



**BENEMÉRITA UNIVERSIDAD
AUTÓNOMA DE PUEBLA**
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

**La (U, V) -inversa para operadores
lineales acotados**

TESIS

Que para obtener el grado de

**DOCTOR EN CIENCIAS
MATEMÁTICAS**

Presenta:

M.C. Missael Meza Muñoz

Director de tesis:

Dr. Gabriel Kantún Montiel

Puebla, Pue., Marzo de 2025.



DR. SEVERINO MUÑOZ AGUIRRE
SECRETARIO DE INVESTIGACIÓN Y
ESTUDIOS DE POSGRADO, FCFM-BUAP
P R E S E N T E:

Por este medio le informo que el C:

MISSAEL MEZA MUÑOZ

estudiante del Doctorado en Ciencias (Matemáticas), ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 16 de diciembre de 2024, con la tesis titulada:

“La (U,V) - inversa para operadores lineales acotados”

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

A T E N T A M E N T E.
H. Puebla de Z, a 21 de febrero de 2025

DR. RAÚL ESCOBEDO CONDE
COORDINADOR DEL POSGRADO
EN MATEMÁTICAS.



D*REC/mtrv

Dedicado a mi familia

Agradecimientos

En primer lugar, quiero expresar mi profunda gratitud a Dios, cuya guía y fortaleza han sido mi refugio en cada paso de este camino. Su presencia ha iluminado mi vida y me ha permitido llegar hasta aquí, superando desafíos y abrazando cada aprendizaje con esperanza y fe.

A mi familia, mi pilar más sólido, les agradezco infinitamente su apoyo incondicional, que no solo me ha acompañado a lo largo de esta etapa, sino durante toda mi vida. Sus palabras llenas de sabiduría, sus consejos oportunos y su amor constante me han dado la fortaleza para tomar decisiones importantes y seguir adelante en los momentos más difíciles. Todo lo que he logrado y lo que aspiro a ser se los debo a ustedes.

A mi asesor de tesis, Dr. Gabriel Kantún Montiel, quiero expresarle mi más profundo agradecimiento por haberme dado la oportunidad de trabajar bajo su guía en este proyecto de doctorado. Su confianza en mí y en mi capacidad para llevar a cabo esta tarea fue un motor invaluable durante todo el proceso. Más allá de su conocimiento de la matemática, del cual aprendí enormemente y que fue esencial para mi desarrollo académico, encontré en usted no solo a un maestro excepcional, sino también a una persona íntegra y a un amigo al que admiro.

Su dedicación, paciencia y compromiso marcaron mi trayectoria de una manera que jamás olvidaré. Gracias por su apoyo constante, por sus enseñanzas que trascienden lo académico y por ser un ejemplo de excelencia y humanidad. Es un honor haber tenido la oportunidad de aprender de usted y de compartir este camino. Su confianza en mi trabajo y sus enseñanzas han dejado una huella imborrable en mi formación profesional y personal.

Con especial gratitud, quiero dedicar un espacio a reconocer y agradecer profundamente a mis distinguidos sinodales que han sido una guía invaluable en mi formación académica.

Al Dr. Djordjević Slavisa, quiero expresarle mi más profundo respeto y admiración. Su destacada trayectoria como investigador y su pasión por el conocimiento son un ejemplo inspirador que deja una huella imborrable en quienes tienen el privilegio de aprender de usted. Su dedicación, rigor académico y compromiso con la ciencia me motivan a seguir esforzándome, con la esperanza de algún día convertirme en un investigador de su calibre. Gracias por compartir su sabiduría y por ser un modelo de excelencia al que aspiro con gratitud y determinación. Su dedicación y compromiso siempre fueron una fuente de inspiración para continuar avanzando.

Al Dr. Francisco Javier Mendoza Torres, quiero expresarle mi más sincero agradecimiento por su invaluable apoyo durante este proyecto de doctorado. Sus consejos precisos y sus preguntas reflexivas durante los avances de tesis han sido fundamentales para enriquecer y fortalecer este trabajo. Más allá del ámbito académico, quiero también agradecerle por tantos años de amistad, por su disposición siempre generosa y por ser un apoyo constante en mi trayectoria. Su guía y su calidez humana han dejado una profunda marca en este camino, y valoro enormemente el privilegio de contar con su sabiduría y su amistad.

Un agradecimiento muy especial al Dr. Juan Alberto Escamilla Reyna, quien ha estado presente en mi trayectoria desde la licenciatura, pasando por la maestría, hasta este momento en el doctorado. Su acompañamiento durante cursos clave en cada una de estas etapas y su disposición para compartir su vasto conocimiento y sabios consejos han sido esenciales para mi crecimiento no solo académico, sino también profesional y personal. Durante todo este tiempo, su confianza en mí y su dedicación fueron fundamentales para que pudiera avanzar y crecer, no solo como estudiante, sino como profesional y como persona. Siempre guardaré un lugar especial en mi corazón para todo lo que me enseñó y para la inspiración que representa en mi vida. ¡Gracias por ser un maestro excepcional y una luz en mi camino!.

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento al Dr. Fernan-

do Macías Romero por aceptar formar parte de mi jurado de doctorado y por su valioso acompañamiento durante este proceso. Su presencia en cada avance de tesis ha sido un reflejo de su compromiso con la excelencia académica y su genuino interés en la formación de sus estudiantes. Su aguda visión matemática, su capacidad para formular preguntas que desafían y enriquecen el pensamiento, y su disposición para compartir su conocimiento con paciencia y claridad son cualidades que lo distinguen como un gran profesor.

Estimado Dr. Víctor Manuel Méndez Salinas, mi más sincero agradecimiento por haber aceptado, con tanto entusiasmo, formar parte de mi jurado de tesis doctoral. Es un gran honor contar con su participación en este proceso tan significativo para mí. Aprecio profundamente el tiempo y la dedicación que ha destinado para compartir su experiencia y conocimiento, especialmente en el ámbito de las inversas generalizadas. Sus valiosos comentarios no solo enriquecen mi trabajo, sino que también representan una guía muy importante para perfeccionar esta investigación. Gracias por permitir que este importante proceso académico continúe bajo su guía y apoyo.

A cada uno de ustedes, mi gratitud eterna por haber sido parte tan importante de este proceso y por haberme ayudado a crecer en todos los sentidos. Su impacto en mi vida trasciende este trabajo y será siempre una motivación para seguir aprendiendo y esforzándome.

Gracias por aceptar formar parte de este proceso tan importante. Su tiempo, dedicación y valiosos comentarios son un honor para mí y enriquecen enormemente este trabajo.

También quiero expresar mi más profundo agradecimiento a la M.C. María Guadalupe Raggi Cárdenas, quien ha sido una guía inigualable en mi trayectoria académica. Desde el primer día de clases en la universidad, cuando tuve el honor de aprender de ella, hasta los momentos más decisivos de mi licenciatura, así como su compañía y consejos durante la maestría y doctorado, su acompañamiento constante ha sido invaluable. Como mi tutora en la licenciatura, su paciencia, conocimientos y consejos siempre estuvieron presentes para impulsarme a desarrollar mis capacidades y superar los retos que encontré en el camino. Su apoyo no se limitó a lo académico, pues también me brindó el aliento necesario

para seguir adelante en los momentos más desafiantes. Su apoyo constante y confianza en mis capacidades sin duda han dejado una huella profunda y de por vida en mi camino.

También quiero reconocer al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías (CONAHCYT) por su apoyo invaluable, sin el cual este proyecto no habría sido posible. Su contribución no solo representa un respaldo económico, sino también un estímulo para la investigación y el desarrollo académico en nuestro país.

Finalmente, quiero dedicar este logro a todas las personas que, de una u otra manera, han creído en mí, impulsándome a dar lo mejor de mí mismo. A todos ustedes, gracias por ser parte de este sueño hecho realidad.

Introducción

El estudio de ecuaciones integrales ha sido fundamental en el desarrollo de diversas áreas de las matemáticas. Un logro importante fue alcanzado cuando Fredholm resolvió la ecuación integral que hoy lleva su nombre, empleando una técnica basada en una estructura que él denominó pseudo-inversa. En la actualidad, el término «pseudo-inversa» se utiliza como sinónimo de «inversa generalizada,» un concepto amplio que abarca diversos tipos de inversas en diferentes contextos algebraicos y analíticos [4]. Estas inversas no siempre son únicas, por lo que una de las principales áreas de estudio en teoría de inversas generalizadas se centra en las condiciones que permiten definir una inversa única [2]. Entre los ejemplos más relevantes de inversas generalizadas se encuentran la inversa de Moore-Penrose y la inversa de Drazin, cada una con sus propias propiedades y aplicaciones.

Durante las últimas dos décadas, se ha ampliado considerablemente el estudio de las inversas generalizadas, abarcando matrices y operadores sobre espacios de Hilbert y Banach, así como elementos en semigrupos o álgebras de Banach. Entre las contribuciones recientes, destaca el trabajo de M. P. Drazin, quien introdujo el concepto de (b, c) -inversa para elementos en semigrupos, con el objetivo de estudiar propiedades comunes de la inversa de Moore y su propia inversa previamente mencionada.

Formalmente, dado S un semigrupo y $a, b, c, y \in S$, decimos que y es la (b, c) -inversa de a si

- $y \in (bSy) \cap (ySc),$
- $yab = b, cay = c.$

Estas condiciones aseguran que y actúa como una inversa ex-

terna, y es posible demostrar que, si existe, dicha inversa es única, denotada como $a^{-(b,c)}$ [3].

Esta definición, puramente algebraica, es aplicable en particular a operadores lineales acotados en un espacio de Banach los cuales denotamos como $\mathbb{B}(X)$, y todos los elementos involucrados deben pertenecer a una misma estructura algebraica, en este caso un semigrupo.

La presente tesis busca extender este concepto aún más allá, en el contexto de los operadores lineales acotados definidos en espacios de Banach. Tomando como punto de partida la definición de la (b, c) -inversa, consideramos el espacio de operadores acotados entre dos espacios de Banach, $\mathbb{B}(X, Y)$, que no forma un semigrupo bajo la composición usual de funciones. En este contexto, definimos el concepto de (U, V) -inversa, que generaliza la (b, c) -inversa en el caso de operadores lineales acotados entre espacios de Banach. Estudiamos las propiedades fundamentales de la (U, V) -inversa y analizamos las posibles perturbaciones que este concepto puede admitir.

La teoría de perturbaciones, originada por Rayleigh y Schrödinger, es una rama del análisis funcional que examina cómo las propiedades espectrales y otras características de los operadores cambian bajo perturbaciones. En particular, se considera si un operador de una clase dada sigue perteneciendo a esa clase tras la adición de una perturbación específica. Para formalizar esta idea, se dice que una clase de operadores G es estable bajo una clase H si, dado $g \in G$ y $h \in H$ se tiene que $g + h \in G$.

Por ejemplo, consideremos los operadores de Fredholm $\phi(X)$ y los operadores compactos $K(X)$, donde X es un espacio de Banach, entonces es conocido que si $T \in \phi(X)$ y $K \in K(X)$, entonces $T + K \in \phi(X)$, en este caso la clase $\phi(X)$ es estable bajo la clase $K(X)$, es decir, los operadores de Fredholm en un espacio de Banach son estables bajo perturbaciones por operadores compactos.

En esta tesis, todos los resultados desarrollados sobre el concepto de (U, V) -inversa y la (M, N) -Weighted (U, V) -inversa in $\mathbb{B}(X, Y)$ son originales. La estructura de la tesis es la siguiente: en el Capítulo 1, consideramos la forma matricial de un operador lineal acotado y establecemos una definición general de inversa generalizada. En el Capítulo 2, definimos la (U, V) -inversa, obtenemos

equivalencias mediante proyecciones, y caracterizamos su estabilidad bajo ciertas clases de operadores. El Capítulo 3 introduce el orden de Mitsch para caracterizar la (U, V) -inversa en términos de máximos y mínimos de subconjuntos especiales de $\mathbb{B}(X, Y)$. En el Capítulo 4, exploramos la (M, N) -Weighted (U, V) -inversa como un caso particular de interés. Finalmente, en el Capítulo 5 abordamos el problema de determinar todos los operadores A que son (U, V) -invertibles, más específicamente, dados U y V , introducimos una relación de equivalencia para resolver esta cuestión.

Índice general

Introducción	I
1. Inversas generalizadas para operadores lineales acotados definidos en espacios de Banach	1
1.1. Forma matricial de un operador	1
1.2. Propiedades básicas de las inversas generalizadas .	2
2. La (U, V)-inversa para operadores en $\mathbb{B}(X, Y)$	9
2.1. Propiedades básicas de la (U, V) -inversa	11
2.2. Equivalencias del concepto de (U, V) -inversa	14
2.3. Representación matricial de la (U, V) -inversa . . .	17
2.4. Perturbaciones de la (U, V) -inversa	21
3. Propiedades extremales de la (U, V)-inversa	23
3.1. Orden parcial de Mitsch en $\mathbb{B}(Y, X)$	23
3.2. Órdenes parciales relacionados al orden de Mitsch	28
4. Operadores (U, V)-invertibles por la derecha y por la izquierda	31
4.1. Propiedades básicas de los operadores (U, V) -invertibles por la derecha y por la izquierda	32
4.2. Left y right operadores Drazin invertibles	36
5. Clasificación de elementos (U, V)-invertibles	41
5.1. Una relación de equivalencia en $\mathbb{B}(X, Y)^{-(U, V)}$. . .	41
5.2. Representación matricial de 2 elementos relacionados en $\mathbb{B}(X, Y)^{-(U, V)}$	44

6. Variaciones del concepto de (U, V)-inversa	49
6.1. Algunas inversas generalizadas vistas como (U, V) - inversas.	52
6.2. La (b, c) -inversa en anillos con unidad	55
7. La (M, N)-Weighted (U, V)-inversa en $\mathbb{B}(X, Y)$.	61
7.1. Algunas caracterizaciones de la (M, N) -Weighted (U, V) - inversa	64
7.2. Representación matricial de la (M, N) -Weighted (U, V) - inversa	67
Conclusiones	71

Capítulo 1

Inversas generalizadas para operadores lineales acotados definidos en espacios de Banach

1.1. Forma matricial de un operador

La representación matricial de un operador juega un papel crucial al traducir problemas abstractos en espacios de Banach a un contexto más manejable en términos de álgebra matricial. Esta representación no solo facilita el análisis teórico de los operadores, sino que también sirve como puente para implementar soluciones numéricas en problemas prácticos de diversas áreas.

Dados X y Y espacios de Banach sobre $\mathbb{C}$, con $\mathbb{B}(X, Y)$ denotamos al espacio de operadores lineales acotados de X en Y , si $X = Y$ escribimos $\mathbb{B}(X)$.

Dado $T \in \mathbb{B}(X, Y)$, denotamos su núcleo y rango como $N(T)$ y $R(T)$ respectivamente.

En el desarrollo de esta tesis es útil considerar la representación matricial de un operador lineal. Si tenemos un espacio vectorial X como suma directa de subespacios $X = X_1 \oplus X_2$, sabemos que para cada $x \in X$, existen únicos $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2$ tales que $x = x_1 + x_2$. Considerando que Y es suma directa de subespacios,

digamos $Y = Y_1 \oplus Y_2$, entonces las proyecciones en Y_1 y Y_2 son operadores lineales $P_{Y_1}, P_{Y_2} : Y \rightarrow Y$ definidas como $P_{Y_1}(y) = y_1$ y $P_{Y_2}(y) = y_2$, donde $y = y_1 + y_2, y_1 \in Y_1, y_2 \in Y_2$, estas proyecciones nos serán de utilidad para representar un operador lineal en forma de matriz. Cuando un espacio vectorial X es suma directa de algunos otros 2 subespacios de él, también se dice que X tiene esa descomposición.

Teorema 1.1. [7] Sean X, Y espacios vectoriales, donde X y Y tienen descomposiciones $X = X_1 \oplus X_2, Y = Y_1 \oplus Y_2$ y $L : X \rightarrow Y$ un operador lineal. Entonces

$$L = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix},$$

donde $A = P_{Y_1}L|_{X_1}$, $B = P_{Y_1}L|_{X_2}$, $C = P_{Y_2}L|_{X_1}$ y $D = P_{Y_2}L|_{X_2}$.

1.2. Propiedades básicas de las inversas generalizadas

En el estudio del análisis funcional, las inversas generalizadas, tanto internas como externas, emergen como herramientas fundamentales para resolver problemas relacionados con operadores lineales. Estas inversas permiten extender la noción de inversa de un operador más allá del caso restringido a operadores invertibles, proporcionando una forma de tratar con operadores no inyectivos, no sobreyectivos, o incluso aquellos definidos en espacios infinito-dimensionales como los espacios de Banach.

Existen muchos tipos de inversas generalizadas, las que presentamos a continuación son las más generales en el sentido de que si se define algún tipo de inversa generalizada, este tipo de inversa es del tipo de alguna de las siguientes definiciones.

Definición 1.1. $B \in \mathbb{B}(X, Y)$ es una inversa generalizada interna de $A \in \mathbb{B}(Y, X)$ si

$$ABA = A.$$

También existe el concepto de inversa generalizada externa.

Definición 1.2. $C \in \mathbb{B}(Y, X)$ es una inversa generalizada externa de A si

$$CAC = C.$$

También podemos considerar inversas generalizadas que satisfagan las condiciones de las definiciones 1.1 y 1.2.

Definición 1.3. $D \in \mathbb{B}(Y, X)$ es una inversa generalizada reflexiva de $A \in \mathbb{B}(X, Y)$ si D es una inversa generalizada interna y externa de A .

En el siguiente Teorema, mencionamos algunas de las propiedades básicas que cumplen las inversas generalizadas antes definidas.

Teorema 1.2. Sea $A \in \mathbb{B}(X, Y)$, entonces

1. Si A es invertible, entonces A^{-1} es la única inversa generalizada interna de A .
2. Si $B, C \in \mathbb{B}(Y, X)$ son inversas generalizadas internas de A , entonces BAC es una inversa generalizada reflexiva de A .
3. Si $B \in \mathbb{B}(Y, X)$ es una inversa generalizada interna ó una inversa generalizada externa de A , entonces $AB \in \mathbb{B}(Y)$ y $BA \in \mathbb{B}(X)$ son proyecciones.

Demostración. 1. Si $ABA = A$ al ser A invertible se tiene que $AB = I = BA$, por lo que $B = A^{-1}$.

2. Si $ABA = A$ y $ACA = A$, entonces $ABACA = ACA = A$ y $BACABAC = BABAC = BAC$.

3. Si $ABA = A$, entonces $(AB)^2 = ABAB = AB$.

Si $BAB = B$, entonces $(BA)^2 = BABA = BA$. □

El siguiente Corolario es una consecuencia de las propiedades enunciadas en el Teorema 1.2, proporciona una caracterización precisa de cuándo un operador lineal acotado admite una inversa interna, expresada en términos de las inversas generalizadas reflexivas.

Corolario 1.1. $A \in \mathbb{B}(X, Y)$ tiene una inversa generalizada reflexiva si y solo si A es regular interno.

Demostración. $\rightarrow]$ Si A tiene una inversa generalizada reflexiva, por definición A es regular interno.

$\leftarrow]$ Si A es regular interno, entonces existe $B \in \mathbb{B}(Y, X)$ tal que

$$ABA = A,$$

entonces por el Teorema 1.2 inciso 2. se tiene que BAB es una inversa generalizada reflexiva de A . $\square$

Existe una relación especial entre los operadores que poseen una inversa interna, la cual emerge de manera natural al considerar las proyecciones asociadas. Estas proyecciones no solo permiten descomponer el espacio de manera conveniente, sino que también revelan estructuras intrínsecas que vinculan directamente los núcleos y rangos de dichas proyecciones con el operador en cuestión.

Teorema 1.3. *Si $B \in \mathbb{B}(Y, X)$ es una inversa generalizada interna de $A \in \mathbb{B}(X, Y)$, entonces AB, BA son proyecciones y además*

$$R(AB) = R(A) \text{ y } N(BA) = N(A).$$

Demostración. Es claro que $R(AB) \subseteq R(A)$, como $ABA = A$ se tiene que $R(A) \subseteq R(AB)$, así $R(AB) = R(A)$. También $N(A) \subseteq N(BA)$ y como $ABA = A$ entonces $N(BA) \subseteq N(A)$, entonces $N(BA) = N(A)$. Notemos que $(AB)^2 = ABAB = AB$ y $(BA)^2 = BABA = BA$. Por lo tanto, AB y BA son proyecciones. $\square$

El siguiente Teorema establece una caracterización fundamental de un operador A que posee una inversa interna, expresada en términos de su núcleo y su rango. Esta formulación no solo proporciona una visión más estructural de la invertibilidad interna, sino que también permite una comprensión más clara de cómo la interacción entre estos subespacios determina la existencia de dicha inversa.

Teorema 1.4. *Sea $A \in \mathbb{B}(X, Y)$. $R(A)$ y $N(A)$ son cerrados y complementados en X y Y respectivamente, si y solo si A es regular interno.*

Demostración. $\longrightarrow$] Supongamos que $X = T \oplus N(A)$ y $Y = R(A) \oplus S$, para algunos subespacios cerrados T de X y S de Y . Consideremos la forma matricial del operador A con respecto a las descomposiciones de los espacios X y Y , es decir,

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} T \\ N(A) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} R(A) \\ S \end{pmatrix},$$

notemos que $A_{12} = A|_{N(A)} : N(A) \longrightarrow R(A)$ y $A_{22} = A|_{N(A)} : N(A) \longrightarrow S$, de aquí que

$$A_{12} = 0 \text{ y } A_{22} = 0.$$

También $A_{21} = A|_T : T \longrightarrow S$ como $R(A_{21}) \subseteq R(A) \cap S = \{0\}$. se tiene que $A_{21} = 0$. Por lo tanto, A tiene la siguiente forma matricial,

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} T \\ N(A) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} R(A) \\ S \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

Además es fácil ver que $R(A) = R(A_{11})$ y $N(A_{11}) = \{0\}$, así A_{11} es invertible. Sea $B \in \mathbb{B}(Y, X)$, entonces B tiene la siguiente forma matricial

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} R(A) \\ S \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} T \\ N(A) \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

un cálculo directo muestra que B es una inversa generalizada interna de A si y solo si $B_{11} = A_{11}^{-1}$. Por lo tanto, A tiene inversas generalizadas internas y todas ellas son de la forma (6.1), donde B_{11}, B_{21} y B_{22} son operadores lineales acotados arbitrarios definidos en los correspondientes subespacios.

$\longleftarrow$] A es regular interno, entonces por el Teorema 1.1 se tiene que $N(A)$ y $R(A)$ son subespacios cerrados y complementados.

□

La relación entre las inversas generalizadas y la representación matricial de un operador es especialmente relevante: las propiedades algebraicas de las inversas generalizadas pueden ser estudiadas y explotadas con mayor claridad a través de la representación matricial, permitiendo conectar conceptos abstractos con métodos

concretos de resolución. Este vínculo proporciona un marco unificado para abordar problemas como la solución de sistemas de ecuaciones lineales, la regularización de problemas mal planteados y la optimización en espacios funcionales.

Teorema 1.5. [2] Sean $A \in \mathbb{B}(X, Y)$ es regular interno, T, S subespacios cerrados de X y Y respectivamente tales que $X = T \oplus N(A)$ y $Y = R(A) \oplus S$. Entonces

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} T \\ N(A) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} R(A) \\ S \end{pmatrix},$$

donde A_{11} es invertible. Más aún, si B es cualquier inversa generalizada interna de A tal que $R(BA) = T$ y $N(AB) = S$, entonces B tiene la siguiente forma matricial

$$B = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & W \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} R(A) \\ S \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} T \\ N(A) \end{pmatrix}, \quad (1.3)$$

donde $W \in \mathbb{B}(S, N(A))$ es arbitrario.

Si consideramos $F \in \mathbb{B}(X, Y)$ y $G \in \mathbb{B}(Y, X)$ una inversa interna de F , esto es, $FGF = F$, sabemos

$$F = \begin{pmatrix} F_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} R(GF) \\ N(F) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} R(F) \\ N(FG) \end{pmatrix}, \quad (1.4)$$

donde $F_1 \in \mathbb{B}(R(GF), R(F))$ es invertible y

$$G = \begin{pmatrix} F_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & W \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} R(F) \\ N(FG) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} R(GF) \\ N(F) \end{pmatrix}, \quad (1.5)$$

donde $W \in \mathbb{B}(N(FG), N(F))$ es arbitrario. En el caso que $W = 0$, denotamos G como S_F .

El siguiente Teorema establece una conexión fundamental entre el rango de un operador arbitrario y el de otro que posee una inversa interna, mostrando que su igualdad conlleva una relación estructural profunda entre ambos operadores. Este resultado no solo permite obtener una expresión explícita que los vincula, sino que también resalta cómo la propiedad de tener inversa interna influye en la forma en que los operadores interactúan dentro del espacio en cuestión.

Teorema 1.6. *Sea $F \in \mathbb{B}(X, Y)$ regular interno.*

1. *Si $T \in \mathbb{B}(X, Y)$ es tal que $R(T) = R(F)$, entonces $T = FS_F T$.*
2. *Si $T \in \mathbb{B}(X, Y)$ es tal que $N(T) = N(F)$, entonces $T = TS_F F$.*

Demostración. (1) Sabemos que $FS_F F = F$, entonces $FS_F \in \mathbb{B}(Y)$ es una proyección, como para cada $x \in X$, $T(x) \in Y$, entonces $FS_F T(x) = T(x)$, así obtenemos el resultado. Análogamente, podemos demostrar (2). $\square$

Análogo al Teorema 1.5, el siguiente Teorema permite obtener representaciones matriciales de los operadores involucrados, proporcionando una visión más estructurada de su comportamiento. A través de estas representaciones, podemos visualizar de manera clara cómo actúan dichos operadores en ciertos subespacios, lo que no solo facilita su estudio, sino que también ofrece una comprensión más profunda de su interacción con la estructura del espacio en cuestión.

Teorema 1.7. *Sea $F \in \mathbb{B}(X, Y)$ regular interno.*

1. *Si $T \in \mathbb{B}(X, Y)$ es tal que $R(T) = R(F)$, entonces*

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} R(S_F F) \\ N(F) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} R(F) \\ N(FS_F) \end{pmatrix},$$

2. *Si $T \in \mathbb{B}(X, Y)$ es tal que $N(T) = N(F)$, entonces*

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & 0 \\ T_{21} & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} R(S_F F) \\ N(F) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} R(F) \\ N(FS_F) \end{pmatrix}.$$

(1) Por el Teorema 1.6 (1) sabemos que $T = FS_F T$ por las descomposiciones 1.4, 1.5 y considerando

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} R(S_F F) \\ N(F) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} R(F) \\ N(FS_F) \end{pmatrix},$$

de esto obtenemos que $T_{21} = 0$ y $T_{22} = 0$, entonces

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} R(S_F F) \\ N(F) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} R(F) \\ N(F S_F) \end{pmatrix}.$$

Podemos demostrar en forma similar (2) usando el Teorema 1.6 (2).

Teorema 1.8. Sean $F, G \in \mathbb{B}(X, Y)$ regulares internos. Entonces

1. $R(F) = R(G)$ si y solo si $F\mathbb{B}(X) = G\mathbb{B}(X)$.
2. $N(F) = N(G)$ si y solo si $\mathbb{B}(Y)F = \mathbb{B}(Y)G$.

Demostración. (1) $\longrightarrow$] Por hipótesis y el Teorema 1.6 tenemos que $F = GS_GF$ y $G = FS_FG$, entonces $G \in F\mathbb{B}(X)$ y $F \in G\mathbb{B}(X)$. Por lo tanto, $F\mathbb{B}(X) = G\mathbb{B}(X)$.

$\longleftarrow$] Por hipótesis, existen $T_1, T_2 \in \mathbb{B}(X)$ tales que $F = GT_1$ y $G = FT_2$, entonces $R(F) = R(G)$.

(2) $\longrightarrow$] Por hipótesis y el Teorema 1.6 obtenemos $F = FS_GG$ y $G = GS_FF$ así $F \in \mathbb{B}(Y)G$ y $G \in \mathbb{B}(Y)F$. $\longleftarrow$] Por hipótesis tenemos que $F = T_1G$ y $G = T_2F$ para algunos $T_1, T_2 \in \mathbb{B}(Y)$, entonces $N(F) = N(G)$. $\square$

La representación matricial de un operador lineal acotado resulta esencial para comprender su acción en los subespacios donde está definido, ya que permite descomponer y analizar su comportamiento de manera clara y estructurada. Esta herramienta no solo facilita la obtención de resultados, sino que también simplifica considerablemente su demostración, al traducir problemas abstractos en términos más concretos y manejables. Además, al explorar las propiedades del operador desde una perspectiva matricial, se obtienen demostraciones y resultados que serían difíciles de alcanzar mediante enfoques puramente algebraicos. Como se ha evidenciado a lo largo de este capítulo, intentar llevar a cabo algunas de las demostraciones aquí presentadas sin recurrir a la representación matricial implicaría un nivel de dificultad mucho mayor, tanto en su ejecución como en su comprensión. Por ello, la representación matricial no es solo un recurso técnico, sino un pilar fundamental en el estudio y desarrollo de la teoría de operadores lineales acotados.

Capítulo 2

La (U, V) -inversa para operadores en $\mathbb{B}(X, Y)$

En este capítulo introducimos el concepto de (U, V) -inversa, este concepto es más general que el de Drazin definido en [3] en el contexto de operadores lineales acotados, pues como veremos, los elementos involucrados en la definición pueden estar en diferentes espacios y no solo en una única estructura, como en el caso de Drazin, formalmente tenemos la siguiente:

Definición 2.1. Sean $A \in \mathbb{B}(X, Y)$, $U \in \mathbb{B}(Z, X)$ y $V \in \mathbb{B}(Y, Z)$. Decimos que A es (U, V) -invertible si existe $B \in \mathbb{B}(Y, X)$ tal que

$$B = UQB, B = BWV, U = BAU, V = VAB,$$

para algunos $Q \in \mathbb{B}(X, Z)$, $W \in \mathbb{B}(Z, Y)$.

Si $X = Y = Z$ obtenemos el caso de la (b, c) -inversa de Drazin (ver [3]), es decir, cuando estamos considerando operadores en el espacio $\mathbb{B}(X)$.

La unicidad de las inversas generalizadas es fundamental porque garantiza una solución consistente y bien definida en problemas donde las matrices o los operadores no son invertibles en el sentido clásico. Esta propiedad asegura que, independientemente del método empleado para calcularla, se obtendrá el mismo resultado, lo cual es esencial para la reproducibilidad de los cálculos y la coherencia matemática. Por esto es importante el siguiente:

Teorema 2.1. Sean $A \in \mathbb{B}(X, Y)$, $U \in \mathbb{B}(Z, X)$ y $V \in \mathbb{B}(Y, Z)$. Si A es (U, V) -invertible, entonces el elemento $B \in \mathbb{B}(Y, X)$ en la definición 2.1 es único.

Demostración. Supongamos que B_1, B_2 son tales que

$$B_1 = UQ_1B_1, B_1 = B_1W_1V, U = B_1AU, V = VAB_1,$$

$$B_2 = UQ_2B_2, B_2 = B_2W_2V, U = B_2AU, V = VAB_2,$$

para algunos $Q_1, Q_2, W_1, W_2 \in \mathbb{B}(X, Y)$, de aquí que,

$$B_1 = B_1W_1V = B_1W_1(VAB_2) = (B_1W_1V)(AB_2) = B_1AB_2.$$

Por otro lado,

$$B_2 = UQ_2B_2 = (B_1AU)Q_2B_2 = B_1A(UQ_2B_2) = B_1AB_2.$$

Por lo tanto, $B_1 = B_2$. □

Denotamos este elemento $B \in \mathbb{B}(Y, X)$ como $A^{-(U,V)}$ y se llama la (U, V) -inversa de A .

Tener ejemplos explícitos de las inversas generalizadas que son únicas es de vital importancia, ya que proporcionan una base concreta para entender su comportamiento y propiedades, además de servir como referencia para aplicaciones prácticas, además que nos aseguran que en realidad existen elementos que cumplen con la Definición que hemos proporcionado. En lo que sigue mostraremos un ejemplo explícito de un operador (U, V) -invertible.

Ejemplo 2.1. Un operador (U, V) -invertible.

Sea $X = \mathbb{R}^3$, $Y = \mathbb{R}^2$ and $Z = \mathbb{R}^2$. Definimos los siguientes operadores:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{B}(X, Y),$$

$$U := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{B}(Z, X),$$

$$V := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{B}(Y, Z).$$

Tomando, $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$ y $W = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, por cálculo directo se puede ver que A es (U, V) -invertible con $A^{-(U, V)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2.1. Propiedades básicas de la (U, V) -inversa

Como sabemos, las inversas generalizadas, generalizan la noción usual de invertibilidad, la definición de la (U, V) -inversa es un concepto que abre muchas posibilidades dentro de la teoría de inversas generalizadas, ya que generaliza el estudio de las inversas tradicionales al incluir condiciones adicionales definidas por los operadores U y V .

Investigar y analizar las propiedades que se derivan de esta definición es crucial, ya que permite identificar estructuras matemáticas más generales y comprender cómo estas pueden ser aplicadas en diversos contextos teóricos y prácticos. Además, explorar las consecuencias de esta definición contribuye al desarrollo de nuevos teoremas, métodos computacionales más eficientes y una comprensión más profunda de las interacciones entre los operadores. Aquí algunas propiedades que se relacionan con este concepto.

Proposición 2.1. Sean $A \in \mathbb{B}(X, Y)$ y $U \in \mathbb{B}(Z, X)$, $V \in \mathbb{B}(Y, Z)$. Si A es (U, V) -invertible, entonces

1. Si U es invertible, entonces A es invertible por la izquierda.
2. Si V es invertible por la derecha, entonces A es invertible por la derecha.
3. Si U y V son invertibles, entonces A es invertible. En este caso, $A^{-(U, V)} = A^{-1}$.

Demostración. Como A es (U, V) -invertible, entonces $B = A^{-(U, V)} \in \mathbb{B}(Y, X)$ es tal que

$$B = UQB, B = BWV, U = BAU, V = VAB,$$

para algunos $Q, W \in \mathbb{B}(X, Y)$.

1. Como $U = BAU$ y al ser U invertible se tiene que $BA = I$.
2. Como $V = VAB$ y al ser V invertible se tiene que $AB = I$.
3. Es una consecuencia de 1. y 2. de este Teorema. $\square$

En general, en la Definición 2.1 los operadores $U \in \mathbb{B}(Z, X)$ y $V \in \mathbb{B}(Y, Z)$ son arbitrarios, sin embargo, el siguiente Teorema nos dice que no son tan arbitrarios como pueden parecer.

Teorema 2.2. Sean $A \in \mathbb{B}(X, Y)$, $U \in \mathbb{B}(Z, X)$ y $V \in \mathbb{B}(Y, Z)$. Si A es (U, V) -invertible, entonces U y V son regulares internos.

Demostración. Sabemos que existen $Q, W \in \mathbb{B}(X, Y)$ tales que

$$B = UQB \text{ y } B = BWV.$$

Como $U = BAU$, entonces $(I - BA)U = 0$, entonces $(I - UQBA)U = 0$, de aquí que $U - UQBAU = 0$, es decir, $U - UQU = 0$, así $UQU = U$. Análogamente, $VWV = V$. $\square$

Por el Teorema 2.2 sabemos que los elementos $Q, W \in \mathbb{B}(X, Y)$ son inversas internas de U y V respectivamente, en la siguiente proposición veremos que no importa que inversa interna de U y V utilicemos.

Teorema 2.3. Sean $A \in \mathbb{B}(X, Y)$, $U \in \mathbb{B}(Z, X)$ y $V \in \mathbb{B}(Y, Z)$. Si A es (U, V) -invertible con $B = A^{-(U, V)}$ y $UQ_1U = U$, $VW_1V = V$, entonces $B = UQ_1B$ y $B = BW_1V$.

Demostración. Si A es (U, V) -invertible con $B = A^{-(U, V)}$ entonces se satisfacen las ecuaciones de la Definición 2.1. Notemos que, $B = UQB = UQ(BWV) = U(QBW)V = UGV$, donde $G = QBW$, de aquí que $UQ_1B = UQ_1QGV = UGV = B$ y $BW_1V = (UGV)W_1V = UGVW_1V = UGV = B$, así $B = UQ_1B$ y $B = BW_1V$. $\square$

El siguiente Teorema establece que, aunque se considere un mismo operador A , los operadores U y V asociados a este nuevo concepto de invertibilidad pueden admitir diversas elecciones, que hacen el operador A invertible en este sentido.

Esto permite una mayor flexibilidad en el análisis de las propiedades de A , ya que las posibles elecciones de U y V amplían

el marco teórico para abordar situaciones donde la invertibilidad convencional no es aplicable o resulta insuficiente.

Teorema 2.4. Sean $A \in \mathbb{B}(X, Y)$, $U \in \mathbb{B}(Z, X)$ y $V \in \mathbb{B}(Y, Z)$. Si A es (U, V) -invertible con $B = A^{-(U, V)}$, entonces A es (BW, QB) -invertible, donde Q, W son como en la Definición 2.1. Más aún, $B = A^{-(BW, QB)}$.

Demostración. Como A es (U, V) -invertible, entonces

$$B = UQB, B = BWV, U = BAU, V = VAB,$$

definimos $Q' = VA \in \mathbb{B}(X, Z)$ y $W' = AU \in \mathbb{B}(Z, Y)$ son tales que $BWQ'B = BWVAB = BAB = B$, entonces $B = BWQ'B$. También $BW'QB = BAUQB = BAB = B$, entonces $B = BW'QB$. Además $BABW = BW$, por otro lado $QBAB = QB$. Por lo tanto, A es (BW, QB) -invertible y $B = A^{-(BW, QB)}$. $\square$

El siguiente Teorema nos indica que, para operadores (U, V) -invertibles, la multiplicación por escalares también genera operadores (U, V) -invertibles. Este comportamiento es consistente con otras estructuras algebraicas, como los espacios vectoriales y los anillos, donde la cerradura bajo la multiplicación escalar es una propiedad fundamental. Resulta relevante destacar este aspecto, ya que refuerza la analogía y la conexión entre la teoría de operadores y otras áreas del álgebra abstracta.

Teorema 2.5. Sean $A \in \mathbb{B}(X, Y)$, $U \in \mathbb{B}(Z, X)$ y $V \in \mathbb{B}(Y, Z)$. Si A es (U, V) -invertible, entonces para cualquier escalar $\lambda \neq 0$, λA es (U, V) -invertible, más aún, $(\lambda A)^{-(U, V)} = \frac{1}{\lambda} A^{-(U, V)}$.

Demostración. Sea λ un escalar, como A es (U, V) -invertible, entonces existe $B = A^{-(U, V)} \in \mathbb{B}(Y, X)$ tal que satisface las igualdades de la Definición 2.1, para algunos $Q \in \mathbb{B}(X, Z)$, $W \in \mathbb{B}(Z, Y)$. De aquí que,

$$\frac{1}{\lambda}B = UQ\left(\frac{1}{\lambda}B\right), \frac{1}{\lambda}B = \left(\frac{1}{\lambda}B\right)WV, U = \frac{1}{\lambda}B(\lambda A)U, V = V(\lambda A)\frac{1}{\lambda}B.$$

Por lo tanto, λA es (U, V) -invertible, además $(\lambda A)^{-(U, V)} = \frac{1}{\lambda} A^{-(U, V)}$. $\square$

2.2. Equivalencias del concepto de (U, V) -inversa

En general, en toda la matemática una vez definido un concepto se obtienen equivalencias de éste, muchas veces esto permite obtener resultados y demostraciones de manera más sencilla, en esta sección presentamos algunas equivalencias del concepto de (U, V) -inversa.

Teorema 2.6. Sean $A \in \mathbb{B}(X, Y)$, $U \in \mathbb{B}(Z, X)$ y $V \in \mathbb{B}(Y, Z)$. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

1. A es (U, V) -invertible.
2. Existe $B \in \mathbb{B}(Y, X)$ inversa externa de A y para cada $T \in \mathbb{B}(X)$ tal que $TB = 0$ se tiene que $TU = 0$ y existen $T_1 \in \mathbb{B}(Z, X)$, $T_2 \in \mathbb{B}(X, Z)$ y $T_3 \in \mathbb{B}(Y, Z)$ tales que $B = T_1V$, $V = T_2B$, $B = UT_3$.
3. Existe $B \in \mathbb{B}(Y, X)$ inversa externa de A y para cada $P \in \mathbb{B}(X)$ proyección tal que $PB = 0$ se tiene que $PU = 0$ y existen $T_1 \in \mathbb{B}(Z, X)$, $T_2 \in \mathbb{B}(X, Z)$ y $T_3 \in \mathbb{B}(Y, Z)$ tales que $B = T_1V$, $V = T_2B$, $B = UT_3$.

Demostración. (1) $\longrightarrow$ (2) Sabemos que

$$B = UQB, B = BWV, U = BAU, V = VAB,$$

para algunos $Q \in \mathbb{B}(X, Z)$ y $W \in \mathbb{B}(Z, Y)$ donde $B = A^{-(U, V)}$. Definimos $T_1 := BW \in \mathbb{B}(Z, X)$, $T_2 := VA \in \mathbb{B}(X, Z)$ y $T_3 := QB \in \mathbb{B}(Y, Z)$, entonces

$$B = T_1V, V = T_2B, B = UT_3.$$

Si $TB = 0$, entonces $TU = TBAU = 0AU = 0$, por lo tanto $TU = 0$.

Es evidente que (2) implica (3) es cierto.

(3) $\longrightarrow$ (1) Por hipótesis $B = BAB$, entonces $(I - BA)B = 0$, así $(I - BA)U = 0$, de esto se obtiene que $BAU = U$. También $VAB = T_2BAB = T_2B = V$, entonces $V = VAB$. Definimos $W := AT_1$ y $Q := T_3A$, así $BWV = BAT_1V = BAB = B$ y $UQB = UT_3AB = BAB = B$. Por lo tanto, $B = A^{-(U, V)}$. $\square$

El siguiente Teorema presenta una estructura similar al anterior en cuanto a su planteamiento y objetivos, aunque difiere en las condiciones específicas que establece y en los espacios en los cuales están definidos los operadores involucrados. Es crucial prestar especial atención a estas condiciones, ya que son determinantes para garantizar la validez de los resultados y su correcta interpretación en el contexto de estudio.

Teorema 2.7. *Sean $A \in \mathbb{B}(X, Y)$, $U \in \mathbb{B}(Z, X)$ y $V \in \mathbb{B}(Y, Z)$. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *A es (U, V) -invertible.*
2. *Existe $B \in \mathbb{B}(Y, X)$ inversa externa de A y para cada $T \in \mathbb{B}(Y)$ tal que $BT = 0$ cumple que $VT = 0$ y existen $T_1 \in \mathbb{B}(Y, Z)$, $T_2 \in \mathbb{B}(Z, Y)$ y $T_3 \in \mathbb{B}(Z, X)$ tales que $B = UT_1$, $U = BT_2$ y $B = T_3V$.*
3. *Existe $B \in \mathbb{B}(Y, X)$ inversa externa de A y para cada $P \in \mathbb{B}(Y)$ proyección tal que $BP = 0$ cumple que $VP = 0$ y existen $T_1 \in \mathbb{B}(Y, Z)$, $T_2 \in \mathbb{B}(Z, Y)$ y $T_3 \in \mathbb{B}(Z, X)$ tales que $B = UT_1$, $U = BT_2$ y $B = T_3V$.*

Demostración. (1) $\longrightarrow$ (2) Por hipótesis

$$B = UQB, B = BWV, U = BAU, V = VAB,$$

para algunos $Q \in \mathbb{B}(X, Z)$ y $W \in \mathbb{B}(Z, Y)$ donde $B = A^{-(U, V)}$. Definimos $T_1 := QB \in \mathbb{B}(Y, Z)$, $T_2 := AU \in \mathbb{B}(Z, Y)$ y $T_3 := BW \in \mathbb{B}(Z, X)$, entonces $B = UT_1$, $U = BT_2$ y $B = T_3V$, también si $T \in \mathbb{B}(X)$ es tal que $BT = 0$, entonces $VT = VABT = VA0 = 0$, así $VT = 0$.

(2) $\longrightarrow$ (3) es evidente.

(3) $\longrightarrow$ (1) Como $BAB = B$, tenemos $B(I - AB) = 0$, entonces $V(I - AB) = 0$, por lo que $V = VAB$. También $BAU = BABT_2 = BT_2 = U$, entonces $BAU = U$. Definimos $W := T_2AT_3$ y $Q := T_1A$, entonces $BWV = BT_2AT_3V = BT_2AB = BAB = B$ y $UQB = UT_1AB = BAB = B$. Por lo tanto, $B = A^{-(U, V)}$. $\square$

El siguiente Teorema guarda una notable similitud con los anteriores en términos de su estructura y propósito, pero introduce

una simplificación importante al señalar que es suficiente trabajar con ciertas proyecciones específicas en lugar de considerar operadores en general.

Teorema 2.8. Sean $A \in \mathbb{B}(X, Y)$, $U \in \mathbb{B}(Z, X)$ y $V \in \mathbb{B}(Y, Z)$. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

1. A es (U, V) -invertible.
2. Existe $B \in \mathbb{B}(Y, X)$ inversa externa de A , para cada $T \in \mathbb{B}(X)$ tal que $TB = 0$ cumple que $TU = 0$, para cada $R \in \mathbb{B}(Y)$ tal que $BR = 0$ cumple que $VR = 0$ y existen $T_1 \in \mathbb{B}(Z, X)$, $T_2 \in \mathbb{B}(Y, Z)$ tales que $B = T_1V = UT_2$.
3. Existe $B \in \mathbb{B}(Y, X)$ inversa externa de A , para cada $P \in \mathbb{B}(X)$ proyección tal que $PB = 0$ cumple que $PU = 0$, para cada $R \in \mathbb{B}(Y)$ tal que $BR = 0$ cumple que $VR = 0$ y existen $T_1 \in \mathbb{B}(Z, X)$, $T_2 \in \mathbb{B}(Y, Z)$ tales que $B = T_1V = UT_2$.
4. Existe $B \in \mathbb{B}(Y, X)$ inversa externa de A , para cada $T \in \mathbb{B}(X)$ tal que $TB = 0$ cumple que $TU = 0$, para cada $P' \in \mathbb{B}(Y)$ proyección tal que $BP' = 0$ cumple que $VP' = 0$ y existen $T_1 \in \mathbb{B}(Z, X)$, $T_2 \in \mathbb{B}(Y, Z)$ tales que $B = T_1V = UT_2$.
5. Existe $B \in \mathbb{B}(Y, X)$ inversa externa de A , para cada $P \in \mathbb{B}(X)$ proyección tal que $PB = 0$ cumple que $PU = 0$, para cada $P' \in \mathbb{B}(Y)$ proyección tal que $BP' = 0$ cumple que $VP' = 0$ y existen $T_1 \in \mathbb{B}(Z, X)$, $T_2 \in \mathbb{B}(Y, Z)$ tales que $B = T_1V = UT_2$.

Demostración. (1) $\longrightarrow$ (2) Sabemos que

$$B = UQB, B = BWV, U = BAU, V = VAB,$$

para algunos $Q \in \mathbb{B}(X, Z)$ y $W \in \mathbb{B}(Z, Y)$ donde $B := A^{-(U, V)}$. Definimos $T_1 := BW \in \mathbb{B}(X)$ y $T_2 := QB \in \mathbb{B}(X)$, entonces $B = T_1V = UT_2$. Si $TB = 0$, entonces $TU = TBAU = 0AU = 0$, así $TU = 0$, también si $BR = 0$, entonces $VR = VABR = VA0 = 0$, por lo tanto, $VR = 0$.

(2) $\longrightarrow$ (3) es evidente.

(3) $\longrightarrow$ (4) Sea $T \in \mathbb{B}(X)$ tal que $TB = 0$, de $BAB = B$ obtenemos que $(I - BA)B = 0$, entonces $(I - BA)U = 0$, por lo tanto $BAU = U$, así $TU = TBAU = 0AU = 0$, entonces $TU = 0$.

(4) $\longrightarrow$ (5) es evidente.

(5) $\longrightarrow$ (1) Como $B = BAB$, entonces $(I - BA)B = 0$, así $(I - BA)U = 0$, de esto obtenemos que, $BAU = U$, también $B(I - AB) = 0$, así $V(I - AB) = 0$, entonces $VAB = V$. Definimos $W := AT_1$ y $Q := T_2A$, entonces $BWV = BAT_1V = BAB = B$ y $UQB = UT_2AB = BAB = B$. Por lo tanto, $B = A^{-(U, V)}$. $\square$

2.3. Representación matricial de la (U, V) -inversa

La representación matricial de la (U, V) -inversa de un operador lineal acotado en espacios de Banach es fundamental porque permite analizar las propiedades del operador y calcular su inversa utilizando herramientas del álgebra lineal matricial. Este enfoque es especialmente valioso en contextos donde los operadores actúan sobre espacios de dimensión infinita, ya que las matrices ofrecen un modelo más intuitivo y manejable. Asimismo, el estudio de otras inversas generalizadas, como la inversa de Moore-Penrose o la inversa de Drazin, y sus representaciones matriciales, ha sido ampliamente desarrollado debido a su gran utilidad en diferentes áreas. De este modo, las representaciones matriciales no solo aportan claridad conceptual, sino que también extienden el alcance práctico de las inversas generalizadas.

Uno de los objetivos en esta tesis es proporcionar una representación matricial para la (U, V) -inversa, para lograr esto será necesario tener relaciones entre los núcleos y rangos con los operadores involucrados.

Teorema 2.9. Sean $A \in \mathbb{B}(X, Y)$, $U \in \mathbb{B}(Z, X)$ y $V \in \mathbb{B}(Y, Z)$. Si A es (U, V) -invertible con $B = A^{-(U, V)}$, entonces

1. B es inversa externa de A .
2. $R(B) = R(U) = R(UQ) = R(BA)$,
3. $N(B) = N(V) = N(WV) = N(AB)$,

4. $R(AU) = R(AB),$

5. $N(VA) = N(BA).$

donde $Q \in \mathbb{B}(X, Z), W \in \mathbb{B}(Z, Y)$ son como en la definición 2.1.

Demostración. Sabemos que existen $Q \in \mathbb{B}(X, Z), W \in \mathbb{B}(Z, Y)$ tales que $B = UQB$ y $B = BWV$.

1. $BAB = UQBAUQB = UQUQB = UQB = B.$

2. Si $w \in R(B)$, entonces $w = Bx = UQyx \in R(UQ)$, ahora si $w \in R(UQ)$, entonces $w = UQx = BAUQx \in R(B).$

Por 1. de este Teorema y el Teorema 1.3 se tiene que $R(B) = R(BA).$

Si $w \in R(U)$, entonces $W = Bx = UQBx \in R(U)$, ahora si $w \in R(U)$, entonces $w = Ux = BAUx \in R(B).$

3. Si $x \in N(B)$, entonces $Bx = 0$, entonces $Vx = VABx = 0$, así $Vx = 0$. Ahora si $x \in N(V)$, entonces $Vx = 0$, entonces $Bx = BWVx = 0$, por lo que $Bx = 0$.

Si $x \in N(B) = N(V)$, entonces $Vx = 0$, entonces $WVx = 0$, ahora si $x \in N(WV)$, entonces $WVx = 0$, entonces $Bx = BWVx = 0$, así $Bx = 0$. También por 1. de este Teorema y el Teorema 1.3 se tiene que $N(B) = N(AB).$

4. Sea $w \in R(AU)$, entonces $w = AUx = ABAUx \in R(AB)$. Si $w \in R(AB)$, entonces $w = ABx = AUQBx \in R(AU).$

5. Sea $x \in N(VA)$, entonces $VAx = 0$, entonces $BAx = BWVx = BW(0) = 0$, entonces $BAx = 0$, por lo que $x \in N(BA)$. Sea $x \in N(BA)$, entonces $BAx = 0$, entonces $VAx = VABAx = VA(0) = 0$, entonces $VAx = 0$, por lo tanto, $x \in N(VA).$ $\square$

Las descomposiciones de un espacio en suma directa son fundamentales para obtener representaciones matriciales de un operador lineal acotado definido en espacios de Banach, ya que proporcionan una estructura algebraica que permite descomponer el operador en

componentes más simples y manejables. Esta descomposición facilita expresar el operador como una matriz, capturando de manera precisa en que espacios actúa y entender de mejor forma ciertas propiedades.

El siguiente Corolario nos dará descomposiciones de los espacios en los que estarán definidos los operadores que vamos a considerar.

Corolario 2.1. Sean $A \in \mathbb{B}(X, Y)$, $U \in \mathbb{B}(Z, X)$ y $V \in \mathbb{B}(Y, Z)$. Si A es (U, V) -invertible con $B = A^{-(U, V)}$, entonces

$$Y = R(AB) \oplus N(B) \text{ y } X = R(B) \oplus N(BA). \quad (2.1)$$

Demostración. Por el Teorema 1.3 sabemos que $N(B) = N(AB)$ y $R(B) = R(BA)$, como AB y BA son proyecciones, se obtiene el resultado. $\square$

El siguiente Teorema es de suma importancia, ya que nos proporciona una representación matricial de un operador (U, V) -invertible, lo que permite una comprensión más clara y estructurada de esta inversa en los subespacios utilizados para descomponer los espacios donde los operadores están definidos.

Esta representación no solo nos muestra de manera precisa la acción del operador en cada componente de la descomposición, sino que también nos ofrece una caracterización fundamental de la (U, V) -invertibilidad.

Dicha caracterización será una herramienta clave en la obtención y demostración de numerosos resultados subsecuentes, consolidando así el papel central de la representación matricial en el estudio de estas inversas.

Teorema 2.10. Sean $A \in \mathbb{B}(X, Y)$, $U \in \mathbb{B}(Z, X)$ y $V \in \mathbb{B}(Y, Z)$. A es (U, V) -invertible si y solo si

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} R(U) \\ N(VA) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} R(AU) \\ N(V) \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

para algún $A_{22} \in \mathbb{B}(N(VA), N(V))$, A_{11} es invertible y U, V son regulares internos. Más aún,

$$B = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} R(AU) \\ N(V) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} R(U) \\ N(VA) \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

es la (U, V) -inversa de A .

Demostración. ($\longrightarrow$) Supongamos que A es (U, V) -invertible con $B = A^{-(U, V)}$. Por el Corolario 7.1 tenemos las siguientes descomposiciones

$$Y = R(AB) \oplus N(B) \text{ y } X = R(B) \oplus N(BA).$$

Más aún, como $BAB = B$, B tiene una inversa interna que es A y por el Teorema 1.5, tenemos

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} X_1 \\ N(B) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} R(B) \\ Y_1 \end{pmatrix},$$

donde B_{11} es invertible y

$$A = \begin{pmatrix} B_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} R(B) \\ Y_1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} X_1 \\ N(B) \end{pmatrix},$$

para algún $A_{22} \in \mathbb{B}(Y_1, N(T))$. Por el Teorema 2.9 (1) (respectivamente (2)), tenemos $R(B) = R(U)$ ($N(B) = N(V)$) y eligiendo $X_1 = R(AU)$ y $Y_1 = N(VA)$ obtenemos la representación matricial para A y su (U, V) -inversa. El Teorema 2.2 nos da la regularidad de U y V .

($\longleftarrow$) Supongamos que $A \in B(X, Y)$ tiene la representación (7.2), donde U y V son regulares internos con $Q \in \mathbb{B}(X, Z)$ y $W \in \mathbb{B}(Z, Y)$. Usando descomposiciones apropiadas $X = R(U) \oplus N(VA)$ y $Z = Z_1 \oplus N(U)$, Por el Teorema 1.5, tenemos

$$U = \begin{pmatrix} U_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} Z_1 \\ N(U) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} R(U) \\ N(VA) \end{pmatrix}.$$

y

$$Q = \begin{pmatrix} U_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & Q_{22} \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} R(U) \\ N(VA) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} Z_1 \\ N(U) \end{pmatrix}.$$

Análogamente,

$$V = \begin{pmatrix} V_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} R(AU) \\ N(V) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} R(V) \\ Z_2 \end{pmatrix},$$

y

$$W = \begin{pmatrix} V_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & W_{22} \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} R(V) \\ Z_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} R(AU) \\ N(V) \end{pmatrix}.$$

Sea

$$B = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} R(AU) \\ N(V) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} R(U) \\ N(VA) \end{pmatrix},$$

entonces

$$UQB = \begin{pmatrix} U_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & Q_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = B.$$

$$BWV = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & W_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = B.$$

$$BAU = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = U.$$

$$VAB = \begin{pmatrix} V_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = V.$$

Por lo tanto, $B = A^{-(U,V)}$. □

2.4. Perturbaciones de la (U, V) -inversa

Otro de los objetivos de ésta tesis es estudiar las clases de operadores admisibles para la clase de operadores (U, V) -invertibles, en esta sección se da un Teorema que caracteriza de forma matricial la clase de operadores bajo la cual podemos perturbar un operador que es (U, V) -invertible.

Teorema 2.11. Sean $A \in \mathbb{B}(X, Y)$, $U \in \mathbb{B}(Z, X)$ y $V \in \mathbb{B}(Y, Z)$. Supongamos que A es (U, V) -invertible. Entonces $A + D$ es (U, V) invertible si y solo si $D = \begin{pmatrix} D_{11} & 0 \\ 0 & D_{22} \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} R(U) \\ N(VA) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} R(AU) \\ N(V) \end{pmatrix}$ y $D_{11} + A_{11}$ es invertible.

Demostración. $\longrightarrow$] Como A es (U, V) -invertible se tiene que

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} R(U) \\ N(VA) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} R(AU) \\ N(V) \end{pmatrix}.$$

Consideremos la siguiente representación matricial de D ,

$$D = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} R(U) \\ N(VA) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} R(AU) \\ N(V) \end{pmatrix},$$

entonces

$$A+D = \begin{pmatrix} D_{11} + A_{11} & D_{12} \\ D_{21} & A_{22} + D_{22} \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} R(U) \\ N(VA) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} R(AU) \\ N(V) \end{pmatrix}.$$

Como $A + D$ es (U, V) -invertible, entonces por el Teorema 2.10

$$A + D = \begin{pmatrix} T_{11} & 0 \\ 0 & T_{22} \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} R(U) \\ N(VA) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} R(AU) \\ N(V) \end{pmatrix},$$

donde $A_{11} + D_{11}$ es invertible, de aquí que

$$A_{11} + D_{11} = T_{11}, D_{12} = 0, D_{21} = 0, A_{22} + D_{22} = T_{22}.$$

Por lo tanto,

$$D = \begin{pmatrix} D_{11} & 0 \\ 0 & D_{22} \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} R(U) \\ N(VA) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} R(AU) \\ N(V) \end{pmatrix},$$

$D_{11} + A_{11}$ es invertible.

$\longleftarrow$] Sea

$$D = \begin{pmatrix} D_{11} & 0 \\ 0 & D_{22} \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} R(U) \\ N(VA) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} R(AU) \\ N(V) \end{pmatrix}$$

y $D_{11} + A_{11}$ es invertible. Como A es (U, V) -invertible se tiene que

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} R(U) \\ N(VA) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} R(AU) \\ N(V) \end{pmatrix}$$

de aquí que,

$$A+D = \begin{pmatrix} D_{11} + A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} + D_{22} \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} R(U) \\ N(VA) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} R(AU) \\ N(V) \end{pmatrix},$$

por hipótesis se tiene que $D_{11} + A_{11}$ es invertible, como A es (U, V) -invertible, por el Teorema 2.2 U, V son regulares, así por el Teorema 2.10 $A + D$ es (U, V) -invertible. $\square$

Capítulo 3

Propiedades extremales de la (U, V) -inversa

Algunos autores han introducido órdenes parciales en el estudio de estructuras algebraicas y el estudio de los elementos de estas estructuras, relacionados a los órdenes parciales se tienen conceptos como el de elemento máximo y elemento mínimo de algún subconjunto donde se esté definiendo ese orden parcial, en lo que sigue introducimos órdenes parciales en el espacio de operadores lineales acotados definidos sobre espacios de Banach para caracterizar a la (U, V) -inversa en términos de estos órdenes parciales y de elementos máximo y mínimo de ciertos subconjuntos del espacio de operadores lineales acotados, que al mismo tiempo nos darán idea de como se construye la (U, V) -inversa de un operador cuando esta exista.

3.1. Orden parcial de Mitsch en $\mathbb{B}(Y, X)$

En $\mathbb{B}(Y, X)$ definimos una relación $\mathcal{M}_g$ como sigue, para cualesquiera $T, R \in \mathbb{B}(Y, X)$, $T\mathcal{M}_gR$ si existen $L \in \mathbb{B}(X)$ y $K \in \mathbb{B}(Y)$ tales que

$$LT = LR = T = TK = RK.$$

De la definición de la relación $\mathcal{M}_g$ definida en el espacio de operadores $\mathbb{B}(Y, X)$ al inicio de ésta sección se puede demostrar el siguiente:

Teorema 3.1. $\mathcal{M}_g$ es un orden parcial en $\mathbb{B}(Y, X)$.

Demostración. Sean $T, R \in \mathbb{B}(Y, X)$, es suficiente tomar $I_X \in \mathbb{B}(X)$ y $I_Y \in \mathbb{B}(Y)$ para comprobar que $T\mathcal{M}_gT$. Si $T\mathcal{M}_gR$ y $R\mathcal{M}_gT$, existen $L_1, L_2 \in \mathbb{B}(X)$ y $K_1, K_2 \in \mathbb{B}(Y)$ tales que

$$L_1T = L_1R = T = TK_1 = RK_1 \text{ y}$$

$$L_2R = L_2T = R = RK_2 = TK_2,$$

entonces

$$T = L_1R = L_1(RK_2) = (L_1R)K_2 = TK_2 = R,$$

entonces $T = R$. También si $T\mathcal{M}_gR$ y $R\mathcal{M}_gH$, existen $L_1, L_2 \in \mathbb{B}(X)$ y $K_1, K_2 \in \mathbb{B}(Y)$ tales que

$$L_1T = L_1R = T = TK_1 = RK_1 \text{ y}$$

$$L_2R = L_2H = R = RK_2 = HK_2,$$

entonces

$$T = L_1R = L_1(L_2H) = (L_1L_2)H \text{ y}$$

$$T = L_1T = L_1(RK_1) = L_1(L_2R)K_1 = L_1L_2(RK_1) = (L_1L_2)T,$$

también

$$T = RK_1 = (HK_2)K_1 = H(K_2K_1) \text{ y}$$

$$T = TK_1 = (L_1R)K_1 = L_1(RK_2)K_1 = (L_1R)(K_2K_1) = T(K_2K_1),$$

donde $L_1L_2 \in \mathbb{B}(X)$ y $K_2K_1 \in \mathbb{B}(Y)$, entonces $T\mathcal{M}_gH$, entonces $\mathcal{M}_g$ es un orden parcial en $\mathbb{B}(Y, X)$. $\square$

Si bien $\mathcal{M}_g$ es un orden parcial en $\mathbb{B}(Y, X)$ restringiremos nuestro estudio a ciertos conjuntos especiales que nos serán de mayor utilidad para el estudio de la (U, V) -inversa.

Consideremos los siguientes conjuntos,

$$F_A = \{F \in \mathbb{B}(Y, X) | FAF = F, F = UQF, F = FWV$$

$$\text{para algunos } Q \in \mathbb{B}(X, Z), W \in \mathbb{B}(Z, Y)\}$$

$$G_A = \{G \in \mathbb{B}(Y, X) | GAG = G, GAU = U \text{ y } VAG = V\}.$$

Como es de esperarse, $\mathcal{M}_g$ es un orden parcial restringido a cada uno de los conjuntos F_A y G_A , pero más aún, se pueden comparar los elementos de estos conjuntos a través del orden $\mathcal{M}_g$, tenemos la siguiente:

Proposición 3.1. FM_gG para cada $F \in F_A$ y cada $G \in G_A$.

Demostración. Sean $F \in F_A$ y $G \in G_A$, entonces

$$FAF = F, F = UQF, F = FWV$$

para algunos $Q \in \mathbb{B}(X, Z), W \in \mathbb{B}(Z, Y)$ y

$$GAG = G, GAU = U, VAG = V,$$

entonces

$$F = FW(VAG) = (FWV)AG = FAG, \text{ entonces } F = FAG,$$

también

$$F = UQF = (GAU)QF = GA(UQF) = GAF, \text{ entonces } F = GAF.$$

De aquí que,

$$\begin{aligned} FAF &= (FA)(FAG) = (FA)^2G = FAG = F = FAF = (GAF)(AF) \\ &= F(AF)^2 = G(AF), \text{ entonces } FM_gG. \end{aligned}$$

□

El siguiente Teorema nos proporciona una caracterización de la (U, V) -inversa en términos del máximo y mínimo de los subconjuntos antes definidos en el orden $\mathcal{M}_g$, los cuales representan el máximo y el mínimo con respecto al orden parcial introducido anteriormente. Es importante notar que la construcción de estos subconjuntos se fundamenta en la consideración de inversas externas del operador A , mientras que las dos igualdades adicionales provienen directamente de la definición de la (U, V) -inversa en cada caso. De este modo, podemos interpretar este resultado como una descomposición estructurada de la definición, en la que cada subconjunto recoge de manera natural un conjunto específico de condiciones, permitiéndonos analizar la (U, V) -invertibilidad desde una perspectiva más organizada.

Teorema 3.2. Sean $A \in \mathbb{B}(X, Y)$, $U \in \mathbb{B}(Z, X)$ y $V \in \mathbb{B}(Y, Z)$. Entonces $B = A^{-(U,V)}$ si y solo si $B = \max F_A = \min G_A$ en el orden $\mathcal{M}_g$.

Demostración. $\longrightarrow$] De la Definición 2.1, tenemos que $B \in F_A \cap G_A$, entonces por la Proposición 4.1 sabemos que $F\mathcal{M}_g B$ para cada $F \in F_A$ y $B\mathcal{M}_g G$ para cada $G \in G_A$, así que $B = \max F_A = \min G_A$.

$\longleftarrow$] Por hipótesis tenemos que $B = \max F_A = \min G_A$, entonces $B \in F_A \cap G_A$, así la Definición 2.1 se cumple, por lo tanto $B = A^{-(U,V)}$. $\square$

Como hemos visto, las proyecciones son herramientas fundamentales en la teoría de operadores lineales acotados, ya que permiten descomponer un espacio en subespacios complementarios. Esto facilita el análisis de los operadores al reducir problemas a subespacios más manejables. Las proyecciones también ayudan a caracterizar propiedades clave de los operadores, como su rango e imagen, y son esenciales en la construcción y comprensión de diversas clases de inversas generalizadas. En este sentido, la siguiente Proposición nos da propiedades relacionadas con las proyecciones las cuales nos serán de utilidad en el desarrollo de los resultados posteriores.

Proposición 3.2. Sean $P, Q \in \mathbb{B}(X)$ proyecciones, entonces

1. $R(P) \subseteq R(Q)$ si y solo si $QP = P$.
2. $N(P) \subseteq N(Q)$ si y solo si $QP = Q$.

Demostración. (1) $\longrightarrow$] Sea $x \in X$, como $Px = P^2x$, entonces $Px \in R(P)$, así $Px \in R(Q)$, por lo que $QPx = Px$, así $QP = P$.
 $\longleftarrow$] Si $y \in R(P)$, entonces $y = Px = QPx \in R(Q)$ para algún $x \in X$, entonces $R(P) \subseteq R(Q)$. En forma similar podemos demostrar (2). $\square$

Es complicado verificar las condiciones que definen a los conjuntos F_A y G_A , es decir, no es tan fácil verificar cuando un operador pertenece a alguno de estos conjuntos, ya que las condiciones a verificar son complicadas, en los siguientes Teoremas damos una caracterización de éstos conjuntos con condiciones más sencillas.

Teorema 3.3. Sean $A \in \mathbb{B}(X, Y)$, $U \in \mathbb{B}(Z, X)$ y $V \in \mathbb{B}(Y, Z)$ tales que $UQU = U$ y $VWV = V$ para algunos $Q \in \mathbb{B}(X, Z)$, $W \in \mathbb{B}(Z, Y)$. Entonces $F \in F_A$ si y solo si $FAF = F$, $R(F) \subseteq R(U)$ y $N(V) \subseteq N(F)$.

Demostración. $\rightarrow]$ $F \in F_A$ entonces $FAF = F, F = UQF$ y $F = FWV$, entonces $R(F) \subseteq R(U)$ y $N(V) \subseteq N(F)$.
 $\leftarrow]$ Por hipótesis, tenemos que $R(F) = R(FA) \subseteq R(U) = R(UQ)$, así por la Proposición 4.1, $UQFA = FA$, entonces $UQF = UQFAF = FAF = F$, también $N(V) = N(WV) \subseteq N(AF) = N(F)$, entonces $AFWV = AF$ así $FWV = FAFWV = FAF = F$, entonces $F = UQF$ y $F = FWV$, por lo tanto $F \in F_A$. $\square$

Teorema 3.4. Sean $A \in \mathbb{B}(X, Y)$, $U \in \mathbb{B}(Z, X)$ y $V \in \mathbb{B}(Y, Z)$ tales que $UQU = U$ y $VWV = V$ para algunos $Q \in \mathbb{B}(X, Z)$, $W \in \mathbb{B}(Z, Y)$. Entonces $G \in G_A$ si y solo si $GAG = G$, $R(U) \subseteq R(G)$ y $N(G) \subseteq N(V)$.

Demostración. $\rightarrow]$ Si $G \in G_A$ entonces $GAG = G$, $U = GAU$ y $V = VAG$, así $R(U) \subseteq R(G)$ y $N(G) \subseteq N(V)$.
 $\leftarrow]$ Por hipótesis, se tiene que $R(U) = R(UQ) \subseteq R(GA) = R(G)$ and $N(G) = N(AG) \subseteq N(WV) = N(V)$, entonces por la Proposición 4.1 tenemos que $GAUQ = UQ$ y $WVAG = WV$, entonces $GAU = GAUQU = UQU = U$ y $VAG = VWVAG = VWV = V$, entonces $U = GAU$ y $V = VAG$, por lo que $G \in G_A$. $\square$

Los teoremas y resultados presentados previamente han sido fundamentales para establecer una base sólida que conduce, de forma natural y elegante, al Teorema principal de esta sección. Cada resultado ha permitido construir las herramientas necesarias y ha brindado una comprensión más profunda del concepto de (U, V) -inversa, revelando conexiones esenciales que, de otro modo, serían difíciles de discernir. Así, el Teorema principal se desprende de manera fluida, evidenciando cómo estos elementos previos se entrelazan para culminar en el siguiente:

Corolario 3.1. Sean $A \in \mathbb{B}(X, Y)$, $U \in \mathbb{B}(Z, X)$ y $V \in \mathbb{B}(Y, Z)$ tales que $UQU = U$ y $VWV = V$ para algunos $Q \in \mathbb{B}(X, Z)$, $W \in \mathbb{B}(Z, Y)$. Los siguientes enunciados son equivalentes:

1. $B = A^{-(U, V)}$
2. $B = \max F_A = \min G_A$ en el orden $\mathcal{M}_g$.

$$3. B \in F_A \cap G_A$$

$$4. BAB = B, R(B) = R(U), N(V) = N(B)$$

$$5. B = A_{R(U), N(V)}^{(2)}.$$

Por el Corolario 3.1 y el Teorema 4.1 para encontrar $A^{-(U,V)}$ tenemos que buscar entre todas las inversas externas F de A aquellas tales que $R(F) \subseteq R(U)$, $N(V) \subseteq N(F)$. Nos detenemos cuando encontramos un elemento $B \in F_A$ tal que $BAB = B$, $R(B) = R(U)$, $N(V) = N(B)$, en este caso $B = A^{-(U,V)}$. Con esta idea en mente definimos $\mathbb{E}_A := \{F \in \mathbb{B}(Y, X) | FAF = F\}$ y para $F_0, F_1 \in \mathbb{E}_A$, decimos que $F_0 \leq_1 F_1$ si y solo si $R(F_0) \subseteq R(F_1)$ y $N(F_1) \subseteq N(F_0)$.

3.2. Órdenes parciales relacionados al orden de Mitsch

Los órdenes parciales que se introducen a continuación guardan una estrecha similitud con los previamente definidos y, de manera análoga, permiten una construcción equivalente de la (U, V) -inversa previamente propuesta. En uno de estos órdenes, se observa un ensanchamiento del rango y una reducción del núcleo del operador, mientras que en el otro ocurre el fenómeno opuesto: el rango se reduce y el núcleo se amplía. Esta dualidad proporciona una perspectiva enriquecedora para el estudio de la (U, V) -invertibilidad.

Proposición 3.3. $(\mathbb{E}_A, \leq_1)$ es un conjunto parcialmente ordenado.

Demostración. Sea $F_0, F_1 \in \mathbb{E}_A$, es claro que $F_0 \leq_1 F_0$, así $\leq_1$ es reflexivo. Si $F_0 \leq_1 F_1$ y $F_1 \leq_1 F_0$, entonces $R(F_0) \subseteq R(F_1)$, $N(F_1) \subseteq N(F_0)$ y $R(F_1) \subseteq R(F_0)$, $N(F_0) \subseteq N(F_1)$, entonces $R(F_0A) \subseteq R(F_1A)$, $N(AF_1) \subseteq N(AF_0)$ y $R(F_1A) \subseteq R(F_0A)$, $N(AF_0) \subseteq N(AF_1)$ entonces por la Proposición 4.1 obtenemos que

$$F_1AF_0A = F_0A \text{ y } AF_1AF_0 = AF_1 \text{ entonces}$$

$$F_0 = (F_0A)F_0 = F_1AF_0AF_0 = F_1AF_0 \text{ y}$$

$$F_1 = F_1(AF_1) = F_1AF_1AF_0 = F_1AF_0 \text{ así } F_0 = F_1,$$

también es claro que $\leq_1$ es transitiva. $\square$

Es importante notar que $\mathcal{M}_g$ es un orden parcial en $\mathbb{E}_A$, así podemos considerar los conjuntos parcialmente ordenados $(\mathbb{E}_A, \leq_1)$ y $(\mathbb{E}_A, \mathcal{M}_g)$, podemos tratar de encontrar $\max F_A$ y/o $\min G_A$ en $(\mathbb{E}_A, \leq_1)$, pero esto no será necesario.

Teorema 3.5. *Sean $F_0, F_1 \in \mathbb{E}_A$, entonces $F_0\mathcal{M}_gF_1$ si y solo si $F_0 \leq_1 F_1$.*

Demostración. $\longrightarrow$ Si $F_0\mathcal{M}_gF_1$, entonces existen $L \in \mathbb{B}(X)$ y $K \in \mathbb{B}(Y)$ tales que

$$LF_0 = LF_1 = F_0 = F_0K = F_1K$$

entonces $N(F_1) \subseteq N(F_0)$ y $R(F_0) \subseteq R(F_1)$, entonces $F_0 \leq_1 F_1$.
 $\longleftarrow$ Si $F_0 \leq_1 F_1$ entonces $R(F_0) \subseteq R(F_1)$ y $N(F_1) \subseteq N(F_0)$, así $R(F_0) \subseteq R(F_1) = R(F_1A)$ y $N(AF_1) \subseteq N(AF_0)$ entonces por la Proposición 4.1 obtenemos que

$$F_1AF_0 = F_0 \text{ y } AF_0AF_1 = AF_0.$$

Definimos $K := AF_0 \in \mathbb{B}(Y)$ y $L := F_0A \in \mathbb{B}(X)$ entonces $F_0 = F_1K = F_0K$ y $F_0 = LF_0$, también $LF_1 = F_0AF_1 = (F_1AF_0)AF_1 = F_1(AF_0AF_1) = F_1AF_0 = F_0$, entonces $LF_1 = F_0$, por lo tanto $F_0\mathcal{M}_gF_1$. $\square$

Análogamente, podemos definir otro orden parcial relacionado a $\mathcal{M}_g$ que nos dará otra forma de construir la (U, V) -inversa. Para $F_0, F_1 \in \mathbb{E}_A$, decimos que $F_0 \geq_N F_1$ si y solo si $N(F_0) \subseteq N(F_1)$ con $R(F_1) \subseteq R(F_0)$.

Proposición 3.4. $(\mathbb{E}_A, \geq_N)$ es un conjunto parcialmente ordenado.

La demostración es análoga a la Proposición 3.3, con este nuevo orden parcial, tenemos alternativas para obtener la (U, V) -inversa, primero algunos resultados.

Proposición 3.5. $G \geq_N F$ para cada $F \in F_A$ y cada $G \in G_A$.

Demostración. Sean $F \in F_A$ y $G \in G_A$, por la Proposición 3.3 sabemos que $F\mathcal{M}_gG$, es equivalente a $F \leq_R G$, así $R(F) \subseteq R(G)$ y $N(G) \subseteq N(F)$, por lo tanto $G \geq_N F$. $\square$

Teorema 3.6. Sean $A \in \mathbb{B}(X, Y)$, $U \in \mathbb{B}(Z, X)$ y $V \in \mathbb{B}(Y, Z)$. Entonces $B = A^{-(U, V)}$ si y solo si $B = \text{máx} G_A = \text{mín} F_A$ en el orden parcial $\geq_N$.

Capítulo 4

Operadores (U, V) -invertibles por la derecha y por la izquierda

En una estructura algebraica, cuando se puede definir la invertibilidad de un elemento tanto por la derecha como por la izquierda, suele ocurrir que la combinación de ambas condiciones implica que dicho elemento es invertible en un sentido más completo. Este concepto se extiende naturalmente a la teoría de inversas generalizadas, donde la idea de invertibilidad bilateral se adapta para estudiar casos en los que no necesariamente se cuenta con una inversa única o convencional. En este contexto, se han desarrollado definiciones de invertibilidad derecha e invertibilidad izquierda para elementos, con el objetivo de que, al cumplirse ambas condiciones de forma simultánea, se recupere una noción de invertibilidad más general y útil en el análisis algebraico.

En el caso de que existe un operador $S \in \mathbb{B}(Y, X)$ tal que $TS = I_Y$ y $ST = I_X$, donde I_X (I_Y) denotan el operador identidad en X (Y), es único y llamamos a S la inversa de T . Cuando solo una de estas condiciones se cumple, en el primer caso decimos que T es invertible por la derecha (invertible por la izquierda) y S es una inversa izquierda (derecha), en ambos casos S no es

necesariamente único y esto motiva el estudio de inversas derechas e izquierdas.

En esta dirección, Drazin da una definición para (b, c) -inversas izquierdas (derechas) (ver [4]), a partir de estas ideas damos la siguiente definición.

Definición 4.1. Sean $A \in \mathbb{B}(X, Y)$, $U \in \mathbb{B}(Z, X)$ y $V \in \mathbb{B}(Y, Z)$.

1. Decimos que A es *left (U, V) -invertible* si existe $T_1 \in \mathbb{B}(Z, X)$ tal que $U = T_1 V A U$. En este caso, $B := T_1 V \in \mathbb{B}(Y, X)$ es una *left (U, V) -inversa* de A .
2. Decimos que A es *right (U, V) -invertible* si existe $T_2 \in \mathbb{B}(Y, Z)$ tal que $V = V A U T_2$. En este caso, $B := U T_2 \in \mathbb{B}(Y, X)$ es una *right (U, V) -inversa* de A .

La formulación de la (U, V) -invertibilidad por la derecha y por la izquierda resulta ser la más adecuada, ya que como veremos más adelante, permite descomponer la (U, V) -invertibilidad total en dos condiciones complementarias que, al cumplirse simultáneamente, garantizan de manera rigurosa que un operador sea (U, V) -invertible.

Este enfoque no solo aporta claridad conceptual al separar las contribuciones individuales de U y V en términos de las propiedades del operador, sino que también facilita su análisis en escenarios donde estas condiciones pueden verificarse de manera independiente.

4.1. Propiedades básicas de los operadores (U, V) -invertibles por la derecha y por la izquierda

La formulación de la (U, V) -invertibilidad por la derecha y por la izquierda no solo es la más adecuada, sino que también ofrece una herramienta conceptual poderosa al permitir el análisis independiente de cada una de estas propiedades.

Este enfoque facilita la deducción y exploración de características específicas asociadas a la (U, V) -invertibilidad por la derecha o por la izquierda, proporcionando un entendimiento más profundo de su comportamiento.

Como es conocido, aún en el concepto de invertibilidad usual por la izquierda y derecha para funciones, no necesariamente tenemos unicidad, pero podemos obtener propiedades cuando existe.

Teorema 4.1. Sean $A \in \mathbb{B}(X, Y)$, $U \in \mathbb{B}(Z, X)$ y $V \in \mathbb{B}(Y, Z)$.

1. Si A es left (U, V) -invertible, entonces existe $B \in \mathbb{B}(Y, X)$ tal que $U = BAU$ y $BWV = BAB$, para algún $W \in \mathbb{B}(Z, Y)$.
2. Si A es right (U, V) -invertible, entonces existe $B \in \mathbb{B}(Y, X)$ tal que $V = VAB$ y $UQB = BAB$ para algún $Q \in \mathbb{B}(X, Z)$.

Demostración. 1. Como A es left (U, V) -invertible, tenemos que $U = T_1VAU$ para algún $T_1 \in \mathbb{B}(Z, X)$, definimos $B := T_1V \in \mathbb{B}(Y, X)$, entonces

$$BAU = T_1VAU = U \text{ entonces } BAU = U$$

y definimos $W := AT_1 \in \mathbb{B}(Z, Y)$, entonces

$$BWV = BA(T_1V) = BAB.$$

2. Como A es right (U, V) -invertible, sabemos que $V = VAUT_2$ para algún $T_2 \in \mathbb{B}(Y, Z)$, definimos $B := UT_2 \in \mathbb{B}(Y, X)$ y es tal que $VAB = VAUT_2 = V$ y definimos $Q := T_2A \in \mathbb{B}(X, Z)$ es tal que

$$UQB = (UT_2)AB = BAB.$$

□

Como podemos ver en el Teorema 4.1, para operadores left (right) (U, V) -invertibles con una left (right) (U, V) -inversa B , no es necesariamente una inversa externa, es decir, no necesariamente $BAB = B$.

Teorema 4.2. Sean $A \in \mathbb{B}(X, Y)$, $U \in \mathbb{B}(Z, X)$ y $V \in \mathbb{B}(Y, Z)$.

1. Si $BAU = U$ y $B = BWV$, para algunos $B \in \mathbb{B}(Y, X)$, $W \in \mathbb{B}(Z, Y)$ entonces A es left (U, V) -invertible.
2. Si $VAB = V$ y $B = UQB$ para algunos $B \in \mathbb{B}(Y, X)$, $Q \in \mathbb{B}(X, Z)$, entonces A es right (U, V) -invertible.

Demostración. 1. Como

$$U = BAU = (BW)(VAU) = T_1VAU,$$

donde $T_1 = BW \in \mathbb{B}(Z, X)$, entonces A es left (U, V) -invertible. En este caso $T_1V = BWV = B$ es una left (U, V) -inversa de A .

2. Como $V = VAB = VAU(QB) = VAUT_2$, donde $T_2 = QB \in \mathbb{B}(Y, Z)$, entonces A es right (U, V) -invertible y $UT_2 = UQB = B$ es una right (U, V) -inversa de A .

□

Para obtener representaciones matriciales de operadores lineales acotados y en particular de inversas generalizadas, es importante conocer relaciones entre núcleos y rangos, en este sentido tenemos las siguientes Proposiciones cuyas demostraciones son una rutina.

Teorema 4.3. Sean $A \in \mathbb{B}(X, Y)$, $U \in \mathbb{B}(Z, X)$ y $V \in \mathbb{B}(Y, Z)$. Si A es left (U, V) -invertible, entonces

1. $N(U) = N(AU) = N(VAU)$
2. $R(U) \subseteq R(BA) \subseteq R(B) \subseteq R(T_1)$, donde $B = T_1V \in \mathbb{B}(Y, X)$ es una left (U, V) -inversa y T_1 es como en la Definición 4.1.
3. Si además $B = BWV$, para algún $W \in \mathbb{B}(Z, Y)$ entonces $N(V) \subseteq N(WV) \subseteq N(B)$.

Teorema 4.4. Sean $A \in \mathbb{B}(X, Y)$, $U \in \mathbb{B}(Z, X)$ y $V \in \mathbb{B}(Y, Z)$. Si A es right (U, V) -invertible, entonces

1. $R(V) = R(VA) = R(VAU)$
2. $N(T_2) \subseteq N(B) \subseteq N(AB) \subseteq N(V)$, donde $B = UT_2 \in \mathbb{B}(Y, X)$ es una right (U, V) -inversa y T_2 es como en la Definición 4.1.
3. Si además $B = UQB$, para algún $Q \in \mathbb{B}(X, Z)$ entonces $N(B) \subseteq N(QB) \subseteq N(B)$.

Las definiciones cuidadosamente formuladas de invertibilidad por la izquierda y por la derecha, tal como las hemos introducido, no solo permiten un análisis detallado de la estructura de los elementos dentro de nuestra teoría, sino que también aseguran que, al cumplirse ambas condiciones simultáneamente, obtenemos una equivalencia con el concepto de invertibilidad que estamos estudiando. Esta equivalencia garantiza que las condiciones laterales no son simplemente propiedades independientes, sino que juntas forman una caracterización completa de la invertibilidad en nuestro contexto. Esto refuerza la robustez de nuestra definición al mostrar que estos conceptos laterales, correctamente definidos, llevan de forma natural al concepto global de invertibilidad buscado.

Teorema 4.5. Sean $A \in \mathbb{B}(X, Y)$, $U \in \mathbb{B}(Z, X)$ y $V \in \mathbb{B}(Y, Z)$. A es (U, V) -invertible si y solo si A es left y right (U, V) -invertible.

Demostración. $\longrightarrow$] Si $B = A^{-(U, V)}$, las ecuaciones (7.1) se cumplen, definimos $T_1 := BW \in \mathbb{B}(Z, X)$, entonces

$$U = BAU = (BW)VAU = T_1VAU$$

y si definimos $T_2 := QB \in \mathbb{B}(Y, Z)$,

$$V = VAB = VAU(QB) = VAUT_2.$$

$\longleftarrow$] Si $U = T_1VAU$ y $V = VAUT_2$ para algunos $T_1 \in \mathbb{B}(Z, X)$ y $T_2 \in \mathbb{B}(Y, Z)$ entonces

$$U = T_1VAU = T_1(VAUT_2)AU = (T_1VAU)T_2AU = (UT_2)AU \text{ y}$$

$$V = VAUT_2 = VAT_1(VAUT_2) = VA(T_1V).$$

También $T_1V = (T_1VAU)T_2 = UT_2$, entonces definimos $B := T_1V = UT_2$, entonces $U = BAU$, $V = VAB$ y

$$B = UT_2 = (UT_2AU)T_2 = U(T_2A)UT_2 = U(T_2A)B,$$

$$B = T_1V = T_1(VAT_1V) = (T_1V)(AT_1)V = B(AT_1)V.$$

Por lo tanto, $B = A^{-(U, V)}$. □

4.2. Left y right operadores Drazin invertibles

En el estudio de operadores lineales acotados, los conceptos de left Drazin invertible y right Drazin invertible han surgido como herramientas clave para analizar la estructura de operadores que no poseen una inversa clásica en sentido completo. Estos operadores, definidos por condiciones específicas de invertibilidad parcial, permiten extender el análisis a casos donde solo se cumplen propiedades de invertibilidad lateral (izquierda o derecha).

En esta sección, estudiaremos cómo estos operadores se relacionan con el concepto de (U, V) -inversa, una generalización que captura una forma aún más flexible de invertibilidad en el contexto de espacios de Banach. Veremos que las condiciones de left y right Drazin invertibilidad ofrecen una base conceptual para entender y construir la (U, V) -inversa, proporcionando nuevas perspectivas y resultados en la teoría de operadores acotados.

Recordemos los siguientes conceptos, sea $A \in \mathbb{B}(X)$, decimos que A tiene ascenso finito si existe $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $N(A^k) = N(A^{k+1})$, en este caso el mínimo k que satisface esta condición se llama el ascenso de A y denotamos esto como $p := p(A)$. Si no existe tal k , definimos $p(A) = \infty$. Decimos que A tiene descenso finito si existe $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $R(A^k) = R(A^{k+1})$, en este caso el mínimo k que satisface esta condición se llama el descenso de A y lo denotamos como $q = q(A)$. Si no existe tal k , definimos $q(A) = \infty$.

El ascenso y descenso de $A \in \mathbb{B}(X)$ esta relacionado con operadores left y right Drazin invertibles.

Definición 4.2. 1. Un operador $A \in B(X)$ se llama left Drazin invertible si $p := p(A) < \infty$ y el subespacio $R(A) + N(A^p)$ es topológicamente complementado en X ,

2. $A \in B(X)$ se llama right Drazin invertible si $q := q(A) < \infty$ y el subespacio $N(A) \cap R(A^q)$ es topológicamente complementado en X .

Para este tipo de operadores tenemos el siguiente resultado, en esencia este Teorema nos dice que un operador left y right Drazin invertible tiene una descomposición de Kato.

Una descomposición de Kato para un operador lineal acotado T en un espacio de Banach X se refiere a una particular separación del espacio en subespacios que permite un análisis detallado de las propiedades de T . En términos generales, un operador T tiene una descomposición de Kato si existe una descomposición de X en dos subespacios cerrados $X = X_1 \oplus X_2$ tales que: T restringido a X_1 es un operador con rango cerrado. T restringido a X_2 es un operador quasi-nilpotente, es decir, un operador cuyo radio espectral es cero.

Este tipo de descomposición es útil porque permite descomponer T en partes con comportamientos distintos, donde una parte tiene un control estructural claro (rango cerrado) y la otra se desvanece bajo iteraciones sucesivas (quasi-nilpotencia). Las descomposiciones de Kato son importantes en el estudio de resolventes de operadores, en la teoría espectral y en aplicaciones de la teoría de perturbaciones, donde permiten descomponer problemas complejos en componentes más manejables.

Teorema 4.6. [9]

Sea $A \in \mathbb{B}(X)$. Entonces

1. *A es left Drazin invertible si y solo si existen subespacios cerrados A -invariantes M y N de X tales que $X = M \oplus N$ y $A = A_M \oplus A_N$, donde A_N es left invertible y A_N es nilpotente.*
2. *A es right Drazin invertible si y solo si existen subespacios cerrados A -invariantes M y N de X tales que $X = M \oplus N$ y $A = A_M \oplus A_N$, donde A_M es right invertible y A_N es nilpotente.*

Con el Teorema 4.6 podemos considerar un operador left Drazin invertible y un right Drazin invertible como una (U, V) -invertible.

Teorema 4.7. *Sea $A \in \mathbb{B}(X)$.*

1. *Si $A \in \mathbb{B}(X)$ es left Drazin invertible, entonces A es left (U, U) -invertible, donde U es la proyección acotada sobre M a lo largo de N , M y N son como en el Teorema 4.6.*
2. *Si $A \in \mathbb{B}(X)$ es right Drazin invertible, entonces A es right (V, V) -invertible, donde V es la proyección acotada sobre N a lo largo de M , M y N son como en el Teorema 4.6.*

Demostración. (1) Supongamos que A es left (U, V) -invertible, entonces existen subespacios cerrados A -invariantes M y N de X tales que $X = M \oplus N$ y $A = A_M \oplus A_N$, donde A_M es left invertible y A_N es nilpotente, entonces existe $L \in \mathbb{B}(M)$ tal que $LA_M = I$, de aquí obtenemos que

$$A = \begin{pmatrix} A_M & 0 \\ 0 & A_N \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix}.$$

Consideremos

$$U = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix} \text{ la proyección sobre } M \text{ a lo largo de } N,$$

Definimos,

$$T_1 = \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix}, \text{ donde } T \in \mathbb{B}(N) \text{ es arbitrario}$$

de estas representaciones matriciales es fácil ver que $U = T_1 V A U$ así A es left (U, U) -invertible y

$$B = \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix} \text{ es una left } (U, U)\text{-inversa de } A.$$

(2) Como A es right (U, V) -invertible, entonces existen subespacios cerrados A -invariantes M y N de X tales que $X = M \oplus N$ y $A = A_M \oplus A_N$, donde A_M es right invertible y A_N es nilpotente, entonces existe $R \in \mathbb{B}(M)$ tal que $A_M R = I$, de aquí obtenemos que

$$A = \begin{pmatrix} A_M & 0 \\ 0 & A_N \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix}.$$

Consideremos

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix} \text{ la proyección sobre } N \text{ a lo largo de } M.$$

Definimos,

$$T_2 = \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix}, \text{ donde } T \in \mathbb{B}(M) \text{ es arbitrario}$$

de estas representaciones matriciales es fácil ver que $V = VAUT_2$
 entonces A es left (V, V) -invertible y

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix} \text{ es una right } (V, V)\text{-inversa de } A.$$

□

Capítulo 5

Clasificación de elementos (U, V) -invertibles

5.1. Una relación de equivalencia en $\mathbb{B}(X, Y)^{-(U, V)}$

Alrededor de la (U, V) -inversa pueden surgir diversas preguntas, una de ellas es dados U y V como en la Definición 2.1, como hallamos a todos los operadores A que tengan la misma (U, V) -inversa, en principio esto puede ser una pregunta nada fácil, pero es posible responderla usando relaciones de equivalencia.

Definición 5.1. Sean $A \in \mathbb{B}(X, Y)$ un elemento (U, V) -invertible y $F \in \mathbb{B}(X, Y)$, definimos la siguiente relación,

$$A \sim F \text{ si } AA^{-(U, V)} = FA^{-(U, V)} \text{ y } A^{-(U, V)}A = A^{-(U, V)}F.$$

Observación 5.1. Notemos que si $A \sim F$, entonces $A^{-(U, V)}FA^{-(U, V)} = A^{-(U, V)}$, ya que $A^{-(U, V)}FA^{-(U, V)} = A^{-(U, V)}AA^{-(U, V)} = A^{-(U, V)}$.

En la definición 5.1 de la relación anterior, consideramos un operador (U, V) -invertible junto con otro operador que, en principio, podría ser cualquier operador lineal acotado. Sin embargo, el

siguiente resultado establece que este último debe ser necesariamente (U, V) -invertible, lo que revela una propiedad estructural significativa de esta relación.

Además, la demostración de este teorema pone de manifiesto la importancia de la representación matricial de un operador (U, V) -invertible, cuya estructura facilita y clarifica el análisis de la invertibilidad en este contexto. Aún más sorprendente es el hecho de que estos operadores comparten la misma (U, V) -inversa.

Teorema 5.1. *Sean $A \in \mathbb{B}(X, Y)$ un elemento (U, V) -invertible y $F \in \mathbb{B}(X, Y)$. Si $A \sim F$, entonces F es (U, V) -invertible. Más aún, $A^{-(U, V)} = F^{-(U, V)}$.*

Demostración. Si $A \sim F$, entonces $AA^{-(U, V)} = FA^{-(U, V)}$ y $A^{-(U, V)}A = A^{-(U, V)}F$. Por el Teorema 2.10, sabemos que

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} R(U) \\ N(VA) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} R(AU) \\ N(V) \end{pmatrix}$$

para algún $A_{22} \in \mathbb{B}(N(VA), N(V))$, A_{11} es invertible. También,

$$A^{-(U, V)} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} R(AU) \\ N(V) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} R(U) \\ N(VA) \end{pmatrix}.$$

Sea

$$F = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} R(U) \\ N(VA) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} R(AU) \\ N(V) \end{pmatrix}$$

la representación matricial de F .

Con estas representaciones y de que $AA^{-(U, V)} = FA^{-(U, V)}$ obtenemos que,

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{11}A_{11}^{-1} & 0 \\ F_{21}A_{11}^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

Así, $F_{11}A_{11}^{-1} = I$ y $F_{21}A_{11}^{-1} = 0$. También, de $A^{-(U, V)}A = A^{-(U, V)}F$ se obtiene que

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1}F_{11} & A_{11}^{-1}F_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

de esto tenemos que, $A_{11}^{-1}F_{11} = I$ y $A_{11}^{-1}F_{12} = 0$, por lo que $F_{11} = A_{11}$, $F_{12} = 0$ y $F_{21} = 0$. Por lo tanto, la representación matricial de F es

$$F = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & F_{22} \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} R(U) \\ N(VA) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} R(AU) \\ N(V) \end{pmatrix},$$

entonces por el Teorema 2.10 se tiene que F es (U, V) -invertible y $A^{-(U, V)} = F^{-(U, V)}$. $\square$

Notemos que con el Teorema 5.1 al relacionar un elemento (U, V) -invertible con otro operador bajo la relación $\sim$, lo que obtenemos es una relación en el conjunto de elementos (U, V) -invertibles, con $\mathbb{B}(X, Y)^{-(U, V)}$ denotemos al conjunto de elementos (U, V) -invertibles.

Veamos que la relación $\sim$ definida en la Definición 5.1 es una relación de equivalencia en $\mathbb{B}(X, Y)^{-(U, V)}$.

Teorema 5.2. *La relación $\sim$ de la Definición 5.1 es una relación de equivalencia.*

Demostración. Es claro que $A \sim A$, también si $A \sim F$, tenemos que $AA^{-(U, V)} = FA^{-(U, V)}$ y $A^{-(U, V)}A = A^{-(U, V)}F$, como también sabemos que $A^{-(U, V)} = F^{-(U, V)}$, se tiene que $FF^{-(U, V)} = AF^{-(U, V)}$ y $F^{-(U, V)}A = F^{-(U, V)}F$, así $F \sim A$. También si $A \sim F$ y $F \sim G$, se tiene que $AA^{-(U, V)} = FA^{-(U, V)}$, $A^{-(U, V)}A = A^{-(U, V)}F$ y $FF^{-(U, V)} = GF^{-(U, V)}$, $F^{-(U, V)}F = F^{-(U, V)}G$, como $A^{-(U, V)} = F^{-(U, V)}$ y $F^{-(U, V)} = G^{-(U, V)}$, entonces $A^{-(U, V)} = G^{-(U, V)}$ y así $AA^{-(U, V)} = GA^{-(U, V)}$, $A^{-(U, V)}A = A^{-(U, V)}G$. Por lo tanto, $A \sim G$. $\square$

Dado que hemos establecido que la relación anterior define una equivalencia en $\mathbb{B}(X, Y)^{-(U, V)}$, procederemos a caracterizar las condiciones bajo las cuales dos elementos de este conjunto están relacionados. Algunas de estas condiciones presentan una formulación particularmente sencilla, pues se reducen a la comparación de los núcleos y rangos de ciertos operadores asociados.

Teorema 5.3. *Sean $A \in \mathbb{B}(X, Y)$ elemento (U, V) -invertible y $F \in \mathbb{B}(X, Y)$. Son equivalentes:*

1. $A \sim F$
2. $A^{-(U, V)}FA^{-(U, V)} = A^{-(U, V)}$, $N(A^{-(U, V)}A) \subseteq N(A^{-(U, V)}F)$
y $R(AA^{-(U, V)}) \subseteq R(FA^{-(U, V)})$.
3. $A^{-(U, V)}FA^{-(U, V)} = A^{-(U, V)}$, $N(A^{-(U, V)}A) \subseteq N(A^{-(U, V)}F)$
y $R(FA^{-(U, V)}) \subseteq R(AA^{-(U, V)})$.

4. $A^{-(U, V)}FA^{-(U, V)} = A^{-(U, V)}$, $N(A^{-(U, V)}F) \subseteq N(A^{-(U, V)}A)$
y $R(FA^{-(U, V)}) \subseteq R(AA^{-(U, V)})$.
5. $N(A^{-(U, V)}F) \subseteq N(A^{-(U, V)}A)$ y $R(AA^{-(U, V)}) \subseteq R(FA^{-(U, V)})$.

Demostración. Veamos que 1. y 2. son equivalentes.

1. $\longrightarrow$ 2.] Si $A \sim F$, entonces por la observación 5.1 se tiene que $A^{-(U, V)}FA^{-(U, V)} = A^{-(U, V)}$ y por definición de $\sim$, se tiene que $N(A^{-(U, V)}A) \subseteq N(A^{-(U, V)}F)$ y $R(AA^{-(U, V)}) \subseteq R(FA^{-(U, V)})$.

2. $\longleftarrow$ 1.] Se tiene que $N(A^{-(U, V)}A) = R(I - A^{-(U, V)}A) \subseteq N(A^{-(U, V)}F)$, entonces $A^{-(U, V)}F(I - A^{-(U, V)}A) = 0$, así $A^{-(U, V)}F - A^{-(U, V)}FA^{-(U, V)}A = 0$, por lo que $A^{-(U, V)}F - A^{-(U, V)}A = 0$, entonces $A^{-(U, V)}F = A^{-(U, V)}A$. También como $R(AA^{-(U, V)}) \subseteq R(FA^{-(U, V)}) = N(I - FA^{-(U, V)})$, entonces $(I - FA^{-(U, V)})AA^{-(U, V)} = 0$, de aquí que, $AA^{-(U, V)} - FA^{-(U, V)}AA^{-(U, V)} = AA^{-(U, V)} - FA^{-(U, V)} = 0$, así $AA^{-(U, V)} = FA^{-(U, V)}$, por lo tanto, $A \sim F$. Análogamente se demuestra que 1. y 3. son equivalentes y 1. y 4. son equivalentes, ahora veamos que 1. y 5. son equivalentes.

1. $\longrightarrow$ 5.] Si $A \sim F$, por la definición de la relación se tiene que $N(A^{-(U, V)}F) \subseteq N(A^{-(U, V)}A)$ y $R(AA^{-(U, V)}) \subseteq R(FA^{-(U, V)})$.

5. $\longleftarrow$ 1.] Como $N(A^{-(U, V)}F) = R(I - A^{-(U, V)}F) \subseteq N(A^{-(U, V)}A)$, entonces $A^{-(U, V)}A(I - A^{-(U, V)}F) = 0$, así $A^{-(U, V)}A - A^{-(U, V)}AA^{-(U, V)}F = 0$, de aquí que, $A^{-(U, V)}A - A^{-(U, V)}F = 0$, por lo tanto, $A^{-(U, V)}A = A^{-(U, V)}F$. También, $R(AA^{-(U, V)}) \subseteq R(FA^{-(U, V)}) = N(I - FA^{-(U, V)})$, de aquí que $(I - FA^{-(U, V)})AA^{-(U, V)} = 0$, por lo que $AA^{-(U, V)} - FA^{-(U, V)}AA^{-(U, V)} = 0$, así $AA^{-(U, V)} - FA^{-(U, V)} = 0$, de aquí que, $AA^{-(U, V)} = FA^{-(U, V)}$, así $A \sim F$. $\square$

5.2. Representación matricial de 2 elementos relacionados en $\mathbb{B}(X, Y)^{-(U, V)}$

Si bien es cierto que el Teorema 5.1 nos asegura que si $A \sim F$, entonces $A^{-(U, V)} = F^{-(U, V)}$, sin embargo de esto no se deduce que las representaciones matriciales de $A^{-(U, V)}$ y $F^{-(U, V)}$ sean iguales, esto se debe a que en estas representaciones las descomposiciones

de los espacios donde están definidas estas inversas en principio son distintas, veamos que este no es el caso.

Teorema 5.4. *Sean $A \in \mathbb{B}(X, Y)$ un elemento (U, V) -invertible y $F \in \mathbb{B}(X, Y)$. Si $A \sim F$, entonces*

1. $N(VA) = N(VF)$
2. $R(AU) = R(FU)$.

Demostración. 1. Como $A \sim F$, sabemos que F es (U, V) -invertible y además $A^{-(U, V)} = F^{-(U, V)}$, así por el Teorema 2.9, se tiene que $N(VA) = N(A^{-(U, V)}A) = N(A^{-(U, V)}F) = N(F^{-(U, V)}F) = N(VF)$, por lo que, $N(VA) = N(VF)$.

2. Análogamente como en 1. de este Teorema y usando el Teorema 2.9, se tiene que $R(AU) = R(AA^{-(U, V)}) = R(FA^{-(U, V)}) = R(FF^{-(U, V)}) = R(FU)$. $\square$

Como consecuencia inmediata del Teorema 5.4, obtenemos el siguiente Corolario, el cual establece que las representaciones matriciales de dos elementos relacionados son idénticas. Este resultado confirma de manera rigurosa lo anticipado al inicio de esta sección y refuerza la relevancia de la representación matricial en el estudio de la (U, V) -invertibilidad.

Corolario 5.1. *Sean $A \in \mathbb{B}(X, Y)$ un elemento (U, V) -invertible y $F \in \mathbb{B}(X, Y)$. Si $A \sim F$, entonces la representación matricial de $A^{-(U, V)}$ y $F^{-(U, V)}$ es la misma.*

El siguiente Corolario se desprende naturalmente del Teorema 5.1 y nos proporciona una caracterización adicional para determinar cuándo dos elementos están relacionados bajo la relación previamente definida. Este resultado amplía nuestra comprensión de la estructura de los operadores (U, V) -invertibles, una vez más, se resalta la utilidad de la representación matricial en su estudio.

La capacidad de expresar estas relaciones en términos matriciales no solo facilita la obtención de resultados, sino que también ofrece una perspectiva más clara y accesible sobre la interacción entre los operadores involucrados.

Corolario 5.2. Sean $A \in \mathbb{B}(X, Y)$ un elemento (U, V) -invertible y $F \in \mathbb{B}(X, Y)$. Entonces $A \sim F$ si y solo si

$$F = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & F_{22} \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} R(U) \\ N(VA) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} R(AU) \\ N(V) \end{pmatrix},$$

donde A_{11} es invertible y $F_{22} \in \mathbb{B}(N(VA), N(V))$.

Demostración. $\longrightarrow$] La demostración de esta implicación ya se hizo dentro del Teorema 5.1.

$\longleftarrow$] Supongamos que

$$F = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & F_{22} \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} R(U) \\ N(VA) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} R(AU) \\ N(V) \end{pmatrix},$$

donde A_{11} es invertible es como en el Teorema 2.10, de las representaciones matriciales de $A, A^{-(U, V)}$ y F es fácil obtener $AA^{-(U, V)} = FA^{-(U, V)}$ y $A^{-(U, V)}A = A^{-(U, V)}F$, de lo que se concluye que $A \sim F$. $\square$

Cuando se trabaja con relaciones de equivalencia, es natural considerar el conjunto cociente

$$\mathbb{B}(X, Y)^{-(U, V)} / \sim := \{[A] \mid A \in \mathbb{B}(X, Y)^{-(U, V)}\}$$

el cual sabemos es una partición en clases de equivalencia de $\mathbb{B}(X, Y)^{-(U, V)}$ inducidas por la relación $\sim$.

En este contexto, los Teoremas y resultados desarrollados hasta el momento nos permiten caracterizar dichas clases de manera más sencilla y estructurada, proporcionando una visión más clara de la partición del conjunto de elementos (U, V) -invertibles.

Teorema 5.5. Sea $A \in \mathbb{B}(X, Y)^{-(U, V)}$. Entonces

$$[A] = \{F \in \mathbb{B}(X, Y)^{-(U, V)} \mid A^{-(U, V)} = F^{-(U, V)}\}.$$

Demostración. $\subseteq$] Sea $F \in [A]$, entonces $F \sim A$, por el Teorema 5.1 se tiene que $A^{-(U, V)} = F^{-(U, V)}$, por lo tanto se cumple esta contención.

$\supseteq$] Si $F \in \{F \in \mathbb{B}(X, Y) \mid A^{-(U, V)} = F^{-(U, V)}\}$, entonces $A^{-(U, V)} =$

$F^{-(U, V)}$ y además por el Corolario 5.1, tienen la misma representación matricial

$$A^{-(U, V)} = F^{-(U, V)} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} R(AU) \\ N(V) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} R(U) \\ N(VA) \end{pmatrix}$$

y con esto podemos escribir que

$$F = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & F_{22} \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} R(U) \\ N(VA) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} R(AU) \\ N(V) \end{pmatrix},$$

donde A_{11} es invertible y $F_{22} \in \mathbb{B}(N(VA), N(V))$, entonces por el Corolario 5.2 se tiene que $A \sim F$ y así $F \in [A]$. Por lo tanto, se cumple el resultado. $\square$

Hasta ahora hemos hablado de la relación de equivalencia $\sim$ y de las clases de equivalencia bajo esta relación, pero falta ver que esta relación da un espacio cociente no trivial para que tenga sentido la relación, es decir, debemos hallar al menos 2 elementos que no estén relacionados bajo $\sim$.

Ejemplo: Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $F = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, entonces no es difícil ver que $A^{-(U, V)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $F^{-(U, V)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, así $A^{-(U, V)}F = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $A^{-(U, V)}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, de aquí que $A \not\sim F$. También $F^{-(U, V)}A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $F^{-(U, V)}F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, por lo que $F \not\sim A$.

Capítulo 6

Variaciones del concepto de (U, V) -inversa

La Definición 2.1 involucra operadores lineales acotados entre tres espacios de Banach X , Y y Z . Con algunos cambios en las demostraciones presentadas en los capítulos anteriores, podemos considerar la situación más general cuando $U \in \mathbb{B}(Z_1, X)$ y $V \in \mathbb{B}(Y, Z_2)$. Más aún, es posible considerar variaciones de la Definición 2.1 que son independientes entre ellas.

Definición 6.1. Sean $A \in \mathbb{B}(X, Y)$ y $U, V \in \mathbb{B}(Y, X)$. Decimos que A es (U, V) -invertible si existe $B \in \mathbb{B}(Y, X)$ tal que

$$B = UQB, B = BWV, U = BAU, V = VAB,$$

para algunos $Q, W \in \mathbb{B}(X, Y)$.

Observación 6.1. Para cada $A \in \mathbb{B}(X, Y)$, existen $U, V \in \mathbb{B}(Y, X)$ tales que A es (U, V) -invertible. Más aún, se sabe que para $0 \neq A \in \mathbb{B}(X, Y)$, existe un operador no nulo $C \in \mathbb{B}(Y, X)$ tal que $CAC = C$. En este caso, $C = A^{-(C, C)}$.

Definición 6.2. Sea $A \in \mathbb{B}(X, Y)$, $U \in \mathbb{B}(X)$ y $V \in \mathbb{B}(Y)$. Decimos que A es (U, V) -invertible si existe $B \in \mathbb{B}(Y, X)$ tal que

$$B = UQB, B = BWV, U = BAU, V = VAB,$$

para algunos $Q \in \mathbb{B}(X)$ y $W \in \mathbb{B}(Y)$.

En el caso de la (U, V) -invertibilidad de la Definición 6.1 o Definición 6.2, con pequeños cambios en los enunciados y demostraciones, podemos obtener resultados análogos a los presentados en el capítulo 2. Por esta razón, las demostraciones de los siguientes resultados se omite.

Teorema 6.1. *Sea $A \in \mathbb{B}(X, Y)$ y $U, V \in \mathbb{B}(Y, X)$ (respectivamente $U \in \mathbb{B}(X)$ y $V \in \mathbb{B}(Y)$). Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *A es (U, V) -invertible.*
2. *Existe $B \in \mathbb{B}(Y, X)$ inversa externa de A y para cada $T \in \mathbb{B}(X)$ tal que $TB = 0$ se cumple que $TU = 0$ y existen $T_1, T_2 \in \mathbb{B}(X)$ y $T_3 \in \mathbb{B}(Y)$ (resp. $T_1, T_3 \in \mathbb{B}(Y, X)$ y $T_2 \in \mathbb{B}(X, Y)$) tales que*

$$B = T_1V, \quad V = T_2B, \quad B = UT_3.$$

3. *Existe $B \in \mathbb{B}(Y, X)$ inversa externa de A y para cada proyección $P \in \mathbb{B}(X)$ tal que $PB = 0$ cumple que $PU = 0$ y existen $T_1, T_2 \in \mathbb{B}(X)$ y $T_3 \in \mathbb{B}(Y)$ (resp. $T_1, T_3 \in \mathbb{B}(Y, X)$ y $T_2 \in \mathbb{B}(X, Y)$) tales que*

$$B = T_1V, \quad V = T_2B, \quad B = UT_3.$$

Teorema 6.2. *Sea $A \in \mathbb{B}(X, Y)$ y $U, V \in \mathbb{B}(Y, X)$ (respectivamente $U \in \mathbb{B}(X)$ y $V \in \mathbb{B}(Y)$). Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *A es (U, V) -invertible.*
2. *Existe $B \in \mathbb{B}(Y, X)$ inversa externa de A y para cada $T \in \mathbb{B}(Y)$ tal que $BT = 0$ cumple que $VT = 0$ y existen $T_1, T_2 \in \mathbb{B}(Y)$ y $T_3 \in \mathbb{B}(X)$ (resp. $T_1, T_3 \in \mathbb{B}(Y, X)$ y $T_2 \in \mathbb{B}(X, Y)$) tales que*

$$B = UT_1, \quad U = BT_2, \quad B = T_3V.$$

3. *Existe $B \in \mathbb{B}(Y, X)$ inversa externa de A y para cada proyección $P \in \mathbb{B}(Y)$ tal que $BP = 0$ cumple que $VP = 0$ y*

existen $T_1, T_2 \in \mathbb{B}(Y)$ y $T_3 \in \mathbb{B}(X)$ (resp. $T_1, T_3 \in \mathbb{B}(Y, X)$ y $T_2 \in \mathbb{B}(X, Y)$) tales que

$$B = UT_1, \quad U = BT_2, \quad B = T_3V.$$

Teorema 6.3. Sea $A \in \mathbb{B}(X, Y)$ y $U, V \in \mathbb{B}(Y, X)$ (respectivamente $U \in \mathbb{B}(X)$ y $V \in \mathbb{B}(Y)$). Los siguientes enunciados son equivalentes:

1. A es (U, V) -invertible.
2. Existe $B \in \mathbb{B}(Y, X)$ inversa externa de A , para cada $T \in \mathbb{B}(X)$ tal que $TB = 0$ cumple que $TU = 0$, para cada $R \in \mathbb{B}(Y)$ tal que $BR = 0$ cumple que $VR = 0$ y existen $T_1 \in \mathbb{B}(X)$, $T_2 \in \mathbb{B}(Y)$ (resp. $T_1, T_2 \in \mathbb{B}(Y, X)$) tal que $B = T_1V = UT_2$.
3. Existe $B \in \mathbb{B}(Y, X)$ inversa externa de A , para cada proyección $P \in \mathbb{B}(X)$ tal que $PB = 0$ cumple que $PU = 0$, para cada $R \in \mathbb{B}(Y)$ tal que $BR = 0$ cumple que $VR = 0$ y existen $T_1 \in \mathbb{B}(X)$, $T_2 \in \mathbb{B}(Y)$ (resp. $T_1, T_2 \in \mathbb{B}(Y, X)$) tales que $B = T_1V = UT_2$.
4. Existe $B \in \mathbb{B}(Y, X)$ inversa externa de A , para cada $T \in \mathbb{B}(X)$ tal que $TB = 0$ cumple que $TU = 0$, para cada $P' \in \mathbb{B}(Y)$ proyección tal que $BP' = 0$ cumple que $VP' = 0$ y existen $T_1 \in \mathbb{B}(X)$, $T_2 \in \mathbb{B}(Y)$ (resp. $T_1, T_2 \in \mathbb{B}(Y, X)$) tales que $B = T_1V = UT_2$.
5. Existe $B \in \mathbb{B}(Y, X)$ inversa externa de A , para cada proyección $P \in \mathbb{B}(X)$ tal que $PB = 0$ cumple que $PU = 0$, para cada $P' \in \mathbb{B}(Y)$ proyección tal que $BP' = 0$ cumple que $VP' = 0$ y existen $T_1 \in \mathbb{B}(X)$, $T_2 \in \mathbb{B}(Y)$ (resp. $T_1, T_2 \in \mathbb{B}(Y, X)$) tales que $B = T_1V = UT_2$.

Teorema 6.4. Sean $A \in \mathbb{B}(X, Y)$ y $U, V \in \mathbb{B}(Y, X)$, o $U \in \mathbb{B}(X)$, $V \in \mathbb{B}(Y)$.

Entonces A es (U, V) -invertible si y solo si

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & W \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} R(U) \\ N(VA) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} R(AU) \\ N(V) \end{pmatrix},$$

para algunos $W \in \mathbb{B}(N(VA), N(V))$, A_{11} es invertible y U, V son regulares internos. Más aún,

$$B = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} R(AU) \\ N(V) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} R(U) \\ N(VA) \end{pmatrix}.$$

Consideraciones análogas se pueden hacer para los capítulos 3, 4 y 5.

6.1. Algunas inversas generalizadas vistas como (U, V) -inversas.

En esta sección veremos como algunas de las inversas generalizadas más conocidas pueden ser vistas como casos particulares de la (U, V) -inversa. Para más detalles relacionados con estas inversas generalizadas recomendamos revisar [2].

Sean X, Y espacios de Hilbert y $T \in \mathbb{B}(X, Y)$. Decimos que $S \in \mathbb{B}(Y, X)$ es una inversa de Moore-Penrose T si

$$TST = T, STS = S, (TS)^* = TS, (ST)^* = ST,$$

donde T^* denota el adjunto del operador T . En este caso decimos que T es Moore-Penrose invertible. Se sabe que si T es Moore-Penrose invertible, entonces su inversa de Moore-Penrose es única y la denotamos como $T^\dagger$.

Teorema 6.5. Sean X, Y espacios de Hilbert y $T \in \mathbb{B}(X, Y)$. Si T es Moore-Penrose invertible, entonces

$$T^\dagger = T^{-((T^\dagger T)^*, (TT^\dagger)^*)} = T^{-(T^\dagger T, TT^\dagger)}.$$

Demostración. Sea $S \in \mathbb{B}(Y, X)$ la inversa de Moore-Penrose de $T \in \mathbb{B}(X, Y)$. Entonces

$$(TS)^*TS = (TS)TS = TS = (TS)^*,$$

$$ST(ST)^* = ST(ST) = ST = (ST)^*.$$

Si definimos $W := TS \in \mathbb{B}(Y)$, entonces

$$SW(TS)^* = STS(TS)^* = S(TS) = S.$$

Si definimos $Q := ST \in \mathbb{B}(X)$, entonces

$$(ST)^*QS = (ST)^*STS = (ST)S = S,$$

por lo tanto, $T^\dagger = T^{-((ST)^*, (TS)^*)}$. □

Sea X un espacio de Banach y $T \in \mathbb{B}(X)$. Decimos que T es Drazin invertible si existe $S \in \mathbb{B}(X)$ tal que

$$STS = S, TS = ST, T^{k+1}S = T^k, \quad (6.1)$$

para algún $k \in \mathbb{N}$. La inversa de Drazin S es denotada con T^D y, cuando exista, es única.

Teorema 6.6. *Sea $T \in \mathbb{B}(X)$. Si T es Drazin invertible, entonces*

$$T^D = T^{-(T^DT, TT^D)}.$$

Demostración. Por las ecuaciones (6.1) obtenemos que,

$$T^DT(T^DT) = TT^D,$$

$$(TT^D)TT^D = TT^D.$$

Si definimos $Q := T^DT \in \mathbb{B}(X)$, entonces

$$(TT^D)QT^D = T^DTT^D = T^D.$$

Si definimos $W := TT^D \in \mathbb{B}(X)$, entonces

$$T^D(TT^D)TT^D = T^DTT^D = T^D,$$

por lo que, $T^D = T^{-(T^DT, TT^D)}$. □

Decimos que $S \in \mathbb{B}(X)$ es una grupo inversa de $T \in \mathbb{B}(X)$ si

$$STS = S, TST = T, TS = ST. \quad (6.2)$$

En este caso decimos que T es grupo-invertible. Sabemos que si S existe entonces es única y denotamos S como $T^\#$. Es evidente que la inversa de Drazin con $k = 1$ es la grupo inversa de T y, en consecuencia, tenemos el siguiente Teorema.

Teorema 6.7. Sea $T \in \mathbb{B}(X)$. Si T es grupo invertible, entonces

$$T^\# = T^{-(T^\#T, TT^\#)}.$$

La inversa de Bott-Duffin $(P, Q)-$, para $T \in \mathbb{B}(X)$, es un poco menos conocida que las anteriores. Por la misma razón, damos la definición de esta inversa y para más detalles se puede consultar [3].

Definición 6.3. Sea $T \in \mathbb{B}(X)$ y $P, Q \in \mathbb{B}(X)$ proyecciones. Decimos que $B \in \mathbb{B}(X)$ es una inversa de Bott-Duffin $(P, Q)-$ de T si

$$B = PB = BQ, BTP = P, QTB = Q.$$

La inversa de Bott-Duffin $(P, Q)-$ es un caso especial de (P, Q) -inversa cuando $X = Y = Z$.

Teorema 6.8. Sea $T \in \mathbb{B}(X)$ y $P, Q \in \mathbb{B}(X)$ proyecciones. Entonces T es Bott-Duffin $(P, Q)-$ invertible si y solo si T es $(P, Q)-$ invertible. En este caso, $T^{-(P, Q)}$ coincide con B , donde B es la inversa de Bott-Duffin $(P, Q)-$ de T .

Demostración. Supongamos que T es Bott-Duffin $(P, Q)-$ invertible, entonces

$$PPB = P^2B = PB = B, BQQ = BQ^2 = BQ = B, P = BTP, Q = QTB.$$

Por lo tanto, T es $(P, Q)-$ invertible. Recíprocamente, supongamos que T es $(P, Q)-$ invertible, entonces

$$B = PQ_1B, B = BW_1Q, P = PTB, Q = QTB,$$

para algunos $Q_1, W_1 \in \mathbb{B}(X)$. Por la observación 4.6 la elección de $Q_1, W_1 \in \mathbb{B}(X)$ no es relevante, si elegimos $Q_1 = P$ y $W_1 = Q$. En este caso,

$$B = P^2B = PB, B = BQ^2 = BQ, P = BTP, Q = QTB.$$

Por lo tanto, T es Bott-Duffin $(P, Q)-$ invertible. □

6.2. La (b, c) -inversa en anillos con unidad

La (b, c) -inversa, introducida por M. P. Drazin, constituye un caso particular de la (U, V) -inversa en el caso de operadores lineales acotados definidos en espacios de Banach, ha sido ampliamente estudiada en el contexto de las estructuras algebraicas, especialmente en anillos con unidad. Este enfoque ha permitido comprender mejor la relación entre diversas nociones de invertibilidad y sus aplicaciones en diferentes áreas del álgebra. En esta sección, el objetivo es presentar resultados nuevos relacionados con el concepto de (b, c) -inversa. Las propiedades y técnicas desarrolladas para la (b, c) -inversa pueden ser una fuente valiosa de ideas para abordar el caso más general de la (U, V) -inversa, particularmente en el contexto de operadores lineales acotados definidos en espacios de Banach. Así, esta sección no solo amplía el entendimiento de la (b, c) -inversa, sino que también abre caminos para futuras investigaciones en el marco general de la (U, V) -inversa.

Con $\mathcal{R}$ denotamos a un anillo con unidad 1, usualmente se adoptan las siguientes notaciones, $\mathcal{R}^{-1}$ denota el conjunto de los elementos invertibles de $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}^{\cdot}$ denota el conjunto de elementos idempotentes de $\mathcal{R}$, es decir, aquellos $a \in \mathcal{R}$ tales que $a^2 = a$.

También se definen los ideales imagen como sigue, dado $a \in \mathcal{R}$, $a\mathcal{R} := \{ax | x \in \mathcal{R}\}$ y $\mathcal{R}a := \{xa | x \in \mathcal{R}\}$. Los ideales kernel se definen como $a^{-1}(0) := \{x \in \mathcal{R} | ax = 0\}$ y $a_{-1}(0) := \{x \in \mathcal{R} | xa = 0\}$.

Al igual que en el caso de los operadores lineales acotados definidos sobre espacios de Banach, tenemos definiciones análogas como las siguientes: $a \in \mathcal{R}$ tiene inversa interna si existe $b \in \mathcal{R}$ tal que $aba = a$, en este caso se dice que a es regular interno, análogamente $a \in \mathcal{R}$ tiene inversa externa si existe $b \in \mathcal{R}$ tal que $bab = b$.

La definición de (b, c) - inversa queda de la siguiente forma:

Definición 6.4. Sean $\mathcal{R}$ un anillo con unidad y $a, b, c \in \mathcal{R}$. Decimos que a es (b, c) - invertible si existe $y \in \mathcal{R}$ tal que

1. $y \in (b\mathcal{R}y) \cap (y\mathcal{R}c)$
2. $b = yab$ y $c = cay$.

Cuando y existe es único y denotamos a y como $a^{-(b,c)}$, análogamente, como en el caso de los operadores, se puede demostrar que $a^{-(b,c)}$ satisface que $a^{-(b,c)}aa^{-(b,c)} = a^{-(b,c)}$.

La condición $y \in (b\mathcal{R}y) \cap (y\mathcal{R}c)$ significa que existen $q, w \in \mathcal{R}$ tales que $y = bqy$ y $y = ywc$.

También, $a \in \mathcal{R}^{-1}$ si y solo si b tiene inverso derecho y c tiene inverso izquierdo. Más aún, $a^{-(b,c)} = a^{-1}$.

El siguiente teorema es análogo al correspondiente en el caso de operadores, ya que las propiedades y relaciones involucradas se trasladan de manera directa a este contexto. Debido a esta similitud, la demostración sigue esencialmente los mismos pasos y razonamientos que en el caso de operadores, por lo que se omite aquí para evitar redundancias. Esta omisión permite centrar la atención en los resultados y aplicaciones, asumiendo que el lector está familiarizado con las técnicas utilizadas en la demostración original.

Teorema 6.9. *Sean $\mathcal{R}$ un anillo con unidad y $a, b, c \in \mathcal{R}$. Si a es (b, c) -invertible, entonces b y c son regulares internos.*

Los siguientes resultados, cuya demostración puede consultarse en uno de los artículos citados en la bibliografía de esta tesis, es de vital importancia para el desarrollo teórico de esta sección, ya que proporciona herramientas fundamentales para demostrar varios de los teoremas que se presentan a continuación. Aunque aquí se omite la demostración para evitar redundancias y mantener el enfoque en los resultados principales, se recomienda al lector interesado revisar el artículo referido para una comprensión más detallada de los argumentos completos.

Teorema 6.10. *Sean $\mathcal{R}$ un anillo con unidad y $a, b, c \in \mathcal{R}$. a es (b, c) -invertible si y solo si existe $y \in \mathcal{R}$ tal que $yay = y$, $y\mathcal{R} = b\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}y = \mathcal{R}c$.*

Teorema 6.11. *Sean $\mathcal{R}$ un anillo con unidad y $a, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathcal{R}$ tales que $b_2\mathcal{R} = b_1\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}c_2 = \mathcal{R}c_1$. Entonces a es (b_1, c_1) -invertible si y solo si a es (b_2, c_2) -invertible. Más aún, $a^{-(b_1, c_1)} = a^{-(b_2, c_2)}$.*

Los resultados que se presentan a continuación son originales y constituyen una contribución novedosa dentro del marco teórico

abordado en esta tesis. Su desarrollo surge del análisis y extensión de conceptos previos, ofreciendo nuevas perspectivas y propiedades que enriquecen el estudio de la temática tratada. Estos resultados no solo amplían el entendimiento actual del tema, sino que también abren nuevas posibilidades para investigaciones futuras en esta área.

Teorema 6.12. *Sean $\mathcal{R}$ un anillo con unidad y $b \in \mathcal{R}$. Entonces son equivalentes:*

- b es regular interno.
- Existe $q \in \mathcal{R}$ tal que $b \in (1 - bq)^{-1}(0)$.
- Existe $q \in \mathcal{R}$ tal que $1 - qb \in b^{-1}(0)$.
- Existe $q \in \mathcal{R}$ tal que $1 - bq \in b_{-1}(0)$.
- Existe $q \in \mathcal{R}$ tal que $b \in (1 - qb)_{-1}(0)$.

La demostración del Teorema 6.12 es consecuencia de las definiciones de los conjuntos antes definidos.

El siguiente Teorema establece una equivalencia importante con una de las condiciones fundamentales de la definición de la (b, c) -inversa. Este resultado permite reinterpretar dicha condición en términos alternativos, lo que no solo enriquece nuestra comprensión conceptual del tema, sino que también facilita su aplicación en contextos específicos.

Teorema 6.13. *Sean $\mathcal{R}$ un anillo con unidad y $b, c, y \in \mathcal{R}$. Entonces $y \in (b\mathcal{R}y) \cap (y\mathcal{R}c)$ si y solo si existe $q, w \in \mathcal{R}$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $y = (bq)^n y$ y $y = y(wc)^n$.*

Demostración. $\longrightarrow$] El caso $n = 0$, es evidente. Por la Definición 6.4, existen $q, w \in \mathcal{R}$ tal que $y = bqy$ y $y = ywc$, de aquí que $y = bqy = bq(bqy) = (bq)^2 y = (bq)^2(bqy) = (bq)^3 y = \dots (bq)^n y$, de aquí que $y = (bq)^n y$. También, $y = ywc = (ywc)wc = y(wc)^2 = \dots = y(wc)^n$.

[$\longleftarrow$ Si $n = 1$, se cumple el resultado. □

El siguiente Teorema guarda una estrecha relación con la primera condición de la definición de la (b, c) -inversa, recordándonos

su papel fundamental en la caracterización de este concepto. Este resultado no solo refuerza la importancia de dicha condición, sino que también nos proporciona una perspectiva más profunda sobre la conexión entre las condiciones necesarias y la existencia misma de la inversa.

Teorema 6.14. *Sean $\mathcal{R}$ un anillo con unidad y $b, c, y \in \mathcal{R}$. Si b, c son regulares internos, entonces existe $y \in \mathcal{R}$ tal que $y \in (b\mathcal{R}y) \cap (y\mathcal{R}c)$.*

Demostración. Como b y c son regulares internos, entonces existen $q, w \in \mathcal{R}$ tal que $b = bqb$ y $c = cwc$, de aquí se puede ver que $(qb)^2 = qb$ y $(wc)^2 = wc$, definimos $y := bc$, entonces $bc = (bqb)(cwc) = b(qbqb)c(wcwc) = bq(bqbcwcwc) = bq(bcwc) = bqbc = bgy$. También, $ywc = bc(wc) = b(cwc) = bc = y$, por lo tanto, $y \in (b\mathcal{R}y) \cap (y\mathcal{R}c)$. $\square$

El siguiente Teorema presenta un conjunto de condiciones que son suficientes para garantizar la (b, c) -invertibilidad.

Teorema 6.15. *Sean $\mathcal{R}$ un anillo con unidad y $a, b, c \in \mathcal{R}$. Si b, c son regulares internos, para cada $q \in (b\mathcal{R}q) \cap (q\mathcal{R}c)$ y $b = qab$ y $c = caq$, entonces a es (b, c) -invertible.*

Demostración. Por el Teorema 6.14 se tiene que existe $y \in (b\mathcal{R}y) \cap (y\mathcal{R}c)$ y por hipótesis si consideramos $q = y$, se tiene que $b = yab$ y $c = cay$, de aquí que a es (b, c) -invertible. $\square$

Para la demostración del siguiente resultado, utilizaremos una caracterización clave que se encuentra detallada en uno de los artículos citados en la bibliografía de esta tesis.

$u_1\mathcal{R} = u_2\mathcal{R}$ si y solo si existen $r_1, r_2 \in \mathcal{R}$ tales que $u_1 = u_2r_1$ y $u_2 = u_1r_2$. También $\mathcal{R}u_1 = \mathcal{R}u_2$ si y solo si existen $r_1, r_2 \in \mathcal{R}$ tales que $u_1 = r_1u_2$ y $u_2 = r_2u_1$.

Dicha caracterización es muy importante para el desarrollo de los argumentos que siguen. Sin embargo, la demostración de esta caracterización se omite aquí para evitar redundancias, ya que el lector interesado puede consultarla directamente en la fuente original mencionada.

Teorema 6.16. *Sean $\mathcal{R}$ un anillo con unidad y $a, b, c \in \mathcal{R}$. Si $cab = 1$, entonces a es (b, c) -invertible. Más aún, $a^{-(b, c)} = bc$.*

Demostración. Definimos $y = bc$, entonces $yay = bcabc = bc = y$, entonces $yay = y$, veamos que $bc\mathcal{R} = b\mathcal{R}$, sea $u \in bc\mathcal{R}$, entonces $u = bcq$ para algún $q \in \mathcal{R}$, de aquí que $u = b(cq) \in b\mathcal{R}$. Sea $u \in b\mathcal{R}$, entonces $u = bq$ para algún $q \in \mathcal{R}$, entonces $u = bq = bcabq = bc(abq) \in bc\mathcal{R}$. Por lo tanto, se tiene la igualdad.

Ahora veamos que, $\mathcal{R}bc = \mathcal{R}c$. Sea $u \in \mathcal{R}bc$, entonces $u = qbc$ para algún $q \in \mathcal{R}$, entonces $u = (qb)c \in \mathcal{R}c$. Por otro lado, sea $u \in \mathcal{R}c$, entonces $u = qc$ para algún $q \in \mathcal{R}$, de aquí que, $u = qc = (qca)bc \in \mathcal{R}bc$. Por lo tanto, a es (b, c) -invertible. Por la unicidad de la (b, c) -inversa se tiene que $a^{-(b,c)} = bc$. $\square$

El siguiente teorema aborda una cuestión fundamental en el estudio de la (b, c) -invertibilidad: dadas dos elementos (b, c) -invertibles, bajo qué condiciones su producto también posee una (b, c) -inversa.

Más aún, en el marco general de anillos no necesariamente conmutativos, resulta particularmente notable que las (b, c) -inversas conmutan de manera natural, independientemente de si el anillo en cuestión es conmutativo o no.

Este resultado no solo proporciona un criterio esencial para la estabilidad de la (b, c) -invertibilidad bajo el producto, sino que también resalta una propiedad estructural profunda que trasciende la hipótesis de conmutatividad, lo cual es, sin duda, un aspecto sorprendente dentro de este contexto algebraico.

Teorema 6.17. Sean $\mathcal{R}$ un anillo y $a_1, a_2, b, c \in \mathcal{R}$ tales que $a_1b = ba_1$, $a_1c = ca_1$, $a_2b = ba_2$ y $a_2c = ca_2$. Si a_1 es (b, c) -invertible y a_2 es (b, c) -invertible, entonces a_1a_2 es (b, c) -invertible y $(a_1a_2)^{-(b,c)} = a_2^{-(b,c)}a_1^{-(b,c)}$. Más aún, $(a_1a_2)^{-(b,c)} = (a_2a_1)^{-(b,c)}$.

Demostración. Como $a_1 \in \mathcal{R}$ es (b, c) -invertible, entonces existe $y \in \mathcal{R}$ que satisface la Definición 6.4 para algunos $q, w \in \mathcal{R}$, también como $a_2 \in \mathcal{R}$ es (b, c) -invertible, entonces existe $y' \in \mathcal{R}$ tal que satisface la Definición 6.4 para algunos $q', w' \in \mathcal{R}$.

Notemos que $y'y = y'bqy = y'yabqy = y'yay = y'y$, de aquí que, $y'y = bq'y'y = bqyy'$, así $y'y = bqyy'$. También $y'y = y'ywc$, además $y'ya_1a_2b = yy'a_1a_2b = yy'a_2ba_1 = yba_1 = ya_1b = b$. También $ca_1a_2y'y = a_1ca_2y'y = a_1cy = ca_1y = c$. Por lo tanto, a_1a_2 es (b, c) -invertible y $(a_1a_2)^{-(b,c)} = a_2^{-(b,c)}a_1^{-(b,c)}$. Como

$y'y = yy'$, se tiene que $a_2^{-(b,c)} a_1^{-(b,c)} = a_1^{-(b,c)} a_2^{-(b,c)}$, es decir, $(a_1 a_2)^{-(b,c)} = (a_2 a_1)^{-(b,c)}$. $\square$

El siguiente Teorema responde a lo que en la literatura anglosajona se conoce como reverse order law, proporcionando un criterio claro para determinar, dado un elemento previamente conocido como (b, c) -invertible, bajo qué condiciones sigue siendo (b, c) -invertible. Este resultado guarda una estrecha analogía con la propiedad fundamental de los elementos invertibles en el sentido clásico, reflejada en la identidad $(a^{-1})^{-1} = a$. Así, se establece una conexión natural entre la (b, c) -invertibilidad y la teoría general de inversas, reforzando la estructura algebraica subyacente y proporcionando una comprensión más profunda de la simetría presente en este tipo de inversas.

Teorema 6.18. *Sean $\mathcal{R}$ un anillo con unidad y $a, b, c \in \mathcal{R}$ tales que $ab = ba$, $ac = ca$. Si a es (b, c) -invertible y $aa^{-(b,c)} = a^{-(b,c)}a$, entonces $a^{-(b,c)}$ es (b, c) -invertible y $(a^{-(b,c)})^{-(b,c)} = aa^{-(b,c)}a$.*

Demostración. Como a es (b, c) -invertible, entonces $y = a^{-(b,c)}$ cumple las igualdades de la Definición 6.4. Sea $y' = aya$, notemos que $y'yy' = (aya)y(aya) = a(yay)(aya) = a(yay)a = aya = y'$, entonces $y'yy' = y'$. Ahora veamos que, $y'\mathcal{R} = b\mathcal{R}$, sea $g \in y'\mathcal{R}$, entonces $g = y'q$ para algún $q \in \mathcal{R}$, de aquí que $g = ayaq = abqya = baqya \in b\mathcal{R}$. Ahora sea $g \in b\mathcal{R}$, entonces $g = bt$ para algún $t \in \mathcal{R}$, entonces $g = yabt = yayabt = ayaybt \in y'\mathcal{R}$. Ahora veamos que, $\mathcal{R}y' = \mathcal{R}c$, sea $g \in \mathcal{R}y'$, entonces $g = qaya$ para algún $q \in \mathcal{R}$, así $g = q(aywc)a = qaywac \in \mathcal{R}c$, sea $g \in \mathcal{R}c$, entonces $g = qc$ para algún $q \in \mathcal{R}$, entonces $g = qcay = qcayay = qcyayay \in \mathcal{R}y'$. Por lo que, $a^{-(b,c)}$ es (b, c) -invertible. Por lo tanto, $(a^{-(b,c)})^{-(b,c)} = aa^{-(b,c)}a$. $\square$

Capítulo 7

La (M, N) -Weighted (U, V) -inversa en $\mathbb{B}(X, Y)$.

Existen muchos tipos de inversas generalizadas para operadores lineales acotados, definidos en espacios de Banach, a través de estas inversas es posible definir nuevas inversas que resultan más generales que las ya definidas y que suelen ser interesantes porque no se limita a un solo operador dado A , se pueden considerar otros 2 operadores M y N y considerar el operador MAN , (ver [8]), en este sentido damos la siguiente:

Definición 7.1. Sea $A \in \mathbb{B}(L, K)$, $U \in \mathbb{B}(Z, X)$, $V \in \mathbb{B}(Y, Z)$, $M \in \mathbb{B}(K, Y)$ y $N \in \mathbb{B}(X, L)$. Decimos que A es (M, N) -Weighted (U, V) -invertible si existe $B \in \mathbb{B}(Y, X)$ tal que

$$B = UQB, \quad B = BWV, \quad U = BMANU, \quad V = VMANB,$$

para algunos $Q \in \mathbb{B}(X, Z)$, $W \in \mathbb{B}(Z, Y)$.

Denotamos B como $A_{M,N}^{-(2,U,V)}$ y decimos que $A_{M,N}^{-(2,U,V)}$ es la (M, N) -Weighted (U, V) -inversa de A . También es fácil ver que $A_{M,N}^{-(2,U,V)}$ es una inversa externa de A y si A es (M, N) -Weighted (U, V) -invertible con U y V invertibles, entonces MAN es invertible y $A_{M,N}^{-(2,U,V)} = (MAN)^{-1}$.

Se puede demostrar que cuando la (M, N) -Weighted (U, V) -inversa existe, es única, de hecho, $A_{M,N}^{-(2,U,V)} = (MAN)^{-(U,V)}$.

Con esto se obtienen los siguientes resultados y sus demostraciones son análogas a las dadas anteriormente.

Proposición 7.1. *Sea $A \in \mathbb{B}(L, K)$, $U \in \mathbb{B}(Z, X)$, $V \in \mathbb{B}(Y, Z)$, $M \in \mathbb{B}(K, Y)$ y $N \in \mathbb{B}(X, L)$. Si A es (M, N) -Weighted (U, V) -invertible, entonces la (M, N) -Weighted (U, V) -inversa de A es única.*

Demostración. Supongamos que B_1, B_2 son (M, N) -Weighted (U, V) -inversas de A , es decir,

$$B_1 = UQ_1B_1, B_1 = B_1W_1V, U = B_1MANU, V = VMANB_1,$$

$$B_2 = UQ_2B_2, B_2 = B_2W_2V, U = B_2MANU, V = VMANB_2,$$

para algunos $Q_1, Q_2 \in \mathbb{B}(X, Z)$ y $W_1, W_2 \in \mathbb{B}(Z, Y)$. Entonces,

$$B_1 = B_1W_1V = B_1W_1(VMANB_2) = (B_1W_1V)(MANB_2) = B_1MANB_2$$

y

$$B_2 = UQ_2B_2 = (B_1MANU)Q_2B_2 = B_1MAN(UQ_2B_2) = B_1MANB_2.$$

Por lo tanto, $B_1 = B_2$. □

Como en el caso de la (U, V) -inversa, los operadores $U \in \mathbb{B}(Z, X)$ y $V \in \mathbb{B}(Y, Z)$ en la Definición 7.1 parecen arbitrarios, sin embargo, no lo son así.

Teorema 7.1. *Sea $A \in \mathbb{B}(L, K)$, $U \in \mathbb{B}(Z, X)$, $V \in \mathbb{B}(Y, Z)$, $M \in \mathbb{B}(K, Y)$ y $N \in \mathbb{B}(X, L)$. Si A es (M, N) -Weighted (U, V) -invertible, entonces U y V son regulares internos.*

Demostración. Sabemos que existen $Q \in \mathbb{B}(X, Z)$ y $W \in \mathbb{B}(Z, Y)$ tales que

$$B = UQB \text{ y } B = BWV,$$

donde $B = A_{M,N}^{-(2,U,V)}$. Entonces

$$U = BMANU = UQBMANU = UQU.$$

Análogamente, $VWV = V$. □

Observación 7.1. Del Teorema 7.1 notamos que $Q \in \mathbb{B}(X, Z)$ y $W \in \mathbb{B}(Z, Y)$ deben ser inversas internas de U y V respectivamente.

Teorema 7.2. Sea $A \in \mathbb{B}(L, K)$, $U \in \mathbb{B}(Z, X)$, $V \in \mathbb{B}(Y, Z)$, $M \in \mathbb{B}(K, Y)$ y $N \in \mathbb{B}(X, L)$. Si A es (M, N) -Weighted (U, V) -invertible con $B = A_{M,N}^{-(2,U,V)}$, entonces

1. $R(U) = R(UQ) = R(BMAN) = R(B)$,
2. $N(V) = N(WV) = N(MANB) = N(B)$,
3. $R(MANU) = R(MANB)$,
4. $N(VMAN) = N(BMAN)$,
5. $R(V) = R(VMANU)$,
6. $N(U) = N(VMANU)$.

donde $Q \in \mathbb{B}(X, Z)$ y $W \in \mathbb{B}(Z, Y)$ son como en la Definición 7.1.

Demostración. Primero, recordemos que, $Q \in \mathbb{B}(X, Z)$ y $W \in \mathbb{B}(Z, Y)$ son tales que $B = UQB$ y $B = BWV$ y que B es una inversa externa de MAN .

1. Si $w \in R(B)$, entonces $w = Bx = UQBx \in R(UQ)$.

Para la otra inclusión, sea $w \in R(UQ)$, entonces $w = UQx = BMANUQx \in R(B)$. De $BMANB = B$ entonces obtenemos que $R(B) = R(BMAN)$. Si $w \in R(B)$, entonces $w = Bx = UQBx \in R(U)$ y, si $w \in R(U)$, entonces $w = Ux = BMANUx \in R(B)$.

2. Si $x \in N(B)$, entonces $Vx = VMANBx = 0$, por lo tanto $Vx = 0$. Si $x \in N(V)$, entonces $Vx = 0$, de aquí que, $Bx = BWVx = 0$, por lo tanto $Bx = 0$.

Si $x \in N(B) = N(V)$, entonces $Vx = 0$, así $WVx = 0$. En el caso que $x \in N(WV)$, entonces $WVx = 0$ de aquí que $Bx = BWVx = 0$.

Como $BMANB = B$ entonces obtenemos $N(B) = N(MANB)$.

3. Sea $w \in R(MANU)$, entonces $w = MANUx = MANBAUx \in R(MANB)$. Si $w \in R(MANB)$, entonces $w = MANBx = MANUQBx \in R(MANU)$.
4. Sea $x \in N(VMAN)$, entonces $BMANx = BWVMANx = BW(0) = 0$, por lo que $x \in N(BMAN)$. Si $x \in N(BMAN)$, entonces $VMANx = VABMANx = VA(0) = 0$, y $x \in N(BMAN)$.
5. Sea $w \in R(VMANU)$, entonces $w = VMANUx \in R(V)$. Ahora, sea $w \in R(V)$, entonces $w = Vx = VMANBx = VMANUQBx \in R(VMANU)$.
6. Es claro que $N(U)$ está contenido en $N(VMANU)$. Si $x \in N(VMANU)$, entonces $Ux = BMANUx = BWVMANUx = 0$, por lo tanto, $x \in N(U)$.

□

7.1. Algunas caracterizaciones de la (M, N) -Weighted (U, V) - inversa

En esta sección damos condiciones equivalentes para la existencia de la (M, N) -Weighted (U, V) -inversa.

Teorema 7.3. *Let $A \in \mathbb{B}(L, K)$, $U \in \mathbb{B}(Z, X)$, $V \in \mathbb{B}(Y, Z)$, $M \in \mathbb{B}(K, Y)$ y $N \in \mathbb{B}(X, L)$. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. A es (M, N) -Weighted (U, V) -invertible.
2. Existe $B \in \mathbb{B}(Y, X)$ una inversa externa de MAN y para cada $T \in \mathbb{B}(X)$ tal que $TB = 0$ se cumple que $TU = 0$ y existen $T_1 \in \mathbb{B}(Z, X)$, $T_2 \in \mathbb{B}(X, Z)$ y $T_3 \in \mathbb{B}(Y, Z)$ tales que $B = T_1V$, $V = T_2B$, $B = UT_3$.
3. Existe $B \in \mathbb{B}(Y, X)$ una inversa externa de MAN y para cada $P \in \mathbb{B}(X)$ proyección tal que $PB = 0$ cumple que $PU = 0$ y existen $T_1 \in \mathbb{B}(Z, X)$, $T_2 \in \mathbb{B}(X, Z)$ y $T_3 \in \mathbb{B}(Y, Z)$ tales que $B = T_1V$, $V = T_2B$, $B = UT_3$.

Demostración. (1) $\longrightarrow$ (2) Sabemos que

$$B = UQB, B = BWV, U = BMANU, V = VMANB,$$

para algunos $Q \in \mathbb{B}(X, Z)$ y $W \in \mathbb{B}(Z, Y)$ donde $B = A_{M,N}^{-(2,U,V)}$. Definimos $T_1 := BW \in \mathbb{B}(Z, X)$, $T_2 := VMAN \in \mathbb{B}(X, Z)$ y $T_3 := QB \in \mathbb{B}(Y, Z)$, cumple que

$$B = T_1V, V = T_2B, B = UT_3.$$

Si $TB = 0$, entonces $TU = TBMANU = 0MANU = 0$, por lo tanto $TU = 0$.

Es evidente que (2) implica (3) se cumple.

(3) $\longrightarrow$ (1) Por hipótesis, $B = BMANB$, entonces $(I - BMAN)B = 0$, así $(I - BMAN)U = 0$, de esto obtenemos $BMANU = U$. También $VMANB = T_2BMANB = T_2B = V$, entonces $V = VMANB$. Definimos $W := MANT_1$ y $Q := T_3MAN$, así $BWV = BMAN T_1V = BMANB = B$ y $UQB = UT_3MANB = BMANB = B$. Por lo tanto, $B = A_{M,N}^{-(2,U,V)}$. $\square$

Teorema 7.4. Sea $A \in \mathbb{B}(L, K)$, $U \in \mathbb{B}(Z, X)$, $V \in \mathbb{B}(Y, Z)$, $M \in \mathbb{B}(K, Y)$ y $N \in \mathbb{B}(X, L)$. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

1. A es (M, N) -Weighted (U, V) -invertible.
2. Existe $B \in \mathbb{B}(Y, X)$ una inversa externa de MAN y para cada $T \in \mathbb{B}(Y)$ tal que $BT = 0$ cumple que $VT = 0$ y existen $T_1 \in \mathbb{B}(Y, Z)$, $T_2 \in \mathbb{B}(Z, Y)$ y $T_3 \in \mathbb{B}(Z, X)$ tales que $B = UT_1$, $U = BT_2$ y $B = T_3V$.
3. Existe $B \in \mathbb{B}(Y, X)$ una inversa externa de MAN y para cada $P \in \mathbb{B}(Y)$ proyección tal que $BP = 0$ cumple que $VP = 0$ y existen $T_1 \in \mathbb{B}(Y, Z)$, $T_2 \in \mathbb{B}(Z, Y)$ y $T_3 \in \mathbb{B}(Z, X)$ tales que $B = UT_1$, $U = BT_2$ y $B = T_3V$.

Demostración. (1) $\longrightarrow$ (2) Por hipótesis,

$$B = UQB, B = BWV, U = BMANU, V = VMANB,$$

para algunos $Q \in \mathbb{B}(X, Z)$ y $W \in \mathbb{B}(Z, Y)$ donde $B = A_{M,N}^{-(2,U,V)}$. Definimos $T_1 := QB \in \mathbb{B}(Y, Z)$, $T_2 := MANU \in \mathbb{B}(Z, Y)$ y $T_3 :=$

$BW \in \mathbb{B}(Z, X)$, entonces $B = UT_1$, $U = BT_2$ y $B = T_3V$, también si $T \in \mathbb{B}(X)$ es tal que $BT = 0$, entonces $VT = VMANBT = VMAN0 = 0$, así $VT = 0$.

(2) $\longrightarrow$ (3) es evidente.

(3) $\longrightarrow$ (1) Como $BMANB = B$, tenemos que $B(I - MANB) = 0$, así $V(I - MANB) = 0$, por lo que $V = VMANB$. También $BMANU = BMANBT_2 = BT_2 = U$, entonces $BMANU = U$. Definimos $W := T_2MANT_3$ y $Q := T_1MAN$, entonces $BWV = BT_2MANT_3V = BT_2MANB = BMANB = B$ y $UQB = UT_1MANB = BMANB = B$. Por lo tanto, $B = A_{M,N}^{-(2,U,V)}$. $\square$

Teorema 7.5. *Sea $A \in \mathbb{B}(L, K)$, $U \in \mathbb{B}(Z, X)$, $V \in \mathbb{B}(Y, Z)$, $M \in \mathbb{B}(K, Y)$ y $N \in \mathbb{B}(X, L)$. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *A es (M, N) -Weighted (U, V) -invertible.*
2. *Existe $B \in \mathbb{B}(Y, X)$ una inversa externa de MAN , para cada $T \in \mathbb{B}(X)$ tal que $TB = 0$ cumple que $TU = 0$, para cada $R \in \mathbb{B}(Y)$ tal que $BR = 0$ cumple que $VR = 0$ y existen $T_1 \in \mathbb{B}(Z, X)$, $T_2 \in \mathbb{B}(Y, Z)$ tales que $B = T_1V = UT_2$.*
3. *Existe $B \in \mathbb{B}(Y, X)$ una inversa externa de MAN , para cada $P \in \mathbb{B}(X)$ proyección tal que $PB = 0$ cumple que $PU = 0$, para cada $R \in \mathbb{B}(Y)$ tal que $BR = 0$ cumple que $VR = 0$ y existen $T_1 \in \mathbb{B}(Z, X)$, $T_2 \in \mathbb{B}(Y, Z)$ tales que $B = T_1V = UT_2$.*
4. *Existe $B \in \mathbb{B}(Y, X)$ una inversa externa de MAN , para cada $T \in \mathbb{B}(X)$ tal que $TB = 0$ cumple que $TU = 0$, para cada $P' \in \mathbb{B}(Y)$ proyección tal que $BP' = 0$ cumple que $VP' = 0$ y existen $T_1 \in \mathbb{B}(Z, X)$, $T_2 \in \mathbb{B}(Y, Z)$ tales que $B = T_1V = UT_2$.*
5. *Existe $B \in \mathbb{B}(Y, X)$ una inversa externa de MAN , para cada $P \in \mathbb{B}(X)$ proyección tal que $PB = 0$ cumple que $PU = 0$, para cada $P' \in \mathbb{B}(Y)$ proyección tal que $BP' = 0$ cumple que $VP' = 0$ y existen $T_1 \in \mathbb{B}(Z, X)$, $T_2 \in \mathbb{B}(Y, Z)$ tales que $B = T_1V = UT_2$.*

Demostración. (1) $\longrightarrow$ (2) Sabemos que

$$B = UQB, B = BWV, U = BMANU, V = VMANB,$$

para algunos $Q \in \mathbb{B}(X, Z)$ y $W \in \mathbb{B}(Z, Y)$ donde $B := A_{M,N}^{-(2,U,V)}$. Definimos $T_1 := BW \in \mathbb{B}(X)$ y $T_2 := QB \in \mathbb{B}(X)$, entonces $B = T_1V = UT_2$. Si $TB = 0$, entonces $TU = TBMANU = 0MANU = 0$, así $TU = 0$, también si $BR = 0$, entonces $VR = VMANBR = VMAN0 = 0$, por lo tanto, $VR = 0$.

(2) $\longrightarrow$ (3) es evidente.

(3) $\longrightarrow$ (4) Sea $T \in \mathbb{B}(X)$ tal que $TB = 0$, de aquí que $BMANB = B$ obtenemos $(I - BMAN)B = 0$, entonces $(I - BMAN)U = 0$, por lo tanto $BMANU = U$, entonces $TU = TBMANU = 0MANU = 0$, entonces $TU = 0$.

(4) $\longrightarrow$ (5) es evidente.

(5) $\longrightarrow$ (1) Como $B = BMANB$, entonces $(I - BMAN)B = 0$, así $(I - BMAN)U = 0$, de esto obtenemos, $BMANU = U$, también $B(I - MANB) = 0$, así $V(I - MANB) = 0$, de esto $VMANB = V$. Definimos $W := MANT_1$ y $Q := T_2MAN$, entonces $BWV = BMANT_1V = BMANB = B$ y $UQB = UT_2MANB = BMANB = B$. Por lo tanto, $B = A_{M,N}^{-(2,U,V)}$. $\square$

7.2. Representación matricial de la (M, N) -Weighted (U, V) - inversa

En esta sección, también damos una representación matricial para operadores que tienen (M, N) -Weighted (U, V) -inversa, en realidad es una reformulación de la representación antes dada para la (U, V) - inversa.

Corolario 7.1. Sea $A \in \mathbb{B}(L, K)$, $U \in \mathbb{B}(Z, X)$, $V \in \mathbb{B}(Y, Z)$, $M \in \mathbb{B}(K, Y)$ y $N \in \mathbb{B}(X, L)$. Si A es (M, N) -Weighted (U, V) -invertible con $B = A_{M,N}^{-(2,U,V)}$, entonces

$$Y = R(MANB) \oplus N(B) \text{ y } X = R(B) \oplus N(BMAN). \quad (7.1)$$

Demostración. Por el Teorema 7.2 sabemos que $N(B) = N(MANB)$ y $R(B) = R(BMAN)$, y, ya que $MANB$ y $BMAN$ son proyecciones, obtenemos el resultado. $\square$

Teorema 7.6. Sea $A \in \mathbb{B}(L, K)$, $U \in \mathbb{B}(Z, X)$, $V \in \mathbb{B}(Y, Z)$, $M \in \mathbb{B}(K, Y)$ y $N \in \mathbb{B}(X, L)$. A es (M, N) -Weighted (U, V) -invertible si y solo si

$$MAN = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} R(U) \\ N(VMAN) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} R(MANU) \\ N(V) \end{pmatrix}, \quad (7.2)$$

para algún $A_{22} \in \mathbb{B}(N(VMAN), N(V))$, A_{11} es invertible y U, V son regulares internos. Más aún,

$$B = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} R(MANU) \\ N(V) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} R(U) \\ N(VMAN) \end{pmatrix} \quad (7.3)$$

es la (M, N) -Weighted (U, V) -inversa de A .

Demostración. $(\longrightarrow)$ Supongamos que A es (M, N) -Weighted (U, V) -invertible con $B = A_{M,N}^{-(2,U,V)}$. Por el Corolario 7.1 tenemos las siguientes descomposiciones

$$Y = R(MANB) \oplus N(B) \text{ y } X = R(B) \oplus N(BMAN).$$

Más aún, ya que $BMANB = B$, B es una inversa externa de MAN y por el Teorema 1.5, tenemos que

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} X_1 \\ N(B) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} R(B) \\ Y_1 \end{pmatrix},$$

donde B_{11} es invertible y

$$MAN = \begin{pmatrix} B_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} R(B) \\ Y_1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} X_1 \\ N(B) \end{pmatrix},$$

para algún $A_{22} \in \mathbb{B}(Y_1, N(T))$. Por el Teorema 7.2 (1) (respectivamente (2)), tenemos $R(B) = R(U)$ ($N(B) = N(V)$) y eligiendo $X_1 = R(MANU)$ y $Y_1 = N(VMAN)$ tenemos la representación matricial deseada de MAN y su (M, N) -Weighted (U, V) -inversa. El Teorema 7.1 nos da la regularidad de U y V .

$(\longleftarrow)$ Supongamos que $MAN \in B(X, Y)$ tiene la representación (7.2), donde U y V son regulares con correspondientes inversas internas $Q \in \mathbb{B}(X, Z)$ y $W \in \mathbb{B}(Z, Y)$. Usando descomposiciones adecuadas: $X = R(U) \oplus N(VMAN)$ and $Z = Z_1 \oplus N(U)$, por

el Teorema 1.5, tenemos que

$$U = \begin{pmatrix} U_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} Z_1 \\ N(U) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} R(U) \\ N(VMAN) \end{pmatrix}.$$

y

$$Q = \begin{pmatrix} U_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & Q_{22} \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} R(U) \\ N(VMAN) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} Z_1 \\ N(U) \end{pmatrix}.$$

Análogamente,

$$V = \begin{pmatrix} V_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} R(MANU) \\ N(V) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} R(V) \\ Z_2 \end{pmatrix},$$

y

$$W = \begin{pmatrix} V_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & W_{22} \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} R(V) \\ Z_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} R(MANU) \\ N(V) \end{pmatrix}.$$

Sea

$$B = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} R(MANU) \\ N(V) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} R(U) \\ N(VMAN) \end{pmatrix},$$

entonces

$$UQB = \begin{pmatrix} U_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & Q_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = B.$$

$$BWV = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & W_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = B.$$

$$BMANU = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = U.$$

$$VMANB = \begin{pmatrix} V_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = V.$$

Por lo que, $B = A_{M,N}^{-(2,U,V)}$. □

Conclusiones

El trabajo desarrollado en esta tesis, así como la investigación de estos resultados nuevos tuvo como núcleo el estudio de una clase particular de inversa generalizada en semigrupos, denominada (b, c) -inversa, la cual es la base para extender y definir el concepto de (U, V) -inversa en el contexto de operadores lineales acotados $\mathbb{B}(X, Y)$. Es importante notar que, en este contexto, $\mathbb{B}(X, Y)$ no forma un semigrupo bajo la composición usual de funciones, lo que hace que el concepto de (U, V) -inversa represente una generalización más amplia del concepto de (b, c) -inversa. De hecho, la (U, V) -inversa puede entenderse como un marco general que engloba numerosas inversas generalizadas ampliamente conocidas, tales como la inversa de Moore-Penrose, la inversa de Drazin, la inversa de Bott-Duffin, la grupo-inversa y la inversa con rango y núcleo prescrito, entre otras, mediante elecciones adecuadas de los operadores U y V .

Para cada una de estas inversas previamente mencionadas, se han estudiado sus representaciones matriciales y diversas propiedades relevantes en la teoría de operadores. Desde esta perspectiva, se puede afirmar que al analizar las propiedades de la (U, V) -inversa estamos también explorando propiedades comunes a todas las demás inversas que este concepto generaliza. Esto permite no solo la identificación de características compartidas, sino también la posibilidad de reconocer aquellos aspectos fundamentales que subyacen en las distintas definiciones de inversas generalizadas y que, en esencia, se unifican bajo el concepto de (U, V) -inversa.

Además, el concepto de (U, V) -inversa abre nuevas posibilidades en el estudio de inversas generalizadas para operadores lineales acotados, proponiendo generalizaciones que no han sido previamente consideradas en la literatura. Esta perspectiva sugiere que

la (U, V) -inversa podría proporcionar herramientas novedosas o incluso más eficientes para abordar ciertos tipos de problemas matemáticos o aplicaciones prácticas en donde otras inversas, aunque útiles, presentan limitaciones o carecen de suficiente generalidad.

Uno de los aspectos estudiados en este trabajo fue la perturbación de las inversas generalizadas bajo clases estables de operadores. Aunque en el desarrollo de esta investigación no logramos encontrar un ejemplo explícito de una clase de operadores que sea estable bajo la clase de operadores (U, V) -invertibles, se caracterizaron a través de representaciones matriciales las condiciones que deben cumplir los operadores que se consideran para perturbar un operador que posee una (U, V) -inversa. Esta caracterización constituye un avance en la comprensión de la estabilidad de la (U, V) -inversa ante perturbaciones, aunque queda abierta la investigación en torno a la identificación de clases específicas de operadores que posean esta estabilidad.

Finalmente, el trabajo aborda también un problema fundamental relacionado con la existencia de la (U, V) -inversa. Se resuelve parcialmente al introducir una relación de equivalencia que facilita la identificación de todos los operadores A tales que A es (U, V) -invertible dados unos operadores específicos U y V . Sin embargo, aún persiste una cuestión abierta: dado un operador A , cómo determinar los operadores U y V tales que A sea (U, V) -invertible. Este problema no solo es fundamental para comprender mejor el alcance y aplicabilidad del concepto de (U, V) -inversa, sino que también abre la puerta a futuras investigaciones que podrían proporcionar métodos constructivos o criterios generales para abordar esta interrogante.

En conclusión, esta tesis no solo amplía el marco teórico de las inversas generalizadas mediante la introducción de la (U, V) -inversa, sino que también deja planteadas preguntas y caminos de exploración adicionales, cuyas respuestas podrían contribuir de manera significativa a la teoría de operadores y sus aplicaciones. La relevancia de estos resultados se encuentra tanto en la generalización de propiedades compartidas entre diversas inversas conocidas como en las nuevas oportunidades que se vislumbran para el estudio de operadores lineales acotados a través del concepto de (U, V) -inversa.

Bibliografía

- [1] CHO, M., KANTÚN-MOTIEL, G. (2013) *Commuting outer inverses*, Advances in Linear Algebra & Matrix Theory 3 (4), 69-72.
- [2] DJORDJEVIĆ, D.S. Y RAKOČEVIĆ, V. (2008) *Lectures on Generalized Inverses*, Faculty of Sciences and Mathematics, University of Niš, Niš.
- [3] DRAZIN, M.P. (2012) *A class of outer generalized inverses*, Linear Algebra and its Applications, Volume 436, 1909-1923.
- [4] DRAZIN, M.P. (2016) *Left and right generalized inverses*, Linear Algebra and its Applications, Volume 510 64-78.
- [5] KANTÚN-MONTIEL, G. (2014) *Outer generalized inverses with prescribed ideals*, Linear and Multilinear Algebra 62 (9), 1187-1196.
- [6] KANTÚN-MONTIEL, G., MEZA-MUÑOZ, M., DJORDJEVIC S., (2025) *Fredholm Operators and (U, V) -inverses in Banach Spaces*, aceptado para publicación en Advances in Linear Algebra & Matrix Theory.
- [7] KUBRUSLY, C. S. (2011) *Elements of operator theory*, Boston: Birkhäuser.
- [8] MOSIĆ, D. (2022) *Weighted G -Outer Inverse of Banach Spaces Operators*. Numerical Functional Analysis and Optimization, 43(5), 558-579.
- [9] KATO, T. (2013) *Perturbation theory for linear operators (Vol. 132)* Springer Science & Business Media.