

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Teoría de Maxwell libre en dimensiones extras

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

LICENCIADO EN FÍSICA

por

Simón Xolocotzi Muñoz

Asesorado por

Dr. J. Jesús Toscano Chavéz

Puebla Pue.

14 de noviembre de 2024

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Teoría de Maxwell libre en dimensiones extras

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

LICENCIADO EN FÍSICA

por

Simón Xolocotzi Muñoz

Asesorado por

Dr. J. Jesús Toscano Chavéz

Puebla Pue.

14 de noviembre de 2024

Título: Teoría de Maxwell libre en dimensiones extras
Estudiante: SIMÓN XOLOCOTZI MUÑOZ

COMITÉ

Dr. Héctor Novales Sánchez
Presidente

Dr. Roberto Cartas Fuentevillas
Secretario

Dra. Ana Aurelia Avilez López
Vocal

Dr. Arturo Fernández Tellez
Vocal

Dr. J. Jesús Toscano Chavéz
Asesor

Índice general

Resumen	IX
Introducción	XI
1. Estructura Relativista y de Norma de la Teoría de Maxwell	1
1.1. El grupo de Poincaré	1
1.2. Covariancia relativista de la teoría de Maxwell	3
1.3. Electrodinámica escalar	6
2. El Mecanismo de Higgs	9
2.1. Rompimiento espontáneo de una simetría continua	9
2.2. Rompimiento de simetría global: El teorema de Goldstone	10
2.3. Rompimiento espontáneo de simetría local: El mecanismo de Higgs	13
3. La teoría de Maxwell con Dimensiones Extras	19
3.1. Estructura de la Teoría Pura de Maxwell	19
3.2. Constantes de movimiento asociadas con el grupo $ISO(1, 3 + n)$	21
3.3. Ocultamiento de la simetría extendida	22
3.4. Espectro de masas	26
3.5. Las simetrías de la teoría efectiva	35
4. Conclusiones	37
A. Anexo	39
A.1. Serie múltiple de Fourier	39
A.2. Integrales	39
Bibliografía	41

Agradecimientos

Por sobre todos, quiero agradecer a mis padres y hermanas el apoyo incondicional que siempre me han brindado y que espero que sigan dándomelo, sin ellos yo no sería quien soy, mucho menos estaría embarcado en esta vida tan maravillosa que he emprendido. Por todos sus increíbles esfuerzos ¡Infinitas gracias :)!.

A todos mis amigos y amigas que conocí a lo largo de mi estancia en la facultad, la convivencia con ustedes fue la mejor experiencia que me tocó vivir. A ustedes, Aranza, Danna y Lupita, agradezco a la vida el haber compartido una hermandad única y especial, que decir que fue maravillosa, es quedarse corto, ustedes son parte de una porción en mi corazón que me acompañará y será parte de mí ¡Muchas gracias!.

A todos los profesores y profesoras quienes me impartieron clases, sus clases fueron las mejores, me divertí mucho, y ahora en esta etapa de mi vida, valoro la calidad de las mismas, pues me han dado una base sólida de conocimiento que de seguro, ayudará a navegar este emprendimiento de vida con firmeza y seguridad ¡Muchísimas gracias!.

Quiero agradecer al Doctor Héctor Novales por su amistad, consejos y excelentes clases, usted es un profesor sabio quien me ha ayudado cuando más lo necesitaba, por eso mismo ¡Muchas gracias!

Por último, pero no menos importante, quiero agradecer al Doctor J. Jesús Toscano Chávez, el tiempo, la dedicación, la orientación y su tutela de trabajo duro y metódico, créame que sus enseñanzas no sólo me han ayudado a concluir este trabajo de tesis, sino también me han ayudado a crecer como persona, me siento tan afortunado de haberlo escogido como mi asesor ¡Muchísimas gracias!.

Resumen

En esta tesis de licenciatura, se presenta un estudio de la teoría de Maxwell libre con n dimensiones extras. Partiendo de la teoría efectiva gobernada por el grupo extendido de Poincaré y de norma, $ISO(1, 3 + n) \times U_Q(1, \mathcal{M}^{4+n})$, se estudian los mapeos canónicos necesarios para ocultar esta simetría en la simetría usual $ISO(1, 3) \times U_Q(1, \mathcal{M}^4)$. Se elige un esquema de compactificación y se estudia el espectro de masas de la teoría, con énfasis especial en el sector escalar. Se discuten las similitudes existentes del mecanismo de generación de masas de bosones de norma por compactificación con el mecanismo de Higgs. En particular, se muestra la existencia de un campo escalar de masa cero por cada excitación de Kaluza-Klein del campo electromagnético, el cual juega el papel de pseudo-bosón de Goldstone, justo como ocurre en el mecanismo de Higgs.

Introducción

La búsqueda de comprender la naturaleza fundamental de los fenómenos físicos ha sido una fuerza impulsora de la física teórica durante siglos. Desde la unificación de fuerzas aparentemente dispares hasta la exploración de dimensiones ocultas, cada paso hacia adelante revela nuevas capas de complejidad y elegancia en el tejido del universo.

La idea de que podrían existir más de 4 dimensiones surgió con los trabajos de G. Nordström y T. Kaluz, quienes en un esfuerzo por unificar los campos gravitacional y electromagnético, estos visionarios exploraron la posibilidad de un espacio-tiempo más rico de lo que nuestra percepción cotidiana revela, al asumir la existencia de una dimensión espacial extra [1, 2]. Más tarde, O. Klein introdujo el concepto de compactificación de dimensiones extras para poder explicar su no observabilidad en la escala macroscópica. Dicho concepto está basado en la idea de que las dimensiones adicionales que podría tener el espacio-tiempo, podrían estar “enrolladas” o compactadas a escalas mucho más pequeñas de lo observado [3]. No obstante, fue con el nacimiento de la teoría de cuerdas en el contexto de física hadrónica y su posterior generalización como una teoría del todo, que las teorías con dimensiones extras recibieron un renovado interés. Inicialmente, la teoría original de cuerdas requirió de 26 dimensiones para asegurar unitariedad [4], pero con la introducción de fermiones en la teoría de cuerdas [5], el nacimiento de la supersimetría [5, 6] y la identificación de una partícula sin masa de espín 2 que corresponde al *gravitón* [7], se dio el desarrollo de la teoría de supercuerdas, la cual fue usada para obtener una teoría cuántica de gravedad con la complicidad de las dimensiones extras. Notablemente, el número de dimensiones para esta teoría se redujo a sólo 10 como lo mostró J. H. Schwarz [8]. Posteriormente, con la introducción del *mecanismo de Green-Schwarz* [9] para eliminar anomalías cuánticas en la teoría de cuerdas, se dio inicio a la primera *revolución de las supercuerdas* que concluyó con 5 teorías consistentes aparentemente independientes [10, 11, 12, 13]. Las cuales, en la llamada *segunda revolución de supercuerdas*, que inició con la aparición de la *teoría M* por E. Witten, se mostró que estas teorías son en realidad límites de ésta única teoría, que es una teoría fundamental unificadora universal sustentada por 11 dimensiones espacio-temporales [14]. Este hito marcó un avance significativo en la comprensión de las dimensiones extras y su papel en la teoría de cuerdas.

En la década de 1990, con los trabajos notables de I. Antoniadis, N. Arkan-Hamed y S. Dimopoulos [15, 16, 17], el interés fenomenológico en las dimensiones extras recibió un nuevo impulso. Pues estas investigaciones, motivadas por el problema de jerarquía, sugirieron la posibilidad de detectar evidencia experimental de dimensiones adicionales a energías accesibles (escala de TeVs) en experimentos de alta energía. Estos trabajos permitieron explicar la debilidad de la interacción gravitatoria en la impresionante escala de un milímetro. Poco después, Randall y R. Sundrum iniciaron una importante rama de modelos de dimensiones extras con los llamados *modelos de dimensiones adicionales deformadas*, en donde el problema de la jerarquía fue atacado al introducir una dimensión espacial extra y asumiendo que el espacio-tiempo 5 dimensional tiene una estructura de tipo *Anti-de-Sitter* [18, 19]. El presente trabajo se desarrolla dentro de otro marco extradimensional bien conocido, denominado *dimensiones extra universales* (UED, por sus siglas en inglés) [20], propuesto por Appelquist, Cheng y Dobrescu. Dicho marco consiste en

que una teoría de campos con una estructura similar al modelo estándar 4-dimensional (4DMS, por sus siglas en inglés) sea definida en un espacio-tiempo con dimensiones espaciales compactas extras, donde se supone que todas sus variables dinámicas se propagan en esta variedad. Esto conduce, por medio de una serie general de Fourier, a la aparición de un conjunto infinito de modos de Kaluza-Klein (KK) por cada campo extra-dimensional definidos en el espacio-tiempo de Minkowski de cuatro dimensiones, los cuales, reflejan los grados de libertad provenientes de las dimensiones espaciales extras.

El estudio realizado en esta tesis tuvo como base trabajos en donde se discuten conceptos cruciales como el *ocultamiento de una simetría y el mecanismo de masa por medio de compactificación y sus similitudes con el mecanismo de Higgs*, dichos trabajos clave se mencionan a continuación. En [21, 22], se establece que el concepto de *ocultamiento de una simetría*, que consiste en que a través del uso de ciertas transformaciones canónicas, los objetos de un grupo de norma G son mapeados hacia objetos bien definidos de algún subgrupo $H \subset G$, no solo es un concepto exclusivo de las teorías con rompimiento espontáneo de simetría (SSB, por sus siglas en inglés), sino también aplicable a las teorías con dimensiones extras compactificadas. Este hecho es de gran ayuda, pues con ella se pueden ocultar los grupos de simetría de la teoría extendida con dimensiones extras en los grupos de simetría de la teoría estándar en cuestión. Mientras que en [22, 23], se establece que *el mecanismo de masa por compactificación*, que consiste en escoger una geometría especial para la variedad compacta de dimensiones extras (comúnmente una geometría hecha del producto de n orbifolds S^1/Z_2), además de usar la serie de Fourier. Da lugar a la aparición de las transformaciones de norma estándar (SGT, por sus siglas en inglés) y las no estándar (NSGT, por sus siglas en inglés) en este tipo de teorías con dimensiones extras compactificadas. De estas primeras transformaciones, se identifican los elementos de la teoría estándar, a su vez que nos permite identificar como campos de materia al conjunto infinito de modos de KK (también llamadas excitaciones de KK). Más aún, este mecanismo dota de masa a estos últimos, en forma de un espectro que es proporcional a la escala de compactificación. Adicionalmente, este mecanismo da lugar a la aparición de un conjunto de pseudo-bosones de Goldstone que son absorbidos por otro subconjunto de modos de KK vía una norma unitaria. Más información complementaria sobre estos conceptos puede encontrarse en [24, 25, 26].

Siguiendo el enfoque dado en la referencia [27], en este trabajo de tesis de licenciatura, primero se estudia la estructura de la teoría de Maxwell libre con n dimensiones extras, esto es, se definen sus campos y simetrías sobre una variedad de espacio-tiempo con n dimensiones espaciales arbitrarias extras en una escala de energía alta (distancias cortas), de acuerdo al marco UED. Después, para poder ingresar al régimen de bajas energías, sabiendo que en esta escala las dimensiones extras muestran una naturaleza compactificada, a la teoría extendida se le aplica un programa de compactificación basado en la *noción de ocultamiento de una simetría y el mecanismo de masa por compactificación de las dimensiones extras*, implementado a través de dos mapeos de reducción dimensional canónicos, y haciendo que cada dimensión extra sea compactificada en un orbifold S^1/Z_2 . Como resultado de este programa, además de recuperar la teoría de Maxwell estándar libre, se obtiene un conjunto infinito de campos correspondientes a las excitaciones de KK del campo electromagnético con su respectivo espectro de masas. También se muestra que los pseudo-bosones de Goldstone desaparecen de la teoría mediante la implementación de una NSGT específica, conocida en el contexto del Mecanismo de Higgs como norma unitaria. Estos últimos aspectos provienen del mecanismo de compactificación, la cual guarda una gran similitud con el Mecanismo de Higgs.

La estructura de esta tesis es la siguiente. En el capítulo uno se discuten las estructuras de los grupos de simetría de la teoría de Maxwell, a saber $ISO(1, 3)$ y $U_Q(1, \mathcal{M}^4)$, además de presentar a las variables dinámicas sobre los cuales estos grupos actúan; el campo de norma y la curvatura de Maxwell. En el capítulo dos se presenta una breve descripción del concepto de rompimiento

espontáneo de una simetría y su implementación en el mecanismo de Higgs, lo cual tiene como propósito contrastarlo con el mecanismo de generación de masa por compactificación. En el tercer capítulo se encuentra la contribución de esta tesis. Finalmente, en el capítulo cuatro se presentan las conclusiones de este trabajo.

Capítulo 1

Estructura Relativista y de Norma de la Teoría de Maxwell

En este capítulo se presenta una breve descripción de la covariancia relativista y estructura de norma de la Teoría de Maxwell. Se comienza con la estructura del grupo de Poincaré y sus subgrupos, a saber, el grupo de Lorentz y el grupo de las traslaciones. Se culmina con la construcción de la Electrodinámica Escalar.

1.1. El grupo de Poincaré

Las teorías físicas son regidas por grupos de simetría. Las simetrías implican leyes de conservación las cuales permiten identificar a las observables del sistema. El grupo de simetría más importante que concierne a la variedad de espacio-tiempo \mathcal{M}^4 , es el grupo de Poincaré $ISO(1, 3)$.

Dicho grupo está definido por la siguiente ley de transformación

$$x'_\mu = \Lambda_\mu^\nu x_\nu + a_\mu, \quad (1.1)$$

donde $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$. Esta ecuación contiene dos leyes de transformación: las transformaciones de Lorentz y las traslaciones. La primera es

$$x_\mu \rightarrow x'_\mu = \Lambda_\mu^\nu x_\nu, \quad (1.2)$$

las cuales representan rotaciones en el espacio tridimensional y transformaciones puras de Lorentz, también conocidas como boosts. La segunda es

$$x_\mu \rightarrow x'_\mu = x_\mu + a_\mu, \quad (1.3)$$

y corresponde al corrimiento de un 4-vector en \mathcal{M}^4 . Estas dos últimas transformaciones indican que el grupo de Poincaré contiene dos subgrupos, el grupo de Lorentz $SO(1, 3)$, cuyos elementos son las matrices 4×4 Λ , y el grupo de traslaciones $T(1, 3)$ cuyos elementos son los cuadvectores a_μ . Este último grupo contiene 4 parámetros continuos que justamente son las cuatro componentes de a_μ .

Hablando de $SO(1, 3)$, la ley de transformación (1.2) debe dejar invariante a

$$x'^\mu x'_\mu = x^\mu x_\mu, \quad (1.4)$$

que es la magnitud fundamental de la teoría especial de la relatividad que surge de la constancia de la velocidad de la Luz e impone las siguientes condiciones sobre los elementos Λ

$$\Lambda^T g \Lambda = g, \quad (1.5)$$

donde $g = \text{diag}\{1, -1, -1, -1\}$ corresponde a la métrica del espacio-tiempo plano. Tomando el determinante de la ecuación (1.5), se obtiene lo siguiente

$$\text{Det}\Lambda = \pm 1, \quad (1.6)$$

que es la condición del grupo general de Lorentz $O(1, 3)$. No obstante, los elementos que efectivamente forman al grupo $SO(1, 3)$, tienen determinante positivo, o sea

$$\text{Det}\Lambda = +1, \quad (1.7)$$

de esta manera, las ecuaciones (1.5) y (1.7) forman las dos condiciones del grupo de Lorentz $SO(1, 3)$.

La ecuación (1.7) nos indica que los elementos Λ pueden escribirse en términos de parámetros continuos independientes, es decir, como elementos de un grupo de Lie. Dichos parámetros se pueden identificar al reescribir la ecuación (1.1) usando la transformación de Lorentz particular $\Lambda_{\nu}^{\mu} = \delta_{\nu}^{\mu} + \omega_{\nu}^{\mu}$ y traslación $a_{\mu} = \epsilon_{\mu}$, siendo ω_{ν}^{μ} y ϵ_{μ} infinitesimales, como

$$x'_{\mu} = x_{\mu} + \omega_{\mu}^{\nu} x_{\nu} + \epsilon_{\mu}, \quad (1.8)$$

donde se puede ver que $\omega_{\mu\nu}$ es justamente el parámetro que caracteriza a las transformaciones de Lorentz en (1.8). Luego de imponer que $\Lambda_{\nu}^{\mu} = \delta_{\nu}^{\mu} + \omega_{\nu}^{\mu}$ cumpla la condición (1.5), se obtiene $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$, de aquí se concluye que hay 6 parámetros independientes para el grupo de Lorentz. Con la identificación del número de parámetros de $SO(1, 3)$, es fácil concluir que el grupo de Poincaré tiene 10 parámetros continuos y que efectivamente se trate de un grupo de Lie, al igual que sus subgrupos.

Todos los elementos de $SO(1, 3)$ pueden formarse a partir de transformaciones fundamentales mediante la multiplicación matricial, dichas transformaciones son

$$\Lambda(\theta_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta_1 & \sin \theta_1 \\ 0 & 0 & -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{pmatrix}, \quad (1.9)$$

$$\Lambda(\theta_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_2 & 0 & -\sin \theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sin \theta_2 & 0 & \cos \theta_2 \end{pmatrix}, \quad (1.10)$$

$$\Lambda(\theta_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_3 & \sin \theta_3 & 0 \\ 0 & -\sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.11)$$

$$\Lambda(\phi_1) = \begin{pmatrix} \cosh \phi_1 & -\sinh \phi_1 & 0 & 0 \\ -\sinh \phi_1 & \cosh \phi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.12)$$

$$\Lambda(\phi_2) = \begin{pmatrix} \cosh \phi_2 & 0 & -\sinh \phi_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sinh \phi_2 & 0 & \cosh \phi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.13)$$

$$\Lambda(\phi_3) = \begin{pmatrix} \cosh \phi_3 & 0 & 0 & -\sinh \phi_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh \phi_3 & 0 & 0 & \cosh \phi_3 \end{pmatrix}, \quad (1.14)$$

donde θ_i es el ángulo de rotación espacial sobre el eje x_i y ϕ_i la rapidez asociada con el boost a lo largo del eje x_i . Estas cantidades en la práctica resultan ser los parámetros de $SO(1, 3)$, donde también se puede notar que el número de los mismos coincide con el de transformaciones fundamentales. Note que dentro de las ecuaciones (1.9), (1.10) y (1.11) se encuentran las matrices que forman al grupo $SO(3)$, por lo que $SO(3)$ es un subgrupo de $SO(1, 3)$. Puede notarse también que las rotaciones cumplen la condición de ortogonalidad $\Lambda^T = \Lambda^{-1}$, no así los boosts ya que $\Lambda^{-1} \neq \Lambda^T$.

Dado que el grupo de Poincaré es un grupo de Lie, cualquier representación del mismo puede ser definido por seis generadores del grupo $SO(1, 3)$ denotados por $J_{\mu\nu}$, y cuatro generadores de $T(1, 3)$ denotados por P_μ , que satisfacen la siguiente álgebra de Lie

$$[P_\mu, P_\nu] = 0, \quad (1.15)$$

$$[P_\mu, J_{\rho\sigma}] = i(g_{\mu\sigma}P_\rho - g_{\mu\rho}P_\sigma), \quad (1.16)$$

$$[J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}] = i(g_{\nu\sigma}J_{\rho\mu} - g_{\nu\sigma}J_{\rho\mu} + g_{\mu\rho}J_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho}J_{\mu\sigma}). \quad (1.17)$$

Este grupo tiene dos invariantes que conmutan tanto con $J_{\mu\nu}$ como por P_μ . El primero es construido a través del pseudovector de Pauli-Lubanski

$$W_\mu = -\frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}J^{\nu\rho}P^\sigma, \quad (1.18)$$

cuya definición es

$$W^2 = W_\mu W^\mu. \quad (1.19)$$

El otro invariante está asociado con $T(1, 3)$ y se define como

$$P^2 = P^\mu P_\mu. \quad (1.20)$$

1.2. Covariancia relativista de la teoría de Maxwell

Las ecuaciones de Maxwell en unidades naturales están dadas por

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (1.21)$$

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \quad (1.22)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho, \quad (1.23)$$

$$\nabla \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{J}, \quad (1.24)$$

Estructura Relativista y de Norma de la Teoría de Maxwell
1.2 Covariancia relativista de la teoría de Maxwell

los cuales describen por completo el comportamiento de los fenómenos electromagnéticos. Los campos \vec{B} y \vec{E} pueden escribirse en términos de un vector potencial \vec{A} y un potencial escalar ϕ como

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad (1.25)$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad (1.26)$$

estas relaciones se obtienen de las ecuaciones (1.21) y (1.22) respectivamente. Los potenciales no son únicos, en efecto, sea la transformación

$$\begin{aligned} \phi' &= \phi + \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \\ \vec{A}' &= \vec{A} - \vec{\nabla}\alpha, \end{aligned} \quad (1.27)$$

con $\alpha = \alpha(t, \vec{x})$ un escalar, que si los sustituimos en las relaciones (1.25) y (1.26), los campos magnéticos y eléctricos quedan invariantes

$$\vec{E}' = \vec{E}, \quad (1.28)$$

$$\vec{B}' = \vec{B}, \quad (1.29)$$

esto nos dice que los potenciales relacionados por (1.27) conducen a los mismos campos \vec{E} y \vec{B} .

Bajo el grupo $SO(3)$ \vec{E} , \vec{B} , \vec{J} y \vec{A} se transforman como vectores

$$E'_i = O_{ij} E_j,$$

$$B'_i = O_{ij} B_j,$$

$$J'_i = O_{ij} J_j,$$

$$A'_i = O_{ij} A_j,$$

mientras que la densidad de carga y el potencial se transforman como escalares

$$\rho' = \rho,$$

$$\phi' = \phi.$$

Estas transformaciones hacen que las ecuaciones de Maxwell sean manifiestamente covariantes bajo $SO(3)$. No obstante, las ecuaciones de Maxwell también pueden escribirse covariantemente bajo el grupo de Lorentz. Esto se logra mediante la reunión de los escalares y vectores de $SO(3)$ en los siguientes objetos de $SO(1, 3)$: Los potenciales \vec{A} y $\phi \equiv A^0$ se reúnen en el cuadripotencial

$$A_\mu = \begin{pmatrix} A_0 \\ \vec{A} \end{pmatrix}. \quad (1.30)$$

La densidad de carga $\rho = J_0$ y \vec{J} en la corriente

$$J_\mu = \begin{pmatrix} J_0 \\ \vec{J} \end{pmatrix}. \quad (1.31)$$

Mientras que las componentes de los campos \vec{E} y \vec{B} con ayuda de las ecuaciones (1.25) y (1.26), se ubican en el tensor electromagnético

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) = -F_{\nu\mu}(x), \quad (1.32)$$

el cual es totalmente antisimétrico y tiene, por tanto, sólo 6 componentes independientes, número que coincide con los 6 componentes combinados de \vec{E} y \vec{B} , y cuya ley de transformación bajo $SO(1,3)$ es

$$F'_{\mu\nu} = \Lambda_{\mu}^{\rho} \Lambda_{\nu}^{\sigma} F_{\rho\sigma}, \quad (1.33)$$

que nos dice que se transforma como un 2-tensor.

Con respecto a las ecuaciones de Maxwell, no es difícil convencerse que las ecuaciones inhomogéneas (1.23) y (1.24) están contenidas en la siguiente expresión

$$\partial^{\mu} F_{\mu\nu} = J_{\nu}, \quad (1.34)$$

mientras que las ecuaciones homogéneas (1.21) y (1.22), se obtienen del tensor electromagnético (1.32) vía la identidad de Bianchi

$$\partial_{\lambda} F_{\mu\nu} + \partial_{\nu} F_{\lambda\mu} + \partial_{\mu} F_{\nu\lambda} = 0. \quad (1.35)$$

Por su parte, las transformaciones (1.27) en su forma covariante son

$$A_{\mu}(x) \rightarrow A'_{\mu}(x) = A_{\mu}(x) + \partial_{\mu}\alpha(x) \Leftrightarrow \delta A_{\mu}(x) = \partial_{\mu}\alpha(x), \quad (1.36)$$

y reciben el nombre de transformaciones de norma, las cuales dejan invariante a $F_{\mu\nu}$

$$\begin{aligned} F'_{\mu\nu} &= \partial_{\mu} A'_{\nu} - \partial_{\nu} A'_{\mu}, \\ &= \partial_{\mu} (A_{\nu} + \partial_{\nu}\alpha) - \partial_{\nu} (A_{\mu} + \partial_{\mu}\alpha), \\ &= \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu} + \partial_{\mu}\partial_{\nu}\alpha - \partial_{\nu}\partial_{\mu}\alpha, \\ &= F_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (1.37)$$

Este hecho da pie a asegurar que la transformación (1.36) define el grupo de norma o electromagnético $U_Q(1, \mathcal{M}^4)$.

Las ecuaciones inhomogéneas tienen un origen dinámico, lo cual significa que surgen de una lagrangiana vía las ecuaciones de Euler-Lagrange. Sin embargo, esto no es cierto para las ecuaciones homogéneas cuyo origen no es dinámico sino geométrico debido a que surgen directamente de la estructura del tensor de Maxwell como se ve en (1.35). La lagrangiana de la cual surgen las ecuaciones de Maxwell inhomogéneas, luce de la siguiente manera

$$\mathcal{L}_M = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - A_{\mu} J^{\mu}, \quad (1.38)$$

la cual es invariante bajo $ISO(1,3)$; pues es invariante tanto al corrimiento (1.3), debido a que no hay dependencia explícita de x_{μ} en la misma, como a las transformaciones de Lorentz (1.2), debido a que está escrita en forma covariante, o sea, de la forma (1.4).

Dado que $A_{\mu}(x)$ está indeterminado por la transformación de norma (1.36), la lagrangiana (1.38) debe ser invariante bajo esta transformación, es decir, bajo $U_Q(1, \mathcal{M}^4)$. Claramente $F_{\mu\nu}(x)$ lo es, no así J_{μ} , pues tiene un carácter fenomenológico en el sentido de que no está definido en términos de grados de libertad (campos), por eso, no puede decirse nada sobre cómo es afectada bajo las transformaciones de norma. No obstante, existe la posibilidad de que pueda surgir de un término más amplio que sea invariante de norma.

Sustituyendo la ecuación (1.38) en las ecuaciones de Lagrange para campos

$$\partial_{\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} A_{\nu})} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\nu}}, \quad (1.39)$$

se obtienen las ecuaciones inhomogéneas de Maxwell (1.61).

Como se estableció anteriormente, la ley de transformación (1.36) define al grupo de norma $U_Q(1, \mathcal{M}^4)$, el cual está constituida (sólo para la teoría de Maxwell), por elementos de la forma $U(x) = e^{ie\alpha(x)}$ cuyos parámetros son las funciones reales $\alpha(x)$ y donde e es la carga eléctrica. Es pertinente resaltar que para otras teorías, los elementos del grupo $U_Q(1, \mathcal{M}^4)$ tienen formas ligeramente diferentes y asignan otras leyes de transformación a los elementos de dichas teorías, como se verá a continuación.

1.3. Electrodinámica escalar

Considere un campo escalar complejo

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\phi_1(x) + i\phi_2(x)], \quad (1.40)$$

$$\phi^\dagger(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\phi_1(x) - i\phi_2(x)], \quad (1.41)$$

donde $\phi_1(x)$ y $\phi_2(x)$ son campos escalares en la representación trivial de Lorentz $(0, 0)$, que ante la transformación de Lorentz (1.2) se transforman como

$$\phi'_i(x) = \phi_i(\Lambda^{-1}x), \quad (1.42)$$

y satisfacen la Ecuación de Klein-Gordon.

La lagrangiana escalar compleja invariante de $ISO(1, 3)$ es

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi(x)) (\partial^\mu \phi(x))^\dagger - m^2 \phi(x) \phi^\dagger(x), \quad (1.43)$$

que mediante las ecuaciones de Lagrange, $\phi(x)$ y $\phi^\dagger(x)$ satisfacen una ecuación de movimiento tipo Klein-Gordon

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi(x) = 0, \quad (1.44)$$

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi^\dagger(x) = 0. \quad (1.45)$$

Por otro lado, bajo $U_Q(1, \mathcal{M}^4)$, $\phi(x)$ y $\phi^\dagger(x)$ se transforman como

$$\begin{aligned} \phi'(x) &= e^{i\alpha(x)} \phi(x), \\ \phi'^\dagger(x) &= e^{-i\alpha(x)} \phi^\dagger(x). \end{aligned} \quad (1.46)$$

Estas transformaciones hacen que la lagrangiana (1.43) sea invariante bajo transformaciones globales, donde $\alpha(x) = \text{const}$. Lo anterior no es cierto cuando la transformación es local, es decir, cuando α es una función dependiente de cada punto de \mathcal{M}^4 , pues la derivada de $\phi(x)$ no se puede transformar bajo la regla (1.46) sino como

$$\partial_\mu \phi'(x) = e^{i\alpha(x)} [\partial_\mu \phi(x) + i\phi(x) \partial_\mu \alpha(x)], \quad (1.47)$$

y por tanto, no se pueda incluir en la lagrangiana (1.43). Para incluir derivadas asociadas a las transformaciones locales en la lagrangiana (1.43), es necesario construir una derivada que tenga la ley de transformación (1.46). Para ese cometido, si observamos la definición de la derivada $\phi(x)$ en la dirección del vector η_μ

$$\eta_\mu \partial^\mu \phi(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} [\phi(x + \epsilon \eta) - \phi(x)], \quad (1.48)$$

y luego aplicamos la ley de transformación (1.46) a $\phi(x + \epsilon\eta)$ y $\phi(x)$, se podrá notar que ambos campos tienen una ley de transformación diferente en sus respectivos puntos, por lo que no se puede efectuar la resta de estos dos campos transformados cercanos. Esto implica que no hay derivada en la dirección del vector η_μ , o dicho con otras palabras, la derivada (1.48) carezca de sentido geométrico [28]. Para poder realizar la resta entre puntos cercanos de una manera clara, se debe introducir un factor que compense las diferencias de fase $\alpha(x)$ de un punto al siguiente. La manera más simple de hacerlo es definiendo una cantidad escalar $U(y, x)$ que dependa sobre dos puntos y que, simultáneamente con la transformación (1.46), se transforme de la siguiente manera

$$U'(y, x) = e^{i\alpha(y)}U(y, x)e^{-i\alpha(x)}, \quad (1.49)$$

además que cumpla $U(y, y) = 1$. Con esta definición, la cantidad $U(y, x)\phi(x)$ tiene la ley de transformación (1.46)

$$[U(y, x)\phi(x)]' = e^{i\alpha(y)} [U(y, x)\phi(x)], \quad (1.50)$$

con esta cantidad se puede definir una derivada covariante que cuente con sentido geométrico en la dirección del vector η_μ , a través de la siguiente definición

$$\eta_\mu D^\mu \phi(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} [\phi(x + \epsilon\eta) - U(x + \epsilon\eta, x)\phi(x)]. \quad (1.51)$$

Luego, sustituyendo las ecuaciones (1.46), (1.50) en (1.51) y haciendo el cambio de variable $y \rightarrow x + \epsilon\eta$, se tiene

$$D_\mu \phi'(x) = e^{i\alpha(x)} D_\mu \phi(x), \quad (1.52)$$

la transformación de la derivada covariante tipo (1.46). Esta nueva derivada puede ser usada en la lagrangiana (1.43) como remplazo de la derivada normal. Por tanto, la lagrangiana (1.43) se reescribe como

$$\mathcal{L} = (D_\mu \phi(x)) (D^\mu \phi(x))^\dagger - m^2 \phi(x) \phi^\dagger(x), \quad (1.53)$$

la cual es invariante ante transformaciones locales del grupo $U_Q(1, \mathcal{M}^4)$, cuyas ecuaciones de movimiento para $\phi(x)$ y $\phi^\dagger(x)$ lucen ahora como

$$[(D_\mu D^\mu) + m^2] \phi(x) = 0, \quad (1.54)$$

$$[(D_\mu D^\mu)^\dagger + m^2] \phi^\dagger(x) = 0. \quad (1.55)$$

Pasando ahora a obtener la forma explícita de D_μ , haciendo que x y $x + \epsilon\eta$ difieran infinitesimalmente y expandiendo a $U(x + \epsilon\eta, x)$ en serie de Taylor, se tiene

$$U(x + \epsilon\eta, x) = 1 + i\epsilon\eta_\mu A^\mu + O(\epsilon^2), \quad (1.56)$$

donde A_μ es una conexión. Luego, sustituyendo (1.56) en (1.51), se obtiene la conocida forma de la derivada covariante de $U_Q(1, \mathcal{M}^4)$

$$D_\mu \phi(x) = \partial_\mu \phi(x) - ieA_\mu(x)\phi(x), \quad (1.57)$$

donde figura la presencia de la conexión en el último término de la misma.

Hablando de la conexión, usando (1.56) en (1.49) y haciendo el cambio de variable $y \rightarrow x + \epsilon\eta$, se obtiene

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x), \quad (1.58)$$

en donde si hacemos $\beta(x) = \frac{1}{e} \alpha(x)$, podemos llegar a la ley de transformación de los potenciales (1.36). Por este hecho, se concluye que las conexiones de la derivada covariante D_μ son los potenciales electromagnéticos A_μ y por tanto, estos últimos también reciban el nombre de campos de

norma. Podemos ver además que tanto esta ley de transformación como la transformación (1.36), pueden ser reescritos en términos de los elementos del grupo $U_Q(1, \mathcal{M}^4)$ como

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = U(x)A_\mu(x)U^\dagger(x) - \frac{i}{e}(\partial_\mu U(x))U(x)^\dagger, \quad (1.59)$$

donde hay que recordar que en la teoría de Maxwell, los elementos de $U_Q(1, \mathcal{M}^4)$ tienen la forma $U(x) = e^{ie\alpha(x)}$.

Por otro lado, sustituyendo (1.57) en el conmutador $[D_\mu, D_\nu]\phi(x)$ se obtiene

$$[D_\mu, D_\nu]\phi(x) = -ieF_{\mu\nu}\phi(x),$$

donde $F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x)$ es justamente el tensor de la Teoría usual de Maxwell y por ende, esta misma también recibe el nombre de curvatura de Maxwell. Es fácil probar que la transformación (1.58) asegura $F_{\mu\nu}(x)$ sea invariante ante la acción del grupo de norma local y por tanto $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ también lo sea.

La presencia de $A_\mu(x)$ en el término cinético de la lagrangiana escalar, da pie a introducir $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ en la misma y formar la lagrangiana de la electrodinámica escalar

$$\mathcal{L}_{SED} = (D_\mu\phi(x))(D^\mu\phi(x))^\dagger - m^2\phi(x)\phi^\dagger(x) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (1.60)$$

que esta compuesta de los campos $\phi(x)$, $\phi^\dagger(x)$ y A_μ .

Por medio de las ecuaciones de Euler-lagrange, se obtienen tres ecuaciones de movimiento para cada campo; para $\phi(x)$ y $\phi^\dagger(x)$ sus ecuaciones correspondientes son (1.54) y (1.55) respectivamente, mientras que para $A_\mu(x)$, le corresponde las ecuaciones de Maxwell inhomogéneas

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = J_\nu, \quad (1.61)$$

donde para esta teoría, se ha obtenido una corriente definida como

$$J_\mu = ie \left[(D_\mu\phi(x))^\dagger \phi(x) - (D_\mu\phi(x)) \phi^\dagger(x) \right], \quad (1.62)$$

que depende de los tres campos $\phi(x)$, $\phi^\dagger(x)$ y $A_\mu(x)$, y además es invariante ante las transformaciones de $U_Q(1, \mathcal{M}^4)$ local. Note que la estructura de la corriente J_μ es consecuencia de haber agregado la derivada covariante que está constituida por $A_\mu(x)$ en la lagrangiana escalar, en otras palabras, de haber agregado la interacción electromagnética en la misma. Por esta razón, las conexiones o campos de norma y su relación con la interacción electromagnética, pasan a estar asociados a la derivada covariante D_μ y por extensión a $U_Q(1, \mathcal{M}^4)$ local. En conclusión, el grupo de norma contiene la interacción electromagnética y por tanto, es llamado el grupo electromagnético $U_Q(1, \mathcal{M}^4)$.

Capítulo 2

El Mecanismo de Higgs

En este capítulo se presenta una breve descripción del rompimiento espontáneo de una simetría global, fenómeno conocido con el nombre de Teorema de Goldstone, y sus implicaciones al caso de cuando la simetría es local, lo cual da lugar al Mecanismo de Higgs. Las ideas esenciales, son ilustradas mediante el rompimiento espontáneo del grupo $SU(3)$ al grupo $SU(2)$.

2.1. Rompimiento espontáneo de una simetría continúa

La idea general de este mecanismo consiste en lo siguiente: Considere a G un grupo de Lie y H un subgrupo del mismo, cada uno con sus respectivos conjuntos de generadores $\{T^a\}$ y $\{T^{\bar{a}}\}$. Dado que $H \subset G$, los generadores de H también son de G , por lo que los generadores de G pueden dividirse en dos clases

$$\{T^a\} \rightarrow \{T^{\bar{a}}\}, \{T^{\hat{a}}\}, \quad (2.1)$$

donde se asume que hay d_G generadores T^a asociados con G , d_H generadores $T^{\bar{a}}$ asociados con H y $d_G - d_H$ generadores $T^{\hat{a}}$ que no pertenecen a H . También, por sencillez, considere una lagrangiana que depende de campos escalares (bajo $SO(1,3)$) en una representación no trivial de G

$$\mathcal{L}(\phi_r, \partial_\mu \phi_r), \quad (2.2)$$

donde dichos campos escalares pueden ser acomodados en las componentes ϕ_r de un multiplete, que se transforma en esta representación como

$$\phi_r \rightarrow \phi'_r = U_{rl} \phi_l, \quad (2.3)$$

con $U \in G$, y donde claramente la simetría H no es manifiesta en esta lagrangiana.

La lagrangiana (2.2) debe ser invariante tanto bajo G como bajo H . Esto significa que el multiplete de campos ϕ_r de G puede ser organizado en multipletes de campos $\phi_{\bar{s}}$ de H mediante un mapeo de punto de G en H

$$\begin{aligned} G &\longmapsto H, \\ \{\phi_r\} &\longmapsto \{\phi_{\bar{s}}\}, \\ \mathcal{L}(\phi_r, \partial_\mu \phi_r) &\longmapsto \mathcal{L}(\phi_{\bar{s}}, \partial_\mu \phi_{\bar{s}}), \end{aligned} \quad (2.4)$$

así, la simetría H es manifiesta en la lagrangiana transformada, mientras que la simetría G está oculta.

Cuando la simetría G es global [29], puede ocurrir el fenómeno de rompimiento espontáneo de la simetría G en H , denotado por

$$G \longmapsto H, \tag{2.5}$$

al hacer que una dirección caracterizada por un vector especial Φ_0 , parte del estado de vacío del sistema y constante del espacio-tiempo, sea dejado invariante por la acción del subgrupo H . Como consecuencia de esto, los $d_G - d_H$ generadores $T^{\hat{a}}$ que no pertenecen a H se rompen ($T^{\hat{a}}\Phi_0 \neq 0$), lo que da lugar al Teorema de Goldstone, que establece que *por cada generador roto aparece un campo escalar de masa cero*, teniéndose así $d_G - d_H$ bosones de Goldstone. Dicho teorema también implica que los generadores $T^{\hat{a}}$ no son rotos en el mismo sentido, además de que aparecen campos escalares que sí reciben masa.

Cuando la simetría es de norma [30], surge el mecanismo de Higgs. Se presenta la misma situación anterior, pero ahora los d_G campos de norma sin masa asociados a G , también se separan mediante otro mapeo en dos conjuntos de campos de norma: uno con campos $A_{\mu}^{\bar{a}}$ vinculados a H y otro con campos $A_{\mu}^{\hat{a}}$ asociados con los generadores rotos de G , dicho mapeo es esquematizado como

$$\begin{aligned} G &\longmapsto H, \\ \{A_{\mu}^a\} &\longmapsto \{A_{\mu}^{\bar{a}}\}, \{A_{\mu}^{\hat{a}}\}, \end{aligned} \tag{2.6}$$

de esta forma, bajo H , los campos $A_{\mu}^{\bar{a}}$ se transforman como conexiones y, por lo tanto, no pueden tener masa, caso contrario de los campos $A_{\mu}^{\hat{a}}$ que se transforman tensorialmente o como campos de materia y por lo tanto puedan ser dotados de masa.

El mapeo (2.6) por sí mismo no proporciona masa a los campos $A_{\mu}^{\hat{a}}$, solo indica que estos pueden adquirirla. Para dotarlos de masa sin destruir la simetría G , es necesario utilizar el mecanismo de Higgs, que consiste en que los bosones (llamados en este escenario, pseudo-bosones) de Goldstone, sean absorbidos por los campos de norma $A_{\mu}^{\hat{a}}$ a través de una transformación especial llamada norma unitaria. Además, el mapeo (2.6), si es canónico, garantiza que las lagrangianas \mathcal{L}_G y \mathcal{L}_H sean equivalentes en el espacio de fase, a pesar de las diferencias en la masa de los campos de norma entre las dos simetrías.

2.2. Rompimiento de simetría global: El teorema de Goldstone

En esta subsección se aborda el teorema de Goldstone en el contexto del grupo de simetría $SU(3)$.

En general, los generadores de cualquier representación de un grupo de Lie, denotados como T^c , satisfacen la conocida álgebra de Lie

$$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c,$$

donde f^{abc} es la constante de estructura del grupo. En la representación fundamental de $SU(3)$, cuya dimensión es 3, los generadores son las matrices de Gell-Mann λ^a , las cuales satisfacen la siguiente álgebra

$$\left[\frac{\lambda^a}{2}, \frac{\lambda^b}{2} \right] = if^{abc} \frac{\lambda^c}{2}, \tag{2.7}$$

con las constantes del grupo definidas como

$$\begin{aligned} f^{147} = -f^{156} = f^{246} = f^{257} = f^{345} = -f^{367} &= \frac{1}{2}, \\ f^{458} = f^{678} &= \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ f^{123} &= 1 \text{ más permutaciones.} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Y cuyas matrices de Gell-Mann son expresadas por

$$\begin{aligned} \lambda^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda^5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

donde se puede notar que las matrices de Pauli aparecen encapsuladas dentro de las matrices λ^1 , λ^2 y λ^3 , y por ende, estas mismas satisfagan la siguiente subálgebra

$$\left[\frac{\lambda^{\bar{a}}}{2}, \frac{\lambda^{\bar{b}}}{2} \right] = i\epsilon^{\bar{a}\bar{b}\bar{c}} \frac{\lambda^{\bar{c}}}{2}, \quad (2.10)$$

que no es más que el álgebra de $SU(2)$, siendo $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} = 1, 2, 3$. Esto significa que estas tres matrices forman dicho grupo y que la notación $a = 1, \dots, 8$ pueda dividirse en $\bar{a} = 1, 2, 3$ y $\hat{a} = 4, 5, 6, 7, 8$. Con esta distinción se podrá hacer el mapeo de objetos de $SU(3)$ a $SU(2)$ que tengan la etiqueta a en la siguiente subsección.

Por otro lado, los campos escalares en la representación fundamental de $SU(3)$ están contenidos en el siguiente triplete

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \Phi_1(x) \\ \Phi_2(x) \\ \Phi_3(x) \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

donde $\Phi_i(x)$ es un campo escalar complejo. La ley de transformación de este triplete bajo $SU(3)$ es

$$\Phi'(x) = e^{-i\alpha^a \frac{\lambda^a}{2}} \Phi(x), \quad \alpha^a = cte, \quad (2.12)$$

siendo $U = e^{-i\alpha^a \frac{\lambda^a}{2}}$ un elemento de $SU(3)$ y α^a los parámetros del grupo. Además, la lagrangiana invariante bajo $SU(3)$ global es

$$\mathcal{L}_{SU(3)} = (\partial_\mu \Phi)^\dagger (\partial^\mu \Phi) - V(\Phi^\dagger, \Phi), \quad (2.13)$$

donde el potencial tiene la siguiente forma

$$V(\Phi^\dagger, \Phi) = \mu^2 (\Phi^\dagger \Phi) + \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2, \quad (2.14)$$

con λ una constante real y positiva.

Para poder romper la simetría, hay que identificar la configuración de campos que minimizan el potencial (2.14) mediante el cálculo del mínimo de energía (estado base o estado de vacío) del sistema, o sea

$$\frac{\partial V}{\partial \Phi_i} = [\mu^2 + 2\lambda (\Phi^\dagger \Phi)] \Phi_i = 0. \quad (2.15)$$

Considerando que $2\lambda(\Phi^\dagger\Phi) \geq 0$, se pueden notar dos casos con respecto al valor de μ^2 : Si $\mu^2 > 0$, la única solución es $\Phi = 0$, así el mínimo de energía ocurre para los campos igual a cero y por tanto se tenga el caso de una teoría escalar con 6 campos escalares con masa μ , cuyo estado no presenta degeneración. El caso que nos interesa para el cometido de rompimiento de simetría, es cuando $\mu^2 < 0$, en este escenario, la configuración de campos que satisfacen (2.15) y por ende minimizan la energía del sistema cumple la siguiente condición

$$\Phi^\dagger\Phi = -\frac{\mu^2}{2\lambda} \equiv \frac{v^2}{2}, \quad (2.16)$$

que es la ecuación de una hiper-esfera de radio $\frac{v}{\sqrt{2}}$ de dimensión 6 en el espacio de los campos reales que conforman las componentes del triplete (2.11), siendo v la energía del estado base. Esta energía tiene degeneración infinita, pues todos los puntos sobre (2.16) son equivalentes debido a que están relacionados por la transformación (2.12). Es por esta razón que de todos los posibles puntos que conforman (2.16), pueda elegirse una dirección caracterizada por un campo o vector constante que no dependa del espacio-tiempo:

$$\Phi_0. \quad (2.17)$$

Con este vector, se procede a hacer la ruptura de la simetría $SU(3)$ en $SU(2)$, demandando que Φ_0 sea dejado invariante ante la acción de un elemento arbitrario $U = e^{-i\alpha^a \frac{\lambda^a}{2}}$ del subgrupo $SU(2)$

$$U\Phi_0 = \Phi_0 \quad (2.18)$$

lo cual nos dice que

$$\lambda^{\bar{a}}\Phi_0 = 0, \quad (2.19)$$

no así para los demás generadores $\lambda^{\hat{a}}$, ya que en este caso Φ_0 no es dejado invariante. De la ecuación (2.19), la forma explícita del vector constante puede escogerse como

$$\Phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad (2.20)$$

ya que se puede ver que se satisface la relación (2.19).

Ahora, la teoría debe ser desarrollada alrededor del entorno de la configuración de campos que hace mínima a la energía, esto es, debemos implementar la siguiente traslación

$$\Phi \rightarrow \Phi_0 + \Phi(x) = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} + \Phi_3 \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

No obstante, para efectivamente reescribir la teoría bajo $SU(2)$, hay que definir el siguiente mapeo de $\Phi(x)$ a objetos covariantes de $SU(2)$

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \Phi_1(x) \\ \Phi_2(x) \\ \Phi_3(x) \end{pmatrix} \rightarrow \left\{ \phi \equiv \begin{pmatrix} \Phi_1(x) \\ \Phi_2(x) \end{pmatrix}, \phi^0 \equiv \Phi_3(x) \right\}, \quad (2.22)$$

en un doblete y un singlete respectivamente. Después de aplicar este mapeo vemos que

$$(\partial_\mu\Phi(x))^\dagger(\partial^\mu\Phi(x)) = (\partial_\mu\phi)^\dagger(\partial^\mu\phi) + (\partial_\mu\phi^0)^*(\partial^\mu\phi^0),$$

del mismo modo, el potencial (2.14) adopta la forma

$$\begin{aligned} V(\Phi^\dagger, \Phi) &= V(\phi^\dagger, \phi, \phi^{0*}, \phi^0) = \mu^2 (\phi^\dagger \phi + \phi^{0*} \phi^0) + \lambda (\phi^\dagger \phi + \phi^{0*} \phi^0)^2, \\ &= \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 + \lambda (2vH + H^2 + \phi_z^2) \phi^\dagger \phi + \lambda v^2 H^2 \\ &\quad - \frac{\lambda}{4} \left\{ v^2 - \left[4vH (H^2 + \phi_z^2) + (H^2 + \phi_z^2)^2 \right] \right\}, \end{aligned} \quad (2.23)$$

donde se hecho uso de las relaciones $-\frac{\mu^2}{\lambda} = v^2$ y $\phi^0 = \frac{v}{\sqrt{2}} + \Phi_3 \equiv \frac{v+H+i\phi_z}{\sqrt{2}}$, siendo H y ϕ_z campos reales. De esta forma, la lagrangiana (2.13) bajo la perspectiva de $SU(2)$ es

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{SU(2)} &= (\partial_\mu \phi)^\dagger (\partial^\mu \phi) + (\partial_\mu \phi^0)^* (\partial^\mu \phi^0) - \frac{1}{2} 2\lambda v^2 H^2 - \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 - \lambda (2vH + H^2 + \phi_z^2) \phi^\dagger \phi \\ &\quad + \frac{\lambda}{4} \left\{ v^2 - \left[4vH (H^2 + \phi_z^2) + (H^2 + \phi_z^2)^2 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

En esta lagrangiana se nota únicamente la presencia del término de masa del campo H , mientras que los 5 campos escalares restantes; ϕ_z más los que están contenidos en ϕ , carecen de ella. Este número de campos sin masa, coincide con el número de generadores rotos $\lambda^{\hat{a}}$, y que, de acuerdo al teorema de Goldstone, a estos campos les corresponde el nombre de bosones de Goldstone. En cuanto a la masa del campo H cuya expresión es $m_H = \sqrt{2}\lambda v$, se ve que depende de λ un parámetro adimensional, pero más importante de v , que es la escala natural de la teoría, pues fue alrededor de esta cantidad que la simetría $SU(3)$ se rompió en $SU(2)$. Por esto último, también se le conoce como escala de rompimiento espontáneo o de la simetría.

2.3. Rompimiento espontáneo de simetría local: El mecanismo de Higgs

Ahora supongamos que $SU(3)$ es local. En este escenario se debe introducir la derivada covariante. Por lo que la Lagrangiana (2.13) adopta la forma

$$\mathcal{L}_{SU(3)} = (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) - V(\Phi^\dagger, \Phi) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}, \quad (2.25)$$

donde $D_\mu = \partial_\mu - ig \frac{\lambda^a}{2} A_\mu^a$ es la derivada covariante en la representación fundamental, g es la constante de acoplamiento del grupo, $F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$ es el tensor de curvatura de Yang-Mills, y A_μ^a es la conexión de $SU(3)$. Las leyes de transformación de estos dos últimos objetos bajo este grupo son

$$\delta A_\mu^a = D_\mu^{ab} \alpha^b, \quad (2.26)$$

$$\delta F_{\mu\nu}^a = g f^{abc} F_{\mu\nu}^b \alpha^c, \quad (2.27)$$

donde $D_\mu^{ab} = \delta^{ab} \partial_\mu - g f^{abc} A_\mu^c$ es la derivada covariante en la representación adjunta de $SU(3)$.

Como se estableció en la primera subsección, las conexiones A_μ^a y por consecuencia $F_{\mu\nu}^a$ y $D_\mu \Phi$, también deben ser mapeadas a objetos covariantes de $SU(2)$, en este caso, usando $a = \bar{a}, \hat{a}$. Los mapeos son los siguientes. Las conexiones de $SU(3)$ se mapean en conexiones, un doblete y un singlete de $SU(2)$ respectivamente

$$W_\mu^{\bar{a}} = A_\mu^{\bar{a}}, \quad (2.28)$$

$$Y_\mu = \begin{pmatrix} Y_\mu^1 \\ Y_\mu^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} (A_\mu^4 - iA_\mu^5) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (A_\mu^6 - iA_\mu^7) \end{pmatrix}, \quad (2.29)$$

$$Z_\mu = A_\mu^8. \quad (2.30)$$

Como consecuencia de este mapeo, las curvaturas se reescriben como funciones de los nuevos campos de la siguiente forma:

$$F_{\mu\nu}^{\bar{a}} = W_{\mu\nu}^{\bar{a}} + ig \left(Y_{\mu}^{\dagger} \frac{\sigma^{\bar{a}}}{2} Y_{\nu} - Y_{\nu}^{\dagger} \frac{\sigma^{\bar{a}}}{2} Y_{\mu} \right), \quad (2.31)$$

$$Y_{\mu\nu} = D_{\mu} Y_{\nu} - D_{\nu} Y_{\mu} + ig \frac{\sqrt{3}}{2} (Y_{\mu} Z_{\nu} - Y_{\nu} Z_{\mu}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} (F_{\mu\nu}^4 - iF_{\mu\nu}^5) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (F_{\mu\nu}^6 - iF_{\mu\nu}^7) \end{pmatrix}, \quad (2.32)$$

$$\hat{Z}_{\mu\nu} = Z_{\mu\nu} + ig \frac{\sqrt{3}}{2} (Y_{\mu}^{\dagger} Y_{\nu} - Y_{\nu}^{\dagger} Y_{\mu}) = F_{\mu\nu}^8, \quad (2.33)$$

que corresponden a curvaturas, un doblete y un singlete de $SU(2)$ respectivamente.

Antes de mapear a $D_{\mu}\Phi$, es conveniente mostrar la aparición de los términos de masa de los campos de norma asociados con los generadores rotos como sigue: Tras el rompimiento de $SU(3)$ a $SU(2)$, el sector cinético de la lagrangiana $(D_{\mu}\Phi)^{\dagger}(D^{\mu}\Phi)$ o sector de Higgs, se reescribe usando la parte izquierda de (2.21) como

$$(D_{\mu}\Phi)^{\dagger}(D^{\mu}\Phi) = (D_{\mu}\Phi_0)^{\dagger}(D^{\mu}\Phi_0) + (D_{\mu}\Phi_0)^{\dagger}(D^{\mu}\Phi) + (D_{\mu}\Phi)^{\dagger}(D^{\mu}\Phi_0) + (D_{\mu}\Phi)^{\dagger}(D^{\mu}\Phi). \quad (2.34)$$

Haciendo énfasis solamente en $(D_{\mu}\Phi_0)^{\dagger}(D^{\mu}\Phi_0)$ y haciendo uso de los generadores no rotos de $SU(2)$ (2.19), este término es reescrito como

$$(D_{\mu}\Phi_0)^{\dagger}(D^{\mu}\Phi_0) = \frac{g^2}{4} A_{\mu}^{\hat{a}} A^{\hat{b}\mu} \left(\Phi_0^{\dagger} \lambda^{\hat{a}} \lambda^{\hat{b}} \Phi_0 \right), \quad (2.35)$$

donde se puede ver que sobreviven únicamente las conexiones $A_{\mu}^{\hat{a}}$ como productos, y por tanto, se aprecien los términos de masa para los bosones de norma asociados con los generadores rotos, en contraste con los campos $A_{\mu}^{\bar{a}} = W_{\mu}^{\bar{a}}$ que no aparecen como productos cuadráticos. Por lo que se va a esperar que los términos de masa para los campos Y_{μ} y Z_{μ} , surjan de este sector cinético. Con esto en mente, usando (2.29) y considerando que las matrices $\lambda^{\hat{a}}$ realmente actúan sobre ϕ al momento de operar sobre $\Phi = \begin{pmatrix} \phi \\ \phi_0 \end{pmatrix}$, el mapeo de $D_{\mu}\Phi = (\partial_{\mu} - ig \frac{\lambda^a}{2} A_{\mu}^a) \Phi$ hacia objetos de $SU(2)$ es

$$D_{\mu}\Phi = \begin{pmatrix} D'_{\mu}\phi \\ \partial_{\mu}\phi^0 \end{pmatrix} - \frac{ig}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi^0 Y_{\mu} \\ Y_{\mu}^{\dagger} \phi \end{pmatrix} - \frac{ig}{2\sqrt{3}} Z_{\mu} \begin{pmatrix} \phi \\ -2\phi^0 \end{pmatrix}, \quad (2.36)$$

donde $D'_{\mu} = \partial_{\mu} - ig \frac{\sigma^{\bar{a}}}{2} W_{\mu}^{\bar{a}}$ es la derivada covariante en la representación fundamental de $SU(2)$.

De esta forma, el mapeo de punto covariante de los objetos de $SU(3)$ a objetos de $SU(2)$ queda como

$$\Phi \rightarrow \{ \phi, \phi^0 \}, \quad (2.37)$$

$$D_{\mu}\Phi \rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} D_{\mu}\phi \\ \partial_{\mu}\phi^0 \end{pmatrix}, -\frac{ig}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi^0 Y_{\mu} \\ Y_{\mu}^{\dagger} \phi \end{pmatrix}, -\frac{ig}{2\sqrt{3}} Z_{\mu} \begin{pmatrix} \phi \\ -2\phi^0 \end{pmatrix} \right\} \quad (2.38)$$

$$A_{\mu}^a \rightarrow \{ W_{\mu}^{\bar{a}}, Y_{\mu}, Y_{\mu}^{\dagger}, Z_{\mu} \}, \quad (2.39)$$

$$F_{\mu\nu}^a \rightarrow \{ W_{\mu\nu}^{\bar{a}}, Y_{\mu\nu}, Y_{\mu\nu}^{\dagger}, F_{\mu\nu}^8 = \hat{Z}_{\mu\nu} \}, \quad (2.40)$$

que nos ayuda a ocultar la simetría $SU(3)$ en $SU(2)$, y así, usando las ecuaciones (2.22), (2.28)-

(2.30), (2.31)-(2.33) y (2.36), se obtiene la lagrangiana (2.25) vista desde $SU(2)$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{SU(2)} = & (D'_\mu \phi)^\dagger (D'^\mu \phi) + (\partial_\mu \phi^0)^* (\partial^\mu \phi^0) - V(\phi^\dagger, \phi, \phi^{0*}, \phi^0) \\ & - \frac{1}{2} Y_{\mu\nu}^\dagger Y^{\mu\nu} - \frac{1}{4} \hat{Z}_{\mu\nu} \hat{Z}^{\mu\nu} - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^{\bar{a}} W^{\bar{a}\mu\nu} + \dots \\ & + \frac{g^2}{2} (\phi^{0*} \phi^0) Y_\mu^\dagger Y^\mu + \frac{g^2}{12} Z_\mu Z^\mu (4\phi^{0*} \phi^0), \end{aligned} \quad (2.41)$$

donde $V(\phi^\dagger, \phi, \phi^{0*}, \phi^0)$ es el potencial de higgs (2.23). En los últimos dos términos se encuentran los auténticos términos de masa de los campos Y_μ y Z_μ provenientes del sector de Higgs:

$$\frac{g^2}{2} (\phi^{0*} \phi^0) Y_\mu^\dagger Y^\mu = \frac{1}{2} m_Y^2 Y_\mu^\dagger Y^\mu + \dots \quad (2.42)$$

$$\frac{g^2}{12} Z_\mu Z^\mu (4\phi^{0*} \phi^0) = \frac{1}{2} m_Z^2 Z_\mu Z^\mu + \dots \quad (2.43)$$

donde se ha hecho uso de $\phi^0 = \frac{v+H+i\phi_z}{\sqrt{2}}$, y donde se puede notar que los valores de masa de estos campos son $m_Y^2 = \frac{g^2 v^2}{2}$ y $m_Z^2 = \frac{g^2 v^2}{3}$ respectivamente. Note también que estas masas son dadas como el producto de g , la escala de acoplamiento con la escala v .

Por último, analicemos un aspecto del mecanismo de Higgs que jugará un papel fundamental en nuestro estudio del mecanismo de dotación de masa de bosones de norma mediante compactificación de coordenadas extras. Dicho aspecto tiene que ver con las transformaciones de los campos de norma y escalares bajo el grupo $SU(3)$ y su equivalente bajo la perspectiva del subgrupo $SU(2)$. Se tiene que bajo $SU(3)$

$$\delta A_\mu^a = D_\mu^{ab} \alpha^b, \quad (2.44)$$

$$\delta \Phi = -ig\alpha^a \left(\frac{\lambda^a}{2} \right) \Phi. \quad (2.45)$$

Una vez implementado el mapeo canónico de $SU(3)$ a $SU(2)$, la ecuación (2.44) se divide en las siguientes transformaciones de los campos de norma $W_\mu^{\bar{a}}$, Y_μ y Z_μ bajo $SU(2)$

$$\begin{aligned} \delta W_\mu^{\bar{a}} = & D_\mu^{\bar{a}\bar{b}} \alpha^{\bar{b}} - ig \left(\beta^\dagger \frac{\sigma^{\bar{a}}}{2} Y_\mu - Y_\mu^\dagger \frac{\sigma^{\bar{a}}}{2} \beta \right), \\ \delta Y_\mu = & ig \frac{\sigma^{\bar{a}}}{2} \alpha^{\bar{a}} Y_\mu + \left(D'_\mu - ig \frac{\sqrt{3}}{2} Z_\mu \right) \beta + ig \frac{\sqrt{3}}{2} Y_\mu \alpha_z, \\ \delta Z_\mu = & \partial_\mu \alpha_z - ig \frac{\sqrt{3}}{2} (\beta^\dagger Y_\mu - Y_\mu^\dagger \beta), \end{aligned} \quad (2.46)$$

donde $D_\mu^{\bar{a}\bar{b}} = \delta^{\bar{a}\bar{b}} \partial_\mu - g\epsilon^{\bar{a}\bar{b}\bar{c}} W_\mu^{\bar{c}}$ es la derivada covariante en la representación adjunta de $SU(2)$. En las expresiones anteriores, los parámetros de $SU(3)$ han sido divididos en los 3 parámetros de norma $\alpha^{\bar{a}}$, un doblete $\beta = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha^4 - i\alpha^5), \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha^6 - i\alpha^7) \right)$ y un singlete $\alpha_z = \alpha^8$ de $SU(2)$. Estos dos últimos contienen a los parámetros de norma correspondientes a los generadores rotos de $SU(3)$.

Similarmente, mediante el uso de (2.22), la ecuación (2.45) se divide en las siguientes variaciones que representan las transformaciones de ϕ y ϕ^0 bajo $SU(2)$, en términos de $\alpha^{\bar{a}}$, β y α_z

$$\begin{aligned} \delta \phi = & -ig\alpha^{\bar{a}} \left(\frac{\sigma^{\bar{a}}}{2} \right) \phi - \frac{ig}{2\sqrt{3}} \alpha_z \phi - \frac{ig}{\sqrt{2}} \phi^0 \beta, \\ \delta \phi^0 = & -\frac{ig}{\sqrt{2}} \beta^\dagger \phi + \frac{ig}{\sqrt{3}} \alpha_z \phi^0. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Dentro de las transformaciones (2.46) y (2.47), pueden diferenciarse dos tipos específicos de los mismos: estándar y no estándar. Las transformaciones estándar se caracterizan por los parámetros de norma $\alpha^{\bar{a}}$, con β y α_z establecidos en cero. Mientras que las transformaciones no estándar se definen mediante β y α_z , con $\alpha^{\bar{a}}$ fijado en cero. Con esto dicho, las llamadas transformaciones de norma estándar (SGT, por sus siglas en inglés) para el conjunto (2.46) son:

$$\begin{aligned}\delta_s W_\mu^{\bar{a}} &= D_\mu^{\bar{a}\bar{b}} \alpha^{\bar{b}}, \\ \delta_s Y_\mu &= ig \frac{\sigma^{\bar{a}}}{2} \alpha^{\bar{a}} Y_\mu, \\ \delta_s Z_\mu &= 0,\end{aligned}\tag{2.48}$$

de donde se obtienen las transformaciones puras de las conexiones $W_\mu^{\bar{a}}$ bajo $SU(2)$ de la primera ecuación. Del mismo modo, las transformaciones estándar para los campos ϕ y ϕ^0 son:

$$\begin{aligned}\delta_s \phi &= -ig \alpha^{\bar{a}} \left(\frac{\sigma^{\bar{a}}}{2} \right) \phi, \\ \delta_s \phi^0 &= 0,\end{aligned}\tag{2.49}$$

donde ahora, en la primera ecuación se encuentra la variación pura del doblete ϕ de $SU(2)$. Por otro lado, las transformaciones de norma no estándar (NSGT, por sus siglas en inglés) están dadas por:

$$\begin{aligned}\delta_{ns} W_\mu^{\bar{a}} &= -ig \left(\beta^\dagger \frac{\sigma^{\bar{a}}}{2} Y_\mu - Y_\mu^\dagger \frac{\sigma^{\bar{a}}}{2} \beta \right), \\ \delta_{ns} Y_\mu &= \left(D'_\mu - ig \frac{\sqrt{3}}{2} Z_\mu \right) \beta + ig \frac{\sqrt{3}}{2} Y_\mu \alpha_z, \\ \delta_{ns} Z_\mu &= \partial_\mu \alpha_z - ig \frac{\sqrt{3}}{2} (\beta^\dagger Y_\mu - Y_\mu^\dagger \beta),\end{aligned}\tag{2.50}$$

mientras que las transformaciones no estándar de los campos ϕ y ϕ^0 son:

$$\begin{aligned}\delta_{ns} \phi &= -\frac{ig}{2\sqrt{3}} \alpha_z \phi - \frac{ig}{\sqrt{2}} \phi^0 \beta, \\ \delta_{ns} \phi^0 &= -\frac{ig}{\sqrt{2}} \beta^\dagger \phi + \frac{ig}{\sqrt{3}} \phi^0 \alpha_z.\end{aligned}\tag{2.51}$$

Estas dos últimas transformaciones (2.50) y (2.51), están asociadas a los generadores rotos de $SU(3)$, son testimonio de una simetría más amplia que $SU(2)$, en este caso, el mismo $SU(3)$.

Con ayuda de las transformaciones no estándar establecidas anteriormente, se procede primero a eliminar a los campos ϕ y ϕ_z que no tienen términos de masa en la teoría mediante los siguientes parámetros particulares β y α_z dados por

$$\begin{aligned}\beta &= -i \frac{2}{v} \phi, \\ \alpha_z &= -\frac{\sqrt{3}}{v} \phi_z,\end{aligned}\tag{2.52}$$

que al sustituirlos en (2.51) nos resulta $\phi' = 0$ y $\phi'_z = 0$. Debido a lo último, se dice que estos campos no son físicos y, como consecuencia, son eliminados de la lagrangiana (2.41) y pasan a recibir el nombre de pseudo-bosones de Goldstone. Para finalizar, estos mismos parámetros definidos en

(2.52), al sustituirlos en las NSGTs (2.50), nos definen la norma unitaria

$$\begin{aligned}W'_\mu{}^{\bar{a}} &= W_\mu{}^{\bar{a}}, \\Y'_\mu &= Y_\mu - i\frac{2}{v}\partial_\mu\phi, \\Z'_\mu &= Z_\mu - \frac{\sqrt{3}}{2}\partial_\mu\phi_z,\end{aligned}\tag{2.53}$$

cuyas dos últimas ecuaciones nos indican que los pseudo-bosones son absorbidos por los campos Y_μ y Z_μ .

Capítulo 3

La teoría de Maxwell con Dimensiones Extras

En este capítulo se realiza la construcción de una teoría de Maxwell definida sobre una variedad de espacio-tiempo extendida con dimensiones espaciales extras. Luego, mediante la implementación de un esquema de compactificación de las dimensiones extras, se recupera la teoría estándar de Maxwell, además de obtener una torre infinita de excitaciones de Kaluza-Klein del campo electromagnético con su respectivo espectro de masas.

3.1. Estructura de la Teoría Pura de Maxwell

Conviene presentar un breve repaso del contenido del primer capítulo. La teoría de Maxwell se compone de los siguientes elementos definidos en la variedad usual de espacio-tiempo plano \mathcal{M}^4 : La acción de la teoría pura, es decir, sin fuentes, está dada por

$$S_4[A_\mu] = \int d^4x \mathcal{L}_M, \quad (3.1)$$

donde \mathcal{L}_M es la lagrangiana de la teoría libre, dada por

$$\mathcal{L}_M = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (3.2)$$

con el tensor de Maxwell $F_{\mu\nu}(x)$ dado en términos del campo electromagnético $A_\mu(x)$

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) = -F_{\nu\mu}(x). \quad (3.3)$$

Al campo electromagnético $A_\mu(x)$ también se le conoce con el nombre de campo de norma o conexión, en virtud de que define la derivada covariante asociada con el grupo de norma electromagnético $U_Q(1, \mathcal{M}^4)$.

La teoría se encuentra gobernada por el grupo de simetría $ISO(1, 3) \times U_Q(1, \mathcal{M}^4)$, cuyos elementos asignan las siguientes leyes de transformación a las conexiones y curvaturas. Bajo $SO(1, 3)$, $A_\mu(x)$ y $F_{\mu\nu}(x)$ se transforman, respectivamente, como tensores de rango 2 y 1:

$$F'_{\mu\nu}(x) = \Lambda_\mu^\lambda \Lambda_\nu^\rho F_{\lambda\rho}(x), \quad (3.4)$$

$$A'_\mu(x) = \Lambda_\mu^\nu A_\nu(x), \quad (3.5)$$

La teoría de Maxwell con Dimensiones Extras

3.1 Estructura de la Teoría Pura de Maxwell

donde Λ_ν^μ es un elemento del grupo de Lorentz. Por otra parte, los elementos de $U_Q(1, \mathcal{M}^4)$, denotados por $U(x) = e^{ie\alpha(x)}$ (siendo $\alpha(x)$ los parámetros del grupo y e la carga eléctrica), asignan las siguientes leyes de transformación a las conexiones y curvaturas

$$A'_\mu(x) = U(x)A_\mu(x)U(x)^\dagger - \frac{i}{e}(\partial_\mu U(x))U(x)^\dagger, \quad (3.6)$$

$$F'_{\mu\nu}(x) = F_{\mu\nu}(x). \quad (3.7)$$

La ecuación (3.6) define la transformación del campo electromagnético A_μ , la cual se puede escribir como

$$\delta A_\mu(x) = \partial_\mu \alpha(x). \quad (3.8)$$

Todas estas transformaciones, junto con la no dependencia explícita de la lagrangiana (3.2) sobre las coordenadas x_μ , aseguran que el grupo $ISO(1, 3) \times U_Q(1, \mathcal{M}^4)$ deje invariante a la lagrangiana (3.2).

Ahora establezcamos la teoría de Maxwell extendida con dimensiones extras. Consideremos que esta teoría es válida a una escala de energía Λ mucho mayor que la escala de compactificación R^{-1} , con R el tamaño promedio de las dimensiones extras ($\Lambda \gg R^{-1}$). En la escala Λ , las distancias exploradas del orden Λ^{-1} , son tan pequeñas comparadas con el tamaño de las dimensiones extras R , que estas últimas pueden ser consideradas como infinitas. Así, a estas escalas de distancia, podemos asumir que la teoría es gobernada por el grupo extendido de Poincaré $ISO(1, 3 + n)$, donde n es el número de dimensiones extras. Al mismo tiempo, la dinámica de la teoría es gobernada por el grupo de norma $U_Q(1, \mathcal{M}^{n+4})$ extendido a la variedad soporte de espacio-tiempo \mathcal{M}^{4+n} . Esta variedad es definida como el producto cartesiano de la variedad usual de espacio-tiempo \mathcal{M}^4 con la variedad \mathcal{N}^n , siendo esta última, una variedad euclidiana de dimensión n que representa las dimensiones extras. De esta manera, los puntos de la variedad \mathcal{M}^{4+n} son denotados por (x, \bar{x}) , siendo $x \in \mathcal{M}^4$ y $\bar{x} \in \mathcal{N}^n$. La métrica ahora es caracterizada por $g = \text{diag}\{1, -1, -1, \dots\}$, cuyas componentes se escriben como g_{MN} y donde los índices de Lorentz toman los valores $M = 0, \dots, 3; 5, 6, \dots, n+4 \equiv \mu; \bar{\mu}$. En resumen, en la escala Λ , la teoría efectiva es gobernada por el grupo $ISO(1, 3+n) \times U_Q(1, \mathcal{M}^{4+n})$, cuya variedad de soporte es \mathcal{M}^{4+n} .

La análoga $(4 + n)$ -dimensional de la teoría de Maxwell es dada por la siguiente acción

$$S_{4+n}[A_M] = \int d^4x d^n \bar{x} \mathcal{L}_{\mathcal{M}^{4+n}}. \quad (3.9)$$

La lagrangiana de Maxwell extendida, que tampoco depende explícitamente de las coordenadas de \mathcal{M}^{4+n} , tiene la forma

$$\mathcal{L}_{\mathcal{M}^{4+n}} = -\frac{1}{4} \mathcal{F}_{MN} \mathcal{F}^{MN}, \quad (3.10)$$

donde la curvatura es dada por

$$\mathcal{F}_{MN}(x, \bar{x}) = \partial_M \mathcal{A}_N(x, \bar{x}) - \partial_N \mathcal{A}_M(x, \bar{x}) = -\mathcal{F}_{NM}(x, \bar{x}), \quad (3.11)$$

con $\mathcal{A}_N(x, \bar{x})$ el campo de norma extendido.

Como se mencionó anteriormente, el grupo de simetría ahora es $ISO(1, 3 + n) \times U_Q(1, \mathcal{M}^{4+n})$, cuyos elementos asignan las siguientes leyes de transformación a las nuevas curvaturas y conexiones. Bajo $SO(1, 3 + n)$, las conexiones y las curvaturas se transforman como

$$\mathcal{A}'_M(x, \bar{x}) = \Lambda_M^N \mathcal{A}_N(x, \bar{x}), \quad (3.12)$$

$$\mathcal{F}'_{MN}(x, \bar{x}) = \Lambda_M^A \Lambda_N^B \mathcal{F}_{AB}(x, \bar{x}), \quad (3.13)$$

siendo Λ_M^N un elemento de $SO(1, 3 + n)$. Note que los grupos $U_Q(1, \mathcal{M}^{4+n})$ y $U_Q(1, \mathcal{M}^4)$ coinciden como grupos de Lie, pues los elementos de $U_Q(1, \mathcal{M}^{4+n})$ siguen siendo denotados por $U = e^{ie_{4+n}\alpha(x, \bar{x})}$ (con las diferencias de que ahora; los parámetros del grupo están definidos sobre \mathcal{M}^{4+n} y tienen unidades de masa $[masa]^{\frac{n}{2}}$; el número de campos de norma de este grupo es más grande; y la carga eléctrica extradimensional e_{4+n} , a diferencia de la carga eléctrica e , tiene dimensiones de masa $[masa]^{-\frac{n}{2}}$). Así, las leyes de transformación de las nuevas conexiones y curvaturas, lucen como las leyes del grupo $U_Q(1, \mathcal{M}^4)$

$$\mathcal{A}'_M(x, \bar{x}) = U(x, \bar{x})\mathcal{A}_M(x, \bar{x})U^\dagger(x, \bar{x}) - \frac{i}{e_{4+n}}(\partial_M U(x, \bar{x}))U^\dagger(x, \bar{x}), \quad (3.14)$$

$$\mathcal{F}'_{NM}(x, \bar{x}) = \mathcal{F}_{NM}(x, \bar{x}). \quad (3.15)$$

Y que al igual que en el caso cuadridimensional, la ecuación (3.14) define la transformación del campo electromagnético extendido

$$\delta\mathcal{A}_M(x, \bar{x}) = \partial_M\alpha(x, \bar{x}). \quad (3.16)$$

Las transformaciones anteriores, junto con la no dependencia explícita de la lagrangiana (3.10) sobre las coordenadas de la variedad \mathcal{M}^{4+n} , hacen que el grupo $ISO(1, 3 + n) \times U_Q(1, \mathcal{M}^{4+n})$ deje invariante la misma.

3.2. Constantes de movimiento asociadas con el grupo $ISO(1, 3 + n)$

Sobre la variedad \mathcal{M}^{4+n} , el grupo de Poincaré extendido $ISO(1, n + 3)$ está definido por $\frac{1}{2}(n + 4)(n + 5)$ generadores. $n + 4$ de estos generadores pertenecen al grupo de las traslaciones $T(1, n + 3)$ y son denotados por P_M . Mientras que los $\frac{1}{2}(n + 4)(n + 3)$ generadores restantes, denotados por J_{MN} , están asociados con el grupo de Lorentz $SO(1, n + 3)$. Todos estos generadores satisfacen la siguiente álgebra de Poincaré extendida

$$[P_M, P_N] = 0, \quad (3.17)$$

$$[J_{MN}, P_R] = i(g_{MR}P_N - g_{NR}P_M), \quad (3.18)$$

$$[J_{MN}, J_{RS}] = i(g_{MR}J_{NS} - g_{MS}J_{NR} - g_{NR}J_{MS} + g_{NS}J_{MR}). \quad (3.19)$$

Donde puede notarse que existen dos subálgebras principales. Una correspondiente al grupo estándar de Poincaré y otra asociada con el grupo ortogonal inhomogéneo $ISO(n)$ en n dimensiones. En el caso de la subálgebra de Poincaré estándar, las relaciones son:

$$[P_\mu, P_\nu] = 0, \quad (3.20)$$

$$[J_{\mu\nu}, P_\rho] = i(g_{\mu\rho}P_\nu - g_{\nu\rho}P_\mu), \quad (3.21)$$

$$[J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}] = i(g_{\mu\rho}J_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}J_{\nu\rho} - g_{\nu\rho}J_{\mu\sigma} + g_{\nu\sigma}J_{\mu\rho}). \quad (3.22)$$

Mientras que en el caso de la subálgebra asociada con el grupo ortogonal inhomogéneo $ISO(n)$, tenemos

$$[P_{\bar{\mu}}, P_{\bar{\nu}}] = 0, \quad (3.23)$$

$$[J_{\bar{\mu}\bar{\nu}}, P_{\bar{\rho}}] = i(\delta_{\bar{\mu}\bar{\rho}}P_{\bar{\nu}} - \delta_{\bar{\nu}\bar{\rho}}P_{\bar{\mu}}), \quad (3.24)$$

$$[J_{\bar{\mu}\bar{\nu}}, J_{\bar{\rho}\bar{\sigma}}] = i(\delta_{\bar{\mu}\bar{\rho}}J_{\bar{\nu}\bar{\sigma}} - \delta_{\bar{\mu}\bar{\sigma}}J_{\bar{\nu}\bar{\rho}} - \delta_{\bar{\nu}\bar{\rho}}J_{\bar{\mu}\bar{\sigma}} + \delta_{\bar{\nu}\bar{\sigma}}J_{\bar{\mu}\bar{\rho}}). \quad (3.25)$$

Al identificar a P_0 como el hamiltoniano del sistema, se deduce de las ecuaciones (3.17) y (3.18) que todos los generadores del grupo inhomogéneo $ISO(n)$ denotados por $P_{\bar{\mu}}$ y $J_{\bar{\mu}\bar{\nu}}$, resultan ser

constantes de movimiento. Este hecho juega un papel central en el trabajo, pues nos asegura que el invariante de Casimir, asociado a $T(n)$ y definido como $\bar{P}^2 = P_{\bar{\mu}}P_{\bar{\mu}}$, nos va a proveer de un conjunto de funciones ortogonales que determinan 1) un mapeo canónico que nos lleva de la teoría en dimensiones extra a la teoría usual en cuatro dimensiones y 2) un espectro de masa para los modos de Kaluza-Klein.

3.3. Ocultamiento de la simetría extendida

Ya establecida la Teoría de Maxwell extendida sobre dimensiones extras, debemos ahora establecer las condiciones bajo las cuales podemos hacer contacto con la teoría conocida en cuatro dimensiones. Para hacer eso, es necesario ocultar la simetría $ISO(1, 3 + n) \times U_Q(1, \mathcal{M}^{4+n})$ en la simetría $ISO(1, 3) \times U_Q(1, \mathcal{M}^4)$ a través del ocultamiento de $ISO(1, 3 + n)$ en $ISO(1, 3)$, ya que implícito a esto, está el paso de $U_Q(1, \mathcal{M}^{4+n})$ a $U_Q(1, \mathcal{M}^4)$. Dicho ocultamiento debe darse por medio de transformaciones canónicas. La primera (la cual puede ser fácilmente elevada al espacio fase) es un mapeo de objetos covariantes de $SO(1, 3 + n)$ a objetos covariantes de sus subgrupos $\{SO(1, 3), SO(n)\}$

$$\begin{aligned} SO(1, 3 + n) &\longmapsto \{SO(1, 3), SO(n)\} \\ \mathcal{A}_M(x, \bar{x}) &\longmapsto \{\mathcal{A}_\mu(x, \bar{x}), \mathcal{A}_{\bar{\mu}}(x, \bar{x})\}, \end{aligned} \quad (3.26)$$

donde desde cada subgrupo, las componentes $\mathcal{A}_\mu(x, \bar{x})$ y $\mathcal{A}_{\bar{\mu}}(x, \bar{x})$, pueden verse de la siguiente manera: Bajo $SO(1, 3)$, las componentes \mathcal{A}_μ son vectores y $\mathcal{A}_{\bar{\mu}}$ escalares. Mientras que bajo $SO(n)$, las componentes $\mathcal{A}_{\bar{\mu}}$ son vectores y \mathcal{A}_μ escalares.

El mapeo (3.26), al actuar sobre la ecuación (3.11), conduce a la siguiente descomposición de las curvaturas extendidas:

$$\mathcal{F}_{MN}(x, \bar{x}) \rightarrow \{\mathcal{F}_{\mu\nu}(x, \bar{x}), \mathcal{F}_{\mu\bar{\nu}}(x, \bar{x}), \mathcal{F}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}(x, \bar{x})\}, \quad (3.27)$$

o sea, obtenemos tres ecuaciones correspondientes a las definiciones de $\mathcal{F}_{\mu\nu}(x, \bar{x})$, $\mathcal{F}_{\mu\bar{\nu}}(x, \bar{x})$ y $\mathcal{F}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}(x, \bar{x})$ respectivamente:

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}(x, \bar{x}) = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu(x, \bar{x}) - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu(x, \bar{x}), \quad (3.28)$$

$$\mathcal{F}_{\mu\bar{\nu}}(x, \bar{x}) = \partial_{\bar{\mu}} \mathcal{A}_\nu(x, \bar{x}) - \partial_\nu \mathcal{A}_{\bar{\mu}}(x, \bar{x}), \quad (3.29)$$

$$\mathcal{F}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}(x, \bar{x}) = \partial_{\bar{\mu}} \mathcal{A}_{\bar{\nu}}(x, \bar{x}) - \partial_{\bar{\nu}} \mathcal{A}_{\bar{\mu}}(x, \bar{x}), \quad (3.30)$$

donde $\mathcal{F}_{\mu\nu}(x, \bar{x})$, $\mathcal{F}_{\mu\bar{\nu}}(x, \bar{x})$ y $\mathcal{F}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}(x, \bar{x})$, se transforman como un 2-tensor (escalar), 1-tensor (1-tensor) y escalar (2-tensor) bajo los grupos $SO(1, 3)(SO(n))$ respectivamente.

El mapeo (3.27) nos permite reescribir la acción extendida (3.9) en la siguiente acción:

$$S = -\frac{1}{4} \int d^4 x d^n \bar{x} [\mathcal{F}_{\mu\nu}(x, \bar{x})\mathcal{F}^{\mu\nu}(x, \bar{x}) + 2\mathcal{F}_{\mu\bar{\nu}}(x, \bar{x})\mathcal{F}^{\mu\bar{\nu}}(x, \bar{x}) + \mathcal{F}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}(x, \bar{x})\mathcal{F}^{\bar{\mu}\bar{\nu}}(x, \bar{x})], \quad (3.31)$$

la cual es invariante bajo los grupos $SO(1, 3)(SO(n))$. Aunque desde estas perspectivas la simetría $SO(1, 3 + n)$ parece haber desaparecido, en realidad ha sido ocultada por el mapeo canónico (3.26), y por esto mismo, uno puede regresar trivialmente a la acción (3.9).

Así como ocurrió en el mapeo (3.27), el mapeo (3.26) separa la transformación de \mathcal{A}_M , ecuación (3.16), en dos expresiones idénticas para las componentes $\mathcal{A}_\mu(x, \bar{x})$ y $\mathcal{A}_{\bar{\mu}}(x, \bar{x})$

$$\delta \mathcal{A}_\mu(x, \bar{x}) = \partial_\mu \alpha(x, \bar{x}), \quad (3.32)$$

$$\delta \mathcal{A}_{\bar{\mu}}(x, \bar{x}) = \partial_{\bar{\mu}} \alpha(x, \bar{x}). \quad (3.33)$$

Mientras que la transformación de $\mathcal{F}_{NM}(x, \bar{x})$, ecuación (3.15), es separada en tres expresiones idénticas para las curvaturas $\mathcal{F}_{\mu\nu}(x, \bar{x})$, $\mathcal{F}_{\mu\bar{\nu}}(x, \bar{x})$ y $\mathcal{F}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}(x, \bar{x})$ respectivamente. Estas transformaciones resultantes aún son transformaciones de $U_Q(1, \mathcal{M}^{n+4})$, pues todavía se puede regresar a las ecuaciones (3.14) y (3.15). Lo que significa que la acción (3.31) todavía es gobernada por $U_Q(1, \mathcal{M}^{4+n})$.

Hasta ahora, el mapeo (3.26) ha acomodado objetos de $SO(1, 3 + n)$ en objetos de $SO(1, 3)$ y $SO(n)$. No obstante, para hacer la transición completa de la simetría extendida a la estándar, hay que eliminar cualquier dependencia de la coordenada \bar{x} de la teoría. Para realizar este paso no trivial (pues las coordenadas \bar{x} enumeran grados de libertad en la teoría extendida), hay que definir un segundo mapeo canónico que elimine cualquier rol dinámico del subgrupo $ISO(n)$. Supongamos que se ha implementado algún esquema de compactificación en la variedad compacta, y sea $\{f^{(\underline{m})}(\bar{x})\}$ un conjunto completo de funciones ortogonales definidas sobre esta variedad. Entonces, los campos $\mathcal{A}_\mu(x, \bar{x})$, $\mathcal{A}_{\bar{\mu}}(x, \bar{x})$ y los parámetros de norma $\alpha(x, \bar{x})$, pueden descomponerse a través de una serie general de Fourier

$$\mathcal{A}_\mu(x, \bar{x}) = \sum_{(\underline{m})} f^{(\underline{m})}(\bar{x}) A_\mu^{(\underline{m})}(x), \quad (3.34)$$

$$\mathcal{A}_{\bar{\mu}}(x, \bar{x}) = \sum_{(\underline{m})} f^{(\underline{m})}(\bar{x}) A_{\bar{\mu}}^{(\underline{m})}(x), \quad (3.35)$$

$$\alpha(x, \bar{x}) = \sum_{(\underline{m})} f^{(\underline{m})}(\bar{x}) \alpha^{(\underline{m})}(x), \quad (3.36)$$

con expresiones análogas para Π_μ y $\Pi_{\bar{\mu}}$, los campos canónicos conjugados de $\mathcal{A}_\mu(x, \bar{x})$ y $\mathcal{A}_{\bar{\mu}}(x, \bar{x})$ respectivamente, siendo el símbolo $\sum_{(\underline{m})}$ una suma de Fourier especial (la definición explícita de la suma se encuentra en el anexo), donde (\underline{m}) representa de manera colectiva modos de Fourier. En el mapeo de arriba, los grados de libertad están caracterizados por el conjunto infinito de campos $[A_\mu^{(\underline{m})}(x), A_{\bar{\mu}}^{(\underline{m})}(x)]$, contrario a las funciones $f^{(\underline{m})}(\bar{x})$ que no representan grados de libertad. Suponiendo que este conjunto de funciones está normalizado, los mapeos anteriores pueden ser invertidos:

$$\begin{aligned} A_\mu^{(\underline{m})}(x) &= \int d^n \bar{x} f^{(\underline{m})}(\bar{x}) \mathcal{A}_\mu(x, \bar{x}), \\ A_{\bar{\mu}}^{(\underline{m})}(x) &= \int d^n \bar{x} f^{(\underline{m})}(\bar{x}) \mathcal{A}_{\bar{\mu}}(x, \bar{x}), \\ \alpha^{(\underline{m})}(x) &= \int d^n \bar{x} f^{(\underline{m})}(\bar{x}) \alpha(x, \bar{x}). \end{aligned} \quad (3.37)$$

Por otra parte, en términos del par canónico $\mathcal{A}_M(x, \bar{x})$ y $\Pi_M(x, \bar{x})$, el paréntesis de Poisson fundamental está dado por:

$$\{\mathcal{A}_M(x, \bar{x}), \Pi_N(x', \bar{x}')\} = \delta_{MN} \delta(\vec{x} - \vec{x}') \delta(\bar{x} - \bar{x}'), \quad (3.38)$$

el cual, debido al primer mapeo, se desdobra en los siguientes paréntesis:

$$\{\mathcal{A}_\mu(x, \bar{x}), \Pi_\nu(x, \bar{x})\} = \delta_{\mu\nu} \delta(\vec{x} - \vec{x}') \delta(\bar{x} - \bar{x}'), \quad (3.39)$$

$$\{\mathcal{A}_{\bar{\mu}}(x, \bar{x}), \Pi_{\bar{\nu}}(x, \bar{x})\} = \delta_{\bar{\mu}\bar{\nu}} \delta(\vec{x} - \vec{x}') \delta(\bar{x} - \bar{x}'). \quad (3.40)$$

De estas expresiones, es fácil obtener los corchetes de Poisson para los nuevos campos $[A_\mu^{(\underline{m})}(x), A_{\bar{\mu}}^{(\underline{m})}(x)]$. En efecto, sustituyendo los mapeos (3.34), (3.35), y sus análogos conjugados en los dos corchetes anteriores, y después usar la ortonormalidad de las funciones $\{f^{(\underline{m})}(\bar{x})\}$

junto con la ecuación (3.37), se obtiene

$$\begin{aligned} \left\{ A_{\mu}^{(m)}(x), \pi_{\nu}^{(n)}(x') \right\} &= \delta^{(m)(n)} \delta_{\mu\nu} \delta(\vec{x} - \vec{x}'), \\ \left\{ A_{\bar{\mu}}^{(m)}(x), \pi_{\bar{\nu}}^{(n)}(x') \right\} &= \delta^{(m)(n)} \delta_{\bar{\mu}\bar{\nu}} \delta(\vec{x} - \vec{x}'), \end{aligned} \quad (3.41)$$

donde el símbolo $\delta^{(m)(n)}$ se define como el siguiente producto de deltas de Kronecker:

$$\delta^{(m)(n)} = \delta^{r_1, s_1} \delta^{r_2, s_2} \dots \delta^{r_n, s_n}. \quad (3.42)$$

Este resultado muestra que las transformaciones dadas por (3.34) y (3.35) realmente corresponden a mapeos canónicos. Cabe destacar que este resultado no depende del esquema de compactificación utilizado, sino únicamente de la completitud de la base $\{f^{(m)}(\bar{x})\}$.

Los mapeos canónicos dados por (3.34) y (3.35) claramente preservan la esencia covariante del primer mapeo, pues los campos $A_{\mu}^{(m)}(x)$ y $A_{\bar{\mu}}^{(m)}(x)$ se transforman como vectores y escalares bajo el grupo $SO(1,3)$ respectivamente. No obstante, aún no está claro cómo estos objetos se transforman bajo el grupo estándar de norma $U_Q(1, \mathcal{M}^4)$. Para clarificar esto, es importante notar que la función constante $f^{(0)}$, que no depende de la geometría de la variedad compacta, podría ser parte del conjunto completo de las funciones $\{f^{(m)}(\bar{x})\}$ [27]. Supongamos que esta función constante pertenece al conjunto completo de funciones. Entonces, las transformaciones de Fourier (3.34), (3.35) y (3.36) se reescriben como

$$\mathcal{A}_{\mu}(x, \bar{x}) = f^{(0)} A_{\mu}^{(0)}(x) + \sum_{(m)} f^{(m)}(\bar{x}) A_{\mu}^{(m)}(x), \quad (3.43)$$

$$\mathcal{A}_{\bar{\mu}}(x, \bar{x}) = f^{(0)} A_{\bar{\mu}}^{(0)}(x) + \sum_{(m)} f^{(m)}(\bar{x}) A_{\bar{\mu}}^{(m)}(x), \quad (3.44)$$

$$\alpha(x, \bar{x}) = f^{(0)} \alpha^{(0)}(x) + \sum_{(m)} f^{(m)}(\bar{x}) \alpha^{(m)}(x), \quad (3.45)$$

donde las cantidades con la forma $\phi^{(0)}(x)$ y $\phi^{(m)}(x)$ representan las componentes de los campos o parámetros de norma a lo largo de $f^{(0)}$ y $f^{(m)}(\bar{x})$ respectivamente. Sustituyendo los mapeos de arriba en las transformaciones de norma (3.32) y (3.33), y luego usando la ortogonalidad del conjunto de funciones $\{f^{(0)}, f^{(m)}(\bar{x})\}$, se obtienen

$$\delta A_{\mu}^{(0)}(x) = \partial_{\mu} \alpha^{(0)}(x), \quad (3.46)$$

$$\delta A_{\mu}^{(m)}(x) = \partial_{\mu} \alpha^{(m)}(x), \quad (3.47)$$

$$\delta A_{\bar{\mu}}^{(0)}(x) = \sum_{(p)} \left(\int d^n \bar{x} f^{(0)} \partial_{\bar{\mu}} f^{(p)}(\bar{x}) \right) \alpha^{(p)}(x), \quad (3.48)$$

$$\delta A_{\bar{\mu}}^{(m)}(x) = \sum_{(p)} \left(\int d^n \bar{x} f^{(m)}(\bar{x}) \partial_{\bar{\mu}} f^{(p)}(\bar{x}) \right) \alpha^{(p)}(x). \quad (3.49)$$

Si identificamos a $\alpha^{(0)}(x)$ como los parámetros del grupo usual $U_Q(1, \mathcal{M}^4)$ y tomamos los parámetros excitados $\alpha^{(m)}(x) = 0$, las ecuaciones (3.46)-(3.49) toman la forma

$$\delta A_{\mu}^{(0)}(x) = \partial_{\mu} \alpha^{(0)}(x), \quad (3.50)$$

$$\delta A_{\mu}^{(m)}(x) = 0, \quad (3.51)$$

$$\delta A_{\bar{\mu}}^{(0)}(x) = 0, \quad (3.52)$$

$$\delta A_{\bar{\mu}}^{(m)}(x) = 0, \quad (3.53)$$

las cuales indican que los campos $A_\mu^{(0)}(x)$ se transforma como campos de norma, mientras que $A_\mu^{(m)}(x)$, $A_{\bar{\mu}}^{(0)}(x)$ y $A_{\bar{\mu}}^{(m)}(x)$ se transforman como campos de materia, o sea, en este caso como escalares bajo $U_Q(1, \mathcal{M}^4)$, por lo que pueden ser dotados de masa. Así como en el estudio del mecanismo de Higgs presentado en el capítulo anterior, se les llamó SGT a las transformaciones caracterizadas por los parámetros $\alpha^{\bar{a}}$, a las transformaciones caracterizadas por los parámetros $\alpha^{(0)}(x)$ también se les llamará transformaciones de norma estándar (SGT), que las distinguirá de las transformaciones caracterizadas por los parámetros $\alpha^{(m)}(x)$.

Ahora, la recuperación de la teoría usual en el límite $R \rightarrow 0$, requiere que se satisfaga el hecho de que no haya campos escalares en la teoría usual, es decir, la presencia de estos debe ser exclusiva de la existencia de las dimensiones extras. Por lo que para poder establecer el vínculo que nos permita recuperar la teoría estándar, hay que usar el hecho de que la única función que no depende de los detalles geométricos de la variedad compacta es la función $f^{(0)}$, hecho que nos lleva a postular lo siguiente: *en general, solo los campos con contraparte estándar pueden tener componentes a lo largo de $f^{(0)}$* . Esto asegura que la teoría estándar no va a estar vinculada a los detalles geométricos de la variedad compacta. Luego, el mismo hecho de que la función constante no tenga detalles geométricos de la variedad compacta, implica que la misma es trivialmente par bajo el intercambio de $\bar{x} \rightarrow -\bar{x}$, lo que sugiere que la base de funciones $\{f^{(0)}, f^{(m)}(\bar{x})\}$ puede ser separada en dos bases de funciones independientes: una conteniendo las funciones bases pares $\{f_E^{(0)}, f_E^{(m)}(\bar{x})\}$, y otra conteniendo las funciones impares $\{f_O^{(m)}(\bar{x})\}$. Con este punto de vista adicional, nuestro postulado puede enunciarse de manera equivalente: *Todo campo con contraparte estándar es par bajo la reflexión $\bar{x} \rightarrow -\bar{x}$, mientras que aquellos sin contraparte estándar son impares con respecto a esta transformación*. Como resultado de este último postulado, las ecuaciones (3.43), (3.44) y (3.45) se reescriben como

$$\mathcal{A}_\mu(x, \bar{x}) = f_E^{(0)} A_\mu^{(0)}(x) + \sum_{(m)} f_E^{(m)}(\bar{x}) A_\mu^{(m)}(x), \quad (3.54)$$

$$\mathcal{A}_{\bar{\mu}}(x, \bar{x}) = \sum_{(m)} f_O^{(m)}(\bar{x}) A_{\bar{\mu}}^{(m)}(x), \quad (3.55)$$

$$\alpha(x, \bar{x}) = f_E^{(0)} \alpha^{(0)}(x) + \sum_{(m)} f_E^{(m)}(\bar{x}) \alpha^{(m)}(x). \quad (3.56)$$

De esta manera, eliminamos la ecuación (3.48) y nos quedan las siguientes transformaciones

$$\delta A_\mu^{(0)}(x) = \partial_\mu \alpha^{(0)}(x), \quad (3.57)$$

$$\delta A_\mu^{(m)}(x) = \partial_\mu \alpha^{(m)}(x), \quad (3.58)$$

$$\delta A_{\bar{\mu}}^{(m)}(x) = \sum_{(p)} \left(\int d^n \bar{x} f_O^{(m)}(\bar{x}) \partial_{\bar{\mu}} f_E^{(p)}(\bar{x}) \right) \alpha^{(p)}(x). \quad (3.59)$$

Luego, haciendo $\alpha^{(m)}(x) = 0$ en las transformaciones anteriores, obtenemos nuestras nuevas (SGT)

$$\delta_s A_\mu^{(0)}(x) = \partial_\mu \alpha^{(0)}(x), \quad (3.60)$$

$$\delta_s A_\mu^{(m)}(x) = 0, \quad (3.61)$$

$$\delta_s A_{\bar{\mu}}^{(m)}(x) = 0, \quad (3.62)$$

estas leyes de transformación, que son las transformaciones definitivas de $U_Q(1, \mathcal{M}^4)$, nos permiten identificar a los campos $A_\mu^{(0)}(x)$ como los campos de norma del grupo $U_Q(1, \mathcal{M}^4)$, mientras que a los campos $A_\mu^{(m)}(x)$ y $A_{\bar{\mu}}^{(m)}(x)$ se les identifica como invariantes o de materia.

Del mismo modo que los parámetros $\alpha^{(0)}(x)$ caracterizan las SGTs, los parámetros $\alpha^{(m)}(x)$ también definen transformaciones, a las cuales se les dará el nombre de transformaciones de norma no estándar (NSGT). Entonces, haciendo $\alpha^{(0)}(x) = 0$ en las ecuaciones (3.57)-(3.59), obtenemos

$$\delta_{ns} A_{\mu}^{(0)}(x) = 0, \quad (3.63)$$

$$\delta_{ns} A_{\mu}^{(m)}(x) = \partial_{\mu} \alpha^{(m)}(x), \quad (3.64)$$

$$\delta_{ns} A_{\bar{\mu}}^{(m)}(x) = \sum_{(p)} \left(\int d^n \bar{x} f_O^{(m)}(\bar{x}) \partial_{\bar{\mu}} f_E^{(p)}(\bar{x}) \right) \alpha^{(p)}(x). \quad (3.65)$$

Para interpretar a estas transformaciones, nuevamente conviene recordar del estudio del mecanismo de Higgs presentado en el capítulo anterior que, cuando un mapeo conecta dos grupos de Lie diferentes, esto es, conecta un grupo de norma G ($SU(3)$) a uno de sus subgrupos H ($SU(2)$), los parámetros análogos a $\alpha^{(m)}(x)$ (β y α_z) están asociados con los generadores de G que no pertenecen a H . Aunque en nuestro caso, el mapeo es entre dos grupos de norma que son idénticos como grupos de Lie, en ambos casos, la presencia de estos parámetros nos dice que hay una simetría de norma más grande.

Con esto, hemos completado el proceso de ocultar la simetría $\{ISO(1, 3+n), U_Q(1, \mathcal{M}^{4+n})\}$ en la simetría $\{ISO(1, 3), U_Q(1, \mathcal{M}^4)\}$ a través de las transformaciones canónicas (3.26), (3.54), (3.55) y las transformaciones de los parámetros de norma (3.56). Las conexiones $\mathcal{A}_M(x, \bar{x})$ han sido mapeadas en un conjunto infinito de campos $[A_{\mu}^{(0)}(x), A_{\mu}^{(m)}(x), A_{\bar{\mu}}^{(m)}(x)]$. Hemos mostrado que los campos $A_{\mu}^{(0)}(x)$ corresponden a las conexiones del grupo $U_Q(1, \mathcal{M}^4)$, mientras que el conjunto infinito de campos $[A_{\mu}^{(m)}(x), A_{\bar{\mu}}^{(m)}(x)]$ puede entenderse como las excitaciones KK de $A_{\bar{\mu}}^{(0)}(x)$ los cuales son invariantes bajo $U_Q(1, \mathcal{M}^4)$.

Como se vió en el capítulo anterior, cuando un mapeo conecta una simetría de norma G a uno de sus subgrupos H , las conexiones de G se separan en dos conjuntos de campos que, bajo la perspectiva de H , corresponden a conjuntos de campos de norma y de materia respectivamente. De este modo, desde la perspectiva del subgrupo H , los campos de materia pueden ser dotados de masa vía el rompimiento espontáneo de simetría. En nuestro caso, bajo la perspectiva de $U_Q(1, \mathcal{M}^4)$, los campos que se transforman como campos de materia son $[A_{\mu}^{(m)}(x), A_{\bar{\mu}}^{(m)}(x)]$, por lo que trivialmente pueden ser dotados de masa. Pero ¿Cuál es instrumento análogo al rompimiento espontáneo de simetría que nos permite dotar de masa a estos campos? La pregunta será respondida a continuación.

3.4. Espectro de masas

El mecanismo que permite dotar de masa (proporcional a la escala de compactificación R^{-1}) a los campos de norma $A_{\mu}^{(m)}$ y a los campos escalares $A_{\bar{\mu}}^{(m)}$, se encuentra contenido en la estructura misma de la teoría. De las ecuaciones (3.28), (3.29) y (3.30), puede notarse que las curvaturas $\mathcal{F}_{\mu\nu}(x, \bar{x})$, $\mathcal{F}_{\mu\bar{\nu}}(x, \bar{x})$ y $\mathcal{F}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}(x, \bar{x})$ son par, impar y par bajo reflexión en \bar{x} respectivamente. Por lo

que pueden escribirse en función de las bases $\{f_E^{(0)}, f_E^{(m)}(\bar{x})\}$ y $\{f_O^{(m)}(\bar{x})\}$ como

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}(x, \bar{x}) = f_E^{(0)} F_{\mu\nu}^{(0)}(x) + \sum_{(m)} f_E^{(m)}(\bar{x}) F_{\mu\nu}^{(m)}(x), \quad (3.66)$$

$$\mathcal{F}_{\mu\bar{\nu}}(x, \bar{x}) = \sum_{(m)} f_O^{(m)}(\bar{x}) F_{\mu\bar{\nu}}^{(m)}(x), \quad (3.67)$$

$$\mathcal{F}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}(x, \bar{x}) = f_E^{(0)} F_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^{(0)}(x) + \sum_{(m)} f_E^{(m)}(\bar{x}) F_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^{(m)}(x). \quad (3.68)$$

De esta forma, al integrarlas sobre las coordenadas extras en la acción (3.31), se tiene una lagrangiana efectiva dada por

$$\mathcal{L}_{ef} = \mathcal{L}_{vv} + \mathcal{L}_{vs} + \mathcal{L}_{ss}, \quad (3.69)$$

con

$$\mathcal{L}_{vv} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^{(0)}(x) F^{\mu\nu(0)}(x) - \frac{1}{4} \sum_{(m)} F_{\mu\nu}^{(m)}(x) F^{\mu\nu(m)}(x), \quad (3.70)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{vs} &= -\frac{1}{2} \sum_{(m)} F_{\mu\bar{\nu}}^{(m)}(x) F^{\mu\bar{\nu}(m)}(x), \\ &= \frac{1}{2} \sum_{(m)} F_{\mu\bar{\nu}}^{(m)}(x) F^{\mu}_{\bar{\nu}}(x), \end{aligned} \quad (3.71)$$

$$\mathcal{L}_{ss} = -\frac{1}{4} F_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^{(0)}(x) F^{\bar{\mu}\bar{\nu}(0)}(x) - \frac{1}{4} \sum_{(m)} F_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^{(m)}(x) F^{\bar{\mu}\bar{\nu}(m)}(x). \quad (3.72)$$

Similarmente, al sustituir las curvaturas (3.66)-(3.68) y las conexiones (3.54)-(3.55) en las ecuaciones (3.28)-(3.30), y luego haciendo uso de la ortogonalidad de las funciones base, las curvaturas presentes en las lagrangianas anteriores adoptan las siguientes formas

$$F_{\mu\nu}^{(0)}(x) = \partial_\mu A_\nu^{(0)}(x) - \partial_\nu A_\mu^{(0)}(x), \quad (3.73)$$

$$F_{\mu\nu}^{(m)}(x) = \partial_\mu A_\nu^{(m)}(x) - \partial_\nu A_\mu^{(m)}(x), \quad (3.74)$$

$$F_{\mu\bar{\nu}}^{(m)}(x) = \partial_\mu A_{\bar{\nu}}^{(m)}(x) - \sum_{(p)} A_\mu^{(p)}(x) \int d^n \bar{x} f_O^{(m)}(\bar{x}) \partial_{\bar{\nu}} f_E^{(p)}(\bar{x}), \quad (3.75)$$

$$F_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^{(0)}(x) = \sum_{(p)} A_{\bar{\alpha}}^{(p)}(x) \int d^n \bar{x} f_E^{(0)}(\bar{x}) \left[\delta_{\bar{\alpha}\bar{\nu}} \partial_{\bar{\mu}} f_O^{(p)}(\bar{x}) - \delta_{\bar{\alpha}\bar{\mu}} \partial_{\bar{\nu}} f_O^{(p)}(\bar{x}) \right], \quad (3.76)$$

$$F_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^{(m)}(x) = \sum_{(p)} A_{\bar{\alpha}}^{(p)}(x) \int d^n \bar{x} f_E^{(m)}(\bar{x}) \left[\delta_{\bar{\alpha}\bar{\nu}} \partial_{\bar{\mu}} f_O^{(p)}(\bar{x}) - \delta_{\bar{\alpha}\bar{\mu}} \partial_{\bar{\nu}} f_O^{(p)}(\bar{x}) \right]. \quad (3.77)$$

Donde claramente se puede identificar a la ecuación (3.73) como la curvatura de Maxwell usual asociada al grupo estándar $U_Q(1, \mathcal{M}^4)$. Por su parte, la ecuación (3.74) tiene la misma estructura que la ecuación (3.73), por lo que puede considerarse como una curvatura de Maxwell análoga para los campos de norma $A_\mu^{(m)}(x)$. Esto nos lleva a concluir que la Lagrangiana (3.70) contiene tanto al sector cinético electromagnético de la teoría de Maxwell estándar, como a un sector cinético adicional correspondiente a los campos $A_\mu^{(m)}(x)$.

Por otro lado, las estructuras de las curvaturas (3.75), (3.76) y (3.77) son reveladoras, pues se puede notar que las funciones $\partial_{\bar{\mu}} f_E^{(m)}(\bar{x})$ y $\partial_{\bar{\mu}} f_O^{(m)}(\bar{x})$ son impares y pares respectivamente. Este hecho sugiere cómo definir el conjunto de funciones ortogonales $\{f_E^{(0)}, f_E^{(m)}(\bar{x}), f_O^{(m)}(\bar{x})\}$. Lo cual garantiza la presencia de términos lineales en dichas curvaturas, y por consiguiente, la presencia de los términos de masas para los campos de norma $A_{\bar{\mu}}^{(m)}(x)$ y los campos escalares $A_{\bar{\mu}}^{(m)}(x)$ en las lagrangianas (3.71) y (3.72), quienes pasan a ser identificadas como un sector cinético escalar y potencial escalar respectivamente.

Para generar el conjunto de funciones ortogonales, es necesario usar una observable que pueda ser asociada a las dimensiones extras. Por observable se entiende a un operador Hermitiano que genere una base ortogonal, la cual tenga asociado un espectro de eigenvalores reales. Como se indicó en la sección 3.2, de todos los invariantes asociados al grupo inhomogéneo $ISO(n)$, se usará al invariante de Casimir asociado al subgrupo de las traslaciones $T(n)$, $\bar{P}^2 = P_{\bar{\mu}} P_{\bar{\mu}}$. Así, si $\{|\bar{p}\rangle\}$ es la base de kets generada por $P_{\bar{\mu}}$, es decir, que cumplen $P_{\bar{\mu}} |\bar{p}\rangle = p_{\bar{\mu}} |\bar{p}\rangle$, entonces es verdad que $\langle \bar{x} | P_{\bar{\mu}} | \bar{p} \rangle = \partial_{\bar{\mu}} f(\bar{x})$. Estos kets $\{|\bar{p}\rangle\}$ también son eigenkets de \bar{P}^2 , o sea

$$\bar{P}^2 |\bar{p}\rangle = \bar{p}^2 |\bar{p}\rangle. \quad (3.78)$$

Considerando la base de las coordenadas $\{|\bar{x}\rangle\}$, si le aplicamos a la ecuación anterior el bra $\langle \bar{x} |$ por la izquierda y consideramos que en esta base $\bar{P}_{\bar{\mu}} \rightarrow -i\partial_{\bar{\mu}}$, la ecuación anterior se convierte en

$$\bar{\Delta} f(\bar{x}) = -\bar{p}^2 f(\bar{x}), \quad (3.79)$$

una ecuación de eigenvalores para el laplaciano $\bar{\Delta} \equiv \partial_{\bar{\mu}} \partial_{\bar{\mu}}$, donde $f(\bar{x}) = \langle \bar{x} | \bar{p} \rangle$ son las funciones ortogonales. Claramente, las soluciones de esta ecuación son ondas planas $exp(i\bar{p} \cdot \bar{x})$, cuyo espectro de momentos $p_{\bar{\mu}}$ es continuo en un espacio infinito. No obstante, como nuestra variedad es compacta, dicho espectro es discreto.

El paso que nos define las formas explícitas de las funciones ortogonales, es la compactificación de nuestra variedad como sigue: Consideremos que nuestra variedad compacta es un n -toro definido como el producto directo de n círculos S^1 . Cada uno caracterizado por un radio R_i en general diferentes, que por simplicidad, los asumiremos a todos iguales, esto es, $R_1 = \dots = R_n \equiv R$, y en donde en cada círculo sólo vive una coordenada \bar{x}_i . Es pertinente aclarar que todos estos círculos son formados al hacer que un segmento de línea con fronteras $[0, 2\pi R]$ sea encerrada sobre sí misma.

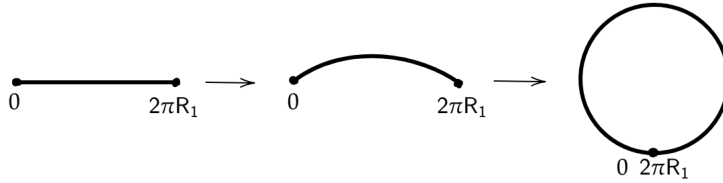


Figura 3.1: Construcción de un círculo S^1 de radio R_1 o 1-Toro a partir de una segmento de recta.

Como resultado de esta operación de encerramiento, cada coordenada \bar{x}_i obtiene la periodicidad $\bar{x}_i = \bar{x}_i + 2\pi R$, en otras palabras, se ha generado periodicidad en la variedad compacta. Luego, hay que pedir que nuestra variedad tenga la paridad $\bar{x} \rightarrow -\bar{x}$, ya que sin esta simetría no se puede

efectuar la separación de la base de funciones ortogonales en dos conjuntos de funciones par e impar. Para asegurar que nuestra variedad compacta tenga esa propiedad, es necesario aplicarle la acción del grupo cíclico $Z_2 = \{g^1, g^2\}$. La acción de este grupo sobre la variedad compacta es asignar a todo punto \bar{x}_i de cada S^1 , su antípoda $-\bar{x}_i$. Después de esto, a cada punto antípoda se le impone la condición de periodicidad dada por S^1 , dando como resultado la transformación del círculo S^1 en un segmento de línea de intervalo $0 < \bar{x}_i < \pi R$, llamado *Orbifold* S^1/Z_2 .

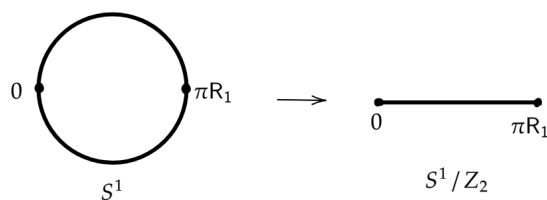


Figura 3.2: Acción del grupo cíclico Z_2 sobre los elementos de S^1 . El resultado es la nueva variedad S^1/Z_2 llamada *Orbifold*, donde hay que resaltar que los puntos 0 y πR_1 son fijos en ambas variedades, pues sus antípodas son ellos mismos debido a la estructura periódica del círculo.

De esta forma, ahora tenemos una variedad compactificada, hecha del producto de n copias del Orbifold S^1/Z_2 , dotada de paridad y periodicidad.

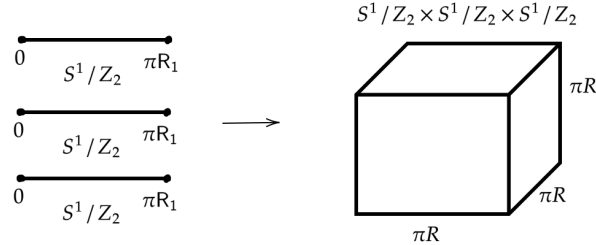


Figura 3.3: Variedad compactificada para el caso de $n = 3$ dimensiones extras.

Una vez realizada la compactificación, debemos exigir que nuestros campos cumplan con las condiciones de periodicidad y paridad, esto es, deben ser expandidos sobre el intervalo $[0, \pi R]$ de cada Orbifold S^1/Z_2 . O equivalentemente, hay que establecer condiciones de frontera sobre las funciones ortogonales $\{f_E^{(m)}(\bar{x}), f_O^{(m)}(\bar{x})\}$. Dichas condiciones definen a nuestro conjunto de funciones: Las funciones base impares $\{f_O^{(m)}(\bar{x})\}$ son senos n -dimensionales, que satisfacen las condiciones de frontera de Dirichlet, definidas como

$$f_O^{(m)}(\bar{x}) = f_O^{(m)}(\bar{p} \cdot \bar{x}) = \sqrt{\frac{2}{(2\pi R_1) \cdots (2\pi R_n)}} \sin(\bar{p} \cdot \bar{x}). \quad (3.80)$$

Mientras que el conjunto de funciones pares $\{f_E^{(0)}, f_E^{(m)}(\bar{x})\}$, que satisfacen las condiciones de frontera de Neumann, se definen como

$$f_E^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{(2\pi R_1) \cdots (2\pi R_n)}}, \quad (3.81)$$

$$f_E^{(m)}(\bar{x}) = f_E^{(m)}(\bar{p} \cdot \bar{x}) = \sqrt{\frac{2}{(2\pi R_1) \cdots (2\pi R_n)}} \cos(\bar{p} \cdot \bar{x}), \quad (3.82)$$

siendo esta última un coseno n -dimensional.

Las dos condiciones de frontera mencionados anteriormente, nos dan un espectro discreto de momentos denotado como $p^{(m)} = (\frac{m_1}{R}, \dots, \frac{m_n}{R})$ [22]. Así como un espectro discreto de eigenvalores de \bar{P}^2 denotado por $m_{(m)}^2 = (\frac{m_1}{R})^2 + \cdots + (\frac{m_n}{R})^2 = p_{\bar{\mu}}^{(m)} p_{\bar{\mu}}^{(m)}$, donde además $m_{(m)}^2 = R^{-2} \underline{m}^2$, siendo $\underline{m}^2 = \underline{m}_1^2 + \cdots + \underline{m}_n^2$ una cantidad formada por cualquier combinación admisible de los índices de Fourier. Cabe resaltar que $f_E^{(0)} = \langle \bar{x} | 0 \rangle$ corresponde a la función de onda asociado al "estado base", es decir, $f_E^{(0)}$ tiene eigenvalores iguales a cero ($\bar{p} = 0$), lo que significa que los campos usuales no reciben masa en la escala R^{-1} .

Con ayuda del conjunto de las funciones ortogonales (3.80) y (3.82) introducidas arriba, las

expresiones (3.75), (3.76) y (3.77) pueden reescribirse como

$$F_{\mu\bar{\nu}}^{(m)}(x) = \partial_\mu A_{\bar{\nu}}^{(m)}(x) - \bar{p}_{\bar{\nu}}^{(m)} A_\mu^{(m)}(x), \quad (3.83)$$

$$F_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^{(0)}(x) = 0, \quad (3.84)$$

$$F_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^{(m)}(x) = A_{\bar{\mu}}^{(m)}(x)\bar{p}_{\bar{\nu}}^{(m)} - A_{\bar{\nu}}^{(m)}(x)\bar{p}_{\bar{\mu}}^{(m)}, \quad (3.85)$$

donde claramente $F_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^{(0)}(x)$ se hace cero, y por tanto, la Lagrangiana (3.72) contenga sólo al término proporcional a $F_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^{(m)}(x)$.

Usando la curvatura 1-tensor (3.83), con ayuda de $\bar{p}_{\bar{\mu}}^{(m)}\bar{p}_{\bar{\nu}}^{(m)} = m_{(m)}^2$, el sector cinético escalar (3.71) se reescribe en la forma

$$\mathcal{L}_{vs} = \sum_{(m)} \left[\frac{1}{2} \left(\partial_\mu A_{\bar{\nu}}^{(m)} \right) \left(\partial^\mu A_{\bar{\nu}}^{(m)}(x) \right) + \left(\partial_\mu A_{\bar{\nu}}^{(m)} \right) \left(\bar{p}_{\bar{\nu}}^{(m)} A^\mu{}^{(m)}(x) \right) + \frac{1}{2} m_{(m)}^2 A_\mu^{(m)} A^\mu{}^{(m)} \right], \quad (3.86)$$

donde claramente se tiene la presencia del término de masa para los campos $A_\mu^{(m)}$ en el último término.

Por otra parte, del sector puramente escalar (3.72), surgen campos escalares con masa y un campo escalar sin ella. Para ver esto, haciendo uso de la ecuación (3.85) y de $\bar{p}_{\bar{\mu}}^{(m)}\bar{p}_{\bar{\nu}}^{(m)} = m_{(m)}^2$ en la lagrangiana (3.72), la misma se convierte en

$$\mathcal{L}_{ss} = -\frac{1}{2} \sum_{(m)} \left[A_{\bar{\mu}}^{(m)} \mathfrak{M}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^{(m)} A_{\bar{\nu}}^{(m)} \right]. \quad (3.87)$$

Donde para cada posible valor de (m) , aparece una matriz de masa simétrica $n \times n$ definida como

$$\mathfrak{M}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^{(m)} = \delta_{\bar{\mu}\bar{\nu}} m_{(m)}^2 - \bar{p}_{\bar{\mu}}^{(m)} \bar{p}_{\bar{\nu}}^{(m)}. \quad (3.88)$$

Esta matriz, cuya estructura matemática surge de la invariancia de norma, conduce a la existencia de un campo escalar de masa cero, dicho hecho puede verse en su traza

$$\delta^{\bar{\mu}\bar{\nu}} \mathfrak{M}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^{(m)} = (n-1) m_{(m)}^2, \quad (3.89)$$

la cual, claramente muestra que la matriz (3.88) garantiza la existencia de $n-1$ campos escalares físicos todos degenerados en masa y un campo escalar sin masa en el sector escalar. No obstante, si calculamos la matriz de masa explícita para dos casos específicos de $n=2$ y $n=3$ dimensiones extras respectivamente (en el caso $n=1$, la matriz de masa no existe), obtenemos:

$$\mathfrak{M}_{2 \times 2}^{(m)} = \begin{pmatrix} \left(p_6^{(m)} \right)^2 & -p_5^{(m)} p_6^{(m)} \\ -p_5^{(m)} p_6^{(m)} & \left(p_5^{(m)} \right)^2 \end{pmatrix}, \quad (3.90)$$

$$\mathfrak{M}_{3 \times 3}^{(m)} = \begin{pmatrix} \left(p_6^{(m)} \right)^2 + \left(p_7^{(m)} \right)^2 & -p_5^{(m)} p_6^{(m)} & -p_5^{(m)} p_7^{(m)} \\ -p_6^{(m)} p_5^{(m)} & \left(p_5^{(m)} \right)^2 + \left(p_7^{(m)} \right)^2 & -p_6^{(m)} p_7^{(m)} \\ -p_7^{(m)} p_5^{(m)} & -p_7^{(m)} p_6^{(m)} & \left(p_5^{(m)} \right)^2 + \left(p_6^{(m)} \right)^2 \end{pmatrix}. \quad (3.91)$$

Las cuales, claramente indican que la matriz (3.88) propicia la aparición de campos mezclados en la lagrangiana (3.87). Para evitar esto, es necesario usar una matriz ortogonal $\mathcal{R}^{(m)} = \left(\mathcal{R}_{\bar{\mu}\bar{\nu}'}^{(m)}\right)$, que satisfaga

$$\mathcal{R}_{\bar{\mu}\bar{\nu}'}\mathcal{R}_{\bar{\nu}\bar{\mu}'} = \delta_{\bar{\mu}\bar{\nu}} \text{ y } \mathcal{R}_{\bar{\mu}\bar{\nu}'}\mathcal{R}_{\bar{\mu}\bar{\nu}'} = \delta_{\bar{\mu}'\bar{\nu}'}, \quad (3.92)$$

que no es otra cosa que la propiedad de las matrices ortogonales, en las que la inversa es la transpuesta. De esta forma, la matriz de masa (3.88) puede diagonalizarse de la siguiente manera

$$\mathfrak{M}_{\bar{\mu}'\bar{\nu}'}^{(m)} = \mathcal{R}_{\bar{\mu}\bar{\mu}'}^{(m)}\mathfrak{M}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^{(m)}\mathcal{R}_{\bar{\nu}\bar{\nu}'}^{(m)}, \quad (3.93)$$

donde aquí $\left(\mathfrak{M}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^{(m)}\right) = \text{diag}\left(m_{(m)}^2, m_{(m)}^2, \dots, m_{(m)}^2, 0\right)$, es la matriz de masa que queremos. Por ejemplo, luego de resolver el problema de eigenvalores, las matrices ortogonales asociadas a las dos matrices (3.90) y (3.91) son

$$\mathfrak{R}_{2 \times 2}^{(m)} = \begin{pmatrix} \frac{p_6^{(m)}}{m_{(m)}} & \frac{p_5^{(m)}}{m_{(m)}} \\ -\frac{p_5^{(m)}}{m_{(m)}} & \frac{p_6^{(m)}}{m_{(m)}} \end{pmatrix}, \quad (3.94)$$

$$\mathfrak{R}_{3 \times 3}^{(m)} = \begin{pmatrix} -\frac{p_5^{(m)}p_7^{(m)}}{m_{(m)}\left[\left(p_5^{(m)}\right)^2 + \left(p_6^{(m)}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} & \frac{p_6^{(m)}}{\left[\left(p_5^{(m)}\right)^2 + \left(p_6^{(m)}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} & \frac{p_5^{(m)}}{m_{(m)}} \\ -\frac{p_6^{(m)}p_7^{(m)}}{m_{(m)}\left[\left(p_5^{(m)}\right)^2 + \left(p_6^{(m)}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} & -\frac{p_5^{(m)}}{\left[\left(p_5^{(m)}\right)^2 + \left(p_6^{(m)}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} & \frac{p_6^{(m)}}{m_{(m)}} \\ \frac{\left[\left(p_5^{(m)}\right)^2 + \left(p_6^{(m)}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}{m_{(m)}} & 0 & \frac{p_7^{(m)}}{m_{(m)}} \end{pmatrix}, \quad (3.95)$$

con las cuales, usando la regla general de diagonalización (3.93), obtenemos las nuevas matrices de

masa $\left(\mathfrak{M}_{\bar{\mu}'\bar{\nu}'}\right)^{(m)}$ para $n = 2$ y $n = 3$ dimensiones extras respectivamente

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}'_{2 \times 2} &= \mathfrak{R}_{2 \times 2}^{(m)T} \mathfrak{M}_{2 \times 2}^{(m)} \mathfrak{R}_{2 \times 2}^{(m)}, \\ &= \begin{pmatrix} p_6^{(m)} m_{(m)} & -p_5^{(m)} m_{(m)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{p_6^{(m)}}{m_{(m)}} & \frac{p_5^{(m)}}{m_{(m)}} \\ -\frac{p_5^{(m)}}{m_{(m)}} & \frac{p_6^{(m)}}{m_{(m)}} \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} m_{(m)}^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \\ \mathfrak{M}'_{3 \times 3} &= \mathfrak{R}_{3 \times 3}^{(m)T} \mathfrak{M}_{3 \times 3}^{(m)} \mathfrak{R}_{3 \times 3}^{(m)}, \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{p_5^{(m)} p_7^{(m)}}{m_{(m)} \left[(p_5^{(m)})^2 + (p_6^{(m)})^2 \right]^{\frac{1}{2}}} & -\frac{p_6^{(m)} p_7^{(m)}}{m_{(m)} \left[(p_5^{(m)})^2 + (p_6^{(m)})^2 \right]^{\frac{1}{2}}} & m_{(m)} \left[(p_5^{(m)})^2 + (p_6^{(m)})^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ \frac{p_6^{(m)} m_{(m)}^2}{\left[(p_5^{(m)})^2 + (p_6^{(m)})^2 \right]^{\frac{1}{2}}} & -\frac{p_5^{(m)} m_{(m)}^2}{\left[(p_5^{(m)})^2 + (p_6^{(m)})^2 \right]^{\frac{1}{2}}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \\ &\begin{pmatrix} -\frac{p_5^{(m)} p_7^{(m)}}{m_{(m)} \left[(p_5^{(m)})^2 + (p_6^{(m)})^2 \right]^{\frac{1}{2}}} & \frac{p_6^{(m)}}{\left[(p_5^{(m)})^2 + (p_6^{(m)})^2 \right]^{\frac{1}{2}}} & \frac{p_5^{(m)}}{m_{(m)}} \\ -\frac{p_6^{(m)} p_7^{(m)}}{m_{(m)} \left[(p_5^{(m)})^2 + (p_6^{(m)})^2 \right]^{\frac{1}{2}}} & -\frac{p_5^{(m)}}{\left[(p_5^{(m)})^2 + (p_6^{(m)})^2 \right]^{\frac{1}{2}}} & \frac{p_6^{(m)}}{m_{(m)}} \\ \frac{\left[(p_5^{(m)})^2 + (p_6^{(m)})^2 \right]^{\frac{1}{2}}}{m_{(m)}} & 0 & \frac{p_7^{(m)}}{m_{(m)}} \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} m_{(m)}^2 & 0 & 0 \\ 0 & m_{(m)}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Donde en las segundas líneas que siguen a $\mathfrak{M}'_{2 \times 2} = \mathfrak{R}_{2 \times 2}^{(m)T} \mathfrak{M}_{2 \times 2}^{(m)} \mathfrak{R}_{2 \times 2}^{(m)}$ y $\mathfrak{M}'_{3 \times 3} = \mathfrak{R}_{3 \times 3}^{(m)T} \mathfrak{M}_{3 \times 3}^{(m)} \mathfrak{R}_{3 \times 3}^{(m)}$, ya esta indicado el producto matricial de $\mathfrak{R}_{2 \times 2}^{(m)T} \mathfrak{M}_{2 \times 2}^{(m)}$ y $\mathfrak{R}_{3 \times 3}^{(m)T} \mathfrak{M}_{3 \times 3}^{(m)}$ respectivamente.

Ahora, usando la ecuación (3.92), la regla de diagonalización (3.93) puede escribirse de la siguiente manera

$$\mathfrak{M}_{\bar{\mu}'\bar{\nu}'}^{(m)} = \mathcal{R}_{\bar{\mu}\bar{\mu}'}^{(m)} \mathfrak{M}_{\bar{\mu}'\bar{\nu}'}^{(m)} \mathcal{R}_{\bar{\nu}\bar{\nu}'}^{(m)}, \quad (3.96)$$

que luego de sustituirla en la lagrangiana (3.87), se obtiene

$$\mathcal{L}_{ss} = -\frac{1}{2} \sum_{(m)} \left[A_{\bar{\mu}}^{(m)} \mathcal{R}_{\bar{\mu}\bar{\mu}'}^{(m)} \mathfrak{M}_{\bar{\mu}'\bar{\nu}'}^{(m)} \mathcal{R}_{\bar{\nu}\bar{\nu}'}^{(m)} A_{\bar{\nu}}^{(m)} \right], \quad (3.97)$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{(m)} \left[A_{\bar{\mu}'}^{(m)} \mathfrak{M}_{\bar{\mu}'\bar{\nu}'}^{(m)} A_{\bar{\nu}'}^{(m)} \right]. \quad (3.98)$$

Donde claramente, en el paso de la primera a la segunda ecuación, la matriz ortogonal ha transformado las componentes de los campos escalares $A_{\bar{\mu}}^{(m)}$, en componentes de campos eigenvectores

de masa $A_{\bar{\mu}'}^{(m)} \equiv \begin{pmatrix} A_{\bar{n}}^{(m)} \\ A_G^{(m)} \end{pmatrix}$, donde $\bar{n} = 1, 2, \dots, n-1$. Con el conocimiento de las componentes del eigenvector de masa, la Lagrangiana (3.98) puede expandirse como

$$\mathcal{L}_{ss} = -\frac{1}{2} \sum_{(m)} \left[A_{\bar{n}}^{(m)} A_{\bar{n}}^{(m)} \mathfrak{M}_{\bar{n}\bar{n}}^{(m)} + A_{\bar{n}}^{(m)} A_G^{(m)} \mathfrak{M}_{\bar{n}G}^{(m)} + A_G^{(m)} A_{\bar{n}}^{(m)} \mathfrak{M}_{G\bar{n}}^{(m)} + A_G^{(m)} A_G^{(m)} \mathfrak{M}_{GG}^{(m)} \right], \quad (3.99)$$

y sabiendo que la matriz de masa $\mathfrak{M}_{\bar{\mu}'\bar{\nu}'}^{(m)}$ es diagonal, la lagrangiana anterior se simplifica en

$$\mathcal{L}_{ss} = -\frac{1}{2} \sum_{(m)} \left[A_{\bar{n}}^{(m)} A_{\bar{n}}^{(m)} m_{(m)}^2 \right]. \quad (3.100)$$

Note que en esta lagrangiana se tiene únicamente la presencia de los términos de masa para las campos $A_{\bar{n}}^{(m)}$, cuya masa tiene el valor $m_{(m)}$.

Vale la pena destacar que todos los valores de masa mostrados en las expresiones anteriores, fueron generados por las curvaturas $F_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^{(m)}(x)$ y $F_{\bar{\mu}'\bar{\nu}'}^{(m)}(x)$, que a su vez, vienen de la curvatura extra-dimensional $\mathcal{F}_{MN}(x, \bar{x})$, cuya estructura precisa está dictada por la invariancia de norma, en otras palabras, todas las masas tienen su origen en la simetría de norma, y en ese sentido, pueden llamarse "masas de norma".

Los campos escalares $A_G^{(m)}$ que no aparecen en la lagrangiana (3.100), resultan ser pseudo-bosones de Goldstone, pues pueden ser absorbidos por los campos $A_{\bar{\mu}}^{(m)}$ a través de una NSGT específica, es decir, introduciendo la llamada norma unitaria. Para definir esta norma, consideremos el siguiente parámetro de norma infinitesimal

$$\alpha^{(m)} = \frac{A_G^{(m)}}{m_{(m)}}, \quad (3.101)$$

y las NSGTs (3.64) y (3.65)

$$\delta A_{\bar{\mu}}^{(m)}(x) = \partial_{\bar{\mu}} \alpha^{(m)}(x), \quad (3.102)$$

$$\delta A_{\bar{\mu}'}^{(m)}(x) = -\bar{p}_{\bar{\mu}'}^{(m)} \alpha^{(m)}(x), \quad (3.103)$$

donde la última NSGT ha sido reescrita con ayuda de las identidades (3.80) y (3.82). Luego, substituyendo el parámetro de norma especial (3.101) en las NSGTs anteriores, obtenemos

$$\delta A_{\bar{\mu}}^{(m)}(x) = \frac{\partial_{\bar{\mu}} A_G^{(m)}}{m_{(m)}}, \quad (3.104)$$

$$\delta A_{\bar{\mu}'}^{(m)}(x) = -p_{\bar{\mu}'}^{(m)} \frac{A_G^{(m)}}{m_{(m)}}, \quad (3.105)$$

donde la primera ecuación corresponde a la NSGT específica para el campo de norma $A_{\bar{\mu}}^{(m)}$. Ahora, aplicando $\mathcal{R}^{(m)}$ a la última ecuación, se obtiene

$$\delta A_{\bar{\mu}'}^{(m)}(x) = -\mathcal{R}_{\bar{\mu}\bar{\mu}'}^{(m)} \bar{p}_{\bar{\nu}}^{(m)} \frac{A_G^{(m)}}{m_{(m)}}, \quad (3.106)$$

y considerando que $\mathcal{R}^{(m)}$ es una matriz ortogonal cuyas columnas son dadas por los eigenkets, entonces contamos con la siguiente identidad útil:

$$p_{\bar{\mu}}^{(m)} \mathcal{R}_{\bar{\mu}\bar{\mu}'}^{(m)} = m_{(m)} \delta_{\bar{\mu}'G}, \quad (3.107)$$

que al usarla en la ecuación (3.106), se obtienen las NSGTs específicas para los campos de norma $A_{\bar{n}}^{(m)}$ y $A_G^{(m)}$

$$A_{\bar{n}}'^{(m)}(x) = A_{\bar{n}}^{(m)}(x), \quad (3.108)$$

$$A_G'^{(m)}(x) = 0. \quad (3.109)$$

Por tanto, la norma unitaria es:

$$A'_\mu{}^{(m)}(x) = A_\mu^{(m)}(x) + \frac{\partial_\mu A_G^{(m)}(x)}{m_{(m)}}, \quad (3.110)$$

$$A'_n{}^{(m)}(x) = A_n^{(m)}(x), \quad (3.111)$$

$$A'_G{}^{(m)}(x) = 0. \quad (3.112)$$

Donde la primera ecuación nos dice que los campos $A_G^{(m)}(x)$ son absorbidos por los campos $A_\mu^{(m)}$, mientras que la última ecuación nos dice que el pseudo-bosón de Goldstone desaparece de la teoría.

3.5. Las simetrías de la teoría efectiva

Una vez realizada la rotación ortogonal $A_{\bar{\mu}'}^{(m)} = \mathcal{R}_{\bar{\mu}'\bar{\mu}}^{(m)} A_{\bar{\mu}}^{(m)}$ en el sector cinético escalar (3.86), la cual permite definir a los campos escalares eigenestados de masa. La lagrangiana que caracteriza a la teoría efectiva puede escribirse de la siguiente manera

$$\mathcal{L}_{ef} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^{(0)} F^{(0)\mu\nu} + \sum_{(m)} \left(\mathcal{L}_g^{(m)} + \mathcal{L}_s^{(m)} \right), \quad (3.113)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_g^{(m)} = & -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^{(m)} F^{(m)\mu\nu} + \frac{1}{2} m_{(m)}^2 A_\mu^{(m)} A^{(m)\mu} \\ & + \frac{1}{2} \left(\partial_\mu A_G^{(m)} \right) \left(\partial^\mu A_G^{(m)} \right) + m_{(m)} A_\mu^{(m)} \partial^\mu A_G^{(m)}. \end{aligned} \quad (3.114)$$

$$\mathcal{L}_s^{(m)} = \frac{1}{2} \left(\partial_\mu A_n^{(m)} \right) \left(\partial^\mu A_n^{(m)} \right) - \frac{1}{2} m_{(m)}^2 A_n^{(m)} A_n^{(m)}. \quad (3.115)$$

Por otra parte, las NSGTs dadas por

$$\begin{aligned} \delta A_\mu^{(m)}(x) &= \partial_\mu \alpha^{(m)}(x), \\ \delta A_{\bar{\mu}}^{(m)}(x) &= -\bar{p}_{\bar{\mu}}^{(m)} \alpha^{(m)}(x), \end{aligned}$$

después de realizar la transformación ortogonal sobre los campos escalares y usar la identidad (3.107)

$$p_{\bar{\mu}}^{(m)} \mathcal{R}_{\bar{\mu}\bar{\mu}'}^{(m)} = m_{(m)} \delta_{\bar{\mu}'G},$$

toman la nueva forma

$$\delta_{ns} A_\mu^{(m)} = \partial_\mu \alpha^{(m)}, \quad (3.116)$$

$$\delta_{ns} A_G^{(m)} = -m_{(m)} \alpha^{(m)}, \quad (3.117)$$

$$\delta_{ns} A_n^{(m)} = 0. \quad (3.118)$$

Recuérdese, además, las SGTs dadas por las siguientes relaciones

$$\delta A_\mu^{(0)}(x) = \partial_\mu \alpha^{(0)}(x),$$

$$\delta A_G^{(m)} = 0,$$

$$\delta A_n^{(m)} = 0,$$

la primera de las cuales nos dice que $A_\mu^{(0)}$ es el campo de norma asociado con el grupo electromagnético $U_Q(1, \mathcal{M}^4)$, en tanto que $A_{\bar{n}}^{(m)}$ y $A_G^{(m)}$ son campos escalares sin carga eléctrica.

Con lo anterior establecido, podemos ver que la invariancia de la teoría bajo SGTs es evidente, ya que $\delta_s \mathcal{L}_g^{(m)} = 0$ y $\delta_s \mathcal{L}_s^{(m)} = 0$ trivialmente. Pero también podemos darnos cuenta que \mathcal{L}_{ef} es invariante bajo NSGTs. En este caso, la invariancia de la teoría de Maxwell usual y de $\mathcal{L}_s^{(m)}$ es trivial, pero la invariancia de $\mathcal{L}_g^{(m)}$ es un tanto sutil. En efecto, la variación de $\mathcal{L}_g^{(m)}$ está dada por

$$\begin{aligned} \delta_{ns} \mathcal{L}_g^{(m)} &= -\frac{1}{2} F^{(m)\mu\nu} \delta_{ns} F_{\mu\nu}^{(m)} + m_{(m)}^2 A^{(m)\mu} \delta_{ns} A_\mu^{(m)} + \left(\partial^\mu A_G^{(m)} \right) \partial_\mu \left(\delta_{ns} A_G^{(m)} \right) \\ &\quad + m_{(m)} \left[\delta_{ns} A_\mu^{(m)} \left(\partial^\mu A_G^{(m)} \right) + A_\mu^{(m)} \partial^\mu \left(\delta_{ns} A_G^{(m)} \right) \right], \\ &= 0. \end{aligned} \tag{3.119}$$

Observe que en la invariancia de $\mathcal{L}_g^{(m)}$ el término de mezcla

$$m_{(m)} A_\mu^{(m)} \partial^\mu A_G^{(m)}, \tag{3.120}$$

juega un papel central.

En la norma unitaria definida por el parámetro de norma

$$\alpha^{(m)} = \frac{A_G^{(m)}}{m_{(m)}}, \tag{3.121}$$

la teoría efectiva toma la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{ef} &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^{(0)} F^{(0)\mu\nu} \\ &\quad + \sum_{(m)} \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^{(m)} F^{(m)\mu\nu} + \frac{1}{2} m_{(m)}^2 A_\mu^{(m)} A^{(m)\mu} \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{(m)} \left[\left(\partial_\mu A_{\bar{n}}^{(m)} \right) \left(\partial^\mu A_{\bar{n}}^{(m)} \right) - m_{(m)}^2 A_{\bar{n}}^{(m)} A_{\bar{n}}^{(m)} \right], \end{aligned} \tag{3.122}$$

la cual es invariante bajo el grupo estándar $ISO(1, 3) \times U_Q(1, \mathcal{M}^4)$. Del mismo modo, la teoría completa

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{ef} &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^{(0)} F^{(0)\mu\nu} \\ &\quad + \sum_{(m)} \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^{(m)} F^{(m)\mu\nu} + \frac{1}{2} m_{(m)}^2 A_\mu^{(m)} A^{(m)\mu} + m_{(m)} A_\mu^{(m)} \partial^\mu A_G^{(m)} + \frac{1}{2} \left(\partial_\mu A_G^{(m)} \right) \left(\partial^\mu A_G^{(m)} \right) \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{(m)} \left[\left(\partial_\mu A_{\bar{n}}^{(m)} \right) \left(\partial^\mu A_{\bar{n}}^{(m)} \right) - m_{(m)}^2 A_{\bar{n}}^{(m)} A_{\bar{n}}^{(m)} \right], \end{aligned} \tag{3.123}$$

es invariante no sólo bajo el grupo estándar $ISO(1, 3) \times U_Q(1, \mathcal{M}^4)$, sino también bajo las NSGTs (3.116)-(3.118).

Capítulo 4

Conclusiones

En este trabajo de tesis se presentó un estudio de la teoría de Maxwell libre en un espacio-tiempo con dimensiones extras.

El estudio se basó en el concepto de ocultamiento de una simetría, el cual es necesario para vincular la teoría gobernada por un grupo G , válido a cierta escala de energía Λ , con la teoría gobernada por un subgrupo H de G , adecuada para describir los fenómenos físicos a escalas de energías M mucho menores que Λ . La implementación de este concepto requirió del uso de transformaciones canónicas que nos llevaron del enfoque de G al enfoque de $H \subset G$.

El ocultamiento de la simetría $ISO(1, 3+n) \times U_Q(1, \mathcal{M}^{4+n})$ en la simetría $ISO(1, 3) \times U_Q(1, \mathcal{M}^4)$ se dio a través de dos mapeos de punto. En un primer mapeo se acomodaron objetos covariantes de $SO(1, 3+n)$ en objetos covariantes de $SO(1, 3) \times SO(n)$:

$$SO(1, 3+n) \mapsto SO(1, 3) \times SO(n).$$

En un segundo mapeo se mostró cómo ocultar el papel dinámico del grupo inhomogéneo $ISO(n)$, el cual tiene que ver con los subgrupos de las traslaciones

$$T(1, 3+n) \mapsto T(1, 3),$$

en este mapeo, los diversos campos de la teoría fueron desarrollados en series de Fourier con respecto a las coordenadas extras \bar{x} , usando las funciones armónicas generadas por el grupo de las traslaciones $T(n)$. Luego, se identificó cada coordenada extra con el círculo S^1 y a la variedad compacta como el producto directo de n círculos o n -toro. Después, con el fin de recuperar la teoría de Maxwell usual, se introdujo una operación de paridad consistente en identificar el punto \bar{x} con su antípoda $-\bar{x}$ vía el grupo cíclico Z_2 , convirtiendo así el n -toro en el producto directo de n orbifolds S^1/Z_2 . De esta forma, se postuló que todo campo con contraparte usual es par y todo campo sin contraparte usual es impar bajo esta transformación. Así, los campos y parámetro de norma fueron desarrollados en la base par o impar, según fue el caso.

Se vio que el punto de partida para descender a bajas energías fue la teoría libre de Maxwell en $(4+n)$ dimensiones gobernado por el grupo extendido $ISO(1, 3+n) \times U_Q(1, \mathcal{M}^{4+n})$

$$S_{4+n}[\mathcal{A}_M] = \int d^4x d^n\bar{x} \left[-\frac{1}{4} \mathcal{F}_{MN}(x, \bar{x}) \mathcal{F}^{MN}(x, \bar{x}) \right],$$

sobre la cual se implementaron los dos mapeos de punto, dándonos como resultado una teoría

efectiva gobernada por el grupo estándar $ISO(1, 3) \times U_Q(1, \mathcal{M}^4)$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{ef} = & -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^{(0)} F^{(0)\mu\nu} \\ & + \sum_{(m)} \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^{(m)} F^{(m)\mu\nu} + \frac{1}{2} m_{(m)}^2 A_\mu^{(m)} A^{(m)\mu} + m_{(m)} A_\mu^{(m)} \partial^\mu A_G^{(m)} + \frac{1}{2} \left(\partial_\mu A_G^{(m)} \right) \left(\partial^\mu A_G^{(m)} \right) \right] \\ & + \frac{1}{2} \sum_{(m)} \left[\left(\partial_\mu A_n^{(m)} \right) \left(\partial^\mu A_n^{(m)} \right) - m_{(m)}^2 A_n^{(m)} A_n^{(m)} \right], \end{aligned}$$

donde los modos cero contenidos en el primer término de la teoría, corresponden al campo de Maxwell usual, el cual permanece sin masa mientras que todas las excitaciones de KK reciben masa proporcional a la escala de compactificación. Dicho espectro de campos de KK consta de un campo vectorial y n campos escalares. Con respecto a estos últimos, se mostró que de esta teoría emergen $n - 1$ campos escalares físicos con la misma masa y un campo escalar de masa cero, lo cual se deduce de la invariancia de la traza. Este resultado se ilustró de manera explícita para los casos no triviales de 2 y 3 dimensiones.

En esta teoría resultante se enfatizó la importancia de las transformaciones de norma estándar y no estándar. Por ejemplo, se mostró que la misma es también invariante bajo las NSGTs, dadas por

$$\begin{aligned} \delta_{ns} A_\mu^{(m)} &= \partial_\mu \alpha^{(m)}, \\ \delta_{ns} A_G^{(m)} &= -m_{(m)} \alpha^{(m)}, \\ \delta_{ns} A_n^{(m)} &= 0. \end{aligned}$$

Más importante aún, se uso una transformación no estándar particular, la llamada norma unitaria dada por

$$\alpha^{(m)} = \frac{A_G^{(m)}}{m_{(m)}},$$

para eliminar al campo escalar $A_G^{(m)}$ de la teoría, mostrando así que éste mismo corresponde a un pseudo-bosón de Goldstone. Con este resultado, la teoría resultante pudo reescribirse como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{ef} = & -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^{(0)} F^{(0)\mu\nu} \\ & + \sum_{(m)} \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^{(m)} F^{(m)\mu\nu} + \frac{1}{2} m_{(m)}^2 A_\mu^{(m)} A^{(m)\mu} \right] \\ & + \frac{1}{2} \sum_{(m)} \left[\left(\partial_\mu A_n^{(m)} \right) \left(\partial^\mu A_n^{(m)} \right) - m_{(m)}^2 A_n^{(m)} A_n^{(m)} \right], \end{aligned}$$

revelando que en esta norma el campo $A_\mu^{(m)}$ luce como un campo de Proca, mientras que $A_n^{(m)}$ satisface una ecuación tipo Klein-Gordon.

Apéndice A

Anexo

A.1. Serie múltiple de Fourier

El símbolo $\sum_{(\underline{m})}$ contiene un total de $2^n - 1$ series

$$\begin{aligned}
 \sum_{(\underline{m})} T^{(\underline{m})} &:= \sum_{m_1=1}^{\infty} T^{(m_1,0,\dots,0)} + \sum_{m_2=1}^{\infty} T^{(0,m_2,\dots,0)} + \dots + \sum_{m_n=1}^{\infty} T^{(0,0,\dots,m_n)}, \\
 &+ \sum_{m_1,m_2=1}^{\infty} T^{(m_1,m_2,\dots,0)} + \dots + \sum_{m_{n-1},m_n=1}^{\infty} T^{(0,0,\dots,m_{n-1},m_n)} \\
 &\vdots \\
 &+ \sum_{m_1,\dots,m_n=1}^{\infty} T^{(m_1,\dots,m_n)}. \tag{A.1}
 \end{aligned}$$

Las posiciones de los índices de Fourier (\underline{m}) no son relevantes, solo un número de ellos se encuentran ocupados, en la práctica uno puede usar la siguiente definición

$$\sum_{(\underline{m})} = \sum_{l=1}^n \binom{n}{l} \sum_{(m_1,\dots,m_l)=1}^{\infty}. \tag{A.2}$$

A.2. Integrales

La ortogonalidad del conjunto $\{f^{(\underline{m})}(\bar{x})\}$

$$\int_0^{2\pi R_n} \dots \int_0^{2\pi R_1} d^n \bar{x} f^{(\underline{m})}(\bar{x}) f^{(\underline{k})}(\bar{x}) = \delta^{(\underline{m}\underline{k})}. \tag{A.3}$$

Ortogonalidad del conjunto $\{f_E^{(\underline{m})}(\bar{p} \cdot \bar{x}), f_O^{(\underline{m})}(\bar{p} \cdot \bar{x})\}$

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi R_n} \dots \int_0^{2\pi R_1} d^n \bar{x} f_E^{(\underline{m})}(\bar{p} \cdot \bar{x}) f_O^{(\underline{k})}(\bar{p} \cdot \bar{x}) &= 0, \\
 \int_0^{2\pi R_n} \dots \int_0^{2\pi R_1} d^n \bar{x} f_E^{(\underline{m})}(\bar{p} \cdot \bar{x}) f_E^{(\underline{k})}(\bar{p} \cdot \bar{x}) &= \int_0^{2\pi R_n} \dots \int_0^{2\pi R_1} d^n \bar{x} f_O^{(\underline{m})}(\bar{p} \cdot \bar{x}) f_O^{(\underline{k})}(\bar{p} \cdot \bar{x}) = \delta^{(\underline{m}\underline{k})}
 \end{aligned} \tag{A.4}$$

Bibliografía

- [1] G.Nordström. *On the possibility of unifying the electromagnetic and gravitational fields.* Phys. Z., 15:504, 1914.
- [2] T. Kaluza. *um Unitätsproblem der Physik.* Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.), 1921:966, 1921.
- [3] O.Klein. *um Unitätsproblem de Physik.* Z. Phys, 37:895, 1926.
- [4] C.Lovelace. *Pomeron from factors and dual regge cuts.* Phys. Lett B, 43:500, 1971.
- [5] P.Ramond. *Dual theory for free fermions.* Phys. Rev D, 3:2415, 1971.
- [6] J.Wess y B.Zumino. *Supergauge transformations in four dimensions.* Nucl. Phys B, 70:39, 1974.
- [7] J. Scherk y J.H. Schwarz. *Dual models for non-hadrons.* Nucl. Phys B, 81:118, 1974.
- [8] J.H. Schwarz. *Physical states and pomeron poles in the dual pion model.* Nucl. Phys. B, 46:61, 1972.
- [9] M.B.Green y J.H. Schwarz. *Anomaly cancellations in supersymmetric D=10 gauge theory and superstring theory.* Phys. Lett. B, 149:117, 1984.
- [10] M.B.Green y J.H. Schwarz. *Supersymmetrical string theories.* Phys. Lett. B, 109:44, 1982.
- [11] E.Martinec y R.Rohm D.J. Gross, J.A. Harvey. *Herotic String.* Phys. Rev. Lett, 54:202, 1985.
- [12] E.Martinec y R.Rohm D.J. Gross, J.A. Harvey. *Herotic String (I). The free heterotic string.* Nucl. Phys. B, 256:253, 1985.
- [13] E.Martinec y R.Rohm D.J. Gross, J.A. Harvey. *Herotic String (II). The interacting heterotic string.* Nucl. Phys. B, 267:75, 1986.
- [14] E.Witten. *String theory dynamics in various dimensions.* Nucl. Phys. B, 443:85, 1995.
- [15] I. Antoniadis. Phys. Lett. B, 429:263, 1990.
- [16] S.Dimopoulos y G.R. Dvali N. Arkani-Hamed. Phys. Lett. B, 429:263, 1998.
- [17] S.Dimopoulos y G.R. Dvali I. Antoniadis, N. Arkani-Hamed. Phys. Lett. B, 436:257, 1998.
- [18] L. Randall and R. Sundrum. *Large Mass Hierarchy from a Small Extra Dimension.* Phys. Rev. Lett, 83:3370, 1999.
- [19] L. Randall and R. Sundrum. *An alternative to Compactification.* Phys. Rev. Lett, 83:4690, 1999.

- [20] H. C Cheng y B. Dobrescu T. Appelquist. *Bounds on universal extra dimensions*. Phys. Rev. D, 64:035002, 2001.
- [21] H. Novales-Sanchez y J.J. Toscano M. A. Lopez-Osorio, E. Martinez-Pascual. *Hydden symmetries induced by a canonical transformation and gauge structure of compactificatied Yang-Mills theories*. Phys. Rev. D, 84:036015, 2013.
- [22] H. Novales-Sánchez and J. J. Toscano. *The role of hidden symmetries and Kaluza-Klein mass generation in extra-dimensional gauge theories*. 1 2018.
- [23] H. Novales-Sanchez y J.J. Toscano. *Gauge invariance and quantization of Yang-Mills theories in extra dimensions*. Phys. Rev. D, 82:116012, 2010.
- [24] H. Novales-Sanchez y J.J. Toscano M. A. Lopez-Osorio, E. Martinez-Pascual. *Yang-Mills theories with an arbitrary number of compactified extra dimensions*. Phys. Rev. D, 89:116015, 2014.
- [25] M. A. López-Osorio, E. Martínez-Pascual, G. I. Nápoles-Cañedo, and J. J. Toscano. *One-Loop order effects from one extra universal dimension on $\lambda\phi^4$ theory*. J. Phys. Comm., 4(11):115004, 2020.
- [26] Javier Montaña, Héctor Novales-Sánchez, and J. Jesús Toscano. *Effects of universal extra dimensions on top-quark electromagnetic interactions*. J. Phys. G, 47(1):015002, 2019.
- [27] I. García-Jiménez, A. Granados-González, G. I. Nápoles-Cañedo, H. Novales-Sánchez, and J. J. Toscano. *Symmetry in the extra-dimensional Yang-Mills theory and its Kaluza-Klein effective description*. 1 2018.
- [28] M. E. Peskin. *An introduction to Quantum Field Theory*. Perseus Books, Boston, MA, 1995.
- [29] Jeffrey Goldstone, Abdus Salam, y Steven Weinberg. *Broken symmetries*. Phys. Rev., 127:965–970, Ago 1962.
- [30] F. Englert, y R. Brout. B *Broken symmetry and the mass of gauge vector mesons* Phys. Rev. Lett., 13:321–323, Ago 1964