Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

El lagrangiano de Euler-Heisenberg para una teoría de Kaluza-Klein

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

Licenciado en Física

por

Javier Eduardo Ricaño Paz

Asesorado por

Dr. Héctor Novales Sánchez

Puebla Pue.
19 de febrero de 2021

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

El lagrangiano de Euler-Heisenberg para una teoría de Kaluza-Klein

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

Licenciado en Física

por

Javier Eduardo Ricaño Paz

Asesorado por

Dr. Héctor Novales Sánchez

Puebla Pue.
19 de febrero de 2021

Título: El lagrangiano de Euler-Heisenberg para una teoría de Kaluza-Klein
Estudiante: JAVIER EDUARDO RICAÑO PAZ

COMITÉ

Dr. J. Jesús Toscano Chávez
Presidente

Dr. Gerardo F. Torres del Castillo
Secretario

Dra. Ana A. Avilez López
Vocal

Dra. Iraís Bautista Guzmán
Vocal

Dr. Héctor Novales Sánchez
Asesor

A mi abuelo Efrén Paz Luna y mi tía Elizabeth Ricaño Miranda, quienes dejaron este mundo mientras escribía esta tésis.

Agradecimientos

A la Facultad de Ciencias Fisico Matemáticas y a la Benemerita Universidad Autónoma de Puebla, por aceptarme en sus instalaciones y darme la oportunidad desarrollarme en el ámbito académico.

Al Doctor Héctor Novales Sánchez, por aceptar dirigir mi trabajo de tesis. Agradezco el empeño que da a su trabajo como investigador y especialmente como docente, ya que gracias a la dedicación que tiene hacia sus alumnos y vocación es que he tenido la oportunidad de crecer como físico y como estudiante. Lo considero un ejemplo a seguir y un amigo.

A los prfesores de la facultad los cuales tuve la dicha de ser alumno, ya que fueron ellos quienes me introdujeron al mundo de la ciencia y me ayudaron a dar mis primeros pasos. Atesoro todas sus enseñanzas y lecciones.

Finalmente a mis padres y a mis hermano, que siempre estuvo a mi lado apoyandome durante todos estos años, ayudandome a crecer como persona y dandome las lecciones de vida más importantes.

Resumen

En esta tesis se desarrolla una teoría de Kaluza-Klein tomando como base una teoría de electrodinámica extradimensional de 5 dimensiones espaciotemporales, en donde la dimensión extra es de tipo espacial y se encuentra compactificada en un orbifold S^1/Z_2. Posteriormente, a partir de la lagragiana de Kaluza-Klein obtenida se toman los términos dependientes de los modos excitados de los campos fermiónicos y del modo cero del campo de norma de la teoría para desarrollar una lagrangiana efectiva de Euler Heisenberg y así poder determinar las contribuciones de la dimensión extra a la teoría efectiva por medio de dichos términos.

Introducción

En la actualidad, la formulación de física fundamental ampliamente aceptada por la comunidad científica es el *Modelo Estándar de las interacciones fundamentales* [1, 2, 3], la cual es una *teoría de campos* que describe a las interacciones electromagnética, débil y fuerte, y que es gobernada por el *grupo de norma* $\mathrm{SU}(3)_C \times \mathrm{SU}(2)_L \times \mathrm{U}(1)_Y$. Empero, existen motivaciones, tanto teóricas como experimentales, para afirmar que el Modelo Estándar no es una teoría última [4]. La búsqueda de una formulación que ocupe el lugar del Modelo Estándar, como la mejor descripción de la materia y sus interacciones, es un tema central en el quehacer actual de la física de altas energías. Uno de los paradigmas en esta actividad son las llamadas *extensiones del Modelo Estándar*, que son teorías de campo que en determinados límites se reducen al Modelo Estándar, pero que incluyen a elementos novedosos, dirigidos a explicar nueva física. En general, los dos elementos principales que definen a una teoría son sus *variables dinámicas* y sus *simetrías* [5]. Son, pues, estos elementos los que comúnmente se modifican con el objetivo de definir a extensiones del Modelo Estándar. Desde esta perspectiva, las simetrías de espaciotiempo tienen gran relevancia. Por ejemplo, existen modelos, en el contexto de las llamadas *teorías efectivas* [5, 6], que proponen la presencia de campos de fondo tenues, de tipo tensorial, que determinan direcciones preferenciales en el espaciotiempo y que inducen, a bajas energías, efectos minúsculos de violación de la simetría de Lorentz [7, 8, 9]. También en el sentido de las simetrías de espaciotiempo, una opción interesante consiste en la suposición de que, adicionalmente a las dimensiones de espaciotiempo conocidas, existen otras dimensiones de tipo espacial, pero con la particularidad de ser finitas y pequeñas, esto último con el objetivo de explicar la ausencia de indicios experimentales de dimensiones extras [10]. Inicialmente introducidas en teorías de unificación de interacciones fundamentales [11, 12], fue Oskar Klein quien teorizó por primera vez la existencia de un espacio 5-dimensional que hacía posible la coexistenca entre la teoría gravitacional de Einstein y la teoría electromagnética de Maxwell. Sin embargo Fue Theodor Kaluza quien más tarde añadió la condición de compactificación de la quinta coordenada [13]. La llamada teoría de Kaluza-Klein marcaría un importante precedente en las teorías de unificación y la propuesta de dimensiones extra posteriormente sería desarrollada en el seno de la *teoría de cuerdas* [14, 15, 16, 17, 18], las dimensiones extras captaron la atención de la comunidad de la física de partículas a finales de la década de los años 90's, cuando se propusieron modelos extradimensionales, fenomenológicamente atractivos, dirigidos a explicar la debilidad de la interacción gravitacional con respecto del resto de las interacciones fundamentales [19, 20, 21, 22, 23]. La implementación de esta herramienta alcanzó a las extensiones del Modelo Estándar, destacando los modelos de *dimensiones extras universales* [24, 25, 26], cuya característica principal es que todas sus variables dinámicas son campos definidos en el espaciotiempo extradimensional.

Supongamos que existe alguna escala de altas energías en la cual la descripción de la naturaleza ocurre en un espaciotiempo de $4+n$ dimensiones. Supongamos también que, al nivel de dicha escala, la simetría de espaciotiempo que gobierna a la formulación de física fundamental que nos interesa se caracteriza mediante un grupo de Lorentz $(4+n)$-dimensional. Siguiendo la prescripción estándar para definir teorías de campo en un espaciotiempo así [27, 28], consideramos una réplica del Modelo Estándar, pero definiendo a todas sus variables dinámicas y simetrías en el espaciotiempo con dimensiones extras [29, 30]. Imaginemos un proceso en el que, partiendo de esta escala de alta energía, estudiamos a la naturaleza a escalas de energía gradualmente más bajas. Supongamos que este proceso nos lleva, eventualmente, a una escala de menor energía, llamada *escala de compactificación* y denotada como R^{-1}, en la que las dimensiones extras lucen finitas. En este contexto, decimos que las dimensiones extras están *compactificadas* [31]. La compactificación induce un rompimiento de la simetría de Lorentz extradimensional, dejando como simetría remanente a la invariancia de Lorentz en 4 dimensiones, que entonces ocupa el lugar de simetría de espaciotiempo de bajas energías. Además, resulta que, tras la compactificación, por cada campo extradimensional aparece un número infinito de campos definidos en cuatro dimensiones, que reciben el nombre de *modos de Kaluza-Klein* y los cuales encarnan a las variables dinámicas de la teoría de bajas energías [27, 28]. Otro derivado es la ocurrencia de masas de modos de Kaluza-Klein, a lo cual se le conoce como *mecanismo de Kaluza-Klein* de generación de masas. Finalmente, la simetría de norma definida en dimensiones extras se separa, al nivel de 4 dimensiones, en dos conjuntos disjuntos de transformaciones [32, 33, 34]: las *transformaciones de norma estándar*, asociadas al grupo de norma 4-dimensional $\mathrm{SU}(3,\mathcal{M}^4)_c\times\mathrm{SU}(2,\mathcal{M}^4)_L\times\mathrm{U}(1,\mathcal{M}^4)_Y$, y las *transformaciones de norma no-estándar*.

Para la presente tesis se considera el contexto, más restringido, de la versión extradimensional de la teoría de la electrodinámica en 5 dimensiones de espaciotiempo, la cual se caracteriza por la Lagrangiana

$$\mathcal{L}^5_{\mathrm{QED}}=\overline{\Psi}(x,\bar{x})(i\Gamma^M D_M-m)\Psi(x,\bar{x})-\frac{1}{4}\mathscr{F}^{MN}(x,\bar{x})\mathscr{F}_{MN}(x,\bar{x}), \tag{1}$$

donde los índices de espaciotiempo corren sobre $M,N=0,1,2,3,5$. Además, se ha denotado a las coordenadas del espaciotiempo 4-dimensional ordinario como x, en tanto que la etiqueta $\bar{x}$ se refiere a la coordenada extra. En analogía con la teoría estándar, el tensor electromagnético se define como $\mathscr{F}^{MN}=\partial^M\mathcal{A}^N-\partial^N\mathcal{A}^M$, siendo $\mathcal{A}^M(x,\bar{x})$ el campo de norma de la teoría, al cual le correspondería el papel de campo electromagnético en 5 dimensiones. Además, la derivada covariante se define como $D_M=\partial_M-ie_5\mathcal{A}_M$, donde e_5 es la constante de acoplamiento de la teoría. Suponiendo que la dimensión extra está compactificada y que tiene la estructura de un *orbifold* S^1/Z_2 de radio R, los campos de la teoría se expanden en modos de Kaluza-Klein, de los cuales los modos cero se identifican como la variables de la electrodinámica ordinaria, dada en 4 dimensiones de espaciotiempo. Estas expansiones relegan toda la dependencia de la coordenada extradimensional $\bar{x}$ a funciones trigonométricas, de manera que se puede integrar a esta coordenada explícitamente en la acción, lo cual define a la Lagangiana de Kaluza-Klein $\mathcal{L}^{\mathrm{KK}}_{\mathrm{QED}}$ mediante

$$S_{\mathrm{QED}}=\int d^5x\,\mathcal{L}^5_{\mathrm{QED}}(x,\bar{x})=\int d^4x\int d\bar{x}\,\mathcal{L}^5_{\mathrm{QED}}(x,\bar{x})\equiv\int d^4x\,\mathcal{L}^{\mathrm{KK}}_{\mathrm{QED}}(x). \tag{2}$$

En el presente trabajo de tesis se considera, bajo el contexto antes descrito, la acción efectiva, $\Gamma_{\mathrm{eff}}[A^{(0)}_\mu]$, definida por

$$e^{i\Gamma_{\mathrm{eff}}[A^{(0)}_\mu]}=\int\mathscr{D}\psi^{(k)}\mathscr{D}\bar{\psi}^{(k)}\exp\left\{i\int d^4x\,\mathcal{L}_{\mathrm{QED}}\right\}. \tag{3}$$

Mediante la integración de modos excitados de Kaluza-Klein $\psi^{(k)}$ y $\bar{\psi}^{(k)}$ se pretende encontrar, a partir de esta expresión, contribuciones al término Lagrangiano no-renormalizable

$$\frac{\alpha_{W^2}}{(R^{-1})^2}F^{(0)}_{\mu\nu}\partial^2F^{(0)\mu\nu}=\frac{\alpha_{W^2}}{(R^{-1})^2}F^{(0)}_{\mu\nu}\partial^\alpha\partial_\alpha F^{(0)\mu\nu}, \tag{4}$$

definido, exclusivamente, en términos de modos cero de norma de Kaluza-Klein $A^{(0)}_\mu(x)$, mediante el tensor electromagnético $F^{(0)}_{\mu\nu}=\partial_\mu A^{(0)}_\nu-\partial_\nu A^{(0)}_\mu$. En la ecuación anterior, α_{W^2} es una constante adimensional, que parametriza los efectos de las dimensiones extras a través de variables dinámicas y de simetrías de baja energía. Por otra parte, R^{-1} es la escala de compactificación, la cual es

inversa al radio de la dimensión extra.
En el primer capítulo de la presente tesis se da una breve introducción a teorías efectivas, explicando sus bases y fundamentos, seguido de esto se desarrolla un método general para obtener una lagrangiana efectiva a partir de alguna teoría de campos y se explica además el proceso de regularización dimensional, el cuál es empleado para llegar al resultado deseado. En el segundo capítulo se emplea el método visto en el capítulo anterior en la teoría de electrodinámica cuántica ordinaria para conseguir una lagrangiana efectiva de Euler Heisenberg. Finalmente en el tercer capítulo, se postula una teoría electrodinámica 5-dimensional, se expande en modos de Kaluza Klein y mediante la integración de la dimensión extra se llega a una lagrangiana de Kaluza-Klein. Después se toman algunos términos específicos de esta lagrangiana y se aplica el método visto en el capítulo 2 para conseguir una lagrangiana efectiva de Euler Heisenberg que contenga las contribuciones (producidas por los efectos de la dimensión extra) a la lagrangiana efectiva de dichos términos.

Índice general

Capítulo 1

Lagrangianas efectivas

1.1. Los fundamentos de la lagrangiana efectiva

Podría resultar paradójico pensar en ser capaces de predecir el comportamiento de un fenómeno el cual no comprendemos en su totalidad. No obstante, precisamente es así como funcionan la totalidad de teorías y modelos físicos, puesto que actualmente no existe alguna teoría capaz de describir algún fenómeno desde su enfoque más fundamental. En realidad, toda teoría física tiene un poder predictivo restringido al cumplimiento de circunstancias específicas. Tomemos como ejemplo el caso de la mecánica clásica, ésta es capaz de describir con gran precisión los fenómenos que ocurren a escalas mayores a la escala subatómica, sin embargo, si se desea modelar algún fenomeno a escalas menores, la mayoría de preceptos de la mecánica clásica resultan inútiles. De modo que toda teoría física está sujeta a un rango de aplicabilidad, en general los límites de éstas se encuentran dadas por escalas de energía.
A pesar de que aquellas teorías que gozan de un rango aplicaivo más amplio suelen ser consideradas más exitosas, por lo general implican la introdución de un mayor número de variables y parámetros. En varias circunstancias no se precisa de una descripción tan extensa, sino que se busca una aproximación más cuantitativa y simple de algún fenómeno, por lo que resulta más práctico derivar alguna teoría que se adecúe a nuestros propósitos a partir de una teoría más fundamental.
Las Lagrangianas efectivas nos permiten derivar a partir de algúna teoría de alguna escala energética alta Λ, expresiones que describen dinámica de baja energía, es decir fenómenos que ocurren debajo de dicha escala.
Formalmente, dicha teoría se obtiene tras integrar las variables dinámicas con energías $\geq \Lambda$ de alguna teoría más fundamental, de manera que la expresión resultante es dependiente únicamente de los modos ligeros de nuestro sistema. No obstante, a pesar de no depender explícitamente de modos pesados, nuestra Lagrangiana efectiva contendrá todas sus efectos físicos, los cuales son incluidos de manera indirecta mediante parámetros dependientes de Λ. Dotando así a nuestra teoría de un considerable poder predictivo, bajo la restricción de permanecer dentro de su rango de aplicabilidad, esto es, la Lagrangiana efectiva puede racionalizarse como un límite de bajas energías de alguna teoría más fundamental[5, 6].

1.2. Integración de modos pesados

A continuación supongamos que conocemos la teoría subyacente de la cual deseamos derivar una teoría efectiva. La acción efectiva Γ_{eff} puede ser expresada como la siguiente integral funcional:

$$e^{i\Gamma_{\text{eff}}[\Phi_l]} = \int \mathscr{D}\Phi_h \, e^{iS[\Phi_l,\Phi_h]}, \tag{1.1}$$

donde Φ_l y Φ_h hacen referencia a los campos ligeros y pesados respectivamente y $S\left[\Phi_l,\Phi_h\right]$ es la acción clásica de nuestra teoría subyacente. De manera que la acción efectiva se define como sigue

$$\Gamma_{\text{eff}} = \int d^4x \mathcal{L}_{\text{eff}}\left[\Phi_l\right]. \tag{1.2}$$

Seguido de esto es conveniente expandir el campo pesado Φ_h alrededor de una configuración de campo $\overline{\Phi}_h$

$$\begin{aligned} S\left[\Phi_l,\Phi_h\right] =& S\left[\Phi_l,\overline{\Phi}_h\right] + \int d^4x \frac{\partial S}{\partial \Phi_h(x)}\bigg|_{\Phi_h=\overline{\Phi}_h} \left(\Phi_h(x) - \bar{\Phi}_h(x)\right) \\ &+ \frac{1}{2}\int d^4x\, d^4y \frac{\partial^2 S}{\partial\Phi_h(x)\,\partial\Phi_h(y)}\bigg|_{\Phi_h=\overline{\Phi}_h} \left(\Phi_h(x) - \overline{\Phi}_h(x)\right)\left(\Phi_h(y) - \bar{\Phi}_h(y)\right) + \cdots, \end{aligned} \tag{1.3}$$

elegimos $\overline{\Phi}_h$ convenientemente de manera que

$$\frac{\partial S\left[\Phi_l,\Phi_h\right]}{\partial\Phi_h(x)}\bigg|_{\Phi_h=\overline{\Phi}_h} = 0. \tag{1.4}$$

Tras establecer esta condición, es posible expresar $\overline{\Phi}_h$ como una funcional de Φ_l y x, esto es $\overline{\Phi}_h\left[\Phi_l,x\right]$. Con esto a consideración, la ecuación (1.1) puede ser expresada

$$e^{i\Gamma_{\text{eff}}[\Phi_l]} = e^{iS\left[\Phi_l,\overline{\Phi}_h\right]}\int \mathscr{D}\Phi_h\, e^{\int d^4x d^4y\left\{-\frac{1}{2}\left(\Phi_h(x)-\overline{\Phi}_h(x)\right)A(x,y)\left(\Phi_h(y)-\overline{\Phi}_h(y)\right)+\cdots\right\}}, \tag{1.5}$$

donde se definió

$$A(x,y) = -i\frac{\partial^2 S}{\partial\Phi_h(x)\,\partial\Phi_h(y)}\bigg|_{\Phi_h=\overline{\Phi}_h}, \tag{1.6}$$

por lo que podemos representar el coeficiente de la exponencial de la ecuación (1.5) como la multiplicación de matrices infinitas continuas

$$e^{i\Gamma_{\text{eff}}[\Phi_l]} = e^{iS\left[\Phi_l,\overline{\Phi}_h\right]}\int \mathscr{D}\Phi_h\, e^{\left\{\frac{1}{2}\left(\Phi_h-\overline{\Phi}_h\right)^{\intercal}A\left(\Phi_h-\overline{\Phi}_h\right)+\cdots\right\}}, \tag{1.7}$$

en donde $\left(\Phi_h - \overline{\Phi}_h\right)$ representa una matriz columna infinita, de valores reales caracterizada por el parámetro continuo x, A es una matriz cuadrada de valores reales, infinita, de parámetros continuos x y y. Dado que la matriz A es diagonalizable podemos llegar a la siguiente expresión mediante integraciones Gaussianas (ver apendice A), llegamos a

$$e^{i\Gamma_{\text{eff}}[\Phi_l]} = e^{iS\left[\Phi_l,\overline{\Phi}_h\right]}\det\left\{A\right\}^{1/2} + \cdots. \tag{1.8}$$

Haciendo uso de la formula de Jacobi [36]

$$\log\det\left\{A\right\} = \text{tr}\log\left\{A\right\}, \tag{1.9}$$

obtenemos

$$\Gamma\left[\Phi_l\right] \equiv \sum_{k=0}^{\infty}\Gamma^{(k)}\left[\Phi_l\right] = S\left[\Phi_l,\overline{\Phi}_h\left[\Phi_l\right]\right] + \frac{i}{2}\text{tr}\log A\left[\Phi_l\right] + \cdots. \tag{1.10}$$

La expresión anterior es en realidad una expansión en el número de lazos, de esta forma el primer término corresponde a una integración a nivel de árbol y los siguientes corresponden a aproximaciones de lazos. Nótese que el término correspondiente a un lazo se encuentra escrito en función del operador A dependiente de los campos Φ_l.

A continuación se muestra un método general por el cual en muchas ocasiones es posible encontrar $\mathcal{L}_{\text{eff}}$ como una expansión en el número de derivadas de los modos ligeros sobre algún parámetro dimensional M basado en el libro *Effective Lagrangians for the Standard Model* [6].
Consideremos un modelo caracterizado por una lagrangiana descrita por modos ligeros ϕ y pesados Φ

$$\mathcal{L}(\phi,\Phi) = \mathcal{L}_l(\phi) + \mathcal{L}_{l,h}(\phi,\Phi) + \mathcal{L}_h(\Phi). \tag{1.11}$$

La lagrangiana anterior ha sido dividida en tres términos, en los cuales se describen las interacciones unicamente entre modos ligeros; entre modos ligeros y pesados; y entre modos pesados unicamente, respectivamente. Por ejemplo la siguiente.

$$\mathcal{L}(\phi,\Phi) = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - V(\phi) + \frac{1}{2}\partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi - \frac{1}{2}M^2\Phi^2 + \frac{\alpha}{2}\phi^2\Phi^2; \tag{1.12}$$

suponemos que $M \gg m$, donde M y m son las masas asociadas a las partículas pesada y ligera respectivamente, es decir, que el campo Φ es muy pesado en comparación con ϕ.
Expresemos su acción de la siguiente manera $S[\phi,\Phi] = S_\phi[\phi] + S_\Phi[\phi,\Phi]$. Donde se diferencian los términos que dependen únicamente de los modos ligeros del resto, entonces;

$$e^{i\Gamma_{\text{eff}}[\phi]} = \int \mathscr{D}\Phi\, e^{iS[\phi,\Phi]} = e^{iS_\phi[\phi]}\int \mathscr{D}\Phi\, e^{iS_\Phi[\phi,\Phi]}. \tag{1.13}$$

Por el momento nos enfocamos exclusivamente en S_Φ, expresándolo de manera explícita:

$$\begin{aligned} S_\Phi &= \int d^4x\left(\frac{1}{2}\partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi - \frac{1}{2}M^2\Phi^2 + \frac{\alpha}{2}\phi^2\Phi^2\right) \\ &= \int d^4x\left(\frac{1}{2}\partial_\mu(\Phi\partial^\mu\Phi) - \frac{1}{2}\Phi\Box\Phi - \frac{1}{2}M^2\Phi^2 + \frac{\alpha}{2}\phi^2\Phi^2\right) \\ &= \int d^4x\frac{1}{2}\partial_\mu(\Phi\partial^\mu\Phi) + \int d^4x\left(-\frac{1}{2}\right)\Phi\left(\Box + M^2 - \alpha\phi^2\right)\Phi. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Notemos que el primer término es un término de superficie, el cual es descartado a través del teorema de la divergencia, S_Φ se expresa como:

$$\begin{aligned} S_\Phi &= \int d^4x\left(-\frac{1}{2}\right)\Phi\left(\Box + M^2 - \alpha\phi^2\right)\Phi \\ &= \int d^4x\int d^4y\left(-\frac{1}{2}\right)\Phi(x)\,\delta^4(x-y)\left[\Box_y + M^2 - \alpha\phi^2(y)\right]\Phi(y). \end{aligned} \tag{1.15}$$

De manera que,

$$e^{i\Gamma_{\text{eff}}[\phi]} = e^{iS_\phi}\int \mathscr{D}\Phi_h\, e^{-\frac{i}{2}\int d^4x\int d^4y\Phi(x)\delta^4(x-y)\left[\Box_y + M^2 - \alpha\phi^2(y)\right]\Phi^2(y)}. \tag{1.16}$$

Estableciendo así una analogía a la ecuación (1.5), de este modo la funcional integral puede realizarse por medio de una integración Gaussiana, obteniendo así

$$e^{i\Gamma_{\text{eff}}[\phi]} = e^{iS_\phi[\phi]}\left(\det A\right)^{-\frac{1}{2}}; \tag{1.17}$$

en donde A es un operador de la forma $A_{xy} = i\left(\Box_x + M^2 - \alpha\phi_x^2\right)\delta(x-y)$, donde $\phi_x = \phi(x)$. De manera que conseguimos la siguiente expresión:

$$\Gamma_{\text{eff}} = S_\phi + \frac{i}{2}\text{tr}\,\log\{A\}. \tag{1.18}$$

Considerando que

$$\log\{A\} = \log\left\{i\left(\Box + M^2 - \alpha\phi^2\right)\right\} = \log\left\{i\left(\Box + M^2\right)\left(1 - \alpha\left(\Box + M^2\right)^{-1}\phi^2\right)\right\}, \tag{1.19}$$

obtenemos

$$\text{tr}\,\log\{A\} = \text{tr}\,\log\left\{i\left(\Box + M^2\right)\right\} + \text{tr}\,\log\left\{1 - \alpha\left(\Box + M^2\right)^{-1}\phi^2\right\}. \tag{1.20}$$

A continuación consideramos la expansión en serie de potencias

$$\log(1 - z) = -z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - \cdots = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k}; \tag{1.21}$$

implementando esta expansión a la ecuación (1.20) conseguimos

$$\text{tr}\,\log\{A\} = \text{tr}\,\log\left\{i\left(\Box + M^2\right)\right\} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\text{tr}\left\{\left(\alpha\left(\Box + M^2\right)^{-1}\phi^2\right)^k\right\}, \tag{1.22}$$

de esta forma, la acción efectiva se expresa como:

$$\Gamma_{\text{eff}} = S_\phi + \frac{i}{2}\text{tr}\,\log\left\{i\left(\Box + M^2\right)\right\} - \frac{i}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\text{tr}\left\{\left(\alpha\left(\Box + M^2\right)^{-1}\phi^2\right)^k\right\}. \tag{1.23}$$

El segundo término de la expresión anterior es independiente de los campos, de modo que solo contribuye a la energía del punto cero, por lo que será ignorado.
Escribimos a la acción efectiva como

$$\Gamma_{\text{eff}} = S_\phi - \frac{i}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\text{tr}\left\{\left(\alpha\left(\Box + M^2\right)^{-1}\phi^2\right)^k\right\} \equiv S_\phi + \sum_{k=1}^{\infty}\Gamma^{(k)}[\phi]; \tag{1.24}$$

analicemos el término correspondiente a $k = 1$ en la expresión anterior.

$$\Gamma^{(1)}[\phi] = -\frac{i}{2}\text{tr}\left\{\alpha\left(\Box + M^2\right)^{-1}\phi^2\right\} = -\frac{i\alpha}{2}\int d^4x\,\left(\Box + M^2\right)^{-1}(x)\,\phi_x^2, \tag{1.25}$$

donde se expresó la traza de la matriz continua como una integral sobre los elementos de la diagonal parametrizados por x.
Consideremos ahora el propagador de Feynman de la teoría de Klein-Gordon, denotado como $\mathscr{D}_F(x-y)$, la cual satisfece la condición

$$\left(\Box_x + M^2\right)(x)\,i\mathscr{D}_F(x-y) = \delta^4(x-y), \tag{1.26}$$

esto es, $\mathscr{D}_F(x-y)$ es una función de Green del operador de Klein-Gordon $\left(\Box + M^2\right)$. Por lo tanto podemos escribir la ecuación (1.25) como

$$\Gamma^{(1)}[\phi] = -\frac{i\alpha}{2}\int d^4x\,\left(\Box + M^2\right)^{-1}(x)\,\phi_x^2 = \frac{\alpha}{2}\int d^4x\,\mathscr{D}_F(x-x)\,\phi_x^2. \tag{1.27}$$

Es posible escribir el propagador de Feynman en el espacio de momentos mediante su transformada de Fourier de la siguiente forma

$$\mathscr{D}_F(x-y) = \int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,\frac{i}{p^2 - M^2 + i\epsilon}e^{-ip\cdot(x-y)}, \tag{1.28}$$

así que, en particular

$$\mathscr{D}_F(x-x) = \int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,\frac{i}{p^2 - M^2 + i\epsilon}; \tag{1.29}$$

con lo cual la ecuación (1.27) se escribe como

$$\Gamma^{(1)}[\phi] = \frac{i}{2}\alpha \int d^4x \, \phi_x^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 - M^2 + i\epsilon}, \tag{1.30}$$

sin embargo la integral de momentos es divergente debido a la dimensión a la que opera, por lo que se llevará a cabo una regularización dimensional.

1.3. Regularización dimensional

Consideremos la integral

$$\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 - M^2 + i\epsilon}. \tag{1.31}$$

Debido a que esta integral es divergente cuando la dimensión $D = 4$; consideramos, en su lugar, un espaciotiempo con D dimensiones, de los cuales una dimensión es de tipo temporal y $D-1$ son de tipo espacial. Con la particularidad de que D no es un número natural, sino un número complejo con la única restricción de que $D \neq 4$. De manera que la integral, en este espaciotiempo de D dimensiones luce como

$$\mu^{4-D} \int \frac{d^Dp}{(2\pi)^D} \frac{1}{p^2 - M^2 + i\epsilon}, \tag{1.32}$$

en donde $p^2 = \left(p^0\right)^2 - \vec{p}^2$, y $\vec{p}^2$ es un producto escalar de tipo Euclidiano en un espacio de $D-1$ dimensiones. Además es introducida la cantidad μ la cual tiene unidades de $[\mu] =$ masa, con el propósito de ajustar las unidades de la integral.
Implementando a la ecuación (1.32) una rotación de Wick obtenemos

$$\mu^{4-D} \int \frac{d^Dp}{(2\pi)^D} \frac{1}{p^2 - M^2 + i\epsilon} = -\frac{i}{(2\pi)^D} \mu^{4-D} \int d^Dp_E \frac{1}{p_E^2 + M^2}, \tag{1.33}$$

donde p_E hace referencia al momento Euclidiano.
A continuación hacemos uso de las coordenadas hiperesféricas en D dimensiones, de modo que la integral en la ecuación (1.33) se expresa

$$-\frac{i}{(2\pi)^D} \mu^{4-D} \int d^Dp_E \frac{1}{p_E^2 + M^2} = -i \int \frac{d\Omega_D}{(2\pi)^D} \mu^{4-D} \int d|p_E| \frac{|p_E|^{D-1}}{|p_E|^2 + M^2}, \tag{1.34}$$

donde Ω_D representa el ángulo sólido del espacio D dimensional. Por tanto $\int d\Omega_D$ representa el área de una esfera unitaria en D dimensiones, la cual puede ser expresada mediante funciones Gamma de la siguiente manera [39]

$$\int d\Omega_D = \frac{2\pi^{\frac{D}{2}}}{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)}. \tag{1.35}$$

Podemos entonces expresar la ecuación (1.34) como

$$\begin{aligned} -\frac{i}{(2\pi)^D} \mu^{4-D} \int d^Dp_E \frac{1}{p_E^2 + M^2} &= -i \frac{2\pi^{\frac{D}{2}}}{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)} \mu^{4-D} \int d|p_E| \frac{|p_E|^{D-1}}{|p_E|^2 + M^2} \frac{1}{(2\pi)^D} \\ &= -\frac{i}{2} \frac{2\pi^{\frac{D}{2}}}{(2\pi)^D} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)} \mu^{4-D} \int d|p_E| \left(2|p_E|\right) \frac{\left(|p_E|^2\right)^{\frac{D}{2}-1}}{|p_E|^2 + M^2}, \end{aligned} \tag{1.36}$$

haciendo un cambio de variable de la forma $x = |p_E|^2$ la integral se expresa como

$$-\frac{i}{(2\pi)^D}\mu^{4-D}\int d^D p_E \frac{1}{p_E^2+M^2} = -\frac{i}{2}\frac{2\pi^{\frac{D}{2}}}{(2\pi)^D}\frac{1}{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)}\mu^{4-D}\int dx \frac{x^{\frac{D}{2}-1}}{x+M^2}; \tag{1.37}$$

ahora, aplicando el cambio de variable $y=\frac{M^2}{x+M^2}$ obtenemos

$$-\frac{i}{(2\pi)^D}\mu^{4-D}\int d^D p_E \frac{1}{p_E^2+M^2} = -\frac{i}{2}\frac{2\pi^{\frac{D}{2}}}{(2\pi)^D}\frac{1}{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)}\mu^{4-D} \times \int_0^1 dy \left(M^2\right)^{\frac{D}{2}-1}(1-y)^{\frac{D}{2}-1} y^{-\frac{D}{2}}. \tag{1.38}$$

Notemos además que la integral puede expresarse en términos de una función beta dada la siguiente propiedad

$$\beta(p,q) = \int_0^1 dt\, t^{p-1}(1-t)^{q-1}, \tag{1.39}$$

de modo que la ecuación (1.38) se escribe

$$-\frac{i}{(2\pi)^D}\mu^{4-D}\int d^D p_E \frac{1}{p_E^2+M^2} = -\frac{i}{2}\frac{2\pi^{\frac{D}{2}}}{(2\pi)^D}\frac{1}{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)}\left(M^2\right)^{\frac{D}{2}-1}\mu^{4-D}\beta\left(\frac{D}{2},1-\frac{D}{2}\right), \tag{1.40}$$

y dado que

$$\beta(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}; \tag{1.41}$$

obtenemos

$$\begin{aligned}
-\frac{i}{(2\pi)^D}\mu^{4-D}\int d^D p_E \frac{1}{p_E^2+M^2} &= -\frac{i}{2}\frac{2\pi^{\frac{D}{2}}}{(2\pi)^D}\frac{1}{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)}\left(M^2\right)^{\frac{D}{2}-1}\mu^{4-D}\frac{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{D}{2}\right)}{\Gamma(1)} \\
&= -\frac{i}{2}\frac{2\pi^{\frac{D}{2}}}{(2\pi)^D}\left(M^2\right)^{\frac{D}{2}-1}\mu^{4-D}\Gamma\left(1-\frac{D}{2}\right) \\
&= -\frac{i}{(4\pi)^2}\left(\frac{4\pi\mu^2}{M^2}\right)^{\frac{4-D}{2}} M^2\Gamma\left(-1+\frac{4-D}{2}\right).
\end{aligned} \tag{1.42}$$

A continuación se realiza una continuación analítica de la ecuación anterior, para lo cual suponemos que ésta es válida para D complejo en particular para $D \longrightarrow 4$. Bajo tales circunstancias, definimos $\epsilon = 4-D$, con $\epsilon \longrightarrow 0$. Usando tal definición, la ecuación anterior se expresa como

$$-\frac{i}{(2\pi)^D}\mu^{4-D}\int d^D p_E \frac{1}{p_E^2+M^2} = -\frac{i}{(4\pi)^2}\left(\frac{4\pi\mu^2}{M^2}\right)^{\epsilon/2} M^2\Gamma\left(-1+\frac{\epsilon}{2}\right). \tag{1.43}$$

Consideramos las siguientes expansiones alrededor de $\epsilon=0$

$$\Gamma\left(-1+\frac{\epsilon}{2}\right) = -\frac{2}{\epsilon}-1+\gamma_{\rm E}+\mathcal{O}(\epsilon), \tag{1.44}$$

$$x^{\epsilon/2} = 1+\frac{1}{2}\log(x)\epsilon+\mathcal{O}(\epsilon^2), \tag{1.45}$$

donde $\gamma_{\rm E}$ es la constante de Euler y los términos $\mathcal{O}(x)$ representan los términos de orden x y mayor.
Puesto que la función $\Gamma(z)$ tiene polos en $z=0,-1,-2,...$ la funfión $\Gamma\left(-1+\frac{\epsilon}{2}\right)$ tiene un polo en $\epsilon=0$, lo cual es explicito en su expansión en serie. Con estos resultados escribimos

$$
\begin{aligned}
-\frac{i}{(2\pi)^D}\mu^{4-D}\int d^D p_E \frac{1}{p_E^2+M^2} =& -\frac{i}{(4\pi)^2}M^2\left(1+\frac{1}{2}\log\left(\frac{4\pi\mu^2}{M^2}\right)\epsilon+\mathcal{O}(\epsilon^2)\right)\\
&\times\left(-\frac{2}{\epsilon}-1+\gamma_{\mathrm{E}}+\mathcal{O}\left(\epsilon\right)\right)\\
=&\frac{i}{(4\pi)^2}M^2\left(\frac{2}{\epsilon}+1-\gamma_{\mathrm{E}}+\log(4\pi)+\log\left(\frac{\mu^2}{M^2}\right)\right)\\
&+\mathcal{O}(\epsilon^2)\\
\simeq& i\frac{M^2}{(4\pi)^2}\left(N_\epsilon+1-\log\left(\frac{M^2}{\mu^2}\right)\right),
\end{aligned}
\tag{1.46}
$$

donde $N_\epsilon \equiv \frac{2}{\epsilon}+\log 4\pi-\gamma_{\mathrm{E}}$, de modo que, sustituyendo la ecuación anterior en la ecuación (1.30) obtenemos finalmente

$$
\Gamma^{(1)}[\phi] = -\frac{\alpha M^2}{2(4\pi)^2}\left(N_\epsilon+1-\log\frac{M^2}{\mu^2}\right)\int dx\,\phi_x^2. \tag{1.47}
$$

La divergencia originada por nuestro número de dimensiones, y que se encuentra contenida en el término divergente N_ϵ podría ser eliminada mediante un proceso de renormalización.
A continuación desarrollemos el siguiente término en la ecuación (1.24).

$$
\Gamma^{(2)}[\phi] = -\frac{i}{4}\alpha^2\mathrm{tr}\int dx\,dy\,d\tilde{q}\,d\tilde{k}\frac{e^{-iq(x-y)}}{q^2-M^2}\phi_y^2\frac{e^{-ik(x-y)}}{k^2-M^2}\phi_x^2, \tag{1.48}
$$

donde $d\tilde{q}$ hace referencia a la variable de integración necesaria para llevar a cabo una regularización dimensional, esto es $d\tilde{q}=\mu^{4-D}\frac{d^Dq}{(2\pi)^D}$.
Ahora introducimos el cambio de varible $k=p+q$,

$$
\Gamma^{(2)}[\phi] = -\frac{i}{4}\alpha^2\mathrm{tr}\int dx\,dy\,\phi_x^2\phi_y^2\int d\tilde{p}\,e^{-ip(y-x)}I\left(p^2;M^2\right), \tag{1.49}
$$

con

$$
I\left(p^2;M^2\right)\equiv\int d\tilde{q}\,\frac{1}{\left[q^2-M^2\right]\left[(p+q)^2-M^2\right]}. \tag{1.50}
$$

A continuación analizaremos el integrando de la ecuación anterior, que mediante una parametrización de Feynman puede ser escrita como [37]

$$
\int d\tilde{p}\frac{1}{\left[q^2-M^2\right]\left[(p+q)^2-M^2\right]} = \int d\tilde{p}\int_0^1 dx\frac{1}{\left[(q+(1-x)p)^2+x(x-1)p^2-M^2\right]^2}. \tag{1.51}
$$

Ahora realizamos el cambio de variable $k=q+p(1-x)$ que en componentes se escribe como $k^\mu=q^\mu+(1-x)p^\mu$. El Jacobiano de esta transformación es $+1$, de modo que la ecuación (1.51) se escribe como

$$
\begin{aligned}
\int d\tilde{p}\frac{1}{\left[q^2-M^2\right]\left[(p+q)^2-M^2\right]} &= \int d\tilde{k}\int_0^1 dx\frac{1}{\left[k^2-(M^2-x(1-x)p^2)\right]^2}\\
&=\int_0^1 dx\int d\tilde{k}\frac{1}{\left(k^2-R^2\right)^2},
\end{aligned}
\tag{1.52}
$$

donde $R=M^2-x(1-x)p^2$. Enfoquémonos ahora en la integral $\int d\tilde{k}\frac{1}{(k^2-R^2)^2}$, la cual es divergente en 4 dimensiones, motivo por el cuál se le realizará una regularización dimensional de manera análoga a cómo se hizo con la ecuación (1.32). El resultado de dicho proceso puede encontrarse en tablas de integrales, siguiendo específicamente la tabla encontrada en el libro de *Peskin y Schroeder A.44* [37]:

$$\begin{aligned}\int d\tilde{k}\frac{1}{\left(k^2-R^2\right)^2} &= \mu^{4-D}\frac{(-1)^2 i}{(4\pi)^{D/2}}\frac{\Gamma\left(2-\frac{D}{2}\right)}{\Gamma(2)}\left(\frac{1}{R^2}\right)^{2-\frac{D}{2}} \\ &= \mu^{4-D}\frac{i}{(4\pi)^{D/2}}\Gamma\left(2-\frac{D}{2}\right)\left(\frac{1}{R^2}\right)^{2-\frac{D}{2}}.\end{aligned} \tag{1.53}$$

Nuevamente, usamos el parámetro $\epsilon = 4-D$ de modo que si $D \longrightarrow 4$ entonces $\epsilon \longrightarrow 0$, entonces la ecuación (1.53) toma la forma

$$\begin{aligned}\int d\tilde{k}\frac{1}{\left(k^2-R^2\right)^2} &= \mu^{\epsilon}\frac{i}{(4\pi)^{2-\epsilon/2}}\Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right)\left(\frac{1}{R^2}\right)^{\epsilon/2} \\ &= \frac{i}{(4\pi)^2}\Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right)\left(\frac{4\pi\mu^2}{R^2}\right)^{\epsilon/2},\end{aligned} \tag{1.54}$$

alrededor de $\epsilon = 0$ la función $\Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right)$ y $x^{-\epsilon}$ se expanden en series de potencias como

$$\Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) = \frac{2}{\epsilon} - \gamma_{\mathrm{E}} + \mathcal{O}(\epsilon), \tag{1.55}$$

$$x^{-\epsilon} = 1 - \log(x)\epsilon + \mathcal{O}\left(\epsilon^2\right), \tag{1.56}$$

de modo que

$$I\left(p^2; M^2\right) = \int_0^1 dx \int d\tilde{k}\frac{1}{\left(k^2-R^2(x)\right)^2} = \frac{i}{(4\pi)^2}\int_0^1 dx\left[N_\epsilon - \log\frac{R^2(x)}{\mu^2}\right]. \tag{1.57}$$

Recuperando que $R = M^2 - x(1-x)p^2$, la ecuación (1.48) se expresa como

$$\Gamma^{(2)}[\phi] = \frac{\alpha^2}{4(4\pi)^2}\int dx\, dy\, d\tilde{p}\, \phi_x^2\phi_y^2 e^{-p(y-x)}\left(N_\epsilon - \log\frac{M^2}{\mu^2} - \int_0^1 dt\, \log\left[1-t(1-t)\frac{p^2}{M^2}\right]\right). \tag{1.58}$$

Para el caso en que $p^2 << M^2$ es posible expandir el logaritmo en esta ecuación de manera que

$$\begin{aligned}I'\left(\frac{p^2}{M^2}\right) &\equiv -\int_0^1 dt\, \log\left[1-t(1-t)\frac{p^2}{M^2}\right] \\ &= \int_0^1 dt \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{p^2}{M^2}\right)^2 [t(1-t)]^k = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(k!)^2}{k(2k+1)!}\left(\frac{p^2}{M^2}\right)^k \\ &= \frac{1}{6}\frac{p^2}{M^2} + \frac{1}{60}\left(\frac{p^2}{M^2}\right)^2 + \frac{1}{420}\left(\frac{p^2}{M^2}\right)^3 + \mathcal{O}\left(\frac{p^2}{M^2}\right)^4,\end{aligned} \tag{1.59}$$

por lo que finalmente llegamos a la expresión

$$\begin{aligned}\Gamma^{(2)}[\phi] &= \frac{\alpha^2}{4(4\pi)^2}\left(N_\epsilon - \log\frac{M^2}{\mu^2}\right)\int dx\, \phi^4 \\ &+ \frac{\alpha^2}{4(4\pi)^2}\int dx\, dy\, d\tilde{p}\, \phi_x^2\phi_y^2 e^{-p(y-x)} I'\left(\frac{p^2}{M^2}\right) \\ &= \frac{\alpha^2}{4(4\pi)^2}\left(N_\epsilon - \log\frac{M^2}{\mu^2}\right)\int dx\, \phi^4 + \frac{\alpha^2}{4(4\pi)^2}\int dx\, \phi^2\, I'\left(\frac{-\Box}{M^2}\right)\phi^2 \\ &= \frac{\alpha^2}{4(4\pi)^2}\left(N_\epsilon - \log\frac{M^2}{\mu^2}\right)\int dx\, \phi^4 - \frac{\alpha^2}{24(4\pi)^2 M^2}\int dx\, \phi^2\Box\phi^2 + \mathcal{O}\left(\frac{\Box}{M^2}\right)^2.\end{aligned} \tag{1.60}$$

Podemos notar que el último término de la ecuación anterior no es renormalizable, este será el término el cuál se estudiará en esta tesis para el caso de una teoría electrodinámica de Kaluza-Klein.

Capítulo 2

La lagrangiana de Euler Heisenberg

Hasta el momento hemos descrito un método para llegar a una lagrangiana efectiva dada algúna teoría subyaciente en particular. Sin embargo, para los fines de esta tesis resulta conveniente aplicar dicho método sobre la teoría de electrodinámica cuántica (EDC); para así llegar a una Lagrangiana de Euler Heisenberg, una lagrangiana efectiva que describe los efectos a un lazo de dicha teoría en un campo de fondo constante[38].

La acción efectiva del fotón puede ser definida como se muestra a continuación

$$e^{i\Gamma_{\text{eff}}[A_\mu]} = \int \mathscr{D}\psi \mathscr{D}\bar{\psi} e^{i\int dx\, \mathcal{L}_{\text{QED}}(A_\mu, \psi, \bar{\psi})}, \tag{2.1}$$

donde $\mathcal{L}_{\text{QED}}$ depende del campo fermiónico ψ, su adjunto de Dirac $\bar{\psi}$, y el campo de norma A_μ. Consideremos que $\mathcal{L}_{\text{QED}}$ se encuentra dada por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \int dx\, \mathcal{L}_{\text{QED}} &= -\frac{1}{4}\int dx\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \int dx\, \bar{\psi}\left(i\not{D} - M\right)\psi \\ &= -\frac{1}{4}\int dx\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \int dx\, \bar{\psi}\left(i\not{\partial} + e\not{A}_\mu - M\right)\psi, \end{aligned} \tag{2.2}$$

de modo que la ecuación (2.1) se escribe

$$e^{i\Gamma_{\text{eff}}[A_\mu]} = e^{-i\frac{1}{4}\int dx\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \int dx\, \bar{\psi}\left(i\not{D} - M\right)\psi}. \tag{2.3}$$

Mediante el uso de integrales Gaussianas, como se vió en la ecuación (1.8) llegamos a

$$e^{i\Gamma_{\text{eff}}[A_\mu]} = e^{-i\frac{1}{4}\int dx\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}} \det\left[\left(i\not{D} - M\right)\delta_{xy}\right]^{-1}, \tag{2.4}$$

notemos que

$$\begin{aligned} \log\det\left[\left(i\not{D} - M\right)\delta_{xy}\right]^{-1} &= \log\det\left[\left(i\not{\partial} + e\not{A} - M\right)\delta_{xy}\right]^{-1} \\ &= -i\,\text{tr}\log\left(i\not{\partial} - M\right) - i\,\text{tr}\log\left(1 + e\not{A}\left(i\not{\partial} - M\right)^{-1}\right), \end{aligned} \tag{2.5}$$

el primer término no es dependiente de los campos ψ, y $\bar{\psi}$ y contribuye trivialmente a la acción efectiva, motivo por el cual lo omitiremos de ahora en adelante y nos enfocaremos en el segundo término, el cual expandiremos en serie:

$$-i\,\text{tr}\log\left(1 + e\not{A}\left(i\not{\partial} - M\right)^{-1}\right) = i\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-e)^k}{k}\text{tr}\left[\left(i\not{\partial} - M\right)^{-1}\not{A}\right]^k. \tag{2.6}$$

Teniendo en cuenta la expresión anterior, obtenemos

$$\begin{aligned}\Gamma[A_\mu] &= -\frac{1}{4}\int dx\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + i\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-e)^k}{k}\mathrm{tr}\left[\left(i\partial\!\!\!/ - M\right)^{-1} A\!\!\!/\right]^k \\ &= -\frac{1}{4}\int dx\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \sum_{k=1}^{\infty}\Gamma^{(K)}[A]. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Puede ser demostrado que aquellos términos con un número impar de campos fotónicos se eliminan (Teorema de Furry [35]).
A continuación definimos:

$$G_{xy} = \left(i\partial\!\!\!/ - M\right)^{-1}_{xy} = \int d\tilde{q}\, e^{-iq(x-y)}\frac{q\!\!\!/ + M}{q^2 - M^2 + i\epsilon}. \tag{2.8}$$

Analizemos ahora el término $\Gamma^{(2)}[A]$ el cual es la primera contribución a la acción efectiva,

$$\begin{aligned}\Gamma^{(2)}[A] &= \frac{i}{2}e^2\mathrm{tr}\int dy\, dx\, G_{xy}A\!\!\!/_y G_{yx}A\!\!\!/_x \\ &= \frac{i}{2}e^2\mathrm{tr}\int dy\, dx\, d\tilde{q}\, d\tilde{k}\frac{e^{-iq(x-y)}}{q^2 - M^2}\frac{e^{-ik(x-y)}}{k^2 - M^2}(q\!\!\!/ + M)A\!\!\!/_y(k\!\!\!/ + M)A\!\!\!/_x \\ &= \frac{i}{2}e^2\mathrm{tr}\int dy\, dx\, d\tilde{q}\, d\tilde{k}\frac{e^{-iq(x-y)}}{q^2 - M^2}\frac{e^{-ik(x-y)}}{k^2 - M^2}(q\!\!\!/ + M)\left(\gamma_\mu A^\mu_y\right)(k\!\!\!/ + M)\left(\gamma_\nu A^\nu_x\right). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Realizamos ahora el cambio de variable $k = p + q$, de modo que la ecuación (2.9) toma la forma

$$\Gamma^{(2)}[A] = \frac{i}{2}e^2\int dy\, dx\, d\tilde{p}\, e^{ip(x-y)}A^\mu_y A^\nu_x\int d\tilde{q}\frac{\mathrm{tr}\left[(q\!\!\!/ + M)\gamma_\mu(p\!\!\!/ + q\!\!\!/ + M)\right]}{\left[q^2 - M^2\right]\left[(p+q)^2 - M^2\right]}. \tag{2.10}$$

A continuación nos enfocaremos en analizar la integral respecto a $\tilde{q}$ por lo que nos es conveniente designarla de la siguiente forma

$$I_{\mu\nu}(p; M) = \int d\tilde{q}\frac{\mathrm{tr}\left[(q\!\!\!/ + M)\gamma_\mu(p\!\!\!/ + q\!\!\!/ + M)\right]}{\left[q^2 - M^2\right]\left[(p+q)^2 - M^2\right]}. \tag{2.11}$$

Ahora nos centraremos en desarrollar el numerador del integrando, para lo cual haremos uso de las siguientes identidades de la traza de matrices de Dirac:

$$\begin{aligned}& tr(\mathbb{1}) = 4 \\ & tr\,(\text{poducto de cualquier número impar de } \gamma'\text{s}) = 0 \\ & tr\,(\gamma^\mu\gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu} \\ & tr\,(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma) = 4\left(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}\right), \end{aligned} \tag{2.12}$$

así, aplicando dichas identidades en el numerador, conseguimos:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{tr}\left[(\not{q}+M)\gamma_\mu(\not{p}+\not{q}+M)\right] &= \operatorname{tr}\left[(\gamma^\rho k_\rho-\gamma^\rho p_\rho(1-x)+M)\right.\\
&\quad\left.\times g_{\alpha\mu}\gamma^\alpha\left(\gamma^\sigma p_\sigma+\gamma^\sigma k_\sigma-\gamma^\sigma p_\sigma(1-x)+M\right)g_{\beta\nu}\gamma^\beta\right]\\
\\
&= g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}\left\{\operatorname{tr}\left[\gamma^\rho\gamma^\alpha\gamma^\sigma\gamma^\beta\left(k_\rho-p_\rho(1-x)\right)\left(p_\sigma+k_\sigma-p_\sigma(1-x)\right)\right]\right.\\
&\quad+\operatorname{tr}\left[\gamma^\rho\gamma^\alpha\gamma^\beta\left(k_\rho-p_\rho(1-x)\right)M\right]\\
&\quad+\operatorname{tr}\left[\gamma^\alpha\gamma^\sigma\gamma^\beta M\left(p_\sigma+k_\sigma-p_\sigma(1-x)\right)\right]\\
&\quad\left.+tr\left[\gamma^\alpha\gamma^\beta M^2\right]\right\}\\
\\
&= g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}\left[4\left(g^{\rho\alpha}g^{\sigma\beta}-g^{\rho\sigma}g^{\alpha\beta}+g^{\rho\beta}g^{\alpha\sigma}\right)\left(k_\rho-p_\rho(1-x)\right)\left(p_\sigma(x)+k_\sigma\right)\right.\\
&\quad\left.+4g^{\alpha\beta}M^2\right]\\
\\
&\quad=4\left(k_\mu-p_\mu(1-x)\right)\left(p_\nu(x)+k_\nu\right)\\
&\quad-4g_{\mu\nu}g^{\rho\sigma}\left(k_\rho-p_\rho(1-x)\right)\left(p_\sigma(x)+k_\sigma\right)\\
&\quad+4\left(k_\nu-p_\nu(1-x)\right)\left(p_\mu(x)+k_\mu\right)+g_{\mu\nu}M^2\\
\\
&\quad=4\left[2\left(k_\mu-p_\mu(1-x)\right)\left(p_\nu(x)+k_\nu\right)\right.\\
&\quad\left.-g_{\mu\nu}\left(k^\sigma-p^\sigma(1-x)\right)\left(p_\sigma(x)+k_\sigma\right)+g_{\mu\nu}M^2\right]\\
\\
&\quad=4\left[2k_\mu p_\nu(x)+2k_\mu k_\nu-2x(1-x)p_\mu p_\nu-2p_\mu(1-x)k_\nu\right.\\
&\quad\left.+g_{\mu\nu}\left(-k^\sigma p_\sigma(x)-k^2+p^2x(1-x)+p^\sigma(1-x)k_\sigma+M^2\right)\right]\\
\\
&\quad=4\left[2k_\mu p_\nu(x)+2k_\mu k_\nu-2x(1-x)\left(p_\mu p_\nu-p^2g_{\mu\nu}\right)\right.\\
&\quad-2p_\mu(1-x)k_\nu-g_{\mu\nu}\left(k^2-R^2\right)\\
&\quad\left.+g_{\mu\nu}\left(-k^\sigma p_\sigma(x)+p^\sigma(1-x)k_\sigma\right)\right],
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

donde $R^2=M^2-x(1-x)p^2$. Entonces

$$
\begin{aligned}
\operatorname{tr}\left[(\not{q}+M)\gamma_\mu(\not{p}+\not{q}+M)\right] &= 4\left[2k_\mu k_\nu-2x(1-x)\left(p_\mu p_\nu-p^2g_{\mu\nu}\right)-g_{\mu\nu}\left(k^2-R^2\right)\right.\\
&\quad\left.+2k_\mu p_\nu(2x-1)+g_{\mu\nu}\left(k^\sigma p_\sigma(1-2x)\right)\right].
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

Notemos que el denominador del integrando de la ecuación (2.11) ya fue analizado con anterioridad en la ecuación (1.54), utilizando este resultado obtenemos

$$
\begin{aligned}
I_{\mu\nu}(p;M) = 4\int_0^1 dx\int d\tilde{k}&\left[\frac{2k_\mu k_\nu-2x(1-x)\left(p_\mu p_\nu-p^2g_{\mu\nu}\right)}{\left(k^2-R^2\right)^2}\right.\\
&\left.+\frac{-g_{\mu\nu}\left(k^2-R^2\right)+2k_\mu p_\nu(2x-1)+g_{\mu\nu}\left(k^\sigma p_\sigma(1-2x)\right)}{\left(k^2-R^2\right)^2}\right].
\end{aligned}
\tag{2.15}
$$

Observemos que los términos impares de k se vuelven 0 al integrar respecto a k debido a la simetría de la función. De este modo

$$\begin{aligned} I_{\mu\nu}(p;M) &= 4\int_0^1 dx \int d\tilde{k} \left[\frac{2k_\mu k_\nu - 2x(1-x)\left(p_\mu p_\nu - p^2 g_{\mu\nu}\right) - g_{\mu\nu}\left(k^2-R^2\right)}{\left(k^2-R^2\right)^2}\right] \\ &= 4\int_0^1 dx \int d\tilde{k} \left[\frac{2k_\mu k_\nu}{\left(k^2-R^2\right)^2} - \frac{g_{\mu\nu}}{k^2-R^2} - \frac{2x(1-x)\left(p_\mu p_\nu - p^2 g_{\mu\nu}\right)}{\left(k^2-R^2\right)^2}\right]. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Desarrollemos el primer término de la expresión anterior. Notemos que en el caso de que $\mu \neq \nu$ el integrando será una función impar respecto a k^μ y por ende la integral respecto a dicha variable, estos términos serán iguales a cero, quedando únicamente aquellos términos dónde $\mu = \nu$ de modo que

$$\int d\tilde{k} \frac{2k_\mu k_\nu}{\left(k^2-R^2\right)^2} = \begin{cases} 0 & \text{si } \mu = \nu \\ C^{\mu\nu} \neq 0 & \text{si } \mu \neq \nu \end{cases}, \tag{2.17}$$

donde $C^{\mu\nu}$ es algún 2-tensor de lorentz distinto de 0, el cuál puede ser caracterizado por el tensor de Lorentz, es decir $C^{\mu\nu} = Cg^{\mu\nu}$ de modo que, estando sometido a integración podemos escribir al factor $k^\mu k^\nu$ como

$$k^\mu k^\nu = a g^{\mu\nu} k^2, \tag{2.18}$$

siendo a alguna constante, Contrayendo la ecuación anterior con $g_{\mu\nu}$ por ambos lados de la igualdad obtenemos

$$k^2 = Dak^2, \tag{2.19}$$

de modo que $a = \frac{1}{D}$. Conociendo esto, se llega a que

$$\int d\tilde{k} \frac{2k_\mu k_\nu}{\left(k^2-R^2\right)^2} = \frac{2k^2 g_{\mu\nu}/D}{\left(k^2-R^2\right)^2}, \tag{2.20}$$

donde D es el número de dimensiones. Nuevamente nos enfrentamos a una integral dimensional en el espacio de Minkowski, la cual puede encontrarse en tablas de integrales de este tipo. En este caso específico se hará uso de la siguiente ecuación:

$$\int d\tilde{q} \frac{\left(q^2\right)^r}{\left[k^2-R^2\right]^m} = i\frac{(-1)^{r-m}}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma\left(r+\frac{D}{2}\right)\Gamma\left(m-r-\frac{D}{2}\right)\mu^\epsilon}{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)\Gamma(m)\left(R^2\right)^{m-r-D/2}}, \tag{2.21}$$

con lo cual

$$\begin{aligned} \int d\tilde{k} \frac{2k_\mu k_\nu}{\left(k^2-R^2\right)^2} &= \frac{2g_{\mu\nu}}{D} i \frac{-1}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma\left(1+\frac{D}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{D}{2}\right)\mu^\epsilon}{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)\left(R^2\right)^{1-D/2}} \\ &= g_{\mu\nu} i \frac{-1}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma\left(1-\frac{D}{2}\right)\mu^\epsilon}{\left(R^2\right)^{1-D/2}} \\ &= \int d\tilde{k} \frac{g_{\mu\nu}}{k^2-R^2}, \end{aligned} \tag{2.22}$$

por lo que la ecuación (2.16) se escribe

$$\begin{aligned} I_{\mu\nu}(p;M) &= 4\int_0^1 dx \int d\tilde{k} \left[\frac{g_{\mu\nu}}{k^2-R^2} - \frac{g_{\mu\nu}}{k^2-R^2} - \frac{2x(1-x)\left(p_\mu p_\nu - p^2 g_{\mu\nu}\right)}{\left(k^2-R^2\right)^2}\right] \\ &= -4\int_0^1 dx\, 2x(1-x)\left(p_\mu p_\nu - p^2 g_{\mu\nu}\right)\mu^\epsilon \int \frac{d^D\tilde{k}}{(2\pi)^D} \frac{1}{\left(k^2-R^2\right)^2}. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Reconocemos a la integral en la ecuación anterior como la misma que la ecuación (1.59). De tal manera que se obtiene

$$I_{\mu\nu}(p;M) = \frac{4i}{(4\pi)^2}\int_0^1 dx\, 2x(1-x)\left[\left(p^2 g_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu\right)\left(N_\epsilon - \log\frac{R^2}{\mu^2}\right)\right]. \tag{2.24}$$

Sustituyendo este valor en la ecuación (2.10) se obtiene

$$\begin{aligned}\Gamma^{(2)}[A] = \frac{-4e^2}{(4\pi)^2}&\int dy\, dx\, d\tilde{p} e^{ip(x-y)} A_y^\mu A_x^\nu \\ &\times \int_0^1 dx\, 2x(1-x)\left[\left(p^2 g_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu\right)\left(N_\epsilon - \log\frac{R^2}{\mu^2}\right)\right].\end{aligned} \tag{2.25}$$

A continuación veamos que el siguiente factor puede ser escrito como

$$\begin{aligned}N_\epsilon - \log\frac{R^2}{\mu^2} &= N_\epsilon - \log\left(\frac{M^2 - x(1-x)p^2}{\mu^2}\right) \\ &= N_\epsilon - \log\frac{M^2}{\mu^2} - \log\left(1 + x(x-1)\frac{p^2}{M^2}\right),\end{aligned} \tag{2.26}$$

y dado que

$$\int_0^1 dx\, x(1-x) = \frac{1}{6}, \tag{2.27}$$

obtenemos que la ecuación (2.25) se escribe

$$\begin{aligned}\Gamma^{(2)}[A] = \frac{-4e^2}{(4\pi)^2}&\int dy\, dx\, d\tilde{p} e^{ip(x-y)} A_y^\mu A_x^\nu \\ &\times \left[\frac{1}{6}\left(N_\epsilon - \log\frac{M^2}{\mu^2}\right) + \int_0^1 dx\, x(x-1)\log\left(1 + \frac{p^2}{\mu^2}x(x-1)\right)\left(p^2 g_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu\right)\right].\end{aligned} \tag{2.28}$$

Definimos

$$\begin{aligned}I(p;M) &= \frac{\triangle}{6} + \int_0^1 dx\, x(x-1)\log\left(1 + \frac{p^2}{\mu^2}x(x-1)\right) \\ &= \frac{\triangle}{6} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{p^2}{M^2}\right]^k \int_0^1 dx [x(x-1)]^{k+1}\frac{(-1)^{k+1}}{k} \\ &= \frac{\triangle}{6} + \frac{1}{30}\frac{p^2}{M^2} + \mathcal{O}\left(\frac{p^2}{M^2}\right)^2,\end{aligned} \tag{2.29}$$

donde se definió $\triangle \equiv N_\epsilon - \log\left(\frac{M^2}{\mu^2}\right)$ y se realizó una expansión en series de potencias del logaritmo.

Así pues, sustituyendo la ecuación anterior en la (2.28) llegamos a

$$\Gamma^{(2)}[A] = \frac{-4e^2}{(4\pi)^2}\int dy\, dx\, d\tilde{p} e^{ip(x-y)} A_y^\mu A_x^\nu \left(p^2 g_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu\right)\left[\frac{\triangle}{6} + \frac{1}{30}\frac{p^2}{M^2} + \mathcal{O}\left(\frac{p^2}{M^2}\right)^2\right]. \tag{2.30}$$

Observemos que en la expresión anterior, las contribuciones de los modos pesados de $\Gamma^{(2)}[A]$ se encuentran desacopladas de las contribuciones de los modos ligeros. Analicémos ahora los dos términos por separado.

La conribución no desacoplada (ligera) se expresa:

$$
\begin{aligned}
\Gamma^{(2)}_{ND}[A] &= \frac{-4e^2}{(4\pi)^2}\int dy\,dx\,d\tilde{p}e^{ip(x-y)}A^\mu_y A^\nu_x \left(p^2 g_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu\right)\frac{\triangle}{6} \\
&= \frac{-4e^2}{(4\pi)^2}\int dy\,dx\,d\tilde{p}A^\mu_y A^\nu_x \left(-\partial^2_x e^{ip(x-y)} g_{\mu\nu} + \partial_\mu\partial_\nu e^{ip(x-y)}\right)\frac{\triangle}{6} \\
&= \frac{-4e^2}{(4\pi)^2}\int dy\,dx\,d\tilde{p}\left(-A^\nu_x \partial^2_x A^\mu_y e^{ip(x-y)} g_{\mu\nu} + A^\nu_x\partial_\mu\partial_\nu A^\mu_y e^{ip(x-y)}\right)\frac{\triangle}{6} \\
&= \frac{4e^2}{(4\pi)^2}\frac{\triangle}{6}\int dx\,\left[-\partial^\mu A_\nu \partial_\mu A^\nu + \partial^\mu\left(A_\nu\partial_\mu A^\nu\right)\right. \\
&\qquad\left. + \partial_\mu A^\nu\partial_\nu A^\mu - \partial_\mu\left(A^\nu\partial_\nu A^\mu\right)\right] \\
&= \frac{-4e^2}{(4\pi)^2}\frac{\triangle}{6}\int dx\,\left(\partial^\mu A_\nu\partial_\mu A^\nu - \partial_\mu A^\nu\partial_\nu A^\mu\right) \\
&= \frac{-e^2}{3(4\pi)^2}\triangle\int dx\,F^{\mu\nu}F_{\mu\nu},
\end{aligned} \tag{2.31}
$$

mientras que el término desacoplado es

$$
\begin{aligned}
\Gamma^{(2)}_{D}[A] &= \frac{-4e^2}{30(4\pi)^2M^2}\int dy\,dx\,d\tilde{p}e^{ip(x-y)}A^\mu_y A^\nu_x \left(p^4 g_{\mu\nu} - p_\mu p^2 p_\nu\right) \\
&= \frac{-4e^2}{30(4\pi)^2M^2}\int dy\,dx\,d\tilde{p}\left(A^\nu_x \partial^4_x A^\mu_y e^{ip(x-y)} g_{\mu\nu} - A^\nu_x\partial_\mu\partial^2_x\partial_\nu A^\mu_y e^{ip(x-y)}\right)\frac{\triangle}{6} \\
&= \frac{-4e^2}{30(4\pi)^2M^2}\int dx\,\left[-\partial^\mu A_\nu \partial_\mu\partial^2_x A^\nu + \partial^\mu\left(A_\nu\partial_\mu\partial^2_x A^\nu\right)\right. \\
&\qquad\left. + \partial_\mu A^\nu\partial_\nu\partial^2_x A^\mu - \partial_\mu\left(A^\nu\partial^2_x\partial_\nu A^\mu\right)\right] \\
&= \frac{-4e^2}{30(4\pi)^2M^2}\int dx\,\left(\partial_\mu A^\nu\Box\partial_\nu A^\mu - \partial^\mu A_\nu\Box\partial_\mu A^\nu\right) \\
&= \frac{-e^2}{15(4\pi)^2M^2}\int dx\,F_{\mu\nu}\Box F^{\mu\nu}.
\end{aligned} \tag{2.32}
$$

Finalmente uniendo todos los resultados obtenidos obtenemos la acción efectiva en la siguiente expresión

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{\text{eff}}[A] = -\frac{1}{4}\int dx\,F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{e^2}{3(4\pi)^2}\triangle\int dx\,F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \\
- \frac{e^2}{15(4\pi)^2M^2}\int dx\,F_{\mu\nu}\Box F^{\mu\nu} + \mathcal{O}\left(\frac{p^2}{M^2}\right)^2.
\end{aligned} \tag{2.33}
$$

Podemos notar como el tercer término de la ecuación anterior es un término no renormalizable, ya que inspeccionando las unidades del factor $F_{\mu\nu}\Box F^{\mu\nu}$ advertimos que $[F_{\mu\nu}\Box F^{\mu\nu}] = (\text{masa})^6$. Adicionalmente notamos que dicho término es de la forma que nos interesa estudiar como se muestra en la ecuación (4). Sin embargo esta lagrangiana efectiva fue obtenida a partir de la teoría electrodináminca ordinaria, no de una teoría de Kaluza-Klein, pero servirá como base para obtener dicha lagrangiana como se verá en la siguiente sección.

Capítulo 3

Dimensiones extras, teoría de Kaluza-Klein e integración de modos pesados

3.1. Hipótesis iniciales

Definimos una teoría electrodinámica en cinco dimensiones dada por el siguiente lagrangiano

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^5_{\text{QED}} &= \overline{\Psi}(x,\bar{x})(i\Gamma^M D_M - m)\Psi(x,\bar{x}) - \frac{1}{4}\mathscr{F}^{MN}(x,\bar{x})\mathscr{F}_{MN}(x,\bar{x}) \\ &= \overline{\Psi} i\gamma^\mu D_\mu \Psi - \overline{\Psi}\gamma^5 D_5 \Psi - m\overline{\Psi}\Psi - \frac{1}{4}\mathscr{F}^{MN}\mathscr{F}_{MN},\end{aligned} \tag{3.1}$$

donde los índices latinos corren desde $M, N = 0, 1, 2, 3, 5$ y los indices griegos son os utilizados en el espacio 4-dimensional usual, esto es $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$. Además se hace la diferenciacón sobre las coordenadas, sindo x utilizada para denotar las coordenadas del espaciotiempo cuadridimensional ordinario y $\bar{x}$ utilizado para denotar la coordenada en la dimensión extra. Bajo esta prescripción, se define al tensor electromagnético en cinco dimensiones como $\mathscr{F}^{MN} = \partial^M A^N - \partial^N A^M$ en el cual $A^M(x,\bar{x})$ es el campo de norma de la teoría, definida en 5 dimensiones, así mismo la derivada covariante en este espacio es definida como $D_M = \partial_M - ie_5\mathcal{A}_M$, donde e_5 es la constante de acoplamiento de la teoría; todo esto en completa analogía a la teoría electrodinámica cuántica en 4 dimensiones.

Dado que el objetivo de esta tesis es encontrar contribuciones al lagrangiano no renormalizable, dadas en términos exclusivamente de los modos cero (modos ligeros) del campo de norma de Kaluza-Klein $A^{(0)}_\mu(x)$, dejaremos de lado el lagrangiano de Maxwell $-\frac{1}{4}\mathscr{F}^{MN}(x,\bar{x})\mathscr{F}_{MN}(x,\bar{x})$ dado que la lagrangiana de Kaluza-Klein de este término no produce nuevas contribuciones de este tipo más hallá de la lagrangiana de Maxwell 4-dimensional trivial. En consecuencia nos limitaremos a analizar la lagrangiana de Dirac.

Finalmente postulamos que la quinta dimensión se encuentra compactificada en un orbifold de tipo S^1/Z_2 de radio R.

3.2. Determinación de las paridades de las variables dinámicas

La propuesta de compactificar la quinta dimensión en un orbifold de tipo S^1/Z_2 de radio R, impondrá condiciones de paridad y periodicidad en el campo de norma de la siguiente manera:

$$A_M(x,\bar{x}) = A_M(x,\bar{x}+2\pi R),$$

$$A_\mu(x,\bar{x}) = A_\mu(x,-\bar{x}),$$

$$A_5(x,\bar{x}) = -A_5(x,-\bar{x}). \tag{3.2}$$

Las propidedades anteriores son esenciales, puesto que nos permiten realizar una expansión de Fourier sobre el campo de norma respecto a la coordenada $\bar{x}$. Tomando en cuenta sus respectivas paridades escribimos:

$$A_\mu = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} A_\mu^{(0)}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi R}} A_5^{(n)}(x) \cos\left(\frac{n\bar{x}}{R}\right), \tag{3.3}$$

$$A_5 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{R}} A_5^{(n)}(x) \sin\left(\frac{n\bar{x}}{R}\right), \tag{3.4}$$

donde los factores $A_M^{(n)}$ son conocidos como modos de Kaluza-Klein los cuales son campos asociados a torres infinitas de partículas dependientes únicamente de las coorenadas del espacio 4-dimensional ordinario. Donde identificamos al modo cero $A_\mu^{(0)}$ como la variable de la electrodinámica ordinaria, como se verá con más claridad posteriormente.
Expresando la quinta dimensión como una serie de funciones trigonométricas de $\bar{x}$ somos capaces de integrar la lagrangiana respecto a dicha variable, obteniendo así un lagrangiano totalmente independiente de ésta, el cual será denominado el lagrangiano de Kaluza-Klein:

$$S_{\text{QED}} = \int d^5x\, \mathcal{L}^5_{\text{QED}}(x,\bar{x}) = \int d^4x \int d\bar{x}\, \mathcal{L}^5_{\text{QED}}(x,\bar{x}) \equiv \int d^4x\, \mathcal{L}^{\text{KK}}_{\text{QED}}(x). \tag{3.5}$$

Ahora, bien, es preciso notar que para aplicar este procedimiento a nuestra lagrangiana en cuestión, será necesario además conocer las paridades de $D_\mu\Psi$ y $D_5\Psi$. Obtengamos primero la expansión de Fourier de un campo de Dirac

$$\Psi(x,\bar{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \hat{\Psi}^{(0)}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi R}} \hat{\Psi}^{(n)}(x) \cos\left(\frac{n\bar{x}}{R}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi R}} \tilde{\Psi}^{(n)}(x) \,\text{sen}\left(\frac{n\bar{x}}{R}\right). \tag{3.6}$$

Puesto que el álgebra de Clifford para un espacio de 5 dimensiones está dada por las $\gamma's$ de Dirac usuales (en 4 dimensiones), podemos expresar a los espinores de Dirac Ψ y $\overline{\Psi}$ haciendo uso de campos espinores quirales

$$\hat{\Psi}^{(0)}(x) = \hat{\Psi}^{(0)}_L(x) + \hat{\Psi}^{(0)}_R(x),$$

$$\hat{\Psi}^{(n)}(x) = \hat{\Psi}^{(n)}_L(x) + \hat{\Psi}^{(n)}_R(x),$$

$$\tilde{\Psi}^{(n)}(x) = \tilde{\Psi}^{(n)}_L(x) + \tilde{\Psi}^{(n)}_R(x), \tag{3.7}$$

de manera que

$$\Psi(x,\bar{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}}\left(\hat{\Psi}_L^{(0)}(x) + \hat{\Psi}_R^{(0)}(x)\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi R}}\left(\hat{\Psi}_L^{(n)}(x) + \hat{\Psi}_R^{(n)}(x)\right)\cos\left(\frac{n\bar{x}}{R}\right)$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi R}}\left(\tilde{\Psi}_L^{(n)}(x) + \tilde{\Psi}_R^{(n)}(x)\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\bar{x}}{R}\right). \tag{3.8}$$

Bajo la transformación de paridad de la dimensión extra $\bar{x} \longrightarrow -\bar{x}$, un espinor 5-dimensional $\Psi(\bar{x}, x)$ esta dado por

$$\Psi(x,\bar{x}) \longrightarrow \Psi'(x,\bar{x}') = \gamma^5\Psi(x,-\bar{x}), \tag{3.9}$$

donde γ^5 es la matriz gamma 5 de Driac, dada por $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$. Entonces

$$\Psi(x,\bar{x}) \longrightarrow \Psi'(x,\bar{x}') = \gamma^5\Psi(x,-\bar{x})$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi R}}\gamma^5\hat{\Psi}_L^{(0)}(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi R}}\gamma^5\hat{\Psi}_L^{(n)}(x)\cos\left(\frac{-n\bar{x}}{R}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi R}}\gamma^5\tilde{\Psi}_L^{(n)}(x)\operatorname{sen}\left(\frac{-n\bar{x}}{R}\right)$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi R}}\gamma^5\hat{\Psi}_R^{(0)}(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi R}}\gamma^5\hat{\Psi}_R^{(n)}(x)\cos\left(\frac{-n\bar{x}}{R}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi R}}\gamma^5\tilde{\Psi}_R^{(n)}(x)\operatorname{sen}\left(\frac{-n\bar{x}}{R}\right)$$

$$= -\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi R}}\hat{\Psi}_L^{(0)}(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi R}}\hat{\Psi}_L^{(n)}(x)\cos\left(\frac{n\bar{x}}{R}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi R}}\tilde{\Psi}_R^{(n)}(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\bar{x}}{R}\right)\right)$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi R}}\hat{\Psi}_R^{(0)}(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi R}}\hat{\Psi}_R^{(n)}(x)\cos\left(\frac{n\bar{x}}{R}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi R}}\tilde{\Psi}_L^{(n)}(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\bar{x}}{R}\right). \tag{3.10}$$

De la ecuación anterior podemos notar que se presentan dos casos interesantes. El primero de ellos, si condicionamos que $\hat{\Psi}_L^{(0)} = 0$; $\hat{\Psi}_L^{(n)} = 0$; $\tilde{\Psi}_R^{(n)} = 0$, sucederá qué

$$\Psi(x,\bar{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}}\hat{\Psi}_R^{(0)}(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi R}}\hat{\Psi}_R^{(n)}(x)\cos\left(\frac{n\bar{x}}{R}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi R}}\tilde{\Psi}_L^{(n)}(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\bar{x}}{R}\right). \tag{3.11}$$

En este caso, el campo $\Psi(x, \bar{x})$, al transformarse bajo paridad de la dimensión extra obtendremos que $\Psi(x, \bar{x}) \longrightarrow \Psi'(x, \bar{x}) = +\Psi(x, \bar{x})$. Es decir que $\Psi(x, \bar{x})$ es par bajo paridad.

El segundo caso esta dado por las condiciones $\hat{\Psi}_R^{(0)} = 0$; $\hat{\Psi}_R^{(n)} = 0$; $\tilde{\Psi}_L^{(n)} = 0$, con lo cual el campo $\Psi(x, \bar{x})$ se reduce a

$$\Psi(x,\bar{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}}\hat{\Psi}_L^{(0)}(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi R}}\hat{\Psi}_L^{(n)}(x)\cos\left(\frac{n\bar{x}}{R}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi R}}\tilde{\Psi}_R^{(n)}(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\bar{x}}{R}\right), \tag{3.12}$$

En este caso, el campo $\Psi(x, \bar{x})$, al transformarse bajo paridad de la dimensión extra obtendremos que $\Psi(x, \bar{x}) \longrightarrow \Psi'(x, \bar{x}) = -\Psi(x, \bar{x})$. Es decir que $\Psi(x, \bar{x})$ es impar bajo paridad

Veamos que ocurre ahora con $D_\mu\Psi(x, \bar{x})$.Tomemos pues $D_\mu\Psi(x, \bar{x})$ e implementemos una transformación de paridad:

$$\begin{aligned} D_\mu\Psi(x,\bar{x}) \longrightarrow & (D_\mu\Psi(x,\bar{x}))' \\ &= D'_\mu\Psi'(x,\bar{x}) \\ &= \partial_\mu\Psi'(x,\bar{x}') + ie_5A'_\mu(x,\bar{x}')\Psi'(x,\bar{x}') \\ &= \frac{\partial}{\partial x^\mu}\gamma^5\Psi(x,-\bar{x}) + ie_5A_\mu(x,-\bar{x})\gamma^5\Psi(x,-\bar{x}). \end{aligned} \tag{3.13}$$

Siguiendo un procedimiento análogo al caso en el que solo transformamos $\Psi(x,\bar{x})$ llegamos al siguiente resultado

$$\begin{aligned} D_\mu\Psi(x,\bar{x}) &\longrightarrow (D_\mu\Psi(x,\bar{x}))' \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi R}}\partial_\mu\hat{\Psi}_R^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi R}}\partial_\mu\hat{\Psi}_R^{(n)}\cos\left(\frac{n\bar{x}}{R}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi R}}\partial_\mu\tilde{\Psi}_L^{(n)}\sin\left(\frac{n\bar{x}}{R}\right) \\ &+ ie_5A_\mu\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi R}}\hat{\Psi}_R^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi R}}\hat{\Psi}_R^{(n)}\cos\left(\frac{n\bar{x}}{R}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi R}}\tilde{\Psi}_L^{(n)}\operatorname{sen}\left(\frac{n\bar{x}}{R}\right)\right) \\ &- \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi R}}\partial_\mu\hat{\Psi}_L^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi R}}\partial_\mu\hat{\Psi}_L^{(n)}\cos\left(\frac{n\bar{x}}{R}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi R}}\partial_\mu\tilde{\Psi}_R^{(n)}\sin\left(\frac{n\bar{x}}{R}\right)\right. \\ &\left. + ie_5A_\mu\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi R}}\hat{\Psi}_L^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi R}}\hat{\Psi}_L^{(n)}\cos\left(\frac{n\bar{x}}{R}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi R}}\tilde{\Psi}_R^{(n)}\operatorname{sen}\left(\frac{n\bar{x}}{R}\right)\right)\right], \end{aligned} \tag{3.14}$$

donde nuevamente podemos identificar dos casos interesantes. Si $\hat{\Psi}_L^{(0)} = 0$; $\hat{\Psi}_L^{(n)} = 0$; $\tilde{\Psi}_R^{(n)} = 0$, tendremos que

$$\begin{aligned} D_\mu\Psi(x,\bar{x}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi R}}\partial_\mu\hat{\Psi}_R^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi R}}\partial_\mu\hat{\Psi}_R^{(n)}\cos\left(\frac{n\bar{x}}{R}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi R}}\partial_\mu\tilde{\Psi}_L^{(n)}\sin\left(\frac{n\bar{x}}{R}\right) \\ &+ ie_5A_\mu\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi R}}\hat{\Psi}_R^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi R}}\hat{\Psi}_R^{(n)}\cos\left(\frac{n\bar{x}}{R}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi R}}\tilde{\Psi}_L^{(n)}\operatorname{sen}\left(\frac{n\bar{x}}{R}\right)\right). \end{aligned} \tag{3.15}$$

En este caso, $D_\mu\Psi(x,\bar{x})$, al transformarse bajo paridad de la dimensión extra tendremos que $D_\mu\Psi(x,\bar{x}) \longrightarrow (D_\mu\Psi(x,\bar{x}))' = +D_\mu\Psi(x,\bar{x})$. Es decir que $D_\mu\Psi(x,\bar{x})$ es par bajo paridad.

Si $\hat{\Psi}_R^{(0)} = 0$; $\hat{\Psi}_R^{(n)} = 0$; $\tilde{\Psi}_L^{(n)} = 0$, tendremos que

$$\begin{aligned} D_\mu\Psi(x,\bar{x}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi R}}\partial_\mu\hat{\Psi}_L^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi R}}\partial_\mu\hat{\Psi}_L^{(n)}\cos\left(\frac{n\bar{x}}{R}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi R}}\partial_\mu\tilde{\Psi}_R^{(n)}\sin\left(\frac{n\bar{x}}{R}\right) \\ &+ ie_5A_\mu\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi R}}\hat{\Psi}_L^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi R}}\hat{\Psi}_L^{(n)}\cos\left(\frac{n\bar{x}}{R}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi R}}\tilde{\Psi}_R^{(n)}\operatorname{sen}\left(\frac{n\bar{x}}{R}\right)\right). \end{aligned} \tag{3.16}$$

En este caso, $D_\mu\Psi(x,\bar{x})$, al transformarse bajo paridad de la dimensión extra tendremos que $D_\mu\Psi(x,\bar{x}) \longrightarrow (D_\mu\Psi(x,\bar{x}))' = -D_\mu\Psi(x,\bar{x})$. Es decir que $D_\mu\Psi(x,\bar{x})$ es impar bajo paridad.

Finalmente veamos que ocurre al someter a una transformación de paridad a $D_5\Psi(x,\bar{x})$:

$$\begin{aligned} D_5\Psi(x,\bar{x}) \longrightarrow &(D_5\Psi(x,\bar{x}))' \\ &= D_5'\Psi'(x,\bar{x}) \\ &= \partial_5\Psi'(x,\bar{x}') + ie_5A_5'(x,\bar{x}')\Psi'(x,\bar{x}') \\ &= \frac{\partial}{\partial x^5}\gamma^5\Psi(x,-\bar{x}) + ie_5A_5(x,-\bar{x})\gamma^5\Psi(x,-\bar{x}). \end{aligned} \tag{3.17}$$

De manera análoga al caso anterior y considerando a demás que $A_5(x,\bar{x}) = -A_5(x,\bar{x})$ llegamos a

$$\begin{aligned}
D_5\Psi(x,\bar{x}) &\longrightarrow (D_5\Psi(x,\bar{x}))' \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi R}}\partial_5\hat{\Psi}_L^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi R}}\partial_5\hat{\Psi}_L^{(n)}\cos\left(\frac{n\bar{x}}{R}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi R}}\partial_5\tilde{\Psi}_R^{(n)}\sin\left(\frac{n\bar{x}}{R}\right) \\
&+ ie_5A_5\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi R}}\hat{\Psi}_L^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi R}}\hat{\Psi}_L^{(n)}\cos\left(\frac{n\bar{x}}{R}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi R}}\tilde{\Psi}_R^{(n)}\operatorname{sen}\left(\frac{n\bar{x}}{R}\right)\right) \\
&- \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi R}}\partial_5\hat{\Psi}_R^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi R}}\partial_5\hat{\Psi}_R^{(n)}\cos\left(\frac{n\bar{x}}{R}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi R}}\partial_5\tilde{\Psi}_L^{(n)}\sin\left(\frac{n\bar{x}}{R}\right)\right. \\
&+ \left. ie_5A_5\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi R}}\hat{\Psi}_R^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi R}}\hat{\Psi}_R^{(n)}\cos\left(\frac{n\bar{x}}{R}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi R}}\tilde{\Psi}_L^{(n)}\operatorname{sen}\left(\frac{n\bar{x}}{R}\right)\right)\right], \quad (3.18)
\end{aligned}$$

donde una vez más es posible identificar dos casos. Si $\hat{\Psi}_R^{(0)} = 0$; $\hat{\Psi}_R^{(n)} = 0$; $\tilde{\Psi}_L^{(n)} = 0$, tendremos que

$$\begin{aligned}
D_5\Psi(x,\bar{x}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi R}}\partial_5\hat{\Psi}_L^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi R}}\partial_5\hat{\Psi}_L^{(n)}\cos\left(\frac{n\bar{x}}{R}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi R}}\partial_5\tilde{\Psi}_R^{(n)}\sin\left(\frac{n\bar{x}}{R}\right) \\
&+ ie_5A_5\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi R}}\hat{\Psi}_L^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi R}}\hat{\Psi}_L^{(n)}\cos\left(\frac{n\bar{x}}{R}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi R}}\tilde{\Psi}_R^{(n)}\operatorname{sen}\left(\frac{n\bar{x}}{R}\right)\right). \quad (3.19)
\end{aligned}$$

En este caso, $D_5\Psi(x,\bar{x})$, al transformarse bajo paridad de la dimensión extra tendremos que $D_5\Psi(x,\bar{x}) \longrightarrow (D_5\Psi(x,\bar{x}))' = +D_5\Psi(x,\bar{x})$. Es decir que $D_5\Psi(x,\bar{x})$ es par bajo paridad.

Si $\hat{\Psi}_L^{(0)} = 0$; $\hat{\Psi}_L^{(n)} = 0$; $\tilde{\Psi}_R^{(n)} = 0$, tendremos que

$$\begin{aligned}
D_5\Psi(x,\bar{x}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi R}}\partial_5\hat{\Psi}_R^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi R}}\partial_5\hat{\Psi}_R^{(n)}\cos\left(\frac{n\bar{x}}{R}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi R}}\partial_5\tilde{\Psi}_L^{(n)}\sin\left(\frac{n\bar{x}}{R}\right) \\
&+ ie_5A_5\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi R}}\hat{\Psi}_R^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi R}}\hat{\Psi}_R^{(n)}\cos\left(\frac{n\bar{x}}{R}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi R}}\tilde{\Psi}_L^{(n)}\operatorname{sen}\left(\frac{n\bar{x}}{R}\right)\right). \quad (3.20)
\end{aligned}$$

En este caso, $D_5\Psi(x,\bar{x})$, al transformarse bajo paridad de la dimensión extra tendremos que $D_5\Psi(x,\bar{x}) \longrightarrow (D_5\Psi(x,\bar{x}))' = -D_5\Psi(x,\bar{x})$. Es decir que $D_5\Psi(x,\bar{x})$ es impar bajo paridad.

Una vez conocidas las paridades de nuestros objetos es necesario encontrar sus expresiones como expansiones de Kaluza-Klein. Expresemos pues a $D_\mu\Psi$ y $D_5\Psi$ como series de Fourier:

$$D_\mu\Psi = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}}(\hat{D_\mu\Psi})^{(0)} + \frac{1}{\sqrt{\pi R}}\sum_{n=1}^{\infty}(\hat{D_\mu\Psi})^{(n)}\cos\left(\frac{n\bar{x}}{R}\right) + \frac{1}{\sqrt{\pi R}}\sum_{n=1}^{\infty}(\tilde{D_\mu\Psi})^{(n)}\sin\left(\frac{n\bar{x}}{R}\right), \quad (3.21)$$

y,

$$D_5\Psi = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}}(\hat{D_5\Psi})^{(0)} + \frac{1}{\sqrt{\pi R}}\sum_{n=1}^{\infty}(\hat{D_5\Psi})^{(n)}\cos\left(\frac{n\bar{x}}{R}\right) + \frac{1}{\sqrt{\pi R}}\sum_{n=1}^{\infty}(\tilde{D_5\Psi})^{(n)}\sin\left(\frac{n\bar{x}}{R}\right). \quad (3.22)$$

Ahora encontremos como se expresan los coeficientes en términos de Ψ y A. Para esto, supondrémos que nuestro campo espinorial Ψ es par respecto a la transformación de paridad, esto es, $\hat{\Psi}_L^{(0)} = 0$; $\hat{\Psi}_L^{(n)} = 0$; $\tilde{\Psi}_R^{(n)} = 0$. De esta forma tendremos

$$\partial_\mu\Psi(x,\bar{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}}\partial_\mu\hat{\Psi}_R^{(0)} + \frac{1}{\sqrt{\pi R}}\sum_{n=1}^{\infty}\partial_\mu\hat{\Psi}_R^{(n)}\cos\left(\frac{n\bar{x}}{R}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\partial_\mu\tilde{\Psi}_L^{(n)}\sin\left(\frac{n\bar{x}}{R}\right), \quad (3.23)$$

y,

$$\begin{aligned}
A_\mu(x,\bar{x})\Psi(x,\bar{x}) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi R}}A_\mu^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi R}}A_5^{(n)}\cos\left(\frac{n\bar{x}}{R}\right)\right) \\
&\times\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi R}}\hat{\Psi}_R^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi R}}\hat{\Psi}_R^{(k)}\cos\left(\frac{k\bar{x}}{R}\right)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi R}}\tilde{\Psi}_L^{(k)}\,\mathrm{sen}\left(\frac{k\bar{x}}{R}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2\pi R}A_\mu^{(0)}\hat{\Psi}_R^{(0)} + \frac{1}{\sqrt{2\pi R}}\sum_{k=1}^{\infty}A_\mu^{(0)}\hat{\Psi}_R^{(k)}\cos\left(\frac{k\bar{x}}{R}\right) \\
&+ \frac{1}{\sqrt{2\pi R}}\sum_{k=1}^{\infty}A_\mu^{(0)}\tilde{\Psi}_L^{(k)}\sin\left(\frac{k\bar{x}}{R}\right) + \frac{1}{\sqrt{2\pi R}}\sum_{n=1}^{\infty}A_\mu^{(n)}\hat{\Psi}_R^{(0)}\cos\left(\frac{n\bar{x}}{R}\right) \\
&+ \frac{1}{\pi R}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}A_\mu^{(n)}\hat{\Psi}_R^{(k)}\cos\left(\frac{n\bar{x}}{R}\right)\cos\left(\frac{k\bar{x}}{R}\right) \\
&+ \frac{1}{\pi R}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}A_\mu^{(n)}\tilde{\Psi}_L^{(k)}\cos\left(\frac{n\bar{x}}{R}\right)\sin\left(\frac{k\bar{x}}{R}\right). \qquad (3.24)
\end{aligned}$$

3.3. Integración de la dimensión extra

Procedamos a encontrar a la expresión (3.24) como una serie de Fourier:

$$A_\mu\Psi = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}}(A_\mu\hat{\ }\Psi)^{(0)} + \frac{1}{\sqrt{\pi R}}\sum_{n=1}^{\infty}(A_\mu\hat{\ }\Psi)^{(n)}\cos\left(\frac{n\bar{x}}{R}\right) + \frac{1}{\sqrt{\pi R}}\sum_{n=1}^{\infty}(A_\mu\tilde{\ }\Psi)^{(n)}\sin\left(\frac{n\bar{x}}{R}\right), \qquad (3.25)$$

donde los coeficientes son

$$\begin{aligned}
(A_\mu\hat{\ }\Psi)^{(0)} &= \frac{1}{\pi R}\int_0^{2\pi R}d\bar{x}\,A_\mu\Psi, \\
(A_\mu\hat{\ }\Psi)^{(n)} &= \frac{1}{\pi R}\int_0^{2\pi R}d\bar{x}\,A_\mu\Psi\cos\left(\frac{n\bar{x}}{R}\right), \\
(A_\mu\tilde{\ }\Psi)^{(n)} &= \frac{1}{\pi R}\int_0^{2\pi R}d\bar{x}\,A_\mu\Psi\sin\left(\frac{n\bar{x}}{R}\right). \qquad (3.26)
\end{aligned}$$

Realizando las integrales encontreamos que

$$(A_\mu\hat{\ }\Psi)^{(0)} = \frac{1}{\pi R}\left[A_\mu^{(0)}\hat{\Psi}_R^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty}A_\mu^{(n)}\hat{\Psi}_R^{(n)}\right], \qquad (3.27)$$

$$\begin{aligned}
(A_\mu\hat{\ }\Psi)^{(n)} &= \frac{1}{\pi R}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}A_\mu^{(0)}\hat{\Psi}_R^{(n)} + A_\mu^{(n)}\hat{\Psi}_R^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty}A_\mu^{(k+n)}\hat{\Psi}_R^{(n)}\right. \\
&\left.+ \sum_{n=1}^{\infty}A_\mu^{(n)}\hat{\Psi}_R^{(k+n)} + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}A_\mu^{(n)}\hat{\Psi}_R^{(n)}\delta_{l,n+k}\right], \qquad (3.28)
\end{aligned}$$

y,

$$\begin{aligned}
(A_\mu\tilde{\Psi})^{(n)} = \frac{1}{\pi R}\Bigg[&\frac{1}{\sqrt{2}}A^{(0)_\mu}\tilde{\Psi}_L^{(n)} + \sum_{n=1}^{\infty} A_\mu^{(k+n)}\tilde{\Psi}_L^{(n)} \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} A_\mu^{(n)}\tilde{\Psi}_L^{(k+n)} - \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} A_\mu^{(n)}\tilde{\Psi}_L^{(k)}\delta_{l,k+n}\Bigg]. \qquad (3.29)
\end{aligned}$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación (3.25) obtenemos

$$\begin{aligned}
A_\mu\Psi = &\frac{1}{2\pi R}\left[A_\mu^{(0)}\hat{\Psi}_R^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} A_\mu^{(n)}\hat{\Psi}_R^{(n)}\right] \\
&+ \frac{1}{\sqrt{2}\pi R}\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_\mu^{(0)}\hat{\Psi}_R^{(n)} + A_\mu^{(n)}\hat{\Psi}_R^{(0)}\right]\cos\left(\frac{n\bar{x}}{R}\right) \\
&+ \frac{1}{\pi R}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left[A_\mu^{(k+n)}\hat{\Psi}_R^{(k)} + A_\mu^{(n)}\hat{\Psi}_R^{(k+n)}\right]\cos\left(\frac{n\bar{x}}{R}\right) \\
&+ \frac{1}{\pi R}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} A_\mu^{(n)}\hat{\Psi}_R^{(k)}\cos\left(\frac{(n+k)\bar{x}}{R}\right) \\
&+ \frac{1}{\sqrt{2}\pi R}\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_\mu^{(0)}\tilde{\Psi}_L^{(n)}\right]\sin\left(\frac{n\bar{x}}{R}\right) \\
&+ \frac{1}{\pi R}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left[A_\mu^{(k+n)}\tilde{\Psi}_L^{(k)} + A_\mu^{(n)}\tilde{\Psi}_L^{(k+n)}\right]\sin\left(\frac{n\bar{x}}{R}\right) \\
&- \frac{1}{\pi R}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} A_\mu^{(n)}\tilde{\Psi}_L^{(k)}\sin\left(\frac{(n+k)\bar{x}}{R}\right). \qquad (3.30)
\end{aligned}$$

Una vez obtenida la expresión, podemos expresar a las derivadas covariante del espinor de Dirac respecto a las coordenadas ordinarias, $D_\mu\Psi$, como series de Kaluza-Klein:

$$\begin{aligned}
D_\mu\Psi = &\frac{1}{\sqrt{2\pi R}}\left[\partial_\mu\hat{\Psi}_R^{(0)} + ie_4A_\mu^{(0)}\hat{\Psi}_R^{(0)} + ie_4\sum_n A_\mu^{(n)}\hat{\Psi}_R^{(n)}\right] \\
&+ \frac{1}{\sqrt{\pi R}}\Bigg[\Bigg(\sum_n\partial_\mu\hat{\Psi}_R^{(n)} + \sum_n ie_4A_\mu^{(0)}\hat{\Psi}_R^{(n)} + \sum_n ie_4A_\mu^{(n)}\hat{\Psi}_R^{(0)} \\
&+i\sqrt{2}e_4\sum_n\sum_k A_\mu^{(k+n)}\hat{\Psi}_R^{(k)} + i\sqrt{2}e_4\sum_n\sum_k A_\mu^{(n)}\hat{\Psi}_R^{(n+k)}\Bigg)\cos\left(\frac{n\bar{x}}{R}\right) \\
&+i\sqrt{2}e_4\sum_n\sum_k A_\mu^{(n)}\hat{\Psi}_R^{(k)}\cos\left(\frac{(n+k)\bar{x}}{R}\right)\Bigg] \\
&+ \frac{1}{\sqrt{\pi R}}\Bigg[\Bigg(\sum_n\partial_\mu\tilde{\Psi}_L^{(n)} + \sum_n ie_4A_\mu^{(0)}\tilde{\Psi}_L^{(n)} \\
&+i\sqrt{2}e_4\sum_n\sum_k A_\mu^{(k+n)}\tilde{\Psi}_L^{(k)} + i\sqrt{2}e_4\sum_n\sum_k A_\mu^{(n)}\tilde{\Psi}_L^{(k+n)}\Bigg)\sin\left(\frac{n\bar{x}}{R}\right) \\
&-i\sqrt{2}e_4\sum_n\sum_k A_\mu^{(n)}\tilde{\Psi}_L^{(k)}\sin\left(\frac{(k+n)\bar{x}}{R}\right)\Bigg], \qquad (3.31)
\end{aligned}$$

donde e_4 es la constante de acoplamiento de la teoría electrodinámica en 4 dimensiones, donde se propone que $e_4 = \frac{e_5}{\sqrt{2\pi R}}$ se cumple.

Busquemos ahora como debe de expesarse $D_5\Psi$ como expansiones de Kaluza-Klein, de manera análoga a como se hizo con $D_\mu\Psi$ encontramos

$$\partial_5\Psi(x,\bar{x}) = -\frac{1}{\sqrt{\pi R}}\sum_{n=1}^{\infty}\hat{\Psi}_R^{(n)}\frac{n}{R}\sin\left(\frac{n\bar{x}}{R}\right) + \frac{1}{\sqrt{\pi R}}\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{\Psi}_L^{(n)}\frac{n}{R}\cos\left(\frac{n\bar{x}}{R}\right), \tag{3.32}$$

y,

$$\begin{aligned} A_5(x,\bar{x})\Psi(x,\bar{x}) = &\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi R}}A_5^{(n)}\sin\left(\frac{n\bar{x}}{R}\right)\right) \\ &\times\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi R}}\hat{\Psi}_R^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi R}}\hat{\Psi}_R^{(k)}\cos\left(\frac{k\bar{x}}{R}\right)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi R}}\tilde{\Psi}_L^{(k)}\operatorname{sen}\left(\frac{k\bar{x}}{R}\right)\right) \\ = &\frac{1}{\sqrt{2\pi R}}\sum_{n=1}^{\infty}A_5^{(n)}\hat{\Psi}_R^{(0)}\sin\left(\frac{n\bar{x}}{R}\right) \\ &+\frac{1}{\pi R}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}A_5^{(n)}\hat{\Psi}_R^{(k)}\cos\left(\frac{k\bar{x}}{R}\right)\sin\left(\frac{n\bar{x}}{R}\right) \\ &+\frac{1}{\pi R}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}A_5^{(n)}\tilde{\Psi}_L^{(k)}\sin\left(\frac{k\bar{x}}{R}\right)\sin\left(\frac{n\bar{x}}{R}\right). \end{aligned} \tag{3.33}$$

Procedamos a encontrar a la expresión (3.33) como una serie de Fourier:

$$A_\mu\Psi = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}}(A_5\hat{\Psi})^{(0)} + \frac{1}{\sqrt{\pi R}}\sum_{n=1}^{\infty}(A_5\hat{\Psi})^{(n)}\cos\left(\frac{n\bar{x}}{R}\right) + \frac{1}{\sqrt{\pi R}}\sum_{n=1}^{\infty}(A_5\tilde{\Psi})^{(n)}\sin\left(\frac{n\bar{x}}{R}\right), \tag{3.34}$$

donde los coeficientes son

$$\begin{aligned} (A_5\hat{\Psi})^{(0)} &= \frac{1}{\pi R}\int_0^{2\pi R} d\bar{x}\, A_5\Psi, \\ (A_5\hat{\Psi})^{(n)} &= \frac{1}{\pi R}\int_0^{2\pi R} d\bar{x}\, A_5\Psi\cos\left(\frac{n\bar{x}}{R}\right), \\ (A_5\tilde{\Psi})^{(n)} &= \frac{1}{\pi R}\int_0^{2\pi R} d\bar{x}\, A_5\Psi\sin\left(\frac{n\bar{x}}{R}\right). \end{aligned} \tag{3.35}$$

Realizando las integrales encontreamos que

$$(A_5\hat{\Psi})^{(0)} = \frac{1}{\pi R}\sum_{n=1}^{\infty}A_5^{(n)}\tilde{\Psi}_L^{(k)}, \tag{3.36}$$

$$(A_5\hat{\Psi})^{(n)} = \frac{1}{\pi R}\left[\sum_{n=1}^{\infty}A_5^{(k+n)}\tilde{\Psi}_L^{(k)}\sum_{n=1}^{\infty}+A_5^{(n)}\tilde{\Psi}_L^{(k+n)} + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}A_5^{(n)}\tilde{\Psi}_L^{(k)}\delta_{l,k+n}\right], \tag{3.37}$$

y,

$$
\begin{aligned}
\left(\tilde{A_5\Psi}\right)^{(n)} = {} & \frac{1}{\sqrt{2}\pi R}\left[A_5^{(n)}\hat{\Psi}_R^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} A_5^{(k+n)}\hat{\Psi}_R^{(k)}\right. \\
& \left. + \sum_{n=1}^{\infty} A_5^{(n)}\hat{\Psi}_R^{(k+n)} + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} A_5^{(n)}\hat{\Psi}_R^{(k)}\delta_{l,k+n}\right].
\end{aligned}
\tag{3.38}
$$

Sustituyendo las expresiones anteriores en la ecuación (3.34) se obtiene

$$
\begin{aligned}
A_5(x,\bar{x})\Psi(x,\bar{x}) = {} & \frac{1}{2\pi R}\sum_{n=1}^{\infty} A_5^{(n)}\tilde{\Psi}_L^{(n)} \\
& + \frac{1}{\pi R}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left[A_5^{(k+n)}\tilde{\Psi}_L^{(k)} + A_5^{(n)}\tilde{\Psi}_L^{(k+n)}\right]\cos\left(\frac{n\bar{x}}{R}\right) \\
& + \frac{1}{\pi R}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} A_5^{(n)}\tilde{\Psi}_L^{(k)}\cos\left(\frac{(n+k)\bar{x}}{R}\right) \\
& + \frac{1}{\sqrt{2}\pi R}\sum_{n=1}^{\infty} A_5^{(n)}\hat{\Psi}_R^{(0)}\sin\left(\frac{n\bar{x}}{R}\right) \\
& + \frac{1}{\pi R}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left[A_5^{(n)}\hat{\Psi}_R^{(k+n)} + A_5^{(k+n)}\hat{\Psi}_R^{(k)}\right]\sin\left(\frac{n\bar{x}}{R}\right) \\
& - \frac{1}{\pi R}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} A_5^{(n)}\hat{\Psi}_R^{(k)}\sin\left(\frac{(k+n)\bar{x}}{R}\right).
\end{aligned}
\tag{3.39}
$$

Una vez obtenida la expresión, podemos expresar a las derivadas covariante del espinor de Dirac respecto a las coordenadas ordinarias, $D_5\Psi$, como series de Kaluza-Klein:

$$
\begin{aligned}
D_5\Psi = {} & \frac{1}{\sqrt{2\pi R}}\left[\sum_n ie_4 A_5^{(n)}\tilde{\Psi}_L^{(n)}\right] \\
& + \frac{1}{\sqrt{\pi R}}\left[\sum_n\left(\tilde{\Psi}_L^{(n)}\frac{n}{R} + i\sqrt{2}e_4\sum_n\sum_k A_5^{(k+n)}\tilde{\Psi}_L^{(k)}\right.\right. \\
& \left.\left. + i\sqrt{2}e_4\sum_n\sum_k A_5^{(k)}\tilde{\Psi}_L^{(k+n)}\right)\cos\left(\frac{n\bar{x}}{R}\right) + i\sqrt{2}e_4\sum_n\sum_k A_5^{(n)}\tilde{\Psi}_L^{k}\cos\left(\frac{(k+n)\bar{x}}{R}\right)\right] \\
& + \frac{1}{\sqrt{\pi R}}\left[\left(-\sum_n\hat{\Psi}_R^{(n)}\frac{n}{R} + \sum_n ie_4 A_5^{(n)}\hat{\Psi}_R^{(0)}\right.\right. \\
& \left. + i\sqrt{2}e_4\sum_n\sum_k A_5^{(n)}\hat{\Psi}_R^{(k+n)} + i\sqrt{2}e_4\sum_n\sum_k A_5^{(k+n)}\hat{\Psi}_R^{(k)}\right)\sin\left(\frac{n\bar{x}}{R}\right) \\
& \left. - i\sqrt{2}e_4\sum_n\sum_k A_5^{(n)}\hat{\Psi}_R^{(k)}\sin\left(\frac{(k+n)\bar{x}}{R}\right)\right].
\end{aligned}
\tag{3.40}
$$

Ahora contamos con los elementos necesarios para escribir los dos primeros términos de la ecuación

(3.1) como expansiones de Kaluza-Klein:

$$
\begin{aligned}
\int_0^{2\pi R} d\overline{x}\left(\overline{\Psi} i\gamma^\mu D_\mu \Psi - \overline{\Psi}\gamma^5 D_5 \Psi\right) = {} & \bar{\hat{\Psi}}_R^{(0)} (i\gamma^\mu(\partial_\mu + ie_4 A_\mu^{(0)}))\Psi_R^{(0)} \\
& + \sum_n \bar{\hat{\Psi}}_R^{(n)} (i\gamma^\mu(\partial_\mu + ie_4 A_\mu^{(0)}))\hat{\Psi}_R^{(n)} \\
& + \sum_n \bar{\tilde{\Psi}}_L^{(n)} (i\gamma^\mu(\partial_\mu + ie_4 A_\mu^{(0)}))\tilde{\Psi}_L^{(n)} \\
& + \sum_n \bar{\hat{\Psi}}_R^{(0)} i\gamma^\mu i\sqrt{2} e_4 A_\mu^{(n)} \hat{\Psi}_R^{(n)} \\
& + \sum_n \bar{\hat{\Psi}}_R^{(n)} i\gamma^\mu i\sqrt{2} e_4 A_\mu^{(n)} \hat{\Psi}_R^{(0)} \\
& - \sum_n \bar{\hat{\Psi}}_R^{(0)} \gamma^5 i\sqrt{2} e_4 A_5^{(n)} \tilde{\Psi}_L^{(n)} \\
& - \sum_n \bar{\tilde{\Psi}}_L^{(n)} \gamma^5 i e_4 A_5^{(n)} \hat{\Psi}_R^{(0)} \\
& + \sum_n \frac{n}{R} \bar{\hat{\Psi}}_R^{(n)} \tilde{\Psi}_L^{(n)} + \sum_n \frac{n}{R} \bar{\tilde{\Psi}}_L^{(n)} \hat{\Psi}_R^{(n)} + \nabla \\
\\
= {} & \bar{\hat{\Psi}}_R^{(0)} i\not{D} \hat{\Psi}_R^{(0)} \\
& + \sum_n \left[\bar{\hat{\Psi}}_R^{(n)} + \bar{\tilde{\Psi}}_L^{(n)}\right] i\gamma^\mu \partial_\mu \left[\hat{\Psi}_R^{(n)} + \tilde{\Psi}_L^{(n)}\right] \\
& + \sum_n \hat{\bar{\Psi}}_R^{(n)} i\gamma^\mu i e_4 A_\mu^{(0)} \hat{\Psi}_R^{(n)} \\
& + \sum_n \bar{\tilde{\Psi}}_L^{(n)} i\gamma^\mu i e_4 A_\mu^{(0)} \tilde{\Psi}_L^{(n)} \\
& + \sum_n \hat{\bar{\Psi}}_R^{(0)} i\gamma^\mu i\sqrt{2} e_4 A_\mu^{(n)} \hat{\Psi}_R^{(n)} \\
& + \sum_n \hat{\bar{\Psi}}_R^{(n)} i\gamma^\mu i\sqrt{2} e_4 A_\mu^{(n)} \hat{\Psi}_R^{(0)} \\
& - \sum_n \bar{\hat{\Psi}}_R^{(0)} \gamma^5 i\sqrt{2} e_4 A_5^{(n)} \tilde{\Psi}_L^{(n)} \\
& - \sum_n \bar{\tilde{\Psi}}_L^{(n)} \gamma^5 i e_4 A_5^{(n)} \hat{\Psi}_R^{(0)} \\
& + \sum_n \frac{n}{R} \left[\bar{\hat{\Psi}}_R^{(n)} + \bar{\tilde{\Psi}}_L^{(n)}\right] \left[\hat{\Psi}_R^{(n)} + \tilde{\Psi}_L^{(n)}\right] + \nabla,
\end{aligned}
\tag{3.41}
$$

donde ∇ representa los términos dependientes únicamente de modos excitados.

Sin embargo, los términos anteriores sólo consideran un espinor Ψ par. De modo que se considerará que nuestra Lagrangiana es descrita también por un espinor χ impar ante la transformación $\bar{x} \longrightarrow -\bar{x}$ de modo que se propone la siguiente lagrangiana de Dirac en 5 dimensiones[40]:

$$
\mathcal{L}_D^5 = \overline{\Psi}(x,\bar{x}) i\Gamma^M \partial_M \Psi(x,\bar{x}) + \overline{\chi}(x,\bar{x}) i\Gamma^M \partial_M \chi(x,\bar{x}) - m\left[\overline{\Psi}(x,\bar{x})\chi(x,\bar{x}) + \overline{\chi}(x,\bar{x})\Psi(x,\bar{x})\right]. \tag{3.42}
$$

Dado que el segundo término de la lagrangiana, dependiente de χ es similar al primer término, podemos utilizar un procedimiento análogo, tomando a consideración que el espinor χ es impar a diferencia del espinor Ψ que es par, y llegar a que la lagrangiana de Kaluza-Klein derivada de la lagrangiana anterior es de la forma

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^4_{KK} =& \left[\bar{\hat{\Psi}}^{(0)}_R + \bar{\hat{\chi}}^{(0)}_L\right]\left(i\gamma^\mu\left(\partial_\mu + ie_4 A^{(0)}_\mu\right)\right)\left[\hat{\Psi}^{(0)}_R + \hat{\chi}^{(0)}_L\right] \\
&+ \sum_n \left[\bar{\hat{\Psi}}^{(n)}_R + \bar{\tilde{\Psi}}^{(n)}_L\right] i\gamma^\mu\partial_\mu \left[\hat{\Psi}^{(n)}_R + \tilde{\Psi}^{(n)}_L\right] \\
&+ \sum_n \left[\bar{\hat{\chi}}^{(n)}_R + \bar{\tilde{\chi}}^{(n)}_L\right] i\gamma^\mu\partial_\mu \left[\hat{\chi}^{(n)}_R + \tilde{\chi}^{(n)}_L\right] \\
&+ \sum_n \bar{\hat{\Psi}}^{(n)}_R i\gamma^\mu ie_4 A^{(0)}_\mu \hat{\Psi}^{(n)}_R + \sum_n \bar{\tilde{\Psi}}^{(n)}_L i\gamma^\mu ie_4 A^{(0)}_\mu \tilde{\Psi}^{(n)}_L \\
&+ \sum_n \bar{\hat{\chi}}^{(n)}_L i\gamma^\mu ie_4 A^{(0)}_\mu \hat{\chi}^{(n)}_L + \sum_n \bar{\tilde{\chi}}^{(n)}_R i\gamma^\mu ie_4 A^{(0)}_\mu \tilde{\chi}^{(n)}_R \\
&+ \sum_n \bar{\hat{\Psi}}^{(0)}_R i\gamma^\mu i\sqrt{2}e_4 A^{(n)}_\mu \hat{\Psi}^{(n)}_R + \sum_n \bar{\hat{\Psi}}^{(n)}_R i\gamma^\mu i\sqrt{2}e_4 A^{(n)}_\mu \hat{\Psi}^{(0)}_R \\
&+ \sum_n \bar{\hat{\chi}}^{(0)}_L i\gamma^\mu i\sqrt{2}e_4 A^{(n)}_\mu \hat{\chi}^{(n)}_L + \sum_n \bar{\hat{\chi}}^{(n)}_L i\gamma^\mu i\sqrt{2}e_4 A^{(n)}_\mu \hat{\chi}^{(0)}_L \\
&- \sum_n \bar{\hat{\Psi}}^{(0)}_R \gamma^5 i\sqrt{2}e_4 A^{(n)}_5 \tilde{\Psi}^{(n)}_L - \sum_n \bar{\tilde{\Psi}}^{(n)}_L \gamma^5 ie_4 A^{(n)}_5 \hat{\Psi}^{(0)}_R \\
&- \sum_n \bar{\hat{\chi}}^{(0)}_L \gamma^5 i\sqrt{2}e_4 A^{(n)}_5 \tilde{\chi}^{(n)}_R - \sum_n \bar{\tilde{\chi}}^{(n)}_R \gamma^5 ie_4 A^{(n)}_5 \hat{\chi}^{(0)}_L \\
&+ \sum_n \frac{n}{R}\left[\bar{\hat{\Psi}}^{(n)}_R + \bar{\tilde{\Psi}}^{(n)}_L\right]\left[\hat{\Psi}^{(n)}_R + \tilde{\Psi}^{(n)}_L\right] \\
&+ \sum_n \frac{n}{R}\left[\bar{\hat{\chi}}^{(n)}_L + \bar{\tilde{\chi}}^{(n)}_R\right]\left[\hat{\chi}^{(n)}_L + \tilde{\chi}^{(n)}_R\right] + \nabla \\
&- m\left(\bar{\hat{\Psi}}^{(0)}_R + \bar{\hat{\chi}}^{(0)}_L\right)\left(\hat{\Psi}^{(0)}_R + \hat{\chi}^{(0)}_L\right) \\
&- m\sum_n \left(\bar{\hat{\Psi}}^{(n)}_R + \bar{\tilde{\Psi}}^{(n)}_L\right)\left(\hat{\chi}^{(n)}_R + \tilde{\chi}^{(n)}_L\right) \\
&- m\sum_n \left(\bar{\hat{\chi}}^{(n)}_R + \bar{\tilde{\chi}}^{(n)}_L\right)\left(\hat{\Psi}^{(n)}_R + \tilde{\Psi}^{(n)}_L\right).
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Con el propósito de escribir la ecuación anterior de una forma más compacta definimos lo siguiente:

$$f^{(0)} = \hat{\Psi}^{(0)}_R + \hat{\chi}^{(0)}_L, \tag{3.44}$$

$$\xi^{(n)} = \begin{pmatrix} \tilde{\Psi}^{(n)}_L + \hat{\Psi}^{(n)}_R \\ \hat{\chi}^{(n)}_L + \tilde{\chi}^{(n)}_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi^{(n)} \\ \chi^{(n)} \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{\xi}^{(n)} = \begin{pmatrix} \bar{\Psi}^{(n)} & \bar{\chi}^{(n)} \end{pmatrix}, \tag{3.45}$$

$$m_n = \frac{n}{R}. \tag{3.46}$$

De modo que

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^4_{\mathrm{KK}} &= \overline{f}^{(0)}\left(i\gamma^\mu\left(\partial_\mu + e_4 A^{(0)}_\mu\right)\right) f^{(0)} + \sum_n \overline{\xi}^{(n)} i\gamma^\mu \partial_\mu \xi^{(n)} + \sum_n \overline{\xi}^{(n)} i\gamma^\mu i e_4 A^{(0)}_\mu \xi^{(n)} \\
&+ \sum_n \overline{f}^{(0)} i\gamma^\mu i\sqrt{2} e_4 A^{(n)}_\mu \left(\hat{\Psi}^{(n)}_R + \hat{\chi}^{(n)}_L\right) + \sum_n \left(\overline{\hat{\Psi}}^{(n)}_R + \overline{\hat{\chi}}^{(n)}_L\right) i\gamma^\mu \sqrt{2} e_4 A^{(n)}_\mu f^{(0)} \\
&- \sum_n \overline{f}^{(0)} i\sqrt{2} e_4 A^{(n)}_5 \left(\tilde{\chi}^{(n)}_R - \tilde{\Psi}^{(n)}_L\right) - \sum_n \left(\overline{\tilde{\chi}}^{(n)}_R - \overline{\tilde{\Psi}}^{(n)}_L\right) i e_4 A^{(n)}_5 f^{(0)} + \triangledown \\
&- m\overline{f}^{(0)} f^{(0)} - m \sum_n \left[\overline{\Psi}^{(n)} \chi^{(n)} + \overline{\chi}^{(n)} \Psi^{(n)}\right] \\
&+ \sum_n m_n \overline{\Psi}^{(n)} \Psi^{(n)} - \sum_n m_n \overline{\chi}^{(n)} \chi^{(n)} \\
&= \overline{f}^{(0)} (i\gamma^\mu D_\mu - m) f^{(0)} + \sum_n \Big[\overline{\xi}^{(n)} \left(i\gamma^\mu D_\mu\right) \xi^{(n)} \\
&+ \overline{f}^{(0)} \left(i\gamma^\mu i\sqrt{2} e_4 A^{(n)}_\mu\right) \left(\hat{\Psi}^{(n)}_R + \hat{\chi}^{(n)}_L\right) + \left(\overline{\hat{\Psi}}^{(n)}_R + \overline{\hat{\chi}}^{(n)}_L\right) \left(i\gamma^\mu i\sqrt{2} e_4 A^{(n)}_\mu\right) f^{(0)} \\
&+ \overline{f}^{(0)} \left(i\sqrt{2} e_4 A^{(n)}_5\right) \left(\tilde{\Psi}^{(n)}_L - \tilde{\chi}^{(n)}_R\right) + \left(\overline{\tilde{\Psi}}^{(n)}_L - \overline{\tilde{\chi}}^{(n)}_R\right) \left(i e_4 A^{(n)}_5\right) f^{(0)} + \triangledown \\
&- \overline{\xi}^{(n)} M_n \xi^{(n)}\Big],
\end{aligned}
\tag{3.47}
$$

donde $M_n = \begin{pmatrix} -m_n & m \\ m & m_n \end{pmatrix}$. Dado que M_n es una matriz hermitiana es diagonalizable. De modo que al diagonalizar la matriz obtenemos que

$$
P_n^{\intercal} M_n P_n = \lambda_n \sigma^3,
\tag{3.48}
$$

donde $\lambda_n = \sqrt{m^2 + m_n^2}$, es la masa asociada a las torres de Kaluza-Klein, σ^3 es la matriz de Pauli sigma-3, y donde

$$
P_n = \begin{pmatrix} \cos\theta_n & -\sin\theta_n \\ \sin\theta_n & \cos\theta_n \end{pmatrix}
\tag{3.49}
$$

Con lo anterior en mente notemos que la ecuación (3.47) se puede escribir como

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{KK}^{4} &= \overline{f}^{(0)}\left(i\gamma^{\mu}D_{\mu}-m\right)f^{(0)}+\sum_{n}\Big[\overline{\xi}^{(n)}P_nP_n^{\intercal}\left(i\gamma^{\mu}D_{\mu}\right)P_n^{\intercal}P_n\xi^{(n)} \\
&+\overline{f}^{(0)}\left(i\gamma^{\mu}i\sqrt{2}e_4A_{\mu}^{(n)}\right)\left(\hat{\Psi}_R^{(n)}+\hat{\chi}_L^{(n)}\right)+\left(\hat{\overline{\Psi}}_R^{(n)}+\hat{\overline{\chi}}_L^{(n)}\right)\left(i\gamma^{\mu}i\sqrt{2}e_4A_{\mu}^{(n)}\right)f^{(0)} \\
&+\overline{f}^{(0)}\left(i\sqrt{2}e_4A_5^{(n)}\right)\left(\tilde{\Psi}_L^{(n)}-\tilde{\chi}_R^{(n)}\right)+\left(\tilde{\overline{\Psi}}_L^{(n)}-\tilde{\overline{\chi}}_R^{(n)}\right)\left(ie_4A_5^{(n)}\right)f^{(0)}+\nabla \\
&-\overline{\xi}^{(n)}P_nP_n^{\intercal}M_nP_nP_n^{\intercal}\xi^{(n)}\Big] \\
&= \overline{f}^{(0)}\left(i\gamma^{\mu}D_{\mu}-m\right)f^{(0)}+\sum_{n}\Big[\left(P_n^{\intercal}\xi^{(n)}\right)^{\intercal}\gamma^0\left(i\gamma^{\mu}D_{\mu}\right)P_n^{\intercal}\xi^{(n)} \\
&+\overline{f}^{(0)}\left(i\gamma^{\mu}i\sqrt{2}e_4A_{\mu}^{(n)}\right)\left(\hat{\Psi}_R^{(n)}+\hat{\chi}_L^{(n)}\right)+\left(\hat{\overline{\Psi}}_R^{(n)}+\hat{\overline{\chi}}_L^{(n)}\right)\left(i\gamma^{\mu}i\sqrt{2}e_4A_{\mu}^{(n)}\right)f^{(0)} \\
&+\overline{f}^{(0)}\left(i\sqrt{2}e_4A_5^{(n)}\right)\left(\tilde{\Psi}_L^{(n)}-\tilde{\chi}_R^{(n)}\right)+\left(\tilde{\overline{\Psi}}_L^{(n)}-\tilde{\overline{\chi}}_R^{(n)}\right)\left(ie_4A_5^{(n)}\right)f^{(0)}+\nabla \\
&-\left(P_n^{\intercal}\xi^{(n)}\right)^{\intercal}\gamma^0\lambda_n\sigma^3P_n^{\intercal}\xi^{(n)}\Big].
\end{aligned}
\tag{3.50}
$$

Conviene definir ahora:

$$
\begin{aligned}
f^{(n)} = P_n^{\intercal}\xi^{(n)} &= \begin{pmatrix} f_1^{(n)} \\ f_2^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi^{(n)}\cos\theta_n+\chi^{(n)}\sin\theta_n \\ -\Psi^{(n)}\sin\theta_n+\chi^{(n)}\cos\theta_n \end{pmatrix} \\
\Rightarrow \overline{f}^{(n)} &= \left(P_n^{\intercal}\xi^{(n)}\right)^{\intercal}\gamma^0.
\end{aligned}
\tag{3.51}
$$

Haciendo uso de la definición anterior la lagrangiana toma la forma

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\mathrm{KK}}^{4} &= \overline{f}^{(0)}\left(i\gamma^{\mu}D_{\mu}-m\right)f^{(0)}+\sum_{n}\Big[\overline{f}_1^{(n)}\left(i\gamma^{\mu}D_{\mu}-\lambda_n\right)f_1^{(n)}+\overline{f}_2^{(n)}\left(i\gamma^{\mu}D_{\mu}+\lambda_n\right)f_2^{(n)} \\
&+\overline{f}^{(0)}\left(i\gamma^{\mu}i\sqrt{2}e_4A_{\mu}^{(n)}\right)\left(\hat{\Psi}_R^{(n)}+\hat{\chi}_L^{(n)}\right)+\left(\hat{\overline{\Psi}}_R^{(n)}+\hat{\overline{\chi}}_L^{(n)}\right)\left(i\gamma^{\mu}i\sqrt{2}e_4A_{\mu}^{(n)}\right)f^{(0)} \\
&+\overline{f}^{(0)}\left(i\sqrt{2}e_4A_5^{(n)}\right)\left(\tilde{\Psi}_L^{(n)}-\tilde{\chi}_R^{(n)}\right)+\left(\tilde{\overline{\Psi}}_L^{(n)}-\tilde{\overline{\chi}}_R^{(n)}\right)\left(ie_4A_5^{(n)}\right)f^{(0)}\Big]+\nabla.
\end{aligned}
\tag{3.52}
$$

Dado que el signo del término de masa en el tercer término de la ecuación anterior se muestra incorrecto de acuerdo a la teoría de Dirac, es necesario redefinir al campo $f_2^{(n)}$ mediante el reemplazo

$$
f_2^{(n)} = \gamma^5 f_2^{(n)\prime}
\tag{3.53}
$$

y denotando al campo $f_2^{(n)\prime}$ simplemrnte como $f_2^{(n)}$ para reducir notación (esto es $f_2^{(n)\prime} \longrightarrow f_2^{(n)}$)

la ecuación (3.52) pasa a verse como

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^4_{\mathrm{KK}} &= \overline{f}^{(0)} \left(i\gamma^\mu D_\mu - m\right) f^{(0)} + \sum_n \Big[\overline{f}_1^{(n)} \left(i\gamma^\mu D_\mu - \lambda_n\right) f_1^{(n)} + \overline{f}_2^{(n)} \left(i\gamma^\mu D_\mu - \lambda_n\right) f_2^{(n)} \\
&+ \overline{f}^{(0)} \left(i\gamma^\mu i\sqrt{2} e_4 A_\mu^{(n)}\right) \left(\hat{\Psi}_R^{(n)} + \hat{\chi}_L^{(n)}\right) + \left(\hat{\overline{\Psi}}_R^{(n)} + \hat{\overline{\chi}}_L^{(n)}\right) \left(i\gamma^\mu i\sqrt{2} e_4 A_\mu^{(n)}\right) f^{(0)} \\
&+ \overline{f}^{(0)} \left(i\sqrt{2} e_4 A_5^{(n)}\right) \left(\tilde{\Psi}_L^{(n)} - \tilde{\chi}_R^{(n)}\right) + \left(\tilde{\overline{\Psi}}_L^{(n)} - \tilde{\overline{\chi}}_R^{(n)}\right) \left(i e_4 A_5^{(n)}\right) f^{(0)} \Big] + \nabla \\
&= \overline{f}^{(0)} \left(i\gamma^\mu D_\mu - m\right) f^{(0)} + \sum_n \Big[\overline{f}^{(n)} \left(i\gamma^\mu D_\mu - \lambda_n\right) f^{(n)} + \\
&+ \overline{f}^{(0)} \left(i\gamma^\mu i\sqrt{2} e_4 A_\mu^{(n)}\right) \left(\hat{\Psi}_R^{(n)} + \hat{\chi}_L^{(n)}\right) + \left(\hat{\overline{\Psi}}_R^{(n)} + \hat{\overline{\chi}}_L^{(n)}\right) \left(i\gamma^\mu i\sqrt{2} e_4 A_\mu^{(n)}\right) f^{(0)} \\
&+ \overline{f}^{(0)} \left(i\sqrt{2} e_4 A_5^{(n)}\right) \left(\tilde{\Psi}_L^{(n)} - \tilde{\chi}_R^{(n)}\right) + \left(\tilde{\overline{\Psi}}_L^{(n)} - \tilde{\overline{\chi}}_R^{(n)}\right) \left(i e_4 A_5^{(n)}\right) f^{(0)} + \Big] \nabla. \qquad (3.54)
\end{aligned}
$$

donde el símbolo del término de masa se encuentra corregido y corresponde con la teoría de Dirac.

3.4. Integración de modos pesados

Dado que solamente buscamos encontrar las contribuciones a la lagrangiana definidas por el modo cero de Kaluza-Klein, tomaremos únicamente los siguientes términos de la ecuación (3.52) para desarrollar una lagrangiana de Euler-Heisenberg

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \overline{f}^{(0)} \left(i\gamma^\mu D_\mu - m\right) f^{(0)} + \sum_n \left[\overline{f}^{(n)} \left(i\gamma^\mu D_\mu - \lambda_n\right) f^{(n)} \right] \\
&= \sum_n \Big[\overline{f}_1^{(n)} i\gamma^\mu \partial_\mu f_1^{(n)} + \overline{f}_1^{(n)} i\gamma^\mu i e_4 A_\mu^{(0)} f_1^{(n)} - \lambda_n \overline{f}_1^{(n)} f_1^{(n)} \\
&+ \overline{f}_2^{(n)} i\gamma^\mu \partial_\mu f_2^{(n)} + \overline{f}_2^{(n)} i\gamma^\mu i e_4 A_\mu^{(0)} f_2^{(n)} - \lambda_n \overline{f}_2^{(n)} f_2^{(n)} \Big]. \qquad (3.55)
\end{aligned}
$$

De esta manera, la acción efectiva se definirá como sigue

$$
\begin{aligned}
e^{i\Gamma_{\mathrm{eff}}[A_\mu]} &= \int \left[d\overline{f}_1^{(n)}\right] \left[df_1^{(n)}\right] \left[d\overline{f}_2^{(n)}\right] \left[df_2^{(n)}\right] e^{i\int dx \mathscr{L}\left(A_\mu, \overline{f^0}, f^{(0)} \overline{f}_1^{(n)} f_1^{(n)}, \overline{f}_2^{(n)}, f_2^{(n)}\right)} \\
&= e^{i\overline{f}^{(0)} (i\gamma^\mu D_\mu - m) f^{(0)}} \int \left[d\overline{f}_1^{(n)}\right] \left[df_1^{(n)}\right] e^{i\int dx \sum \overline{f}_1^{(n)} (i\not{D} - \lambda_n) f_1^{(n)}} \\
&\times \int \left[d\overline{f}_2^{(n)}\right] \left[df_2^{(n)}\right] e^{i\int dx \sum \overline{f}_2^{(n)} (i\not{D} - \lambda_n) f_2^{(n)}} \\
&= e^{\overline{f}^{(0)} (i\gamma^\mu D_\mu - m) f^{(0)}} \prod_{n=1}^{\infty} \det \left[\left(i\not{D}_x - \lambda_n\right) \delta_{xy}\right]^{-1} \det \left[\left(i\not{D}_z - \lambda_n\right) \delta_{zw}\right]^{-1}. \qquad (3.56)
\end{aligned}
$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\text{eff}} &= \overline{f}^{(0)}\left(i\gamma^{\mu}D_{\mu}-m\right)f^{(0)}-i\log\left\{\prod_{n=1}^{\infty}\left[\det\left[\left(i\partial\!\!\!/_{x}-e_4 A\!\!\!/^{(0)}-\lambda_n\right)\delta_{xy}\right]^{-1}\right.\right.\\
&\quad\left.\left.\times\det\left[\left(i\partial\!\!\!/_{z}-e_4 A\!\!\!/^{(0)}-\lambda_n\right)\delta_{zw}\right]^{-1}\right]\right\}\\
&= \overline{f}^{(0)}\left(i\gamma^{\mu}D_{\mu}-m\right)f^{(0)}+\sum_n\left\{-i\log\left[\det\left[\left(i\partial\!\!\!/_{x}-e_4 A\!\!\!/^{(0)}-\lambda_n\right)\delta xy\right]^{-1}\right]\right.\\
&\quad\left.-i\log\left[\det\left[\left(i\partial\!\!\!/_{z}-e_4 A\!\!\!/^{(0)}-\lambda_n\right)\delta zw\right]^{-1}\right]\right\}\\
&= \overline{f}^{(0)}\left(i\gamma^{\mu}D_{\mu}-m\right)f^{(0)}\\
&\quad-i\sum_n\left[\operatorname{tr}\log\left(i\partial\!\!\!/-e_4 A\!\!\!/^{(0)}-\lambda_n\right)+\operatorname{tr}\log\left(i\partial\!\!\!/-e_4 A\!\!\!/^{(0)}-\lambda_n\right)\right]\\
&= \overline{f}^{(0)}\left(i\gamma^{\mu}D_{\mu}-m\right)f^{(0)}\\
&\quad+\sum_n\left\{-2i\operatorname{tr}\log\left(i\partial\!\!\!/-\lambda_n\right)+2i\operatorname{tr}\log\left[1+e_4 A\!\!\!/^{(0)}\left(i\partial\!\!\!/-\lambda_n\right)^{-1}\right]\right\}.
\end{aligned}\tag{3.57}$$

Notemos que la ecuación (3.57) es muy similar a la ecuación (2.5), dado que deseamos obener una Lagrangiana efectiva de Euler-Heisenberg a partir de esta expresión; por argumentos análogos a los utilizados anteriormente en la ecuación (2.5), nos enfocamos en la última serie de términos. Esto es:

$$2i\operatorname{tr}\log\left[1+e_4 A\!\!\!/^{(0)}\left(i\partial\!\!\!/-\lambda_n\right)^{-1}\right]=\sum_k\left\{2i\sum_n\frac{(-e_4)^k}{k}\operatorname{tr}\left[\left(i\partial\!\!\!/-\lambda_n\right)^{-1}A\!\!\!/^{(0)}\right]^k\right\}.\tag{3.58}$$

Utilizando el mismo procedimiento que se utilizó en el capiítulo 2 de la presente tesis llegamos a que la acción efectiva de nuestra teoría es

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\text{eff}}[A^{(0)}] &= \overline{f}^{(0)}\left(i\gamma^{\mu}D_{\mu}-m\right)f^{(0)}+\frac{2e_4^2}{3(4\pi)^2}\triangle\int dx\,F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\\
&\quad-\sum_n\frac{2e_4^2}{15(4\pi)^2\lambda_n^2}\int dx\,F_{\mu\nu}\Box F^{\mu\nu}+\mathcal{O}\left(\frac{p^2}{\lambda_n^2}\right)^2.
\end{aligned}\tag{3.59}$$

La constante de estructura fina α es adimensional y en unidades naturales esta dada por $\alpha=\frac{e^2}{4\pi}$ y tiene un valor aproximado $\alpha\approx\frac{1}{137.035999}$. De modo que, la Lagrangiana efectiva descrita en términos de α es

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\text{eff}}[A^{(0)}] &= \overline{f}^{(0)}\left(i\gamma^{\mu}D_{\mu}-m\right)f^{(0)}-\frac{3}{2}\frac{\alpha}{4\pi}\triangle\int dx\,F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\\
&\quad-\sum_n\frac{1}{\lambda_n^2}\frac{2}{15}\frac{\alpha}{4\pi}\int dx\,F_{\mu\nu}\Box F^{\mu\nu}+\mathcal{O}\left(\frac{p^2}{\lambda_n^2}\right)^2.
\end{aligned}\tag{3.60}$$

Analicemos ahora el factor $\sum_n\frac{1}{\lambda_n^2}$ en el segundo término de la ecuación anterior, el cual es definido por

$$\sum_n\frac{1}{\lambda_n^2}=\sum_n\frac{1}{m^2+\frac{n^2}{R^2}}.\tag{3.61}$$

Bajo el supuesto de que el radio del orbifold, en el cual se encuenra compactificada nuestra dimensión extra, es muy pequeño, la cantidad $\frac{n}{R}$ será muy grande, y por tanto podremos despreciar al término m^2 de el denominador de la expresión (3.59), de este modo

$$\sum_n \frac{1}{\lambda_n^2} \approx R^2 \sum_n \frac{1}{n^2} = R^2 \zeta(2). \tag{3.62}$$

donde $\zeta(2)$ es la función zeta de Riemann evaluada en 2. Aproximando, finalmente, nuestra Lagrangiana effectiva a

$$\begin{aligned} \Gamma_{\text{eff}}[A^{(0)}] = \overline{f}^{(0)} \left(i\gamma^\mu D_\mu - m \right) f^{(0)} - \frac{3}{2} \frac{\alpha}{4\pi} \triangle \int dx \, F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\ - R^2 \zeta(2) \frac{2}{15} \frac{\alpha}{4\pi} \int dx \, F_{\mu\nu} \Box F^{\mu\nu} + \mathcal{O}\left(\frac{p^2}{\lambda_n^2} \right)^2. \end{aligned} \tag{3.63}$$

De esta manera, se llega a una lagrangiana en la cual; los efectos extradimensionales, que en un principio se encontraban descritos como una serie infinita de términos de modos excitados, se encuentran ahora descritos por un sólo término con un valor especifico dependiente de los modos cero y la escala de compactificación de nuestra dimensión extra. Dicho resultado es el que se pretendía encontrar en el planteamiento de esta tésis, donde el coeficiente de este término es $\frac{\alpha_{W^2}}{(R^{-1})^2} = -R^2 \zeta(2) \frac{2}{15} \frac{\alpha}{4\pi}$.

Conclusiones

En esta tesis se investigó una teoría de Kaluza-Klein a partir de una teoría electrodinámica extradimensional de 5 dimensiones espaciotemporales caracterizada por la lagrangiana

$$\mathcal{L}^5_{\text{QED}} = \overline{\Psi}(x,\bar{x})(i\Gamma^M D_M - m)\Psi(x,\bar{x}) - \frac{1}{4}\mathscr{F}^{MN}(x,\bar{x})\mathscr{F}_{MN}(x,\bar{x}),$$

para lo cual, fue necesario describir las paridades de los campos fermiónicos y de norma implicados Ψ^N y A_N a partir de las condiciones de paridad y periocidad impuestas por la compactificación de la quinta dimensión en un orbifold S^1/Z_2 con radio de compactificación R. Posteriormente se expresó la lagrangiana como una serie de términos de Kaluza-Klein, y mediante la integración de los modos excitados se llegó a la lagrangiana de Kaluza-Klein

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^4_{\text{KK}} = {} & \overline{f}^{(0)}\left(i\gamma^\mu D_\mu - m\right) f^{(0)} + \sum_n \Big[\overline{f}^{(n)}\left(i\gamma^\mu D_\mu - \lambda_n\right) f^{(n)} \\ & + \overline{f}^{(0)}\left(i\gamma^\mu i\sqrt{2}e_4 A^{(0)}_\mu\right)\left(\hat{\Psi}^{(n)}_R + \hat{\chi}^{(n)}_L\right) + \left(\hat{\overline{\Psi}}^{(n)}_R + \hat{\overline{\chi}}^{(n)}_L\right)\left(i\gamma^\mu i\sqrt{2}e_4 A^{(0)}_\mu\right) f^{(0)} \\ & + \overline{f}^{(0)}\left(i\sqrt{2}e_4 A^{(n)}_5\right)\left(\tilde{\Psi}^{(n)}_L - \tilde{\chi}^{(n)}_R\right) + \left(\tilde{\overline{\Psi}}^{(n)}_L - \tilde{\overline{\chi}}^{(n)}_R\right)\left(ie_4 A^{(n)}_5\right) f^{(0)} + \triangle\Big].\end{aligned}$$

De ésta, se tomaron sólamente los términos de la forma $\overline{f}^{(0)}\left(i\gamma^\mu D_\mu - m\right) f^{(0)} + \sum_n \overline{f}^{(n)}\left(i\gamma^\mu D_\mu - \lambda_n\right) f^{(n)}$ y mediante el método presentado en el libro *Effective Lagrangians for the Standard Model* [6], se llegó a una lagrangiana efectiva de Euler-Heisenberg

$$\begin{aligned}\Gamma_{\text{eff}}[A^{(0)}] = {} & \overline{f}^{(0)}\left(i\gamma^\mu D_\mu - m\right) f^{(0)} - \frac{3}{2}\frac{\alpha}{4\pi}\triangle\int dx\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\ & - R^2\zeta(2)\frac{2}{15}\frac{\alpha}{4\pi}\int dx\, F_{\mu\nu}\Box F^{\mu\nu} + \mathcal{O}\left(\frac{p^2}{\lambda_n^2}\right)^2,\end{aligned}$$

donde el segundo término representa las contribuciones extradimensionales al término lagrangiano no renormalizable

$$\frac{\alpha_{W^2}}{(R^{-1})^2}F^{(0)}_{\mu\nu}\partial^2 F^{(0)\mu\nu} = \frac{\alpha_{W^2}}{(R^{-1})^2}F^{(0)}_{\mu\nu}\partial^\alpha\partial_\alpha F^{(0)\mu\nu},$$

de donde puede notarse que la escala energética de nuestra teoría efectiva es el inverso del radio de compactificación de nuestra dimensión extra $\Lambda = R^{-1}$, ya que dichas contribuciones son dependientes de este parámetro. Se encontró además que en este caso en particular que el valor de la constante $\alpha_{W^2} = \zeta(2)\frac{2}{15}\frac{\alpha}{4\pi}$. A continuación se muestra una gráfica en donde podemos ver el comportamiento del coeficiente del término de las contribuciones extradimensionales.

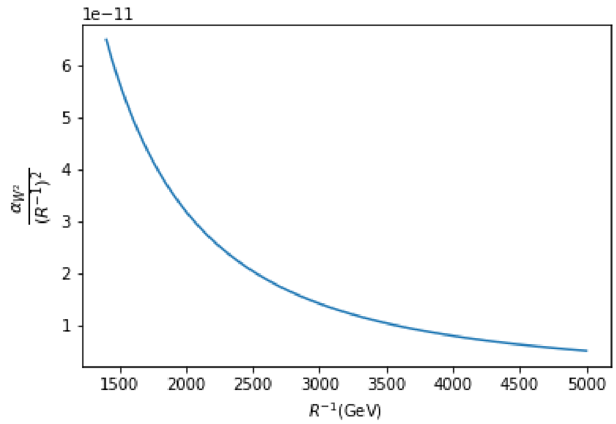

Figura 3.1: coeficiente del término de las contribuciones extradimensionales en función de la escala de compactificación

En la anterior figura puede verse cómo la contribución extradimensional a la lagrangiana decrece de manera exponencial a medida que la variable R^{-1} se acerca a energías más altas.

La realización de esta tesis significó para mí un primer acercamiento al área de estudio de lagrangianas efectivas y teorías de dimensiones extras, de modo que se ésta se desarrollo con un enfoque más operacional, sin profundizar directamente en algunos enfoques teóricos de la materia. De modo que sería interesante poder adentrarme más en estos temas de investigación, a razón de poder comprender la materia con una mayor profundidad. De igual manera, resultaría también interesante indagar en las cuestiones fenomenológicas de la teoría, así como encontrar las contribuciones a la lagrangiana efectiva de otros términos que no fueron tomados en cuenta en este trabajo de investigación.

Apéndice A

Integrales Gaussianas

De manera general conocemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \tag{A.1}$$

para $a > 0$ esto significa que

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\frac{a}{2}x^2} = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}. \tag{A.2}$$

De modo que si existen $a_1, ..., a_n$, n números reales mayores a cero: $a_j > 0$ para todo $j = 1, ..., n$, e producto de n integrales Gaussinas para cada a_j se expresa como

$$\int d^n x \, \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} a_j x_j^2\right\} = \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\prod_{j=1}^{n} a_j}}, \tag{A.3}$$

Donde $d^n x = dx_1 \cdots dx_n$. Ahora, si se propone una matriz A diagonal de tamaño $n \times n$ de entradas $A_{jk} = \delta_{j,k} a_k$ podemos expresar la ecuación (A.2) de la siguiente forma:

$$\int d^n x \, \exp\left\{-\frac{1}{2}X^\intercal A X\right\} = \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\det\{A\}}}, \tag{A.4}$$

donde X es una matriz columna de entradas $X_j = x_j$. La Ecuación (1.7) cuenta con un factor similar a la ecuación (A.4). En éste caso se trata con campos y la matriz A no es exactamente diagonal, sino diagonalizable. Sin embargo, gracias a esta propiedad es posible llegar de la ecuación (1.7) a la (1.11) por medio de un procedimiento análogo al visto al principio de este apéndice.

Tomemos la expresión

$$-\frac{1}{2}\left(\Phi_h - \overline{\Phi}_h\right)^T A \left(\Phi_h - \overline{\Phi}_h\right) \tag{A.5}$$

donde A está definida como

$$A_{xy} = \left.\frac{\partial^2 S}{\partial \Phi_h(x)\, \partial \Phi_h(y)}\right|_{\Phi_h = \overline{\Phi}_h}, \tag{A.6}$$

Dado que A es una matriz simétrica de valores reales es diagonalizable, esto es

$$D = OAO^\intercal, \tag{A.7}$$

donde D es una matriz diagonal y O es elegida una matriz ortogonal, de modo que $OO^\intercal = \mathbb{1}$. Entonces podemos escribir la ecuación (A.5) como

$$-\frac{1}{2}\left(\Phi_h - \overline{\Phi}_h\right)^\intercal (O^\intercal O) A(x,y) (O^\intercal O)\left(\Phi_h - \overline{\Phi}_h\right) = -\frac{1}{2}\left[O\left(\Phi_h - \overline{\Phi}_h\right)\right]^\intercal D \left[O\left(\Phi_h - \overline{\Phi}_h\right)\right]. \tag{A.8}$$

Si proponemos el cambio de variable $\Phi_h'(z) = O_{zx}\left(\Phi_h - \overline{\Phi}_h\right)(x)$ cuyo jacobiano es $+1$ (Esta expresión puede verse simplemente como una rotación en el espacio euclidio), la ecuación (A.8) puede verse como

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\left[O\left(\Phi_h - \overline{\Phi}_h\right)\right]^{\intercal} D\left[O\left(\Phi_h - \overline{\Phi}_h\right)\right] &= \int dz\, dw \left\{\frac{1}{2}\Phi_h'(z)\delta(z-w)D_{zw}\Phi_h'(w)\right\} \\
&= \int dz \left\{-\frac{1}{2}\Phi_h'(z)D_z\Phi_h'(z)\right\} \\
&= -\frac{1}{2}(\Phi_h')^{\intercal} D\Phi_h'. \qquad (A.9)
\end{aligned}$$

Una vez obtenido este resultado, haciendo uso de la ecuación (A.4) se llega a

$$\begin{aligned}
\int d\Phi(x)\, \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\Phi_h - \overline{\Phi}_h\right)^T A\left(\Phi_h - \overline{\Phi}_h\right)\right\} &= \int d\Phi(x)\, \exp\left\{-\frac{1}{2}(\Phi_h')^{\intercal} D\Phi_h'\right\} \\
&= \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\det D}}. \qquad (A.10)
\end{aligned}$$

Por lo que se concluye que

$$\int \mathscr{D}\Phi(x)\, \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\Phi_h - \overline{\Phi}_h\right)^T A\left(\Phi_h - \overline{\Phi}_h\right)\right\} = \left(\det\{A\}\right)^{-\frac{1}{2}}, \qquad (A.11)$$

donde se utilizó el hecho de que $\det\{D\} = \det\{A\}$. Nótese que la matriz A podría haberse definido como en la ecuación (1.6) y se llegaría a la misma conclusión.

Bibliografía

[1] S. L. Glashow, *Partial-symmetries of weak interactions*, Nucl. Phys. **22**, 579 (1961).

[2] S. Weinberg, *A Model of Leptons*, Phys. Rev. Lett. **19**, 1264 (1967).

[3] A. Salam, *"Weak and electromagnetic interactions"*, in *Elementary particle theory: relativistic groups and analyticity*, N. Svartholm, ed., p. 367. Almqvist & Wiksell, 1968. Proceedings of the eighth Nobel symposium.

[4] M. Tanabashi *et al.* (Particle Data Group), *The Review of Particle Physics* Phys. Rev. D **98**, 030001 (2018).

[5] J. Wudka, *Electroweak Effective Lagrangians*, Int. J. Mod. Phys. A **9**, 2301 (1994).

[6] A. Dobado, A. Gómez-Nicola, A. L. Maroto, and J. R. Peláez, *Effective Lagrangians for the Standard Model* (Springer-Verlag, Heidelberg, 1997).

[7] D. Colladay and V. A. Kostelecký, *CPT violation and the standard model*, Phys. Rev. D **55**, 6760 (1997).

[8] D. Colladay and V. A. Kostelecký, *Lorentz-violating extension of the standard model*, Phys. Rev. D **58**, 116002 (1998).

[9] V. A. Kostelecký, *Gravity, Lorentz violation, and the standard model*, Phys. Rev. D **69**, 105009 (2004).

[10] O. Klein, *Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie*, Z. Phys. **37** 895 (1926).

[11] G. Nordström, *On the possibility of unifying the electromagnetic and gravitational fields*, Phys. Z. **15**, 504 (1914).

[12] T. Kaluza, *Zum Unitätsproblem der Physik*, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.) **1921**, 966 (1921).

[13] J. M. Overduin, P. S. Wesson, *Kaluza-Klein gravity* Phys. Rept. **283** (1997).

[14] C. Lovelace, *Pomeron form factors and dual Regge cuts*, Phys. Lett B **34**, 500 (1971).

[15] J. H. Schwarz, *Physical states and pomeron poles in the dual pion model*, Nucl. Phys. B **46**, 61 (1972).

[16] S. -T. Yau, *On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation. I*, Commun. Pure Appl. Math. **31**, 339 (1978).

[17] E. Witten, *String theory dynamics in various dimensions*, Nucl. Phys. B **443**, 85 (1995).

[18] J. Polchinski, *Dirichlet Branes and Ramond-Ramond Charges*, Phys. Rev. Lett. **75**, 4724 (1995).

[19] I. Antoniadis, Phys. Lett. B **246**, 377 (1990).

[20] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, and G. R. Dvali, Phys. Lett. B **429**, 263 (1998).

[21] I. Antoniadis, N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, and G. R. Dvali, Phys. Lett. B **436**, 257 (1998).

[22] L. Randall and R. Sundrum, *Large Mass Hierarchy from a Small Extra Dimension*, Phys. Rev. Lett. **83**, 3370 (1999).

[23] L. Randall and R. Sundrum, *An Alternative to Compactification*, Phys. Rev. Lett. **83**, 4690 (1999).

[24] T. Appelquist, H. -C. Cheng, and B. Dobrescu, *Bounds on universal extra dimensions*, Phys. Rev. D **64**, 035002 (2001).

[25] D. Hooper and s. Profumo, *Dark matter and collider phenomenology of universal extra dimensions*, Phys. Rept. **453**, 29 (2007).

[26] G. Servant, *Status report on universal extra dimensions after LHC8*, Mod. Phys. Lett A **30**, 1540011 (2015).

[27] K. R. Dienes, E. Dudas, and T. Gherghetta, *Grand unification at intermediate mass scales through extra dimensions*, Nucl. Phys. B **537**, 47 (1999).

[28] A. Mück, A. Pilaftsis, and R. Rückl, *Minimal higher-dimensional extensions of the standard model and electroweak observables*, Phys. Rev. D **65**, 085037 (2002).

[29] A. Cordero-Cid, M. Gómez-Bock, H. Novales-Sánchez, and J. J. Toscano, *The Standard Model with one universal extra dimension*, Pramana **80**, 369 (2013).

[30] J. Monta ño, H. Novales-Sánchez, and J. J. Toscano, *Effects of universal extra dimensions on top-quark electromagnetic interactions*, e-Print: arXiv:1908.06226.

[31] L. Nielse, *Classification of 1D and 2D Orbifolds*, AIP. Conf. Proc. **903**, 411 (2007).

[32] H. Novales-Sánchez and J. J. Toscano, *Gauge invariance and quantization of Yang-Mills theories in extra dimensions*, Phys. Rev. D **82**, 116012 (2010).

[33] M. A. López-Osorio, E. Martínez-Pascual, H. Novales-Sánchez, J. J. Toscano, *Hidden symmetries induced by a canonical transformation and gauge structure of compactified Yang-Mills theories*, Phys. Rev. D **88**, 036015 (2013).

[34] M. A. López-Osorio, E. Martínez-Pascual, H. Novales-Sánchez, J. J. Toscano, *Yang-Mills theories with an arbitrary number of compactified extra dimensions* Phys. Rev. D **89**, 116015 (2014).

[35] W. H. Furry, *A Symmetry Theorem in the Positron Theory* Phys. Rev. **51** (1973)

[36] B. C. Hall *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations: An Elementary Introduction* Springer. (2003)

[37] M. E. Peskin, D. V. Schroeder *An Introduction to Quantum Field Theory* (Perseus Books,1995)

[38] G. V. Dunne *Heisenberg-Euler Effective Lagrangians: Basics and Extensions* from Fields to Strings: Circumnavigating Theoretical Physics: Ian Kogan Memorial Collection (In 3 Volumes).(2005)

[39] D. M. Y. Sommerville *An Introduction to the geometry of N dimensions* Methuen & Company. (1929)

[40] J. Papavassiliou, A. Santamaria *Chiral fermions and gauge fixing in five-dimensional* Phys. Rev. D **63**, 125014. (2001)