



**BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA**

---

**COMPLEJO REGIONAL CENTRO - SAN JOSÉ CHIAPA**

**Título**

***“Método analítico de la relación de transmisión en mecanismos de 4 barras con errores por tolerancias”***

Para obtener el título de

**Licenciada en Ingeniería en Automatización y Autotrónica**

**P R E S E N T A**

Nombre del alumno

**Tania Martínez Angel**

**ASESOR DE TESIS**

Dr. Gustavo Manuel Minquiz Xolo

**CO-ASESOR**

Javier Flores Méndez

Puebla, Pue., 01 de Julio de 2025

## **AGRADECIMIENTOS**

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento a mi familia y a la escuela por su apoyo y dedicación a lo largo de mi trayectoria educativa. Han sido parte fundamental en mi crecimiento y desarrollo, estoy profundamente agradecida por la oportunidad de haber podido contar con su guía de apoyo.

A mi familia, mis padres Judith y Andrés, mis hermanos Nallely y Giovanni, y mis abuelos, gracias por brindarme la motivación y el apoyo necesario para alcanzar mis metas, por ser mi fuente de inspiración, por siempre creer en mí y brindarme todo el amor necesario. A mi pareja Joshua Edgar, que ha sido parte fundamental, hoy y siempre agradezco a todos por formar parte de esta etapa en mi vida.

A la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla por proporcionarme las herramientas y la guía necesaria para aprender y crecer, por ayudarme a desarrollar las habilidades y competencias necesarias para enfrentar los desafíos del futuro.

De manera muy especial, agradezco al Dr., Gustavo Manuel por su invaluable guía, paciencia y compromiso a lo largo de este proceso. Su orientación fue fundamental para la culminación exitosa de este proyecto.

## **Resumen**

Esta tesis propone un método analítico para calcular la relación de transmisión en mecanismos de cuatro barras, considerando los errores de posición debido a las tolerancias

dimensionales de fabricación. Se emplea un modelo matemático que permite conocer la influencia de estas tolerancias en la exactitud posicional del eslabón de salida. Para ello, se calculan las diferenciales totales de las funciones de restricción cinemática, obteniendo un sistema de ecuaciones que determina los errores posicionales en función de los errores dimensionales de los eslabones.

El estudio considera diferentes configuraciones del mecanismo de cuatro barras, incluyendo el paralelogramo articulado y mecanismos que cumplen o no la condición de Grashof. Se analizan los errores en la relación de transmisión debido a la variabilidad en las longitudes de los eslabones, estableciendo una metodología que permite identificar la influencia relativa de cada parámetro geométrico sobre el desempeño del mecanismo.

Mediante la implementación numérica de este modelo, vamos a obtener representaciones gráficas que permiten caracterizar la eficiencia del mecanismo y establecer estrategias para minimizar errores en diseños mecánicos. Además, el proyecto proporciona una guía para la selección de grados de tolerancia adecuados, optimizando la relación entre precisión y costos de fabricación.

Los resultados obtenidos se comparan con aproximaciones teóricas existentes, demostrando la utilidad del método propuesto en la mejora del diseño de mecanismos de transmisión de movimiento. Este proyecto tiene aplicaciones potenciales en industrias como la automotriz, la robótica y la manufactura de dispositivos mecánicos de alta precisión.

**Palabras clave:** Mecanismo de cuatro barras, relación de transmisión, error posicional, tolerancias de fabricación, restricciones cinemáticas, variación dimensional, condición de Grashof, parámetros geométricos, diseño mecánico, modelo analítico, implementación numérica, representación gráfica, selección de tolerancias, precisión, costo de fabricación, transmisión de movimiento, industria automotriz, robótica, dispositivos de alta precisión

# Índice

Lista de Figuras.....	VI
Lista de Tablas.....	VII
Lista de Figuras .....	9
Lista de Tablas .....	9
1. Introducción.....	11
1.1 Antecedentes del Proyecto.....	12
1.2 Planteamiento del Problema.....	14
1.3 Objetivos .....	17
1.4 Pregunta de Investigación .....	18
1.5 Justificación.....	18
1.6 Alcances.....	20
1.7 Impacto Socioeconómico .....	21
1.8 Organización de la tesis .....	23
2. Descripción del proyecto.....	24
2.1. Contexto.....	24
2.2 Fases del Proyecto.....	26
2.3 Objetivos de rendimiento.....	28
2.3.1 Precisión del modelo analítico .....	28
2.3.2 Utilidad en el diseño mecánico .....	29
2.3.3 Claridad y accesibilidad del método.....	29
2.3.4 Validación y coherencia.....	29

2.3.5	Posible extensión o replicabilidad .....	30
2.4	Recursos utilizados .....	30
2.4.1	Recursos académicos y bibliográficos .....	30
2.4.2	Herramientas digitales .....	31
2.4.3	Recursos humanos.....	31
2.4.4	Recursos institucionales .....	32
2.4.5	Recursos personales y tiempo invertido .....	32
3.	Marco teórico .....	33
3.1.	Modelo de desarrollo utilizado .....	33
3.2.	Teoría relacionada al proyecto .....	34
3.2.1	Mecanismos de 4 barras .....	34
3.2.2	Restricciones cinemáticas del sistema .....	39
3.2.3	Relación de transmisión .....	40
3.2.4	Tolerancias dimensionales .....	40
3.2.5	Cálculo de errores mediante diferenciales totales.....	42
3.2.6	Comparación con otros métodos .....	42
3.2.7	Aplicación práctica y relevancia en la industria .....	43
4.	Metodología del Proyecto .....	44
4.1	Planeación y análisis de costos.....	44
4.1.1	Plan de comunicación .....	46
4.1.2	Proceso de comunicaciones .....	49
4.1.3	Plan de proyecto .....	51
4.1.4	Plan de adquisiciones .....	54

4.2 Control del proyecto .....	55
<b>4.2.1 Desarrollo del modelo analítico</b> .....	56
4.2.1.1 Modelo matemático para evaluar la influencia de las tolerancias y errores en la exactitud de posicionamiento.....	56
4.2.1.2 Diferenciales totales de las ecuaciones de restricción cinemática y errores posicionales de los eslabones de salida. ....	59
4.2.1.3 Relación de transmisión .....	64
4.2.1.4 Errores totales en la relación de transmisión.....	65
<b>4.2.2 Gestión de riesgos</b> .....	69
4.2.2.1 Parámetros geométricos incorrectos .....	70
4.2.2.2 Modelo matemático inadecuado .....	72
4.2.2.3 limitaciones computacionales .....	74
4.2.2.4 Tiempos de ejecución mayores a los estimados .....	75
4.2.2.5 Acceso limitado a software o herramientas de simulación.....	76
4.2.2.6 Plan de gestión de riesgos.....	77
4.2.2.7 Control integrado de cambios .....	77
<b>4.2.3 Estrategias de mejora</b> .....	80
4.2.3.1 Factores del ambiente de la organización .....	81
4.2.3.2 Administración del conocimiento.....	81
4.2.3.3 Propuestas para implementar mejoras en proyectos futuros.....	82
4.3 Cierre del proyecto .....	83
<b>4.3.1 Indicadores de evaluación y resultados</b> .....	84
4.3.1.1 Casos de estudio.....	84
<b>4.3.1.1.1 Mecanismo de cuatro barras tipo paralelogramo</b> .....	84
4.3.1.2 Variaciones en las longitudes de los eslabones debido a las tolerancias dimensionales.....	89

4.3.1.3 Análisis y resultados .....	100
<b>4.3.2 KPI's</b> .....	102
<b>4.3.3 Avances del proyecto</b> .....	103
5. Conclusiones y trabajo a futuro.....	105
Bibliografía.....	108

## Lista de Figuras

<b>Figura 1.</b> Diagrama de actividades.....	50
<b>Figura 2.</b> Calendario de actividades.....	54
<b>Figura 3.</b> Diagrama de Gantt .....	54
<b>Figura 4.</b> Notación clásica del mecanismo de cuatro barras.....	57
<b>Figura 5.</b> Configuraciones abierta y cruzada del mecanismo de cuatro barras.....	59
<b>Figura 6.</b> Categoría de mecanismo de cuatro barras con punto de cambio .....	85
<b>Figura 7.</b> Relaciones de transmisión teóricas $i_{21}$ (a) y $i_{31}$ (b) en configuración abierta y cruzada.....	87
<b>Figura 8.</b> Coeficientes de influencia $\gamma_{l_1}$ (a), $\gamma_{l_2}$ (b), $\gamma_{l_3}$ (c) y $\gamma_{l_4}$ (d).....	89
<b>Figura 9.</b> Relaciones de transmisión teóricas $i_{21}$ (a) y $i_{31}$ (b) en configuración abierta, comparadas con las relaciones de transmisión reales .....	94
<b>Figura 10.</b> Relaciones de transmisión teóricas.....	95
<b>Figura 11.</b> Relación de transmisión real.....	97
<b>Figura 12.</b> Relación de transmisión.....	98

## Lista de Tablas

Tabla 1. Plan de costos del proyecto .....	46
Tabla 2. Plan de costos, salario recibido.....	46
Tabla 3. Plan de comunicaciones.....	48
Tabla 4. Resumen de proyecto .....	53
Tabla 5. Plan de adquisiciones.....	55

<b>Tabla 6.</b> Identificación de riesgos (parámetros geométricos) .....	70
<b>Tabla 7.</b> Identificación de riesgos (modelo matemático) .....	71
<b>Tabla 8.</b> Identificación de riesgos (limitaciones computacionales) .....	72
<b>Tabla 9.</b> Detalles de riesgos en modelo matemático.....	73
<b>Tabla 10.</b> Identificación de riesgos (limitaciones computacionales) .....	74
<b>Tabla 11.</b> Identificación de riesgos (tiempos de ejecución mayores a los estimados) .....	75
<b>Tabla 12.</b> Identificación de riesgos (acceso limitado a software) .....	76
<b>Tabla 13.</b> Plan de gestion de riesgo.....	77
<b>Tabla 14.</b> Formato de cambios(solicitud).....	78
<b>Tabla 15.</b> Análisis de cambio.....	78
<b>Tabla 16.</b> Impacto del cambio .....	79
<b>Tabla 17.</b> Riesgos de cambio .....	79
<b>Tabla 18.</b> Identificación de tareas V&V.....	80
<b>Tabla 19.</b> Tolerancias dimensionales en función de la medida nominal de los eslabones y del índice de calidad.....	90
<b>Tabla 20.</b> Signo de las tolerancias dimensionales y condición de Grashof para los 16 diseños de mecanismos articulados.....	91
<b>Tabla 21.</b> Intervalos de ángulos de entrada que definen los movimientos permitidos y las posiciones de bloqueo.....	99
<b>Tabla 22.</b> Tabla comparativa.....	102
<b>Tabla 23.</b> KP'Is .....	103

# Capítulo 1

## 1. Introducción

Este documento tiene como finalidad presentar de manera clara y detallada el avance del proyecto titulado *“Método analítico para el cálculo de la relación de transmisión en mecanismos de cuatro barras considerando los errores de posición por la influencia de las tolerancias dimensionales”*. A lo largo de este trabajo, se aborda una problemática común pero muchas veces subestimada en el ámbito del diseño mecánico: las pequeñas variaciones que surgen durante la fabricación y que pueden afectar el comportamiento real de los mecanismos.

En concreto, el objetivo central de este proyecto es desarrollar un modelo matemático que permita analizar cómo las tolerancias dimensionales, propias de cualquier proceso de manufactura, influyen en la precisión con la que se posiciona el eslabón de salida en un mecanismo de cuatro barras. En otras palabras, se busca entender de forma más profunda y realista qué tan exacto puede llegar a ser un mecanismo cuando se considera que sus piezas no son perfectas.

Para lograrlo, se propone una herramienta analítica que pueda ser útil tanto en la etapa de diseño como en la evaluación final del mecanismo. Así, ingenieros y diseñadores podrán tomar decisiones más informadas sobre los márgenes de tolerancia que deben aplicar, equilibrando precisión y costo de producción. De esta manera, no solo se minimizan

posibles errores funcionales, sino que también se optimiza el rendimiento general del sistema.

El desarrollo del proyecto incluye varias etapas importantes. Por un lado, se trabaja en la formulación de las ecuaciones que describen el movimiento del mecanismo bajo condiciones ideales. Posteriormente, se incorpora el análisis de cómo los errores dimensionales modifican ese comportamiento. Además, se contempla la creación de modelos numéricos que permitan visualizar estos efectos y, como paso complementario, se lleva a cabo una validación de los resultados mediante simulaciones computacionales. Como parte del trabajo futuro, también se considera la posibilidad de realizar pruebas con prototipos físicos, lo cual permitirá comparar los resultados teóricos con datos obtenidos en condiciones reales.

Este tipo de estudio resulta especialmente útil en sectores como la robótica, la manufactura de precisión o los sistemas automatizados, donde incluso una pequeña desviación puede tener consecuencias importantes. Por lo tanto, mejorar el diseño de estos mecanismos desde una perspectiva más realista no solo contribuye a elevar la calidad del producto final, sino que también ayuda a reducir costos al permitir márgenes de tolerancia más ajustados y eficientes.

## **1.1 Antecedentes del Proyecto**

A lo largo del tiempo, los mecanismos han sido una parte esencial en el desarrollo de la ingeniería, y entre todos ellos, el mecanismo de cuatro barras ha destacado por su

simplicidad estructural y por la gran variedad de movimientos que puede generar. Gracias a esta versatilidad, se ha utilizado en aplicaciones como sistemas de suspensión, maquinaria industrial, robots, prótesis mecánicas, e incluso mecanismos de apertura en electrodomésticos. Su capacidad para transformar el movimiento rotatorio en oscilatorio o lineal lo convierte en una solución confiable y práctica en distintos sectores.

A medida que la tecnología ha avanzado y los procesos de fabricación se han vuelto más precisos, también ha aumentado la exigencia sobre la calidad y el rendimiento de los mecanismos. Sin embargo, aunque el diseño sea perfecto en papel, en la vida real los componentes nunca salen exactamente con las dimensiones indicadas. Estas pequeñas diferencias, que forman parte natural de cualquier proceso de manufactura, se conocen como tolerancias dimensionales.

Estas tolerancias pueden parecer insignificantes, pero cuando se requiere un movimiento exacto como en robots o dispositivos médicos incluso una mínima variación puede generar un error considerable en la posición del eslabón de salida.

En un mecanismo de cuatro barras, estos errores afectan directamente la relación de transmisión, que es la proporción entre el movimiento de entrada y el movimiento de salida. Por lo tanto, ignorar las tolerancias durante el diseño puede comprometer el funcionamiento completo del sistema.

Por esta razón, muchos investigadores han intentado analizar cómo influyen las tolerancias en el comportamiento de este tipo de mecanismos. En su mayoría, estos estudios han utilizado herramientas de simulación por computadora, como análisis Monte

Carlo o software CAD con módulos de tolerancia. Aunque son muy útiles, este tipo de soluciones no siempre están al alcance de todos, ya que requieren conocimientos avanzados o licencias de programas especializados.

Además, las simulaciones pueden dar resultados útiles, pero no siempre explican con claridad el porqué del comportamiento del sistema. Es decir, muestran lo que pasa, pero no siempre permiten entenderlo desde un punto de vista teórico. Por eso, resulta muy valioso desarrollar una alternativa más accesible, que permita predecir de forma analítica cómo las tolerancias afectan la relación de transmisión desde la etapa inicial del diseño.

Este proyecto responde a esa necesidad. A través de un método analítico, se busca crear un modelo matemático que permita estimar con mayor precisión la relación de transmisión en un mecanismo de cuatro barras, tomando en cuenta los errores posicionales derivados de las tolerancias de fabricación. Esto no solo permite tener una mejor idea del comportamiento real del sistema, sino que también facilita la toma de decisiones en el diseño, ayudando a establecer márgenes de tolerancia adecuados sin necesidad de sobredimensionar componentes.

## **1.2 Planteamiento del Problema**

Los mecanismos de cuatro barras son elementos clave en muchos sistemas mecánicos, ya que permiten transmitir movimiento y fuerza de manera eficiente. Gracias a su simplicidad y versatilidad, se utilizan ampliamente en aplicaciones industriales, automotrices y robóticas. Sin embargo, su funcionamiento ideal se ve afectado por las tolerancias dimensionales que surgen inevitablemente durante el proceso de fabricación.

Estas pequeñas variaciones en las dimensiones reales de los componentes pueden generar errores posicionales en el mecanismo, lo que compromete su precisión y desempeño. En contextos donde se requiere un control estricto del movimiento como en la automatización o la robótica incluso desviaciones mínimas pueden representar un problema significativo.

Por su parte, la industria manufacturera se enfrenta constantemente al desafío de mejorar la precisión de sus productos sin elevar los costos de producción. Para lograrlo, es esencial contar con herramientas que permitan predecir y controlar el impacto de las tolerancias desde la etapa de diseño, y así evitar problemas en la fase de ensamblaje o durante el funcionamiento del producto.

En este contexto, se plantea la necesidad de desarrollar un modelo matemático que permita evaluar con mayor exactitud cómo las tolerancias dimensionales afectan el comportamiento del mecanismo de cuatro barras, específicamente en el eslabón de salida. Este modelo brindará a ingenieros y diseñadores una base sólida para tomar decisiones informadas sobre los márgenes de tolerancia óptimos, ayudando a garantizar el rendimiento deseado del sistema sin generar sobrecostos.

Hoy en día, los mecanismos de cuatro barras se utilizan en una gran variedad de sistemas mecánicos por su capacidad para transformar el movimiento de manera eficiente. Son comunes en brazos robóticos, sistemas de suspensión, maquinaria automatizada y otros dispositivos donde se necesita convertir un movimiento rotatorio en lineal u oscilatorio. Sin embargo, aunque su diseño teórico es relativamente sencillo, llevarlo a la práctica presenta desafíos importantes.

Uno de los principales problemas aparece durante la fabricación. Aun cuando los diseños sean precisos, los procesos de manufactura siempre generan pequeñas diferencias entre las dimensiones teóricas y las reales de las piezas. Estas variaciones, conocidas como tolerancias dimensionales, pueden parecer mínimas, pero afectan directamente al mecanismo. En particular, provocan errores posicionales en el eslabón de salida, lo que impacta la relación de transmisión y, en consecuencia, el funcionamiento del sistema completo.

En muchas aplicaciones esto puede pasar desapercibido, pero en sectores como la robótica, la manufactura de precisión o la automatización, la exactitud del movimiento es fundamental. Incluso un pequeño error puede generar fallas, pérdidas de eficiencia o desgaste prematuro. Por eso, los ingenieros deben encontrar un equilibrio entre permitir ciertas tolerancias sin que estas afecten el desempeño, y al mismo tiempo evitar que la producción se vuelva demasiado costosa por exigir medidas demasiado estrictas.

Aunque existen herramientas de simulación que permiten analizar el impacto de las tolerancias, muchas veces requieren software especializado o conocimientos avanzados en programación y estadística. Esto limita su acceso y aplicación, especialmente en etapas tempranas del diseño o en entornos con recursos limitados.

Ante esta situación, surge la necesidad de contar con un método más directo y accesible que permita anticipar estos errores sin depender completamente de simulaciones complejas. Un modelo matemático analítico puede ser una excelente alternativa, ya que permite entender, desde la teoría, cómo se comporta el mecanismo cuando se introducen variaciones en sus dimensiones.

Por ello, este proyecto propone el desarrollo de un método analítico para calcular la relación de transmisión en un mecanismo de cuatro barras, considerando los errores posicionales causados por las tolerancias dimensionales. Esta herramienta busca facilitar el trabajo de ingenieros y diseñadores, ayudándoles a tomar decisiones más informadas sobre los márgenes de tolerancia que deben aplicar en sus diseños, para así lograr mecanismos más confiables, eficientes y acordes con las condiciones reales de fabricación.

### **1.3 Objetivos**

#### **Objetivo general**

- Desarrollar un modelo matemático que permita evaluar cómo la exactitud posicional del eslabón de salida de un mecanismo de cuatro barras depende de las tolerancias dimensionales de fabricación.

#### **Objetivos específicos**

- Formular ecuaciones cinemáticas que describan el comportamiento del mecanismo considerando las tolerancias.
- Determinar los errores posicionales en función de las tolerancias dimensionales de los eslabones.
- Implementar un modelo numérico para analizar la relación de transmisión y la propagación de errores.
- Validar los resultados mediante simulaciones computacionales.

#### **1.4 Pregunta de Investigación**

¿Cómo influye la variación de las tolerancias dimensionales en la precisión de la relación de transmisión del eslabón de salida en un mecanismo de cuatro barras, y de qué manera un modelo analítico puede ayudar a predecir su comportamiento real?

#### **1.5 Justificación**

Desde los primeros niveles de formación en ingeniería, resulta evidente el papel fundamental que desempeñan los mecanismos en la transformación del movimiento. Entre ellos, el mecanismo de cuatro barras destaca por su recurrencia tanto en clases teóricas como en aplicaciones prácticas. A pesar de su aparente simplicidad, este sistema encierra una serie de particularidades que lo convierten en un objeto de estudio complejo y relevante. Su correcto funcionamiento depende de múltiples factores geométricos y cinemáticos que deben ser comprendidos en detalle.

Uno de los aspectos que se vuelve cada vez más notorio con la experiencia es la diferencia entre el diseño teórico de un mecanismo y su comportamiento real una vez fabricado. Durante el proceso de manufactura, incluso las variaciones más pequeñas conocidas como tolerancias dimensionales, pueden afectar significativamente el desempeño del sistema. Aunque estas tolerancias son inevitables, no siempre reciben la atención que merecen durante las etapas iniciales del diseño, lo que puede derivar en errores o pérdidas de precisión en el movimiento deseado.

A partir de esta observación, surge la necesidad de profundizar en el análisis de cómo estas pequeñas desviaciones pueden impactar en elementos críticos del mecanismo, como la relación de transmisión. Comprender esta influencia no solo es importante desde una perspectiva teórica, sino también práctica, ya que permite anticiparse a posibles fallos y optimizar el diseño desde sus primeras etapas.

En este contexto, se propone una herramienta de análisis que busca ser útil y accesible para estudiantes, docentes, diseñadores y fabricantes. A diferencia de otros métodos que dependen del uso de software especializado o simulaciones avanzadas no siempre disponibles o de fácil manejo, este enfoque pretende ofrecer una alternativa clara y aplicable que contribuya al diseño más preciso y eficiente de mecanismos.

Así, el presente trabajo no solo posee un valor académico, sino que también apunta a generar un impacto tangible en la práctica profesional. Representa una contribución concreta para mejorar los procesos de diseño y fabricación, permitiendo tomar decisiones más informadas desde el inicio. Además, establece una base sobre la cual se pueden desarrollar futuros estudios o herramientas orientadas al análisis de tolerancias en mecanismos, tanto en el ámbito educativo como en el industrial.

En síntesis, este proyecto parte de un problema real, propone una solución alcanzable y ofrece un aporte significativo al objetivo común de diseñar con mayor exactitud, reduciendo errores y aumentando la confiabilidad de los sistemas mecánicos.

## 1.6 Alcances

Este proyecto tiene como principal objetivo desarrollar un modelo analítico que permita calcular con mayor precisión la relación de transmisión en un mecanismo de cuatro barras, considerando los errores de posición provocados por las tolerancias dimensionales. En otras palabras, se busca entender cómo afectan esas pequeñas variaciones que aparecen durante la fabricación a un elemento tan importante como el movimiento final del mecanismo.

A lo largo del trabajo, se propone una solución que parte desde lo teórico, pero que al mismo tiempo tiene una aplicación práctica clara y útil. A diferencia de los métodos que dependen exclusivamente de simulaciones o software especializado, aquí se plantea un enfoque más directo, pensado para que pueda ser comprendido y aplicado sin necesidad de herramientas complejas. Por eso, uno de los alcances más importantes es que este modelo puede ser utilizado por estudiantes, diseñadores o ingenieros, incluso si no tienen acceso a programas avanzados de análisis.

Para lograr esto, el proyecto incluye varias etapas. Primero, se realiza un análisis cinemático del mecanismo, formulando las ecuaciones que describen su movimiento ideal. Después, se incorporan los efectos de las tolerancias, con el fin de ver cómo se alteran las posiciones cuando las dimensiones no son exactamente las esperadas. A partir de ahí, se elabora un modelo numérico complementario, que ayuda a simular diferentes escenarios y a visualizar con mayor claridad el impacto de esas variaciones.

Además, se contempla la validación del modelo propuesto mediante simulaciones por computadora. Esto permitirá comparar los resultados obtenidos con el modelo analítico

frente a una herramienta virtual, con el fin de asegurar que los resultados tengan coherencia y sean confiables.

Por ahora, no se contempla la construcción de un prototipo físico, ya que el enfoque del proyecto se mantiene principalmente en el análisis matemático y computacional. Sin embargo, no se descarta que a futuro pueda realizarse una etapa experimental que complemente lo desarrollado en esta investigación. Esto abriría la posibilidad de extender el estudio hacia pruebas reales, lo cual fortalecería aún más la aplicación del modelo.

Finalmente, este proyecto no solo busca resolver un problema puntual, sino también dejar una base útil para otras personas interesadas en este tipo de análisis. Ya sea para aplicarlo en otros mecanismos o para mejorarlo, el trabajo pretende ser una aportación práctica y accesible dentro del estudio de sistemas mecánicos.

## **1.7 Impacto Socioeconómico**

Uno de los principales fundamentos de este proyecto radica en su potencial para generar un impacto real, tanto en el ámbito técnico como en el económico. Esta contribución se vuelve especialmente relevante en contextos donde los mecanismos deben operar con alta precisión, pero donde, al mismo tiempo, es necesario optimizar los recursos y evitar costos innecesarios. En este sentido, el análisis propuesto busca ofrecer una solución equilibrada, que permita mejorar el desempeño de los sistemas sin requerir una inversión excesiva en materiales o procesos de fabricación.

Por ejemplo, en la fabricación de mecanismos como el de cuatro barras, las tolerancias dimensionales, esas pequeñas diferencias que aparecen al fabricar las piezas, pueden generar errores en el movimiento. Aunque son normales en cualquier proceso de manufactura, muchas veces se subestima el efecto que pueden tener. Si no se analizan bien desde el diseño, pueden provocar fallas, movimientos imprecisos o incluso que una pieza no encaje bien, lo cual puede llevar a tener que ajustar o rehacer partes, perdiendo tiempo y dinero (Kalpakjian & Schmid, 2014).

Por eso, este trabajo propone una forma más accesible y directa de anticipar ese tipo de errores, sin depender completamente de simulaciones costosas o software especializado. Tener un modelo analítico permite entender el problema desde la raíz, con cálculos que cualquiera con base en matemáticas e ingeniería puede seguir. En este caso, es una herramienta útil para diseñadores, ingenieros, estudiantes y hasta pequeñas empresas que no tienen todos los recursos, pero que sí buscan calidad en lo que hacen (Norton, 2011).

Además, este proyecto posee un valor social significativo. En el ámbito universitario, es común que muchas teorías complejas se perciban como distantes de las aplicaciones cotidianas. No obstante, enfoques como el que aquí se presenta permiten acercar el conocimiento técnico a un público más amplio, incluyendo a quienes, aunque no cuenten con acceso a herramientas avanzadas, tienen el interés o la necesidad de comprender y mejorar sus propios diseños. De esta manera, se contribuye a una democratización del conocimiento, facilitando su aplicación práctica en contextos reales y promoviendo una formación más inclusiva y aplicada. Esto también se alinea con lo que proponen manuales

técnicos como el de Avallone y Baumeister (2007), donde se destaca la importancia de aplicar conocimientos prácticos y realistas en ingeniería.

Por otro lado, este tipo de análisis no va en contra de las normas industriales, sino todo lo contrario. Este modelo busca complementarlas, tomando como base estándares como la ISO 2768, que define rangos de tolerancia aceptables en fabricación. De esta forma, los resultados que se obtienen con este método pueden tener una aplicación directa en la industria real, sin necesidad de complicar los procesos (ISO, 2006).

## **1.8 Organización de la tesis**

Esta tesis se encuentra estructurada en cinco capítulos, los cuales abordan de manera progresiva los elementos fundamentales del proyecto de desarrollo de un “Método analítico para el cálculo de la relación de transmisión en mecanismos de cuatro barras considerando los errores de posición por la influencia de las tolerancias dimensionales”.

En el capítulo uno se presenta la introducción de los antecedentes del proyecto, el planteamiento del problema, los objetivos generales y específicos, la pregunta de investigación, la justificación, los alcances e impacto socioeconómico. Este capítulo establece el contexto del proyecto y la relevancia de su desarrollo tanto en el ámbito educativo como en el ámbito industrial..

En el capítulo dos se expone la descripción del proyecto como el contexto en el que se desarrolla la propuesta, las fases del proyecto y los objetivos de rendimiento. También se detallan los recursos utilizados.

El marco teórico se encuentra en el capítulo tres donde se incluye el modelo de desarrollo adoptado para la gestión del proyecto (PMBOK), así como las teorías y conceptos relevantes relacionados con los mecanismos de 4 barras considerando los errores de posición.

En el capítulo cuatro se presenta la metodología y describe la planeación del proyecto, incluyendo el análisis de costos, los planes de comunicación, adquisiciones y ejecución. También se abordan los procesos de control del proyecto, como la gestión de riesgos, el control de cambios y las estrategias de mejora. Finalmente, se presentan los indicadores de evaluación, los resultados obtenidos y los avances documentados mediante KPI's.

En el capítulo cinco se presenta las conclusiones y trabajo a futuro donde resume los hallazgos más relevantes del proyecto, reflexiona sobre las aportaciones logradas y sugiere líneas de trabajo futuras, posibles mejoras y nuevas aplicaciones del sistema propuesto en otros contextos.

## **Capítulo 2**

### **2. Descripción del proyecto**

#### **2.1. Contexto**

Durante los últimos años, en el área de ingeniería mecánica se ha puesto un fuerte énfasis en lograr diseños más eficientes, precisos y funcionales. Dentro de este campo, los mecanismos de cuatro barras se han mantenido como uno de los sistemas más estudiados

y aplicados, debido a su capacidad para transformar el movimiento de forma sencilla y efectiva. Este tipo de mecanismo es ampliamente utilizado en maquinaria industrial, robótica, automóviles y dispositivos mecánicos que requieren un control específico del movimiento.

A pesar de su aparente simplicidad, en la práctica, estos mecanismos no siempre se comportan como lo indican los modelos ideales, ya que durante el proceso de fabricación surgen pequeñas variaciones en las dimensiones reales de sus componentes. Estas variaciones, conocidas como tolerancias dimensionales, aunque mínimas, pueden provocar errores en el posicionamiento del eslabón de salida, afectando directamente el desempeño y la precisión del sistema.

Actualmente, existen muchos estudios que analizan este tipo de errores a través de simulaciones por computadora o métodos estadísticos, los cuales requieren conocimientos avanzados y herramientas especializadas. Sin embargo, no siempre se cuenta con estos recursos en entornos académicos o en empresas pequeñas, lo que hace necesario contar con alternativas más accesibles y comprensibles.

Este proyecto surge precisamente por esa necesidad de encontrar soluciones más accesibles. La idea principal es desarrollar un método analítico sencillo y directo que permita entender cómo las tolerancias dimensionales afectan el comportamiento del mecanismo de cuatro barras. Para lograrlo, se propone el uso de fórmulas matemáticas claras y principios teóricos bien fundamentados, que no dependan exclusivamente de herramientas avanzadas o simulaciones complejas. Así, el objetivo es que este modelo sea útil y aplicable no solo para investigadores o especialistas, sino también para estudiantes,

diseñadores e ingenieros que estén buscando prevenir errores desde las primeras etapas del diseño, incluso sin contar con software especializado o grandes recursos técnicos.

Además, este trabajo se alinea con la intención de acercar la teoría con la práctica, contribuyendo con una herramienta que puede mejorar tanto el aprendizaje académico como la toma de decisiones técnicas en la vida real.

## **2.2 Fases del Proyecto**

Con el objetivo de organizar de manera más eficiente las distintas tareas involucradas en este proyecto, se optó por estructurarlo en fases, siguiendo un modelo clásico de gestión de proyectos. Esta metodología permitió mantener una visión clara de las acciones necesarias en cada etapa, facilitando el seguimiento del progreso y asegurando la alineación constante con el objetivo final. A continuación, se presenta una descripción del desarrollo de cada una de las fases que conformaron el proceso

### **Fase 1: Inicio**

En esta etapa se establecieron las bases del proyecto. El primer paso fue identificar el problema a abordar y reflexionar sobre su relevancia. A pesar de que los mecanismos de cuatro barras son ampliamente utilizados, se observó que no siempre se considera el impacto de las tolerancias de fabricación en su comportamiento real. Esta omisión puede generar desviaciones importantes en el funcionamiento, especialmente en aplicaciones donde la precisión es crítica. A partir de esta problemática, se definió el objetivo general del proyecto, así como el alcance esperado.

## **Fase 2: Planificación**

Una vez identificado el problema y establecido el objetivo, se procedió a la planificación detallada del trabajo. Esta fase incluyó una revisión profunda de la bibliografía relacionada con mecanismos, cinemática, tolerancias dimensionales y estudios previos sobre el tema. A partir de esta información, se definieron los pasos a seguir, las herramientas que se utilizarían, el cronograma estimado para cada actividad y los recursos disponibles. Asimismo, se contemplaron posibles desafíos, como la validación del modelo sin el uso de prototipos físicos, y se desarrollaron estrategias para afrontar estos obstáculos y adaptarse en caso de imprevistos.

## **Fase 3: Ejecución**

Durante la fase de ejecución se llevó a cabo el desarrollo técnico del proyecto. Se comenzó por formular el modelo matemático del mecanismo de cuatro barras, estableciendo las ecuaciones que describen su movimiento. Posteriormente, se incorporaron las tolerancias dimensionales al análisis, con el fin de evaluar su influencia en el posicionamiento del eslabón de salida. Esta etapa presentó diversos retos, especialmente en la validación de los cálculos y en la interpretación de los resultados. Sin embargo, a medida que se ajustaban los parámetros y se refinaba el modelo, comenzaron a obtenerse resultados significativos, lo que evidenció el avance y la solidez del análisis.

## **Fase 4: Monitoreo y control**

A lo largo del proceso, se implementó un seguimiento continuo para verificar que el desarrollo del proyecto se mantuviera alineado con lo planificado. Este control no se limitó

al cumplimiento del cronograma, sino que también incluyó la evaluación crítica de los resultados obtenidos. Se compararon las salidas del modelo con el comportamiento esperado según la teoría, y se realizaron ajustes cuando fue necesario. Cada modificación fue documentada cuidadosamente, permitiendo un registro detallado del proceso de mejora y asegurando la trazabilidad de las decisiones tomadas.

### **Fase 5: Cierre**

En la fase final, con el modelo ya desarrollado y los resultados disponibles, se organizó toda la información para su presentación formal. Se redactaron las conclusiones, se evaluó el grado de cumplimiento de los objetivos planteados y se identificaron posibles líneas de mejora para trabajos futuros. Asimismo, se reflexionó sobre el valor práctico de la herramienta desarrollada, destacando su aplicabilidad tanto en contextos académicos como en situaciones reales de diseño y fabricación.

## **2.3 Objetivos de rendimiento**

Se definió una serie de objetivos de rendimiento, organizados según áreas clave del desarrollo. Esta estructuración permitió una evaluación más precisa y ordenada de los resultados obtenidos. Además de verificar el correcto funcionamiento del modelo propuesto, estos objetivos buscan demostrar su viabilidad práctica, su aplicabilidad en contextos reales y su nivel de comprensión para los usuarios finales. En conjunto, estos criterios permiten valorar no solo la solidez técnica del proyecto, sino también su utilidad y accesibilidad.

### **2.3.1 Precisión del modelo analítico**

- Uno de los objetivos más importantes fue asegurar que el modelo diera resultados lo más cercanos posible a los reales. La idea era que, al comparar lo que calculaba

el modelo con una simulación o una referencia confiable, la diferencia no fuera mayor.

- Esto me permitió validar que las ecuaciones realmente representaban bien el comportamiento del mecanismo. Además, me interesaba que el modelo mostrara con claridad cómo afectan las tolerancias a la posición del eslabón de salida, es decir, que no fuera una “caja negra” sino que se entendiera qué estaba pasando en cada parte del mecanismo.

#### 2.3.2 Utilidad en el diseño mecánico

- El modelo debe permitir identificar qué eslabones o parámetros del mecanismo generan mayor sensibilidad ante las tolerancias, facilitando decisiones informadas desde las primeras etapas del diseño.
- El uso del modelo debe reducir la necesidad de simulaciones computacionales avanzadas, sirviendo como alternativa válida en entornos donde no se cuente con software especializado.

#### 2.3.3 Claridad y accesibilidad del método

- La documentación del modelo debe ser lo suficientemente clara como para que un estudiante o ingeniero con conocimientos básicos de mecanismos pueda seguirla sin dificultad.
- El desarrollo debe incluir ejemplos resueltos paso a paso que sirvan como guía práctica, fomentando el aprendizaje y la aplicabilidad académica

#### 2.3.4 Validación y coherencia

- El modelo debe ser validado, mostrando consistencia con los resultados teóricos obtenidos a partir de cinemática directa del mecanismo.

- Debe mantenerse la coherencia matemática del sistema a pesar de la incorporación de errores por tolerancias, evitando contradicciones en los resultados.

#### 2.3.5 Posible extensión o replicabilidad

- El método debe estar planteado de forma que pueda ser adaptado fácilmente a otros mecanismos de cuatro barras con distintas configuraciones (tipo manivela-balancín, doble manivela, etc.).
- Se deben identificar posibles aplicaciones prácticas o académicas donde el modelo pueda implementarse o ampliarse en el futuro.

## 2.4 Recursos utilizados

Para la ejecución de este proyecto, fue fundamental contar con una combinación de recursos académicos y técnicos. Si bien no se requirió el uso de maquinaria ni de materiales físicos complejos, resultó esencial disponer de herramientas que permitieran desarrollar el modelo analítico, validarlo correctamente y presentar los resultados de manera clara y comprensible.

A continuación, se describen los principales recursos utilizados durante el desarrollo del trabajo:

### 2.4.1 Recursos académicos y bibliográficos

Desde el comienzo, fue fundamental contar con una buena base teórica.

- Libros de texto especializados en análisis de mecanismos, tolerancias geométricas y cinemática.

- Artículos científicos que abordaran métodos de análisis en mecanismos de cuatro barras, tanto desde un enfoque analítico como numérico.
- Normas básicas sobre tolerancias dimensionales (como ISO o ANSI), para entender cómo se especifican y aplican en el diseño real.
- Manuales y apuntes de materias clave como Diseño Mecánico, Cinemática y Modelado Matemático.

#### 2.4.2 Herramientas digitales

Durante el desarrollo del modelo y el análisis de resultados, se emplearon distintas herramientas digitales que permitieron agilizar el trabajo y mejorar su comprensión. Entre las más relevantes se encuentran:

- **Excel:** Utilizado para realizar cálculos. Lo usé para hacer cálculos preliminares, graficar el comportamiento del mecanismo bajo distintos parámetros y organizar los datos obtenidos de forma estructurada.
- **GeoGebra:** Una herramienta muy útil para visualizar la cinemática del sistema, especialmente cuando quería ver cómo se movían los eslabones con ciertos parámetros.
- **MATLAB** (o software alternativo gratuito como Octave): Aunque no fue el enfoque principal, se empleó en ciertos momentos para validar partes del modelo y comparar los resultados numéricos.

#### 2.4.3 Recursos humanos

El desarrollo de este proyecto contó con el apoyo de diversas personas que aportaron conocimientos, ideas y retroalimentación valiosa en momentos clave del proceso. Entre ellos se destacan:

- **Asesor académico:** Su orientación fue esencial para mantener la coherencia del enfoque metodológico, identificar y corregir errores en el modelo matemático, y fortalecer la redacción técnica del documento.
- **Docentes de asignaturas clave:** Profesores de áreas como diseño mecánico, análisis de mecanismos y simulación brindaron materiales complementarios, resolvieron dudas conceptuales y ofrecieron sugerencias que enriquecieron el desarrollo del proyecto.
- **Compañeros de carrera:** Compartir avances con colegas permitió obtener una retroalimentación directa y valiosa sobre la claridad del modelo, su aplicabilidad y su grado de comprensión, ayudando a validar tanto los resultados como la forma en que fueron presentados.

#### 2.4.4 Recursos institucionales

Aunque el proyecto fue mayormente teórico, sí fue importante tener acceso a:

- Las salas de cómputo, en caso de que necesitara software con licencia (como MATLAB).
- La plataforma institucional, para entregar avances y recibir retroalimentación.

#### 2.4.5 Recursos personales y tiempo invertido

Finalmente, uno de los recursos más valiosos para la realización de este proyecto fue el tiempo y esfuerzo dedicados al mismo. La investigación y desarrollo implicaron numerosas horas de lectura, ensayo y error, revisión de fórmulas y validación de conceptos. Además, se apoyó en apuntes personales, talleres previos y los conocimientos adquiridos a lo largo de toda la formación académica.

En cierto sentido, este trabajo representa la integración y aplicación práctica de todo lo aprendido durante la carrera. Aunque no fue necesario el uso de laboratorios, prototipos

físicos o materiales costosos, el proyecto demandó constancia, disciplina y respaldo técnico.

El aprovechamiento óptimo de los recursos disponibles, desde una buena referencia bibliográfica hasta herramientas digitales como Excel o la asesoría de profesores, fue fundamental para llevar adelante este proyecto de manera completa y con un propósito claro.

## **Capítulo 3**

### **3. Marco teórico**

Este capítulo presenta los fundamentos teóricos esenciales que permitieron entender con mayor profundidad la problemática planteada y formular una propuesta de solución coherente, funcional y sustentada en principios matemáticos. La selección de estos conceptos responde a su relevancia dentro del desarrollo del proyecto, ya que proporcionan el marco necesario para construir el modelo analítico y justificar las decisiones tomadas en cada etapa del proceso.

#### **3.1. Modelo de desarrollo utilizado**

Para organizar de manera estructurada el desarrollo del proyecto, se adoptó el modelo clásico de gestión de proyectos, también conocido como PMBOK. Este enfoque divide el trabajo en cinco fases principales: inicio, planificación, ejecución, monitoreo y cierre. Aunque se trata de una metodología comúnmente utilizada en entornos empresariales, su aplicación resultó sumamente útil en el contexto académico, ya que permitió mantener el orden, establecer prioridades y definir con claridad los entregables correspondientes a cada etapa.

Como parte de esta planificación, se utilizaron herramientas básicas de gestión, tales como un cronograma de actividades, una lista de riesgos potenciales y un plan de adquisiciones. La experiencia adquirida a lo largo del proceso evidenció que este tipo de metodologías no se limita al ámbito profesional, sino que también puede ser de gran utilidad en proyectos académicos, al proporcionar una estructura clara y facilitar el cumplimiento de los objetivos planteados.

Las fases que se siguieron de acuerdo con el modelo PMBOK fueron:

- Inicio del proyecto: Se definió el tema, se identificó el problema y se establecieron los objetivos generales y específicos.
- Planificación: Se organizaron las actividades, se seleccionaron los recursos necesarios y se hizo una primera propuesta del modelo matemático.
- Ejecución: Se formularon las ecuaciones, se analizaron los efectos de las tolerancias y se estructuró el método analítico.
- Monitoreo y control: Se probaron los resultados obtenidos mediante simulaciones numéricas y se verificó el comportamiento del modelo.
- Cierre del proyecto: Se organizaron los resultados, se redactó el informe final y se plantearon futuras mejoras o aplicaciones del modelo.

## **3.2. Teoría relacionada al proyecto**

### **3.2.1 Mecanismos de 4 barras**

Para llevar a cabo este proyecto se optó por utilizar un mecanismo de cuatro barras, ya que es uno de los más comunes dentro del estudio de los sistemas mecánicos. Este tipo de mecanismo permite convertir un movimiento giratorio en uno oscilante, lo que lo hace

útil en distintos dispositivos. Según lo explicado en AcademiaLab (s. f.), el mecanismo de cuatro barras es el más básico dentro de los sistemas de cadena cerrada, y su diseño facilita el análisis y la comprensión del movimiento mecánico en distintos contextos.

Los eslabonamientos planos de cuatro barras se construyen a partir de cuatro eslabones conectados en un lazo por cuatro juntas de un grado de libertad. Una junta puede ser una junta giratoria, también conocida como junta de pasador o junta articulada, denotada por R, o una junta prismática, también conocida como par deslizante, denotada por P.

Los enlaces planos de cuatro barras se pueden diseñar para guiar una amplia variedad de movimientos y, a menudo, son los mecanismos básicos que se encuentran en muchas máquinas. Debido a esto, la cinemática y la dinámica de los eslabonamientos planos de cuatro barras también son temas importantes en la ingeniería mecánica.

El mecanismo de cuatro barras es uno de los más básicos, pero también de los más útiles en el campo de la ingeniería mecánica. Está compuesto por cuatro eslabones (una base, una manivela, un balancín y un eslabón de acoplamiento) unidos mediante articulaciones rotacionales. A pesar de su simplicidad, puede generar una gran variedad de movimientos, lo cual lo hace muy atractivo para el diseño de sistemas que requieren transformar movimientos rotatorios en lineales o alternativos (Uicker et al., 2010).

Este tipo de mecanismo se encuentra en cosas tan cotidianas como el limpiaparabrisas de un coche, máquinas empacadoras o brazos robóticos. Su comportamiento depende mucho de la longitud de los eslabones y del tipo de movimiento

que se desea lograr. Entender su geometría y su cinemática es el primer paso para poder analizarlo correctamente.

### **Análisis del mecanismo**

Luego de seleccionar el mecanismo, se analizaron sus componentes principales, como las barras, las uniones y el tipo de movimiento que genera. También se tomó en cuenta la condición de Grashof, la cual ayuda a determinar si una de las barras puede girar por completo. Esta condición establece que, si la suma de la barra más corta y la más larga es menor o igual que la suma de las otras dos, entonces se puede lograr un giro completo (AcademiaLab, s. f.).

### **Ley de Grashof**

Según Lifeder (s. f.), La Ley de Grashof es una herramienta fundamental en el diseño de mecanismos de cuatro barras, especialmente cuando se requiere que al menos una de las barras realice una rotación completa. Esta situación es común en mecanismos que transforman un movimiento oscilatorio en rotatorio (como en una máquina de coser de pedal), o que necesitan conectar un motor para generar movimiento continuo.

Esta ley establece que, en un mecanismo plano de cuatro barras donde una de ellas está fija, al menos una barra podrá girar completamente si se cumple que la suma de las longitudes de la barra más corta y la más larga es menor o igual que la suma de las otras dos. Matemáticamente, esto se expresa como:

$$s + l \leq p + q$$

Donde:

**s** es la barra más corta, **l**

es la más larga, **p** y **q** son

las otras dos barras.

Cuando se cumple esta condición, se dice que el mecanismo es "Grashofiano", y permite distintos tipos de movimientos según la posición de la barra más corta. Por ejemplo:

Doble manivela: si la barra más corta es fija, las barras adyacentes pueden girar completamente.

Manivela-balancín: si la barra más corta es adyacente a la fija, solo una barra gira completamente y la otra oscila.

Doble balancín: si la barra más corta es opuesta a la fija, ninguna da vueltas completas, solo movimientos de vaivén.

Cuando la suma  $s + l = p + q$ , se trata de un caso límite, en el que las barras pueden alinearse y el mecanismo corre el riesgo de trabarse. Por esta razón, es más seguro diseñar mecanismos que cumplan la desigualdad estricta para evitar tensiones innecesarias en las articulaciones.

Existen varios mecanismos prácticos que cumplen con la Ley de Grashof, como el manivela-balancín, usado en limpiaparabrisas o bombas extractoras de petróleo; el paralelogramo articulado, presente en locomotoras de vapor y pantógrafos; y el antiparalelogramo articulado, útil en máquinas lanzapelotas de tenis, donde se requiere movimiento en sentidos opuestos.

## **Clasificación de los mecanismos**

Los mecanismos pueden clasificarse de la siguiente manera:

- **Mecanismos de levas:** Las levas son elementos de perfil irregular que se usan para dar movimiento a otro elemento denominado seguidor a través del deslizamiento entre ellos. Se emplean en muchos tipos de aplicaciones, como por ejemplo máquinas herramienta, máquinas textiles, máquinas de empaquetar, etc.
- **Mecanismos de engranajes:** Los engranajes permiten transmitir potencia entre dos ejes y, a su vez, un movimiento sincronizado. Los engranajes se pueden encontrar en maquinaria textil, Trabajo Fin de Grado: Equilibrado de mecanismos 8 de herramienta, centrales eléctricas, etc. pero también en elementos cotidianos como el reloj, la bicicleta o un simple sacacorchos.
- **Mecanismos de tornillo** Se utilizan sobre todo en máquina-herramienta. Entre sus funciones, están sujetar las piezas correctamente y transformar el movimiento de rotación en movimiento de traslación.
- **Mecanismos con elementos flexibles** Entre todos los elementos flexibles, destacan las correas, cuya función es transmitir potencia entre ejes, y los resortes, caracterizados por su capacidad de absorción de energía.
- **Mecanismos con elementos fluidos** Su principal función es multiplicar fuerzas en máquinas de ciclos complejos.

- Mecanismos de barras: Consisten en un conjunto de barras unidas mediante pares cinemáticos. Son imprescindibles en los sectores de automoción, ferrocarril, maquinaria de elevación y transporte, etc. Las principales funciones de este tipo de mecanismo son, entre otros, la conversión de movimiento y la multiplicación de fuerzas (López López de la Calle, B. (2019). Equilibrado de mecanismos.)

### 3.2.2 Restricciones cinemáticas del sistema

Para que el mecanismo funcione correctamente, debe cumplir con ciertas condiciones geométricas. Estas se conocen como ecuaciones de restricción cinemática, y básicamente describen cómo se relacionan las posiciones de los eslabones entre sí. Normalmente se usan ecuaciones vectoriales o trigonométricas que dependen de los ángulos y longitudes de los eslabones.

Estas ecuaciones son la base para cualquier análisis más profundo, ya que permiten saber en qué posición estará cada parte del mecanismo en un instante dado. Es sobre ellas donde más adelante se aplican los errores o las variaciones por tolerancia.

Según LinkedIn (s. f.). Hay dos tipos principales de restricciones cinemáticas: geométricas y algebraicas. Las restricciones geométricas se basan en la forma y el tamaño de los cuerpos, como juntas fijas, juntas deslizantes o contactos rodantes. Las restricciones algebraicas se basan en las ecuaciones matemáticas que relacionan las posiciones, velocidades y aceleraciones de los cuerpos, como el movimiento circular, la velocidad constante o la conservación de la energía. Las restricciones dinámicas se basan en el

equilibrio de fuerzas y momentos que actúan sobre el sistema, como las leyes de Newton, la fricción o la gravedad.

### 3.2.3 Relación de transmisión

Otro concepto que resulta fundamental es la relación de transmisión. Esta relación nos dice qué tanto se mueve el eslabón de salida cuando damos un movimiento al de entrada. En un mundo ideal, esta relación se mantiene bajo control, pero en la práctica puede variar bastante si no se toman en cuenta aspectos como el diseño geométrico o los errores acumulados.

Autores como Norton (2004) explican que una relación de transmisión mal calculada puede hacer que el mecanismo trabaje con esfuerzo excesivo o de manera inestable, especialmente en ciertas posiciones críticas. Por eso, estudiar cómo varía este parámetro a lo largo del ciclo de movimiento es clave para lograr un buen diseño.

### 3.2.4 Tolerancias dimensionales

En cualquier proceso de fabricación, por muy preciso que sea, siempre existen pequeñas diferencias entre lo que se diseña y lo que se obtiene físicamente. A estas diferencias se les llama tolerancias dimensionales, y son inevitables. Sin embargo, cuando se trabaja con mecanismos que requieren alta precisión, esas pequeñas variaciones pueden tener un efecto acumulado muy significativo.

Estas tolerancias afectan directamente las longitudes de los eslabones y las posiciones angulares, generando lo que se conoce como errores posicionales. Si estos errores no se detectan a tiempo, pueden provocar fallos de alineación, pérdida de eficiencia o incluso bloqueos mecánicos (Chase & Greenwood, 1988).

Para asegurar que las piezas fabricadas sean intercambiables, es decir, que se puedan sustituir entre sí sin problema, el diseñador debe considerar normas que regulen las posibles desviaciones dimensionales, así como la forma y la posición relativa de las superficies. Esto resulta clave tanto para el diseño como para el control de calidad durante la producción.

El control de estos parámetros es especialmente importante, ya que cualquier desviación fuera de los márgenes permitidos puede generar pérdidas significativas, incluso si el error es mínimo. Aunque se acepta que las piezas no sean idénticas a lo establecido en el diseño, deben mantenerse dentro de los límites establecidos por las tolerancias.

Un problema frecuente es que, durante el proceso de fabricación, muchos errores geométricos no son identificados ni considerados adecuadamente al definir la precisión requerida. Por esta razón, es necesario estudiar cuáles son los errores más comunes y cómo se relacionan con las tolerancias geométricas y dimensionales, ya que esta relación influye directamente en la calidad final del producto y en la eficiencia del proceso de fabricación (Espinosa Martínez, L., & González Pérez, R. R. (2019).

### 3.2.5 Cálculo de errores mediante diferenciales totales

Para poder predecir el impacto de las tolerancias, una de las herramientas más útiles es el uso de diferenciales totales. En palabras simples, se trata de ver cómo cambian los resultados de una función cuando sus variables de entrada también cambian un poco. Aplicado a mecanismos, esto significa calcular cómo una pequeña variación en la longitud de un eslabón afecta la posición final del mecanismo.

Este enfoque, aunque parece muy matemático, es bastante práctico porque permite estimar los errores sin tener que hacer simulaciones complejas. Además, proporciona una idea clara de qué dimensiones influyen más en la precisión final, lo que ayuda a tomar mejores decisiones desde el diseño.

### 3.2.6 Comparación con otros métodos

Muchas veces, para estudiar los errores en mecanismos se utilizan simulaciones con software como MATLAB, SolidWorks o ANSYS. Estas herramientas son muy potentes, pero también requieren conocimientos técnicos avanzados y, en algunos casos, licencias costosas.

En contraste, el análisis analítico que se propone en este proyecto se basa en principios matemáticos que pueden aplicarse con herramientas más accesibles, como Excel o programas de cálculo simbólico. Esto hace que el modelo sea útil incluso para estudiantes o diseñadores que no cuentan con acceso a plataformas especializadas.

Según Tesar y Yang (1990), los modelos analíticos no solo permiten evaluar errores, sino también entender la sensibilidad del sistema, es decir, qué tanto cambia un resultado

si se modifica una variable. Esa información es clave para priorizar ajustes durante la fase de diseño.

### 3.2.7 Aplicación práctica y relevancia en la industria

Todo este análisis no se queda solo en la teoría. La necesidad de mecanismos precisos es real en muchas industrias. Por ejemplo, en robótica, donde la trayectoria debe ser exacta; o en manufactura de precisión, donde las piezas tienen que encajar perfectamente.

Autores como Yan y Zhang (2006) han trabajado en la inclusión de tolerancias desde la fase de diseño, demostrando que anticipar estos errores permite reducir el retrabajo, mejorar la calidad del producto final y optimizar los costos de producción. Este proyecto sigue esa misma línea, pero con un enfoque más directo y accesible.

El estudio de la teoría permitió comprender que los errores provocados por tolerancias no deben considerarse simples detalles, sino factores que pueden alterar de manera significativa el comportamiento de un mecanismo. Esta comprensión fue clave para justificar la necesidad de desarrollar un método analítico que permita evaluar dichos efectos desde las primeras etapas del diseño, sin depender exclusivamente de simulaciones computacionales o pruebas físicas. Este enfoque no solo mejora la precisión del diseño, sino que también optimiza los recursos disponibles y anticipa posibles fallos en el funcionamiento del sistema.

## Capítulo 4

## **4. Metodología del Proyecto**

Este capítulo tiene como objetivo explicar paso a paso cómo se desarrolló el modelo analítico para estudiar el comportamiento de un mecanismo de cuatro barras, tomando en cuenta los errores que pueden surgir por las tolerancias dimensionales. Aquí se describe desde la planificación general del proyecto hasta el análisis de los resultados, pasando por la construcción del modelo, su validación y los recursos utilizados en cada etapa. Todo el proceso se abordó desde un enfoque práctico pero fundamentado, siempre buscando soluciones accesibles y aplicables para diseñadores e ingenieros que trabajan con este tipo de mecanismo

### **4.1 Planeación y análisis de costos**

Desde el inicio del proyecto, una de las prioridades fue contar con una buena organización del trabajo y prever, de la manera más realista posible, los recursos que se necesitarían a lo largo del desarrollo. Por ello, esta etapa se enfocó en planificar cuidadosamente el camino a seguir y en realizar un análisis general de los posibles costos asociados a cada fase. El objetivo no era solo evitar imprevistos, sino también trabajar de forma ordenada y con claridad sobre lo que implicaba cada etapa.

Para lograrlo, el proyecto se dividió en cinco fases que fueron aumentando en complejidad y duración. Estas incluyeron desde la investigación inicial y la formulación del modelo matemático, hasta el análisis de los efectos de las tolerancias dimensionales y su validación teórica. Cada una de estas etapas tuvo una duración estimada de entre una y tres semanas, y se identificaron las tareas clave que debían cumplirse para avanzar de forma consistente hacia los objetivos planteados.

Aunque el desarrollo fue individual, con fines organizativos y para poder estimar mejor los tiempos y recursos, se asignaron distintos roles como si se tratara de un equipo multidisciplinario. Esta simulación ayudó a tener una visión más clara de las habilidades necesarias en cada fase, del tipo de trabajo que implicaba cada rol, y del esfuerzo que conllevaba completar el proyecto en su totalidad. Los principales roles definidos fueron los siguientes:

- **Coordinador de proyecto:** Encargado de supervisar el avance general, tomar decisiones clave y asegurar que todas las fases se cumplieran en tiempo y forma.
- **Ingeniero de diseño:** Responsable de plantear y desarrollar el modelo analítico, proponer soluciones matemáticas y adaptar el modelo a las condiciones reales del mecanismo.
- **Responsable de validación:** Se encargó del análisis de resultados, verificación del comportamiento del modelo y comparación con posibles datos experimentales.
- **Asistente de documentación:** Este rol se centró en la redacción del informe, organización de los avances y presentación clara de los resultados en la tesis.
- **Analista de tolerancias:** Responsable de estudiar los efectos que tienen las variaciones dimensionales en el mecanismo, así como de aplicar los métodos de error mediante diferenciales.

En cuanto a los costos, se estimaron considerando el tiempo de trabajo por etapa y un posible salario mensual base (dependiendo del rol), para calcular así un costo total del proyecto si se tratara de un entorno real. Aunque no se manejó un presupuesto físico en

sentido estricto, la simulación de costos permitió dimensionar el valor del trabajo realizado y también sirvió para valorar el esfuerzo invertido en cada fase del desarrollo.

Roles y Funciones	Tiempo Requerido en el Proyecto (semanas)					No. de personas requeridos
	Etapa I (Duración 1 semana)	Etapa II (Duración 2 semanas )	Etapa III (Duración 2 semanas )	Etapa IV (Duración 3 semanas )	Etapa V (Duración 3 semanas)	
Cordinador de proyecto	1	1	1	1	1	1
Ingeniero de diseño	1	2	1	1	1	1
Responsable de validación	1	2	2	2	2	1
Asistente de documentación	1	2	2	3	3	1
Analista de tolerancias	1	1	1	1	1	1

**Tabla 1.** Plan de costos del proyecto

Salario mensual	Salario Percibido por Etapa					Salario percibido en el proyecto
	Etapa I	Etapa II	Etapa III	Etapa VI	Etapa V	
\$ 2,000.00	\$ 500.00	\$ 500.00	\$ 500.00	\$ 500.00	\$ 500.00	\$ 2,500.00
\$ 1,800.00	\$ 450.00	\$ 900.00	\$ 450.00	\$ 450.00	\$ 450.00	\$ 2,700.00
\$ 2,000.00	\$ 500.00	\$ 1,000.00	\$ 1,000.00	\$ 1,000.00	\$ 1,000.00	\$ 4,500.00
\$ 1,000.00	\$ 250.00	\$ 500.00	\$ 500.00	\$ 750.00	\$ 750.00	\$ 2,750.00
\$ 1,500.00	\$ 375.00	\$ 375.00	\$ 375.00	\$ 375.00	\$ 375.00	\$ 1,875.00
<b>Total</b>	<b>\$ 2,075.00</b>	<b>\$ 3,275.00</b>	<b>\$ 2,825.00</b>	<b>\$ 3,075.00</b>	<b>\$ 3,075.00</b>	<b>\$ 14,325.00</b>
<b>Total con IVA</b>	<b>\$ 2,407.00</b>	<b>\$ 3,799.00</b>	<b>\$ 3,277.00</b>	<b>\$ 3,567.00</b>	<b>\$ 3,567.00</b>	<b>\$ 16,617.00</b>

**Tabla 2.** Plan de costos, salario recibido.

#### 4.1.1 Plan de comunicación

La comunicación en este proyecto se define como el intercambio de información relevante entre los stakeholders involucrados en el desarrollo y aplicación del método

analítico para el cálculo de la relación de transmisión en mecanismos de 4 barras. Este intercambio debe ser claro, oportuno y adecuado al contexto de cada receptor para asegurar el cumplimiento de los objetivos del proyecto. Las comunicaciones deben ser claras, precisas y oportunas, asegurando que cada receptor reciba la información necesaria para su nivel de participación en el proyecto. Las comunicaciones en este proyecto pueden darse a través de distintos medios y formatos, entre ellos:

- Documentos técnicos (planes, cronogramas, reportes de avance, manuales).
- Informes de progreso (detallando hitos alcanzados y próximos pasos).
- Reuniones formales (para toma de decisiones y definición de procedimientos).
- Sesiones técnicas (para discusión de avances y ajustes metodológicos).
- Material de divulgación (presentaciones).

Para garantizar una comunicación eficiente, se aplicarán las siguientes estrategias:

- 1. Uso de Herramientas Digitales Plataformas como Microsoft teams
- 2. Optimización de Reuniones Se establecerá una estructura clara: agenda previa, objetivos específicos Se evitarán reuniones innecesarias para optimizar el tiempo.
- 3. Informes y Reportes Uso de plantillas estandarizadas para informes de avance, calidad y reuniones. Generación de reportes en herramientas de gestión de proyectos. Para asegurar que las comunicaciones sean efectivas y alineadas con los objetivos del proyecto, se implementará un sistema de monitoreo y retroalimentación:

- Revisión del plan de comunicaciones para optimizarlo según las necesidades del proyecto. La estrategia de comunicación se enfoca en la claridad, periodicidad y optimización de los recursos para facilitar el éxito del proyecto.

Actividades de comunicaciones				
ID Actividad	Información (que)	Receptores (quiénes)	Rangos de tiempo (cuando)	Métodos (cómo)
001	Informe de avance del proyecto (estado actual, hitos alcanzados).	Patrocinador, Comité Directivo.	Semanal	Informe en pdf, enviado al correo electrónico, reunión virtual.
002	Reporte sobre los cálculos	Líder, Gerente del proyecto.	Mensual	Documento en forma digital, discusión de resultados.
003	Evaluación de calidad y validación del método.	Comité Directivo.	Mensual	Pruebas, presentación de resultados.
004	Publicación de avances	Comunidad académica, Comité Directivo.	Semanal	Exposición, reunión en línea.

**Tabla 3.** Plan de comunicaciones

#### 4.1.2 Proceso de comunicaciones

El Plan de Comunicaciones establece cómo se llevará a cabo la difusión de la información dentro del proyecto, asegurando que todos los stakeholders estén informados de manera adecuada y en el momento oportuno. Este plan cubre la identificación de las actividades de comunicación, los métodos para llevarlas a cabo, y la programación para que la información se entregue a los destinatarios correctos.

Objetivos del plan de comunicación:

- Asegurar que todos los involucrados están bien informados.

Uno de los puntos más importantes fue garantizar que la información clave llegara a las personas correctas en el momento indicado. Esto evito que hubiera malentendidos y permitió que tanto el asesor académico como quien desarrollo el proyecto estuvieran alineados respecto al avance, los objetivos y las decisiones tomadas.

- Llevar un control claro de las comunicaciones.

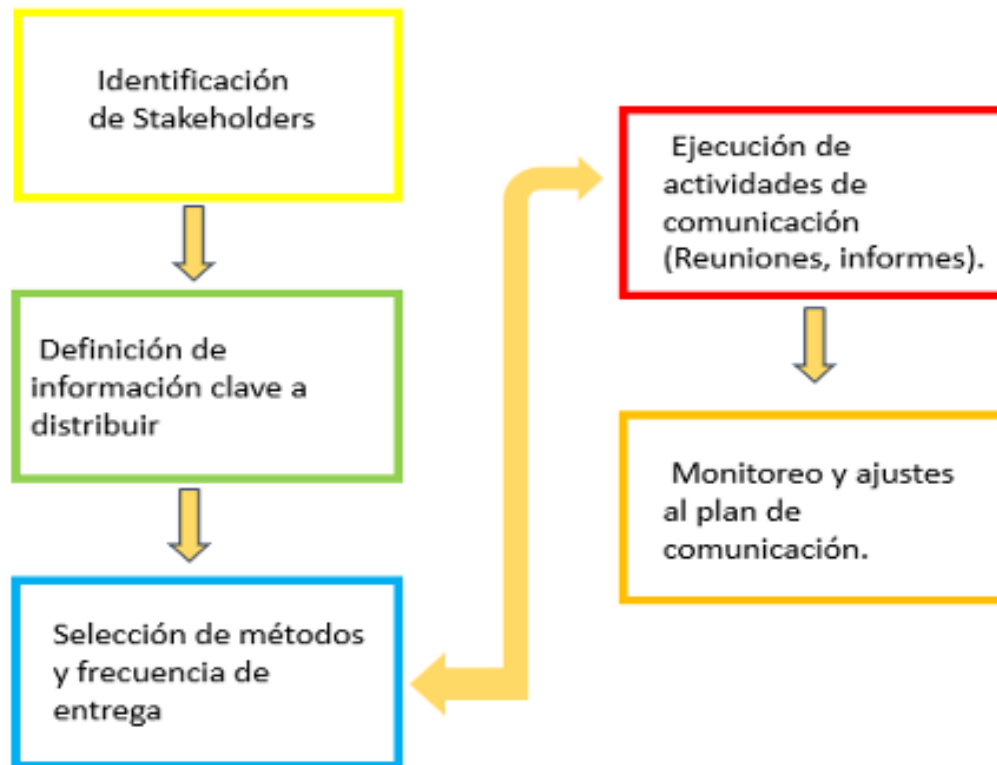
Para no perder ningún detalle, se estableció un orden para documentar las comunicaciones importantes, como observaciones de asesorías o correcciones por hacer. Esto facilito el seguimiento del trabajo y ayudo a organizar de manera eficiente.

- Mejorar la toma de decisión.

Tener la información clara y a tiempo hizo que fuera más fácil decidir qué camino seguir, sobre todo cuando había que elegir entre dos enfoques o corregir algo del modelo analítico. Cada decisión estuvo respaldada por antecedentes y discusiones previas, lo cual redujo la incertidumbre y fortaleció la coherencia del proyecto.

- Usar bien los medios de comunicación disponibles

Por último, se cuidó no gastar tiempo en herramientas innecesarias. Se utilizaron canales sencillos pero efectivos, como el correo electrónico para cosas más formales y Google Drive para compartir avances, lo que permitió que todo fuera más práctico y accesible.



**Figura 1.** Diagrama de actividades

- Actividades

**1.Reuniones de seguimiento:** Reuniones periódicas semanales.

**2. Informes de progreso:** Se deben enviar informes periódicos(semanales) para dar cuenta de los avances, los logros alcanzados, los problemas encontrados y las soluciones propuestas.

**3. Revisiones de calidad:** Se realizarán reuniones periódicas para revisar la calidad del trabajo y asegurar que los entregables cumplen con los estándares previamente establecidos.

**4. Documentación técnica:** Publicación, informes técnicos y manuales que describan los resultados del proyecto y el uso del método analítico.

**5. Publicaciones externas:** Comunicados informativos para mantener al público y a las partes interesadas externas informados de los avances.

#### 4.1.3 Plan de proyecto

El objetivo principal de este proyecto es desarrollar y validar un modelo analítico que permita comprender cómo las tolerancias dimensionales influyen en el comportamiento de un mecanismo de cuatro barras. Para ello, se empleará el cálculo de diferenciales totales aplicado a las funciones que describen el movimiento del sistema. Este enfoque busca establecer una relación clara entre las pequeñas variaciones en las dimensiones de los eslabones y los errores resultantes en la posición del mecanismo, con especial atención al eslabón de salida.

Como parte del proceso, se realizarán simulaciones por computadora que permitan analizar diferentes escenarios, modificando configuraciones de tolerancias para ver cómo influyen en el resultado final. Y aunque el enfoque es principalmente teórico, también se contempla la posibilidad de construir prototipos físicos en una etapa posterior, con el fin de comparar los resultados del modelo con datos experimentales y así validar su efectividad de forma más completa.

- Metodología

1. Revisión de literatura: Análisis de normativas internacionales (ISO 286-2 e ISO 2768-1) y estudios previos sobre tolerancias dimensionales en mecanismos.
2. Formulación del modelo matemático: Desarrollo de ecuaciones que describan el comportamiento del mecanismo considerando errores dimensionales.
3. Implementación computacional: Creación de simulación para analizar la relación entre tolerancias y errores posicionales.
4. Validación del modelo: Comparación con modelos teóricos y posibles pruebas experimentales con prototipos físicos.
5. Análisis de sensibilidad: Evaluación de cómo la variación en los parámetros del mecanismo afecta su precisión.
6. Elaboración de documentación técnica: Reportes con procedimientos y análisis de resultados

- Equipo del proyecto

Tania Martínez Angel - Investigadora principal, responsable del desarrollo matemático y validación del modelo.

Gustavo Manuel Minquiz Xolo - Supervisión y orientación técnica.

No	Nombre de fase o etapa	Descripción	Duración (meses)	Costo (\$)	Entregables	Fecha de inicio	Fecha de vencimiento
1	Investigación teórica	Analizar documentos sobre mecanismos de 4 barras y tolerancias dimensionales	1	\$0.00	Documento PDF	21/02/2025	/03/2025
2	Desarrollo del modelo matemático	Formulación de ecuaciones y análisis de tolerancias	2	\$0.00	Modelo matemático documentado	17/03/2025	17/03/2025
3	Simulación computacional	Implementación del modelo en Software	1	\$0.00	Resultados de simulación y análisis comparativo	17/03/2025	17/03/2025
4	Validación	Comparación de los resultados del modelo matemático	4	\$0.00	Informe de validación de resultados	21/03/2025	17/05/2025
5	Documentación final	Elaboración de la tesina	4	\$0.00	Tesina documentando el proyecto final	17/03/2025	17/03/2025

**Tabla 4.** Resumen de proyecto

Se diseñó un calendario de actividades que siguió un avance lógico, acorde con el desarrollo del proyecto. Las etapas consideraron desde la investigación teórica inicial, pasando por la creación y desarrollo del modelo analítico, hasta llegar al análisis de errores y la presentación de resultados. Para cada fase se estableció una duración aproximada en semanas, junto con objetivos claros y las actividades principales a realizar. Esta organización permitió tener una visión más clara del proceso completo y ayudó a mantener metas alcanzables a corto y mediano plazo, facilitando así un progreso constante y ordenado.

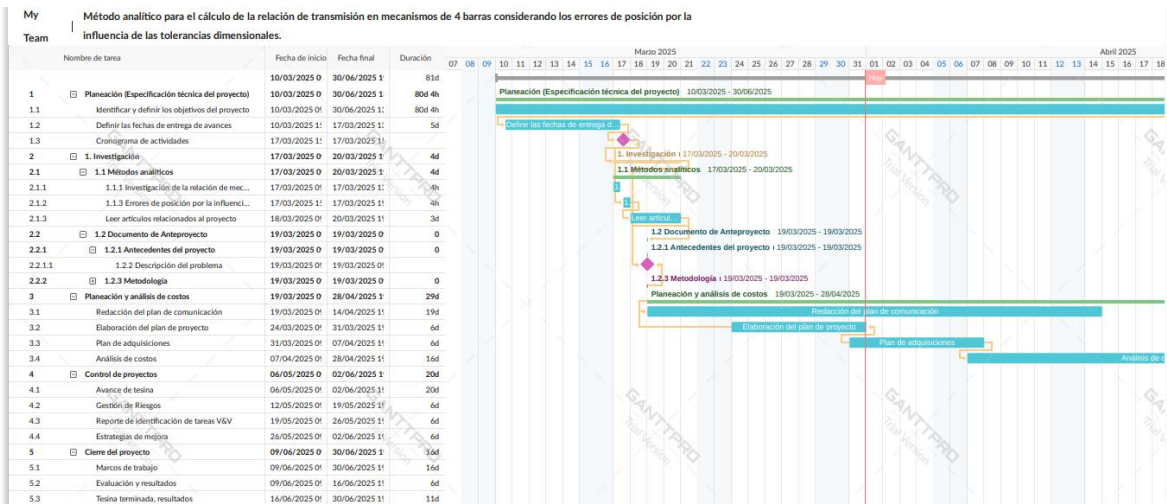


Figura 2. Calendario de actividades

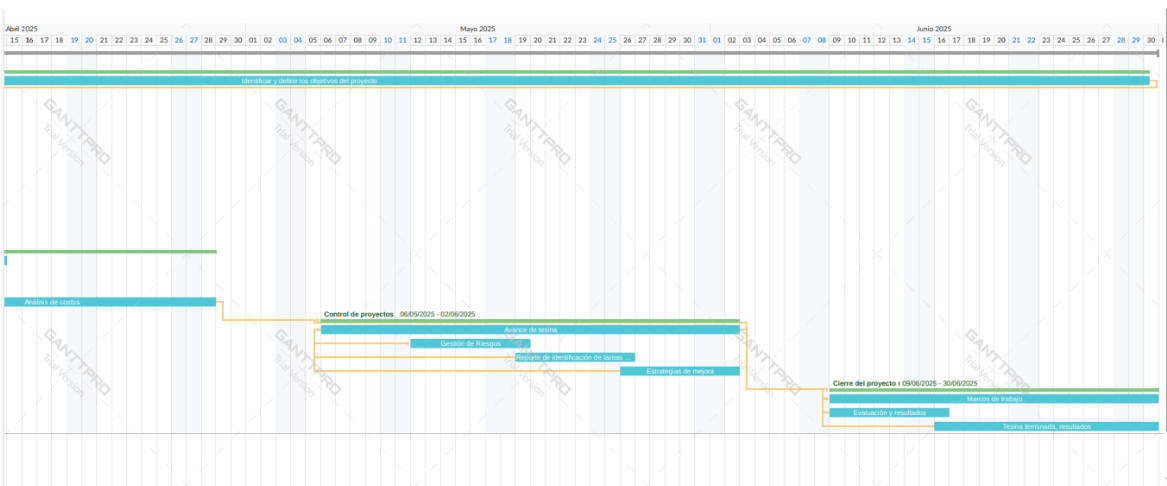


Figura 3. Diagrama de Gantt

#### 4.1.4 Plan de adquisiciones

Durante el desarrollo del proyecto fue necesario identificar los recursos materiales y herramientas necesarias para cada etapa, desde la investigación inicial hasta la validación del modelo. En un inicio, las adquisiciones se centraron en bibliografía técnica y software

como Excel o MATLAB, que fueron fundamentales para plantear y simular el modelo analítico.

En la siguiente tabla se resumen las adquisiciones planeadas y su relación con cada fase del proyecto:

No.	Categoría	Descripción	Cantidad	Etapa/Fecha de adquisición	Entregable (S/N)
1	Material bibliográfico	Documentación técnica y artículos científicos sobre métodos analíticos para mecanismos de 4 barras y análisis de tolerancias	3 documentos	Inicio del proyecto	S
2	Software	MATLAB, SolidWorks, o software de simulación	1 licencia	Segunda etapa	N
3	Equipo de cómputo	Laptop Lenovo con procesador Intel Core i5 de 12ª generación, 8 GB de memoria RAM DDR4, unidad de estado sólido (SSD) de 512 GB, pantalla Full HD de 15.6 pulgadas, teclado en español, cámara web HD, sistema operativo Windows 11 preinstalado.	1 pza	Semana 1 del proyecto	N
4	Asesoría Técnica	Consultoría con experto en diseño mecánico o análisis de mecanismos	2 sesiones	Inicio del proyecto	N

**Tabla 5.** Plan de adquisiciones

## 4.2 Control del proyecto

Esta etapa, conocida como control del proyecto, se centró en monitorear, revisar y ajustar todo lo que fuera necesario para asegurar que cada fase se cumpliera de acuerdo con los objetivos planteados desde un inicio.

En otras palabras, esta parte del proceso permitió detectar a tiempo cualquier desviación respecto al plan original, ya fuera en el cronograma, en los recursos o incluso

en el enfoque metodológico. Gracias a eso, fue posible tomar decisiones informadas cuando se necesitaban cambios o mejoras, sin perder de vista la meta final.

El control del proyecto también implicó evaluar constantemente los riesgos, revisar si los tiempos establecidos eran realistas, y aplicar estrategias que ayudaran a mejorar el desarrollo del modelo y la presentación de resultados. Este monitoreo fue clave para que el proyecto se mantuviera alineado tanto en la parte técnica como en la parte organizativa.

En los siguientes apartados se detallan los principales elementos que formaron parte de esta etapa: la gestión de riesgos, el control integrado de cambios y las estrategias de mejora que se aplicaron conforme avanzaba el trabajo.

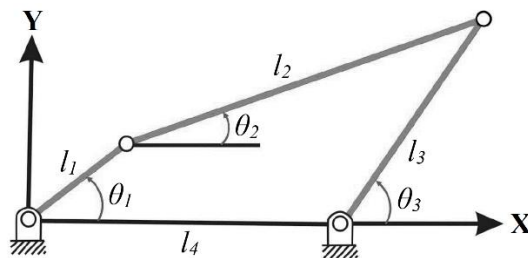
#### **4.2.1 Desarrollo del modelo analítico**

##### ***4.2.1.1 Modelo matemático para evaluar la influencia de las tolerancias y errores en la exactitud de posicionamiento***

En esta sección, se desarrollará un modelo que permita conocer las influencias de las tolerancias dimensionales de fabricación de los parámetros geométricos y de la desviación angular del eslabón de entrada sobre el error de posicionamiento de los eslabones de salida de un mecanismo de cuatro barras. Para ello, se formularán las ecuaciones de restricción cinemática del mecanismo y se calcularán sus diferenciales totales. Los resultados del modelo matemático, que tiene en cuenta la influencia de las tolerancias dimensionales de los parámetros geométricos, permiten identificar cuál de las dimensiones funcionales de los eslabones del mecanismo es la que tiene mayor o menor influencia en dichos errores de posicionamiento. De esta manera, se puede determinar a qué eslabón asignar un mayor o menor grado de precisión dimensional, con el fin de

garantizar un posicionamiento riguroso del elemento de salida en caso de que el diseñador así lo requiera.

El mecanismo de cuatro barras puede considerarse como un mecanismo con movimiento plano. Las longitudes de los eslabones  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $l_3$ ,  $l_4$  y sus respectivos ángulos están representados en la figura 4. Se puede observar que tanto el eslabón  $l_1$  como el eslabón  $l_3$  están unidos al bastidor fijo por uno de sus extremos. Este mecanismo posee un grado de libertad (como lo demuestra la conocida ecuación de Kutzbach–Gruebler)). Por lo tanto, conociendo las longitudes de los eslabones, basta con un solo parámetro de entrada para definir completamente sus posiciones, siendo este el ángulo del eslabón  $l_1$ , denotado como  $\theta_1$ .



**Figura 4.** Notación clásica del mecanismo de cuatro barras.

Las ecuaciones de restricción cinemática obtenidas a partir de la proyección del mecanismo sobre el plano  $x$  y, y los ejes están dados por las ecuaciones (1) y (2), respectivamente:

$$l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2 - l_3 \cos \theta_3 - l_4 = 0 , \quad (1)$$

$$l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2 - l_3 \sin \theta_3 = 0 . \quad (2)$$

Las ecuaciones escalares trigonométricas (1) y (2) pueden resolverse simultáneamente para encontrar los ángulos de salida  $\theta_2$  and  $\theta_3$ , definidos de la siguiente manera:

$$\theta_2 = 2 \tan^{-1} \left( \frac{-E \pm \sqrt{E^2 - 4DF}}{2D} \right), \quad (3)$$

$$\theta_3 = 2 \tan^{-1} \left( \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \right), \quad (4)$$

donde

$$A = \cos \theta_1 - k_1 - k_2 \cos \theta_1 + k_3 ,$$

$$B = E = -2 \sin \theta_1 ,$$

$$C = k_1 - (k_2 + 1) \cos \theta_1 + k_3 ,$$

$$D = \cos \theta_1 - k_1 + k_4 \cos \theta_1 + k_5 ,$$

$$F = k_1 + (k_4 - 1) \cos \theta_1 + k_5 ,$$

$$k_1 = \frac{l_4}{l_1} ,$$

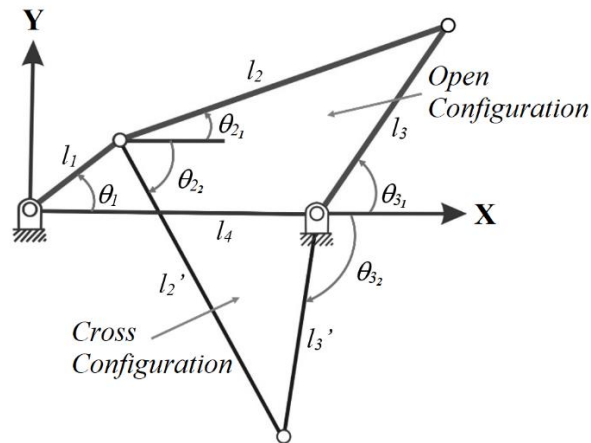
$$k_2 = \frac{l_4}{l_3} ,$$

$$k_3 = \frac{l_1^2 - l_2^2 + l_3^2 + l_4^2}{2l_1l_3} ,$$

$$k_4 = \frac{l_4}{l_2} ,$$

$$k_5 = \frac{l_3^2 - l_1^2 - l_2^2 - l_4^2}{2l_1l_2}.$$

Las ecuaciones (3) y (4) tienen dos soluciones, correspondientes a las configuraciones abierta y cruzada que se muestran en la figura 5.



**Figura 5.** Configuraciones abierta y cruzada del mecanismo de cuatro barras.

#### **4.2.1.2 Diferenciales totales de las ecuaciones de restricción cinemática y errores posicionales de los eslabones de salida.**

A continuación, determinaremos el diferencial total de las funciones de restricción cinemática que gobiernan el campo de posiciones. Estos diferenciales totales conducen a un sistema de ecuaciones cuya solución proporciona los errores posicionales de los eslabones móviles de salida en función de las tolerancias dimensionales de fabricación y de una matriz de incidencia que varía con cada una de las posiciones del elemento de entrada.

Luego, el diferencial total de las ecuaciones (1) y (2) con respecto a las coordenadas de entrada y salida ( $\theta_1$ ,  $\theta_2$  and  $\theta_3$ ) y a los parámetros geométricos ( $l_1$ ,  $l_2$ ,  $l_3$  y  $l_4$ ), se expresa como:

$$\cos \theta_1 \delta l_1 - l_1 \sin \theta_1 \delta \theta_1 + \cos \theta_2 \delta l_2 - l_2 \sin \theta_2 \delta \theta_2 - \cos \theta_3 \delta l_3 + l_3 \sin \theta_3 \delta \theta_3 - \delta l_4 = 0 , \quad (5)$$

$$\sin \theta_1 \delta l_1 + l_1 \cos \theta_1 \delta \theta_1 + \sin \theta_2 \delta l_2 + l_2 \cos \theta_2 \delta \theta_2 - \sin \theta_3 \delta l_3 - l_3 \cos \theta_3 \delta \theta_3 = 0 . \quad (6)$$

El interés principal radica en determinar los errores posicionales del eslabón de salida; estos errores son función del error de posicionamiento  $\delta \theta_1$  de la coordenada de entrada y de las tolerancias dimensionales  $\delta l_1$ ,  $\delta l_2$ ,  $\delta l_3$  and  $\delta l_4$ . Por lo tanto, podemos expresar los diferenciales totales indicados en las ecuaciones (5) y (6) en forma matricial, mediante:

$$\begin{bmatrix} \cos \theta_1 & \cos \theta_2 & -\cos \theta_3 & -1 & -l_1 \sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \sin \theta_2 & -\sin \theta_3 & 0 & l_1 \cos \theta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta l_1 \\ \delta l_2 \\ \delta l_3 \\ \delta l_4 \\ \delta \theta_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -l_2 \sin \theta_2 & l_3 \sin \theta_3 \\ l_2 \cos \theta_2 & -l_3 \cos \theta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \theta_2 \\ \delta \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} . \quad (7)$$

Así, los vectores de error posicional de salida  $\delta \theta_2$  y  $\delta \theta_3$  se expresan mediante:

$$\begin{bmatrix} \delta \theta_2 \\ \delta \theta_3 \end{bmatrix} = -[B]^{-1}[A] \begin{bmatrix} \delta l_1 \\ \delta l_2 \\ \delta l_3 \\ \delta l_4 \\ \delta \theta_1 \end{bmatrix} , \quad (8)$$

donde

$$[A] = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & \cos \theta_2 & -\cos \theta_3 & -1 & -l_1 \sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \sin \theta_2 & -\sin \theta_3 & 0 & l_1 \cos \theta_1 \end{bmatrix} ,$$

$$[B]^{-1} = \frac{1}{l_2 l_3 \sin(\theta_2 - \theta_3)} \begin{bmatrix} -l_3 \cos \theta_3 & -l_3 \sin \theta_3 \\ -l_2 \cos \theta_2 & -l_2 \sin \theta_2 \end{bmatrix}.$$

El producto  $-[B]^{-1}[A]$  de ambas matrices forma la matriz  $[E]$ , que contiene los coeficientes de influencia ( $\varepsilon_{ij}$ ), reduciendo la ecuación (8) de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \delta\theta_2 \\ \delta\theta_3 \end{bmatrix} = [E] \begin{bmatrix} \delta l_1 \\ \delta l_2 \\ \delta l_3 \\ \delta l_4 \\ \delta\theta_1 \end{bmatrix}, \quad (9)$$

donde

$$[E] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{24} & \varepsilon_{25} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} & \varepsilon_{34} & \varepsilon_{35} \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Cada uno de los términos  $\varepsilon_{ij}$  de la matriz  $[E]$  será igual a:

$$\varepsilon_{21} = \frac{\cos(\theta_3 - \theta_1)}{l_2 \sin(\theta_2 - \theta_3)},$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\cos(\theta_3 - \theta_2)}{l_2 \sin(\theta_2 - \theta_3)},$$

$$\varepsilon_{23} = \frac{-1}{l_2 \sin(\theta_2 - \theta_3)},$$

$$\varepsilon_{24} = \frac{-\cos \theta_3}{l_2 \sin(\theta_2 - \theta_3)},$$

$$\varepsilon_{25} = \frac{-l_1 \sin(\theta_1 - \theta_3)}{l_2 \sin(\theta_2 - \theta_3)},$$

$$\varepsilon_{31} = \frac{\cos(\theta_2 - \theta_1)}{l_3 \sin(\theta_2 - \theta_3)},$$

$$\varepsilon_{32} = \frac{1}{l_3 \sin(\theta_2 - \theta_3)} ,$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{-\cos(\theta_2 - \theta_3)}{l_3 \sin(\theta_2 - \theta_3)} ,$$

$$\varepsilon_{34} = \frac{-\cos \theta_2}{l_3 \sin(\theta_2 - \theta_3)} ,$$

$$\varepsilon_{35} = \frac{-l_1 \sin(\theta_1 - \theta_2)}{l_3 \sin(\theta_2 - \theta_3)} .$$

En general,  $[E]$  es la matriz de incidencia derivada de la acción conjunta de los errores en la coordenada de entrada  $\delta\theta_1$  y de las tolerancias dimensionales de fabricación  $\delta l_1$ ,  $\delta l_2$ ,  $\delta l_3$  and  $\delta l_4$  de los parámetros geométricos del mecanismo. Cabe destacar que la ecuación (9) puede obtenerse siempre que el determinante de  $[B]^{-1}$  en la ecuación (8) sea distinto de cero. El determinante nulo de  $[B]^{-1}$  se obtiene cuando  $\sin(\theta_2 - \theta_3) = 0$ , por lo que se tiene la restricción  $(\theta_2 \neq \theta_3 + n\pi)$ ; con  $n \in \mathbb{Z}$ . Esto solo ocurre físicamente en un mecanismo especial de cuatro barras llamado "paralelogramo articulado", cuando el ángulo de entrada del elemento primario es 0 o  $\pi$ , en cuyo caso todos los eslabones del mecanismo están alineados entre sí .

Por lo tanto, el cálculo completo de los errores de posicionamiento para cada uno de los eslabones 2 y 3 de un mecanismo de cuatro barras se define reescribiendo la ecuación (8) como:

$$\delta\theta_2 = \varepsilon_{21}\delta l_1 + \varepsilon_{22}\delta l_2 + \varepsilon_{23}\delta l_3 + \varepsilon_{24}\delta l_4 + \varepsilon_{25}\delta\theta_1 , \quad (11)$$

$$\delta\theta_3 = \varepsilon_{31}\delta l_1 + \varepsilon_{32}\delta l_2 + \varepsilon_{33}\delta l_3 + \varepsilon_{34}\delta l_4 + \varepsilon_{35}\delta\theta_1 . \quad (12)$$

Es importante indicar que las magnitudes de  $\delta l_1$ ,  $\delta l_2$ ,  $\delta l_3$  y  $\delta l_4$  dependen de los valores asignados por las normas internacionales de Especificaciones y Verificación Dimensionales y Geométricas de Producto, en particular por la norma ISO 286-2:2010 (Geometrical product specifications (GPS) — sistemas de códigos ISO para tolerancias en tamaños lineales. Parte 2: Tablas de clases de tolerancia estándar y desviaciones límite para agujeros y ejes). El uso de esta norma nos permite asignar un rango de tolerancia basado en una medida nominal (en mm), que corresponde al parámetro geométrico funcional del mecanismo. Se han establecido veinte grados (o índices) de tolerancia, designados por las abreviaturas IT0, IT01 y IT1–IT18, desde el más preciso hasta el más amplio, cuyos valores numéricos se calculan para un conjunto de medidas nominales y constituyen las tolerancias fundamentales del sistema. Por otro lado, el error de posicionamiento  $\delta \theta_i$  correspondiente a la coordenada angular de entrada solo se aplica a los elementos que no realizan giros completos, es decir, para posiciones de trabajo específicas. Sus valores se asignan de acuerdo con la norma ISO 2768-1:1989 (Tolerancias generales — Parte 1: Tolerancias para dimensiones lineales y angulares sin indicaciones individuales de tolerancia).

Además, los coeficientes  $\epsilon_{21}$  a  $\epsilon_{24}$  y  $\epsilon_{31}$  a  $\epsilon_{34}$  poseen unidades de  $\frac{1}{unit\ length}$  y tiene signo variable, lo cual establece la posibilidad de que el diseñador controle el signo final del producto  $\epsilon_j \delta l_j$ , asignando una posición fundamental para la tolerancia dimensional  $\delta l_j$ , (el sistema ISO define 28 posiciones diferentes con respecto a la línea cero como zonas de tolerancia, ver desviaciones límite superior e inferior para ejes en ), con el fin de reducir el error final de salida en torno a una posición de operación específica del mecanismo. Los coeficientes  $\epsilon_{25}$  y  $\epsilon_{35}$  son adimensionales.

Finalmente, la posición real puede aproximarse mediante:

$$\theta_{2_{Real}} = \theta_2 + \delta\theta_2 , \quad (13)$$

$$\theta_{3_{Real}} = \theta_3 + \delta\theta_3 . \quad (14)$$

#### **4.2.1.3 Relación de transmisión**

La relación de transmisión se define como la velocidad angular de salida dividida por la velocidad angular de entrada del mecanismo. A continuación, se derivarán las ecuaciones correspondientes a la relación de transmisión en un mecanismo de cuatro barras; específicamente, se determinará la relación de transmisión entre el ángulo de entrada  $\theta_1$  y los ángulos de salida  $\theta_2$  y  $\theta_3$ .

El primer paso consiste en aislar uno de los dos ángulos de salida en el lado izquierdo de las ecuaciones (1) y (2); posteriormente, ambos lados de las ecuaciones se elevan al cuadrado y se suman, y finalmente se simplifican utilizando identidades trigonométricas. Al llevar a cabo este procedimiento para  $\theta_2$  y  $\theta_3$ , se obtienen las expresiones de Freudenstein:

$$l_1^2 - l_2^2 + l_3^2 + l_4^2 - 2l_1l_3(\cos(\theta_1 - \theta_3)) - 2l_1l_4 \cos \theta_1 + 2l_3l_4 \cos \theta_3 = 0 \quad (15)$$

$$l_1^2 + l_2^2 - l_3^2 + l_4^2 + 2l_1l_2(\cos(\theta_1 - \theta_2)) - 2l_1l_4 \cos \theta_1 - 2l_2l_4 \cos \theta_2 = 0 \quad (16)$$

A continuación, derivamos implícitamente las ecuaciones (15) y (16) con respecto a  $\theta_1$ , es decir:

$$2l_1 l_3 \sin(\theta_1 - \theta_3) \left(1 - \frac{d\theta_3}{d\theta_1}\right) + 2l_1 l_4 \sin \theta_1 - 2l_3 l_4 \sin \theta_3 \frac{d\theta_3}{d\theta_1} = 0 ,$$

$$-2l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \left(1 - \frac{d\theta_2}{d\theta_1}\right) + 2l_1 l_4 \sin \theta_1 + 2l_2 l_4 \sin \theta_2 \frac{d\theta_2}{d\theta_1} = 0 .$$

Como resultado, se despejan los términos:  $\frac{d\theta_2}{d\theta_1}$  ( $i_{21}$ ) y  $\frac{d\theta_3}{d\theta_1}$  ( $i_{31}$ ) que definen las relaciones de transmisión entre los ángulos de salida y el ángulo de entrada, las cuales se expresan mediante:

$$i_{21} = \frac{d\theta_2}{d\theta_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - l_1 l_4 \sin \theta_1}{l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + l_2 l_4 \sin \theta_2} , \quad (17)$$

$$i_{31} = \frac{d\theta_3}{d\theta_1} = \frac{\omega_3}{\omega_1} = \frac{l_1 l_3 \sin(\theta_1 - \theta_3) + l_1 l_4 \sin \theta_1}{l_1 l_3 \sin(\theta_1 - \theta_3) + l_3 l_4 \sin \theta_3} . \quad (18)$$

Evidentemente, el cociente de las velocidades angulares es adimensional.

#### **4.2.1.4 Errores totales en la relación de transmisión**

Como se mostró en la sección anterior, se puede observar que la relación de transmisión puede expresarse como una función de la geometría y la posición angular de los eslabones del mecanismo de cuatro barras; por lo tanto, es sensible a los errores de posicionamiento y a las tolerancias dimensionales de fabricación.

En esta sección, calcularemos el diferencial total de las ecuaciones (17) y (18) con respecto a la posición angular y a los parámetros geométricos, con el fin de determinar el error total en las relaciones de transmisión, según las siguientes fórmulas:

$$\delta i_{21Total} = \frac{\delta i_{21}}{\delta l_1} + \frac{\delta i_{21}}{\delta l_2} + \frac{\delta i_{21}}{\delta l_4} + \frac{\delta i_{21}}{\delta \theta_1} + \frac{\delta i_{21}}{\delta \theta_2} , \quad (19)$$

$$\delta i_{31Total} = \frac{\delta i_{31}}{\delta l_1} + \frac{\delta i_{31}}{\delta l_3} + \frac{\delta i_{31}}{\delta l_4} + \frac{\delta i_{31}}{\delta \theta_1} + \frac{\delta i_{31}}{\delta \theta_3}, \quad (20)$$

donde

$$\frac{\delta i_{21}}{\delta l_1} = \frac{[l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - l_4 \sin(\theta_1)] [l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + l_2 l_4 \sin(\theta_2)] - [l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)] [l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - l_1 l_4 \sin(\theta_1)]}{[l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + l_2 l_4 \sin(\theta_2)]^2} \delta l_1,$$

$$\frac{\delta i_{21}}{\delta l_2} = \frac{[l_1 \sin(\theta_1 - \theta_2)] [l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + l_2 l_4 \sin(\theta_2)] - [l_1 \sin(\theta_1 - \theta_2) + l_4 \sin(\theta_2)] [l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - l_1 l_4 \sin(\theta_1)]}{[l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + l_2 l_4 \sin(\theta_2)]^2} \delta l_2,$$

$$\frac{\delta i_{21}}{\delta l_4} = \frac{[-l_1 \sin(\theta_1)] [l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + l_2 l_4 \sin(\theta_2)] - [l_2 \sin(\theta_2)] [l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - l_1 l_4 \sin(\theta_1)]}{[l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + l_2 l_4 \sin(\theta_2)]^2} \delta l_4,$$

$$\frac{\delta i_{21}}{\delta \theta_1} = \frac{[l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - l_1 l_4 \cos(\theta_1)] [l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + l_2 l_4 \sin(\theta_2)] - [l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)] [l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - l_1 l_4 \sin(\theta_1)]}{[l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + l_2 l_4 \sin(\theta_2)]^2} \delta \theta_1,$$

$$\frac{\delta i_{21}}{\delta \theta_2} = \frac{[-l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)] [l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + l_2 l_4 \sin(\theta_2)] - [-l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + l_2 l_4 \cos(\theta_2)] [l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - l_1 l_4 \sin(\theta_1)]}{[l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + l_2 l_4 \sin(\theta_2)]^2} \delta \theta_2,$$

$$\frac{\delta i_{31}}{\delta l_1} = \frac{[l_3 \sin(\theta_1 - \theta_3) + l_4 \sin(\theta_1)] [l_1 l_3 \sin(\theta_1 - \theta_3) + l_3 l_4 \sin(\theta_3)] - [l_3 \sin(\theta_1 - \theta_3)] [l_1 l_3 \sin(\theta_1 - \theta_3) + l_1 l_4 \sin(\theta_1)]}{[l_1 l_3 \sin(\theta_1 - \theta_3) + l_3 l_4 \sin(\theta_3)]^2} \delta l_1,$$

$$\frac{\delta i_{31}}{\delta l_3} = \frac{[l_1 \sin(\theta_1 - \theta_3)] [l_1 l_3 \sin(\theta_1 - \theta_3) + l_3 l_4 \sin(\theta_3)] - [l_1 \sin(\theta_1 - \theta_3) + l_4 \sin(\theta_3)] [l_1 l_3 \sin(\theta_1 - \theta_3) + l_1 l_4 \sin(\theta_1)]}{[l_1 l_3 \sin(\theta_1 - \theta_3) + l_3 l_4 \sin(\theta_3)]^2} \delta l_3,$$

$$\frac{\delta i_{31}}{\delta l_4} = \frac{[l_1 \sin(\theta_1)][l_1 l_3 \sin(\theta_1 - \theta_3) + l_3 l_4 \sin(\theta_3)] - [l_3 \sin(\theta_3)][l_1 l_3 \sin(\theta_1 - \theta_3) + l_1 l_4 \sin(\theta_1)]}{[l_1 l_3 \sin(\theta_1 - \theta_3) + l_3 l_4 \sin(\theta_3)]^2} \delta l_4 ,$$

$$\frac{\delta i_{31}}{\delta \theta_1} = \frac{[l_1 l_3 \cos(\theta_1 - \theta_3) + l_1 l_4 \cos(\theta_1)][l_1 l_3 \sin(\theta_1 - \theta_3) + l_3 l_4 \sin(\theta_3)] - [l_1 l_3 \cos(\theta_1 - \theta_3)][l_1 l_3 \sin(\theta_1 - \theta_3) + l_1 l_4 \sin(\theta_1)]}{[l_1 l_3 \sin(\theta_1 - \theta_3) + l_3 l_4 \sin(\theta_3)]^2} \delta \theta_1 ,$$

$$\frac{\delta i_{31}}{\delta \theta_3} = \frac{[-l_1 l_3 \cos(\theta_1 - \theta_3)][l_1 l_3 \sin(\theta_1 - \theta_3) + l_3 l_4 \sin(\theta_3)] - [-l_1 l_3 \cos(\theta_1 - \theta_3) + l_3 l_4 \cos(\theta_3)][l_1 l_3 \sin(\theta_1 - \theta_3) + l_1 l_4 \sin(\theta_1)]}{[l_1 l_3 \sin(\theta_1 - \theta_3) + l_3 l_4 \sin(\theta_3)]^2} \delta \theta_3 .$$

Si en las expresiones anteriores sustituimos los errores de posicionamiento  $\delta \theta_2$  y  $\delta \theta_3$ , definidos en las ecuaciones (11) y (12), las fórmulas (19) y (20) pueden reescribirse en función de las tolerancias dimensionales  $\delta l_1$ ,  $\delta l_2$ ,  $\delta l_3$ ,  $\delta l_4$  y  $\delta \theta_1$  de la siguiente manera:

$$\delta i_{21Total} = \lambda_{l_1} \delta l_1 + \lambda_{l_2} \delta l_2 + \lambda_{l_3} \delta l_3 + \lambda_{l_4} \delta l_4 + \lambda_{\theta_1} \delta \theta_1 , \quad (21)$$

$$\delta i_{31Total} = \gamma_{l_1} \delta l_1 + \gamma_{l_2} \delta l_2 + \gamma_{l_3} \delta l_3 + \gamma_{l_4} \delta l_4 + \gamma_{\theta_1} \delta \theta_1 , \quad (22)$$

donde

$$\lambda_{l_1} = \frac{l_2^2 l_4 \sin(\theta_1 - \theta_2) \sin(\theta_2) - l_2 l_4^2 \sin(\theta_1) \sin(\theta_2)}{[l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + l_2 l_4 \sin(\theta_2)]^2} + \left[ \frac{[-l_1^2 l_2 l_4 \sin(\theta_1) \cos(\theta_1 - \theta_2) + l_1 l_2 l_4^2 \sin(\theta_1) \cos(\theta_2) - l_1 l_2^2 l_4 \sin(\theta_1)]}{[l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + l_2 l_4 \sin(\theta_2)]^2} \right] \left[ \frac{\cos(\theta_3 - \theta_1)}{l_2 \sin(\theta_2 - \theta_3)} \right] ,$$

$$\lambda_{l_2} = \frac{l_1^2 l_4 \sin(\theta_1 - \theta_2) \sin(\theta_1) + l_1 l_4^2 \sin(\theta_1) \sin(\theta_2)}{[l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + l_2 l_4 \sin(\theta_2)]^2} + \left[ \frac{[-l_1^2 l_2 l_4 \sin(\theta_1) \cos(\theta_1 - \theta_2) + l_1 l_2 l_4^2 \sin(\theta_1) \cos(\theta_2) - l_1 l_2^2 l_4 \sin(\theta_1)]}{[l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + l_2 l_4 \sin(\theta_2)]^2} \right] \left[ \frac{\cos(\theta_3 - \theta_2)}{l_2 \sin(\theta_2 - \theta_3)} \right] ,$$

$$\lambda_{l_3} = \left[ \frac{[-l_1^2 l_2 l_4 \sin(\theta_1) \cos(\theta_1 - \theta_2) + l_1 l_2 l_4^2 \sin(\theta_1) \cos(\theta_2) - l_1 l_2^2 l_4 \sin(\theta_1)]}{[l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + l_2 l_4 \sin(\theta_2)]^2} \right] \left[ \frac{-1}{l_2 \sin(\theta_2 - \theta_3)} \right] ,$$

$$\lambda_{l_4} = - \left[ \frac{l_1^2 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \sin(\theta_1) + l_1 l_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \sin(\theta_2)}{[l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + l_2 l_4 \sin(\theta_2)]^2} \right] + \left[ \frac{[-l_1^2 l_2 l_4 \sin(\theta_1) \cos(\theta_1 - \theta_2) + l_1 l_2 l_4^2 \sin(\theta_1) \cos(\theta_2) - l_1 l_2^2 l_4 \sin(\theta_1)]}{[l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + l_2 l_4 \sin(\theta_2)]^2} \right] \left[ \frac{-\cos(\theta_3)}{l_2 \sin(\theta_2 - \theta_3)} \right],$$

$$\lambda_{\theta_1} = \frac{l_1 l_2^2 l_4 \sin(\theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2) - l_1 l_2 l_4^2 \sin(\theta_2) \cos(\theta_1) + l_1^2 l_2 l_4 \sin(\theta_2)}{[l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + l_2 l_4 \sin(\theta_2)]^2} + \left[ \frac{[-l_1^2 l_2 l_4 \sin(\theta_1) \cos(\theta_1 - \theta_2) + l_1 l_2 l_4^2 \sin(\theta_1) \cos(\theta_2) - l_1 l_2^2 l_4 \sin(\theta_1)]}{[l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + l_2 l_4 \sin(\theta_2)]^2} \right] \left[ \frac{-l_1 \sin(\theta_1 - \theta_3)}{l_2 \sin(\theta_2 - \theta_3)} \right],$$

$$\gamma_{l_1} = \frac{l_3^2 l_4 \sin(\theta_1 - \theta_3) \sin(\theta_3) + l_3 l_4^2 \sin(\theta_1) \sin(\theta_3)}{[l_1 l_3 \sin(\theta_1 - \theta_3) + l_3 l_4 \sin(\theta_3)]^2} + \left[ \frac{[l_1^2 l_3 l_4 \sin(\theta_1) \cos(\theta_1 - \theta_3) - l_1 l_3 l_4^2 \sin(\theta_1) \cos(\theta_3) - l_1 l_3^2 l_4 \sin(\theta_1)]}{[l_1 l_3 \sin(\theta_1 - \theta_3) + l_3 l_4 \sin(\theta_3)]^2} \right] \left[ \frac{\cos(\theta_2 - \theta_1)}{l_3 \sin(\theta_2 - \theta_3)} \right],$$

$$\gamma_{l_2} = \left[ \frac{l_1^2 l_3 l_4 \sin(\theta_1) \cos(\theta_1 - \theta_3) - l_1 l_3 l_4^2 \sin(\theta_1) \cos(\theta_3) - l_1 l_3^2 l_4 \sin(\theta_1)}{[l_1 l_3 \sin(\theta_1 - \theta_3) + l_3 l_4 \sin(\theta_3)]^2} \right] \left[ \frac{1}{l_3 \sin(\theta_2 - \theta_3)} \right],$$

$$\gamma_{l_3} = - \left[ \frac{[l_1^2 l_4 \sin(\theta_1 - \theta_3) \sin(\theta_1) + l_1 l_4^2 \sin(\theta_1) \sin(\theta_3)]}{[l_1 l_3 \sin(\theta_1 - \theta_3) + l_3 l_4 \sin(\theta_3)]^2} \right] + \left[ \frac{[l_1^2 l_3 l_4 \sin(\theta_1) \cos(\theta_1 - \theta_3) - l_1 l_3 l_4^2 \sin(\theta_1) \cos(\theta_3) - l_1 l_3^2 l_4 \sin(\theta_1)]}{[l_1 l_3 \sin(\theta_1 - \theta_3) + l_3 l_4 \sin(\theta_3)]^2} \right] \left[ \frac{-\cos(\theta_2 - \theta_3)}{l_3 \sin(\theta_2 - \theta_3)} \right],$$

$$\gamma_{l_4} = \frac{l_1^2 l_3 \sin(\theta_1 - \theta_3) \sin(\theta_1) - l_1 l_3^2 \sin(\theta_1 - \theta_3) \sin(\theta_3)}{[l_1 l_3 \sin(\theta_1 - \theta_3) + l_3 l_4 \sin(\theta_3)]^2} + \left[ \frac{[l_1^2 l_3 l_4 \sin(\theta_1) \cos(\theta_1 - \theta_3) - l_1 l_3 l_4^2 \sin(\theta_1) \cos(\theta_3) - l_1 l_3^2 l_4 \sin(\theta_1)]}{[l_1 l_3 \sin(\theta_1 - \theta_3) + l_3 l_4 \sin(\theta_3)]^2} \right] \left[ \frac{-\cos(\theta_2)}{l_3 \sin(\theta_2 - \theta_3)} \right],$$

$$\gamma_{\theta_1} = \frac{l_1 l_3^2 l_4 \sin(\theta_3) \cos(\theta_1 - \theta_3) + l_1 l_3 l_4^2 \sin(\theta_3) \cos(\theta_1) - l_1^2 l_3 l_4 \sin(\theta_3)}{[l_1 l_3 \sin(\theta_1 - \theta_3) + l_3 l_4 \sin(\theta_3)]^2} + \left[ \frac{[l_1^2 l_3 l_4 \sin(\theta_1) \cos(\theta_1 - \theta_3) - l_1 l_3 l_4^2 \sin(\theta_1) \cos(\theta_3) - l_1 l_3^2 l_4 \sin(\theta_1)]}{[l_1 l_3 \sin(\theta_1 - \theta_3) + l_3 l_4 \sin(\theta_3)]^2} \right] \left[ \frac{-l_1 \sin(\theta_1 - \theta_2)}{l_3 \sin(\theta_2 - \theta_3)} \right],$$

De acuerdo con las expresiones (21) y (22), escribamos formalmente los errores totales de las relaciones de transmisión  $i_{21}$  y  $i_{31}$  en forma matricial, definidos convenientemente como:

$$\begin{bmatrix} \delta i_{21Total} \\ \delta i_{31Total} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{l_1} & \lambda_{l_2} & \lambda_{l_3} & \lambda_{l_4} & \lambda_{\theta_1} \\ \gamma_{l_1} & \gamma_{l_2} & \gamma_{l_3} & \gamma_{l_4} & \gamma_{\theta_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta l_1 \\ \delta l_2 \\ \delta l_3 \\ \delta l_4 \\ \delta \theta_1 \end{bmatrix}. \quad (23)$$

Finalmente, las relaciones de transmisión reales pueden aproximarse mediante:

$$i_{21Real} = i_{21} + \delta i_{21Total}, \quad (24)$$

$$i_{31Real} = i_{31} + \delta i_{31Total}. \quad (25)$$

#### 4.2.2 Gestión de riesgos

A lo largo del desarrollo del proyecto, fue importante reconocer que, como en cualquier otro trabajo de ingeniería, siempre existe la posibilidad de que surjan imprevistos. Por eso, se aplicó una estrategia de gestión de riesgos con el fin de anticiparnos a situaciones que pudieran afectar el avance del proyecto o comprometer sus resultados.

- Formulario de identificación de riesgos

#### 4.2.2.1 Parámetros geométricos incorrectos

Categoría	Detalles
ID del riesgo	R1
Calificación general:	12 (Probabilidad: 3 = >25%, Impacto: 4 = Severo)
Responsable del riesgo:	Encargado de Diseño
Categoría del riesgo:	Técnico
Descripción detallada del riesgo:	Uso de dimensiones incorrectas o incompletas en el modelo puede llevar a resultados no confiables.
Estrategia de respuesta:	Mitigación – Validar datos con herramientas CAD y revisión cruzada.
Otra información relevante:	Control de versiones y bitácora de parámetros pueden mitigar errores.
Momento estimado del riesgo:	Inicio del modelado matemático.

**Tabla 6.** Identificación de riesgos (parámetros geométricos)

Categoría	Detalles
Probabilidad:	3 = >25%
Impacto:	Impacto: 4 = Severo)
Fecha de respuesta requerida:	Primeras Semanas de ejecución.
Plan de contingencia:	Utilizar valores promedio o literatura técnica si no se accede a los datos reales.
Tendencias del riesgo:	Tendencia común en proyectos con dependencia de datos externos.
Interesados clave:	Jefe técnico
Riesgos secundarios:	Pérdida de precisión en el modelo si se usan suposiciones.
Planes alternativos:	Reformular la etapa de validación para realizarla con datos simulados.

**Tabla 7.** Detalles de riesgo de riesgo en parámetros geométricos

#### 4.2.2.2 Modelo matemático inadecuado

Categoría	Detalles
ID del riesgo	R2
Calificación general:	10 (Probabilidad: 2 = >10 %, Impacto: 5 = Crítico)
Responsable del riesgo:	Asesor técnico
Categoría del riesgo:	Técnico – Modelado
Descripción detallada del riesgo:	Si el modelo no representa fielmente el mecanismo real, se compromete la validez del análisis.
Estrategia de respuesta:	Mitigación – Comparar con modelos de la literatura y ajustar conforme a validaciones.
Otra información relevante:	Se considerará retroalimentación de expertos en diseño de mecanismos.
Momento estimado del riesgo:	Durante el desarrollo analítico.

**Tabla 8.** Identificación de riesgos (modelo matemático)

Categoria	Detalles
Probabilidad:	2= >10%
Impacto:	5 = Crítico
Fecha de respuesta requerida:	Primeras Semanas.
Plan de contingencia:	Incluir revisiones por pares y pruebas unitarias.
Tendencias del riesgo:	Problema frecuente en proyectos con alta carga de programación.
Interesados clave:	Equipo de desarrollo, asesor académico
Riesgos secundarios:	Retrasos en las etapas posteriores por necesidad de reprogramar.
Planes alternativos:	Externalizar la validación con ayuda de expertos externos

**Tabla 9.** Detalles de riesgos en modelo matemático.

#### 4.2.2.3 limitaciones computacionales

Categoría	Detalles
ID del riesgo	R3
Calificación general:	9 (Probabilidad: 3 = >25%, Impacto: 3 = Importante)
Responsable del riesgo:	Encargado de simulaciones
Categoría del riesgo:	Recursos – Software/Hardware
Descripción detallada del riesgo:	Limitaciones de procesamiento para simulaciones numéricas detalladas.
Estrategia de respuesta:	Mitigación – Optimización de cálculos y uso de servidores externos si es necesario.
Otra información relevante:	Puede afectar tiempos de entrega.
Momento estimado del riesgo:	Durante simulaciones numéricas.

**Tabla 10.** Identificación de riesgos (limitaciones computacionales)

#### 4. 2.2.4 Tiempos de ejecución mayores a los estimados

Categoría	Detalles
ID del riesgo	R4
Calificación general:	9 (Probabilidad: 3 = >25%, Impacto: 3 = Importante)
Responsable del riesgo:	Coordinador de proyecto
Categoría del riesgo:	Gestión de proyecto
Descripción detallada del riesgo:	Las etapas del proyecto podrían extenderse por falta de tiempo, errores imprevistos o dificultad técnica.
Estrategia de respuesta:	Definir un cronograma detallado, establecer metas semanales y aplicar técnicas de gestión ágil para ajustar tareas
Otra información relevante:	Revisión continua de objetivos con asesores.
Momento estimado del riesgo:	A lo largo de todo el Proyecto.

**Tabla 11.** Identificación de riesgos (tiempos de ejecución mayores a los estimados)

**4.2.2.5 Acceso limitado a software o herramientas de simulación**

<b>Categoría</b>	<b>Detalles</b>
ID del riesgo	R5
Calificación general:	6 (Probabilidad: 2= >10%, Impacto: 3= Importante)
Responsable del riesgo:	Encargado de Diseño
Categoría del riesgo:	Gestión
Descripción detallada del riesgo:	Las etapas del proyecto podrían extenderse por falta de tiempo, errores imprevistos o dificultad técnica.
Estrategia de respuesta:	Utilizar software libre o académico (Octave, FreeCAD, Python), gestionar permisos con antelación o buscar convenios institucionales.
Momento estimado del riesgo:	Inicio de la implementación numérica

**Tabla 12.** Identificación de riesgos (acceso limitado a software)

#### 4.2.2.6 Plan de gestión de riesgos

Plan de gestión de riesgos											
Nombre del proyecto: Método analítico para el cálculo de la relación de transmisión en mecanismos de 4						Administrador del proyecto: Tania Martínez Angel					
				Probabilidad	Impacto	Puntaje de prioridad = Puntaje probable x Puntaje de impacto					
				5 > 75%	5 = Crítico	Puntaje de alta prioridad (rojo): se requiere un plan de respuesta Puntaje de prioridad media (amarillo): plan de respuesta según sea necesario Puntuación de prioridad baja (verde): plan de respuesta opcional					
				4 > 50%	4 = Severo						
				3 > 25%	3 = Importante						
				2 > 10%	2 = Moderado						
1 > 0%	1 = Menor										
Quien	Cuando	Qué				Quien	Cuando	Otro			
#	Quien identificó	Fecha de identificación	Descripción del riesgo	Probabilidad	Impacto	puntaje de prioridad	Propietario	Tipo de respuesta	Fecha de vencimiento	Plan de respuesta	Comentarios / Estado
1	Tania	24/02/2025	Parámetros incorrectos	3	4	12	líder técnico	Avoid	28/03/2025	Validar datos	Correctos
2	Tania	03/03/2025	Mod., matemático inadecu	2	5	10	Responsable del modelo	Avoid	28/03/2025	Consulta, expertos	Revisados
3	Tania	10/03/2025	Lím., computacionales	3	3	9	líder técnico	Reduce	04/04/2025	Uso de servidores externos	Adecuados
4	Gustavo	17/03/2025	Tiempo de exedidos	3	3	9	Coordinador de proyecto	Reduce	16/03/2025	Revisión con asesores	En revisión
5	Tania	14/03/2025	Software limitado	2	3	6	Encargado de simulación	Reduce	21/03/2025	usar software académico	Adecuados
6						0					
7						0					

Tabla 13. Plan de gestión de riesgo

#### 4.2.2.7 Control integrado de cambios

Formato de control de cambios :

<b>Solicitud</b>
<p>Descripción general del cambio:</p> <p>Se plantea una modificación en el enfoque analítico del proyecto para mejorar la precisión del estudio en relación con los mecanismos de cuatro barras.</p> <p>Justificación (Incluye el impacto de no generar el cambio y alternativas):</p> <p>El cambio busca aumentar la confiabilidad de los resultados del proyecto. De no aplicarse, podrían mantenerse errores en los resultados. Se consideraron otros enfoques, pero se determinó que esta modificación es la más adecuada para los fines del trabajo.</p>

**Tabla 14.** Formato de cambios(solicitud)

<b>Análisis de cambio</b>
<p>¿El cambio retrasará la fecha de finalización del programa?</p> <p>No, aunque se requiere reorganizar la documentación y los resultados</p>
<p>¿El cambio requerirá recursos adicionales?</p> <p>No, en este caso, se utilizarán los recursos ya disponibles dentro del proyecto.</p>
<p>¿El cambio resultará en un costo adicional?</p> <p>No, el cambio se realizará con herramientas existentes, sin necesidad de inversión extra</p>

**Tabla 15.** Análisis de cambio

<b>Impacto del cambio</b>
<p>Describa como impactará el cambio al avance del proyecto:</p>
<p>Este cambio permitirá obtener resultados más representativos del comportamiento real del mecanismo, lo que incrementará la validez del análisis y la calidad general del proyecto. También aportará mayor valor a las conclusiones y recomendaciones prácticas que se presenten al final del estudio.</p>

**Tabla 16.** Impacto del cambio

<b>Riesgos del cambio</b>
<p>Describa los riesgos que se toman al realizar el cambio:</p>
<p>El principal riesgo es el retraso en la planificación original. También existe la posibilidad de que surjan nuevas complejidades durante el desarrollo del modelo ajustado. Sin embargo, estos riesgos se consideran manejables y no afectan la viabilidad del proyecto.</p>

**Tabla 17.** Riesgos de cambio

Dentro de los riesgos, voy a añadir una tabla de identificación de tareas V&V

A	B	C	D	E	F	G	H	I
ID	Actividad	Riesgo reconocido	Impacto del riesgo	Modificación del alcance debido a la afectación del riesgo	Herramienta o técnica de validación	Validación del alcance en función del riesgo	Entregables verificados	Documentación que valida el alcance
A	Definición del modelo	Supuestos inválidos	Resultados inexactos	Ajuste de condiciones	Simulación	Comp., con resultados	Modelo teórico	Informe técnico
B	Diseño del mecanismo	dimensiones incorrectas	Movimiento no func.	Replanteamiento de dsq.	Análisis	Evaluación	Geometría revisada	Reporte
C	Análisis de tolerancias	Datos, tolerancia incomp.	Error en simulación	Incl., de rango de tol.,	MMC	Evaluación	Tabla de tolerancia	Doc., de análisis
D	Análisis del error p.	Cálculo erróneo	Conclusiones dudosas	Revisión de modelo	Ecuac., desv., ang.	Pruebas	Gráficas de error	Inf., de análisis
E	Evaluación de la R/T	Resultados inconsistentes	Pérdida, val.mét.	Ajuste, fórmula de cálculo	Deriv., matemática	Confirmación c/casos	Curvas de transm.	Documento revisado
F	Documentación del m.	Omisión de pasos clave	FR	Revisión de doc.	Lista verif., técn.	Evaluación	Manual del mét.	Versión final
G	Informe final	Información incompleta	Rechazo del proyecto	Inclusión de secciones omt.	Revisión	Validación	Informe completo	Informe revisado
H	Resultados	Falta de claridad técnica	Mala interpretación	Mejora en presentación	Ensayos de pres.	Opinion de expertos	Presentación f.	Pres., validada

**Tabla 18.** Identificación de tareas V&V

#### 4.2.3 Estrategias de mejora

A lo largo del desarrollo del proyecto, fue evidente que mejorar el diseño de mecanismos no solo se trata de hacer bien los cálculos o seguir procedimientos técnicos, sino también de aplicar estrategias que ayuden a prevenir errores antes de que sucedan. En este sentido, se plantearon varias acciones de mejora que apuntan a aumentar la precisión del diseño, especialmente al tomar en cuenta los efectos que tienen las tolerancias dimensionales en el comportamiento del mecanismo.

Para empezar, una de las estrategias más importantes fue la asignación inteligente de tolerancias siguiendo los estándares ISO, pero con un enfoque adaptado: es decir, considerando qué eslabones del mecanismo son más sensibles a errores y ajustando los márgenes de tolerancia según su impacto. También se propuso el uso de modelos matemáticos desde etapas tempranas del diseño, para no quedarnos solo con la teoría ideal, sino prever cómo se comportará el sistema en la realidad.

Otra acción clave fue incorporar el análisis de errores desde el principio, lo cual ayudó a identificar dimensiones críticas y prevenir fallos funcionales. A esto se suma la idea de optimizar las tolerancias, aplicando márgenes más estrictos únicamente donde es realmente necesario. Esto permite ahorrar costos sin comprometer el rendimiento del mecanismo.

Además, se utilizaron herramientas de simulación y análisis para anticipar cómo afectaría cada variación en las medidas, lo cual permitió ajustar decisiones sin tener que llegar al prototipado físico. Por otro lado, se propuso documentar errores comunes observados en proyectos anteriores, creando así una base de datos interna que sirva como guía para futuros diseños.

Estas estrategias, aunque parecen simples, en conjunto ayudan a reducir la variabilidad funcional del mecanismo, mejorando su precisión desde una lógica más preventiva y no solo correctiva.

#### ***4.2.3.1 Factores del ambiente de la organización***

Para que todo esto funcione, también hay que tener en cuenta los factores que rodean a la organización. En el caso de los factores internos, influye bastante el nivel técnico del equipo, el acceso a software especializado y, sobre todo, la cultura de trabajo. Cuando se tiene una mentalidad enfocada en la calidad, en mejorar continuamente y en aprender de los errores, es mucho más fácil implementar estrategias efectivas.

#### ***4.2.3.2 Administración del conocimiento***

Un aspecto clave en el desarrollo del proyecto fue reflexionar sobre cómo aprovechar los aprendizajes que iban surgiendo a lo largo del proceso. La idea aquí fue

aplicar la administración del conocimiento, es decir, aprender de los errores que se cometieron, registrar las soluciones que funcionaron y dejar todo eso documentado para que pueda ser útil en futuras ocasiones.

Entre los aprendizajes más valiosos estuvo comprender que incluso pequeñas tolerancias pueden tener un gran impacto en la relación de transmisión, identificar zonas críticas del mecanismo donde los errores se amplifican, y establecer criterios claros sobre cuándo es necesario apretar tolerancias y cuándo se pueden relajar.

También se valoró mucho el uso del análisis matemático como una herramienta de prevención, más que como algo posterior. Y, por supuesto, se reforzó la importancia de documentar errores, decisiones y ajustes, porque esa información tiene mucho valor para proyectos similares en el futuro.

#### ***4.2.3.3 Propuestas para implementar mejoras en proyectos futuros***

Con el fin de asegurar que todo ese conocimiento no se pierda, sino que se integre al trabajo futuro, se propusieron algunas ideas que podrían implementarse en proyectos posteriores:

- Crear una biblioteca interna de casos de estudio, con ejemplos reales de errores, soluciones y análisis aplicados.
- Diseñar procedimientos estandarizados para evaluar el impacto de las tolerancias desde la etapa de diseño.
- Desarrollar plantillas automáticas en software que incluyan ya integradas herramientas de simulación y análisis de errores.

- Generar indicadores de desempeño, como la desviación máxima permitida en la relación de transmisión.
- Hacer reuniones de cierre al final de cada proyecto, para compartir lo que funcionó, lo que falló y qué se puede mejorar.
- Fomentar la retroalimentación continua entre las áreas de diseño, manufactura y control de calidad, creando una cultura donde el aprendizaje sea parte del proceso.

Con estas acciones, el objetivo es que todo el conocimiento generado no se quede en este proyecto, sino que se convierta en una herramienta útil para mejorar el trabajo diario, tomar decisiones más informadas y seguir avanzando en el diseño de mecanismos más precisos y eficientes.

### **4.3 Cierre del proyecto**

Llegar a esta etapa del proyecto significó cerrar no solo un conjunto de actividades técnicas, sino también un proceso lleno de aprendizaje, retos y decisiones importantes. El cierre del proyecto es una fase clave porque permite hacer una pausa y revisar todo lo que se logró, lo que se puede mejorar y cómo se podrían aplicar estos resultados en trabajos futuros.

Desde un inicio, el objetivo principal fue desarrollar un modelo analítico capaz de evaluar cómo las tolerancias dimensionales afectan la precisión del mecanismo de cuatro barras, especialmente en lo que respecta a la relación de transmisión. A lo largo del proyecto se cumplió con cada una de las etapas planteadas: la formulación del modelo, el análisis de errores posicionales, el estudio de casos, la aplicación de simulaciones y, por supuesto, la validación de resultados. Todo esto permitió no solo construir una herramienta

útil desde el punto de vista académico, sino también generar una propuesta aplicable en el mundo real, especialmente en áreas como la manufactura y la automatización.

#### **4.3.1 Indicadores de evaluación y resultados**

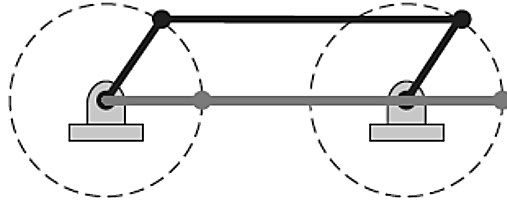
##### **4.3.1.1 Casos de estudio**

###### **4.3.1.1.1 Mecanismo de cuatro barras tipo paralelogramo**

Apliquemos las fórmulas derivadas (17) y (18) ,(se encuentran dentro del desarrollo del modelo analítico), para calcular las relaciones de transmisión teóricas de un mecanismo de cuatro barras en configuración de paralelogramo (caso especial del mecanismo Grashof). La condición de Grashof para un mecanismo de cuatro barras se cumple si  $S+L \leq P+Q$ , donde  $S$  es el eslabón más corto,  $L$  el más largo, y  $P$  y  $Q$  son los otros dos eslabones; esto implica que al menos una barra del mecanismo podrá realizar giros completos.

En este primer caso de estudio, las medidas nominales de los elementos (entre centros de agujeros) del mecanismo cumplen con las condiciones:  $l_1=l_3=25mm$  y  $l_2=l_4=250mm$  ( $S+L=P+Q$ ). Específicamente, se presentarán los resultados utilizando la categoría de mecanismo con punto de cambio, lo cual implica que, durante el movimiento, en una posición determinada, todos los eslabones del mecanismo se encuentran colineales; por lo tanto, el eslabón seguidor puede cambiar su dirección de rotación (dos veces por cada revolución del manubrio de entrada), véase la figura 6. En consecuencia, el mecanismo adopta la configuración abierta de doble manivela (los ángulos de rotación de las manivelas  $l_1$  y  $l_3$  son idénticos) y la configuración cruzada manivela-balancín. Cabe destacar que en las posiciones de colinealidad el movimiento del mecanismo se vuelve

indeterminado y puede convertirse en un mecanismo antiparalelogramo; en la práctica, el movimiento debe limitarse para evitar estas posiciones.



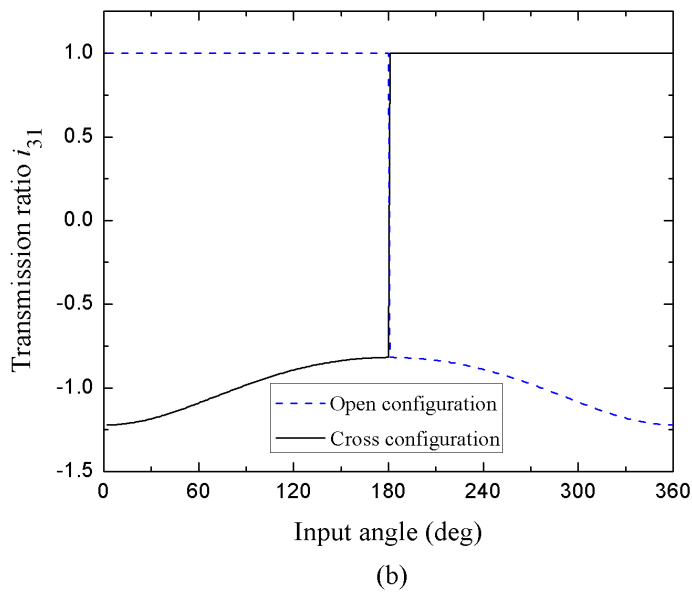
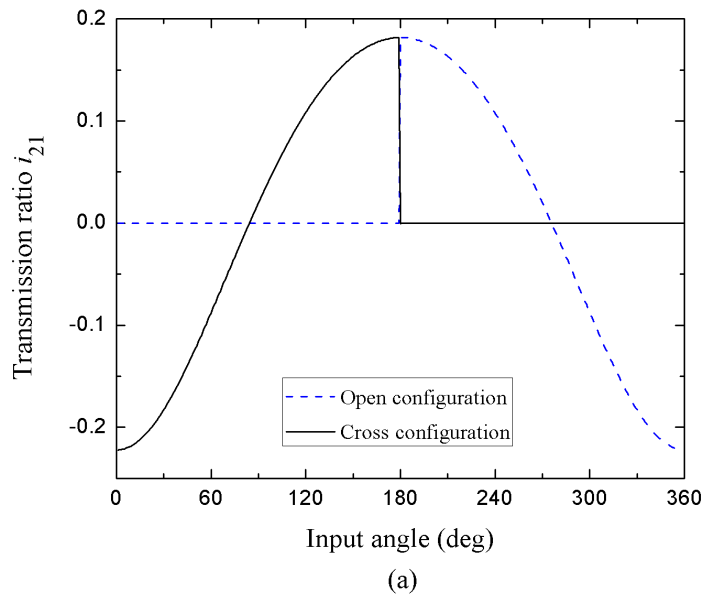
**Figura 6.** Categoría de mecanismo de cuatro barras con punto de cambio ( $S+L=P+Q$ ).

Las relaciones de transmisión teóricas  $i_{21}$  y  $i_{31}$  se muestran en la figura 7, tanto para la configuración abierta como para la configuración cruzada. Los resultados obtenidos a partir del modelo desarrollado indican que, en el caso de la relación de transmisión  $i_{21}$  (figura 7a), al inicio del movimiento desde una configuración abierta (línea azul punteada), es decir, en el rango  $0^\circ \leq \theta_1 \leq \pi$ , los ángulos de rotación de las manivelas  $l_1$  y  $l_3$  son idénticos. Como consecuencia, todos los puntos de la biela  $l_2$  describen un semicírculo de radio igual a la longitud de  $l_1$ , lo que implica que tanto su desplazamiento angular como su velocidad angular son nulos, por lo tanto,  $i_{21} = 0$ . Posteriormente, en la posición  $\theta_1 = \pi$ , los cuatro eslabones están colineales, y el mecanismo atraviesa la condición de punto de cambio, comenzando así la configuración cruzada (antiparalelogramo). En este segundo rango ( $\pi \leq \theta_1 \leq 2\pi$ ) las manivelas  $l_1$  y  $l_3$  giran en direcciones opuestas y con velocidades angulares distintas, por lo tanto, el eslabón  $l_2$  experimenta un aumento en su desplazamiento angular y, en consecuencia, adquiere velocidad angular. En dicho intervalo, el gráfico muestra un

punto de inflexión y una variación curvilínea descendente de la relación de transmisión hacia valores negativos. Esto se debe a que cuando  $\theta_1 \approx 275^\circ$ , el eslabón  $l_2$  invierte la dirección de rotación y su desplazamiento angular comienza a disminuir hasta que todos los eslabones vuelven a alinearse ( $\theta_1 = 2\pi$ ). En cuanto a la relación de transmisión  $i_{31}$  (figura 7b), al analizar la solución en el rango  $0^\circ \leq \theta_1 \leq \pi$ , cuando el mecanismo inicia su movimiento desde una configuración abierta (línea azul punteada), como se mencionó antes, los eslabones  $l_1$  y  $l_3$  tienen los mismos ángulos de rotación y velocidades angulares, lo que lleva a que  $i_{31} = 1$ . Se observa claramente un punto de inflexión en  $\theta_1 = \pi$ , donde el paralelogramo articulado cambia a una configuración cruzada. En el intervalo  $\pi \leq \theta_1 \leq 2\pi$  las manivelas  $l_1$  y  $l_3$  giran con velocidades angulares distintas y en direcciones opuestas, por lo que la gráfica muestra un comportamiento curvilíneo descendente con solución negativa (el signo negativo indica que la dirección de rotación se ha invertido).

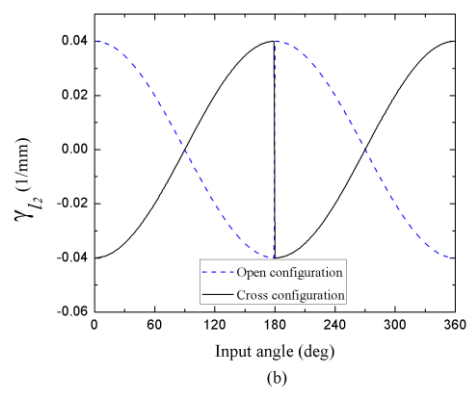
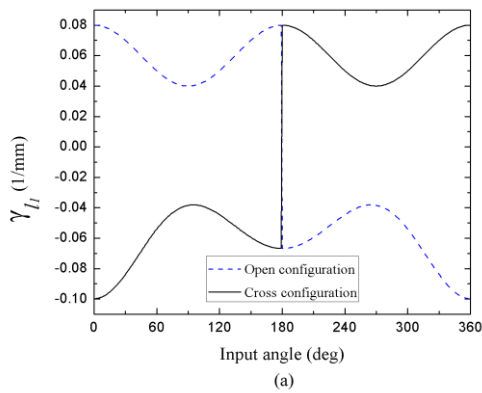
La línea negra continua que se muestra en las figuras 7(a)-(b) indica las relaciones de transmisión  $i_{21}$  y  $i_{31}$  cuando el mecanismo de cuatro barras en configuración de paralelogramo inicia el movimiento desde una configuración cruzada, y cuyo comportamiento obedece a las explicaciones previamente dadas.

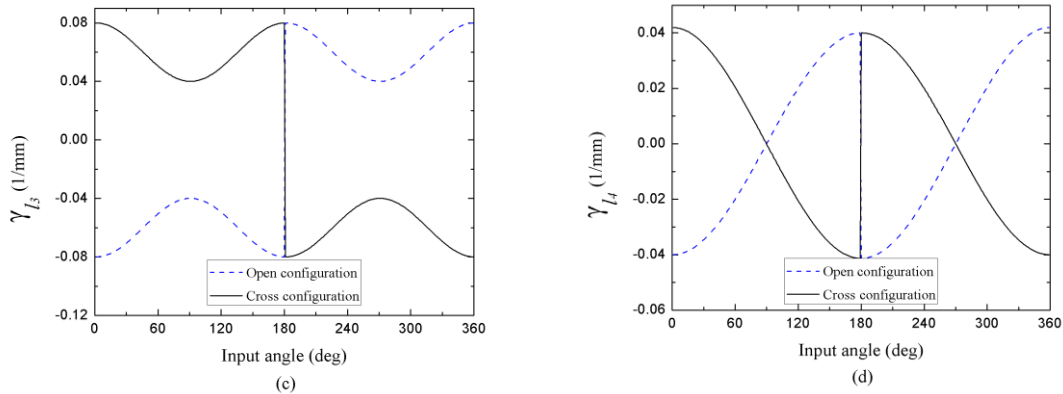
Por otro lado, se demostró la eficiencia del método propuesto en este trabajo, al comparar la relación de transmisión  $i_{31}$  con la calculada mediante el enfoque analítico a través de la ecuación de Kutzbach Gruebler. El resultado obtenido allí muestra una buena concordancia con nuestra teoría.



**Figura 7.** Relaciones de transmisión teóricas  $i_{21}$  (a) y  $i_{31}$  (b) en configuración abierta y cruzada.

Además, se calcularon los coeficientes de influencia  $\gamma_{l_i}$  para la misma configuración de paralelogramo. La figura 8 muestra los coeficientes  $\gamma_{l_i}$  calculados numéricamente, los cuales concuerdan con los criterios de análisis de sensibilidad de la relación de transmisión  $i_{31}$  predichos por Rothenhofer (existen singularidades en  $0^\circ$  y  $180^\circ$ ). Estos coeficientes, al igual que los coeficientes  $\lambda_{l_i}$ , dependen del ángulo de entrada y de cada una de las longitudes de los eslabones, y pueden presentar soluciones positivas o negativas en los rangos de configuración abierta y cruzada, con un comportamiento simétrico en ambas configuraciones, cuyo punto de cambio ocurre en  $\theta_1=\pi$ . Sus unidades son  $\frac{1}{\text{unit length}}$  y determinan la susceptibilidad en el cálculo de los errores totales de las relaciones de transmisión  $\delta i_{21Total}$  y  $\delta i_{31Total}$ , para el caso en que las magnitudes de  $\delta l_1$ ,  $\delta l_2$ ,  $\delta l_3$ ,  $\delta l_4$  y  $\delta \theta_1$  sean distintas de cero (véase Ec. (23)).





**Figura 8.** Coeficientes de influencia  $\gamma_{l_1}$  (a),  $\gamma_{l_2}$  (b),  $\gamma_{l_3}$  (c) y  $\gamma_{l_4}$  (d).

#### 4.3.1.2 Variaciones en las longitudes de los eslabones debido a las tolerancias dimensionales

El caso más demostrativo es el estudio de las relaciones de transmisión reales resolviendo numéricamente las ecuaciones (24) y (25). Dentro del formalismo descrito en las subsecciones anteriores y de acuerdo con la norma ISO 286-2:2010, se asignaron tres calidades (amplitudes) de tolerancias (por ejemplo, IT01–ultraprecisa, IT9–media e IT18–muy burda) a las medidas nominales de los eslabones del mecanismo. La Tabla 18 muestra las amplitudes de las tolerancias ISO para  $\delta l_1$ ,  $\delta l_2$ ,  $\delta l_3$  y  $\delta l_4$  en función de las medidas nominales de los eslabones ( $l_1=l_3=25mm$  and  $l_2=l_4=250mm$ ). De acuerdo con la ley de Grashof, en este tipo de mecanismo la coordenada angular de entrada varía de  $0^\circ$  a  $360^\circ$ , por lo tanto, su error de posicionamiento será cero ( $\delta\theta_1=0$ ).

**Tabla 19.** Tolerancias dimensionales en función de la medida nominal de los eslabones y del índice de calidad.

Dimensional Tolerance	Quality (Grade) of Tolerance		
	IT01 (mm)	IT9 (mm)	IT18 (mm)
$\delta l_1$	0.0006	0.052	3.3
$\delta l_2$	0.002	0.115	7.2
$\delta l_3$	0.0006	0.052	3.3
$\delta l_4$	0.002	0.115	7.2

Se analizarán los casos en los que la posición de la zona de tolerancia con respecto a la medida nominal (Línea Cero) se encuentra por encima o por debajo de esta (por practicidad, no se considerará el criterio de desviación fundamental). Esto implica que las tolerancias dimensionales serán sumadas o restadas a la magnitud de las medidas nominales de los eslabones (tolerancias bilaterales).

Para ilustrar los resultados obtenidos, en esta sección se presenta un análisis integral para el caso particular del grado de tolerancia IT18. Ahora bien, debemos tener en cuenta que el mecanismo paralelogramo articulado en su diseño teórico presenta solo dos medidas nominales diferentes para sus eslabones. Sin embargo, al considerar la posibilidad de sumar o restar la tolerancia, la magnitud final de la longitud de cada eslabón tendrá dos variantes. Por lo tanto, se pueden diseñar dieciséis mecanismos articulados de cuatro barras diferentes, que se obtienen de las variaciones con repetición de dos medidas distintas por eslabón tomadas de cuatro en cuatro, es decir,  $2^4 = 16$  diseños distintos. Para una comprensión más clara, la Tabla 2 muestra el signo de las tolerancias dimensionales aplicadas y el tipo de condición de Grashof correspondiente a cada diseño de mecanismo articulado.

**Tabla 20.** Signo de las tolerancias dimensionales y condición de Grashof para los 16 diseños de mecanismos articulados.

Design number	Sign of Dimensional Tolerances				Grashof condition
	$-\delta l_1$	$-\delta l_2$	$-\delta l_3$	$-\delta l_4$	
1	$-\delta l_1$	$-\delta l_2$	$-\delta l_3$	$-\delta l_4$	S+L=P+Q
2	$-\delta l_1$	$-\delta l_2$	$-\delta l_3$	$\delta l_4$	Non-Grashof
3	$-\delta l_1$	$-\delta l_2$	$\delta l_3$	$-\delta l_4$	S+L<P+Q
4	$-\delta l_1$	$-\delta l_2$	$\delta l_3$	$\delta l_4$	Non-Grashof
5	$-\delta l_1$	$\delta l_2$	$-\delta l_3$	$-\delta l_4$	Non-Grashof
6	$-\delta l_1$	$\delta l_2$	$-\delta l_3$	$\delta l_4$	S+L=P+Q
7	$-\delta l_1$	$\delta l_2$	$\delta l_3$	$-\delta l_4$	Non-Grashof
8	$-\delta l_1$	$\delta l_2$	$\delta l_3$	$\delta l_4$	S+L<P+Q
9	$\delta l_1$	$-\delta l_2$	$-\delta l_3$	$-\delta l_4$	Non-Grashof
10	$\delta l_1$	$-\delta l_2$	$-\delta l_3$	$\delta l_4$	Non-Grashof
11	$\delta l_1$	$-\delta l_2$	$\delta l_3$	$-\delta l_4$	S+L=P+Q
12	$\delta l_1$	$-\delta l_2$	$\delta l_3$	$\delta l_4$	Non-Grashof

13	$\delta l_1$	$\delta l_2$	$-\delta l_3$	$-\delta l_4$	Non-Grashof
14	$\delta l_1$	$\delta l_2$	$-\delta l_3$	$\delta l_4$	Non-Grashof
15	$\delta l_1$	$\delta l_2$	$\delta l_3$	$-\delta l_4$	Non-Grashof
16	$\delta l_1$	$\delta l_2$	$\delta l_3$	$\delta l_4$	S+L=P+Q

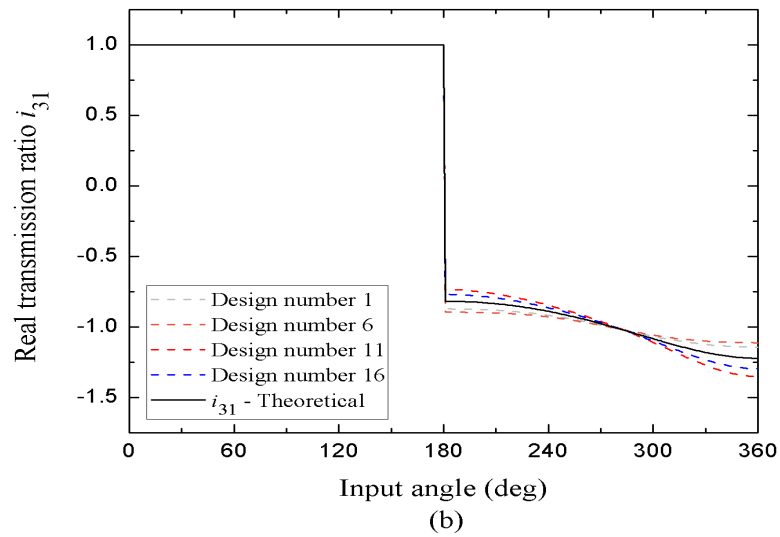
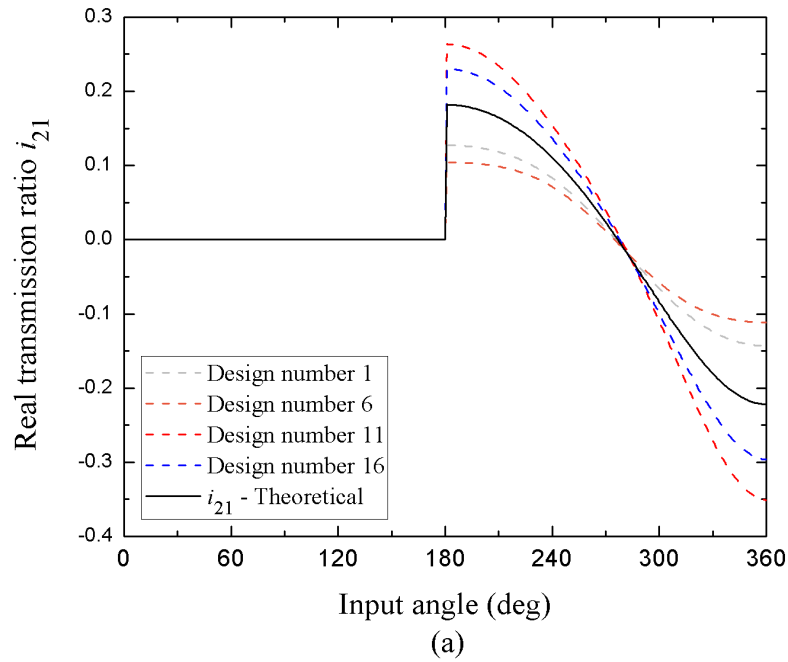
---

Las figuras 9 y 10 presentan, respectivamente, las relaciones de transmisión teóricas  $i_{21}$  y  $i_{31}$  en configuración abierta, comparadas con las relaciones de transmisión reales  $i_{21_{Real}}$  y  $i_{31_{Real}}$ , para mecanismos de cuatro barras articulados tipo paralelogramo que cumplen con la condición de Grashof y poseen movimiento continuo con diferentes grados de tolerancia dimensional. Como se observa en las figuras 9(a) y 9(b), estos mecanismos satisfacen la condición S+L=P+Q.

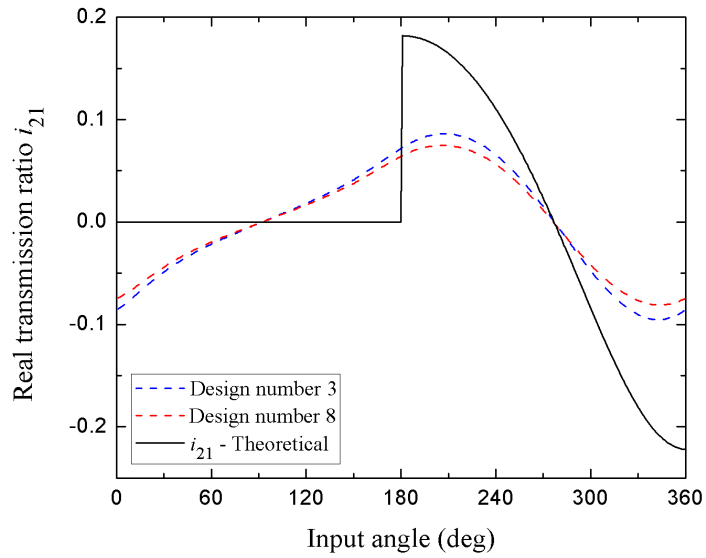
La variación en las dimensiones nominales de los eslabones se refleja en un cambio en la pendiente de las curvas características de la relación de transmisión real en comparación con la teórica. Este cambio es más pronunciado en los diseños donde las tolerancias dimensionales incrementan el tamaño final del mecanismo.

Cabe destacar que, a pesar de estas variaciones, todas las curvas coinciden en el punto de inflexión donde la relación de transmisión cambia de valores positivos a negativos, aproximadamente en  $\theta_1 \approx 275^\circ$ .

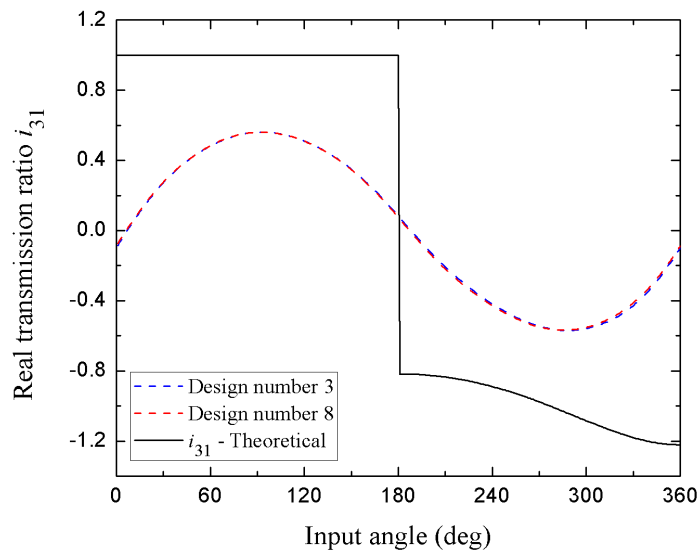
Ahora, en las figuras 10(a) y 10(b) se realiza una comparación entre las relaciones de transmisión teóricas y las relaciones de transmisión reales para dos tipos de diseños de mecanismos que, dependiendo de las tolerancias dimensionales aplicadas a las medidas nominales, forman la configuración manivela ( $l_1$ )-biela ( $l_2$ )- balancín ( $l_3$ ), satisfaciendo la condición  $S+L<P+Q$ . Con base en lo anterior, los gráficos de las relaciones de transmisión ideales teóricas y reales no muestran ninguna similitud entre sí. El comportamiento de la curva para  $i_{21_{Real}}$  mostrado en la figura 10(a), evidencia el movimiento de traslación de la biela; en el rango  $0^\circ \leq \theta_1 \leq 210^\circ$  la pendiente muestra una ligera disminución, y posteriormente, en el intervalo  $210^\circ \leq \theta_1 \leq 2\pi$ , el cambio en la inclinación de la pendiente es pronunciado. Además, se observan dos puntos de inflexión que indican el cambio de valores positivos a negativos en  $\theta_1 \approx 275^\circ$ . Por otro lado, la figura 10(b) muestra la curva para  $i_{31_{Real}}$  la cual presenta un comportamiento definido de cresta y valle, demostrando que este eslabón no tiene la capacidad para realizar una rotación completa; este componente, conectado a la base, solo puede oscilar (balancín). Existe un punto de inflexión donde cambia de valores positivos a negativos aproximadamente en  $\theta_1 \approx \pi$ . Como se mencionó en la sección anterior, para todos los casos presentados, la configuración cruzada tiene un comportamiento gráfico simétrico reflejado respecto a las figuras 9 y 10, cuya explicación puede discutirse de manera similar. Además, el cambio de valores positivos a negativos (o viceversa) en la evolución de las gráficas indica cuando el eslabón invierte su desplazamiento angular.



**Figura 9.** Relaciones de transmisión teóricas  $i_{21}$  (a) y  $i_{31}$  (b) en configuración abierta, comparadas con las relaciones de transmisión reales  $i_{21_{Real}}$  y  $i_{31_{Real}}$  de diseños con tolerancias dimensionales que satisfacen la condición  $S+L=P+Q$  (Mecanismos de Grashof - Paralelogramo articulado).



(a)



(b)

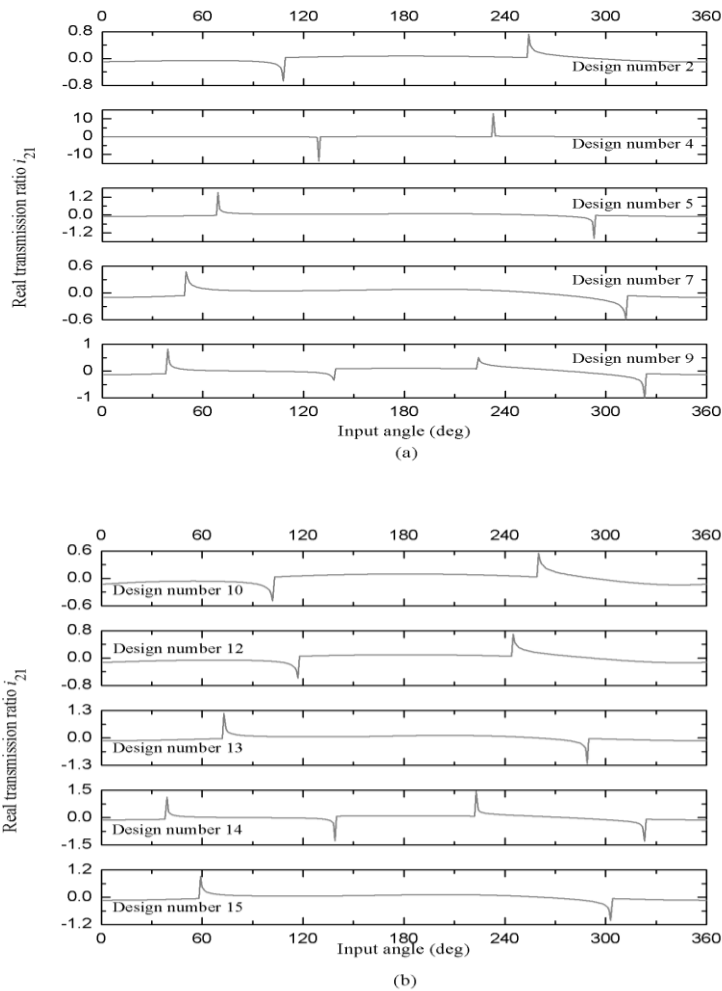
**Figura 10.** Relaciones de transmisión teóricas  $i_{21}$  (a) y  $i_{31}$  (b) en configuración abierta, comparadas con las relaciones de transmisión reales  $i_{21_{Real}}$  y  $i_{31_{Real}}$  de diseños con tolerancias dimensionales que satisfacen la condición  $S+L<P+Q$  (Mecanismos de Grashof – Movimiento continuo).

Finalmente, el alcance y la utilidad del formalismo analítico propuesto se extiende a aquellos mecanismos en los que no existe un movimiento continuo entre sus eslabones, conocidos como mecanismos no-Grashof y que satisfacen la desigualdad  $S+L>P+Q$ . Para el caso de estudio presentado, al modificar las medidas nominales de sus componentes con el grado de tolerancia IT18, se obtienen diez mecanismos de esta clase. Dado que ninguno de sus tres eslabones móviles realiza una revolución completa con respecto al plano de referencia, están siempre en movimiento oscilatorio; a este tipo de mecanismos también se les conoce como “triple balancín” (triple rocker). Por lo tanto, uno de los principales objetivos es determinar el intervalo de posiciones límite permisibles del eslabón de entrada.

Dentro de este marco, las figuras 11 y 12 ilustran, respectivamente, las relaciones de transmisión reales  $i_{21_{Real}}$  y  $i_{31_{Real}}$ , así como el rango de posición angular  $\theta_1$  correspondiente a los movimientos permitidos. Además, también se proporcionan los rangos angulares de las posiciones de bloqueo.

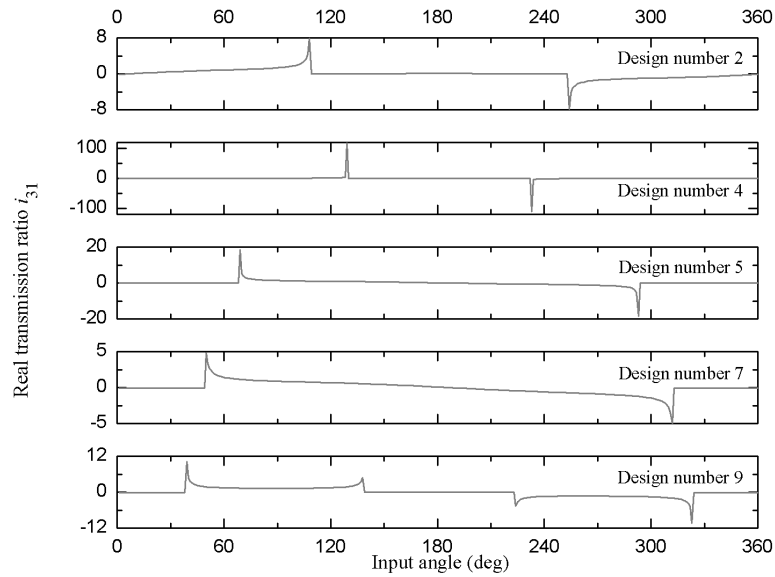
Es importante enfatizar que el comportamiento de los gráficos debe ser analizado cuidadosamente de la siguiente manera: i) Aquí se pueden identificar líneas verticales ubicadas sobre el eje horizontal en  $i_{21_{Real}}$  (o  $i_{31_{Real}}=0$ ), Cuando estas se intersecan perpendicularmente con aquellas líneas que coinciden sobre este mismo eje (en algunos casos se puede notar una ligera desviación debido a errores de precisión en los cálculos numéricos), se especifican los intervalos de valores de  $\theta_1$  que definen el bloqueo del mecanismo, ii) Por otro lado, se puede observar que estas mismas líneas verticales pueden dirigirse hacia valores positivos o negativos (como se ha destacado a lo largo de este

documento, lo anterior indica la inversión del sentido de rotación del eslabón), y están conectadas entre sí extremo a extremo mediante una curva que indica la relación de transmisión del intervalo angular de las posiciones de movimiento permitido del conjunto articulado.

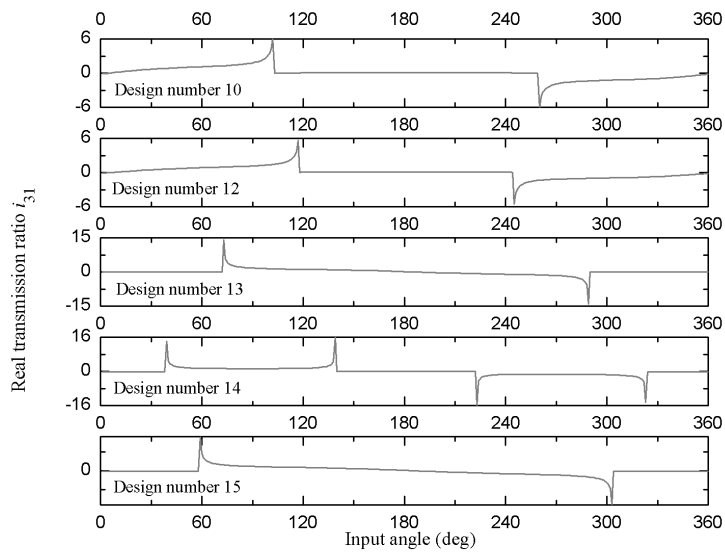


**Figura 11.** Relación de transmisión real  $i_{21_{Real}}$  (y rango de posición angular) de los movimientos permitidos e intervalos de las posiciones de bloqueo de los diseños con

tolerancias dimensionales que satisfacen la condición  $S+L>P+Q$  (mecanismos no Grashof), ver paneles (a) y (b).



(a)



(b)

**Figura 12.** Relación de transmisión  $i_{31_{Real}}$  (y rango de posición angular) de los movimientos permitidos e intervalos de las posiciones de bloqueo de los diseños con tolerancias dimensionales que satisfacen la condición  $S+L>P+Q$  (mecanismos no Grashof), ver paneles (a) y (b).

Para una mejor comprensión de la estrategia de análisis indicada para los gráficos de relaciones de transmisión ilustrados en las figuras 11 y 12, la Tabla 21 muestra, para los diez diseños de mecanismos no Grashof presentados en este trabajo, los rangos del ángulo de entrada  $\theta_1$  correspondientes a los movimientos permitidos y al bloqueo de estos conjuntos cinemáticos articulados.

**Tabla 21.** Intervalos de ángulos de entrada que definen los movimientos permitidos y las posiciones de bloqueo.

Design number	Input angle interval $\theta_1$	
	Allowed movements	Blocking positions
2	$0 \leq \theta_1 \leq 107^\circ$ and $253^\circ \leq \theta_1 \leq 360^\circ$	$108^\circ \leq \theta_1 \leq 252^\circ$
4	$0^\circ \leq \theta_1 \leq 128^\circ$ and $232^\circ \leq \theta_1 \leq 360^\circ$	$129^\circ \leq \theta_1 \leq 231^\circ$
5	$68^\circ \leq \theta_1 \leq 292^\circ$	$0^\circ \leq \theta_1 \leq 67^\circ$ and $293^\circ \leq \theta_1 \leq 360^\circ$
7	$49^\circ \leq \theta_1 \leq 311^\circ$	$0^\circ \leq \theta_1 \leq 48^\circ$ and $312^\circ \leq \theta_1 \leq 360^\circ$
9	$38^\circ \leq \theta_1 \leq 137^\circ$ and $223^\circ \leq \theta_1 \leq 322^\circ$	$0 \leq \theta_1 \leq 37^\circ, 138^\circ \leq \theta_1 \leq 222^\circ$ and $323^\circ \leq \theta_1 \leq 360^\circ$

10	$0 \leq \theta_1 \leq 101^\circ$ and $259^\circ \leq \theta_1 \leq 360^\circ$	$102^\circ \leq \theta_1 \leq 258^\circ$
12	$0 \leq \theta_1 \leq 116^\circ$ and $244^\circ \leq \theta_1 \leq 360^\circ$	$117^\circ \leq \theta_1 \leq 243^\circ$
13	$72^\circ \leq \theta_1 \leq 288^\circ$	$0 \leq \theta_1 \leq 71^\circ$ and $289^\circ \leq \theta_1 \leq 360^\circ$
14	$38^\circ \leq \theta_1 \leq 138^\circ$ and $222^\circ \leq \theta_1 \leq 322^\circ$	$0^\circ \leq \theta_1 \leq 37^\circ$ , $139^\circ \leq \theta_1 \leq 221^\circ$ and $323^\circ \leq \theta_1 \leq 360^\circ$
15	$58^\circ \leq \theta_1 \leq 302^\circ$	$0^\circ \leq \theta_1 \leq 57^\circ$ and $303^\circ \leq \theta_1 \leq 360^\circ$

---

#### **4.3.1.3 Análisis y resultados**

Los resultados que se obtuvieron durante el desarrollo del proyecto dejaron ver algo muy interesante: asignar grados de precisión IT no garantiza automáticamente que el mecanismo funcione mejor. Aunque al inicio podría pensarse que entre más preciso sea todo, mejores serán los resultados, la verdad es que algunas configuraciones aun cumpliendo con la condición de Grashof, terminan alejándose bastante del comportamiento ideal que se espera de un paralelogramo articulado.

De hecho, también se observaron casos en los que aumentar las tolerancias bilaterales provocó que el mecanismo ya no cumpliera con esa condición, lo cual claramente afecta su funcionalidad.

Con base en esto, se puede decir que el análisis hecho sobre la relación de transmisión fue bastante completo y permite respaldar que la metodología planteada sí es una herramienta útil. Sirve, sobre todo, para elegir con más precisión qué grado IT se debe

asignar a cada dimensión de los eslabones, lo que ayuda a evitar errores desde el diseño y mejora la eficiencia general del sistema.

Además, algo que realmente destaca de este enfoque es que no todo se resume a un solo tipo de error. Se logró calcular por separado los errores de posición, los errores relacionados con la relación de transmisión y los coeficientes de influencia. Gracias a esto, se puede tener un panorama más detallado y tomar decisiones mucho más informadas a la hora de diseñar mecanismos que requieren precisión.

### 4.3.2 KPI's

Elemento evaluado	SLA	OKR (Meta ambiciosa complementaria)	alcanzado (KPI)	Interpretación
Modelo cinemático funcional	Modelo simbólico desarrollado para simular relaciones básicas antes de la semana 4	Validar la eficiencia del modelo con diferentes configuraciones	0.48 (48%)	Se cumplió el SLA (modelo funcional), aunque el OKR sigue en progreso (no está 100%)
Identificación de configuraciones comunes	Lista base de configuraciones entregada antes de la semana 3	Optimizar el diseño del mecanismo para diferentes aplicaciones	1.00 (100%)	Se superó el SLA gracias al enfoque del OKR; se logró con éxito completo
Definición de parámetros geométricos	Longitudes y ángulos iniciales definidos en base al tipo de mecanismo	Homogeneizar datos de entrada para facilitar simulación	0.60 (60%)	Se cumple el SLA básico; falta afinar los parámetros para llegar al nivel del OKR
Redacción técnica de introducción	Documento preliminar entregado antes de la semana 5	Estandarizar presentación técnica de proyectos similares	0.55 (55%)	Se cumplió el SLA, pero el documento aún puede mejorar según el OKR
Implementación de ecuaciones vectoriales	Implementación lista para simulación inicial	Validar que los resultados obtenidos coincidan con la teoría	0.40 (40%)	Se logró un prototipo inicial, pero la validación aún está en curso (OKR no cumplido)
Validación del modelo en software	Modelo ejecutado en entorno de simulación controlado	Evitar errores de manufactura mediante validación numérica	0.57 (57%)	SLA cumplido y progreso hacia el OKR en buen camino
Comparación analítica vs. simulación	Tabla comparativa de errores finalizada	Asegurar exactitud y coherencia matemática	0.96 (96%)	SLA y OKR prácticamente alcanzados; la validación matemática fue un éxito
Informe técnico completo	Documento preliminar entregado	Cumplir requisitos académicos y técnicos de presentación	Semana: 0.30 (30%)	SLA parcialmente cumplido; el OKR aún requiere esfuerzo adicional
Presentación final del proyecto	Diapositivas entregadas con contenido técnico completo	Demostrar dominio académico y visual del proyecto	0.90 (90%)	Tanto el SLA como el OKR fueron alcanzados al 90%

**Tabla 22.** Tabla comparativa

A	B	C	D	E	F
Nivel de	Key Result	Key Result de empresa	Departamentos involucrados	Medición del Key Result	Comentarios
	<b>Formular un modelo cinemático funcional del mecanismo</b>	Aumentar la eficiencia	Simulación	Modelo simbólico completado (0% → 100%)	Modelo basado en lazo vectorial
5	1 Identificar configuraciones comunes del mecanismo	Optimizar el diseño para distintas aplicaciones	Diseño	Lista validada de configuraciones (0% → 100%)	Versión validada
6	0.7 Establecer parámetros geométricos de entrada	Homogeneizar datos de entrada del diseño	Diseño	Definición de longitudes y ángulos iniciales (0% → 100%)	Basado en configuración seleccionada
7	0.5 Redactar introducción técnica del proyecto	Estandarizar presentación técnica de proyectos	Académico	Sección redactada y revisada (0% → 100%)	Versión inicial en desarrollo
8	0.4 Implementar ecuaciones vectoriales	Validar herramientas desarrolladas	Simulación	Comparación de resultados esperados y obtenidos (0% → 100%)	Caso de prueba en entorno controlado
	<b>Documentar ecuaciones simbólicas</b>	Facilitar uso del modelo por otros usuarios	Académico	Documento de soporte simbólico (0% → 100%)	Con explicación de variables
11	1 Incluir ecuaciones en informe técnico	Centralizar documentación matemática	Redacción técnica	Ecuaciones insertadas en documento final (0% → 100%)	En revisión
12	0.7 Incorporar variables de tolerancia en el modelo	Modelar el sistema	Simulación	Modelo extendido con tolerancias (0% → 100%)	Basado en normas ISO
13	0.5 Aplicar derivadas parciales para sensibilidad	Detectar puntos críticos del sistema	Matemáticas	Sensibilidades calculadas (0% → 100%)	Modelo ajustado a cambios pequeños
14	0.4 Analizar influencia sobre la salida	Prever desviaciones funcionales	Simulación	Distribución de errores obtenida (0% → 100%)	Inspirado en enfoque Monte Carlo
	<b>Validar modelo en software</b>	Evitar errores de manufactura por fallos	Simulación	Modelo simulado y verificado (0% → 100%)	Uso de software
17	1 Comparar resultados analíticos y simulados	Asegurar concordancia matemática	Validación	Tabla comparativa finalizada (0% → 100%)	Incluye desviaciones máximas
18	0.7 Evaluar precisión del modelo con tolerancias	Mostrar confiabilidad del método	Ingeniería	Errores medidos y documentados (0% → 100%)	Resultados preliminares positivos
19	0.5 Extraer recomendaciones de diseño	Reducir fallos futuros en proyectos similares	Diseño	Lista de recomendaciones elaborada (0% → 100%)	En edición
20	0.4 Redactar informe técnico completo	Cumplir con requisitos académicos	Académico	Documento terminado (0% → 100%)	Versión preliminar ya iniciada
	<b>Preparar referencias y citas APA</b>	Facilitar comunicación de resultados	Redacción	Archivo en Word (0% → 100%)	Norma APA aplicada
23	1 Diseñar presentación para defensa del proyecto	Estándares de calidad académica	Académico	Presentación final preparada (0% → 100%)	Uso de PowerPoint
24	0.7 Simular presentación frente a tutor	Practicar antes de la evaluación formal	Académico	Presentación final preparada (0% → 100%)	Uso de PowerPoint

Tabla 23. KP'Is

A	B	E	F	G	H	I	J	K	L
Nivel de	Key Result	Medición del Key Result	Comentarios	Semana 1	Semana 2	Semana 3	Semana 4	Semana 5	Semana
	<b>Formular un modelo cinemático funcional del mecanismo</b>	Modelo simbólico completado (0% → 100%)	Modelo basado en lazo vectorial						
5	1 Identificar configuraciones comunes del mecanismo	Lista validada de configuraciones (0% → 100%)	Versión validada	0.4	0.43	0.53	0.43	0.46	
6	0.7 Establecer parámetros geométricos de entrada	Definición de longitudes y ángulos iniciales (0% → 100%)	Basado en configuración seleccionada	0.73	0.75	0.72	0.8	0.74	
7	0.5 Redactar introducción técnica del proyecto	Sección redactada y revisada (0% → 100%)	Versión inicial en desarrollo	0.57	0.51	0.54	0.56	0.55	
8	0.4 Implementar ecuaciones vectoriales	Comparación de resultados esperados y obtenidos (0% → 100%)	Caso de prueba en entorno controlado	0.4	0.4	0.42	0.32	0.4	
	<b>Documentar ecuaciones simbólicas</b>	Documento de soporte simbólico (0% → 100%)	Con explicación de variables						
11	1 Incluir ecuaciones en informe técnico	Ecuaciones insertadas en documento final (0% → 100%)	En revisión	0.47	0.42	0.58	0.47	0.51	
12	0.7 Incorporar variables de tolerancia en el modelo	Modelo extendido con tolerancias (0% → 100%)	Basado en normas ISO	0.99	1	0.93	0.96	1	
13	0.5 Aplicar derivadas parciales para sensibilidad	Sensibilidades calculadas (0% → 100%)	Modelo ajustado a cambios pequeños	0.67	0.63	0.6	0.72	0.61	
14	0.4 Analizar influencia sobre la salida	Distribución de errores obtenida (0% → 100%)	Inspirado en enfoque Monte Carlo	0.53	0.57	0.57	0.43	0.56	
	<b>Validar modelo en software</b>	Modelo simulado y verificado (0% → 100%)	Uso de software						
17	1 Comparar resultados analíticos y simulados	Tabla comparativa finalizada (0% → 100%)	Incluye desviaciones máximas	0.34	0.47	0.33	0.38	0.48	
18	0.7 Evaluar precisión del modelo con tolerancias	Errores medidos y documentados (0% → 100%)	Resultados preliminares positivos	0.46	0.57	0.55	0.6	0.41	
19	0.5 Extraer recomendaciones de diseño	Lista de recomendaciones elaborada (0% → 100%)	En edición	0.95	1	1	1	0.97	
20	0.4 Redactar informe técnico completo	Documento terminado (0% → 100%)	Versión preliminar ya iniciada	0.69	0.74	0.68	0.73	0.71	
	<b>Preparar referencias y citas APA</b>	Archivo en Word (0% → 100%)	Norma APA aplicada						
23	1 Diseñar presentación para defensa del proyecto	Presentación final preparada (0% → 100%)	Uso de PowerPoint	0.49	0.47	0.59	0.55	0.42	
24	0.7 Simular presentación frente a tutor	Presentación final preparada (0% → 100%)	Uso de PowerPoint	0.43	0.45	0.38	0.33	0.47	

Tabla 24. Continuación de tabla KP'Is

### 4.3.3 Avances del proyecto

A lo largo del desarrollo de este proyecto, se fueron alcanzando diversos avances que marcaron etapas clave dentro del trabajo. Aunque al principio la idea general era clara, fue necesario ir ajustando ciertos enfoques conforme se fue profundizando en el tema. En este apartado se presenta un resumen de los principales logros y progresos que se lograron en cada fase del proyecto.

#### Etapa 1: Investigación y delimitación del tema

Durante las primeras semanas, el objetivo fue definir con claridad el problema a resolver. Se investigaron antecedentes sobre el mecanismo de cuatro barras, su uso en la industria y los efectos de las tolerancias dimensionales. Esta etapa fue clave para entender la relevancia del tema y justificar la necesidad de desarrollar un modelo analítico específico.

#### Etapa 2: Desarrollo del marco teórico

Conforme se fue avanzando, se recopilaron teorías relacionadas al análisis cinemático, el cálculo de errores posicionales y la relación de transmisión. Esta parte no solo sirvió para sustentar el proyecto, sino también para tener un mejor entendimiento técnico del mecanismo.

#### Etapa 3: Planteamiento del modelo analítico

Uno de los mayores avances fue la formulación matemática del modelo, usando diferenciales totales aplicados a las ecuaciones de restricción cinemática. Aquí fue necesario validar las expresiones paso a paso y comprobar que los resultados fueran coherentes con la teoría.

#### Etapa 4: Simulación computacional

Una vez definido el modelo, se implementaron los cálculos en un software matemático para simular diferentes combinaciones de tolerancias y observar su efecto en la relación de transmisión y la posición del eslabón de salida. Esto permitió obtener datos concretos que después se usaron para graficar los resultados y analizar tendencias.

#### Etapa 5: Análisis de resultados y validación

En esta etapa se interpretaron los resultados obtenidos de las simulaciones. Se identificaron eslabones críticos, se cuantificaron errores y se demostró cómo el modelo puede servir como herramienta predictiva. Aunque no se construyó un prototipo físico, se dejaron sentadas las bases para hacerlo en el futuro como parte de un siguiente proyecto.

#### Etapa 6: Redacción, revisión y cierre

Finalmente, se documentaron todos los avances, desde la parte teórica hasta los resultados obtenidos. Esta última fase incluyó la redacción de la tesis, la organización de figuras, tablas y anexos, así como la preparación para futuras presentaciones o publicaciones.

## Capítulo 5

### 5. Conclusiones y trabajo a futuro

El objetivo principal de este trabajo fue presentar una metodología analítica y numérica, basada en derivadas parciales, para estimar las relaciones de transmisión reales en mecanismos de cuatro barras, considerando la influencia de las tolerancias bilaterales en las dimensiones de los eslabones.

Como primer paso, la formulación permitió predecir, para cualquier posición angular del elemento de entrada, los errores posicionales de los eslabones de salida en función de las tolerancias de fabricación de las dimensiones funcionales y del error de posicionamiento

del eslabón de entrada. Posteriormente, se derivaron los errores en la relación de transmisión, mostrando una dependencia respecto a los errores posicionales de los elementos de salida. La suma de estos errores con la relación teórica dio como resultado la relación de transmisión real del mecanismo.

El enfoque analítico adoptado permitió definir una matriz de incidencia, compuesta por coeficientes que varían según la coordenada de entrada, lo que indica la importancia relativa de cada parámetro geométrico en el error de posicionamiento del eslabón de salida.

Por otro lado, la solución numérica de los coeficientes de influencia (influencia relativa que las tolerancias dimensionales tienen sobre el error de posicionamiento de los eslabones de salida) y la relación teórica de transmisión  $i_{31}$ , para un caso ilustrativo de un mecanismo tipo paralelogramo articulado, fueron validadas usando la teoría analítica de Rothenhofer , donde la única relación de transmisión posible tiene un valor de 1.

Como se mencionó en secciones previas, para condiciones comunes de operación mecánica, se utilizan grados IT para asignar tolerancias bilaterales a los parámetros dimensionales de un sistema, según lo especificado en la norma ISO 286-2. Considerando el mismo caso de estudio, se asignó un grado de tolerancia IT18. Los cálculos numéricos muestran que, como resultado de variaciones en las longitudes de los eslabones debido a las tolerancias dimensionales, cuando no se cumple la condición de paralelogramo articulado, las relaciones reales de transmisión del mecanismo se desvían sustancialmente de su valor teórico ideal (es decir, 1 para el caso  $i_{31}$ ). Incluso es evidente que tales pequeños cambios en las longitudes de sus componentes, en algunos casos, provocan

variaciones instantáneas inaceptables en la relación de transmisión (ya no se cumple la relación de Grashof).

Es importante destacar que las representaciones gráficas de las relaciones de transmisión reales obtenidas mediante el enfoque, permiten caracterizar la eficiencia de los diseños que cumplen con la condición de Grashof y, más allá de eso, definir los rangos permitidos y de bloqueo para diseños que no satisfacen dicha condición. Podemos establecer que este método proporciona una visión integral para asignar una combinación racional de tolerancias dimensionales para cualquier grado de precisión IT, con el objetivo de reducir errores de diseño y lograr una mayor eficiencia en la relación de transmisión en mecanismos de cuatro barras.

Hasta la fecha, no existen informes en la literatura clásica y especializada sobre síntesis y análisis de mecanismos que, a diferencia de nuestro formalismo teórico, proporcionen expresiones que calculen de forma independiente los errores en las relaciones de transmisión y posicionales, así como los coeficientes de influencia. Por lo tanto, un posible ámbito de estudio futuro podría centrarse en cómo las magnitudes y signos de los parámetros mencionados permiten asignar el grado de precisión IT más conveniente para cada dimensión nominal, con el fin de obtener condiciones de movimiento y precisión que se traduzcan en relaciones de transmisión eficientes.

## Bibliografía

**Akhadkar, C. A., Deoghare, A. B., & Vaidya, A. M. (2019).** Simulation and experimental response of four-bar mechanism with tolerance stack. *Journal of Mechanical Engineering and Sciences*, 13(1), 4512–4535. <https://journal.ump.edu.my/jmes/article/view/1834>

**Bai, Z. F., & Zhao, Y. (2013).** A hybrid contact force model of revolute joint with clearance. *International Journal of Non-Linear Mechanics*.

**Chironis, N. P. (1991).** *Mechanisms and mechanical devices sourcebook*. McGraw-Hill.

**Craig, J. J. (2005).** *Introduction to robotics: Mechanics and control* (3rd ed.). Pearson.

**Erdman, A. G., Sandor, G. N., & Kota, S. (2001).** *Mechanism design: Analysis and synthesis*. Prentice Hall.

**Google. (2024).** *Google Scholar* [Motor de búsqueda de literatura académica]. <https://scholar.google.com/>

**International GeoGebra Institute. (2023).** *GeoGebra Classic* (Versión 6) [Software]. <https://www.geogebra.org/>

**International Organization for Standardization. (1989).** *General tolerances – Part 1: Tolerances for linear and angular dimensions without individual tolerance indications* (ISO 2768-1:1989).

**International Organization for Standardization. (2010).** *Geometrical product specifications (GPS) – ISO code system for tolerances on linear sizes – Part 2: Tables of standard tolerance classes* (ISO 286-2:2010).

**Jaiswal, A., & Jawale, H. (2023).** Estimation of error in four-bar mechanism under dimensional deviations. *International Journal on Interactive Design and Manufacturing*. <https://link.springer.com/article/10.1007/s12008-023-01590-4>

**Kohli, S. (2022).** Influence of tolerances on error estimation in P3R and 4R planar mechanisms. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*.

**Kolhatkar, R., & Yajnik, S. R. (2013).** A unified framework for tolerance analysis. *Computers & Structures*.

**MathWorks. (2024).** *MATLAB* (Versión R2024a) [Software]. <https://www.mathworks.com/products/matlab.html>

**Microsoft Corporation. (2023).** *Microsoft Excel* (Versión 365) [Software]. <https://www.microsoft.com>

**Norton, R. L. (2020).** *Design of machinery* (6th ed.). McGraw-Hill Education.

**Pahl, G., Beitz, W., Feldhusen, J., & Grote, K.-H. (2007).** *Engineering design: A systematic approach*. Springer.

**Rothenhofer, H. (2010).** Transmission ratio based analysis and robust design of mechanisms. *CIRP Annals*.

**Shigley, J. E., & Uicker, J. J. (2010).** *Theory of machines and mechanisms* (4th ed.). Oxford University Press.

**Spotts, M. F., Shoup, T. E., & Hornberger, L. E. (2004).** *Design of machine elements* (8th ed.). Pearson.

**Wolfram Alpha LLC. (2024).** *Wolfram Alpha computational engine*. <https://www.wolframalpha.com/>

