



**BENEMERITA
UNIVERSIDAD AUTONOMA DE PUEBLA**

Facultad de Ciencias de la Computación

“Calibración de una Fuente de Iluminación para la
Reconstrucción 3D”

TESIS

Para obtener el grado de:
INGENIERO EN CIENCIAS DE LA COMPUTACION

Presenta:
MIGUEL ANTONIO JUÁREZ CABILDO

Asesor:
Dr. RAFAEL LEMUZ LÓPEZ

Puebla Pue.

Marzo 2015





INDICE

Resumen

Introducción

Cap. 1 Modelos de Iluminación

1.1 Visión Computacional	7
1.2 Modelo de Iluminación de Phong	8
1.2.1 Luz Ambiental	8
1.2.2. Luz Difusa	9
1.2.3 Luz Especular	9
1.3 Modelo de Reflexión Basado en la distribución esférica	10
1.3.1 Modelo de Reflexión de Torrance – Sparrow	10
1.3.2 Distribución de Von Mises - Fisher	10
1.3.3 Modelo Esférico de Torrance – Sparrow	11
1.4 Revisión del Estado del Arte	13

Cap. 2 Conceptos Previos de Geometría

2.1 Ecuación General de una Elipse	15
2.1.1 Ajuste de Puntos a Elipse	15
2.2 Producto Cruz	16
2.2.1 Propiedades del Producto Cruz	16
2.3 Coordenadas de Plücker	17
2.3.1 Intuición Geométrica	17
2.3.1.1 Ejemplos	18
2.3.2 Definición Algebraica	19
2.3.2.1 Coordenadas Primarias	19
2.3.2.2 Mapeo de Plücker	20
2.3.2.3 Coordenadas Duales	20
2.3.2.4 Geometría	20
2.3.3 Aplicaciones	21
2.3.3.1 Cruce de Líneas	21
2.3.3.2 Unión de Líneas	21
2.3.3.3 Intersección de Líneas	21



Cap. 3 Procesamiento y Análisis de Imágenes	
3.1 Procesamiento de Imágenes	22
3.1.1 Detección de Bordes	22
3.1.2 Operaciones Basadas en la Primera Derivada	22
3.1.2.1 Operadores Prewitt y Sobel	24
3.1.3 Derivada Gaussiana	24
3.2 Operadores Morfológicos	25
3.2.1 Transformaciones Morfológicas Elementales	25
3.2.1.1 Dilatación	26
3.2.1.2 Erosión	27
3.2.1.3 Cerradura	28
3.2.1.4 Shrink	28
Cap. 4 Algoritmo Propuesto: Calibración de fuente de iluminación	
4.1 Algoritmo de detección de centros para Elipses	29
4.1.1 Proyección del Histograma	30
4.1.2 Detección de Regiones Probables con Elipses	31
4.1.3 Selección del Borde de las Elipses	32
4.1.4 Calculo de los Parámetros de la Elipse	33
4.2 Calculo de la posición de la fuente de Iluminación	34
4.2.1 Discusión	34
Cap. 5 Resultados	
Banco de Imágenes	35
Tabla de resultados	37
Cap. 6 Conclusiones y Trabajo Futuro	38
Bibliografía	39



RESUMEN

En esta tesis se propone un algoritmo para la calibración geométrica de una fuente de iluminación utilizando herramientas algebraicas y procesamiento digital de imágenes. Este algoritmo permite recuperar la posición de una fuente de iluminación a partir una sola imagen capturada. La información es extraída a partir de las intensidades observadas por una cámara utilizando un patrón de calibración grabado con círculos de radio conocido. Utilizando algoritmos de procesamiento digital de imágenes como: la proyección del histograma, la binarización y algunos operadores morfológicos. En primer lugar se detectan los bordes de las elipses que se forman en las imágenes. Posteriormente se obtienen los parámetros que describen cada una de las elipses formulando un problema de ajuste haciendo uso de las coordenadas de Plücker. Así, el nuevo método de calibración obtiene la ubicación de la fuente formulando y resolviendo el problema mediante dos sistemas de ecuaciones lineales. Finalmente, el algoritmo de calibración propuesto es evaluado utilizando imágenes sintéticas generadas por un programa de CAD, BLENDER [14, 15]. Los resultados experimentales avalan el buen funcionamiento del algoritmo propuesto.



INTRODUCCIÓN

La calibración de fuentes de iluminación es un paso esencial en los métodos de reconstrucción 3D que utilizan fuentes de iluminación y al menos una cámara digital para la captura de imágenes. La calibración de una fuente de iluminación implica determinar de forma automática sus propiedades geométricas y fotométricas. En este proyecto se propone un nuevo algoritmo de calibración que permite extraer la información geométrica analizando las imágenes capturadas en un arreglo especial de una cámara y una fuente de iluminación.

La calibración es el conjunto de operaciones con las que se establece, en condiciones controladas, la correspondencia entre los valores indicados en un instrumento o sistema y los valores conocidos correspondientes a una magnitud de medida o patrón, asegurando así la trazabilidad de las medidas a las correspondientes unidades básicas.

En la visión computacional es importante conocer la posición de la cámara con alta precisión en aplicaciones de reconstrucción de objetos 3D y el manejo de las sombras, ya que de esta manera es posible obtener mejores resultados.

La correcta calibración de una cámara está relacionada con la precisión y la exactitud de los resultados posteriores.

Objetivos Generales

Proponer un método de calibración de fuentes de iluminación que recupere información geométrica utilizando una sola imagen de un patrón plano conocido.

Objetivos Específicos

- Diseñar un patrón de calibración que permita extraer información geométrica.
- Proponer un modelo matemático que permita extraer los parámetros geométricos (la posición y la dirección de la fuente de iluminación).
- Evaluar el modelo de calibración determinando la posición y dirección de la fuente de iluminación.



El contenido de la tesis presenta el trabajo que se realizó para alcanzar los objetivos anteriores, a continuación se describe brevemente el contenido de cada capítulo.

En el Capítulo 1 se revisan algunos de los principales modelos de iluminación relacionados con este trabajo. En primer lugar tenemos el modelo de Phong y su relación con los tipos de iluminación (especular, difusa, ambiental), también se revisa el modelo de reflexión basado en distribución esférica desarrollado por el modelo de reflexión de Torrance-Sparrow, el modelo de distribución de von Mises-Fisher y el modelo esférico de Torrance-Sparrow. Al final del capítulo se hace una revisión del estado del arte de los métodos más relacionados al trabajo que presentamos.

En el Capítulo 2 se revisan algunos conceptos del álgebra y la geometría utilizados para el desarrollo de este trabajo tales como el producto cruz, la ecuación general de la elipse con centro diferente al origen. También se revisan las coordenadas de Plücker y sus propiedades.

En el Capítulo 3 están descritos algunos algoritmos del procesamiento digital de imágenes tales como la detección de bordes, así como los operadores morfológicos dilatación, erosión, cerradura, que permiten extraer información a partir de las imágenes.

En el Capítulo 4 se presenta el algoritmo propuesto para la calibración de la fuente de iluminación, utilizando técnicas del procesamiento digital de imágenes como: la proyección del histograma para la imagen, así como el cálculo de los parámetros de la elipse y finalmente encontrar la posición de la fuente de iluminación, en cada parte del proceso se pueden ver imágenes del desarrollo del trabajo.

En el Capítulo 5 se presenta un banco de imágenes sintéticas y reales, además de una tabla de resultados.

Finalmente en el Capítulo 6 se presentan las conclusiones y propuestas para el trabajo futuro.



CAPÍTULO 1

MODELOS DE ILUMINACIÓN

1.1 VISIÓN COMPUTACIONAL

“ Visión es un proceso que produce, a partir de las imágenes del mundo exterior, una descripción que es útil para el observador y que no tiene información irrelevante”,

Marr [16].

La función principal de la visión computacional es reconocer y localizar objetos en el ambiente mediante el procesamiento de las imágenes. Y después estudiar estos procesos, para entenderlos y construir máquinas con capacidades similares. [17]

En la definición de visión de Marr hay tres aspectos importantes: (i) Visión es un proceso computacional, (ii) la descripción a obtener depende del observador y (iii) es necesario eliminar la información que no sea útil (reducción de información).

Un área muy ligada a la de visión computacional es la de procesamiento de imágenes. Aunque ambos campos tienen mucho en común, el objetivo final es diferente.

El objetivo del procesamiento de imágenes es mejorar la calidad de las imágenes para su posterior utilización o interpretación.

El objetivo de la visión computacional es extraer características de una imagen para su descripción e interpretación por la computadora.

Una parte muy importante en los sistemas de visión por computadora es la iluminación, ya sea la del ambiente o la propia del sistema. La técnica a utilizar en el sistema va a depender puramente de la aplicación de la misma, esto es, no existe una técnica única para los sistemas de visión, y por lo consiguiente se tiene que analizar cuál es la más apropiada.

Los modelos de iluminación son en realidad el cálculo de la intensidad de iluminación en cada punto de la escena. En el cálculo de la intensidad intervienen: el tipo e intensidad de las fuentes de luz, el material del objeto y la orientación del objeto con respecto a la luz.

Para comprender el proceso de iluminación, se puede comenzar siguiendo los rayos de luz de un punto fuente, donde el observador ve solamente la luz que emite la fuente y que llega a los ojos; probablemente después de múltiples interacciones con objetos en la escena, cuando la luz da en una superficie, parte se absorbe y parte se refleja.[1]

Las interacciones entre luz y materiales se pueden clasificar en tres grupos.

Luz ambiental: Proviene de todas las direcciones e ilumina todas las caras del objeto (ver fig. 1.1).

Luz difusa: Proviene de una dirección pero se refleja en todas direcciones.

Luz especular: Proviene de una dirección y se refleja sólo en una dirección.

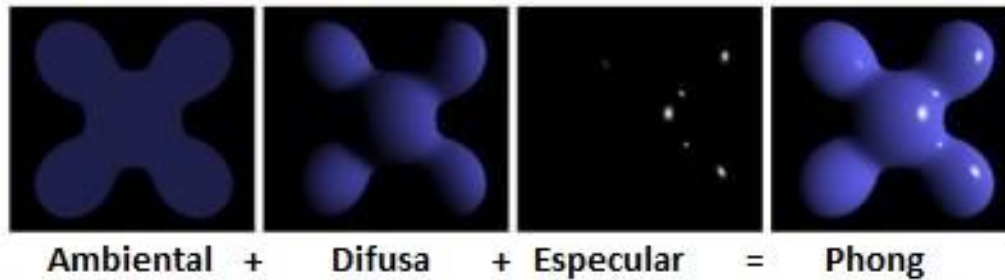


Fig. 1.1 Componentes de la iluminación en el modelo de Phong.

1.2 MODELO DE ILUMINACIÓN DE PHONG

Es un modelo empírico simplificado para iluminar los puntos de una escena, en este modelo los objetos no emiten luz, solo reflejan la luz que le llega de las fuentes de luz o la que es reflejada de otros objetos.

La iluminación de un punto se calcula como la suma de los tres tipos de iluminaciones (especular, difusa, ambiental):

$$I_{Phong} = I_{ambiental} + I_{difusa} + I_{especular} \quad (ec. 1.1)$$

1.2.1 Modelo de iluminación de Phong - Luz Ambiental

La intensidad de la luz ambiental L_a es la misma sobre cada punto de la superficie del objeto. Parte de la luz es absorbida y parte es reflejada. La cantidad reflejada está dada por el coeficiente de reflexión ambiental k_a . Como solo refleja una fracción positiva de luz, se debe tener $0 \leq k_a \leq 1$ y por lo tanto:

$$I_a = k_a L_a \quad (ec. 1.2)$$

Aquí L_a puede ser cualquiera de las fuentes de luz individuales, o puede corresponder a un término que controla el ambiente global de la escena.



1.2.2 Modelo de iluminación de Phong – Luz Difusa

Un reflector difuso perfecto esparce la luz que refleja de manera igual en todas las direcciones, sin embargo, la cantidad de luz reflejada depende del material, dado que parte de la luz es absorbida. Los rayos de luz que pegan en la superficie con ángulos levemente diferentes se reflejarían en ángulos marcadamente diferentes. Superficies difusas perfectas son tan rugosas que no hay un ángulo preferido de reflexión. Tales superficies son a veces conocidas como superficies Lambertiana, pudiéndose modelar matemáticamente por la ley de Lambert.

La iluminación difusa depende de:

- \mathbf{n} : normal de la superficie en el punto p .
- \mathbf{l} : vector de incidencia de la luz.
- I_d : intensidad de la fuente de luz.
- K_d : coeficiente empírico de reflexión, depende de la longitud de onda de la luz ($0 \leq K_d \leq 1$).

La ley de Lambert establece la siguiente relación:

$$I_d = K_d \cos \theta \quad (\text{ec. 1.3})$$

Donde θ es el ángulo entre \mathbf{n} y la dirección de la fuente de luz \mathbf{l} . Si \mathbf{l} y \mathbf{n} son ambos vectores unitarios entonces:

$$\cos \theta = \mathbf{l} \cdot \mathbf{n} \quad (\text{ec. 1.4})$$

Si se agrega K_d se obtiene:

$$I_d = k_d (\mathbf{l} \cdot \mathbf{n}) L_d \quad (\text{ec. 1.5})$$

1.2.3 Modelo de iluminación de Phong – Luz Especular

Este tipo de luz procede de una dirección concreta y se refleja en una única dirección, produce brillos intensos, la iluminación depende del ángulo entre la dirección de la incidencia de la luz y la posición del observador.

Para la reflexión especular Phong propone agregar un pequeño incremento con respecto a la reflexión difusa. Se considera la superficie como rugosa para el término difuso y liza para el término especular. La cantidad de luz que el observador ve depende del ángulo φ entre \mathbf{r} , la dirección de un ángulo perfecto y \mathbf{v} la dirección del observador.

La iluminación especular depende de:

- \mathbf{r} : vector de posición del observador
- \mathbf{l} : vector de incidencia de la luz
- I_d : intensidad de la fuente de luz
- k_e : coeficiente empírico de reflexión especular ($0 \leq k_e \leq 1$)
- n : un índice que simula la rugosidad de la superficie
($1 \leq n < \infty$, 1: mate, ∞ : espejo)
- φ : ángulo entre \mathbf{r} y \mathbf{v}
- $I_e = I_d k_e \cos^\alpha \varphi = I_d k_e (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})^n$



Como se ha dicho la iluminación de Phong es una suma de los tres tipos de iluminación por lo tanto obtenemos:

$$I_{Phong} = I_{amb} + I_{dif} + I_{esp} = L_a k_a + L_d (k_d (l \cdot n) + k_e (r \cdot v)^n) \quad (ec. 1.6)$$

Los coeficientes K_a, K_d y K_e modulan la influencia de cada tipo de luz K .

1.3 MODELO DE REFLEXIÓN BASADO EN DISTRIBUCIÓN ESFÉRICA [2]

1.3.1 Modelo de Reflexión de Torrance-Sparrow

Este modelo asume que las superficies están formadas por una colección de caras planas microscópicas altamente reflectantes (llamadas micro-facetas) distribuidas en las ranuras en forma de V de la siguiente forma:

$$I_s = \int_{\Omega} \frac{K_s F G}{\cos \theta_r} L_i(\theta_i, \phi_i) \exp\left[-\frac{\alpha^2}{2\sigma^2}\right] d\omega_i \quad (ec. 1.7)$$

Donde I_s denota un vector de tres bandas de resplandor de reflexión especular, K_s es el vector de reflexión especular (que incluye el factor de normalización de la función exponencial, la reflectividad de la superficie y el factor de escala entre la radiación de la escena y un valor de píxeles), F es el coeficiente de reflectancia Fresnel, G es el factor geométrico de atenuación, θ_r es el ángulo entre la dirección de la vista y la normal de la superficie, y θ_i, ϕ_i son la altitud y el azimut (la dirección) coordinante, $L_i(\theta_i, \phi_i)$ es la radiación de iluminación por unidad de ángulo sólido proveniente de la dirección (θ_i, ϕ_i) , $d\omega_i$ es el ángulo sólido infinitesimal ($d\omega_i = \sin \theta_i d\theta_i d\phi_i$), α es el ángulo entre la normal de la superficie y la bisectriz de la dirección de la vista y la dirección de la fuente de luz y σ es la rugosidad de la superficie.

A partir de la ecuación podemos ver que el modelo de reflexión de Torrance-Sparrow se aproxima a la distribución de las orientaciones de micro-facetas con una distribución Gaussiana con media cero y desviación estándar σ .

1.3.2 Distribución de Von Mises-Fisher

Para analizar estadísticamente los datos de dirección, la distribución de von Mises Fisher (en lo sucesivo, vMF), ha sido desarrollado por la analogía con la distribución de Gauss y es una de las distribuciones direccionales más utilizadas. Una dirección puede ser expresada por un punto en una esfera con radio unitario. Un vector unitario de tres dimensiones al azar (es decir $x = (x_1, x_2, x_3)^T$, satisfaciendo $\|x\| = 1$) se dice que obedece a la distribución de vMF con 3 variables si su función de densidad de probabilidad está dada por:

$$f(x|\mu, k) = \frac{k}{4\pi \sinh k} \exp[kx^T \mu] \quad (ec. 1.8)$$



Donde μ ($|\mu| = 1$) es la dirección media, y $k \geq 0$ es el parámetro de concentración. El parámetro de concentración k caracteriza la fuerza con los vectores unitarios, elaborados de acuerdo a $f(\mathbf{x}|\mu, k)$, estos se concentran alrededor de la dirección media μ . Sea $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_N\}$ un conjunto de datos de N vectores unitarios al azar siguiendo el modelo de distribución vMF. Sea \mathbf{R} la suma de esos vectores. Entonces el estimador puntual μ_{ML} , de la dirección media se obtiene la normalización de \mathbf{R} a una unidad de longitud. El punto de estimación k está dado por:

$$K_{ML} = \frac{N-1}{N-R} \quad (ec. 1.9)$$

Donde $\mathbf{R} = |\mathbf{R}| = \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i^T \mu_{ML}$

La densidad de la función (ec. 1.8) puede ser reescrita en términos de un sistema de coordenadas polares esféricas de la siguiente forma:

$$P(\theta, \phi) = \frac{k}{4\pi \sinh k} [k \cos \theta] \quad (ec. 1.10)$$

Donde $\theta \in [0, 2\pi]$ es el ángulo polar y el azimut* de la dirección media, respectivamente.

***Azimut:** Angulo que, con el meridiano, forma el círculo vertical que pasa por un punto de la esfera celeste o el globo terráqueo.

1.3.3 Modelo Esférico de Torrance-Sparrow

Sea S la dirección espejo-simétrica (con respecto a la norma H de la micro-faceta) a la superficie normal N . Entonces supongamos que S obedece a una distribución vMF con dirección media N . Más específicamente, la probabilidad de encontrar una dirección S con un área unitaria angular centrada en el ángulo (θ, ϕ) , de la superficie normal N dada por (ec. 1.8). Ahora, $\theta \in [0, \pi]$ es igual a dos veces el ángulo, α (α en (ec. 1.5)), entre N y H . Por lo tanto esta probabilidad es proporcional a $\exp[-2k \sin^2 \alpha]$, desde:
 $\exp[k \cos \theta] = \exp[k \cos 2\alpha] = \exp[-2k \sin^2 \alpha]$. Igual que en la derivación del modelo de Torrance-Sparrow. Se reemplaza la función exponencial en el lado derecho de (ec. 1.7) con argumento $[-2k \sin^2 \alpha]$ en la exponencial de la siguiente manera:

$$\int_{\Omega} \frac{K_s^{FG}}{\cos \theta_r} \mathbf{L}_i(\theta_i, \phi_i) \exp[-2k \sin^2 \alpha] d\omega_i \quad (ec. 1.11)$$

El parámetro de concentración es k , donde puede verse la "suavidad" de la superficie del objeto. Además, suponemos que la siguiente relación entre la suavidad de la superficie k y la rugosidad de la superficie σ de tal manera que (ec. 1.9) es equivalente a (ec. 1.5) para valores pequeños de α (por lo tanto, $\sin \alpha \approx \alpha$).

$$k = \frac{1}{4\alpha^2} \quad (ec. 1.12)$$

Por otra parte, es bien sabido que el modelo de reflexión de Torrance-Sparrow se puede simplificar mediante la redefinición de F y C como valores constantes, a condición de que el ángulo entre la visión y las direcciones de iluminación sea menor a 60° . También podemos simplificar (ec. 1.11) como.



$$I_s \int_{\Omega} \frac{K_s}{\cos \theta_r} L_i(\theta_i, \phi_i) \exp[-2k \sin^2 \alpha] d\omega_i \quad (\text{ec. 1.13})$$

Donde K_s es redefinido como $K_s FG$. Podemos llamar a este modelo de reflexión especular el modelo esférico de reflexión especular de Torrance-Sparrow.

En la figura 1.2 se muestra la aproximación de la radiación de la reflexión especular por el modelo esférico de Torrance-Sparrow, así como su aproximación por el modelo original de Torrance-Sparrow. Podemos observar en la simulación de estas dos curvas que están muy cerca si σ puede variar en $[0, 0.2]$ y α está en el intervalo $[0, 60^\circ]$ (condición necesaria para la simplificación del modelo de Torrance-Sparrow). Esto implica que el modelo esférico de Torrance-Sparrow puede considerarse como una aproximación al modelo de Torrance-Sparrow y por lo tanto también a la reflexión especular.

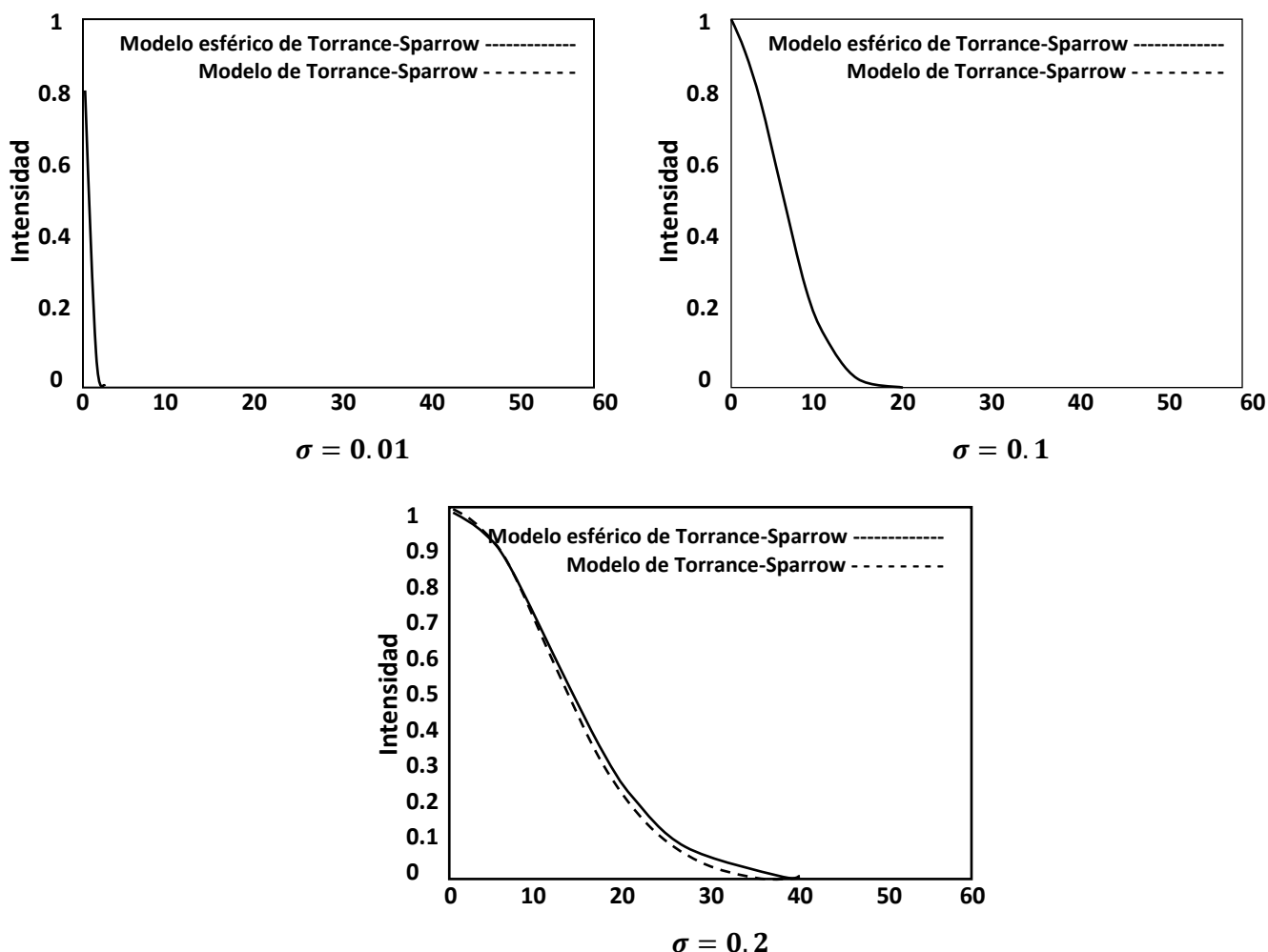


Fig. 1.2 Aproximación a la radiación de reflexión especular, para un σ fijo con respecto a las variaciones de α , por el modelo esférico Torrance-Sparrow (Línea continua), así como la aproximación por el modelo original Torrance-Sparrow (Línea punteada).



1.4 Revisión del Estado del Arte

El problema de obtener la ubicación 3D de fuentes de iluminación ha sido estudiado por varios autores [22, 23, 24]. Este problema se resuelve analizando las sombras que proyectan los objetos formulando modelos matemáticos que obtienen las coordenadas (X, Y, Z) de la fuente de luz como se puede ver en la figura 1.3.

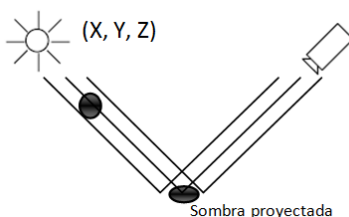


Fig. 1.3 Representación gráfica del problema que se resuelve.

Ken ji Hara y Konshino [22], proponen dos métodos para estimar las propiedades de reflectancia de la superficie de un objeto, así como la posición de la fuente de luz a partir de una imagen, sin la suposición de que la fuente de luz sea distante. En este método la entrada es una imagen real y el modelo geométrico en 3D de un objeto con reflexión especular. En el primer método la posición de la fuente de luz se calcula ajustando el componente difuso lambertiano, mientras se separa el componente especular utilizando un proceso iterativo. El segundo método es una extensión del primero, utilizando como entrada el componente especular de una imagen, este método recupera simultáneamente las propiedades de reflectancia y la posición de la fuente de luz.

En [23], Bo Hu y otros investigan la geometría de las fuente de luz y la proyección de las sombras, muestran explícitamente que no importa cuántas correspondencias objeto-sombra estén disponibles es imposible localizar una fuente de luz con una vista simple. Sin embargo, con más vistas la fuente puede ser localizada por triangulación. Para resolver el problema del establecimiento de correspondencias entre las imágenes de un objeto con tamaño extendido y la proyección de su sombra, prueban una línea de soporte. Dicho de una manera más simple, es una línea tangente de la región de la imagen del objeto y su sombra. Muestran un algoritmo eficiente de líneas de soporte y prueban que se pueden encontrar al menos dos líneas de soporte, La intersección de estas líneas dan la dirección de la fuente de luz.

Jorge López Moreno en [24] Presenta un algoritmo para determinar múltiples fuentes de luz, que no requiere medidas 3D sino únicamente imágenes. Para estimar el número de luces y su respectiva coordenada azimutal se analiza la variación de la intensidad a lo largo de la silueta del objeto. Mientras que para estimar el ángulo azimutal se utiliza la suposición de la silueta normalizada y la ecuación nominal de la luz difusa. Finalmente analizando la intensidad promedio en las áreas sombreadas se calcula la intensidad de la luz ambiental.



Además tenemos el método de *fuentes de luz múltiples y estimación de la propiedad de reflectancia basada en una mezcla de distribuciones esféricas* propuesto en [2], describe un método para estimar la iluminación de la escena y la propiedad de reflexión de un objeto a partir de una sola imagen. Este método obtiene como resultado el número de fuentes de luz en la escena y el parámetro de reflexión del objeto.

Mediante el componente de reflexión especular separado de la imagen de entrada, se representa la condición de iluminación como una mezcla finita de distribuciones Von Mises-Fisher (sec. 1.2.2) en la esfera unitaria sobre la base de una representación esférica de la reflexión especular. Entonces, se estiman los valores iniciales por resolver tanto la mezcla y el número de fuentes de luz con un marco de optimización de Estimación de Maximización. Por último, utilizando los resultados como las estimaciones iniciales, se resuelve un problema de optimización con el modelo original de la reflexión especular en coordenadas cartesianas.

Por su parte, el método de *estimación automática de la dirección de la fuente de luz proyectada* [6], presenta un algoritmo para estimar la dirección de la fuente de luz proyectada en una sola imagen. El requisito es que existe un segmento de un contorno de oclusión de un objeto con reflectancia Lambertiana de la superficie a nivel local en la imagen. El contorno de la oclusión de la forma del objeto puede ser determinado por la superficie perpendicular al vector de visión y se puede determinar por la dirección del borde de la imagen.

Por otro lado, el método de *la esfera de diferencia: una aproximación a la estimación de una fuente de luz*, propone estimar los parámetros de las fuentes de luz (luz ambiental, las fuentes de luz direccional, intensidad) [7]. Tomando en cuenta la distancia de las fuentes de luz al objeto, ya que las fuentes de iluminación de luz directa son más influyentes que las de luz indirecta, el patrón de calibración cuenta con dos esferas de referencia y un conducto de luz; se analizan los niveles de gris en los contornos de las superficies esféricas y se revisan las propiedades geométricas y fotométricas. Además, se demuestra la identificación por separado de múltiples fuentes de luz combinada y se facilita a través de un análisis de las curvas de niveles de gris en la esfera.

Finalmente el *método práctico para la estimación del punto de luz fuentes* presentado en [8] introduce un modelo general para el punto de vista de las fuentes y muestra como los parámetros de una fuente a una distancia finita se pueden estimar por la sombra de un objeto con una geometría conocida y reflexión Lambertiana. En los parámetros se estima incluir no solo la dirección sino también la ubicación de la fuente. Este último es muy similar al propuesto en esta tesis en cuanto a los resultados esperados, estimar la ubicación y la dirección de la fuente de iluminación a partir de un patrón de calibración.

La mayoría de los métodos anteriores requieren al menos dos imágenes o el uso de un patrón tridimensional. En este trabajo se propone un método que utiliza una sola imagen y un patrón plano para realizar el proceso de calibración geométrica.

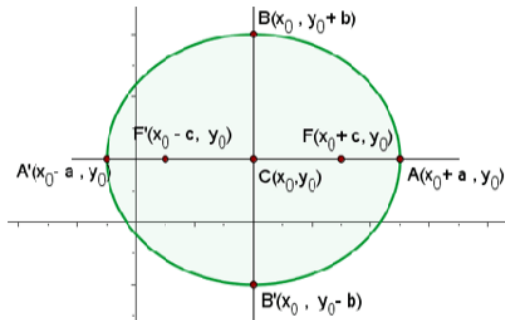


CAPÍTULO 2

CONCEPTOS PREVIOS DE GEOMETRÍA

2.1 ECUACIÓN GENERAL DE UNA ELIPSE

Si el centro de la elipse $C(X_0, Y_0)$ y el eje principal es paralelo al eje X , los focos de coordenadas $F(X_0 - c, Y_0)$ y $F'(X_0 + c, Y_0)$ entonces la ecuación de la elipse será:



$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \quad (\text{ec. 2.1})$$

Al quitar denominadores y desarrollar se obtiene, en general, una ecuación de la forma:

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0 \quad (\text{ec. 2.2})$$

Donde A y B tienen el mismo signo.

La elipse posee un eje mayor (de A a A') y un eje menor (de B a B'), la mitad de cada uno de estos ejes recibe el nombre de semieje.

Sobre el eje mayor existen dos puntos llamados Focos F_1 y F_2 .

Si F_1 y F_2 son dos puntos del plano y d es una constante mayor que la distancia entre F_1 y F_2 , un punto Q pertenecerá a la elipse si:

$$F_1Q + F_2Q = d = 2a \quad \text{Donde } a \text{ es el semieje mayor de la elipse.}$$

2.1.1 AJUSTE DE PUNTOS A ELIPSE

Para el ajuste de puntos a una elipse seguimos el método de Andrew Fitzgibbon[12]. Es un ajuste por mínimos cuadrados específico para elipses.

Con la normalización $4ac - 2b = 1$ se reduce al mínimo la distancia algebraica de los puntos de la elipse con la suma de los mínimos cuadrados, El método de ajuste funciona en elipses aun cuando los puntos no son estrictamente elípticos pero deben representar una elipse.



2.2 Producto Cruz

El producto cruz o producto de dos vectores es otro vector cuya dirección es perpendicular a los dos vectores. En la definición básica del producto cruz se utilizan determinantes de matrices [21].

Sean $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ dos vectores, no necesariamente diferentes en \mathbb{R}^3 , el producto cruz de \vec{u} con \vec{v} puede verse como una matriz de 3x3:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \quad (\text{ec. 2.3})$$

Resolviendo el determinante la expresión será:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = \mathbf{i}(u_2v_3 - v_2u_3) + \mathbf{j}(u_3v_1 - v_3u_1) + \mathbf{k}(u_1v_2 - v_1u_2) \quad (\text{ec. 2.4})$$

El vector del producto cruz queda de la siguiente forma:

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1) \quad (\text{ec. 2.5})$$

2.2.1 Propiedades del producto Cruz

- $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$
- $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$
- $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}$
- $c(\vec{u} \times \vec{v}) = (c\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (c\vec{v})$
- $\vec{0} \times \vec{u} = \vec{u} \times \vec{0} = \vec{0}$
- $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}$
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}$

Notas importantes:

El producto cruz no es conmutativo: en general $\vec{u} \times \vec{v} \neq \vec{v} \times \vec{u}$.

El producto cruz no es asociativo: en general $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) \neq (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$.



2.3 COORDENADAS DE PLÜCKER [9]

En geometría, las coordenadas de Plücker, presentadas por Julius Plücker en el siglo XIX, son una manera de asignar seis coordenadas homogéneas a cada línea en la proyección del espacio de proyección de 3 dimensiones, \mathbf{P}^3 , porque satisfacen una constante cuadrática, que establecen una correspondencia uno a uno entre el espacio de proyección de 4 dimensiones de líneas en \mathbf{P}^3 y los puntos en una cuadrática en \mathbf{P}^5 . Las coordenadas de Plücker son un predecesor y caso especial de las coordenadas de Grassmann y surgen de forma natural en el álgebra geométrica. Además, estas coordenadas han demostrado ser útiles para la graficación por computadora y también se puede extender a las coordenadas de los tornillos y las llaves en la teoría de la cinemática utilizada para el control de robots.

2.3.1 Intuición Geométrica

Una línea L en el espacio euclidiano de 3 dimensiones está determinada por dos puntos distintos por los que pasa o por dos planos diferentes que la contienen. Consideremos el primer caso: Con los puntos $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ y $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$, el desplazamiento del vector de \mathbf{x} a \mathbf{y} es distinto de cero porque los puntos son distintos y representa la dirección de la línea. Es decir, cada desplazamiento entre los puntos de L es múltiplo escalar de $\mathbf{d} = \mathbf{y} - \mathbf{x}$. Si una partícula física de la unidad de masa se moviera de \mathbf{x} a \mathbf{y} , habría un momento en el origen. El equivalente geométrico es un vector cuya dirección es perpendicular al plano que contiene L y el origen, y cuya longitud es igual a dos veces el área del triángulo formado por el desplazamiento y el origen. El tratamiento de los puntos en los desplazamientos desde el origen será: el momento es $\mathbf{m} = \mathbf{x} \times \mathbf{y}$, donde “ \times ” denota el producto cruz. El área del triángulo es proporcional a la longitud del segmento entre \mathbf{x} e \mathbf{y} , considerado como la base del triángulo, no se cambia por el desplazamiento de la base a largo de la línea, paralelo a sí mismo. Por definición, el vector momento es perpendicular a cada desplazamiento a lo largo de la línea, por lo que $\mathbf{d} \cdot \mathbf{m} = 0$, donde “ \cdot ” denota el producto escalar de vectores.

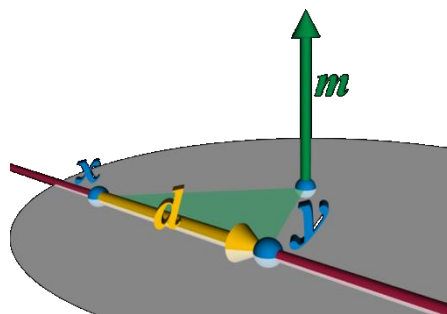


Fig. 2.1 Desplazamiento \mathbf{d} y momento \mathbf{m} de dos puntos en una línea.



Aunque ni \mathbf{d} ni \mathbf{m} por si solos son suficientes para determinar L , la pareja lo hace único hasta un común múltiplo escalar (distinto de cero) que depende de la distancia entre \mathbf{x} e \mathbf{y} . Es decir las coordenadas pueden ser consideradas coordenadas homogéneas para L .

$$(\mathbf{d}: \mathbf{m}) = (d_1: d_2: d_3: m_1: m_2: m_3) \quad (\text{ec. 2.6})$$

En el sentido de que todos los pares $(\lambda \mathbf{d}: \lambda \mathbf{m})$, para $\lambda \neq 0$, pueden ser producidos por los puntos de L y solo L , y cualquiera de estos pares determina una línea única, siempre y cuando \mathbf{d} sea distinto de cero y $\mathbf{m} \cdot \mathbf{d} = 0$. Además este enfoque se extiende para incluir los puntos, líneas y un plano “en el infinito”, de forma similar a la geometría proyectiva.

2.3.1.1 Ejemplos

Sea $\mathbf{x} = (2, 3, 4)$, $\mathbf{y} = (2, 1, 0)$. Entonces $(\mathbf{d}: \mathbf{m}) = (0: -2: -7: -7: 14: -4)$.

Por otra parte, las ecuaciones para los puntos \mathbf{x} de dos planos distintos que contiene L son:

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} \\ 0 &= \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{x} \end{aligned} \quad (\text{ec. 2.7})$$

Entonces sus respectivos planos son perpendiculares a los vectores \mathbf{a}, \mathbf{b} y la dirección de L debe ser perpendicular a ambas. Por lo tanto se puede establecer que $\mathbf{d} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$, que es distinto de cero debido a que \mathbf{a} y \mathbf{b} son distintos de cero y no son paralelos (Los planos son distintos y se cruzan). Si el punto \mathbf{x} satisface ambas ecuaciones del plano, este también cumple con la combinación lineal.

$$0 = \mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{x}) - \mathbf{b}(\mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{x}) = (\mathbf{ab} - \mathbf{ba}) \cdot \mathbf{x} \quad (\text{ec. 2.8})$$

Es decir, $\mathbf{m} = \mathbf{ab} - \mathbf{ba}$ es un vector perpendicular a los desplazamientos en los puntos de L desde el origen, esto es, un momento consistente con el vector \mathbf{d} previamente definido a partir de \mathbf{a} y \mathbf{b} .

Veamos otro ejemplo. Sea $a_0 = 2$, $\mathbf{a} = (-1, 0, 0)$ y $b_0 = -7$, $\mathbf{b}(0, 7, -2)$.

Entonces $(\mathbf{d}: \mathbf{m}) = (0: -2: -7: -7: 14: -4)$.

Aunque la definición algebraica habitual tiende a oscurecer la relación, $(\mathbf{d}: \mathbf{m})$ son las coordenadas de Plücker de L .



2.3.2 Definición Algebraica

2.3.2.1 Coordenadas Primarias

En un espacio de proyección de 3 dimensiones P^3 , sea L una línea que contiene puntos distintos, x e y con coordenadas homogéneas $(x_0: x_1: x_2: x_3)$ y $(y_0: y_1: y_2: y_3)$, respectivamente. Se definen las coordenadas de Plücker p_{ij} como:

$$p_{ij} = \begin{bmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{bmatrix} = x_i y_j - x_j y_i \quad (\text{ec. 2.9})$$

Esto implica $p_{ii} = 0$ y $p_{ij} = -p_{ji}$, reduciendo las posibilidades de solo seis cantidades independientes (de 4 elegir 2). Como hemos visto, la seis-tupla está determinada únicamente por L , hasta un factor escalar común distinto de cero.

$$(p_{01}: p_{02}: p_{03}: p_{23}: p_{31}: p_{12}) \quad (\text{ec. 2.10})$$

Por lo tanto las coordenadas Plücker de L pueden ser considerados como coordenadas homogéneas de un punto en un espacio proyectivo de 5 dimensiones, como se sugiere por la notación

Para ver estos hechos, sea M la matriz de 4×2 con las coordenadas del punto en forma de columnas.

$$M = \begin{bmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{bmatrix} \quad (\text{ec. 2.11})$$

La coordenada de Plücker p_{ij} es el determinante de filas i y j de M . Dado que x e y son puntos distintos, las columnas de M son linealmente independientes, M tiene rango 2. Sea M' una segunda matriz, con columnas x' e y' otro par de puntos distintos en L . entonces las columnas de M' son combinaciones lineales de las columnas de M , de modo que la matriz no singular Λ es de 2×2 .

$$M' = M\Lambda.$$

En particular las filas i y j de M y M' están relacionadas por:

$$\begin{bmatrix} x'_i & y'_i \\ x'_j & y'_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{00} & \lambda_{01} \\ \lambda_{10} & \lambda_{11} \end{bmatrix} \quad (\text{ec. 2.12})$$

Por lo tanto, el determinante de la matriz de 2×2 en la parte izquierda es igual al producto de los determinantes de las matrices de 2×2 en la parte derecha, el último de los cuales es un escalar fijo $\det \Lambda$. Además los seis subdeterminantes de 2×2 en M no pueden ser cero, porque el rango de M es 2.



2.3.2.2 Mapeo De Plücker

Denota el conjunto de todas las líneas (las imágenes lineales en \mathbf{P}^1) en \mathbf{P}^3 por $G_{1,3}$. De esta manera tenemos un mapeo.

$$\begin{aligned} \alpha: G_{1,3} &\rightarrow \mathbf{P}^5 \\ L &\mapsto L^\alpha, \end{aligned}$$

Donde

$$L^\alpha = (p_{01}:p_{02}:p_{03}:p_{23}:p_{31}:p_{12}) \quad (\text{ec. 2.13})$$

2.3.2.3 Coordenadas Duales

Alternativamente, Una línea puede ser descrita como la intersección de dos planos. Sea L una línea contenida en planos distintos a y b con coeficientes homogéneos $(a^0:a^1:a^2:a^3)$ y $(b^0:b^1:b^2:b^3)$, respectivamente. (La ecuación del primer plano es $0 = \sum_k a^k x_k$, por ejemplo.). La coordenada dual de Plücker p^{ij} es:

$$p^{ij} = \begin{bmatrix} a^i & a^j \\ b^i & b^j \end{bmatrix} = a^i b^j - a^j b^i \quad (\text{ec. 2.14})$$

Las coordenadas duales son convenientes en algunos cálculos, y estas son equivalentes a las coordenadas principales:

$$(p_{01}:p_{02}:p_{03}:p_{23}:p_{31}:p_{12}) = (p^{23}:p^{31}:p^{12}:p^{01}:p^{02}:p^{03})$$

Aquí, la igualdad entre los dos vectores en coordenadas homogéneas quiere decir que los números del lado derecho son iguales en el lado izquierdo hasta una escala de factor común λ . Específicamente, sea (i, j, k, l) una permutación par de $(0, 1, 2, 3)$, entonces. $p_{ij} = \lambda p^{kl}$.

2.3.2.4 Geometría

Para relacionar nuevamente la ayuda geométrica, tomamos $x_0 = 0$, como el plano en el infinito; por lo tanto las coordenadas de los puntos en el infinito no pueden normalizarse para que $x_0 = 1$. Entonces \mathbf{M} se convierte en:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{bmatrix} \quad (\text{ec. 2.15})$$

Y establece que $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ tenemos $\mathbf{d} = (p_{01}, p_{02}, p_{03})$ y $\mathbf{m} = (p_{23}, p_{31}, p_{12})$.

Con doble, tenemos $\mathbf{d} = (p_{23}, p_{31}, p_{12})$ y $\mathbf{m} = (p_{01}, p_{02}, p_{03})$.



2.3.3 Aplicaciones

Las coordenadas de Plücker permiten soluciones concisas a los problemas de líneas geométricas en el espacio de tres dimensiones, especialmente los relativos a la incidencia.

2.3.3.1 Cruce de Líneas

Dos líneas en P^3 pueden ser oblicuas o coplanarias y en este último caso, son coincidentes o se cruzan en un punto único. Si p_{ij} y p'_{ij} son las coordenadas de Plücker de dos líneas, entonces son coplanarios cuando $\mathbf{d} \cdot \mathbf{m}' + \mathbf{m} \cdot \mathbf{d}' = 0$, esto se muestra por:

$$0 = p_{01}p'_{23} + p_{02}p'_{31} + p_{03}p'_{12} + p_{23}p'_{01} + p_{31}p'_{02} + p_{12}p'_{03} = \begin{bmatrix} x_0 & y_0 & x'_0 & y'_0 \\ x_1 & y_1 & x'_1 & y'_1 \\ x_2 & y_2 & x'_2 & y'_2 \\ x_3 & y_3 & x'_3 & y'_3 \end{bmatrix} \quad (\text{ec. 2.16})$$

Cuando las líneas son oblicuas, el signo del resultado indica el sentido de cruce: positivo si un retroceso derecho toma $LenL'$ de lo contrario es negativo.

2.3.3.2 Unión de Líneas

En el caso de que dos líneas son coplanarias, pero no en paralelo el plano en común tiene la ecuación.

$$0 = (\mathbf{m} \cdot \mathbf{d}') + (\mathbf{d} \times \mathbf{d}') \cdot \mathbf{x} \quad \text{Donde } \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \quad (\text{ec. 2.17})$$

La misma perturbación va a destruir la existencia de un plano común, y casi el paralelismo de las líneas causara dificultades numéricas en la búsqueda de un plano, incluso si existe.

2.3.3.3 Intersección de Líneas

Considerando la líneas que contiene al punto (x_0, y_0, z_0) con vector de dirección (a, b, c) . La solución óptima al problema de encontrar el punto de intersección entre varias líneas es la solución al siguiente problema de mínimos cuadrados:

$$\begin{bmatrix} a_1' & b_1' & c_1' \\ a_1'' & b_1'' & c_1'' \\ a_2' & b_2' & c_2' \\ a_2'' & b_2'' & c_2'' \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n' & b_n' & c_n' \\ a_n'' & b_n'' & c_n'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -d_1' \\ -d_1'' \\ -d_2' \\ -d_2'' \\ \vdots \\ -d_n' \\ -d_n'' \end{bmatrix} \quad (\text{ec. 2.18})$$



Las coordenadas de Plücker permiten construir los planos perpendiculares que están descritos en la expresión anterior como sigue:

Dados los puntos \mathbf{P} y \mathbf{Q} sobre una línea con vector de dirección $\mathbf{L} = (a, b, c)$, entonces $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}$ y $\mathbf{P} \times \mathbf{Q} \times \mathbf{L}$ son vectores que pueden ser normalizados para obtener (a', b', c') y (a'', b'', c'') .

Así, es posible encontrar cada d' a partir de $a'xi + b'yi + c'zi + d' = 0$, y de forma similar d'' .



CAPÍTULO 3

PROCESAMIENTO Y ANÁLISIS DE IMÁGENES

El primer paso es la adquisición de la imagen. Este paso se realiza normalmente utilizando una cámara fotográfica o de video, sin embargo en este trabajo se realiza utilizando un sistema de CAD[18]. Después de obtener la imagen, el siguiente paso es su procesamiento, su función es mejorar la imagen de manera que se incremente la oportunidad de éxito de los siguientes procesos. El pre-procesamiento típicamente trata con técnicas para realzar el contraste y remover ruido. El siguiente paso es la segmentación; particiona la imagen de entrada en sus partes constituyentes u objetos. En términos de reconocimiento el rol de la segmentación es extraer caracteres individuales de la imagen. La selección de características, trata con la extracción de los rasgos que resulta en alguna información cuantitativa de interés o características que son básicas para diferenciar una clase de objetos con otra. El último estado comprende al reconocimiento y la interpretación. El reconocimiento es el proceso que etiqueta, o asigna un nombre, a un objeto basándose en la información que proveen sus descriptores. La interpretación involucra la asignación de significado a un conjunto de objetos reconocidos. Es importante hacer notar que los resultados del procedimiento pueden verse en la salida de cualquier paso, también es importante mencionar que, no todos los módulos, son siempre necesarios[3].

3.1 PROCESAMIENTO DE IMÁGENES

El procesamiento de imágenes tiene como objetivo mejorar el aspecto de las imágenes y hacer más evidentes en ellas ciertos detalles que se desean hacer notar. La imagen puede haber sido generada, fotográficamente, electrónicamente, etc.[4].

3.1.1 Detección de Bordes

Los bordes de una imagen digital se pueden definir como transiciones entre dos regiones de niveles de gris significativamente distintos. Suministran información valiosa sobre las fronteras de los objetos y puede ser utilizada para segmentar la imagen, reconocer objetos, etc. [5].

La mayoría de las técnicas para detectar bordes emplean operadores locales basados en distintas aproximaciones discretas de la primera y segunda derivada de los niveles de grises de la imagen.

3.1.2 Operaciones Basadas en la Primera Derivada (Gradiente)

La derivada de una señal continua proporciona las variaciones locales con respecto a la variable, de forma que el valor de la derivada es mayor cuanto más rápidas son estas variaciones [5].



En el caso de funciones bidimensionales $f(x, y)$, el gradiente $\nabla f(x, y)$ es un vector que apunta en la dirección de la máxima variación de $f(x, y)$ y cuya magnitud es proporcional a dicha variación. El gradiente de una función $f(x, y)$ se define como:

$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (\text{ec. 3.1})$$

Su magnitud está dado por:

$$\|[\nabla f(x, y)]\| = \sqrt{\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right)^2} \quad (\text{ec. 3.2})$$

Y su argumento es:

$$\theta = \arctan \frac{\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}}{\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}} \quad (\text{ec. 3.3})$$

En el caso bidimensional discreto, las distintas aproximaciones del operador gradiente se basan en diferencias entre los niveles de grises de la imagen. La derivada parcial $f_x(x, y)$ (gradiente de fila $G_F(i, j)$) puede aproximarse por la diferencia de pixeles adyacentes de la misma fila.

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \approx \nabla_x f(x, y) = f(x, y) - f(x - 1, y) \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{ec. 3.4})$$

La discretización del vector gradiente de columna en el eje $Y(G_C(i, j))$, será:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \approx \nabla_y f(x, y) = f(x, y) - f(x, y - 1) \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{ec. 3.5})$$

El gradiente de la fila G_F y de la columna G_C en cada punto se obtiene mediante la convolución de la imagen con las mascarar H_F y H_C , esto es:

$$\begin{aligned} G_F(i, j) &= F(i, j) \otimes H_F(i, j) \\ G_C(i, j) &= F(i, j) \otimes H_C(i, j) \end{aligned} \quad (\text{ec. 3.6})$$

La magnitud y orientación del vector gradiente suele aproximarse por la expresión:

$$|G(i, j)| = \sqrt{G_F^2 + G_C^2} \approx |G_F(i, j)| + |G_C(i, j)| \quad (\text{ec. 3.7})$$

A continuación veremos dos de los operadores más utilizados para calcular la derivada de la imagen.



3.1.2.1 Operadores Prewitt y Sobel

Ambos operadores pueden formularse de forma conjunta con las siguientes mascarar de convolución.

Gradiente Fila	$\frac{1}{2 + K}$ <table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>1</td><td>0</td><td>-1</td></tr> <tr><td>K</td><td>0</td><td>-K</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>-1</td></tr> </table>	1	0	-1	K	0	-K	1	0	-1	Gradiente Columna	$\frac{1}{2 + K}$ <table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>-1</td><td>-K</td><td>-1</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>K</td><td>1</td></tr> </table>	-1	-K	-1	0	0	0	1	K	1
1	0	-1																			
K	0	-K																			
1	0	-1																			
-1	-K	-1																			
0	0	0																			
1	K	1																			

En el operador Prewitt ($K = 1$) se involucra a los vecinos de las filas y las columnas adyacentes para proporcionar mayor inmunidad al ruido.

Se puede expresar como:

$$\nabla f \approx |(z_7 + z_8 + z_9) - (z_1 + z_2 + z_3)| + |(z_3 + z_6 + z_9) - (z_1 + z_4 + z_7)| \quad (\text{ec. 3.8})$$

El operador Sobel ($K = 2$), se supone que es más sensible a los bordes diagonales que el Prewitt aunque en la práctica ha poca diferencia entre ellos.

$$\begin{aligned}
 G_x &= (z_7 + 2z_8 + z_9) - (z_1 + 2z_2 + z_3) \\
 G_y &= (z_3 + z_6 + z_9) - (z_1 + 2z_4 + z_7)
 \end{aligned}
 \quad (\text{ec. 3.9})$$

3.1.3 Derivada Gaussiana

Existen algoritmos especializados para obtener la derivada de una imagen que son robustos al ruido ocasionado por inestabilidad eléctrica de los sensores que convierten la luminosidad en voltaje cuantizado como la derivada Gaussiana y el Laplaciano [13, 21].

La función Gaussiana tiene la siguiente expresión:

$$f(x) = Ne^{-ax^2} \quad (\text{ec. 3.10})$$

Donde N es una constante de normalización que depende de a pero no de x . Hay varias posibilidades para el exponente a . De la forma estándar $a = \frac{1}{2\sigma^2}$.

La primera derivada de Gauss tiene la forma:

$$f(x) = -2a(x)e^{-ax^2} \quad (\text{ec. 3.11})$$

Y la segunda derivada tendrá la siguiente forma:

$$f(x) = 2a(2ax^2 - 1)e^{-ax^2} \quad (\text{ec. 3.12})$$



Las figura 3.1 muestra las cuatro primeras derivada de la función Gaussiana con $N = \sigma = 1$.

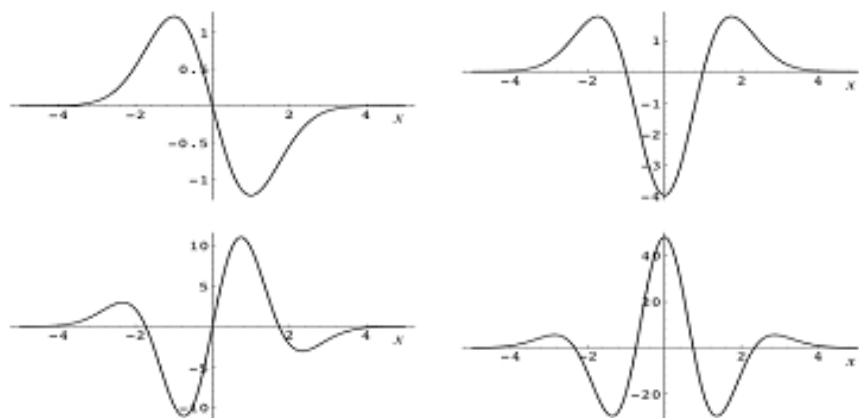


Fig. 3.1 Primeras cuatro derivadas Gaussianas

3.2 OPERADORES MORFOLÓGICOS

Las operaciones morfológicas pueden emplearse confines variados, como puede ser, la detección de bordes, segmentación, y realce. Con base a las operaciones morfológicas, se pueden construir filtros morfológicos que pueden utilizarse en lugar de los filtros lineales estándar. Mientras que los filtros lineales suelen distorsionar la forma geométrica subyacente de la imagen, los morfológicos la dejan intacta [10].

Toda operación morfológica es el resultado de una o más operaciones de conjuntos (unión, Intersección, complemento,...) donde intervienen dos conjuntos A, B , ambos subconjuntos de un conjunto espacio Z . De los dos subconjuntos, B recibe el nombre de elemento estructurante que, para operar con A , se desplazará a través del espacio Z .

3.2.1 TRANSFORMACIONES MORFOLÓGICAS ELEMENTALES

El objetivo de las transformaciones morfológicas es la extracción de estructuras geométricas en los conjuntos sobre los que opera, mediante la utilización de otro conjunto de forma conocida denominado elemento estructurante. El tamaño y forma de este elemento se escoge, a priori, de acuerdo la morfología del conjunto sobre el que va a interaccionar y de acuerdo a la extracción de formas que se desean obtener [19].



3.2.1.1 Dilatación

La dilatación es una transformación morfológica que combina dos conjuntos usando la suma vectorial de elementos de un conjunto.

$$A \oplus B = \{a + b : a \in A \text{ y } b \in B\}$$

O bien $x \in A \oplus B \Leftrightarrow x = a + b, a \in A, b \in B$ (ec. 3.13)

Es decir, el conjunto de todos los posibles vectores suma de pares de elementos, uno perteneciente a A y el otro a B (ver figura 3.2).

Ejemplo: $A = \{(0,1), (1,1), (2,1), (2,2), (3,0)\}$ $B = \{(0,0), (0,1)\}$ $A \oplus B = \{(0,1), (1,1), (2,1), (2,2), (3,0), (0,2), (1,2), (2,2), (2,3), (3,1)\}$

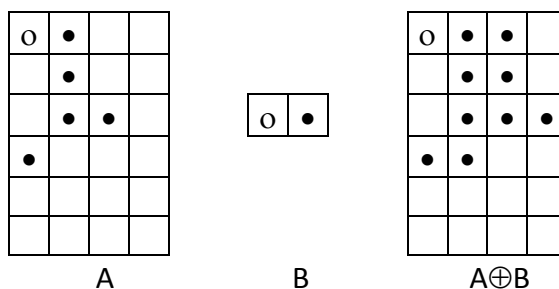


Fig. 3.2 Ilustración grafica de la operación de dilatación aplicando el elemento estructurante B en A.

Ejemplo: Dilatación con un elemento estructurante circular, con el origen en el centro del mismo (ver figura 3.3).

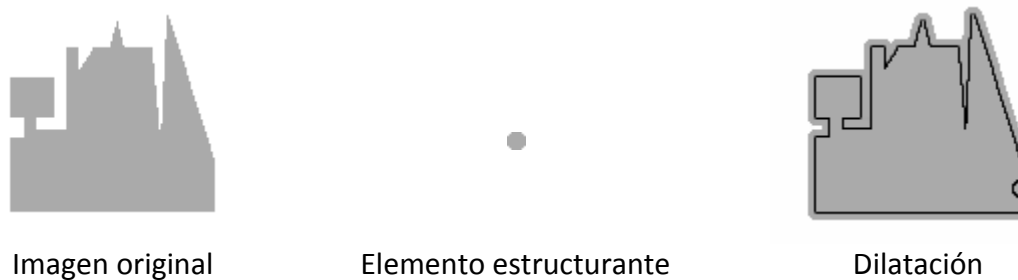


Fig. 3.3 Ejemplo de la dilatación con el elemento estructurante B en una imagen con tonos de gris.



3.2.1.2 Erosión

Es la transformación que combina dos conjuntos usando la resta vectorial de elementos de conjuntos. Si A y B son conjuntos en el espacio euclidiano de dimensión N , entonces la erosión de A por B es el conjunto de todos los elementos x para los cuales $x + b \in A$, para todo $b \in B$.

$$\begin{aligned}
 ABB &= \{x \in E^N / x + b \in A \text{ para todo } b \in B\} \\
 \text{O bien, } ABB &= \{x \in E^N / (B)_x \subseteq A\}
 \end{aligned}
 \tag{ec. 3.14}$$

Es decir, son los puntos x para los cuales la traslación de B por x está contenida en A . La utilidad de esta transformación se aprecia mejor con la segunda definición (ver figura 3.4).

Ejemplo: $A = \{(1,0), (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,1), (3,1), (4,1), (5,1)\}$
 $B = \{(0,0), (0,1)\}$, $ABB = \{(1,0), (1,1), (1,2), (1,3), (1,4)\}$

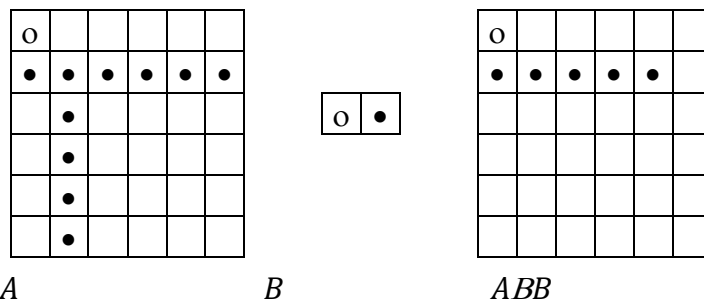


Fig. 3.4 Ilustración gráfica de la operación de erosión aplicando el elemento estructurante B en A.

Ejemplo: Erosión con un elemento estructurante circular, con el origen en el centro del mismo (ver figura 3.5).

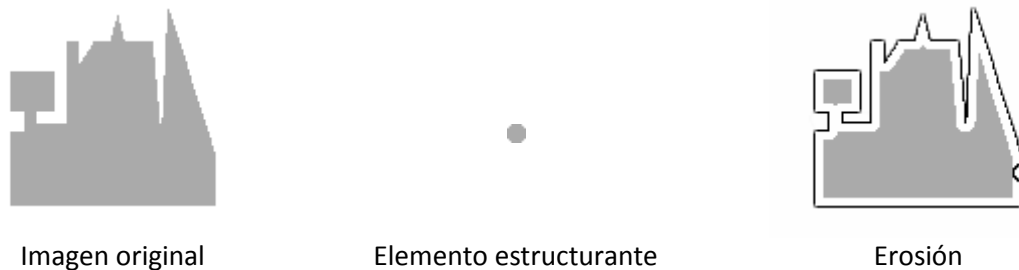


Fig. 3.5 Ejemplo de la erosión con el elemento estructurante B en una imagen con tonos de gris.



3.2.1.3 Cerradura

Realizar una cerradura por un elemento estructurante con forma de disco, suaviza el contorno, une roturas angostas y golfos delgados, eliminando pequeños agujeros, y completa espacios en el contorno. La propiedad más saliente de estos filtros es que son idempotentes, es decir, la aplicación consecutiva de una cerradura no cambia el resultado de la primera aplicación (ver figura 3.6).

$$A \cdot B = A^B = (A \oplus B) \ominus B.$$

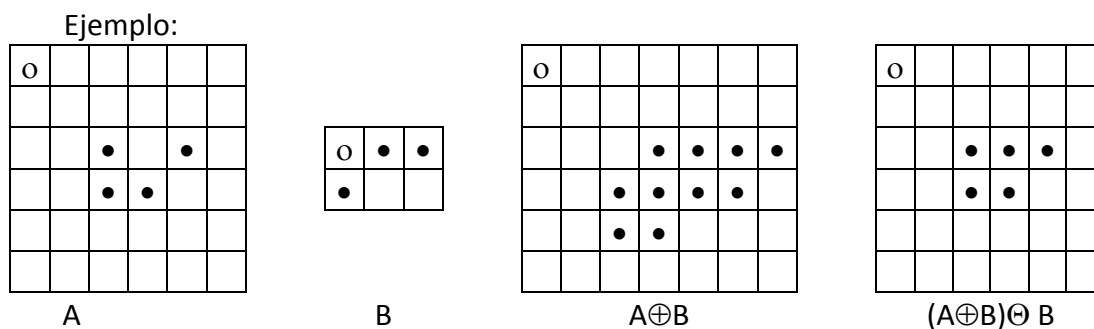


Fig. 3.6 Ilustración gráfica de la operación de cerradura aplicando el elemento estructurante B en A.

3.2.1.4 Shrink

Es un caso particular de la operación de erosión, su función es adelgazar objetos además de eliminar ruido de sal (fondo negro) o pimienta (fondo blanco) [11] (ver figura 3.7).

Se denomina Shrink al efecto que tiene la erosión sobre una imagen binaria. Si se erosiona una imagen binaria un número suficiente de veces, la imagen desaparecerá por completo, si se empleara el mínimo elemento estructurante, en la última interacción el elemento tendría las mismas dimensiones de los elementos de la imagen y desaparecería con la operación.

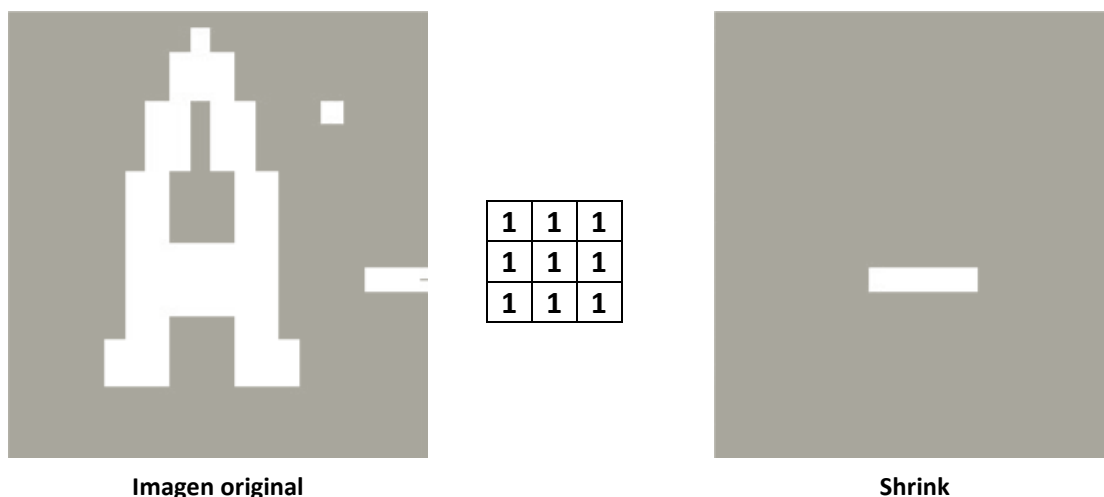


Fig. 3.7 Ejemplo de la operación Shrink y como elemento estructurante una máscara de 3x3, en una imagen con tonos de gris.



CAPÍTULO 4

ALGORITMO PROPUESTO: CALIBRACIÓN DE FUENTES DE ILUMINACIÓN

4.1 ALGORITMO DE DETECCIÓN DE CENTROS PARA ELIPSES

En esta sección se describe el algoritmo desarrollado para detectar los centros de las elipses en la imagen.

El primer paso es la obtención de la imagen (sintética o real) para esto se arma el sistema de calibración de fuente con los elementos necesarios como se muestra en la figura 4.1 una cámara calibrada, la fuente de iluminación, y el patrón de calibración diseñado.

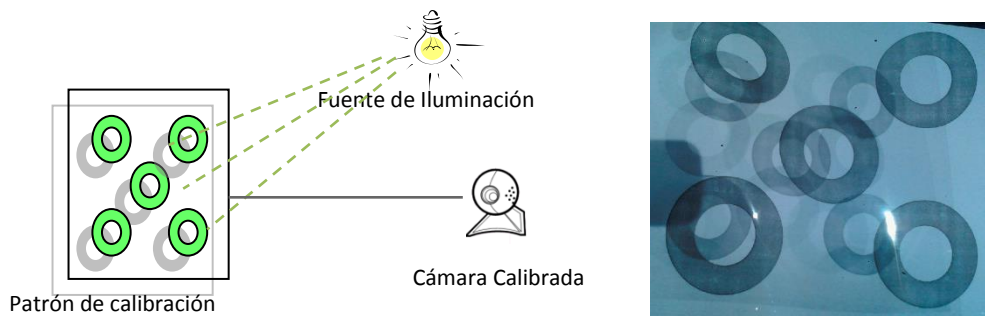


Fig. 4.1 Sistema de calibración de Fuente(izquierda), Vista del patrón de calibración

El patrón de calibración está formado por cinco elipses de color verde de tamaño conocido impresas en un acetato. Este patrón se colocara sobre una superficie plana de color blanco donde será proyectada la sombra de los elipses verdes, a una distancia conocida (para la experimentación se colocó a 3 cm).

Una vez que se ha obtenido la imagen se debe hacer un pre-procesamiento, la imagen será segmentada, tomando por un lado como región de interés solo a las sombras de las elipses, y a continuación la región de interés serán las elipses verdes para procesarlas por separado y así obtener los centros de cada elipse.

Después de ser procesadas las imágenes por separado y obtener los centros de cada elipse en la sec. 4.3 se explicara la relación de las elipses verdes con sus sombras y se traza una línea imaginaria pasando por los centros de las elipses, el punto de intersección entre las líneas es donde se encuentra la fuente de iluminación, esto se explicará con más detalle en dicha sección.



4.1.1 Proyección del Histograma

El histograma de la imagen es la representación gráfica de la distribución del número de pixeles distintos de cero en la imagen, esto indica en que área de la imagen encontraremos una elipse.

Para obtener el histograma se hace una suma pixel a pixel por cada columna de la imagen el resultado se almacena en un vector, en este caso llamado proyecciones por columna, de la misma forma se hace con las filas [20].

En los vectores de proyección se buscan los puntos cercanos a cero donde se observa un cambio de intensidad, a estos puntos los llamaremos mínimos, donde encontremos un mínimo sabemos que termina una elipse y es posible que comienza otra, si dos o más mínimos se encuentran muy cercanos se toma el primer mínimo que se encontró, este procedimiento se realiza para establecer las regiones que se explicaran con más detalle en la sección 4.1.2.

En la figura 4.2 se muestra el histograma de la imagen (proyección por filas en verde y proyección por columnas en azul), también son mostrados los mínimos (círculos rojos).

CÓDIGO EN MATLAB

```
ProyeccionColumnas=sum(ImagenCirculosNegros);  
ProyeccionFilas=sum(ImagenCirculosNegros');  
MinimosCols=EncontraMinimos(ProyeccionColumnas,5);  
MinimosRows=EncontraMinimos(ProyeccionFilas,5);
```

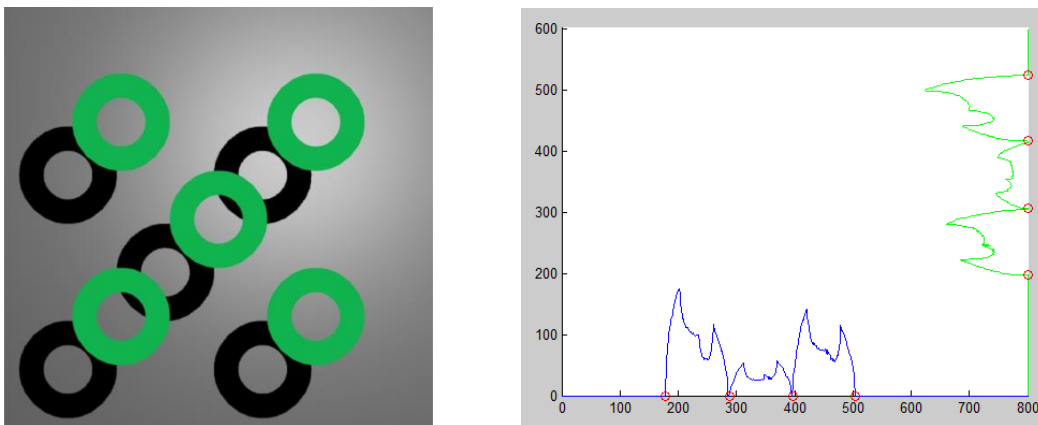


Fig. 4.2 Imagen sintéticautilizada para pruebas del desarrollo del proyecto (izquierda), Histograma de Imagen sintéticas(derecha), Proyección de Columnas en Azul y de Filas en Verde, Mínimos en rojo.



4.1.2 Detección de Regiones Probables con Elipses

En la imagen que se está procesando se delimitarán las regiones donde se encontrarán muy probablemente elipses, esto es para que se puedan analizar de manera independiente las elipses además de descartar el área donde no exista información de interés, esto agilizará el análisis de la imagen.

Para este paso se toman los mínimos encontrados en la sección anterior y se hace una intersección de los mínimos de las filas y los mínimos de las columnas, con esto delimitamos nuestras posibles regiones de interés.

En la figura 4.3 se muestran con líneas de color azul las regiones detectadas en la imagen, se puede observar que se han marcado las regiones de interés donde encontramos una elipse así como regiones vacías.

En secciones posteriores se trabajará con las regiones de interés encontradas y las regiones vacías serán ignoradas.

CÓDIGO EN MATLAB

```
X1=[MinimosCols(i),MinimosCols(i)];  
X2=[MinimosCols(i+1),MinimosCols(i+1)];  
X3=[MinimosCols(i),MinimosCols(i+1)];  
Y1=[MinimosRows(j),MinimosRows(j+1)];  
Y2=[MinimosRows(j),MinimosRows(j)];  
Y3=[MinimosRows(j+1),MinimosRows(j+1)];
```

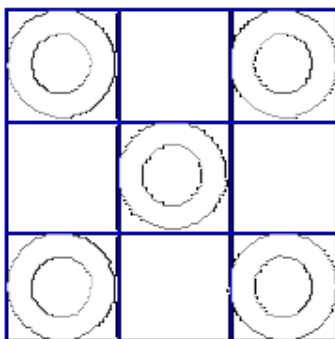


Fig. 4.3 Detección de probables regiones con elipses



4.1.3 Selección del Borde de las Elipses

Una vez detectadas las regiones de interés estudiaremos las elipses de la imagen. Como se revisó en el cap. 3. Buscamos que el algoritmo reconozca las elipses verdes y sus sombras. Para un mejor procesamiento el ancho de la elipse debe de ser de un pixel, para extraer los parámetros de la elipse estudiados en la sección 2.7 (centro, eje mayor, eje menor). Por lo general las sombras de las elipses no se ven completas en la imagen y al extraer el borde de la elipse se genera ruido en la imagen por lo que se aplican las operaciones morfológicas Cap. 3.

Con las transformaciones morfológicas se adelgaza la elipse hasta tener el ancho deseado además de eliminar ruido que pueda ser confundido como parte de la elipse por el sistema.

En la fig. 4.4 ala imagen original (a) se le aplica la transformación morfológica cerradura (b), después se aplica la transformación Shrink (c), a continuación la transformación de erosión (d) y finalmente después de aplicar nuevamente Shrink, podemos ver los puntos que pertenecen a la elipse con ancho de un pixel en (e). Con estos puntos podemos obtener los parámetros de la elipse sec. 4.1.4.

CÓDIGO EN MATLAB

```
imagen1=ImagenCirculosNegros;  
imagenCerrada=bwmorph(imagen1,'close');  
imagenFin=bwmorph(imagenCerrada,'shrink',N );  
imagenFin2=bwmorph(imagenFin,'erode' );  
imagenFin3=bwmorph(imagenFin2,'shrink',N );  
figure(2); imagesc(imagenFin3)
```

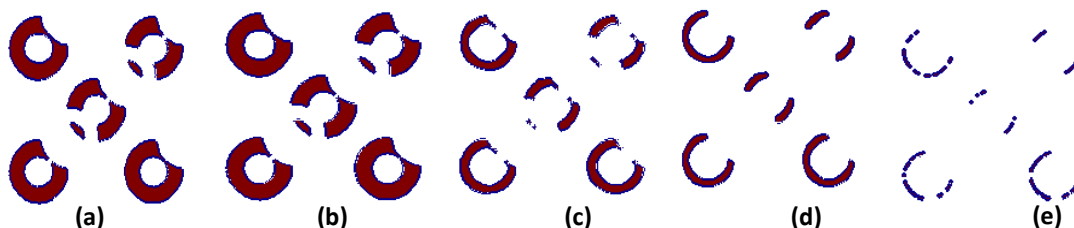


Fig. 4.4 Selección del borde de las elipses utilizando Operaciones Morfológicas (cerradura, Shrink, Erosión, Shrink).



4.1.4 Cálculo De Los Parámetros De La Elipse

Para el cálculo de los parámetros de la elipse empleamos la técnica denominada **Direct Least Square Fitting of Ellipses [12]**, que permite obtener las elipses a partir de una determinada distribución de puntos. De esta manera generamos elipses con aproximación en tamaño y orientación a los puntos de las elipses de la imagen de entrada, esta técnica se basa en teoría de minimización de distancia algebraica conocido también como factor discriminante. $4ac - 2b^2 = 1$

Se envían los puntos encontrados en la sección anterior a la función que llamamos ajustar elipse. Para calcular el centro de la elipse, el eje mayor y eje menor. Esta función se aplica a las elipses verdes en la imagen que pertenecen al patrón de calibración y a sus respectivas sombras. El resultado de la función EF2 es almacenado en una matriz llamada coeficientes.

En la figura 4.5 están ilustrados los parámetros de la elipse, los centros en verde y los ejes en azul.

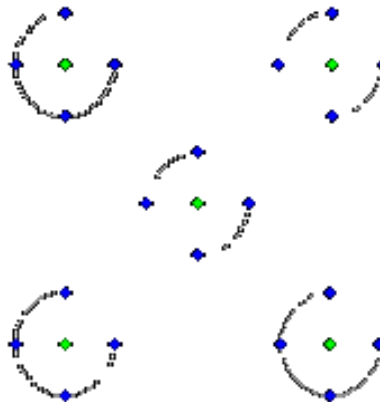


Fig. 4.5 Parámetros de la Elipse
Centros (Verde), Ejes mayor y menor (Azul)

CÓDIGO EN MATLAB

```
[COEFICIENTES]=calcula_region(nuev,MinimosCols,MinimosRows);  
for i=1:size(COEFICIENTES,2)  
    figure(2); hold on  
    plot(COEFICIENTES(1,i),COEFICIENTES(2,i),'.g');  
    plot(COEFICIENTES(1,i)+COEFICIENTES(3,i),COEFICIENTES(2,i),'.b');  
    plot(COEFICIENTES(1,i)-COEFICIENTES(3,i),COEFICIENTES(2,i),'.b');  
    plot(COEFICIENTES(1,i),COEFICIENTES(2,i)+COEFICIENTES(4,i),'.b');  
    plot(COEFICIENTES(1,i),COEFICIENTES(2,i)-COEFICIENTES(4,i),'.b');  
end
```



4.2 CALCULO DE LA POSICIÓN DE LA FUENTE DE ILUMINACIÓN

Una vez que se conocen los parámetros de las elipses en específico los centros. Con las coordenadas de Plücker (ver sec. 2.1) resolveremos el problema planteado, de encontrar la posición y dirección de la fuente de iluminación.

Para esto se busca el punto de intersección entre las líneas que pasan por los centros de las elipses verdes y su respectiva sombra.

La figura 4.6 ilustra las líneas imaginarias que pasan por los centros de las elipses y el punto donde se interceptan, será la posición de la fuente de iluminación.

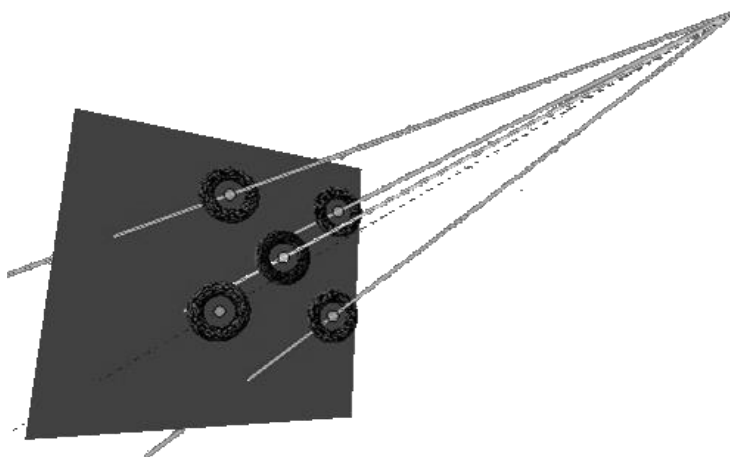


Fig. 4.6 Posición de la fuente de iluminación

4.2 DISCUSIÓN

En esta sección se describieron los algoritmos de procesamiento de imágenes, que permiten obtener el centro de cada una de las elipses que se encuentran grabadas en el patrón de calibración y las que se generan cuando se proyecta su sombra

A partir de esta información se describió también el procedimiento que permite obtener la posición de la fuente de iluminación. Una suposición importante, para obtener el resultado final, es que la cámara que observa la escena se encuentra calibrada geométricamente o como en ese caso (por ser una cámara virtual) los parámetros de proyección son conocidos.

En el siguiente capítulo se mostraran los resultados obtenidos.



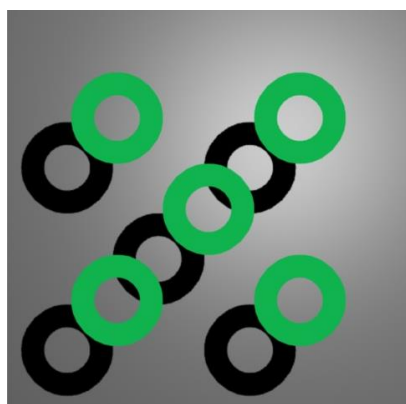
CAPÍTULO 5

RESULTADOS

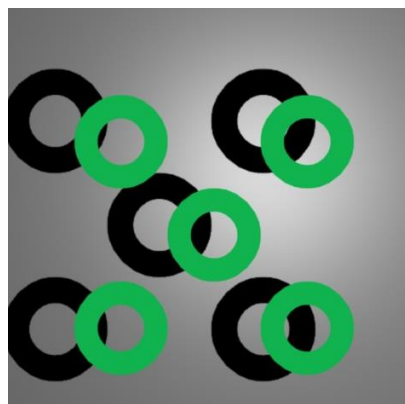
BANCO DE IMÁGENES

Para evaluar el rendimiento de los algoritmos desarrollados se generaron imágenes sintéticas modelando un patrón de calibración en un sistema de CAD (Blender [15]). El uso de estas imágenes permitirá agilizar el desarrollo del sistema detectando rápidamente errores sistemáticos de la implementación. Además, el conocer los valores reales de los parámetros que dan origen a las imágenes permite corroborar la exactitud de los resultados.

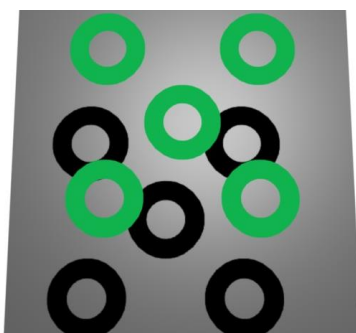
En la figura 5.1 se muestra el banco de imágenes utilizado durante la evaluación del sistema variando la posición de la cámara la fuente de iluminación con respecto al patrón de calibración.



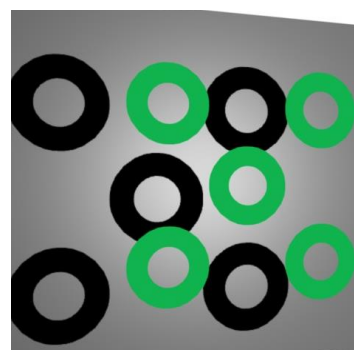
a) Cámara perpendicular, fuente de iluminación arriba derecha.



b) Cámara perpendicular, fuente de iluminación centro derecha.



c) Camara abajo, fuente de iluminacion arriba centro



d) Camara derecha, fuente de iluminacion al centro

Fig. 5.1 Imágenes sintéticas generadas en Blender para la evaluación del algoritmo propuesto.



Del banco de imágenes anterior con la imagen a) fue probado el desarrollo del proyecto. Los resultados del proceso de segmentación para extraer los contornos de cada una de las elipses se pueden apreciar en la figura 5.2.

Las imágenes siguientes permiten observar los resultados del algoritmo de segmentación de la figura 5.1.

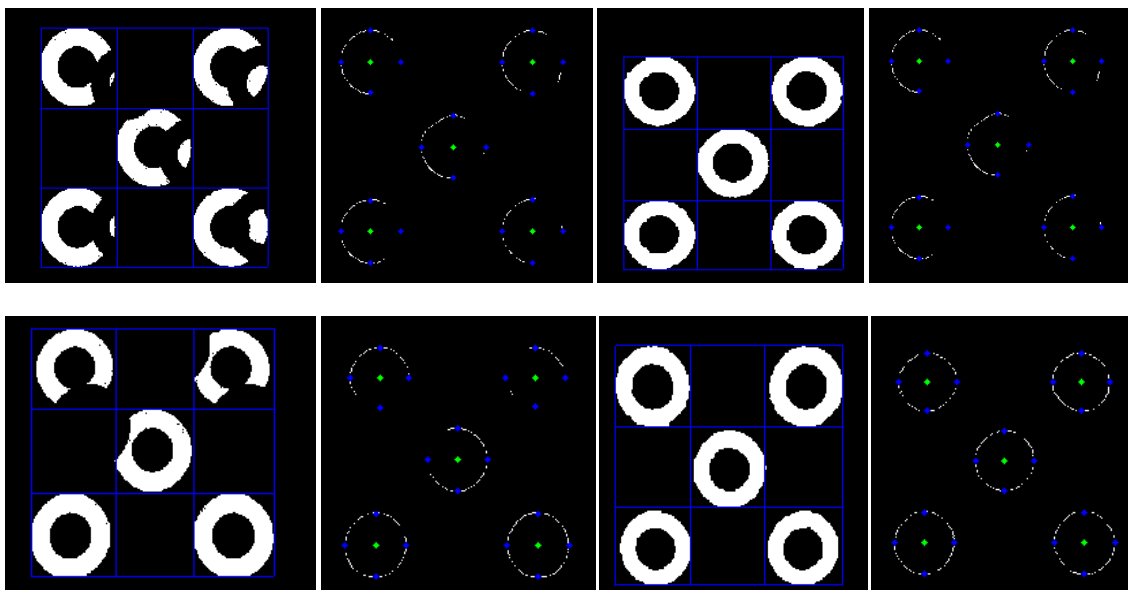


Fig. 5.2 Resultados del procesamiento digital de imágenes para obtener los bordes de las elipses



TABLA DE RESULTADOS

Después de aplicar el algoritmo de ajuste de los puntos del borde de las elipses se obtienen las coordenadas en pixeles de cada una de ellas. Los resultados se pueden observar en la tabla 1.

Los resultados para las elipses que se generan por la proyección de sombras son similares a los de la tabla 1.

Elipse	Elipses Grabadas en el patrón			Elipses generadas por la sombra		
	X	Y	Z	X	Y	Z
1	231.30	250.80	100	291.08	291.37	0
2	450.36	250.62	100	510.09	190.99	0
3	340.93	359.97	100	400.91	300.54	0
4	231.39	469.48	100	291.37	409.91	0
5	450.06	469.59	100	509.87	409.74	0

Tabla 1. Coordenadas del centro de las elipses obtenidas mediante el procesamiento de imágenes y la solución de sistemas de ecuaciones lineales para las elipses del patrón de calibración.

Resolviendo el sistema de ecuaciones lineales de la ecuación 2.18 se obtiene que la posición de la fuente de iluminación está ubicada en las coordenadas (2438.1, -2357.0, 0489.7).

Finalmente a partir de la información anterior se pueden extraer algunos de los valores que definen la posición del plano donde se proyectan las sombras y del patrón de calibración con respecto a la cámara y de la fuente de iluminación con respecto al patrón de calibración. Algunos de estos parámetros no fueron calculados porque se requiere un sistema de cámaras estereoscópico calibrado lo cual quedo como trabajo futuro.



CAPÍTULO 6

CONCLUSIONES

6.1 Conclusiones

- En este trabajo se diseñó un patrón de calibración geométrico plano para obtener la posición de una fuente iluminación.
- La posición de la fuente de iluminación recuperada se obtiene con una precisión de decimas de milímetro.
- El método calibración propuesto utiliza solo una imagen para obtener la posición de la fuente.
- Se integraron herramientas del procesamiento digital de imágenes y del álgebra lineal para la solución del problema.

6.2 Trabajo Futuro

- Evaluación del algoritmo propuesto con imágenes reales.
- Programar un método de optimización no lineal para aumentar la precisión.
- Extender el método para calibrar varias de iluminación en una sola toma.
- Evaluar el algoritmo de calibración propuesto en un sistema estéreo con cámaras geoméricamente calibradas.



BIBLIOGRAFÍA

[1] Alfredo Weitzenfeld, Gráfica: Iluminación y Sombreado, Departamento Académico de Computación - Instituto Tecnológico Autónomo de México.

[2] Kenji Hara, Ko Nishino, Katsushi Ikeuchi, Multiple Light Sources and Reflectance Property Estimation based on a Mixture of Spherical Distributions- Kyushu University, Drexel University, The University of Tokyo.2005.

[3] Luis Gerardo de la Fraga, Procesamiento Digital de Imágenes, Departamento de Computación en el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. 2001.

[4] Daniel Malacara, Óptica tradicional y moderna, Ciencia para todos, 1997.

[5] Silvia Satorres Martínez, Detección de Bordes en una imagen, Área de ingeniería de sistemas y automática, Universidad de Jaén, España, 2006.

[6] Peter Nillius, Jan-Olof Eklundh, *Automatic Estimation of the Projected Light Source Direction*, Computational Vision & Active Perception Laboratory (CVAP), Department of Numerical Analysis and Computing Science, Royal Institute of Technology (KTH), S-100 44 Stockholm, Sweden, 2002.

[7] Takeshi Takai, Atsuto Maki, Koichiro Niinuma, Takashi Matsuyama, *Difference phere: An Approach to NearLight Source Estimation*, Graduate School of Informatics, Kyoto University, Yoshida-Honmachi, Sakyo-ku, Kyoto 606-8501, Japon. 2009.

[8] Martin Weber, Roberto Cipolla, *A Practical Method for Estimation of Point Light-Sources*, Department of Engineering, University of Cambridge, CB2 1PZ, UK. 2001

[9] http://en.wikipedia.org/wiki/Plücker_coordinates

[10] Francisco Gabriel Zamora, Fundamentos de la Morfología Matemática, Universidad de Alicante, Departamento de Física, Ingeniería en Sistemas y Teoría de señal, 2002.

[11] Héctor Alejandro Montes, Tratamiento de imágenes, Universidad Autónoma del Estado de México.

[12] Andrew Fitzgibbon, Mauricio Pílu, and RobertB. Fisher., Direct least-square fitting of ellipses. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol. 21, 1999.

[13] Dr. Boris Escalante R, Procesamiento Digital de Imágenes, 2006.



- [14] Liga de descarga de Blender <http://www.blender.org/>
- [15] Tutorial Blender básico
http://www.freewebs.com/marquitux/GVFX/INTRO_2_3.7.1.pdf
- [16] D. Marr, Visión. San Francisco: Freeman, 1982.
- [17] L. Enrique Sucar, Giovanni Gómez. Vision Computacional. Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica, Helmholtz Zentrum Munchen. Puebla-México,Neuherberg-Alemania, 2008.
- [18] Graficas por computadora, Donal Hearn, M. Pauline Baker, Illinois, 1988.
- [19] Digital Image Processing, second edition, Rafael C. Gonzales, Richard E. Woods, 2002.
- [20] Algebra Linal, octava edición, Bernard Kolman, David R. Hill, 2005.
- [21] Algebra Lineal con aplicaciones, Cuarta edición, Gareth Williams, 2001.
- [22] Light Source Position and Reflectance Estimation From a Single View Witout The Distant Illumination Assumption, Ken ji Hara, Ko Nishino and Katsushi Ikevchil
- [23] The Geometry of Point Ligth Source from Shadows, Bo Hu and Christopher Brown and Randall Nelson, Junio 2004
- [24] Light Source Detection in Photograps, Jorge Lopez Moreno, Sunil Handap, Erick Reinhard and Diego Gutiérrez, Universidad de Zaragoza, Adobe Systems. 2009