbb{P} un copo de forcing y φ una sentencia en M . Si $p \in \mathbb{P}$, diremos que “ p fuerza a φ ”, lo cual se denotará por $p \Vdash \varphi$ si ocurre lo siguiente: Para cada $G \subseteq \mathbb{P}$ filtro \mathbb{P} -genérico sobre M tal que $p \in G$ se cumple $M[G] \models \varphi$. Omitiremos el uso de comillas cuando no haya confusión.

El siguiente lema se desprende de forma inmediata de la definición anterior, y haremos un uso recurrente del él.

3.1.23 Lema. Sean, M , \mathbb{P} y G como antes. Si $p, q \in \mathbb{P}$ y φ, ψ son sentencias, entonces:

- (a) Si $p \Vdash \varphi$ y $q \leq p$ entonces $q \Vdash \varphi$.
- (b) $p \Vdash \varphi \wedge \psi$ si y sólo si $p \Vdash \varphi$ y $p \Vdash \psi$.

Demostración. (a) Supongamos que $p \Vdash \varphi$ y $q \leq p$. Veamos que $q \Vdash \varphi$. Sea G un filtro \mathbb{P} -genérico sobre M tal que $q \in G$. Como $q \leq p$ y $q \in G$, entonces $p \in G$. Luego, dado que $p \Vdash \varphi$, se tiene que $M[G] \models \varphi$, así, se concluye que $q \Vdash \varphi$.

(b) Se sigue del hecho de que $N \models \varphi \wedge \psi$ si y sólo si $N \models \varphi$ y $N \models \psi$. \blacktriangle .

Un hecho que parece sorprendente, es que dentro de M se podrá decidir si p fuerza o no a φ (esto debido a que de la Definición 3.1.22, pareciera que se necesita conocer a cada G genérico). Para lograr esto, necesitamos definir otra relación $p \Vdash^* \varphi$ y mostrar que

$$p \Vdash \varphi \leftrightarrow (p \Vdash^* \varphi)^M.$$

De esta manera, $p \Vdash \varphi$ será equivalente a algún enunciado relativizado a M .

3.1.24 Definición. Sea \mathbb{P} un copo. Los siguientes incisos definen la noción $p \Vdash^* \phi(\tau_1, \dots, \tau_n)$ donde $\phi(\tau_1, \dots, \tau_n)$ es una fórmula con sus variables libres enlistadas, $p \in \mathbb{P}$, y $\tau_1, \dots, \tau_n \in \mathbf{V}^{\mathbb{P}}$.

(a) $p \Vdash^* "a = b"$ si

- (i) $(\forall (c, r) \in a) \left(\{q \leq p : (q \leq r) \rightarrow ((\exists (d, r') \in b)(q \leq r' \wedge q \Vdash^* c = d))\} \text{ es denso debajo de } p \right)$ y
- (ii) $(\forall (c, r) \in b) \left(\{q \leq p : (q \leq r) \rightarrow ((\exists (d, r') \in a)(q \leq r' \wedge q \Vdash^* c = d))\} \text{ es denso debajo de } p \right)$.

(b) $p \Vdash^* "a \in b"$ si $\{q : (\exists (c, r) \in b)(q \leq r \wedge q \Vdash^* "a = c")\}$ es denso debajo de p .

(c) $p \Vdash^* "\psi \wedge \gamma"$ si y sólo si $p \Vdash^* "\psi"$ y $p \Vdash^* "\gamma"$.

(d) $p \Vdash^* "\neg \psi"$ si $\forall q \leq p : \neg(q \Vdash^* \psi)$.

(e) $p \Vdash^* "(\exists x)\psi(x)"$ si $\{q : (\exists \sigma) : q \Vdash^* "\psi(\sigma)"\}$ es denso debajo de p .

El siguiente teorema será la clave para relacionar \Vdash^* con \Vdash .

3.1.25 Teorema. Sean M un modelo transitivo de \mathbf{ZFE}^* , \mathbb{P} un copo tal que $\mathbb{P} \in M$, $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ una fórmula y $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n \in M^{\mathbb{P}}$. Si G es un filtro \mathbb{P} -genérico sobre M , entonces:

1. Si $p \in G$ y $M \models (p \Vdash^* "\varphi(\tau_1, \dots, \tau_n)")$, entonces $M[G] \models \varphi((\tau_1)_G, \dots, (\tau_n)_G)$,

2. Si $M[G] \models \varphi((\tau_1)_G, \dots, (\tau_n)_G)$, entonces existe $p \in G$ tal que $p \Vdash^* \text{“}\varphi(\tau_1, \dots, \tau_n)\text{”}$.

Demostración. Haremos la prueba por inducción sobre la complejidad de la fórmula. Supongamos que $\varphi(x_1, x_2)$ es la fórmula “ $x_1 = x_2$ ”, sean $\tau_1, \tau_2 \in M$ y sea G un filtro \mathbb{P} -genérico sobre M .

(1) Sea $p \in G$ y supongamos $M \models (p \Vdash^* \text{“}\varphi(x_1, x_2)\text{”})$ (i. e. $M \models (p \Vdash^* \text{“}x_1 = x_2\text{”})$), demostremos que $M[G] \models (\tau_1)_G = (\tau_2)_G$. Para esto, probaremos en $M[G]$ que $(\tau_1)_G \subset (\tau_2)_G$ y $(\tau_2)_G \subset (\tau_1)_G$.

Como \Vdash^* es absoluta, omitiremos la relativización a M (es decir, pondremos por ejemplo “ $r \Vdash^* \psi$ ” en vez de $M \models^* (\text{“}r \Vdash \psi\text{”})$). Notemos que $(\tau_1)_G = \{\pi_G : \exists q \in G : (\pi, q) \in \tau_1\}$. Sea $\pi_G \in (\tau_1)_G$ tal que $(\pi, q) \in \tau_1$ para algún $q \in G$. Deseamos mostrar que $\pi_G \in (\tau_2)_G$. Sea $r \in G$ tal que $r \leq p$ y $r \leq q$. Afirmamos que $r \Vdash^* \text{“}\tau_1 = \tau_2\text{”}$. En efecto, esto se sigue del hecho general: $t \leq s$ y D es denso debajo de s , entonces D es denso debajo de t (aplicado a r y p). Luego, como $r \Vdash^* \text{“}\tau_1 = \tau_2\text{”}$ entonces existe $q' \in G$ (por la Genericidad de G), tal que $q' \leq r$ y tal que si $q' \leq q$ entonces $\exists(\pi_2, s_2) \in \tau_2$ tal que $q' \leq s_2 \wedge q' \Vdash^* \pi = \pi_2$ (ver la Definición 3.1.24). Usando la hipótesis inductiva, dado que $q' \Vdash^* \text{“}\pi = \pi_2\text{”}$ y $q' \in G$, se concluye que $\pi_G = (\pi_2)_G$. Por lo tanto, π_G es la valuación respecto de G de π_2 , donde $(\pi_2, s_2) \in \tau_2$ y además $s_2 \in G$ (ya que $q' \in G$ y $q' \leq s_2$). Por lo tanto $\pi_G \in (\tau_2)_G$, con lo cual $(\tau_1)_G \subset (\tau_2)_G$. Análogamente se prueba que $M[G] \models (\tau_2)_G \subset (\tau_1)_G$. Por lo tanto, $M[G] \models (\tau_1)_G = (\tau_2)_G$.

(2) Supongamos que $M[G] \models (\tau_1)_G = (\tau_2)_G$. Probemos que existe $p \in G$ tal que $p \Vdash^* \text{“}\tau_1 = \tau_2\text{”}$.

Sea $D = \{r \in \mathbb{P} : (r \Vdash^* \tau_1 = \tau_2) \vee (r \text{ satisface } (i)') \vee (r \text{ satisface } (ii)')\}$ donde:

$$(i)': (\exists(\pi_1, s_1) \in \tau_1) \left[r \leq s_1 \wedge (\forall(\pi_2, s_2) \in \tau_2)(\forall q \in \mathbb{P})((q \leq s_2 \wedge q \Vdash^* \pi_1 = \pi_2) \rightarrow (q \perp r)) \right].$$

$$(ii)': (\exists(\pi_2, s_2) \in \tau_2) \left[r \leq s_2 \wedge (\forall(\pi_1, s_1) \in \tau_1)(\forall q \in \mathbb{P})((q \leq s_1 \wedge q \Vdash^* \pi_2 = \pi_1) \rightarrow (q \perp r)) \right].$$

Notemos en principio que si $r \in G$, entonces r no satisface $(i)'$, pues de lo contrario, si $\exists(\pi_1, s_1) \in \tau_1$ tal que $(i)'$, entonces $r \leq s_1$, lo cual implica que $s_1 \in G$ y por tanto, $(\pi_1)_G \in (\tau_1)_G = (\tau_2)_G$, entonces, existe $(\pi_2, s_2) \in \tau_2$ tal que $s_2 \in G$ y $(\pi_1)_G = (\pi_2)_G$; usando la hipótesis inductiva en (2), aplicada a π_1 y π_2 , dado que $(\pi_1)_G = (\pi_2)_G$, existe $q_0 \in G$ tal que $q_0 \Vdash^* \pi_1 = \pi_2$. Sea $q \in G$ tal que $q \leq q_0$ y $q \leq s_2$. Se cumple que $q \Vdash^* \pi_1 = \pi_2$. Entonces

por $(i)'$, $q \perp r$ lo cual es una contradicción ya que $q, r \in G$ y G es filtro. Por lo tanto, si $r \in G$, entonces r no satisface $(i)'$. Análogamente se prueba que si $r \in G$, entonces r no satisface $(ii)'$. Notemos también que por absolutez $D \in \mathbb{P}$ (es decir, D fue definido por puras nociones absolutas en \mathbb{P} y puros objetos que \mathbb{P} conoce). Si probamos que D es un conjunto denso, entonces existe un $r \in G \cap D$, el cual cumple $r \Vdash^* \tau_1 = \tau_2$.

Sea $p \in \mathbb{P}$. Si ocurre que $p \Vdash^* \tau_1 = \tau_2$, se concluye la prueba, de lo contrario p no cumple (i) o no cumple (ii) de la Definición 3.1.24. Si p no satisface (i), entonces existen $(\pi_1, s_1) \in \tau_1$ y $r \leq p$ tal que

$$(\forall q \leq r)(q \leq s_1 \wedge (\forall (\pi_2, s_2) \in \tau_2)(\neg(q \leq s_2) \vee \neg(q \Vdash^* \pi_1 = \pi_2))). \quad (\dagger)$$

En particular, $r \leq s_1$. Notar además que si $(\pi_2, s_2) \in \tau_2$, $q_1 \leq s_2$ y $q \Vdash \pi_1 = \pi_2$ entonces $q \perp r$, ya que si pasa lo contrario, entonces una extensión común de q y r contradice (\dagger) . Por lo tanto, r cumple la propiedad $(i)'$.

Análogamente se verifica que si p no cumple (ii) (de la Definición 3.1.24), entonces existe $r \leq p$ tal que r cumple la propiedad $(ii)'$. Por lo tanto D es denso y entonces existe $r \in G \cap D$, el cual cumple $r \Vdash^* \tau_1 = \tau_2$.

Supongamos ahora que $\varphi(\tau_1, \tau_2)$ es la fórmula $\tau_1 \in \tau_2$. Veamos que se cumple (1) y (2) para $\varphi(\tau_1, \tau_2)$.

(1) Sea $p \in G$ tal que $p \Vdash^* \tau_1 \in \tau_2$. Deseamos probar que $M[G] \models (\tau_1)_G \in (\tau_2)_G$. Entonces, $D = \{q : (\exists (\pi, s) \in \tau_2)(q \leq s \wedge q \Vdash^* \tau_1 = \pi)\}$ es denso debajo de p y $D \in M$. Usando (b) del Lema 3.1.6, existe $q \in G \cap D$. Fijemos $(\pi, s) \in \tau_2$ tal que $q \leq s$ y $q \Vdash^* \tau_1 = \pi$. Notemos que $s \in G$ (ya que $q \in G$, $q \leq s$ y G es filtro), con lo cual ocurre que $\pi_G \in (\tau_2)_G$. Así, se tiene que $q \in G$, $q \Vdash^* \tau_1 = \pi$ y $\pi_G \in (\tau_2)_G$. Por hipótesis inductiva $(\tau_1)_G = \pi_G$, lo cual implica que $(\tau_1)_G \in (\tau_2)_G$.

(2) Supongamos que $(\tau_1)_G \in (\tau_2)_G$, queremos probar que existe un $p \in G$ tal que $p \Vdash^* \tau_1 \in \tau_2$. Sea $(\pi, s) \in \tau_2$ tal que $s \in G$ y $(\tau_1)_G = \pi_G$, Aplicando la hipótesis inductiva a τ_1 y π , se tiene que existe $q \in G$ tal que $q \Vdash^* \tau_1 = \pi$. Sea $p \in G$ tal que $p \leq s$ y $p \leq q$, entonces $(\forall r \leq p)(r \leq s \wedge r \Vdash^* \pi = \tau_1)$. Por lo tanto, $p \Vdash^* \tau_1 \in \tau_2$.

Sea $\varphi = \neg\phi$ y supongamos que se satisfacen (1) y (2) para ϕ . Veamos que se verifican (1) y (2) para φ .

(1) Sea $p \in G$ tal que $p \Vdash^* \varphi$ y veamos que $M[G] \models \varphi$. Si ocurre que $M[G] \models \phi$, entonces existe $q \in G$ tal que $q \Vdash^* \phi$, sea $r \in G$ tal que $r \leq p$

y $r \leq q$, entonces $r \Vdash^* \phi$ (ya que $r \leq q$ y $q \Vdash^* \phi$), lo cual contradice que $p \Vdash^* \neg\phi$. Por lo tanto, $\neg(M[G] \Vdash \phi)$, es decir, $M[G] \Vdash \varphi$.

(2) Supongamos $M[G] \Vdash \neg\phi$, entonces $\neg(M[G] \Vdash \phi)$. Sea $D = \{p \in \mathbb{P} : p \Vdash^* \text{“}\phi\text{”} \vee p \Vdash^* \text{“}\neg\phi\text{”}\}$. Veamos que $D \in M$ y que D es denso en \mathbb{P} . Sea $q \in \mathbb{P}$ y supongamos que $q \not\Vdash^* \neg\phi$. Entonces existe $p \leq q$ tal que $p \Vdash^* \text{“}\phi\text{”}$. Entonces $p \in D$. Por lo tanto, D es denso y $D \in M$. Entonces existe $p \in G \cap D$. Notemos que no puede ocurrir que $p \Vdash^* \phi$, pues de lo contrario, como $p \in G$, $M[G] \Vdash \phi$ y $M[G] \Vdash \neg\phi$. Por lo tanto, $p \Vdash^* \neg\phi$.

Supongamos $\varphi = \psi \wedge \gamma$. Entonces de (c) de la Definición 3.1.24, si ψ y γ verifican (1) y (2), se tiene que φ verifica (1) y (2).

Si $\varphi = \exists x\psi(x)$ y se cumplen (1) y (2) para ψ , veamos que se cumplen también para φ .

(1) Sea $p \in G$ tal que $p \Vdash^* \exists x\psi(x)$. Entonces $D = \{q : \exists \sigma : q \Vdash^* \psi(\sigma)\}$ es denso debajo de p . Notemos que $D \in M$. Sean $r \in G$ y $\sigma \in \mathbb{P}$ tal que $r \Vdash^* \psi(\sigma)$. Aplicando (1), $M[G] \Vdash \psi(\sigma_G)$, luego $M[G] \Vdash (\exists x)\psi(x)$. Por lo tanto, $M[G] \Vdash \varphi$.

(2) Supongamos que $M[G] \Vdash \varphi$, luego, existe $\sigma_G \in M[G]$ tal que $M[G] \Vdash \psi(\sigma_G)$, aplicando (2) a la fórmula $\psi(\sigma_G)$ se tiene que existe $p \in G$ tal que $p \Vdash^* \psi(\sigma)$. Por lo tanto, $(\forall r \leq p)(r \Vdash^* \psi(\sigma))$. Con lo anterior concluimos que $p \Vdash^* (\exists x)\psi(x)$. ▲

A continuación presentamos un resultado que nos da ciertas equivalencias de \Vdash^* .

3.1.26 Lema. Si \mathbb{P} es un copo y φ una fórmula, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes para todo $p \in \mathbb{P}$.

1. $p \Vdash^* \text{“}\varphi\text{”}$.
2. $\forall q \leq p : q \Vdash^* \text{“}\varphi\text{”}$.
3. $\{r : r \Vdash^* \text{“}\varphi\text{”}\}$ es denso debajo de p .

Demostración. (2) \rightarrow (1) Es inmediato.

(2) \rightarrow (3) También es inmediato.

(1) \rightarrow (2) Para fórmulas atómicas φ (i. e. si $\varphi(\tau_1, \tau_2)$ es $\tau_1 = \tau_2$ o $\tau_1 \in \tau_2$), de la definición de \Vdash^* (ver Definición 3.1.24), si D es denso debajo de p y $q \leq p$,

entonces D es denso debajo de q . Si φ no es atómica, el resultado se obtiene por inducción sobre la complejidad de la fórmula.

(3) \rightarrow (1) Para ver que $p \Vdash^* \varphi$, necesitamos probar que ciertos conjuntos D son densos debajo de p (ver Definición 3.1.24). Pero esto se sigue del hecho de que si el conjunto $\{r : D \text{ es denso debajo de } r\}$ es denso debajo de p (lo cual se tiene porque estamos suponiendo (3)), entonces D es denso debajo de p . \blacktriangle

Ya estamos en condiciones de probar la equivalencia entre \Vdash y \Vdash^* .

3.1.27 Lema. [de Definibilidad] Sean M un mtn para \mathbf{ZFE}^* , \mathbb{P} un copo en M y φ una fórmula. Entonces para todo $p \in \mathbb{P}$ se cumple:

$$p \Vdash \varphi \leftrightarrow (M \models p \Vdash^* \varphi).$$

Demostración. Supongamos que $M \models p \Vdash^* \varphi$ y probemos que $p \Vdash \varphi$. Si $p \nVdash \varphi$, entonces por la definición de \Vdash (ver Definición 3.1.22), se tiene que existe un filtro $G \subset \mathbb{P}$, \mathbb{P} -genérico tal que $p \in G$ y $M[G] \not\models \varphi$. Así, $M[G] \models \neg\varphi$, luego por (2) del Teorema 3.1.25, existe $q \in G$ tal que $q \Vdash^* \neg\varphi$. Sea $r \in G$ tal que $r \leq p$ y $r \leq q$. Usando la equivalencia (1) \leftrightarrow (2) del Lema 3.1.26, como r es una extensión común de p y q , se sigue que $r \Vdash^* \varphi$ y $r \Vdash^* \neg\varphi$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $p \Vdash \varphi$.

Supongamos ahora que $p \Vdash \varphi$. Probemos que $D = \{r : M \models r \Vdash^* \varphi\}$ es denso debajo de p . Supongamos lo contrario y sea $q \leq p$ tal que para cada $r \leq q$ ($r \nVdash^* \varphi$). Luego, por como se define \Vdash^* , se tiene que $q \Vdash^* \neg\varphi$, lo cual implica que $q \Vdash \neg\varphi$. Pero por otra parte $q \leq p$ y $p \Vdash \varphi$, entonces $q \Vdash \varphi$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, D es denso debajo de p , es decir, $p \Vdash^* \varphi$, que es lo que queríamos probar. \blacktriangle

Tanto el Lema de Definibilidad, como el Lema de Verdad, los ocuparemos de manera recurrente para probar que $M[G]$ modela los Axiomas de Comprensión, Potencia y Reemplazo.

3.1.28 Lema. [de Verdad] Sean M un mtn para \mathbf{ZFE}^* , \mathbb{P} un copo en M y φ una fórmula. Los siguientes enunciados son equivalentes para cada filtro G \mathbb{P} -genérico sobre M :

1. $M[G] \models \varphi$.
2. $\exists p \in G : p \Vdash \varphi$.

Demostración. (2) \rightarrow (1) Se sigue de la Definición 3.1.22.

(1) \rightarrow (2) Por (2) del Teorema 3.1.25, existe $p \in G$ tal que $p \Vdash^* \varphi$, usando el Lema de Definibilidad 3.1.27, $p \Vdash \varphi$. \blacktriangle

3.1.29 Corolario. Si M, \mathbb{P} y φ son como en el Lema 3.1.28, entonces:

- (i) $\{p : p \Vdash \text{“}\varphi\text{”} \text{ o } p \Vdash \text{“}\neg\varphi\text{”}\}$ es denso,
- (ii) $p \Vdash \text{“}\neg\varphi\text{”}$ si y sólo si $\neg\exists q \leq p : q \Vdash \text{“}\varphi\text{”}$,
- (iii) $p \Vdash \text{“}\exists x\varphi(x)\text{”}$ si y sólo si $\{r : (\exists \sigma \in M)(r \Vdash \text{“}\varphi(\sigma)\text{”})\}$ es denso debajo de p ,
- (iv) Si $p \Vdash \text{“}\exists x(x \in \sigma \wedge \varphi(x))\text{”}$, entonces $\exists q \leq p : \exists \pi \in \text{dom}(\sigma)(q \Vdash \text{“}\varphi(\pi)\text{”})$,

donde, $\text{dom}(\sigma) = \{\pi : \exists p \in \mathbb{P} : (\pi, p) \in \sigma\}$.

Demostración. (i), (ii) y (iii) se cumplen para \Vdash^* (ver Definición 3.1.24), así por el Lema de Definibilidad 3.1.27, (i), (ii) y (iii) son ciertas para \Vdash .

Para (iv), fijemos un filtro G, \mathbb{P} -genérico tal que $p \in G$. Por la definición de \Vdash , existe un $\pi_G \in \sigma_G$ tal que $M[G] \models \varphi(\pi_G)$. Entonces $\pi \in \text{dom}(\sigma)$ y por el Lema de Verdad 3.1.28, existe $r \in G$ tal que $r \Vdash \varphi(\pi)$. Si q es una extensión común de p y r , entonces $q \leq p$ y $q \Vdash \varphi(\pi)$. \blacktriangle

Ahora sí, es momento de reanudar con la demostración de que $M[G] \models \mathbf{ZFE}^*$. El siguiente teorema nos muestra que en $M[G]$ se verifican los Axiomas de Comprensión e Infinito.

3.1.30 Teorema. Sean M un mtn para $\mathbf{ZF} - \mathbf{P}$, $\mathbb{P} \in M$ un copo y G un filtro \mathbb{P} -genérico sobre M . Entonces $M[G]$ es un modelo para $\mathbf{Z} - \mathbf{P}$.

Demostración. Por el Lema 3.1.21, se tiene que $M[G]$ es un modelo para los Axiomas de Extensión, Fundación, Par y Unión. Resta ver que también se satisfacen los Axiomas de Comprensión e Infinito.

Comencemos verificando Comprensión. Sea $N = M[G]$ y φ una fórmula de $\mathcal{L} = \{\in\}$ que no contiene a y como una variable libre. φ podría contener a x, z variables libres, junto con otras variables libres v^0, \dots, v^{n-1} (de manera

estricta deberíamos escribir $\varphi(x, z, v^0, \dots, v^{n-1})$). Por como enunciamos al Axioma de Comprensión (ver página 6), debemos verificar:

$$\forall z, v^0, \dots, v^{n-1} \in N \exists y \in N \forall x \in N [x \in y \leftrightarrow x \in z \wedge \varphi^N(x, z, \vec{v})]. \quad (\dagger)$$

Como $N = M[G]$, fijemos $\pi_G, \sigma_G^0, \dots, \sigma_G^{n-1} \in N$ (correspondientes a z, v^0, \dots, v^{n-1}), donde $\pi, \sigma^0, \dots, \sigma^{n-1} \in M^{\mathbb{P}}$. Si $S = \{x \in \pi_G : \varphi^N(x, \pi_G, \sigma_G^0, \dots, \sigma_G^{n-1})\}$, es suficiente probar que $S \in N$ (ya que S sería un testigo del y que necesitamos en (\dagger)), para esto, debemos construir un $\tau \in M^{\mathbb{P}}$ tal que $\tau_G = S$. $\tilde{\varphi}(x)$ denotará a $\varphi(x, \pi, \sigma^0, \dots, \sigma^{n-1})$. Notemos que π es un conjunto de parejas de la forma (j, r) y cada elemento de π_G es algún j_G , así $S = \{j_G : j \in \text{dom}(\pi) \wedge M[G] \models (j \in \pi \wedge \tilde{\varphi}(j))\}$. Defínase

$$\tau = \{(j, p) : j \in \text{dom}(\pi) \wedge p \in \mathbb{P} \wedge p \Vdash (j \in \pi \wedge \tilde{\varphi}(j))\}.$$

Entonces $\tau_G = \{j_G : j \in \text{dom}(\pi) \wedge \exists p \in G p \Vdash (j \in \pi \wedge \tilde{\varphi}(j))\}$, y por el Lema de Definibilidad 3.1.27, se tiene que $\tau \in M^{\mathbb{P}}$. Veamos que $\tau_G = S$. Si tomamos un elemento j_G en τ_G , existe $p \in G$ tal que $p \Vdash (j \in \pi \wedge \tilde{\varphi}(j))$, luego, por la definición de \Vdash se tiene que $M[G] \models (j \in \pi \wedge \tilde{\varphi}(j))$, con lo cual $j_G \in S$. Ahora fijemos un $j_G \in S$, donde $j \in \text{dom}(\tau)$. Entonces $M[G] \models (j \in \pi \wedge \tilde{\varphi}(j))$, usando el Lema de Verdad 3.1.28, podemos fijar un $p \in G$ tal que $p \Vdash (j \in \pi \wedge \tilde{\varphi}(j))$. Entonces $(j, p) \in \tau$, y así $j_G \in \tau_G$. Con lo anterior se tiene que $\tau_G = S$ y por tanto, el Axioma de Comprensión relativizado a $M[G]$ se verifica.

Para ver que el Axioma de Infinito se verifica en $M[G]$, basta observar que como estamos suponiendo que M es un mtn para $\mathbf{ZF} - \mathbf{P}$, el Axioma de Infinito se verifica en M , es decir $\omega \in M$, con lo cual $\omega \in M[G]$ (ver el Lema 3.1.15). Esto es suficiente (por el Lema 2.2.15, página 42), para que se verifique el Axioma de Infinito. \blacktriangle

3.1.31 Teorema. Si M es un mtn para \mathbf{ZF}^* , $\mathbb{P} \in M$ es un copo y G es un filtro \mathbb{P} -genérico sobre M , entonces $M[G] \models \mathbf{ZF}$. Además, $M[G] \models \mathbf{ZFE}$ si $M \models \mathbf{ZFE}^*$.

Demostración. Supongamos que M es un mtn para \mathbf{ZF}^* , por el Teorema 3.1.30, basta probar que en $M[G]$ se verifican los Axiomas de Potencia y Reemplazo.

El Axioma de Potencia relativizado a $M[G]$ queda de la siguiente manera (ver página 7):

$$\forall x \in M[G] \exists y \in M[G] \forall z \in M[G] (z \subseteq x \rightarrow z \in y).$$

Es suficiente probar que para cada $a \in M[G]$ existe un $b \in M[G]$ tal que $\mathcal{P}(a) \cap M[G] \subseteq b$ (ya que si $z \in M[G]$ tal que $z \subseteq a$, entonces $z \in \mathcal{P}(a) \cap M[G]$, con lo cual $z \in b$). Sea $a \in M[G]$, $\tau \in M^{\mathbb{P}}$ tal que $\tau_G = a$ y sea $Q = [\mathcal{P}(\text{dom}(\tau) \times \mathbb{P})]^M$. Este es el conjunto de todos los nombres $j \in M^{\mathbb{P}}$ tales que $\text{dom}(j) \subseteq \text{dom}(\tau)$. Sea $\pi = Q \times \{\mathbb{1}\}$ y sea $b = \pi_G = \{j_G : j \in Q\}$. Ahora tomemos $c \in \mathcal{P}(a) \cap M[G]$; necesitamos ver que $c \in b$. Fijemos $\gamma \in M^{\mathbb{P}}$ tal que $\gamma_G = c$ y sea $j = \{(\sigma, p) : \sigma \in \text{dom}(\tau) \wedge p \Vdash \sigma \in \gamma\}$; $j \in M$ por el Lema de Definibilidad 3.1.27. Como $j \in Q$, $j_G \in b$, así, si mostramos que $j_G = c$, ya acabamos. Si $\alpha \in j_G$, entonces existe un σ y existe un $p \in G$ tal que $p \Vdash \sigma \in \gamma$ y $\sigma_G = \alpha$, esto implica que $\alpha = \sigma_G \in \gamma_G = c$, lo cual nos dice que $j_G \subseteq c$. Para ver que $c \subseteq j_G$, como $c \subseteq a = \tau_G$, cada elemento de c es de la forma σ_G para algún $\sigma \in \text{dom}(\tau)$. Como $\sigma_G \in c = \gamma_G$, apliquemos el Lema de Verdad 3.1.28 y fijemos $p \in G$ tal que $p \Vdash \sigma \in \gamma$. Entonces $(\sigma, p) \in j$, y así $\sigma_G \in j_G$, con lo cual $c \subseteq j_G$. Así, tenemos que $c = j_G \in b$. Por lo tanto, en $M[G]$ se verifica el Axioma de Potencia.

Procedamos a verificar que Reemplazo también se verifica. Por como enunciamos este axioma (ver página 6), tomemos un $a \in M[G]$ y supongamos $(\forall x \in A \exists y \tilde{\varphi}(x, y))^{M[G]}$, lo que haremos será producir un $b \in M[G]$ tal que $(\forall x \in A \exists y \in b \tilde{\varphi}(x, y))^{M[G]}$. Al igual que en la prueba del Teorema 3.1.30, acortamos nuestra notación al escribir la fórmula $\tilde{\varphi}(x, y)$, que bien podría contener otros parámetros. Sea τ tal que $\tau_G = a \in M[G]$, así $M[G] \models \forall x \in \tau_G \exists y \tilde{\varphi}(x, y)$. Trabajando en M (usando el Lema de Definibilidad 3.1.27), sea Q un conjunto de nombres tal que para cada $p \in \mathbb{P}$ y para cada $\sigma \in \text{dom}(\tau)$ si hay algún nombre j tal que $p \Vdash \tilde{\varphi}(\sigma, j)$, entonces por lo menos hay un j de estos en Q . Este Q se puede obtener usando el Teorema del Reflejo en M (ver Teorema 2.5.3, página 56). Así, Q puede ser $M^{\mathbb{P}} \cap (R(\alpha))^M$ para algún $\alpha \in M \cap \mathbf{Ord}$ suficientemente grande. Sea $\pi = Q \times \{\mathbb{1}\}$ y sea $b = \pi_G = \{j_G : j \in Q\}$. Queremos probar que $(\forall x \in a \exists y \in b \tilde{\varphi}(x, y))^{M[G]}$. Sea $x \in a$. Así, $x = \sigma_G$ para algún $\sigma \in \text{dom}(\tau)$. Entonces $M[G] \models \exists y \tilde{\varphi}(\sigma_G, y)$ (por hipótesis), así, hay un $j \in M^{\mathbb{P}}$ tal que $M[G] \models \tilde{\varphi}(\sigma_G, j_G)$, luego por el Lema de Verdad 3.1.28, existe un $p \in G$ tal que $p \Vdash \tilde{\varphi}(\sigma, j)$. Entonces hay un $\vartheta \in Q$ tal que $p \Vdash \tilde{\varphi}(\sigma, \vartheta)$. Si $y = \vartheta_G$, entonces $y \in b$ y $(\tilde{\varphi}(x, y))^{M[G]}$, que es lo que necesitábamos ver para corroborar que Reemplazo se verifica en $M[G]$.

Supongamos ahora que M es un mtn para \mathbf{ZFE}^* y veamos que $M[G] \models \mathbf{AE}$. Sea $a = \tau_G \in M[G]$; probaremos que a tiene un buen orden en $M[G]$. Tra-

bajando en M , usemos **AE** para alistar el $dom(\tau)$ como $\{\sigma^\xi : \xi < \alpha\}$, sea \dot{f} el nombre $\{(op(\check{\xi}, \sigma^\xi), \mathbb{1}) : \xi < \alpha\}$. En $M[G]$ tenemos $f := \dot{f}_G$, donde $\dot{f}_G = \{(op(\check{\xi}, \sigma^\xi))_G : \xi < \alpha\}$, lo cual es igual (usando el Lema 3.1.20), a $\{(\check{\xi}_G, \sigma_G^\xi) : \xi < \alpha\} = \{(\xi, \sigma_G^\xi) : \xi < \alpha\} = f$. Con lo cual, f es una función con $dom(f) = \alpha$ y $a \subseteq ran(f)$. Entonces en $M[G]$, veamos que podemos bien ordenar a a diciendo que $x \triangleleft y$ si y sólo si:

$$\min\{\xi < \alpha : f(\xi) = x\} < \min\{\xi < \alpha : f(\xi) = y\}.$$

En efecto, tomemos $x, y \in a$ tales que $x \neq y$, como $a \subseteq ran(f)$, existen $\delta = \min\{\xi < \alpha : f(\xi) = x\}$ y $\beta = \min\{\xi < \alpha : f(\xi) = y\}$. Como $x \neq y$, $\delta \neq \beta$ lo cual implica que $\delta < \beta$ o $\beta < \delta$, con lo cual $x \triangleleft y$ o $y \triangleleft x$. Tomemos ahora $B \subseteq a$ no vacío. Sea $\gamma = \min\{\min\{\xi < \alpha : f(\xi) = x\} : x \in B\}$, entonces $f(\gamma)$ es \triangleleft -minimal en B . \blacktriangle

3.2. ZFE + \neg HC

Utilizando los resultados obtenidos en la sección anterior, probaremos la consistencia de **ZFE + \neg HC**, partiendo de la consistencia de **ZFE**. Para esto, comencemos analizando algunas propiedades que cumple el copo $\mathbb{P} = Fn(\omega, 2)$ (ver Definición 3.1.2 y Observación 3.1.3).

3.2.1 Lema. Si M es un mtn de **ZFE*** y $\mathbb{P} = Fn(\omega, 2)$, entonces:

1. $\mathbb{P} \in M$,
2. $\mathbb{1}_{\mathbb{P}}$ es la función \emptyset ,
3. Si $f \in \mathbb{P}$, entonces existen $g, h \in \mathbb{P}$ tales que $g \leq f$, $h \leq f$ y $g \perp h$,
4. Si $G \subseteq \mathbb{P}$ es un filtro \mathbb{P} -genérico sobre M , entonces $f_G := \bigcup G$ es una función tal que $ran(f_G) \subseteq \{0, 1\} = 2$ y $dom(f_G) = \omega$ (es decir, $f_G : \omega \rightarrow 2$ es una función),
5. $f_G \in M[G] \setminus M$.

Demostración. (1) Como M modela **ZFE***, M conoce todo lo que interviene en la definición de \mathbb{P} y, por tanto, $\mathbb{P} \in M$.

(2) Claramente, $\emptyset \in \mathbb{P}$, además, para cada $f \in \mathbb{P}$, $\emptyset \subseteq f$, es decir, $f \leq \emptyset$, con

lo cual $\mathbb{1}_{\mathbb{P}} = \emptyset$.

(3) Sea $f \in \mathbb{P}$ y sea $n > \max(\text{dom}(f))$ (esto lo podemos hacer porque el dominio de f es finito). Sean $g = f \cup \{(n, 0)\}$ y $h = f \cup \{(n, 1)\}$. De esta manera, ocurre que $g \leq f$, $h \leq f$ y $g \perp h$.

(4) Veamos primero que f_G está bien definida. Supongamos, por el contrario, que existe $n \in \omega$ tal que $(n, 0), (n, 1) \in f_G$, entonces existen $f, g \in G$ tales que $(n, 0) \in f$ y $(n, 1) \in g$, pero como G es un filtro, existe $r \in G$ una extensión común de f y g , así $(n, 0), (n, 1) \in r$ lo cual es una contradicción ya que r es una función. Por lo tanto, f_G está bien definida. Por otra parte, cada elemento en G es una función con rango algún subconjunto de 2, por lo tanto, $\text{ran}(f_G) \subseteq \{0, 1\} = 2$. Para ver que $\text{dom}(f_G) = \omega$, definamos para cada $n \in \omega$ $D_n = \{f \in \mathbb{P} : n \in \text{dom}(f)\}$. Notemos que para cada n en los naturales $D_n \in M$. Ahora verifiquemos que cada uno de estos conjuntos D_n es denso en \mathbb{P} . Sea $n \in \omega$ y veamos que D_n es denso. Tomemos $f \in \mathbb{P}$, si $n \in \text{dom}(f)$, entonces $f \in D_n$. En caso contrario, si $n \notin \text{dom}(f)$, entonces sea $g = f \cup \{(n, 0)\}$. Entonces $g \leq f$ y $g \in D_n$. Por lo tanto, D_n es denso en \mathbb{P} . Ahora, como G es filtro \mathbb{P} -genérico sobre M y para cada $n \in \omega$, $D_n \in M$, se tiene que para cada $n \in \omega$, $G \cap D_n \neq \emptyset$. Para cada $n \in \omega$, sea $f_n \in G \cap D_n$. Entonces, como $f_G = \bigcup_{f \in G} f$, en particular, $f_n \subset f_G$ lo cual implica que $n \in \text{dom}(f_G)$. Por lo tanto, $\text{dom}(f_G) = \omega$. Con todo lo anterior, se tiene que $f_G : \omega \rightarrow 2$ es una función.

(5) $f \in M[G]$, así que resta ver que $f \notin M$. Para cada función $f : \omega \rightarrow 2$ tal que $f \in M$, definamos

$$D_f = \left\{ g \in \mathbb{P} : (\exists n \in \text{dom}(f) \cap \text{dom}(g)) (f(n) \neq g(n)) \right\}.$$

Fijemos $f : \omega \rightarrow 2$ con $f \in M$. Notemos que $D_f \in M$. Afirmamos que D_f es denso en \mathbb{P} . En efecto, sean $g \in \mathbb{P}$, $n > \max(\text{dom}(g))$ y $h = g \cup \{(n, 1 - f(n))\}$. Entonces $h \leq g$ y $h \in D_f$. Por lo tanto, D_f es denso. Tomemos $f^* \in G \cap D_f$, entonces existe $n \in \text{dom}(f^*)$ tal que $f^*(n) \neq f(n)$. Además, como en particular $f^* \in G$, se tiene que $f^*(n) = f_G(n)$, lo cual implica que $f_G \neq f$. Como tomamos una $f : \omega \rightarrow 2$ arbitraria en M , se concluye que $f_G \notin M$. \blacktriangle

3.2.2 Observación. Notemos que por la propiedad (3) del lema que acabamos de probar, nuestro copo \mathbb{P} no tiene átomos, es por eso que cuando tomamos a G , tenemos la certeza de que no es un elemento de M (ver Lema 3.1.10). Esto también se refleja en el hecho de que $f_G \notin M$. Esta nueva función f_G que se encuentra en nuestra extensión se denomina *real de Cohen*,

y decimos que nuestro copo $F_n(\omega, 2)$ agrega un real de Cohen. Pongamos atención al copo que aparece en el siguiente lema.

3.2.3 Lema. Sean κ un cardinal infinito, M un mtn de \mathbf{ZFE}^* .

Si $\mathbb{P} = F_n(\kappa \times \omega, 2)$ y $G \subseteq \mathbb{P}$ es un filtro \mathbb{P} -genérico sobre M , entonces:

1. $\mathbb{P} \in M$,
2. $f_G := \bigcup G$ es una función tal que $\text{ran}(f_G) \subseteq \{0, 1\} = 2$ y $\text{dom}(f_G) = \kappa \times \omega$,
3. $f_G \in M[G] \setminus M$,
4. Si para cada $\alpha < \kappa$ se define $f_{G,\alpha} : \omega \rightarrow 2$ como $f_{G,\alpha}(n) = f_G(\alpha, n)$, entonces si tomamos $\alpha, \beta \in \kappa$ tales que $\alpha \neq \beta$, se tiene que $f_{G,\alpha} \neq f_{G,\beta}$.

Demostración. (1), (2) y (3) se prueban de manera similar al Lema 3.2.1.

(4) Tomemos $\alpha, \beta \in \kappa$ tales que $\alpha \neq \beta$ y veamos que $f_{G,\alpha} \neq f_{G,\beta}$. Definamos

$$D_{\alpha,\beta} = \{p \in \mathbb{P} : \exists n \in \omega : (\alpha, n), (\beta, n) \in \text{dom}(p) \wedge p(\alpha, n) = 1 - p(\beta, n)\}.$$

Primero, notemos que $D_{\alpha,\beta} \in M$, ya que M conoce cada conjunto mediante el cual definimos a $D_{\alpha,\beta}$. Verifiquemos que $D_{\alpha,\beta}$ es denso. Sean $p \in \mathbb{P}$ y $n \in \omega$ tal que no existe $\gamma \in \kappa$ tal que $(\gamma, n) \in \text{dom}(p)$ (esto lo podemos hacer porque $\text{dom}(p)$ es finito). Sea $q = p \cup \{((\alpha, n), 0), ((\beta, n), 1)\}$. Entonces $q \leq p$ y $q \in D_{\alpha,\beta}$. Por lo tanto $D_{\alpha,\beta}$ es denso. Fijemos ahora $\alpha < \beta < \kappa$ y sea $p \in D_{\alpha,\beta} \cap G$. Entonces para algún $n \in \omega$: $p(\alpha, n) \neq p(\beta, n)$ lo cual implica que $f_G(\alpha, n) \neq f_G(\beta, n)$, con lo cual, para algún $n \in \omega$ se tiene que $f_{G,\alpha}(n) \neq f_{G,\beta}(n)$. Por lo tanto, $f_{G,\alpha} \neq f_{G,\beta}$. \blacktriangle

Continuando con la idea de la Observación 3.2.2, (4) del lema que acabamos de probar nos dice que $F_n(\kappa \times \omega, 2)$ agrega κ reales de Cohen a $M[G]$. Sería natural pensar que si escogemos $\kappa \geq \aleph_2$ entonces en $M[G]$ tenemos al menos \aleph_2 funciones distintas de ω en 2. El problema, es que “ser cardinal” no es una noción absoluta. Es decir, pudiera ocurrir que $M \models \kappa \geq \aleph_2$, pero $M[G] \models \kappa = \aleph_0$. En lo que resta de esta sección, nos ocuparemos de ver qué condiciones debemos pedirle a un copo \mathbb{P} para que preserve cardinales (ver Definición 3.2.9). Al menos, podemos garantizar el siguiente corolario que resulta de forma inmediata del lema anterior.

3.2.4 Corolario. Si $\kappa \in M$ y G es $F_n(\kappa \times \omega, 2)$ -genérico sobre M , entonces $(2^\omega \geq |\kappa|)^{M[G]}$.

El Lema 3.2.7 nos mostrará que los copos $F_n(\omega, 2)$ y $F_n(\kappa \times \omega, 2)$, con κ un cardinal, son ccc; pero para esto necesitaremos el Lema del Δ -sistema a continuación.

3.2.5 Definición. Una familia \mathcal{B} forma un Δ -sistema si existe r tal que para cada $A, B \in \mathcal{B}$ ocurre que $A \cap B = r$. A dicha r le llamamos raíz del Δ -sistema.

3.2.6 Lema. [del Δ -sistema] Sean κ un cardinal regular no numerable y \mathcal{A} una familia de conjuntos finitos tales que $|\mathcal{A}| = \kappa$. Entonces existe $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ tal que $|\mathcal{B}| = \kappa$ y \mathcal{B} forma un Δ -sistema.

Demostración. Como $\text{cof}(\kappa) = \kappa > \omega$ (ver Definición 0.2.8, página 4), y cada $X \in \mathcal{A}$ es finito, veamos que existen $n \in \omega$ y $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{A}$ tales que $|\mathcal{D}| = \kappa$ y para cada $X \in \mathcal{D}$ ($|X| = n$). Si esto no fuera cierto, tendríamos que todos los elementos de \mathcal{A} de cardinalidad n se repetirían solamente una cantidad $\alpha < \kappa$ de veces, así, si consideramos todos los elementos de \mathcal{A} de cardinalidad 1, todos los de cardinalidad 2, etc, (recordar que todos los elementos de \mathcal{A} son finitos) vemos que podemos reescribir a \mathcal{A} como una unión de longitud ω de familias de tamaño $\alpha < \kappa$, pero $|\mathcal{A}| = \kappa$, esto nos diría que κ no es regular (ver Teorema 0.2.10, página 5). Probaremos por inducción sobre n que siempre podemos encontrar un \mathcal{B} como el deseado. Si $n = 1$, \mathcal{D} forma un Δ -sistema con raíz vacía. Supongamos ahora que para cada $m < n$ existe \mathcal{C} que forma un Δ -sistema y verifiquemos que para n también ocurre. Para cada $p \in \bigcup \mathcal{A}$ sea $\mathcal{D}_p = \{x \in \mathcal{D} : p \in X\}$. Hay dos posibles casos:

(Caso I) $|\mathcal{D}_p| = \kappa$ para algún p . Tomemos un p de éstos y sea $\varepsilon = \{X \setminus \{p\} : X \in \mathcal{D}_p\}$ que es una familia de κ conjuntos, cada uno de ellos de tamaño $n - 1$. Usando nuestra hipótesis inductiva, sea $\mathcal{C} \subseteq \varepsilon$ tal que \mathcal{C} es de tamaño κ y forma un Δ -sistema con cierta raíz R . Entonces $\{Z \cup \{p\} : Z \in \mathcal{C}\}$ es un subconjunto de \mathcal{D} de tamaño κ que forma un Δ -sistema con raíz $R \cup \{p\}$.

(Caso II) $|\mathcal{D}_p| < \kappa$ para cada p . Entonces para cualquier conjunto S tal que $|S| < \kappa$, ocurre que $\{X \in \mathcal{D} : X \cap S \neq \emptyset\} = \bigcup_{p \in S} \mathcal{D}_p$ tiene tamaño menor que κ ya que κ es regular (ver Teorema 0.2.10). Entonces como $|\mathcal{D}| = \kappa$, existe $X \in \mathcal{D}$ tal que $X \cap S = \emptyset$. Como esto lo hicimos para un S arbitrario tal que $|S| < \kappa$, podemos escoger de manera recursiva $X_\beta \in \mathcal{D}$ con $\beta < \kappa$ de tal forma que para cada β , $X_\beta \cap \bigcup_{\alpha < \beta} X_\alpha = \emptyset$. Entonces $\{X_\beta : \beta < \kappa\}$ es un

Δ -sistema con raíz vacía. ▲

3.2.7 Proposición. Si $F_n(\omega, 2)$ es ccc y κ es un cardinal, entonces $F_n(\kappa \times \omega, 2)$ es ccc.

Demostración. $F_n(\omega, 2)$ es ccc puesto que $F_n(\omega, 2)$ es un conjunto numerable, así, si tomamos una anticadena, es a lo más numerable. Supongamos que κ es un cardinal y sea $\mathcal{A} \subseteq F_n(\kappa \times \omega, 2)$ tal que $|\mathcal{A}| = \omega_1$. Veamos que \mathcal{A} no es una anticadena. Sea $\mathcal{B} = \{dom(p) : p \in \mathcal{A}\}$. Entonces $\mathcal{B} \subseteq [\kappa \times \omega]^{<\omega}$ y $|\mathcal{B}| = \omega_1$. Por el Lema del Δ -sistema 3.2.6, existe $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$ tal que $|\mathcal{C}| = \omega_1$ y \mathcal{C} forma un Δ -sistema con raíz r para alguna $r \in [\kappa \times \omega]^{<\omega}$. Así, si $p, q \in \mathcal{A}$ son tales que $dom(p), dom(q) \in \mathcal{C}$, entonces $dom(p), dom(q) = r$. Como r es finito, existe una cantidad finita de funciones de r en 2, entonces existe $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$ tal que $|\mathcal{D}| = \omega_1$ y para cualesquiera $p, q \in \mathcal{A}$ se tiene que $(dom(p) \cap dom(q) \in \mathcal{D} \rightarrow p \upharpoonright_r = q \upharpoonright_r)$. Entonces para cualesquiera $p, q \in \mathcal{A}$ tales que $(dom(p) \cap dom(q) \in \mathcal{D})$ se tiene que $p \parallel q$. Por lo tanto, \mathcal{A} no es una anticadena. Así, $F_n(\kappa \times \omega, 2)$ es ccc. ▲

Modificando un poco la demostración anterior, se puede probar un hecho más general: el copo $F_n(I, J)$ es ccc si J es numerable.

Una ventaja de que un copo sea ccc queda reflejada en el siguiente lema, que nos proporciona una manera de aproximar, dentro de M , cualquier función de $M[G]$.

3.2.8 Lema. Sea M un mtn de \mathbf{ZFE}^* , $\mathbb{P} \in M$ un copo de forcing y $A, B \in M$. Si $f : A \rightarrow B$ es una función tal que $f \in M[G]$ y $(\mathbb{P}$ es ccc) M , entonces existe $F : A \rightarrow \mathcal{P}(B)$, tal que $F \in M$, para cada $a \in A$ ($f(a) \in F(a)$) y $(|F(a)| \leq \omega^M)$.

Demostración. Sea $\tau \in M^{\mathbb{P}}$ tal que $f = \tau_G$. Entonces existe $p \in G$ tal que $p \Vdash$ “ τ es función de \check{A} en \check{B} ”. Para cada $a \in A$, sea $F(a) = \{b \in B : \exists q \leq p : q \Vdash \tau(\check{a}) = \check{b}\}$. Notemos que $F \in M$ (ya que M conoce todo lo que involucra F y hacemos uso del Lema de Definibilidad 3.1.27). Sea $a \in A$, probemos que $f(a) \in F(a)$. Sea $b = f(a)$, entonces existe $r \in G$ tal que $r \Vdash \tau(\check{a}) = \check{b}$. Sea $q \in G$ extensión común de p y r , así $q \leq p$ y $q \Vdash \tau(\check{a}) = \check{b}$, entonces $b = f(a) \in F(a)$.

Resta probar que $|F(a)| \leq \omega^M$. Usando el **AE** en M , elegimos una función

$\theta \in M$, $\theta : F(a) \rightarrow \mathbb{P}$ tal que $\theta(b) \Vdash \check{\tau}(\check{a}) = \check{b}$ y $\theta(b) \leq p$. Ahora probaremos que el conjunto $\{\theta(b) : b \in F(a)\}$ es una anticadena en \mathbb{P} . Tomemos $b, b' \in F(a)$ tales que $b \neq b'$. Supongamos por un momento que $\theta(b)$ y $\theta(b')$ tienen una extensión común, digamos $r \in \mathbb{P}$. Por el Lema 3.1.7, podemos tomar $H \subseteq \mathbb{P}$ un filtro \mathbb{P} -genérico tal que $r \in H$. Entonces $\theta(b), \theta(b') \in H$ y en $M[H]$ ocurre que $\tau_H : A \rightarrow B$ es una función (debido a que $r \leq \theta(b) \leq p$ y $p \Vdash \check{\tau}$ es función de \check{A} en \check{B}), y además $\tau_H(a) = b$ y $\tau_H(a) = b'$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\{\theta(b) : b \in F(a)\}$ es una anticadena en \mathbb{P} . Además, como \mathbb{P} es ccc, se tiene que $|\{\theta(b) : b \in F(a)\}| \leq \omega^M$, lo cual implica que $|F(a)| \leq \omega^M$. \blacktriangle

3.2.9 Definición. Sean M un mtn de **ZFE***, $\mathbb{P} \in M$ un copo de forcing y $G \subseteq \mathbb{P}$ un filtro \mathbb{P} -genérico sobre M . Diremos que \mathbb{P} preserva cardinales si ocurre:

$$\forall \beta \in \mathbf{Ord} \cap M (\beta \text{ es cardinal})^M \leftrightarrow (\beta \text{ es cardinal})^{M[G]}.$$

3.2.10 Observación. Se cumple que

$$(\kappa \text{ es un cardinal})^{M[G]} \rightarrow (\kappa \text{ es un cardinal})^M.$$

Efectivamente, si κ fuese un cardinal en $M[G]$ y no lo fuera en M , se tendrían $\alpha, f \in M$ tales que $(\alpha < \kappa)^M$ y $(f : \alpha \rightarrow \kappa \text{ es una biyección})^M$. Entonces $\alpha, f \in M[G]$ y por absolutez (ver (2) del Lema 2.3.2 y (9) del Lema 2.3.3; páginas 44 y 45, respectivamente), $(\alpha < \kappa)^{M[G]}$ y $(f : \alpha \rightarrow \kappa \text{ es una biyección})^{M[G]}$, lo cual implica que κ no es un cardinal en $M[G]$.

Para la siguiente definición, necesitamos recordar el concepto de *cofinalidad* (ver la Sección 0.2).

3.2.11 Definición. Sean M, \mathbb{P} y G como en la Definición 3.2.9. Diremos que \mathbb{P} *preserva cofinalidades* si para todo ordinal límite $\gamma \in M$ $(\text{cof}(\gamma))^M = (\text{cof}(\gamma))^{M[G]}$.

El lema que presentamos a continuación, nos da una muestra que preservar cofinalidades es más fuerte que preservar cardinales.

3.2.12 Lema. Si \mathbb{P} preserva cofinalidades, entonces \mathbb{P} preserva cardinales.

Demostración. Supongamos que \mathbb{P} preserva cofinalidades.

Si $\alpha \geq \omega$ es un cardinal regular en M (ver Definición 0.2.8, página 4), entonces $(\text{cof}(\alpha) = \alpha)^M$, y como \mathbb{P} preserva cofinalidades se tiene que $(\text{cof}(\alpha) = \alpha)^{M[G]}$, es decir, $(\alpha \text{ es regular})^{M[G]}$, usando el Lema 0.2.9 (página 4), se tiene que $(\alpha \text{ es un cardinal regular})^{M[G]}$.

Por la Observación 3.2.10, basta preocuparnos de los cardinales en M . Excepto por el 0, los cardinales son sucesores o límites. Si $\kappa \in M$ es un cardinal sucesor, entonces por el Lema 0.2.9, κ es regular y, por lo que probamos líneas arriba, κ sigue siendo un cardinal en $M[G]$. Sea $\beta > \omega$ un cardinal límite en M . Entonces el conjunto de cardinales regulares en M es no acotado en β , los cuales son cardinales regulares en $M[G]$, por lo tanto, β es un cardinal límite en $M[G]$. Así, podemos concluir que \mathbb{P} preserva cardinales. \blacktriangle

3.2.13 Lema. Supongamos que $\mathbb{P} \in M$. Si siempre que G es \mathbb{P} -genérico sobre M y κ es un cardinal regular no numerable de M se cumple que $(\kappa \text{ es regular})^{M[G]}$, entonces \mathbb{P} preserva cofinalidades.

Demostración. Por el Lema 2.3.2 (página 44), ser ordinal sucesor o ser ordinal límite son nociones absolutas. Además, por la Observación 0.2.7 (página 4), los ordinales sucesores tienen cofinalidad 1. Por lo tanto, resta verificar que los ordinales límite en M preservan su cofinalidad. Sea γ un ordinal límite en M y sea $(\kappa = \text{cof}(\gamma))^M$. Entonces por (5) del Lema 0.2.9 (página 4), existe una función $f : \kappa \rightarrow \gamma$ estrictamente creciente y cuyo rango es cofinal en γ . Ahora, por (1) del Lema 0.2.9, se tiene que $(\kappa = \text{cof}(\gamma) \text{ es regular})^M$, usando nuestra hipótesis, $(\kappa \text{ es regular})^{M[G]}$, de donde $(\text{cof}(\kappa) = \kappa)^{M[G]}$. Finalmente, notemos que $f \in M[G]$, así por (6) del Lema 0.2.9, $(\text{cof}(\kappa) = \text{cof}(\gamma))^{M[G]}$, entonces $(\kappa = \text{cof}(\gamma))^{M[G]}$. Por lo tanto, \mathbb{P} preserva cofinalidades. \blacktriangle

El siguiente teorema nos muestra otra cualidad importante de los copos ccc.

3.2.14 Teorema. Si $\mathbb{P} \in M$ y $(\mathbb{P} \text{ es ccc})^M$, entonces \mathbb{P} preserva cofinalidades.

Demostración. Supongamos lo contrario. Entonces existe un G , filtro \mathbb{P} -genérico sobre M , y $\kappa \in M$ tales que $(\kappa \text{ es regular y no numerable})^M$ y $(\kappa \text{ no es regular})^{M[G]}$. Entonces existen $\alpha, f \in M[G]$ tales que $\alpha < \kappa$ y $f : \alpha \rightarrow \kappa$ es una función con rango cofinal en κ . Como $(\mathbb{P} \text{ es ccc})^M$, podemos usar el Lema 3.2.8. Sea $F : \alpha \rightarrow \mathcal{P}(\kappa)$ tal que $F \in M$, para cada $\xi < \alpha$ ($f(\xi) \in F(\xi)$) y $|F(\xi)| < \omega$. Si definimos a S como $S = \bigcup_{\xi < \alpha} F(\xi)$, entonces $S \in M$ y S es un conjunto cofinal en κ (de no serlo, $\text{ran}(f)$ no sería

cofinal en κ). Pero S es una unión de longitud α de conjuntos numerables, por lo tanto, $(|S| = |\alpha|)^M$ con lo cual $(\text{cof}(\kappa) \leq |S| = |\alpha| < \kappa)^M$. Esto nos dice que κ no es regular en M , lo cual es una contradicción. Por lo tanto, \mathbb{P} preserva cofinalidades. \blacktriangle

Sumando todos los resultados anteriores, la consistencia de la negación de **HC** se obtiene como un corolario:

3.2.15 Corolario. $\text{Con}(\mathbf{ZFE}) \rightarrow \text{Con}(\mathbf{ZFE} + \neg \mathbf{HC})$

Demostración. Sea $\kappa = \aleph_2$ y sea $\mathbb{P} = \text{Fn}(\kappa \times \omega, 2)$. Por el Lema 3.2.7 se tiene que \mathbb{P} es ccc. Luego, por los Lemas 3.2.12 y 3.2.14, \mathbb{P} preserva cardinales, entonces en $M[G]$, $\kappa = \aleph_2$. Por el Corolario 3.2.4 $(|2^\omega| \geq |\kappa| = \aleph_2)^{M[G]}$. Por lo tanto, $|\mathbb{R}| \geq \aleph_2$.² \blacktriangle

Sólo hemos probado que es consistente que $(|2^\omega| \geq \aleph_2)$. En lo que resta de esta sección mostraremos que también es consistente que $(|2^\omega| = \aleph_2)$, es más, es consistente que $|2^\omega|$ sea de cualquier tamaño κ , siempre y cuando κ tenga cofinalidad mayor que ω (como una consecuencia del Lema de König 0.2.12 [ver Corolario 0.2.13, página 5], se tiene que $\text{cof}(2^\omega) > \omega$). Con esta finalidad, presentamos la siguiente definición.

3.2.16 Definición. Para $\tau \in \mathbf{V}^{\mathbb{P}}$, un *nombre adecuado*³ para un subconjunto de τ es un nombre de la forma

$$\bigcup \{ \{ \sigma \} \times A_\sigma : \sigma \in \text{dom}(\tau) \},$$

donde cada A_σ es una anticadena en \mathbb{P} .

El siguiente par de lemas nos servirán para acotar el tamaño de 2^ω (ver Lema 3.2.19).

3.2.17 Lema. Sean $\tau \in \mathbf{V}^{\mathbb{P}}$ fijo, $\kappa = |\mathbb{P}|$ y $\lambda = |\text{dom}(\tau)|$. Si \mathbb{P} es ccc y κ y λ son infinitos, entonces, no hay más de κ^λ nombres adecuados para subconjuntos de τ .

Demostración. Como \mathbb{P} es c.c.c., las anticadenas en \mathbb{P} son numerables, y como $\kappa = |\mathbb{P}|$, a lo más tenemos κ^{\aleph_0} anticadenas. Además

$$\left| \bigcup \{ \{ \sigma \} \times A_\sigma : \sigma \in \text{dom}(\tau) \} \right| \leq (\kappa^{\aleph_0})^\lambda = \kappa^{\aleph_0 \cdot \lambda} = \kappa^\lambda.$$

²Recordemos que $|\mathbb{R}| = |2^\omega|$.

³En inglés se denomina como nice name.

▲

3.2.18 Lema. Si $\mathbb{P} \in M$ y $\tau, \mu \in M^{\mathbb{P}}$, entonces hay un nombre adecuado $\vartheta \in M^{\mathbb{P}}$ para un subconjunto de τ tal que

$$\mathbb{1} \Vdash (\mu \subseteq \tau \rightarrow \mu = \vartheta).$$

Demostración. Sea $\vartheta = \bigcup \{ \{\sigma\} \times A_\sigma : \sigma \in \text{dom}(\tau) \}$, donde cada A_σ es escogida de tal forma que:

1. A_σ es una anticadena en \mathbb{P} ,
2. Para cada $p \in A_\sigma$, $p \Vdash \sigma \in \mu$,
3. A_σ es maximal con respecto a (1) y (2).

Podemos suponer que $\{A_\sigma : \sigma \in \text{dom}(\tau)\} \in M$ por el Lema de Definibilidad 3.1.27 y el Lema de Zorn (que es equivalente a **AE**). Para probar que $\mathbb{1} \Vdash (\mu \subseteq \tau \rightarrow \mu = \vartheta)$, sea G un filtro \mathbb{P} -genérico sobre M y supongamos que $\mu_G \subset \tau_G$.

Veamos que $\mu_G \subset \vartheta_G$. Para esto, sea $a \in \mu_G$, como $\mu_G \subset \tau_G$, se tiene que para algún $\pi \in \text{dom}(\tau)$, $a = \pi_G$. Si $A_\pi \cap G \neq 0$, fijemos $p \in A_\pi \cap G$, entonces $(\pi, p) \in \vartheta$ y $p \in G$, así $a = \pi_G \in \vartheta_G$. Si $A_\pi \cap G = 0$, como G es \mathbb{P} -genérico sobre M , por (a) del Lema 3.1.6, existe $q \in G$ tal que para cada $p \in A_\pi$, $p \perp q$. Sea $q' \in G$ tal que $q' \Vdash \pi \in \mu$ y sea r una extensión común de q y q' . Entonces $A_\pi \cup \{r\}$ satisface (1) y (2) lo cual contradice la maximalidad de A_π , por lo tanto $A_\pi \cap G \neq 0$ y se tiene que $\mu_G \subset \vartheta_G$.

Para ver que $\vartheta_G \subset \mu_G$, fijemos $a \in \vartheta_G$, entonces $a = \pi_G$, donde $(\pi, p) \in \vartheta$ para algún $p \in G$. Por definición de ϑ , $p \Vdash \pi \in \mu$, así $a = \pi_G \in \mu_G$, con lo cual se concluye la igualdad deseada. ▲

3.2.19 Lema. Fijemos $\mathbb{P} \in M$. Supongamos que en M , \mathbb{P} es ccc, κ , λ y δ son cardinales infinitos, $\kappa = |\mathbb{P}|$ y $\delta = \kappa^\lambda$. Si G es un filtro \mathbb{P} -genérico sobre M , entonces $(2^\lambda \leq \delta)^{M[G]}$.

Demostración. Trabajando en M : el nombre $\check{\lambda} = \{(\check{\xi}, \mathbb{1}) : \xi < \lambda\}$ tiene tamaño λ , así por el Lema 3.2.17, podemos alistar todos los nombres adecuados para subconjuntos de $\check{\lambda}$ como $\{\vartheta_\zeta : \zeta < \delta\}$. Sea \check{f} el nombre $\{(op(\check{\zeta}, \theta_\zeta), \mathbb{1}) : \zeta < \delta\}$.

Trabajando en $M[G]$: $f_G = \{(op(\check{\zeta}, \theta_\zeta), \mathbb{1})_G : \zeta < \delta\} = \{(\zeta, (\theta_\zeta)_G) : \zeta < \delta\}$.

Así, f_G es una función con dominio δ y $f_G(\zeta) = (\theta_\zeta)_G$. Si s es cualquier subconjunto de λ en $M[G]$, entonces $s = \mu_G$ para algún μ y por el Lema 3.2.18, hay algún ζ tal que $\mathbb{1} \Vdash (\mu \subseteq \check{\lambda} \rightarrow \mu = \vartheta_\zeta)$. Así, $f_G(\zeta) = (\vartheta_\zeta)_G = \mu_G = s$. Por lo tanto, $\text{ran}(f_G) \supseteq \mathcal{P}(\lambda)$. Con lo cual $2^\lambda \leq \delta$ (en $M[G]$). Notemos que $(\delta$ es un cardinal) $^{M[G]}$ ya que \mathbb{P} es ccc (ver Lemas 3.2.12 y 3.2.14). \blacktriangle

Estamos en condiciones de probar lo siguiente.

3.2.20 Lema. Sean κ un cardinal infinito de M tal que $(\kappa^{\aleph_0} = \kappa)^M$ y $\mathbb{P} = \text{Fn}(\kappa \times \omega, 2)$. Si G es un filtro \mathbb{P} -genérico sobre M , entonces $(2^{\aleph_0} = \kappa)^{M[G]}$.

Demostración. Sea κ un cardinal infinito de M tal que $(\kappa^{\aleph_0} = \kappa)^M$, procediendo de manera similar a la demostración del Corolario 3.2.15, tenemos que $(2^{\aleph_0} \geq \kappa)^{M[G]}$. Además, se cumplen las hipótesis del Lema 3.2.19 ya que \mathbb{P} es ccc y $\kappa = |\mathbb{P}|$, entonces $(2^{\aleph_0} \leq \kappa^{\aleph_0})^{M[G]}$ lo cual implica que $(2^{\aleph_0} \leq \kappa)^{M[G]}$. Por lo tanto, $(2^{\aleph_0} = \kappa)^{M[G]}$. \blacktriangle

Como habíamos comentado anteriormente, es consistente que el continuo tenga cualquier tamaño κ siempre y cuando $\text{cof}(\kappa) > \omega$, es decir, se verifica lo siguiente:

3.2.21 Corolario. $\text{Con}(\mathbf{ZFE})$ implica

- (a) $\text{Con}(\mathbf{ZFE} + 2^\omega = \aleph_2)$,
- (b) $\text{Con}(\mathbf{ZFE} + 2^\omega = \aleph_{\aleph_1})$, etcétera.

3.3. Fn de Cardinalidades Mayores

En esta sección, veremos que es posible construir modelos donde **HCG** no se verifica a partir de cierto cardinal pero **HC** sí se verifica. Muchos de estos resultados son una generalización de resultados obtenidos en la sección anterior, es por eso que omitiremos su demostración salvo cuando sea necesario. Generalizando la noción de $\text{Fn}(I, J)$ tenemos lo siguiente.

3.3.1 Definición. Para cualquier cardinal infinito λ ,

$$\text{Fn}(I, J, \lambda) = \{p : |p| < \lambda \wedge p \text{ es una función } \wedge \text{dom}(p) \subset I \wedge \text{ran}(p) \subset J\}.$$

Ordenamos a $p, q \in \text{Fn}(I, J, \lambda)$ como $p \leq q \leftrightarrow q \subseteq p$.

3.3.2 Observación. Notemos que $F_n(I, J) = F_n(I, J, \omega)$, además, al igual que con $F_n(I, J)$, $F_n(I, J, \omega)$ es un copo con elemento maximal $\mathbb{1} = 0$.

De manera análoga a la demostración de (4) del Lema 3.2.1, podemos probar el siguiente resultado.

3.3.3 Lema. Si $I, J, \lambda \in M$, (λ es un cardinal) M , $J \neq \emptyset$, $(|I| \geq \lambda)^M$ y G es $F_n(I, J, \lambda)^M$ -genérico sobre M , entonces $\bigcup G$ es una función sobreyectiva de I a J .

El siguiente lema es similar al Corolario 3.2.4.

3.3.4 Lema. Si (λ es un cardinal) M , $\kappa \in M$ y G es $F_n(\kappa \times \lambda, 2, \lambda)^M$ -genérico sobre M , entonces $(2^{|\lambda|} \geq |\kappa|)^{M[G]}$.

Necesitamos modificar el argumento de ser ccc para que se preserven cardinales mayores que λ .

3.3.5 Definición. Supongamos que $\mathbb{P} \in M$ y θ es un cardinal infinito en M .

1. \mathbb{P} *preserva cardinales mayores o iguales a θ* (o menores o iguales a θ), si y sólo si siempre que G sea \mathbb{P} -genérico sobre M , $\beta \in M \cap \mathbf{Ord}$ y $\beta \geq \theta$ (respectivamente $\beta \leq \theta$),

$$(\beta \text{ es un cardinal})^M \leftrightarrow (\beta \text{ es un cardinal})^{M[G]}.$$

2. \mathbb{P} *preserva cofinalidades mayores o iguales a θ* (o menores o iguales a θ), si y sólo si siempre que G sea \mathbb{P} -genérico sobre M , γ un cardinal límite en M , y $\text{cof}(\gamma)^M \geq \theta$ (respectivamente, $\text{cof}(\gamma) \leq \theta$), entonces

$$\text{cof}(\gamma)^M = \text{cof}(\gamma)^{M[G]}.$$

3.3.6 Lema. Con las mismas hipótesis de la Definición 3.3.5, si \mathbb{P} preserva cofinalidades $\leq \theta$, entonces \mathbb{P} preserva cardinales $\leq \theta$. Si \mathbb{P} preserva cofinalidades $\geq \theta$ y (θ es regular) M , entonces \mathbb{P} preserva cardinales $\geq \theta$.

Demostración. Procedemos de manera análoga a la demostración del Lema 3.2.12. ▲

El siguiente lema es el análogo del Lema 3.2.13.

3.3.7 Lema. Con las mismas hipótesis de la Definición 3.3.5. Si siempre que κ sea un cardinal regular de M , $\kappa \geq \theta$ y G sea \mathbb{P} -genérico sobre M , ocurre que $(\kappa \text{ es regular})^{M[G]}$, entonces \mathbb{P} preserva cofinalidades $\geq \theta$. Análogamente, si escribimos $\leq \theta$ en vez de $\geq \theta$.

Como una generalización de ser ccc (ver (5) de la Definición 3.1.1) tenemos lo siguiente:

3.3.8 Definición. Si \mathbb{P} es un copo de forcing y κ es un cardinal, diremos que \mathbb{P} cumple la κ -cc (o, simplemente, \mathbb{P} es κ -cc), si para toda anticadena $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{P}$, se cumple que $|\mathcal{A}| < \kappa$.

Notemos que los copos que son ω_1 -cc y los que son ccc son exactamente los mismos. El siguiente par de resultados son una generalización del Lema 3.2.8 y el Teorema 3.2.14.

3.3.9 Lema. Supongamos que $\mathbb{P} \in M$, $A, B \in M$, $(\theta \text{ es un cardinal})^M$ y \mathbb{P} es θ -cc. Si G es un filtro \mathbb{P} -genérico sobre M y $f \in M[G]$ tal que $f : A \rightarrow B$, entonces hay una función $F : A \rightarrow \mathcal{P}(B)$ con $F \in M$, tal que para cada $a \in A$ ($f(a) \in F(a)$) y para cada $a \in A$ ($|F(a)| < \theta$)^M.

3.3.10 Lema. Si $\mathbb{P} \in M$, θ es un cardinal en M , y $(\mathbb{P} \text{ es } \theta\text{-cc})^M$, entonces \mathbb{P} preserva cofinalidades $\geq \theta$. Además, si $(\theta \text{ es regular})^M$, \mathbb{P} preserva cardinales $\geq \theta$.

3.3.11 Lema. $F_n(I, J, \lambda)$ es $(|J|^{<\lambda})^+$ -cc.

3.3.12 Corolario. Si $I, J \in M$, $(\lambda \text{ es regular})^M$, $(|J| \leq 2^{<\lambda})^M$ y $(\theta = (2^{<\lambda})^+)^M$, entonces, $F_n(I, J, \lambda)^M$ preserva cofinalidades y cardinales $\geq \theta$.

Demostración. Aplicando el Lema 3.3.11 en M , $F_n(I, J, \lambda)^M$ es θ -cc en M ya que $(|J|^{<\lambda} = 2^{<\lambda})^M$. Aplicando el Lema 3.3.10, se tiene el resultado. \blacktriangle

Mediante un método diferente probaremos que si λ es regular en M , entonces $(F_n(I, \kappa, \lambda))^M$ preserva cofinalidades y cardinales $\leq \lambda$. Para esto, veamos la siguiente definición.

3.3.13 Definición. Un copo \mathbb{P} es λ -cerrado si y sólo si siempre que $\gamma < \lambda$ y $\{p_\xi : \xi < \gamma\}$ sea una sucesión decreciente de elementos de \mathbb{P} ($\xi < \eta \rightarrow p_\eta < p_\xi$), entonces existe $q \in \mathbb{P}$ tal que para cada $\xi < \gamma$ ($q \leq p_\xi$).

3.3.14 Lema. Si λ es regular, entonces $F_n(I, J, \lambda)$ es λ -cerrado.

Demostración. Sea $\gamma < \lambda$ y $\{p_\xi : \xi < \gamma\}$ una sucesión decreciente de elementos de \mathbb{P} . Si hacemos $q = \bigcup \{p_\xi : \xi < \gamma\}$, entonces $|q| < \lambda$ ya que cada $|p_\xi| < \lambda$ y λ es regular. \blacktriangle

Si λ es regular, entonces el hecho de que $F_n(I, J, \lambda)$ sea λ -cerrado será usado para probar que los cardinales $\leq \lambda$ se preservan. El siguiente teorema se puede comparar con el Lema 3.3.9, nos muestra que las funciones de A en B están en M siempre y cuando A sea lo suficientemente pequeño.

3.3.15 Teorema. Supongamos que $\mathbb{P} \in M$, $A, B \in M$, (λ es un cardinal) M , (\mathbb{P} es λ -cerrado) M y $(|A| < \lambda)^M$. Si G \mathbb{P} -genérico sobre M y $f \in M[G]$ es tal que $f : A \rightarrow B$, entonces $f \in M$.

3.3.16 Corolario. Si $\mathbb{P} \in M$, (λ es un cardinal) M y (\mathbb{P} es λ cerrado) M , entonces \mathbb{P} preserva cofinalidades $\leq \lambda$ y por tanto, cardinales $\leq \lambda$.

Demostración. Supongamos que \mathbb{P} no preserva cofinalidades, entonces por el Lema 3.3.7 existe un $\kappa \leq \lambda$ tal que (κ es regular) M y (κ es singular) $^{M[G]}$. Así, existe $\alpha < \kappa$ y una $f \in M[G]$, $f : \alpha \rightarrow \kappa$ tal que $\text{ran}(f)$ es cofinal en κ . Por el Teorema 3.3.15, $f \in M$, lo cual contradice que (κ es regular) M . Por lo tanto, \mathbb{P} preserva cofinalidades $\leq \lambda$ y por el Lema 3.3.6, \mathbb{P} preserva cardinales $\leq \lambda$. \blacktriangle

3.3.17 Teorema. Si $\lambda, I, J \in M$, (λ es regular) M , $(2^{<\lambda} = \lambda)^M$ y $(|J| \leq \lambda)^M$, entonces $F_n(I, J, \lambda)^M$ preserva cofinalidades (y por tanto, cardinales).

Demostración. Por el Lema 3.3.14, como λ es regular, $F_n(I, J, \lambda)^M$ es λ -cerrado en M y, por el Corolario 3.3.16, preserva cofinalidades $\leq \lambda$. Como $2^{<\lambda} = \lambda$, y $(|J| \leq \lambda)^M$, se tiene que $|J| \leq 2^{<\lambda}$, usando el Corolario 3.3.12, se tiene que $F_n(I, J, \lambda)^M$ preserva cofinalidades $\geq (2^{<\lambda})^+ = \lambda^+$. Con todo lo anterior, se obtiene el resultado. \blacktriangle

Este Teorema es una generalización del Corolario 3.2.21.

3.3.18 Teorema. Supongamos que $(\lambda < \kappa)^M$, (λ es regular) M , $(2^{<\lambda} = \lambda)^M$ y $(\kappa^\lambda = \kappa)$. Si $\mathbb{P} = F_n(\kappa \times \lambda, 2, \lambda)^M$, entonces \mathbb{P} preserva cardinales y si G es \mathbb{P} -genérico sobre M , entonces $(2^\lambda = \kappa)^M[G]$.

Usando el teorema anterior, podemos invalidar **HCG** a nuestro gusto en cualquier cardinal regular, más aún, en cualquier cantidad finita de cardinales regulares. Verbigracia, podemos encontrar una prueba de lo siguiente en [13]:

3.3.19 Teorema. Si **ZFE** es consistente, entonces también lo son:

- (a) **ZFE + HC** + $2^{\omega_1} = \omega_2 + 2^{\omega_2} = \omega_{\omega_8}$
- (b) **ZFE + HC** + $2^{\omega_1} = \omega_5 + 2^{\omega_2} = \omega_7$
- (c) **ZFE** + $2^{\omega} = \omega_3 + 2^{\omega_1} = \omega_4 + 2^{\omega_2} = \omega_6$

3.4. ZFE + HC

A continuación, presentaremos una prueba de la consistencia de **HC** para ilustrar lo sencillo que ésta resulta usando la técnica de forcing. Gödel, en 1938, fue el primero en probar esto definiendo el modelo **L** de los conjuntos construibles (para mayor información sobre **L**, se pueden consultar [6], [10], [11] y [14]).

3.4.1 Teorema. $\text{Con}(\mathbf{ZFE}) \rightarrow \text{Con}(\mathbf{ZFE} + \mathbf{HC})$.

Demostración. Sea M un mtn de **ZFE*** y definamos en M a

$$\mathbb{P} = Fn(\omega_1, \mathcal{P}(\omega), \omega_1).$$

Los elementos de \mathbb{P} son aproximaciones numerables a funciones de ω_1^M en $\mathcal{P}^M(\omega)$. Sea G un filtro \mathbb{P} -genérico sobre M . Para cada $\alpha < \omega_1^M$, sea $D_\alpha = \{p \in \mathbb{P} : \alpha \subseteq \text{dom}(p)\}$.

Veamos que para cada $\alpha < \omega_1^M$, D_α es denso. Sea $p \in \mathbb{P}$ y supongamos que $p : \beta \rightarrow \mathcal{P}^M(\omega)$, con β un ordinal y $\beta < \omega_1^M$ (si p no cumple con que β sea ordinal, podemos encontrar un $q \leq p$ que sí lo cumpla). Si $\beta \geq \alpha$ entonces $p \in D_\alpha$. En otro caso, sea $q : \alpha \rightarrow \mathcal{P}^M(\omega)$, tal que

$$q(\xi) = \begin{cases} p(\xi) & \text{si } \xi \in \beta \\ \emptyset & \text{si } \xi \geq \beta \end{cases}$$

entonces $q \in D_\alpha$ y $q \leq p$.

Por otro lado, para cada $x \in \mathcal{P}^M(\omega)$ sea $E_x = \{p \in \mathbb{P} : x \in \text{ran}(p)\}$. Veamos que para cada $x \in \mathcal{P}^M(\omega)$, E_x es denso. Sea $x \in \mathcal{P}^M(\omega)$ y $p \in \mathbb{P}$, si

$x \in \text{ran}(p)$, entonces $p \in E_x$. Supongamos que $x \notin \text{ran}(p)$. Sea $\beta > \text{dom}(p)$ tal que $\beta \in \omega_1^M$, definimos $q = p \cup \{(\beta, x)\}$. Entonces $q \leq p$ y $q \in E_x$. Por lo tanto, E_x es denso para cada $x \in \mathcal{P}^M(\omega)$.

Definamos ahora $f = \bigcup_{p \in G} p$ y veamos que es una función sobreyectiva $f : \omega_1^M \rightarrow \mathcal{P}^M(\omega)$.

1. Si $(\alpha, A), (\alpha, B) \in f$, entonces existen $p_1, p_2 \in G$ tales que $(\alpha, A) \in p_1$, $(\alpha, B) \in p_2$. Como G es filtro, existe $r \in G$ tal que $r \leq p_1$ y $r \leq p_2$. Así $(\alpha, A), (\alpha, B) \in r$ y como r es función, ocurre que $A = B$ y por tanto f es función.
2. Como para cada $\alpha < \omega_1^M$, D_α es denso y G es \mathbb{P} -genérico sobre M se tiene que $G \cap D_\alpha \neq \emptyset$. Así, para cada $\alpha < \omega_1^M$ existe $p \in G$ tal que $\alpha \subseteq \text{dom}(p)$ y por tanto $\omega_1^M = \bigcup_{\alpha < \omega_1^M} \alpha \subseteq \bigcup_{p \in G} \text{dom}(p) \subseteq \omega_1^M$. Por lo tanto $\text{dom}(f) = \bigcup_{p \in G} \text{dom}(p) = \omega_1^M$.
3. Sea $A \in \mathcal{P}^M(\omega)$ y $p \in \mathbb{P}$. Como $E_A = \{p \in \mathbb{P} : A \in \text{ran}(p)\}$ es denso en \mathbb{P} , existe $q \in E_A$ tal que $q \leq p$. Es decir, $A \in \text{ran}(q)$. De aquí, se tiene que existe $\alpha < \omega_1^M$ tal que $f(\alpha) = A$.

De todo lo anterior tenemos que $f : \omega_1^M \rightarrow \mathcal{P}^M(\omega)$ es una función sobreyectiva. En este punto pareciera que hemos concluido la prueba, pero no olvidemos que falta verificar que $\mathcal{P}^M(\omega) = \mathcal{P}^{M[G]}(\omega)$ y $\omega_1^M = \omega_1^{M[G]}$, ya que si estas igualdades no se verifican, no podríamos garantizar lo que queremos.

- Sabemos que $\mathcal{P}^M(\omega) \subseteq \mathcal{P}^{M[G]}(\omega)$. A un elemento en $\mathcal{P}^{M[G]}(\omega)$ lo podemos ver como una función $f : \omega \rightarrow 2$. Además por el Lema 3.3.14, \mathbb{P} es ω_1 -cerrado, y por el Teorema 3.3.15, $f \in M$, con lo cual $\mathcal{P}^{M[G]}(\omega) \subseteq \mathcal{P}^M(\omega)$. Por lo tanto, tenemos la igualdad entre estos dos conjuntos.
- Veamos que $\omega_1^M = \omega_1^{M[G]}$. Como $M \subset M[G]$, se tiene que $\omega_1^M = \omega_1 \cap M \subset \omega_1 \cap M[G] = \omega_1^{M[G]}$. Por lo tanto, $\omega_1^M \leq \omega_1^{M[G]}$. Veamos ahora que $\omega_1^M \geq \omega_1^{M[G]}$. Para esto, supongamos lo contrario, es decir, $\omega_1^M < \omega_1^{M[G]}$. Entonces ω_1^M es un ordinal numerable en $M[G]$, pero en $M[G]$ tenemos a la función $f : \omega_1^M \rightarrow \mathcal{P}^M(\omega)$ que ya se probó que es sobreyectiva, además $\mathcal{P}^M(\omega) = \mathcal{P}^{M[G]}(\omega)$, lo cual implica que $M[G]$ modela que $\mathcal{P}(\omega)$ es numerable, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\omega_1^M \geq \omega_1^{M[G]}$. Juntando las dos desigualdades, hemos probado que $\omega_1^M = \omega_1^{M[G]}$.

Entonces $M[G]$ modela que existe una función sobreyectiva de ω_1 en $\mathcal{P}(\omega)$, lo cual nos dice que $\omega_1 \geq |\mathcal{P}(\omega)|$. Además, es un resultado conocido de la teoría de conjuntos que $\omega < |\mathcal{P}(\omega)|$, con lo cual $\omega_1 \leq |\mathcal{P}(\omega)|$. Entonces $M[G] \models \omega_1 = |\mathcal{P}(\omega)| = |\mathbb{R}|$. \blacktriangle

Capítulo 4

Encajes y Aplicaciones

La primera sección de este capítulo está dedicada a los encajes entre copos, es decir, funciones de un copo a otro copo que cumplen ciertas propiedades (ver Definición 4.1.2); el objetivo principal es estudiar qué propiedades debemos pedirle (y en qué casos es esto posible), a un encaje para poder obtener las mismas extensiones genéricas de dos copos distintos.

La sección de aplicaciones tiene como objetivo mostrar algunos resultados que si bien son sencillos, resultan muy interesantes y se obtienen mediante el uso de la técnica de forcing.

En este capítulo, M siempre denotará un modelo transitivo y numerable de \mathbf{ZFE}^* a menos que se especifique lo contrario, de igual manera \mathbb{P} y \mathbb{Q} serán copos de forcing.

4.1. Encajes

Suponga que \mathbb{P} y \mathbb{Q} son copos en M , y $e \in M$ es tal que $e : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{Q}$ es una función y $e''\mathbb{P}$ es un suborden¹ de \mathbb{Q} . En esta sección, mostraremos cómo, definiendo e de manera precisa, podemos encajar todo el aparato de forcing de \mathbb{P} dentro del aparato de forcing de \mathbb{Q} (ver Teorema 4.1.21).

4.1.1 Notación. En muchas ocasiones será conveniente escribir que G es un filtro (M, \mathbb{P}) -genérico (o más sencillamente que G es (M, \mathbb{P}) -genérico), para expresar que G es un filtro \mathbb{P} -genérico sobre M .

¹ \mathbb{P} es un suborden de \mathbb{Q} si $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{Q}$ y $\leq_{\mathbb{P}} = \leq_{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{P} \times \mathbb{P}$.

Si \mathbb{P} es un suborden de \mathbb{Q} , se podría pensar que de \mathbb{Q} “debe” obtenerse una extensión más grande que de \mathbb{P} y que si H es \mathbb{Q} -genérico, entonces $H \cap \mathbb{P}$ “debería” ser \mathbb{P} -genérico y $M[H \cap \mathbb{P}] \subseteq M[H]$. Sin embargo, esto es falso si no imponemos ciertas restricciones a \mathbb{P} y \mathbb{Q} .

Una de estas restricciones surge de lo siguiente. Imaginemos que $p_1, p_2 \in \mathbb{P}$ son tales que $(p_1 \perp_{\mathbb{P}} p_2)$ y $(p_1 \parallel_{\mathbb{Q}} p_2)$, entonces existe un $q \in \mathbb{Q}$ que es extensión común de p_1 y p_2 , si tomamos un filtro H que sea \mathbb{Q} -genérico y tal que $q \in H$, entonces $p_1, p_2 \in H$ y $H \cap \mathbb{P}$ ni siquiera es filtro. Entonces, debemos pedir que $(p_1 \perp_{\mathbb{P}} p_2) \rightarrow (p_1 \perp_{\mathbb{Q}} p_2)$. Por eso, para nosotros será conveniente definir la noción de *encaje* de la siguiente manera.

4.1.2 Definición. Sean $(\mathbb{P}, \leq_{\mathbb{P}}, \perp_{\mathbb{P}})$ y $(\mathbb{Q}, \leq_{\mathbb{Q}}, \perp_{\mathbb{Q}})$ copos de forcing, una función $e : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{Q}$ se dirá un *encaje de \mathbb{P} en \mathbb{Q}* si y sólo si

1. $\forall p, r \in \mathbb{P} (p \leq r \rightarrow e(p) \leq e(r))$, es decir, e preserva el orden.
2. $\forall p_1, p_2 \in \mathbb{P} (p_1 \perp p_2 \leftrightarrow e(p_1) \perp e(p_2))$, es decir, e preserva incompatibilidades.

4.1.3 Observación. Notemos que en la Definición 4.1.2, dejamos de escribir los subíndices de los símbolos $\leq_{\mathbb{P}}, \leq_{\mathbb{Q}}, \perp_{\mathbb{P}}$ y $\perp_{\mathbb{Q}}$; haremos esto cada vez que sea claro el copo en el que estemos comparando dos elementos.

Para obtener una segunda restricción, fijemos un $q \in \mathbb{Q}$, y sea $D = \{p \in \mathbb{P} : p \perp q\}$. Si H es \mathbb{Q} -genérico sobre M y $q \in H$, entonces $H \cap D = \emptyset$ (de lo contrario H tendría dos elementos que no son compatibles), así, si deseamos que $H \cap \mathbb{P}$ sea \mathbb{P} -genérico, debemos garantizar que D no es un denso en \mathbb{P} , para lo cual es suficiente la existencia de un $p \in \mathbb{P}$ tal que

$$\forall r \in \mathbb{P} (r \leq p \rightarrow r \text{ y } q \text{ son compatibles en } \mathbb{Q}).$$

Como veremos en el Teorema 4.1.9, las dos restricciones anteriores, que dan pie a la siguiente definición, son suficientes.

4.1.4 Definición. Sean \mathbb{P} y \mathbb{Q} copos. Diremos que $e : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{Q}$ es un *encaje completo* si y sólo si e es un encaje y

$$\forall q \in \mathbb{Q} \exists p \in \mathbb{P} \forall r \in \mathbb{P} (r \leq p \rightarrow e(r) \parallel_{\mathbb{Q}} q).$$

En este caso, decimos que p es una *reducción* de q en \mathbb{P} .

Notemos que en la definición anterior la reducción p de q en \mathbb{P} no es única; si $p_1 \leq p$, entonces p_1 es otra reducción. Observemos también que no pedimos que $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{Q}$. Para este caso particular, damos la siguiente definición.

4.1.5 Definición. Sean \mathbb{P} y \mathbb{Q} copos. Diremos que \mathbb{P} *está completamente contenido en* \mathbb{Q} , y lo escribiremos como $\mathbb{P} \subset_c \mathbb{Q}$, si $\mathbb{P} \subset \mathbb{Q}$, $\leq_{\mathbb{P}} = \leq_{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{P} \times \mathbb{P}$ y la función inclusión (la función identidad), de \mathbb{P} a \mathbb{Q} es un encaje completo.

Veamos un ejemplo de un encaje completo.

4.1.6 Ejemplo. Si \mathbb{P} es un copo lineal, \mathbb{Q} un copo cualquiera y $e(p) = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ para cada $p \in \mathbb{P}$, entonces ocurre que:

- $p \leq r \rightarrow e(p) = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}} \leq \mathbb{1}_{\mathbb{Q}} = e(r)$.
- $p_1 \perp p_2 \leftrightarrow e(p_1) \perp e(p_2)$ se cumple trivialmente ya que \mathbb{P} es un copo lineal.
- Si $q \in \mathbb{Q}$, entonces cualquier $p \in \mathbb{P}$ es una reducción de q en \mathbb{P} , puesto que si $r \leq p$, entonces $e(r) = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}} \geq q$, es decir, $e(r) \parallel q$.

De todo lo anterior, se tiene que e es un encaje completo.

El siguiente lema nos provee de otros ejemplos de encajes completos.

4.1.7 Lema. (a) Si e es un isomorfismo de \mathbb{P} a \mathbb{Q} , entonces e es un encaje completo.

(b) Si $I \subset I'$, entonces $F_n(I, J, \kappa) \subset_c F_n(I', J, \kappa)$.

Demostración. **(a)** Es inmediato que e es un encaje. Tomemos un $q \in \mathbb{Q}$, como e es un isomorfismo, existe un $p \in \mathbb{P}$ tal que $e(p) = q$, entonces p es una reducción de q en \mathbb{P} .

(b) Denotemos por e a la función identidad de $F_n(I, J, \kappa)$ en $F_n(I', J, \kappa)$, entonces e es un encaje. Para verificar que es completo, sea $q \in F_n(I', J, \kappa)$ y veamos que $q \upharpoonright_I$ es una reducción de q a $F_n(I, J, \kappa)$. En efecto, si $r \leq q \upharpoonright_I$, entonces $r \cup q = e(r) \cup q$, extiende a $e(r) = r$ y a q , por lo tanto, $e(r) \parallel q$. ▲

Ahora mostraremos que si $\mathbb{P} \subset_c \mathbb{Q}$, entonces de \mathbb{Q} se puede obtener una extensión mayor que de \mathbb{P} . Notemos que las nociones “encaje completo” y “ \subset_c ” son absolutas siempre que e, \mathbb{P} y \mathbb{Q} sean elementos de M . Pero primero, probemos la siguiente equivalencia que nos será de utilidad.

4.1.8 Lema. Si $\mathbb{P} \in M$ y $G \subset \mathbb{P}$, entonces G es un filtro (M, \mathbb{P}) -genérico si y sólo si:

1. $\forall p, q \in G \exists r \in \mathbb{P} (r \leq p \wedge r \leq q)$,
2. $\forall p \in G \forall q \in \mathbb{P} (q \geq p \rightarrow q \in G)$ y
3. $\forall D \subset \mathbb{P} (D \in M \wedge D \text{ es denso en } \mathbb{P}) \rightarrow G \cap D \neq \emptyset$.

Demostración. Si G es (M, \mathbb{P}) -genérico, entonces ocurren (1) - (3). Supongamos ahora que ocurren (1) - (3) y veamos que G es (M, \mathbb{P}) -genérico. Para esto, resta probar que cualesquiera dos elementos en G son compatibles en G . Sean $p, q \in G$, definimos:

$$D = \{r \in \mathbb{P} : r \perp p \vee r \perp q \vee (r \leq p \wedge r \leq q)\}.$$

Veamos que $D \subseteq \mathbb{P}$ es denso. Sea $s \in \mathbb{P}$. Si para alguna $r \leq s$ ocurre que $r \perp p$ o $r \perp q$, entonces $r \leq s$ y $r \in D$. Si por el contrario, toda extensión de s es compatible con p y q , se tiene entonces, en particular, que para alguna $r_0 \in \mathbb{P}$, $r_0 \leq s$ y $r_0 \leq p$. Como $r_0 \leq s$, r_0 es compatible con q , así, existe $r \in \mathbb{P}$ extensión común de r_0 y q . Entonces $r \leq r_0 \leq p$ y $r \leq q$. Por lo tanto, r es una extensión de s en D , con lo cual, D es denso. Además, $D \in M$. Ocupando (3), $G \cap D \neq \emptyset$. Sea $r \in G \cap D$. No puede ocurrir que r sea incompatible con q ni que r sea incompatible con p , por lo tanto, r es una extensión común de p y q y, $r \in G$, que es lo que nos restaba verificar. \blacktriangle

4.1.9 Teorema. Supongamos que $e, \mathbb{P}, \mathbb{Q} \in M$, y $e : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{Q}$ es un encaje completo. Si H es un filtro (M, \mathbb{Q}) -genérico, entonces $e^{-1}(H)$ es un filtro (M, \mathbb{P}) -genérico y $M[e^{-1}(H)] \subset M[H]$.

Demostración. Sea H (M, \mathbb{Q}) -genérico. Sea $G = e^{-1}(H)$. Veamos que G es (M, \mathbb{P}) -genérico. Veamos que se verifican las condiciones (1)-(3) del Lema 4.1.8.

- (1) Sean $p, q \in G$, entonces $e(p), e(q) \in H$. Como H es filtro, $e(p) \parallel e(q)$, además, e preserva incompatibilidades, con lo cual se tiene que $p \parallel q$, entonces existe $r \in \mathbb{P}$ extensión común de p y q .
- (2) Supongamos que $p \in G$ y $p \leq q$, para algún $q \in \mathbb{P}$. Entonces $e(p) \in H$, $e(q) \in \mathbb{Q}$ y $e(p) \leq e(q)$. Como H es filtro, ocurre que $e(q) \in H$, y por tanto, $q \in G$.
- (3) Ahora supongamos que $G \cap D = \emptyset$ para algún conjunto denso $D \in \mathbb{P}$.

Supongamos por un instante que $H \cap e''D \neq \emptyset$, tomemos un $q \in H \cap e''D$, entonces $q \in H$ y $q = e(p)$ para algún $p \in D$, además, $e(p) \in H$ implica que $p \in G$, es decir, $p \in D \cap G$, lo cual es una contradicción, ya que estamos suponiendo que $G \cap D = \emptyset$. Por lo tanto, $H \cap e''D = \emptyset$. Como H es (M, \mathbb{Q}) -genérico, por (a) del Lema 3.1.6 (página 64), existe $q \in H$ tal que para cada $r \in e''D(q \perp r)$, entonces, para cada $r' \in D(q \perp e(r'))$, como e es un encaje completo, q admite una reducción en \mathbb{P} , digamos p' . Entonces, para cada $t \leq p'(e(t) \parallel q)$ lo cual implica que para cada $t \leq p'(t \notin D)$, lo cual contradice que D es denso en \mathbb{P} . Por lo tanto, $G \cap D \neq \emptyset$ para cada conjunto denso $D \in \mathbb{P}$.

Por el Lema 4.1.8, se tiene que $G = e^{-1}(H)$ es (M, \mathbb{P}) -genérico.

Además, como $e \in M \subset M[H]$ y $H \in M[H]$, se tiene que $e^{-1}(H) \in M[H]$. Por la minimalidad de $M[e^{-1}(H)]$ (ver el Lema 3.1.16, página 67), se tiene que $M[e^{-1}(H)] \subseteq M[H]$. \blacktriangle

En caso de tener un isomorfismo entre \mathbb{P} y \mathbb{Q} , las extensiones coinciden:

4.1.10 Corolario. Con las hipótesis del Teorema 4.1.9, si e es un isomorfismo, entonces $G \subset \mathbb{P}$ es (M, \mathbb{P}) -genérico si y sólo si $e''G$ es (M, \mathbb{Q}) -genérico. En dicho caso, $M[G] = M[e''G]$.

A partir del Teorema 4.1.9, nos podemos preguntar si hay algún copo en $M[e^{-1}(H)]$ que nos permita extender este modelo para obtener todo $M[H]$. El Teorema 4.1.14 responde de manera positiva a esta cuestión; su demostración, junto con la del Lema 4.1.12, han sido tomadas de [3]. Para esto, necesitamos la siguiente definición.

4.1.11 Definición. Sea $e : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{Q}$ un encaje completo tal que $e, \mathbb{Q} \in M$. Para cualquier $P \subset \mathbb{P}$ definimos:

$$\mathbb{Q}/P = \{q \in \mathbb{Q} : \forall p \in P(e(p) \parallel q)\}.$$

4.1.12 Lema. Sean $e : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{Q}$ un encaje completo tal que $e, \mathbb{P}, \mathbb{Q} \in M$ y $q \in \mathbb{Q}$. $p \in \mathbb{P}$ es una reducción de q en \mathbb{P} si y sólo si $p \Vdash \check{q} \in \check{\mathbb{Q}}/\Gamma$, donde $\check{\mathbb{Q}}/\Gamma$ es un \mathbb{P} -nombre para el cociente \mathbb{Q}/G .

Demostración. $[\rightarrow]$ Supongamos que p es una reducción de q en \mathbb{P} . Sea G cualquier filtro (M, \mathbb{P}) -genérico tal que $p \in G$ (esto lo podemos hacer por el Lema 3.1.7 de la página 65), y sea $r \in G$ arbitrario. Entonces existe $s \in G$ tal que $s \leq p$ y $s \leq r$. Como $s \leq p$, por hipótesis se tiene que $e(s) \parallel q$, así, existe

$t \in \mathbb{Q}$ tal que $t \leq e(s)$ y $t \leq q$. Además, como e es un encaje, $e(s) \leq e(r)$. Por lo tanto, $t \leq e(r)$ y $t \leq q$, entonces $e(r) \parallel q$. Como escogimos a r de forma arbitraria en G , se tiene que $q \in \mathbb{Q}/G$. Como esto ocurre para cada filtro (M, \mathbb{P}) -genérico, se tiene que $p \Vdash \check{q} \in \check{\mathbb{Q}}/\Gamma$.

[\leftarrow] Demostremos la contrapositiva, es decir, probemos que si $p \in \mathbb{P}$ no es una reducción de q en \mathbb{P} , entonces $p \nVdash \check{q} \in \check{\mathbb{Q}}/\Gamma$. Si $p \in \mathbb{P}$ no es una reducción de q en \mathbb{P} , entonces existe $r \leq p$ tal que $e(r) \perp q$. Usando nuevamente el Lema 3.1.7 tomemos a G un filtro (M, \mathbb{P}) -genérico con $r \in G$. Como G es, en particular, un filtro y $r \leq p$, se tiene que $p \in G$. Entonces, $p \in G$, $r \leq p$ y $e(r) \perp q$, entonces $q \notin \mathbb{Q}/G$. Por lo tanto, $p \nVdash \check{q} \in \check{\mathbb{Q}}/\Gamma$. \blacktriangle

Usualmente, cuando hablamos de una extensión $M[G]$ no hacemos explícito del copo al que nos estamos refiriendo, y esto es porque, en general, sólo trabajamos con un copo. Sin embargo, hay ocasiones donde un mismo filtro es genérico con respecto a dos copos distintos. En tales casos es conveniente usar la siguiente notación.

4.1.13 Notación. Si $S \subseteq \mathbb{Q}/G$ es (M, \mathbb{Q}) -genérico y $(M[G], \mathbb{Q}/G)$ -genérico, entonces:

- $M[S]_{\mathbb{Q}} = \{\tau_S : \tau \in M^{\mathbb{Q}}\}$,
- $M[G][S]_{\mathbb{Q}/G} = \{\tau_S : \tau \in (M[G])^{\mathbb{Q}/G}\}$.

Notemos que si $e : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{Q}$ es un encaje completo y G es un filtro (M, \mathbb{P}) -genérico, entonces \mathbb{Q}/G hereda el orden de \mathbb{Q} . Además, para cada $p \in \mathbb{P}$ ($e(p) \leq \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$), así $e(p) \parallel \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$, lo cual implica que $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}} \in \mathbb{Q}/G$. Por lo cual, podemos considerar a $(\mathbb{Q}/G, \leq, \mathbb{1}_{\mathbb{Q}})$ como un suborden de \mathbb{Q} .

Ya podemos enunciar el siguiente teorema, que nos iguala las extensiones del Teorema 4.1.9.

4.1.14 Teorema. Sea $e : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{Q}$ un encaje completo con $e, \mathbb{P}, \mathbb{Q} \in M$. Si G es un filtro (M, \mathbb{P}) -genérico y K es $(M[G], \mathbb{Q}/G)$ -genérico, entonces:

1. K es (M, \mathbb{Q}) -genérico,
2. $M[K]_{\mathbb{Q}} = M[G][K]_{\mathbb{Q}/G}$.

Demostración. **(1)** Veamos que K es (M, \mathbb{Q}) -genérico.

(a) Sean $p, q \in K$, entonces existe $r \in \mathbb{Q}/G$ tal que r es extensión común de p y q . Entonces, en particular $r \in \mathbb{Q}$.

(b) Sea $p \in K$ y $q \in \mathbb{Q}$ tal que $p \leq q$. Probemos que $q \in K$. Para conseguir esto, probemos que $q \in \mathbb{Q}/G$. Sea $r \in G$, entonces como $p \in K \subset \mathbb{Q}/G$, $e(r) \parallel p$. Entonces existe s , extensión común de $e(r)$ y p , es decir, $s \leq e(r)$ y $s \leq p \leq q$. Entonces $e(r) \parallel q$. Por lo tanto, $q \in \mathbb{Q}/G$. Como K es $(M[G], \mathbb{Q}/G)$ -genérico, $q \in K$.

(c) Sea $D \in M$ un subconjunto denso de \mathbb{Q} . Veamos que $D \cap (\mathbb{Q}/G)$ es denso en \mathbb{Q}/G . Sea $q_0 \in \mathbb{Q}/G$. Como $\mathbb{Q}/G \subseteq \mathbb{Q}$, $q_0 \in \mathbb{Q}$, (y por transitividad de M , se tiene que $q_0 \in M$). Entonces $(\check{q}_0)_G \in (\check{\mathbb{Q}}/\Gamma)_G$. Entonces por el Lema de Verdad 3.1.28 (página 74), existe $p_0 \in G$ tal que $p_0 \Vdash \check{q}_0 \in \check{\mathbb{Q}}/\Gamma$. Definimos

$$E = \{p \in \mathbb{P} : \exists q \in \mathbb{Q}(q \leq q_0 \wedge q \in D \wedge p \Vdash \check{q} \in \check{\mathbb{Q}}/\Gamma)\}.$$

Afirmamos que E es denso debajo de p_0 . Sea $p_1 \leq p_0$, por el Lema 4.1.12, p_0 es una reducción de q en \mathbb{P} . Así, $e(p_1) \parallel q_0$. Sea q_1 una extensión común de $e(p_1)$ y q_0 . Como D es denso, existe $q \in D$ tal que $q \leq q_1$. Como e es completo, sea $p_2 \in \mathbb{P}$ reducción de q en \mathbb{P} . Entonces $e(p_2) \parallel q$ y por el Lema 4.1.12, $p_2 \Vdash \check{q} \in \check{\mathbb{Q}}/\Gamma$. Sea q_2 una extensión común de $e(p_2)$ y q , es decir, $q_2 \leq e(p_2)$ y $q_2 \leq q$; como $q \leq q_1 \leq e(p_1)$, ocurre que $q_2 \leq e(p_2)$ y $q_2 \leq e(p_1)$. Así, $p_1 \parallel p_2$. Sea p una extensión común de p_1 y p_2 , entonces $p \in E$ ya que existe $q \leq q_0$, $q \in D$ y $p \Vdash \check{q} \in \check{\mathbb{Q}}/\Gamma$ (ya que $p_2 \Vdash \check{q} \in \check{\mathbb{Q}}/\Gamma$ y $p \leq p_2$), y $p \leq p_1$, donde $p_1 \leq p_0$ arbitrario. Por lo tanto, E es denso debajo de p_0 .

Notemos que $E \in M$, ya que $\mathbb{P}, \mathbb{Q}, D, q_0 \in M$. Como $p_0 \in G$, por (b) del Lema 3.1.6 (página 64), se sigue que $G \cap E \neq \emptyset$. Sea $p \in G \cap E$. Así, $p \in G$ y existe $q \in \mathbb{Q} \cap D$ tal que $q \leq q_0$ y $p \Vdash \check{q} \in \check{\mathbb{Q}}/\Gamma$, entonces $M[G] \Vdash (\check{q})_G \in (\check{\mathbb{Q}}/\Gamma)_G$, es decir, $q \in \mathbb{Q}/G$. En resumidas cuentas, hemos encontrado $q \in D \cap (\mathbb{Q}/G)$ tal que $q \leq q_0$. Por lo tanto, $D \cap (\mathbb{Q}/G)$ es denso en \mathbb{Q}/G . Además, $D \cap (\mathbb{Q}/G) \in M[G]$ ya que $D \in M \subset M[G]$ y $\mathbb{Q}/G \in M[G]$. Como K es un filtro $(M[G], \mathbb{Q}/G)$ -genérico, se tiene que $K \cap [D \cap \mathbb{Q}/G] \neq \emptyset$, de donde $K \cap D \neq \emptyset$. Por (a), (b) y (c) se tiene que K satisface (1) - (3) del Lema 4.1.8, por lo tanto, K es (M, \mathbb{Q}) -genérico.

(2) Sea $p \in G$, y supongamos que $e(p) \notin K$, entonces por (a) del Lema 3.1.6, como $K \cap \{e(p)\} = \emptyset$, existe $q \in K$ tal que $q \perp e(p)$, lo cual no es posible ya que $K \subseteq \mathbb{Q}/G$. Por lo tanto, $G \subseteq e^{-1}(K)$. Por **(1)** de esta demostración, K es (M, \mathbb{Q}) -genérico, entonces por el Teorema 4.1.9, $e^{-1}(K)$ es (M, \mathbb{P}) -genérico, usando el Lema 3.1.8 (página 65), $G = e^{-1}(K)$. Por el Teorema 4.1.9, $M[G] \subseteq M[K]_{\mathbb{Q}}$. Además, por el Lema 3.1.16 (página 67), $M[G][K]_{\mathbb{Q}/G} \subseteq$

$M[K]_{\mathbb{Q}}$. Por otra parte, $M \subseteq M[G] \subseteq M[G][K]_{\mathbb{Q}/G}$ y $K \in M[G][K]_{\mathbb{Q}/G}$, usando nuevamente el Lema 3.1.16, $M[K]_{\mathbb{Q}} \subseteq M[G][K]_{\mathbb{Q}/G}$. Por lo tanto, tenemos la igualdad. \blacktriangle

El siguiente teorema se puede pensar como el recíproco del Teorema 4.1.14, una demostración se puede encontrar en [3].

4.1.15 Teorema. Si $e : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{Q}$ es un encaje completo con $e, \mathbb{P}, \mathbb{Q} \in M$, H es un filtro (M, \mathbb{Q}) -genérico y $G = e^{-1}(H)$, entonces:

1. $H \subseteq \mathbb{Q}/G$,
2. H es un filtro $(M[G], \mathbb{Q}/G)$ -genérico,
3. $M[H]_{\mathbb{Q}} = M[G][H]_{\mathbb{Q}/G}$.

Ahora centraremos nuestra atención en los encajes densos definidos a continuación.

4.1.16 Definición. $e : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{Q}$ es un *encaje denso* si y sólo si e es un encaje tal que $e''\mathbb{P}$ es un conjunto denso en \mathbb{Q} . Cada vez que exista $e : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{Q}$ encaje denso, escribiremos $\mathbb{P} \leq_d \mathbb{Q}$.

4.1.17 Proposición. Todo encaje denso es completo.

Demostración. Sea $e : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{Q}$ un encaje denso. Basta verificar que todo elemento de \mathbb{Q} tiene una reducción en \mathbb{P} . Sea $q \in \mathbb{Q}$. Como $e''\mathbb{P}$ es denso en \mathbb{Q} , existe $p \in \mathbb{P}$ tal que $e(p) \leq q$. Sea $r \leq p$. Entonces $e(r) \leq e(p) \leq q$. Así, en particular, $e(r) \parallel q$. Por lo tanto, p es una reducción de q en \mathbb{P} . \blacktriangle

El recíproco de la proposición anterior es falso. El siguiente resultado y su prueba, pueden encontrarse en [3].

4.1.18 Proposición. No todo encaje completo es denso: si I_0 e I_1 son conjuntos no vacíos tales que I_0 está contenido propiamente en I_1 , entonces la función $e : Fn(I_0, 2) \rightarrow Fn(I_1, 2)$ dada por $e(p) = p$, es un encaje completo que no es denso.

La importancia de los encajes densos radica en que si \mathbb{P} está encajado densamente en \mathbb{Q} , entonces se obtienen las mismas extensiones de \mathbb{P} y \mathbb{Q} . Esto es precisamente lo que nos dice el Teorema 4.1.21. Pero primero necesitamos definir lo siguiente.

4.1.19 Definición. Sean \mathbb{P} y \mathbb{Q} dos copos y $e : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{Q}$ una función. Para cada $X \subseteq \mathbb{P}$ definimos

$$\tilde{e}(X) = \{q \in \mathbb{Q} : \exists p \in X (e(p) \leq q)\}.$$

4.1.20 Observación. Podemos notar que si $\mathbb{P} \subseteq X$, entonces $e''\mathbb{P} \subseteq \tilde{e}(X)$.

4.1.21 Teorema. Sea $e : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{Q}$ un encaje denso. Si $e, \mathbb{P}, \mathbb{Q} \in M$, entonces

1. Si G es un filtro (M, \mathbb{P}) -genérico, entonces $\tilde{e}(G)$ es un filtro (M, \mathbb{Q}) -genérico y $G = e^{-1}[\tilde{e}(G)]$. En este caso, $M[G] = M[\tilde{e}(G)]$,
2. Si $H \subset \mathbb{Q}$ es un filtro (M, \mathbb{Q}) -genérico, entonces $e^{-1}(H)$ es un filtro (M, \mathbb{P}) -genérico y $H = \tilde{e}(e^{-1}(H))$. En este caso, $M[e^{-1}(H)] = M[H]$.

Demostración. (1) Probemos que $\tilde{e}(G)$ es un filtro.

(a) Sean $q_1, q_2 \in \tilde{e}(G)$. Entonces existen $p_1, p_2 \in G$ tales que $e(p_1) \leq q_1$ y $e(p_2) \leq q_2$. Como G es filtro, existe $p \in G$ tal que $p \leq p_1$ y $p \leq p_2$. Así, $e(p) \leq e(p_1)$ y $e(p) \leq e(p_2)$. Entonces $e(p)$ es una extensión común de q_1 y q_2 . Además como $p \in G$ y $e(p) \leq e(p) \in \mathbb{Q}$, se tiene que $e(p) \in \tilde{e}(G)$. Hemos probado que $e(p)$ es una extensión común de q_1 y q_2 en $\tilde{e}(G)$.

(b) Sean $r \in \tilde{e}(G)$ y $q \in \mathbb{Q}$ tales que $r \leq q$. Así, existe $p \in G$ tal que $e(p) \leq r$. Entonces $e(p) \leq q$ y, por tanto, $q \in \tilde{e}(G)$.

(c) Probemos la genericidad de $\tilde{e}(G)$. Sea $D \in M$ un subconjunto denso de \mathbb{Q} y sea $E = \{p \in \mathbb{P} : \exists q \in D (e(p) \leq q)\}$. Veamos que E es denso en \mathbb{P} . Sea $p \in \mathbb{P}$, como D es denso en \mathbb{Q} y $e(p) \in \mathbb{Q}$, existe $q \in D$ tal que $q \leq e(p)$. Por hipótesis se tiene que $e''\mathbb{P}$ es denso en \mathbb{Q} , con lo cual existe $r \in \mathbb{P}$ tal que $e(r) \leq q$. Así, $e(r) \leq e(p)$ y, en particular, $e(r) \parallel e(p)$, lo que implica que $r \parallel p$. Consideremos a s una extensión común de r y p , es decir, $s \leq r$ y $s \leq p$. Entonces $e(s) \leq e(r) \leq q$ y $q \in D$, por lo tanto, $s \in E$ y $s \leq p$, lo cual nos dice que E es denso en \mathbb{P} . Como $\mathbb{P}, D, e \in M$, se tiene que $E \in M$. Así, $G \cap E \neq \emptyset$. Si $p \in G \cap E$, existe $q \in D$ tal que $e(p) \leq q$ y $p \in G$, con lo cual $q \in \tilde{e}(G)$ y $q \in D$. Por lo tanto, $\tilde{e}(G) \cap D \neq \emptyset$.

Probemos ahora que $G = e^{-1}[\tilde{e}(G)]$. Ya verificamos que $\tilde{e}(G)$ es (M, \mathbb{Q}) -genérico. Como e es un encaje denso, por la Proposición 4.1.17, e es un encaje completo, entonces, usando el Teorema 4.1.9, se tiene que $e^{-1}(\tilde{e}(G))$ es un filtro (M, \mathbb{P}) -genérico. Además, por la Observación 4.1.20, $e(G) \subseteq \tilde{e}(G)$, lo cual implica que $e^{-1}(e(G)) \subseteq e^{-1}(\tilde{e}(G))$ y como $G \subseteq e^{-1}(e(G))$, se tiene que $G \subseteq e^{-1}(\tilde{e}(G))$ y como ambos son filtros (M, \mathbb{P}) -genéricos, por el Lema 3.1.8 (página 65), se obtiene que $G = e^{-1}(\tilde{e}(G))$.

Veamos ahora que $M[G] = M[\tilde{e}(G)]$. Ya probamos que $\tilde{e}(G)$ es (M, \mathbb{Q}) -genérico, con lo cual, usando el Teorema 4.1.9, se tiene que $M[G] = M[e^{-1}(\tilde{e}(G))] \subseteq M[\tilde{e}(G)]$. Por otra parte, $\tilde{e}(G) \in M[G]$ ya que $G \in M[G]$ y $e, \mathbb{P}, \mathbb{Q} \in M \subset M[G]$. Haciendo uso del Lema 3.1.16 (página 67), $M[\tilde{e}(G)] \subseteq M[G]$.

(2) Sea $H \subseteq \mathbb{Q}$ un filtro (M, \mathbb{Q}) -genérico, probemos que $e^{-1}(H)$ es (M, \mathbb{P}) -genérico. Como e es un encaje denso, por la Proposición 4.1.17, e es completo y, haciendo uso del Teorema 4.1.9, obtenemos que $e^{-1}(H)$ es (M, \mathbb{P}) -genérico. Veamos que $H = \tilde{e}(e^{-1}(H))$. Por lo que se probó en el inciso (1) de esta demostración, $\tilde{e}(e^{-1}(H))$ es un filtro (M, \mathbb{Q}) -genérico. Además, si tomamos a $q \in \tilde{e}(e^{-1}(H))$, entonces existe $p \in e^{-1}(H)$ tal que $e(p) \leq q$. Así, $e(p) \in H$ y como H es filtro, $q \in H$, lo cual implica que $\tilde{e}(e^{-1}(H)) \subseteq H$. Como $\tilde{e}(e^{-1}(H))$ y H son filtros (M, \mathbb{Q}) -genéricos, ocupando nuevamente el Lema 3.1.8, podemos concluir que $\tilde{e}(e^{-1}(H)) = H$.

Finalmente, veamos que $M[e^{-1}(H)] = M[H]$. Por el Teorema 4.1.9, se tiene que $M[e^{-1}(H)] \subseteq M[H]$. Además, como $H = \tilde{e}(e^{-1}(H))$, $e^{-1}(H) \in M[e^{-1}(H)]$ y $e, \mathbb{P}, \mathbb{Q} \in M \subseteq M[e^{-1}(H)]$, se tiene que $H \in M[e^{-1}(H)]$. Usando una vez más el Lema 3.1.16, se tiene que $M[H] \subseteq M[e^{-1}(H)]$. Por lo tanto, $M[H] = M[e^{-1}(H)]$. \blacktriangle

Para todo copo \mathbb{P} , existe un encaje denso $e : \mathbb{P} \rightarrow \mathfrak{B}$, donde \mathfrak{B} es un álgebra booleana completa (ver Lema II 3.3 de [13]). A \mathfrak{B} se le denomina la completación de \mathbb{P} , ya que es única salvo isomorfismos. Por el Teorema 4.2.2, de \mathbb{P} y \mathfrak{B} se obtienen las mismas extensiones. Es por esto que se puede tener un acercamiento alternativo hacia el forcing usando álgebras booleanas y, como es de suponerse, este otro enfoque tiene sus ventajas y desventajas. Para conocer un poco más se puede consultar [10] y, para un estudio profundo se puede ver [2].

4.2. Aplicaciones

En esta sección ocuparemos la técnica de forcing para demostrar varios resultados. Comenzamos con el principio maximal que nos garantiza la existencia de un \mathbb{P} -nombre que funge como testigo cuando forzamos una propiedad existencial. Después nos ocupamos de probar la consistencia del principio combinatorio diamante (ver Definición 4.2.3) y, finalmente, presentamos dos copos: *el orden del colapso de Lévy* y *el copo de los reales aleatorios*, los definiremos y veremos algunas de sus consecuencias.

4.2.1. El Principio Maximal

En la sección 3.1, cuando se probó que $M[G] \models \mathbf{ZFE}^*$, cada vez que se tenía que verificar una sentencia que contiene un existencial, se encontraba un nombre que es testigo del existencial y que es independiente de G . Por ejemplo, para verificar el Axioma del Par, hubiera sido suficiente probar que para cada $\sigma, \tau \in M^{\mathbb{P}}$, $\mathbb{1} \Vdash \exists x(\sigma \in x \wedge \tau \in x)$; o de manera equivalente, que para cada filtro genérico G existe un π tal que $\sigma_G \in \pi_G$ y $\tau_G \in \pi_G$. Pero lo que se hizo fue encontrar un π , que llamamos $up(\sigma, \tau)$, que es independiente de G (ver Definición 3.1.19 en la página 68), y tal que $\mathbb{1} \Vdash (\sigma \in \pi \wedge \tau \in \pi)$. Esto fue posible gracias a un hecho más general que se conoce como *el principio maximal* y que aquí presentamos como el Teorema 4.2.2. Primero probemos el siguiente lema.

4.2.1 Lema. Si en M A es una anticadena en \mathbb{P} y para cada $q \in A$, σ_q un \mathbb{P} -nombre, entonces hay un \mathbb{P} -nombre τ tal que $q \Vdash \tau = \sigma_q$ para cada $q \in A$.

Demostración. En M , sea

$$\tau = \bigcup_{q \in A} \left\{ (\pi, r) : (r \leq q) \wedge (r \Vdash \pi \in \sigma_q) \wedge (\pi \in \text{dom}(\sigma_q)) \right\}.$$

Fijemos $q \in A$. Para demostrar que $q \Vdash \tau = \sigma_q$, fijemos un filtro G (M, \mathbb{P})-genérico tal que $q \in G$ y probemos que $\tau_G = (\sigma_q)_G$.

Cualquier elemento τ_G es de la forma π_G donde $(\pi, r) \in \tau$ para alguna $r \in G$. Además, para alguna $q' \in A$, $r \leq q'$ y $r \Vdash \pi \in \sigma_{q'}$. Como $q \in G$ y $r \in G$, existe un $t \in G$, extensión común de q y r . Si $q \neq q'$ como $r \leq q'$ se tendría que $q' \parallel q$ lo cual contradice que A es una anticadena. Por lo tanto, $q' = q$. Así, si $\pi_G \in \tau_G$, entonces existe $r \in G$ tal que $r \Vdash \pi \in \sigma_q$, luego, por el Lema de Verdad 3.1.28 (página 74), $\pi_G \in (\sigma_q)_G$. Por lo tanto, $\tau_G \subseteq (\sigma_q)_G$.

Veamos ahora que $(\sigma_q)_G \subseteq \tau_G$. Sea $\pi_G \in (\sigma_q)_G$, donde $\pi \in \text{dom}(\sigma_q)$. Fijemos $r \in G$ tal que $r \Vdash \pi \in \sigma_q$ y $r \leq q$ (esto lo podemos hacer ya que usando el Lema de Verdad 3.1.28, existe $s \in G$ tal que $s \Vdash \pi \in \sigma_q$ y tomamos r una extensión común de s y q , entonces $r \leq q$ y por el Lema 3.1.23 de la página 69, $r \Vdash \pi \in \sigma_q$). De esta manera, $(\pi, r) \in \tau$, lo cual implica que $\pi_G \in \tau_G$. Por lo tanto, $(\sigma_q)_G \subseteq \tau_G$ y, por lo anterior, tenemos la igualdad. \blacktriangle

4.2.2 Teorema. Si $\mathbb{P} \in M$ y $\tau_1, \dots, \tau_n \in M^{\mathbb{P}}$, entonces $p \Vdash \exists x \phi(x, \tau_1, \dots, \tau_n)$ si y sólo si existe $\pi \in M^{\mathbb{P}}$ tal que $p \Vdash \phi(\pi, \tau_1, \dots, \tau_n)$

Demostración. [\leftarrow] Supongamos que existe $\pi \in M^{\mathbb{P}}$ tal que $p \Vdash \phi(\pi, \tau_1, \dots, \tau_n)$. Entonces existe $\pi \in M^{\mathbb{P}}$ tal que para cada $G \subseteq \mathbb{P}(M, \mathbb{P})$ -genérico con $p \in G$, $M[G] \models \phi(\pi_G, \tau_1, \dots, \tau_n)$, entonces $M[G] \models \exists \pi_G \phi(\pi_G, \tau_1, \dots, \tau_n)$, con lo cual, $p \Vdash \exists x \phi(x, \tau_1, \dots, \tau_n)$.

[\rightarrow] Suprimiremos el uso de τ_1, \dots, τ_n . Por el Lema de Zorn en M , podemos escoger $A \in M$ tal que

1. A es una anticadena en \mathbb{P} .
2. $\forall q \in A \left(q \leq p \wedge \exists \sigma \in M^{\mathbb{P}} (q \Vdash \phi(\sigma)) \right)$.
3. A es maximal con respecto a (1) y (2).

Por **AE** en M , podemos escoger $\sigma_q \in M^{\mathbb{P}}$ para $q \in A$ tal que $q \Vdash \phi(\sigma_q)$. Por el Lema 4.2.1, existe $\pi \in M^{\mathbb{P}}$ tal que $q \Vdash \pi = \sigma_q$ para cada $q \in A$. Así, para $q \in A$, $q \Vdash (\phi(\sigma_q) \wedge \pi = \sigma_q)$, entonces $q \Vdash \phi(\pi)$. Veamos que $p \Vdash \phi(\pi)$. Supongamos lo contrario: sea $r \leq p$ tal que $r \Vdash \neg \phi(\pi)$. Como $p \Vdash \exists x \phi(x)$, entonces por (iii) del Corolario 3.1.29 (página 75), el conjunto $\{q : \exists \sigma \in M^{\mathbb{P}} (q \Vdash \phi(\sigma))\}$ es denso debajo de p . Así, fijemos $q_0 \leq r$ tal que existe $\sigma \in M^{\mathbb{P}} (q_0 \Vdash \phi(\sigma))$. Para cada $q \in A$, tenemos $q \Vdash \phi(\pi)$ y $q_0 \Vdash \neg \phi(\pi)$. Así, $q \perp q_0$. Luego, $A \cup \{q_0\}$ satisface (1) y (2), lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $p \Vdash \phi(\pi)$. \blacktriangle

4.2.2. La Consistencia de Diamante

A continuación definiremos el principio combinatorio \diamond (*diamante*). Conviene revisar la Definición 0.2.14.

4.2.3 Definición. \diamond es el enunciado: Existe una sucesión de conjuntos $\{A_\alpha\}_{\alpha < \omega_1}$ tal que para cada $\alpha < \omega_1$, $A_\alpha \subset \alpha$ que satisface la propiedad de que para cada $A \subseteq \omega_1$, el conjunto $\{\alpha : A \cap \alpha = A_\alpha\}$ es estacionario.

A las sucesiones que satisfacen la Definición 4.2.3 se les llama *sucesiones* \diamond .

Para ilustrar la importancia de \diamond , veamos un par de resultados que se derivan de él. Primero, la hipótesis del continuo, que, de paso, muestra que \diamond no es un teorema de **ZFE**.

4.2.4 Lema. $\diamond \rightarrow \text{HC}$.

Demostración. Sea $\langle A_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ una sucesión \diamond . Si probamos que $\mathcal{P}(\omega) \subseteq \{A_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ entonces $\aleph_0 < |\mathcal{P}(\omega)| \leq |\{A_\alpha : \alpha < \omega_1\}| = \aleph_1$, con lo cual se tendría que $|\mathcal{P}(\omega)| = \aleph_1$, es decir, **HC**. Veamos que esto pasa. Sea $A \in \mathcal{P}(\omega)$, entonces $A \subset \omega \subset \omega_1$, de esta manera, podemos encontrar un $\alpha > \omega$ tal que $A \cap \alpha = A_\alpha$, por otra parte, como $\alpha > \omega$, se tiene que $A \cap \alpha = A$, entonces $A = A_\alpha \in \{A_\alpha : \alpha < \omega_1\}$. Por lo tanto, $\mathcal{P}(\omega) \subseteq \{A_\alpha : \alpha < \omega_1\}$, con lo cual se obtiene el resultado. \blacktriangle

\diamond también implica la existencia de un ω_1 -árbol de Suslin definido a continuación.

4.2.5 Definición. ■ Un *árbol* es un copo (T, \leq) tal que para cada $x \in T$, el conjunto $\{y \in T : y < x\}$ está bien ordenado por $<$.

- Para cualquier cardinal infinito κ , un κ -*árbol de Suslin* es un árbol T tal que $|T| = \kappa$ y todas las cadenas y anticadenas de T tienen cardinalidad menor que κ .

4.2.6 Lema. \diamond implica que existe un ω_1 -árbol de Suslin.

Una demostración del lema anterior, junto con más propiedades de los árboles de Suslin se pueden encontrar en [13].

Ahora probaremos la consistencia de diamante.

4.2.7 Teorema. Sea $\mathbb{P} = Fn(\omega_1, 2, \omega_1)^M$. Si G es \mathbb{P} -genérico sobre M , entonces \diamond se verifica en $M[G]$.

Demostración. Para verificar \diamond usaremos un copo isomorfo a \mathbb{P} en M . Sea $I = \{(\alpha, \xi) : \xi < \alpha < \omega_1^M\}$, y sea $\mathbb{Q} = Fn(I, 2, \omega_1)^M$. Como $|I| = \omega_1$ en M , entonces \mathbb{P} y \mathbb{Q} son isomorfos en M . Usando el Corolario 4.1.10, será suficiente probar que siempre que G sea un filtro (M, \mathbb{Q}) -genérico, \diamond se verifica en $M[G]$.

Sea A cualquier función de I en 2 , definamos para cada $\alpha < \omega_1^M$ a $A_\alpha : \alpha \rightarrow 2$ como sigue

$$A_\alpha(\xi) = A(\alpha, \xi).$$

Si G es un filtro (M, \mathbb{Q}) -genérico, entonces por el Lema 3.3.3 (página 88), $\bigcup G$ es una función sobreyectiva de I en 2 . Probaremos $(\diamond)^{M[G]}$ mostrando que en $M[G]$, $\langle (\bigcup G)_\alpha : \alpha < \omega_1^M \rangle$ es una sucesión \diamond identificando conjuntos con sus

funciones características. Equivalentemente, mostraremos que si $B \in M[G]$ y $B : \omega_1^M \rightarrow 2$, entonces $\{\alpha : B \upharpoonright_\alpha = (\bigcup G)_\alpha\}$ es estacionario en $M[G]$.
 Sea $B \in M[G]$ tal que $B : \omega_1^M \rightarrow 2$ y supongamos que es falso que $\{\alpha : B \upharpoonright_\alpha = (\bigcup G)_\alpha\}$ es estacionario en $M[G]$. Entonces existe un nombre $\tau \in M^\mathbb{Q}$ para B , un nombre $\sigma \in M^\mathbb{Q}$ para un conjunto club y un $p \in G$ tales que

$$p \Vdash \left[(\tau \subset \omega_1) \wedge (\sigma \subset \omega_1) \wedge (\sigma \text{ es club}) \wedge \forall \alpha \in \sigma (\tau \upharpoonright_\alpha \neq (\bigcup \Gamma)_\alpha) \right] \quad (*)$$

donde $\Gamma = \{(\check{q}, q) : q \in G\}$ es el \mathbb{Q} -nombre para el filtro \mathbb{Q} -genérico G . Derivaremos una contradicción de (*) olvidándonos de B y G .

Lo siguiente toma lugar en M . Para cualquier $q \in \mathbb{Q}$, sea $\text{supt}(q)$ el menor $\beta < \omega_1$ tal que $\text{dom}(q) \subset \{(\alpha, \xi) : \xi < \alpha < \beta\}$. Ahora definiremos de forma recursiva para $n \in \omega$ a p_n, β_n, δ_n y b_n de tal forma que:

1. $p_0 = p$,
2. $\beta_n = \text{supt}(p_n)$,
3. $\delta_n > \beta_n$,
4. $p_{n+1} \leq p_n$,
5. $p_{n+1} \Vdash \check{\delta}_n \in \sigma$,
6. $\text{supt}(p_{n+1}) > \delta_n$,
7. $b_n : \beta_n \rightarrow 2$ y $p_{n+1} \Vdash (\tau \upharpoonright_{\check{\beta}_n} = \check{b}_n)$.

Veamos que en efecto esta definición se puede llevar a cabo. Dado p_n, β_n está definido. $\beta_n = \min\{\beta < \omega_1 : \text{dom}(p_n) \subset \{(\alpha, \xi) : \xi < \alpha < \beta\}\}$. Como por (4), $p_n \leq p$ se tiene que $p_n \Vdash (\sigma \text{ es club})$ (pues p ya lo fuerza). Así, $p_n \Vdash \text{“}\exists x \in \check{\omega}_1 (x > \check{\beta}_n \wedge x \in \sigma)\text{”}$, ya que como σ es club, entonces para cualquier $t < \omega_1$, en particular para $\check{\beta}_n$, existe un $x \in \check{\omega}_1$ tal que $x \in \sigma$ y $x > \check{\beta}_n$. Por (iv) del Corolario 3.1.29 (página 75), existe $q \leq p_n$ y $\check{\delta}_n \in \text{dom}(\check{\omega}_1)$ (es decir, $\delta_n \in \omega_1$), tales que $q \Vdash \text{“}\check{\delta}_n > \check{\beta}_n \wedge \check{\delta}_n \in \sigma\text{”}$. Así, $\delta_n > \beta_n$ y $q \Vdash \check{\delta}_n \in \sigma$. Sea r cualquier extensión de q tal que $\text{supt}(r) > \delta_n$. Veamos de manera simultánea que se verifican (4), (5), (6) y (7).

Sea $F = {}^{\beta_n}2$, como \mathbb{Q} es ω_1 -cerrado, por el Teorema 3.3.15 (página 90), no agregamos funciones nuevas de β_n en 2, entonces $r \Vdash \text{“}\tau \upharpoonright_{\check{\beta}_n} \in \check{F}\text{”}$. Entonces, podemos decir que $r \Vdash \text{“}\exists x \in \check{F} (x = \tau \upharpoonright_{\beta_n})\text{”}$, entonces usando nuevamente

(iv) del Corolario 3.1.29, existen $p_{n+1} \leq r$ y $b_n \in F$ (es decir, $\check{b}_n \in \text{dom}(\check{F})$), tales que $p_{n+1} \Vdash \check{b}_n = \tau \upharpoonright_{\check{\beta}_n}$. Notemos que como $p_{n+1} \leq r \leq q$, entonces $p \Vdash \check{\delta}_n \in \sigma$. Con todo lo anterior, se verifican de (4) a (7).

Trabajando aún en M , tenemos que $\beta_0 < \delta_0 < \beta_1 < \delta_1 < \dots$. Sea $\gamma = \sup\{\beta_n : n \in \omega\} = \sup\{\delta_n : n \in \omega\}$. Sea $p_\omega = \bigcup_{n < \omega} p_n$. Entonces ocurre que $\text{supt}(p_\omega) = \gamma$. Además, para cada $n < \omega$, $p_\omega \leq p_{n+1}$, entonces $p_\omega \Vdash \text{“}\tau \upharpoonright_{\check{\beta}_n} = \check{b}_n\text{”}$. Además, si $n, m \in \omega$ con $n < m$, entonces $\text{dom}(b_n) \cap \text{dom}(b_m) = \text{dom}(b_n)$ (es decir, los b_n coinciden en su dominio), con lo cual $b_\omega = \bigcup_{n \in \omega} b_n$ es una función de γ en 2 y $p_\omega \Vdash (\tau \upharpoonright_{\check{\gamma}} = \check{b}_\omega)$. Además, no hay parejas $(\gamma, \xi) \in \text{dom}(p_\omega)$, pues de lo contrario, tal pareja estaría en algún p_n y eso contradice que $\gamma = \sup\{\beta_n : e \in \omega\}$. Entonces, podemos extender p_ω a una s tal que $s(\gamma, \xi) = b_\omega(\xi)$ para cada $\xi < \gamma$. Además, observemos que si G es un filtro (M, \mathbb{Q}) -genérico, tal que $s \in G$, entonces ocurre que $(\bigcup \Gamma)_{\check{\gamma}}(\xi) = \bigcup \Gamma(\check{\gamma}, \xi) = s(\check{\gamma}, \xi) = \check{b}_\omega(\xi)$, es decir, $s \Vdash [(\bigcup \Gamma)_{\check{\gamma}} = \check{b}_\omega]$. Entonces, como s extiende a p_ω , se tiene que $s \Vdash [\tau \upharpoonright_{\check{\gamma}} = (\bigcup \Gamma)_{\check{\gamma}}]$. Pero $s \Vdash (\check{\gamma} \in \Sigma)$ ya que $s \Vdash (\sigma \text{ es cerrado})$ y $s \Vdash (\check{\delta}_n \in \sigma)$ para cada n . Por lo tanto,

$$s \Vdash \left[\exists \alpha \in \sigma (\tau \upharpoonright_\alpha = (\bigcup \Gamma)_\alpha) \right],$$

lo cual es una contradicción ya que $s \leq p$. Esta contradicción vino de suponer que $\{\alpha : B \upharpoonright_\alpha = (\bigcup G)_\alpha\}$ no es estacionario en $M[G]$. Por lo tanto, $\langle (\bigcup G)_\alpha : \alpha < \omega_1^M \rangle$ es una sucesión \diamond en $M[G]$, es decir, $(\diamond)^{M[G]}$. \blacktriangle

4.2.3. El Colapso de Lévy

En esta parte, presentaremos una noción de forcing definida por Lévy y que nos permite que $\omega_1^{M[G]}$ sea cualquier cardinal regular de M (excepto ω). Primero nos haremos cargo de los cardinales sucesores

4.2.8 Lema. Supongamos que en M , λ es un cardinal infinito y $\kappa = \lambda^+$. Sea $\mathbb{P} = \text{Fn}(\omega, \lambda)$. Si G es un filtro (M, \mathbb{P}) -genérico, entonces $\omega_1^{M[G]} = \kappa$.

Demostración. Si $\alpha < \kappa$, entonces existe una función sobreyectiva de λ en α . Si G es un filtro (M, \mathbb{P}) -genérico entonces por el Lema 3.3.3 (página 88), $\bigcup G : \omega \rightarrow \lambda$ es una función sobreyectiva, lo cual implica que $(\alpha \text{ es numerable})^{M[G]}$. Así, $\omega_1^{M[G]} \geq \kappa$. Por otra parte, $(|\mathbb{P}| = \lambda)^M$, así, cualquier anticadena en \mathbb{P} es a lo más de tamaño λ , con lo cual, \mathbb{P} es λ^+ -cc, es

decir, $(\mathbb{P} \text{ es } \kappa\text{-cc})^M$. Así, por el Lema 3.3.10 (página 89), \mathbb{P} preserva cardinales $\geq \kappa$. Entonces $(\kappa \text{ es un cardinal})^{M[G]}$. Por lo tanto, $\kappa \geq \omega_1^{M[G]}$, y con esto, tenemos la igualdad deseada. \blacktriangle

Ahora sí, definamos el siguiente copo.

4.2.9 Definición. Para cualquier cardinal κ , el *orden del colapso de Lévy para κ* (denotado por $Lv(\kappa)$), es

$$\left\{ p : |p| < \omega \wedge p \text{ es una función} \wedge \text{dom}(p) \subset \kappa \times \omega \wedge \forall (\alpha, n) \in \text{dom}(p) (p(\alpha, n) \in \alpha) \right\}.$$

Además, $p \leq q$ si y sólo si $p \supset q$.

Veremos que si κ es un cardinal regular no numerable de M , forzando con $Lv(\kappa)$, obtenemos $\kappa = \omega_1^{M[G]}$. Es por esta razón, que el copo lleva el nombre de colapso, pues vuelve numerable a todo lo que está por debajo de κ . El Lema 4.2.8 muestra la igualdad para todos los cardinales regulares sucesores; hagámonos cargo ahora de los cardinales regulares límite.

4.2.10 Lema. Si κ es un cardinal regular, límite y mayor que ω , entonces $Lv(\kappa)$ es $\kappa\text{-cc}$.

Demostración. Veamos que si $\{p_\mu \in Lv(\kappa) : \mu < \kappa\}$ es una familia de elementos de $Lv(\kappa)$, entonces no puede ser una anticadena. Como $\{\text{dom}(p_\mu) : \mu < \kappa\}$ es una familia de conjuntos finitos de cardinalidad κ , por el Lema del Δ -sistema 3.2.6 (página 81), existe $D \subset \{\text{dom}(p_\mu) : \mu < \kappa\}$ tal que $|D| = \kappa$ y D forma un Δ -sistema con alguna raíz r . Sea $B \subset \kappa$ tal que $D = \{\text{dom}(p_\mu) : \mu \in B\}$. Notemos que $|B| = \kappa$. Por como se definen los elementos de $Lv(\kappa)$, se tiene que $p_\mu \upharpoonright_r \subset r \times \text{dom}(r)$. Como κ es regular y hay pocas posibilidades para los $p_\mu \upharpoonright_r$, existe $C \subseteq B$ tal que $|C| = \kappa$ y para cada $\mu \in C$ los $p_\mu \upharpoonright_r$ son iguales. Además, si $\delta, \gamma \in C$, entonces $\text{dom}(p_\delta) = \text{dom}(p_\gamma) = r$ (esto ya que D forma un Δ -sistema con raíz r), por lo tanto, todos los p_μ con $\mu \in C$ son compatibles dos a dos. Entonces $\{p_\mu \in Lv(\kappa) : \mu < \kappa\}$ no es una anticadena. Por lo tanto, $Lv(\kappa)$ es $\kappa\text{-cc}$. \blacktriangle

4.2.11 Teorema. Supongamos que en M , κ es regular y no numerable. Si G es un filtro $Lv(\kappa)$ -genérico sobre M , entonces $\kappa = \omega_1^{M[G]}$.

Demostración. Por los Lemas 4.2.10 y 3.3.10 (página 89), κ continúa siendo un cardinal en $M[G]$. De manera similar a (4) del Lema 3.2.1 (página 78), podemos probar que $\bigcup G$ es una función sobreyectiva de $\kappa \times \omega$ en κ . Para probar que $\kappa = \omega_1^{M[G]}$, tomaremos cualquier $0 < \alpha < \kappa$ y probaremos que dicho α es numerable. Sea $0 < \alpha < \kappa$, y definamos

$$\left(\bigcup G\right)_\alpha = \left\{ (n, \xi) : ((\alpha, n), \xi) \in \bigcup G \right\}.$$

Mostraremos que $(\bigcup G)_\alpha$ es una función sobreyectiva de ω en α .

(i) Primero veamos que $(\bigcup G)_\alpha$ está bien definida. Supongamos lo contrario, es decir, supongamos que existen $n \in \omega$ y $\gamma, \xi \in \kappa$ tales que $\gamma \neq \xi$ y $(n, \gamma), (n, \xi) \in (\bigcup G)_\alpha$, entonces $((\alpha, n), \xi), ((\alpha, n), \gamma) \in \bigcup G$, pero esto contradice que $\bigcup G$ es una función. Por lo tanto, $(\bigcup G)_\alpha$ está bien definida.

(ii) Como $\text{dom}(\bigcup G) = \kappa \times \omega$, para cada $n \in \omega$ ocurre que $(\alpha, n) \in \text{dom}(\bigcup G)$, así $\text{dom}((\bigcup G)_\alpha) = \omega$.

(iii) Veamos que $\text{ran}((\bigcup G)_\alpha) = \alpha$. Sea $\xi < \alpha$, definamos

$$D_\xi = \left\{ p \in Lv(\kappa) : \exists n \in \omega [((\alpha, n), \xi) \in p] \right\}.$$

Veamos que D_ξ es denso en $Lv(\kappa)$. Sea $p \in Lv(\kappa)$. Si $p \notin D_\xi$, entonces ocurre alguno de los siguientes dos casos:

(1) Para cada $n \in \omega$ tal que $(\alpha, n) \in \text{dom}(p)$ ocurre que $p(\alpha, n) \neq \xi$.

(2) Para cada $n \in \omega$: $(\alpha, n) \notin \text{dom}(p)$.

Si ocurre (1), sea $m = 1 + \max\{n \in \omega : (\alpha, n) \in \text{dom}(p)\}$ (esto lo podemos hacer ya que $|p| < \omega$). Si definimos $q = p \cup \{((\alpha, m), \xi)\}$, entonces $q \leq p$ y $q \in D_\xi$. Si ocurre (2), entonces fijemos algún $m \in \omega$ y definamos $q = p \cup \{((\alpha, m), \xi)\}$. Ocurre que $q \leq p$ y $q \in D_\xi$. Por lo tanto, D_ξ es denso. Así, podemos tomar un $r \in D_\xi \cap G$. Entonces existe $n \in \omega$ tal que $((\alpha, n), \xi) \in r$, además, como $r \in G$, entonces $r \subset \bigcup G$. Por lo tanto, existe $n \in \omega$ tal que $((\alpha, n), \xi) \in \bigcup G$. Con lo cual, existe un $n \in \omega$ tal que $(\bigcup G)_\alpha(n) = \xi$. Como tomamos un $\xi < \alpha$ arbitrario, se tiene que $\text{ran}((\bigcup G)_\alpha) = \alpha$.

Por (i), (ii) y (iii), tenemos que $(\bigcup G)_\alpha : \omega \rightarrow \alpha$ es una función sobreyectiva. Hemos probado que si $(0 < \alpha < \kappa)^M$, entonces $(\alpha \text{ es numerable})^{M[G]}$. Por lo tanto, $\kappa = \omega_1^{M[G]}$.

4.2.4. Forcing Aleatorio

A continuación presentaremos el forcing de los reales aleatorios (presentado por Solovay en 1970), solamente para mostrar algunas diferencias y similitudes con respecto al forcing de Cohen (que usamos para probar la consistencia de la negación de **HC** en la Sección 3.2). Las demostraciones de los siguientes resultados se pueden consultar en [14].

4.2.12 Definición. Si μ es una medida de probabilidad sobre X , entonces $\mathbb{M}\mathbb{B} = \mathbb{M}\mathbb{B}(X, \mu)$ denota el álgebra de medida. Los elementos de $\mathbb{M}\mathbb{B}$ son clases de equivalencia $[S]$ de conjuntos medibles módulo conjuntos nulos. $[S] \leq [T]$ si y sólo si $\mu(S \setminus T) = 0$; $1_{\mathbb{M}\mathbb{B}} = [X]$; $0_{\mathbb{M}\mathbb{B}} = [\emptyset]$.

4.2.13 Definición. Sea κ cualquier cardinal infinito. El copo que añade κ reales aleatorios es $\mathbb{M}\mathbb{B}(2^{\kappa \times \omega}, \mu)$, donde μ es la medida producto estándar.

El forcing de los reales aleatorios definido en 4.2.13, produce la misma aritmética cardinal que el forcing de Cohen $Fn(\kappa \times \omega, 2)$, es por esto, que ambos copos nos sirven de igual manera para producir modelos de la negación de **HC**. Sin embargo, tienen algunas diferencias, una de ellas, es que el forcing de Cohen agrega una función dominante, mientras el forcing aleatorio no.

- 4.2.14 Lema.**
1. En la extensión $M[G]$ de los reales aleatorios ($\mathbb{P} = \mathbb{M}\mathbb{B}(X, \mu)$), cada función $f : \omega \rightarrow \omega$, tal que $f \in M[G]$, está dominada por alguna $g \in M$ ($\forall f \in \omega^\omega \cap M[G] \exists h \in \omega^\omega \cap M \forall n \in \omega (f(n) \leq h(n))$).
 2. En la extensión $M[G]$ de los reales de Cohen ($\mathbb{P} = Fn(\omega, \omega)$), existe una función $f : \omega \rightarrow \omega$ que no está dominada por ninguna $g \in M$.

Para ilustrar una segunda diferencia entre el copo aleatorio y el copo de Cohen, definamos lo siguiente.

- 4.2.15 Definición.**
- Si f y g son dos funciones de igual dominio y rango ω , escribiremos $f \leq^* g$ si y sólo si el conjunto $\{x \in \text{dom}(f) = \text{dom}(g) : f(x) > g(x)\}$ es finito.
 - $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$, el tamaño del continuo.
 - \mathfrak{d} , es el menor tamaño de una familia dominante \mathcal{D} . Decimos que $\mathcal{D} \subseteq \omega^\omega$ es dominante si y sólo si para cada $f \in \omega^\omega$ existe $g \in \mathcal{D}$ tal que $f \leq^* g$.

- \mathfrak{b} , es el menor tamaño de una familia no acotada \mathcal{B} . Decimos que $\mathcal{B} \subseteq \omega^\omega$ es no acotada si y sólo si es falso que exista una función $g \in \omega^\omega$ tal que para cada $f \in \mathcal{B} : f \leq^* g$.

- 4.2.16 Lema.** 1. El copo aleatorio $\text{MIB}(X, \mu)$ nos genera una extensión donde se verifica que $\mathfrak{b} = \mathfrak{d} = \aleph_1 < \mathfrak{c}$.
2. Los copos de Cohen $Fn(I, J)$ (con ciertas restricciones), generan extensiones donde se verifica $\aleph_1 = \mathfrak{b} < \mathfrak{d} = \mathfrak{c}$.

Como hemos visto a lo largo de esta sección, las nociones de forcing son tan variadas como los resultados que se quieran obtener. Aquí presentamos de manera un tanto superficial algunas de estas nociones y las consecuencias que conllevan. Creemos que este es un buen punto para acotar el trabajo. Para estudiar más ejemplos de aplicaciones del forcing, se pueden consultar [1], [7] y [10].

Conclusiones

En el primer capítulo, nos enfocamos al estudio de la clase de los conjuntos bien fundados y sus propiedades. Se observó que suponer el Axioma de Fundación es equivalente a restringir el universo \mathbf{V} de todos los conjuntos a la clase de los conjuntos bien fundados. Se presentó una demostración del Teorema del colapso de Mostowski, el cual establece condiciones bajo las cuales es posible establecer un isomorfismo entre una clase con una relación dada y otra clase *transitiva* con la relación de *pertenencia*.

En el segundo capítulo se introdujeron las herramientas básicas de la Teoría de Modelos que se requieren para fundamentar las pruebas de consistencia. También se presenta una demostración de la consistencia del Axioma de Fundación usando como modelo la clase de los conjuntos bien fundados. Asimismo, se expuso el Teorema del Reflejo el cual permite, junto con el Teorema del colapso de Mostowski y el Teorema de Löwenheim-Skolem-Tarski, garantizar que toda teoría con una cantidad finita de axiomas propios de la Teoría de Conjuntos es consistente.

En el tercer capítulo se estudió la noción de *forcing* (o forzamiento), y se presentó, a partir de los resultados de Cohen, un modelo de la Teoría de Conjuntos donde no se verifica la Hipótesis del Continuo, además de otro modelo donde sí se verifica. Adicionalmente, revisamos que es posible construir modelos donde se verifica la Hipótesis del Continuo pero no así la Hipótesis del Continuo Generalizada.

En el último capítulo de este trabajo, se estudiaron propiedades de encajes entre órdenes parciales y se probó, en particular, que si podemos encajar densamente un copo de forcing en otro, entonces de los dos se obtienen las mismas extensiones genéricas; lo anterior resulta importante en el estudio del

forcing iterado. Finalmente, se mostraron algunas aplicaciones de la técnica de forcing, como la prueba de la consistencia de diamante, la prueba del Principio Maximal y se presentaron los órdenes del colapso de Lévy y el forcing aleatorio.

La técnica de forcing es una herramienta muy importante en el actual desarrollo de la Teoría de Conjuntos y las pruebas de consistencia. Este trabajo sirve como punto de partida para su estudio formal dado que establece las bases que sustentan la validez de dicha técnica.

Bibliografía

- [1] T. Bartoszyński, H. Judah: *Set Theory: On the Structure of the Real Line*. AK Peters, Wellesley (1995)
- [2] J. L. Bell: *Set Theory, Boolean-Valued Models and Independence Proofs*. Oxford Logic Guides 47; Third Edition (2005)
- [3] A. L. Celis Martínez: *Encajes entre nociones de forcing*. UNAM (21 de junio de 2013)
- [4] P. J. Cohen: *The independence of the continuum hypothesis I*. Proc. Natl. Acad. Sci. USA 50, 1143-1148 (1963)
- [5] K. Gödel: *Sobre Sentencias Formalmente Indecidibles de Principia Mathematica y Sistemas Afines*. (1931)
- [6] K. Gödel: *The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis with the axioms of set theory*. Annals of mathematics studies, 3. Princeton University Press. Princeton. (1940)
- [7] L. J. Halbeisen: *Combinatorial Set Theory, With a Gentle Introduction to Forcing*. Springer Monographs in Mathematics. Springer, London (2012)
- [8] F. Hernández: *Teoría de Conjuntos, Una introducción*. Aportaciones Matemáticas Vol. 13, SMM. México D. F. (1998)
- [9] K. Hrbacek, T. Jech: *Introduction to Set Theory, Third Edition, Revised and Expanded*. CRC Press, Florida (1999)
- [10] T. Jech: *Set Theory, The Third Millennium Edition, Revised and Expanded*. Springer Monographs in Mathematics. Springer, Berlin (2003)

- [11] W. Just, M. Weese: *Discovering Modern Set Theory. I, The Basics*. AMS, USA (1996)
- [12] J. Kelley: *General Topology*. Van Nostrand, Princeton (1955)
- [13] K. Kunen: *Set Theory, an Introduction to Independence Proofs*. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, vol. 102. North-Holland, Amsterdam (1983)
- [14] K. Kunen: *Set Theory*. Studies in Logic, vol. 34. College Publications, UK (2011)
- [15] K. Kunen: *The Foundations of Mathematics*. Studies in Logic, vol. 19. College Publications, UK (2012)
- [16] E. Mendelson: *Introduction to Mathematical Logic*. CRC Press, Fourth Edition, US (1997)

Índice de Símbolos

- $\mathbb{1}$, 62
AC, véase **AE**
AE, 7, 61
 \mathfrak{A} , 29
 \aleph_0, ω_0 , 2
 \beth_α , 14
BF, 10
Card, 2
ccc, 63
 $ctr(A)$, 16
CH, véase **HC**
 $cof(\alpha)$, 4
 \subset_c , 97
 $Con(\Gamma)$, $Incon(\Gamma)$, 35
 Δ_0 , 36
 \diamond , 106
 $\tilde{e}(X)$, 103
 $Fn(I, J)$, 63
 $p \Vdash \varphi$, 69
 $p \Vdash^* \varphi$, 70
 $Fn(I, J, \lambda)$, 87
 $\Gamma \vdash \varphi$, 34
GCH, véase **HCG**
 $HF, R(\omega)$, 14
HC, 3, 61
HCG, 3
 $e : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{Q}$, 96
 κ -cc, 89
 \mathcal{L} , 28
 $Lv(\kappa)$, 110
 $M[G]$, 66, 67
 $M^{\mathbb{P}}$, 66
 $M[G][S]_{\mathbb{Q}/G}$, 100
 $\mathfrak{A} \models \varphi$, 29
 $mos''A$, 23
mtn, 61
 ω , 2
 ω_1, \aleph_1 , 3
ON, véase **Ord**
 $op(\sigma, \tau)$, 68
Ord, 2
 \mathbb{P} , 62
 $\mathbb{P} \leq_d \mathbb{Q}$, 102
 $p \perp q$, 63
 \mathbb{Q}/P , 99
 $rank(x)$, 10
 $R(\gamma)$, 9, 55

$(\varphi(a_1, \dots, a_n))^M$, 32

$\sigma + (y/a)$, 32

$SING(x)$, 6

$\mathfrak{A} \preceq_{\varphi} \mathfrak{B}$, 33

$\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$, 33

τ_G , véase $val(\tau, G)$

TCB, 44

$trcl(A)$, véase $ctr(A)$

$up(\sigma, \tau)$, 68

V, 3

\emptyset , 1

$val(\tau, G)$, 67

$val_{\mathfrak{A}}$, 30

$\mathbf{V}^{\mathbb{P}}$, 66

WF, véase **BF**

\check{x} , 67

Z, **ZE**, **ZFE⁻**, **ZF-P**, 7

ZF, 7, 61

ZFC, véase **ZFE**

ZFE, 5, 7, 61

ZFE^{*}, 62

Índice General

- anticadena, 63
- árbol, 107
- asignación, 30
- átomo, 66

- Bernays-Gödel, 3

- cardinal, 3
- cardinal regular, singular, 4
- cerradura transitiva, 16
- club, 5
- colapso de Lévy, 110
- colapso de Mostowski, 23
- completamente contenido, 97
- Completeness Theorem, *véase* teorema Completez
- condiciones del forcing, 61, 63
- conjunto bien fundado, 10
- conjunto cerrado, 5
- conjunto cofinal, 4
- conjunto estacionario, 5
- conjunto genérico, 61
- conjunto no acotado, 5
- copo, 62
- copo de forcing, 62

- débilmente inaccesible, 5
- Δ -sistema, 81
- denso, 63
- denso debajo de p , 63

- encaje denso, 102
- encaje, 96
- encaje completo, 96
- estructura, 29
- extensión común, 63
- extensión genérica, 61

- filtro, 64
- filtro \mathbb{P} -genérico, 64
- fórmula absoluta, 37
- forzar, fuerza, 69
- fuertemente inaccesible, 5
- función parcial finita, 63

- κ -árbol de Suslin, 107

- λ -cerrado, 89
- Lema de Definibilidad, 74
- Lema de König, 5
- Lema de Verdad, 74
- lenguaje, 28
- \mathcal{L} -estructura, *véase* estructura
- lógica de predicados, 28

- modelo base, 61

- nice name, *véase* nombre adecuado
- noción de forcing, *véase* copo de forcing
- nombre adecuado, 85

- orden parcial, *véase* copo
- ordinal, 3
- ordinal regular, singular, 4

- p es compatible con q , 63
- p es incompatible con q , 63
- \mathbb{P} -nombre, 66
- \mathbb{P} preserva cardinales, 83
- \mathbb{P} preserva cofinalidades, 83
- p extiende a q , 63

- rank*, 10
- real de Cohen, 79
- reducción, 96
- relación bien fundada, 15
- relación casi-conjunto, 20
- relación extensional, 24
- R -minimal, 15

- sentencia, 29
- set-like, *véase* relación casi conjunto
- Soundness Theorem, *véase* teorema Sonoro
- subestructura, 33
- subestructura elemental, 33
- submodelo, *véase* subestructura
- submodelo elemental, *véase* subestructura elemental
- sucesión \diamond , 106

- teorema colapso de Mostowski, 25
- teorema Completez, 35
- teorema de inducción transfinita, 21
- teorema Löwenheim-Skolem-Tarski, 34
- teorema de recursión transfinita, 21
- teorema del Reflejo, 56
- teorema Sonoro, 35